МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт им. С.П.Королева

П.И.АНТИМОНОВ, Н.М.СИГАЛОВА

# ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
по курсу "Аналитическая геометрия"

Утверждено редакционным
советом института 19 февраля
1971 года

Куйбышев 1971

В гл. 2 § I8 - "Задача о расстоянии от точки до прямой", § I9 - "Задача о расстоянии от точки до плоскости", в гл. 3, § I0, 23, 24, 26, 3I - автор Н.М.Сигалова.
Остальные разделы пособия написаны П.И.Антимоновым.


П.И.АНТИМОНОВ, Н.М.СИГАЛОВА

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ
Учебное пособие
по курсу "Аналитическая геометрия"
Отв. редактор Г.П.Федорченко

Редактор И.С.Колышева
Корректор Н.П.Гордеева

Подписано в печать 3/ХП.I07I г. ЕО 00434. Объем 6,75 п.л.
Тираж 2000 экз. Формат бумаги 60x84 I/I6. Цена 35 коп.
Куйбышевский авиационный институт им. С.П.Королева, г.Куйбышев, ул. Молодогвардейская, I5I.
Областная типография им. Мяги, г. Куйбышев, ул.Венцека, 60.
Заказ № 7897

# ГЛАВА I

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Прямоугольная таблица чисел вида

$$\begin{pmatrix} a_I & в_I & c_I & \dots & к_I \\ a_2 & в_2 & c_2 & \dots & к_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & в_n & c_n & \dots & к_n \end{pmatrix}$$

называется матрицей. Числа $a_I$, $в_I$, $\dots, к_n$ называются элементами матрицы.

Элементы, стоящие в горизонтальных рядах, образуют строки, а в вертикальных – столбцы. Числа строк и столбцов у матрицы могут быть одинаковыми или различными.

### § I. Определители второго порядка

Пусть дана квадратная матрица, содержащая четыре элемента $a_I$, $a_2$, $в_I$, $в_2$:

$$\begin{pmatrix} a_I & в_I \\ a_2 & в_2 \end{pmatrix}. \qquad ( I )$$

Число $a_Iв_2 - a_2в_I$ называется определителем второго порядка, соответствующим матрице (I). Этот определитель обозначается символом $\begin{vmatrix} a_I & в_I \\ a_2 & в_2 \end{vmatrix}$.

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_I & в_I \\ a_2 & в_2 \end{vmatrix} = a_I в_2 - a_2 в_I .$$

Числа $a_I$, $a_2$, $в_I$, $в_2$ называются элементами определителя. Говорят, что элементы $a_I$ и $в_2$ лежат на главной диагонали определителя, $a_2$ и $в_I$ - на побочной.

Итак, определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

## § 2. Определители третьего порядка

Пусть дана квадратная матрица, содержащая девять элементов:

$$\begin{pmatrix} a_I & в_I & c_I \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{pmatrix} . \qquad (2)$$

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице ( 2 ), называется число, обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_I & в_I & c_I \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_I & в_I & c_I \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_I в_2 c_3 + в_I c_2 a_3 + c_I a_2 в_3 - c_I в_2 a_3 - в_I a_2 c_3 - a_I c_2 в_3. \qquad (3)$$

Элементы определителя $a_I$, $в_2$ и $c_3$ образуют главную диагональ, а элементы $a_3$, $в_2$ и $c_I$ - его побочную диагональ.

Представление определителя в виде суммы (3) называется раскрытием его.

## § 3. Свойства определителей

Свойство I. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить столбцами, причем каждую строку заменить столбцом с тем же номером:

$$\begin{vmatrix} a_I & в_I & c_I \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_I & a_2 & a_3 \\ в_I & в_2 & в_3 \\ c_I & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство проводится путем раскрытия определителей.

Свойство 2. Перестановка любых двух параллельных рядов определителя равносильна умножению его на (-I).

Например:

$$\begin{vmatrix} a_I & в_I & c_I \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & в_2 & c_2 \\ a_I & в_I & c_I \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Доказывается это свойство также раскрытием определителей.

Свойство 3. Если определитель имеет два одинаковых параллельных ряда, то он равен нулю.

Доказательство. Пусть в определителе (3) соответствующие элементы I-й и 2-й строк равны, тогда из равенства (4) следует, что

$$2 \cdot \begin{vmatrix} a_I & в_I & c_I \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} a_I & в_I & c_I \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 4. Умножение всех элементов какого-либо ряда определителя на любое число $\alpha$ равносильно умножению определителя на это число $\alpha$. Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ \alpha a_2 & \alpha в_2 & \alpha c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha a_2 & \alpha b_2 & \alpha c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\alpha b_2 c_3 + b_1 \alpha c_2 a_3 + c_1 \alpha a_2 b_3 - c_1 \alpha b_2 a_3 - b_1 \alpha a_2 c_3 - a_1 \alpha c_2 b_3 = \alpha(a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3) = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 5. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Доказательство. Положив в предыдущем свойстве $\alpha = 0$, получим свойство 5.

Свойство 6. Если соответствующие элементы каких-нибудь двух параллельных рядов определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть в определителе (3) элементы двух параллельных рядов пропорциональны, например,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \alpha \neq 0 ,$$

тогда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_2 & \alpha b_2 & \alpha c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Свойство 7. Если каждый элемент $n$ -го столбца или $k$ -й строки определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в $n$ -м столбце, или соответственно в $k$ -й строке, имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой - вторые. Элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же. Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1' + c_1'' \\ a_2 b_2 c_2' + c_2'' \\ a_3 b_3 c_3' + c_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1'' \\ a_2 & b_2 & c_2'' \\ a_3 & b_3 & c_3'' \end{vmatrix}.$$

Это равенство доказывается путем раскрытия определителей, стоящих в обеих частях равенства, и последующим раскрытием скобок полученной левой части.

Свойство 8. Если к элементам некоторого ряда определителя прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на число "к", то величина определителя при этом не изменится. Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Это свойство доказывается с помощью свойств 7 и 3.

Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Очевидно, из элементов этой матрицы можно составить один определитель третьего порядка и девять определителей второго порядка. Эти девять определителей называются минорами соответствующих элементов, например, минором элемента $a_1$ является определитель

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель получен из элементов матрицы (5), если вычеркнуть строку и столбец, на пересечении которых находится элемент $a_1$. Вообще минором, соответствующим некоторому элементу матрицы (5), является определитель, полученный из элементов этой матрицы путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

Алгебраическим дополнением элемента определителя, соответствующим матрице (5), называется минор этого элемента, взятый со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых находится этот элемент, есть число четное, и с противоположным знаком, если это число нечетное.

Алгеброическое дополнение элемента ооозначается прописной буквой того же наименования и с тем же номером, что и буква, которой обозначен сам элемент. Например, алгебраическое дополнение элемента $\alpha_1$ есть

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

а алгебраическое дополнение элемента $a_2$ есть

$$A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

<u>Свойство 9</u>. Определитель равен сумме произведений элементов какого-либо ряда на их алгебраические дополнения.

<u>Доказательство</u>. Пусть имеем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Составим сумму, указанную в свойстве 9, взяв элементы, например, первой строки. Имеем:

$$a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) =$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 = \Delta .$$

## § 4. Линейная комбинация рядов матрицы и определителей

Говорят, что некоторый ряд матрицы или определителя является линейной комбинацией нескольких параллельных ему рядов, если он получается из последних путем сложения соответствующих элементов этих рядов, предварительно умноженных на постоянное для каждого ряда число. Например, у матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & m a_1 + n b_1 \\ a_2 b_2 & m a_2 + n b_2 \\ a_3 b_3 & m a_3 + n b_3 \end{pmatrix}$$

третий столбец является линейной комбинацией первых двух столбцов.

# ГЛАВА II

# ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

## § I. Отрезки

Понятие отрезка известно из элементарной геометрии. Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками.

Каждому отрезку ставится в соответствие положительное число, называемое длиной отрезка и получающееся из отношения отрезков. Если даны два отрезка прямой АВ и СД, то отношением этих отрезков называется вещественное число $\lambda$, показывающее сколько раз отрезок СД укладывается на отрезке АВ. При этом, если отрезок СД принять за единицу измерения длин, то $\lambda$ есть длина отрезка АВ.

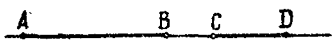



Рис. I.

## § 2. Понятие о векторах и скалярах

В математике и физике приходится иметь дело с величинами двух родов: одни из величин связаны с понятием о направлении в пространстве, другие же имеют чисто числовой характер и не связаны с понятием о направлении.

Величина называется скалярной, если при выбранной единице меры она характеризуется одним числом.

Наиболее типичным скаляром является отвлеченное число. Можно еще отметить такие скаляры: температура, масса, плотность, энергия.

Величина называется векторной, если кроме измеряющего ее в определенных единицах меры числа она характеризуется еще своим направлением в пространстве.

Простейшим вектором является направленный отрезок, т.е. такой отрезок, для которого одна ограничивающая точка считается началом, а другая - концом; на чертеже направление указывается стрелкой.

Другими примерами векторов являются: перемещение точки, ускорение, сила. Каждому такому вектору можно сопоставить прямолинейный отрезок, имеющий направление рассматриваемого вектора и длину, равную численному значению вектора.

Численное значение вектора называется модулем или длиной вектора.

Вектор с началом A и концом B обозначается через $\overline{AB}$ или одной буквой с чертой над ней: $\bar{a}$. Точка A называется еще точкой приложения вектора $\overline{AB}$. Модуль вектора AB обозначается через $|\overline{AB}|$ или AB.

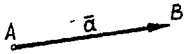



Рис. 2.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым вектором. Длина нулевого вектора равна нулю, а направление неопределенно.

Два вектора называются равными, если их модули равны и они одинаково направлены, то есть расположены на параллельных прямых (или на одной прямой), направлены в одну сторону и длины их равны между собой.

Два вектора называются противоположными, если они имеют равные длины и противоположные направления.

## § 3. Векторы на прямой

Пусть даны два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{\text{СД}}$ на прямой. Отношением этих векторов $\frac{\overline{AB}}{\overline{\text{СД}}}$ называется число $\lambda$, абсолютная величина которого равна отношению модулей векторов: $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{\text{СД}}|} = |\lambda|$, а знак положителен, если векторы одинаково направлены, и отрицателен, если их направления про-


Рис. 3.

тивоположны, как на чертеже 3.

Два равных вектора имеют отношение, равное единице.

Отношение противоположных векторов равно ( - I ).

Если один из двух взаимно противоположных векторов обозначен через $\bar{a}$, то другой обозначается через ( $-\bar{a}$ ). Очевидно, $-(-\bar{a})=\bar{a}$.

Отношение нулевого вектора к любому ненулевому вектору равно нулю, а обратное отношение не определено.

Таким образом, $\frac{\overline{AB}}{\overline{СД}} = \lambda \quad (\overline{СД} \neq 0)$.

## § 4. Ось. Алгебраическое значение вектора на оси

Возьмем на прямой точку O и вектор $\overline{OE} = \bar{e}$, длину которого примем за единицу.

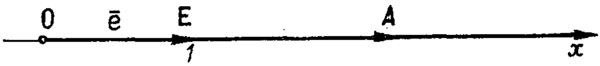



Рис. 4.

Рассмотрим отношение произвольного вектора $\overline{OA}$, лежащего на данной прямой, к вектору $\vec{e}$ : $\frac{\overline{OA}}{\bar{e}} = x$ .

Очевидно, что абсолютная величина числа $x$ показывает, сколько раз отрезок OE укладывается на отрезке OA, то есть равна длине отрезка OA - модулю вектора $\overline{OA}$.

Число $x$ положительно, если направления векторов совпадают, и отрицательно, если направления противоположны.

Рассмотрим всевозможные векторы на данной прямой с точкой приложения O и их отношения к единичному вектору $\bar{e}$ . Поставим в соответствие точкам прямой (концам этих векторов) полученные числа и назовем направление прямой, совпадающее с направлением вектора $\bar{e}$ положительным, а противоположное - отрицательным. Такая прямая называется числовой осью, а вектор $\bar{e}$ - единичным вектором этой оси.

Точка приложения векторов O называется началом отсчета.

Число $x = \frac{\overline{OA}}{\bar{e}}$ называется алгебраическим значением вектора $\overline{OA}$ на данной оси и равно длине вектора $\overline{OA}$, взятой со знаком (+), если вектор $\overline{OA}$ направлен так же, как и ось, - и со знаком (-), если он направлен противоположно оси.

Алгебраическое значение вектора $\overline{AB}$ будем обозначать через (AB).

Для алгебраических значений векторов данной оси справедливы следующие утверждения:

1) два вектора на данной оси равны тогда и только тогда, когда равны их алгебраические значения;

2) алгебраические значения противоположных векторов суть противоположные числа:

$$(AB) = -(BA)$$

или

$$(AB) + (BA) = 0\,; \qquad (1)$$

3) алгебраическое значение единичного вектора равно 1;

4) отношение двух векторов на оси равно отношению их алгебраических значений.

В самом деле, легко проверяется равенство

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{\bar{e}}}{\frac{\overline{CD}}{\bar{e}}}\,; \qquad (2)$$

5) при любом расположении точек A, B и C на оси имеет место числовое равенство

$$(AB) + (BC) = (AC). \qquad (3)$$

В самом деле, если две из трех точек A, B, C совпадают, то равенство (3) сводится к тождеству (AC) = (AC) при A = B и B = C или к тождеству (1): (AB) + (BA) = 0 при A = C (равенство A = B означает, что точки A и B совпадают).

Пусть среди точек A, B, C нет совпадающих. Тогда одна из них лежит между двумя другими.

Если B лежит между A и C, то $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{AC}|$ или

$|(AB)| + |(BC)| = |(AC)|$ и векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ имеют одно и тоже направ-

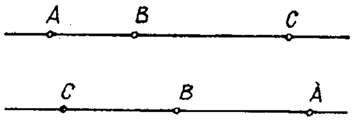



Рис. 5.

ление (рис. 5), а их алгебраические значения имеют один и тот же знак. Следовательно, равенство (3) верно.

Если же C лежит между A и B, то по доказанному (AC) + (CB) = (AB), откуда (AB)-(CB)=(AC). Но (BC)=-(CB), следовательно, (AB) + (BC) = (AC) и в этом случае.

Аналогично проверяется равенство в случае, когда A находится между B и C.

В заключение отметим, что между точками числовой оси и множеством вещественных чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие.

## § 5. Система координат на прямой

Координатами точки называются числа, определяющие положение точки на плоскости, поверхности, в пространстве и так далее.

Пусть на прямой построена числовая ось.

Определение. Координатной точки М числовой оси называется алгебраическое значение вектора $\overline{OM}$, то есть число, поставленное в соответствие точке М числовой оси.

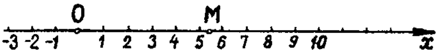



Рис. 6.

Числовая ось называется координатной осью или одномерным пространством.

Тот факт, что (рис. 6) точка М имеет координату $5\frac{1}{2}$ записывается так: М $(5\frac{1}{7})$.

## § 6. Система координат на плоскости

Для определения положения точки на плоскости на ней проводят две взаимно перпендикулярные прямые, на которых строят числовые оси, причем за начало отсчета принимают точку пересечения прямых. Это - оси координат. Одну из них называют осью абсцисс (на рис. ось OX),

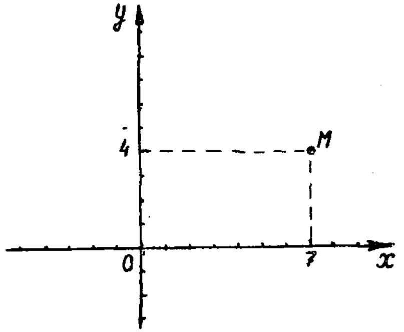



Рис. 7.

а другую - осью ординат (на рис. - ось ОУ). Точка О их пересечения называется началом координат. Положительные направления на осях координат обычно выбирают так, чтобы положительный луч ОУ оси ординат получался из положительного луча ОХ оси абсцисс поворотом на прямой угол в положительном направлении.

Такая плоскость называется координатной плоскостью или двухмерным пространством.

Для отыскания координат точки М двухмерного пространства нужно опустить из этой точки перпендикуляры на координатные оси.

Точки пересечения этих перпендикуляров с осями дадут абсциссу и ординату точки М. На чертеже точка М имеет абсциссу 7 и ординату 4. Этот факт записывается так: М (5; 3,5).

Обратно, если по данным координатам требуется найти точку плоскости, то нужно найти на осях координат точки, соответствующие абсциссе и ординате искомой точки, затем восстановить перпендикуляры из этих точек соответственно к осям абсцисс и ординат. Перпендикуляры пересекутся в единственной точке, которая и является искомой.

Таким образом, точки координатной плоскости и всевозможные пары чисел находятся во взаимно однозначном соответствии.

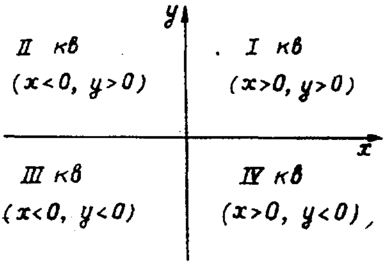



Рис. 8.

Оси координат делят плоскость на четыре части, называемые квадрантами или координатными углами в соответствии со схемой, указанной на чертеже.

## § 7. Система координат в пространстве

Для определения положения точки в пространстве в нем проводят три взаимно перпендикулярные плоскости и на линиях пересечения этих плоскостей строят числовые оси, приняв за начало отсчета точку пересечения плоскостей. Это - оси координат. Одну из них называют осью абсцисс (ось OX), вторую - осью ординат (ось OY) и третью - осью аппликат (ось OZ).

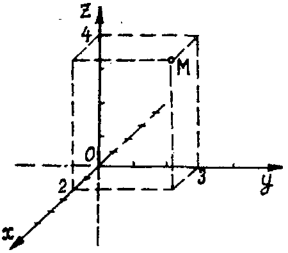



Рис. 9.

Положительные направления осей координат обычно выбирают так, чтобы, если смотреть со стороны положительной полуоси OZ, положительная полуось OY получалась из положительной полуоси OX поворотом на прямой угол в положительном направлении. Такая система координат в пространстве называется правой в отличие от левой, в которой выбирается противоположное направление оси OZ.

Каждая пара координатных осей лежит в координатной плоскости. Всего получается три координатные плоскости. Это суть плоскости XOY, YOZ и ZOX.

Пространство с принятыми выше осями координат называется координатным или трехмерным пространством.

Для отыскания координат точки M трехмерного пространства через эту точку проводят три плоскости, перпендикулярные осям координат. Точки пересечения этих плоскостей с осями дадут соответственно абсциссу, ординату и аппликату данной точки.

На чертеже точка M имеет абсциссу 2, ординату 3 и аппликату 4. Этот факт записывается так: M (2; 3; 4).

Обратно, если даны координаты пространственной точки, то для нахождения этой точки нужно на осях координат найти точки, соответствующие абсциссе, ординате и аппликате искомой точки. Через эти точки проводят плоскости, перпендикулярные соответствующим осям координат. Три взаимно перпендикулярные плоскости пересекаются в одной точке, которая в нашем случае и будет искомой.

Введенные координаты называются прямоугольными или декартовыми по имени французского математика и философа Рене Декарта (1596-1650). Они были введены в 1637 г.

## § 8. Сложение векторов

**Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$,** начало которого находится в начале вектора $\bar{a}$, а конец – в конце вектора $\bar{в}$, если начало вектора $\bar{в}$ находится в конце вектора $\bar{a}$ (правило треугольника).

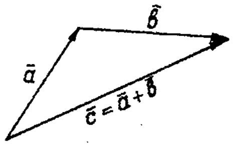



Рис. 10.

Сумма обозначается через $\bar{c}=\bar{a}+\bar{в}$. Суммой векторов $\bar{a}, \bar{в}, \ldots, \bar{к}$ называется такой вектор $\bar{u}$, начало которого находится в начале первого вектора $\bar{a}$, а конец – в конце последнего вектора $\bar{к}$, при условии, что начало каждого последующего вектора находится в конце предыдущего. Сумма $n$ векторов обозначается через

$$\bar{u}=\bar{a}+\bar{в}+\ldots+\bar{к}\ .$$

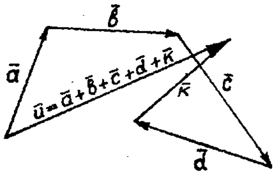



Рис. 11.

<u>Замечание</u>. Сумму двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$ можно рассматривать еще и как диагональ параллелограмма $\overline{AC}$, построенного на данных векторах, приведенных к общему началу. Сумма векторов обладает следующими свойствами:

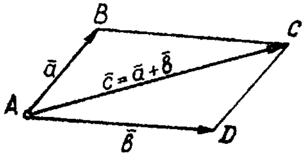



Рис. 12.

1) $\bar{0}+\bar{a}=\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$, где $\bar{0}$ есть нулевой вектор;

2) $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$;

3) $\bar{a}+\bar{в}=\bar{в}+\bar{a}$ (свойство переместительности). Это следует из того, что (рис.12)

$$\Delta ABC = \Delta AДC$$

и

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AД}+\overline{ДC}=\overline{AC}$$

(по определению);

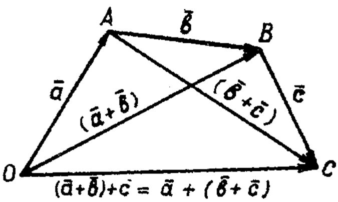



Рис. 13.

4) $(\bar{a}+\bar{в})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{в}+\bar{c})$ (свойство сочетательности). Докажем это (рис. 13).

$$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC}\ ,$$

$$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=\overline{OA}+(\overline{AB}+\overline{BC})=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}\ .$$

Следовательно, $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ .

Методом математической индукции можно доказать третье и четвертое свойства для любого количества слагаемых.

Разностью $\bar{a}-\bar{b}$ двух векторов называется такой третий вектор $\bar{c}$ , что сумма векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равна $\bar{a}$:

$$\bar{a}-\bar{b}=\bar{c},$$

если

$$\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}.$$

Из треугольника ABC (рис. I4) ясно, что

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC},$$

следовательно,

$$\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$$

или

$$\bar{a}-\bar{b}=\bar{c}=\overline{BC}\ ,$$

то есть, чтобы построить разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, нужно отнести их к общему началу, тогда вектор $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$ будет иметь начало в конце вектора $\bar{b}$ и конец – в конце вектора $\bar{a}$.

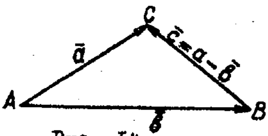


Рис. I4.

Из этого же треугольника ясно, что

$$\overline{BA}+\overline{AC}=\overline{BC}$$

или

$$(-\bar{b})+\bar{a}=\bar{a}+(-\bar{b})=\bar{c}\ ,$$

то есть

$$\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})\ .$$

<u>Замечание.</u> В параллелограмме АВСД (рис. I2)

$$\overline{AB} - \overline{AД} = \overline{ДA}.$$

Таким образом, сумма и разность двух векторов есть две диагонали - векторы параллелограмма, построенного на данных векторах как на сторонах.

## § 9. Умножение вектора на число; коллинеарные и компланарные векторы

Произведением вектора $\bar{a}$ на число $\lambda$ называется такой вектор $\bar{b}$, отношение которого к вектору $\bar{a}$ равно $\lambda$ :

$$\bar{b} = \lambda \bar{a} ,$$

если

$$\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \lambda .$$

Из определения отношения векторов ясно, что в этом случае векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ должны располагаться на одной прямой или на параллельных прямых.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются коллинеарными, если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой. На рис. I5 векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ - коллинеарные векторы. Поскольку

$$|\lambda| = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|} ,$$

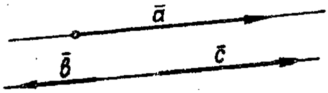



Рис. I5.

то вектор $\bar{b} = \lambda \bar{a}$ по модулю равен произведению абсолютной величины числа $\lambda$ на модуль вектора $\bar{a}$:

$$|\bar{b}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}| ,$$

а его направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$ при $\lambda > 0$ и противоположно направлению вектора $\bar{a}$ при $\lambda < 0$.
В случае, если $\lambda = 0$, то и $\lambda \bar{a} = \bar{0}$.

Итак, если $\bar{a}$ и $\bar{в}$ – два коллинеарных вектора, то между ними устанавливается соотношение

$$\bar{в} = \lambda \cdot \bar{a}.$$

Это равенство называется условием коллинеарности двух векторов.

Если $|\bar{в}^{\circ}| = 1$ и $\frac{\bar{в}}{\bar{в}^{\circ}} = \lambda > 0$, то $|\bar{в}| = \lambda$ и $\bar{в} = \lambda \bar{в}^{\circ}$

В этом случае говорят, что $\bar{в}^{\circ}$ есть единичный вектор направления вектора $\bar{в}$. Вектор $\bar{в}$ получается умножением вектора $\bar{в}^{\circ}$ на длину вектора $\bar{в}$:

$$\bar{в} = |\bar{в}| \cdot \bar{в}^{\circ}$$

<u>Замечание 1.</u> Так как $\bar{0} = 0 \cdot \bar{a}$, где $\bar{a}$ – произвольный вектор, то нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

<u>Замечание 2.</u> Так как $\bar{a} = 1 \cdot \bar{a}$, то каждый вектор коллинеарен самому себе.

Несколько векторов называются компланарными, если они, будучи приложенными к одной точке, оказываются лежащими в одной плоскости. Очевидно, что всякие два вектора компланарны.

Если даны два произвольных вектора $\bar{a}$ и $\bar{в}$, то вектор $\bar{c} = m\bar{a} + n\bar{в}$ компланарен векторам $\bar{a}$ и $\bar{в}$. Это следует из того, что диагональ параллелограмма лежит в плоскости этого параллелограмма. (Нулевой вектор компланарен любым двум векторам).

Из последнего равенства вытекает еще и такое равенство:

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{в} + \gamma\bar{c} = \bar{0} \left(m = \frac{\alpha}{\gamma};\ \ n = -\frac{\beta}{\gamma};\ \ \gamma \neq 0\right),$$

которое является условием компланарности трех векторов.

<u>Задача</u>. Даны три компланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{в}$ и $\bar{c}$. Разложить вектор $\bar{a}$ по двум векторам $\bar{в}$ и $\bar{c}$.

<u>Решение</u>: Проведем через концы вектора $\bar{a}$ (А и В) прямые, параллельные векторам $\bar{в}$ и $\bar{c}$. Если векторы $\bar{в}$ и $\bar{c}$ не коллинеарны, то эти прямые пересекутся в точке С. Векторы $\overline{AC}$ и $\bar{в}$ коллинеарны, следовательно, найдется единственное число $m$, такое, что будет справедливо равенство $\overline{AC} = m\bar{в}$. Аналогично этому найдется число $n$, такое, что $\overline{CB} = n\bar{c}$. Но тогда будет справедливо равенство

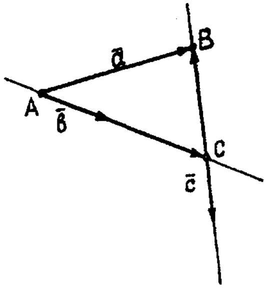



Рис. I6.

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

или

$$\bar{a} = m\bar{в} + n\bar{c}\ .$$

Если векторы $\bar{в}$ и $\bar{c}$ коллинеарны, а вектор $\bar{a}$ им не коллинеарен, то задача не имеет решения. Если все три вектора коллинеарны, то задача имеет бесчисленное множество решений.

## § I0. Проекция вектора на ось. Теоремы о проекциях

Рассмотрим в пространстве вектор $\overline{AB}$ и ось OX. Проведем через точки A и B (рис. I7) плоскости, перпендикулярные оси OX. Получим точки пересечения $A_1$ и $B_1$.

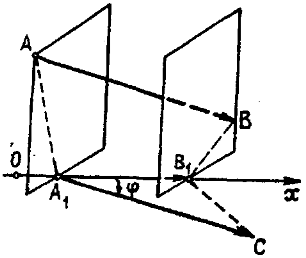



Рис. I7.

Определение I. Вектор $\overline{A_1 B_1}$, где $A_1$ и $B_1$ есть проекции соответственно начала и конца вектора AB на ось OX, называется геометрической проекцией вектора AB на эту ось.

Определение 2. Алгебраическое значение вектора $\overline{A_1 B_1}$ на оси OX называется проекцией вектора $\overline{AB}$ на эту ось:

$$Пр_{ox}\overline{AB} = (A_1 B_1).$$

Определение 3. Угол $\varphi$, на который нужно кратчайшим путем повернуть полупрямую $A_IX$ до совмещения ее с полупрямой, несущей вектор $\overline{A_IC}$, равный $\overline{AB}$, называется углом между вектором $\overline{AB}$ и осью OX. Этот угол принимает значение от 0 до П.

Перечислим основные свойства проекций.

I) Проекция вектора равна нулю тогда и только тогда, когда данный вектор перпендикулярен оси, на которую происходит проектирование.

2) Проекции равных векторов равны между собой.

3) Проекция суммы двух (или более) векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на ту же ось.

Из рис. I8 видно, что

$$Пр_{ox}(\overline{AB}+\overline{BC}) = Пр_{ox}\overline{AC} = (A_IC_I),$$

а $Пр_{ox}\overline{AB} + Пр_{ox}\overline{BC} = (A_IB_I) + (B_IC_I)$.

По свойству 5 алгебраических значений векторов следует, что для любых трех точек $A_1$, $B_1$ и $C_1$ одной и той же оси справедливо равенство

$$(A_IB_I) + (B_IC_I) = (A_IC_I),$$

следовательно,

$$Пр_{ox}(\overline{AB}+\overline{BC}) = Пр_{ox}\overline{AB} + Пр_{ox}\overline{BC}.$$

Методом математической индукции можно доказать эту теорему для любого количества слагаемых.

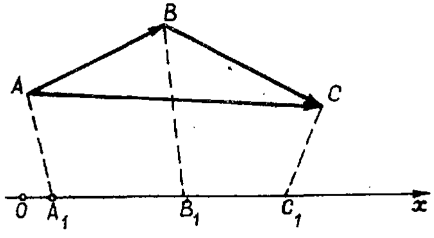



Рис. I8.

4) При умножении вектора на число его проекция умножается на то же число:

$$Пр_{ox}(m\bar{a}) = m\,Пр_{ox}\bar{a} \quad .$$

Доказательство:

а) $m>0$. Пусть $\overline{AB} = m\bar{a}$,

тогда $\dfrac{\overline{AB}}{\bar{a}} = \dfrac{(AB)}{(a)} = \dfrac{|\overline{AB}|}{|\bar{a}|} = \dfrac{A_1D}{A_1E}$

откуда $= \dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = m$,

$$(A_1B_1) = m(A_1C_1),$$

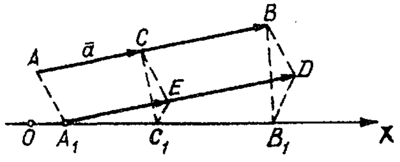



Рис. I9.

то есть

$$Пр_{ox}\overline{AB} = m\,Пр_{ox}\overline{AC}$$

или

$$Пр_{ox}(m\bar{a}) = m\,Пр_{ox}\bar{a};$$

б) $m < 0$ . В этом случае $m\bar{a} = \overline{BA} = -\overline{AB}$ ,

тогда $\frac{\overline{BA}}{\bar{a}} = \frac{-\overline{AB}}{\bar{a}} = -\frac{\overline{AB}}{\bar{a}} = -\frac{(A_1B_1)}{(A_1C_1)} = \frac{(B_1A_1)}{(A_1C_1)} = m$ ,

откуда $(B_1A_1) = m(A_1C_1)$ ,

то есть $\text{Пр}_{ox}\overline{BA} = m\,\text{Пр}_{ox}\overline{AC}$

или $\text{Пр}_{ox}(m\bar{a}) = m\,\text{Пр}_{ox}\bar{a}$ ;

в) $m = 0$. $\overline{AB} = m\bar{a}$ есть нулевой вектор, проекция которого на любую ось есть число 0, но и $\text{Пр}_{ox}\bar{a} = 0$.

Итак, во всех трех случаях теорема доказана.

5) Проекция вектора на ось равна произведению модуля вектора на косинус угла $\varphi$ между этим вектором и осью:

$$\text{Пр}_{ox}\overline{AB} = |\overline{AB}|\cdot\cos\varphi \quad .$$

Доказательство. Рассмотрим три случая:

а) $\varphi$ - острый угол (рис. I7). Из треугольника $CA_I\,B_I$ найдем:

$$\text{Пр}_{ox}\overline{AB} = (A_1B_1) = |\overline{A_1B_1}| = |\overline{A_1C}|\cdot\cos\varphi = |\overline{AB}|\cdot\cos\varphi \;;$$

б) $\varphi$ - тупой угол (рис. 20). Из треугольника $CA_I\,B_I$ следует, что

$$\text{Пр}_{ox}\overline{AB} = (A_1B_1) = -(B_1A_1) = -\left[|\overline{A_1C}|\cdot\cos(\pi-\varphi)\right] =$$
$$= |\overline{A_1C_1}|\cdot\cos\varphi = |\overline{AB}|\cdot\cos\varphi .;$$

в) $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Вектор AB перпендикулярен оси OX и $\text{Пр}_{ox}$ AB = 0, но и $|\overline{AB}|\cdot\cos\varphi = |\overline{AB}|\cdot 0 = 0$ ,

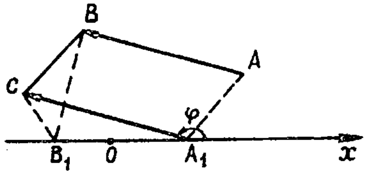



Рис. 20.

следовательно

$$Пр_{ox}\overline{AB}=|\overline{AB}|\cdot\cos\varphi .$$

и в этом случае. Теорема доказана.

6) Проекция вектора на координатную ось равна разности координат конца и начала этого вектора.

Доказательство. Из рис. I9.

$$Пр_{ox}\overline{AB}=(A_1B_1)=(A_1O)+(OB_1)=(OB_1)-(OA_1)=x_B-x_A .$$

## § II. Разложение вектора по координатному базису в пространстве

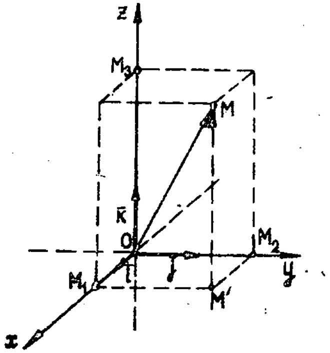



Рис. 2I.

Назовем единичные векторы осей координат OX, OY и OZ ортами или базисными векторами и обозначим соответственно через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ .

Тройка векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называется базисом множества всех векторов, лежащих в пространстве.

Пусть M (x, y, z ) - точка в пространстве.

Вектор $\overline{OM}$, проведенный из начала координат в точку M называется радиусом - вектором этой точки и обозначается через $\bar{r}$ .

Из рис. 2I ясно, что

$$\overline{OM_1}+\overline{M_1M'}+\overline{M'M}=\overline{OM} ,$$

$$\text{но} \quad \overline{M_1M'}=\overline{OM_2} \quad \text{и} \quad \overline{M'M}=\overline{OM_3} ,$$

следовательно, $\overline{OM}=\overline{OM}_1+\overline{OM}_2+\overline{OM}_3$ .

Поскольку
$$\overline{OM}=\bar{r}, \quad \overline{OM}_1=(OM_1)\cdot\bar{i}, \quad \overline{OM}_2=(OM_2)\cdot\bar{j}, \quad \overline{OM}_3=(OM_3)\cdot\bar{k},$$
то
$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k},$$
так как
$$(OM_1)=x; \quad (OM_2)=y, \quad (OM_3)=z$$
(координаты точки M) .

Представление вектора через единичные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называется разложением этого вектора по ортам или базисным векторам. При этом векторы $x\cdot\bar{i}$ , $y\cdot\bar{j}$ и $z\cdot\bar{k}$ называются компонентами данного вектора.

Пусть теперь имеем произвольный вектор $\bar{a}$, проекции которого на оси координат суть $x$, $y$, $z$ .

Построим радиус - вектор, равный данному вектору, тогда его конец будет находиться в точке $M(x, y, z)$ и, следовательно.
$$\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\cdot\bar{k} .$$

Вектор $\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ обозначается еще так:
$$\bar{a}=\{x, y, z\}$$
или
$$\bar{a}\{x, y, z\} .$$

## § 12. Длина вектора, заданного в координатном пространстве своими проекциями. Направляющие косинусы вектора

Пусть задан вектор $\bar{a}=\{x, y, z\}$ , тогда его можно считать диагональю прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $x\bar{i}$, $y\bar{j}$, $z\bar{k}$ (рис. 21). Следовательно,
$$|\bar{a}|^2=|x\bar{i}|^2+|y\bar{j}|^2+|z\bar{k}|^2=|x|^2+|y|^2+|z|^2=x^2+y^2+z^2,$$
откуда модуль вектора $\bar{a}$, равен $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ .

Найдем направление вектора $\bar{a}$, то есть углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, которые он образует с осями координат.

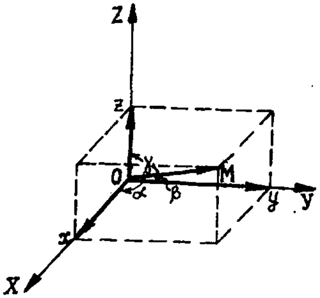



Рис. 22.

По формуле

$$Пр_t \bar{AB} = |\bar{AB}| \cdot \cos\varphi \quad ,$$

где $t$ – ось, на которую происходит проектирование, а $\varphi$ – угол между этой осью и вектором, у нас получается:

$$x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha \; ,$$
$$y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta \; ,$$
$$z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma \; ,$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – углы, которые образует данный вектор с осями OX, OY, OZ.

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} \; , \quad \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} \; , \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|} \; .$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами данного вектора.

Углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ должны удовлетворять условию

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{|\bar{a}|^2} + \frac{y^2}{|\bar{a}|^2} + \frac{z^2}{|\bar{a}|^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{|\bar{a}|^2} = \frac{|\bar{a}|^2}{|\bar{a}|^2} = 1 ,$$

то есть

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad .$$

Замечание. В двухмерном пространстве XOY вектор имеет две компоненты $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}$ .

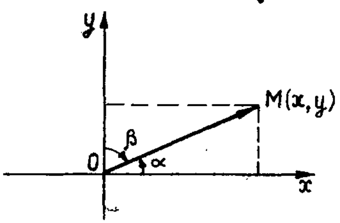



Рис. 23.

В этом случае

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} \; ,$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \sin\alpha \; ,$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

или $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ .

Эти формулы получаются из формул для трехмерного пространства, если положить $z = 0$.

## § 13. Действия над векторами, заданными своими проекциями

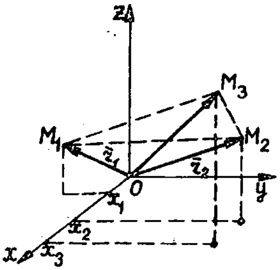



Рис. 24.

Пусть имеем два вектора

$\bar{r}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ и $\bar{r}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$,

тогда

1) $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 = \overline{OM}_3 =$
$= (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k}$ .

В самом деле, рассмотрим, например, проекцию вектора $\overline{OM}_3$ на ось OX:

$$Пр_{OX}\overline{OM}_3 = Пр_{OX}\overline{OM}_1 + Пр_{OX}\overline{OM}_2 = x_1 + x_2 .$$

2) $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{r}_2 + (-\bar{r}_1) = (x_2 - x_1)\cdot\bar{i} + (y_2 - y_1)\cdot\bar{j} + (z_2 - z_1)\cdot\bar{k}$ .

3) По теореме 4 о проекциях следует, что если дан вектор $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ и число $m$ , то

$$m\bar{a} = mx_1\cdot\bar{i} + my_1\cdot\bar{j} + mz_1\bar{k} .$$

Поскольку векторы $\bar{a}$ и $\bar{b} = m\bar{a}$ коллинеарны, то равенства

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = (m)$$

являются условием коллинеарности векторов

$\bar{a} = x_1\cdot\bar{i} + y_1\cdot\bar{j} + z_1\cdot\bar{k}$ и $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + x_2\bar{k}$

где $x_2 = mx_1$ , $y_2 = my_1$ , $z_2 = mz_1$ .

## § 14. Расстояние между двумя точками в координатном пространстве

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

(рис. 24), тогда

$$\overline{M_I M_2} = (x_2 - x_1)\cdot\bar{i} + (y_2 - y_1)\cdot\bar{j} + (z_2 - z_1)\cdot\bar{k} \quad .$$

Расстояние между точками $M_I$ и $M_2$ равно модулю вектора $\overline{M_I M_2}$:

$$d = |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad .$$

Замечание. В двухмерном пространстве $\bar{r}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ и $\bar{r}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$, и так как

$$d = |\overline{M_1 M_2}| = |\bar{r}_2 - \bar{r}_1| \quad ,$$

то

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad .$$

## § 15. Деление отрезка в данном отношении

Пусть на оси даны три точки A, B и C. Говорят, что точка B делит отрезок AC в отношении $\lambda$, если $\dfrac{(AB)}{(BC)} = \lambda$. Если точка B лежит между A и C, то $\lambda > 0$, т.к. векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ направлены в одну сторону.


Рис. 25.

Если же B находится вне отрезка AC, то $\lambda < 0$, т.к. векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ имеют противоположные направления.

$\lambda = 0$, если B совпадает с A, и $\lambda$ не существует, если B совпадает с C.

Если точки A, B и C находятся в координатном пространстве, то можно найти координаты точки B, зная координаты точек A и C и отношение $\lambda$ в котором точка B делит отрезок AC.

Пусть $\dfrac{(AB)}{(BC)} = \lambda$ .

Отсюда $\overline{AB}/\overline{BC} = \lambda$ или $\overline{AB} = \lambda\overline{BC}$ .

Из рис. 26 видно, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ легко выражаются через радиусы-векторы точек A, B, C:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} \quad \text{и} \quad \overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}.$$

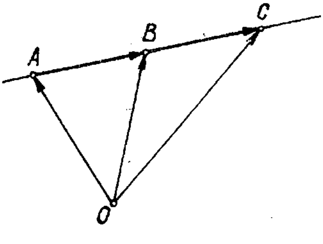



Рис. 26.

Следовательно, $\overline{OB} - \overline{OA} = \lambda(\overline{OC} - \overline{OB})$, откуда

$$\overline{OB} = \frac{\overline{OA} + \lambda \overline{OC}}{1+\lambda} .$$

Из этого векторного равенства вытекают три координатные равенства:

$$x_B = \frac{x_A + \lambda x_C}{1+\lambda}, \quad y_B = \frac{y_A + \lambda y_C}{1+\lambda}, \quad z_B = \frac{z_A + \lambda z_C}{1+\lambda} .$$

Для середины отрезка $\lambda = 1$ и

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_B = \frac{y_A + y_C}{2}, \quad z_B = \frac{z_A + z_C}{2} .$$

<u>Пример</u>. Найти центр тяжести C системы двух материальных точек $m_A$ и $m_B$.

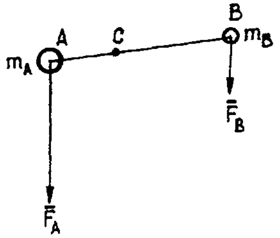



Рис. 27.

Из условия

$$\bar{F}_A \cdot AC = \bar{F}_B \cdot CB$$

следует, что

$$m_A \cdot (AC) = m_B (CB) ,$$

откуда

$$\lambda_C = \frac{(AC)}{(CB)} = \frac{m_B}{m_A} .$$

Следовательно:

$$x_C = \frac{x_A + \frac{m_B}{m_A} \cdot x_B}{1 + \frac{m_B}{m_A}}, \quad y_C = \frac{y_A + \frac{m_B}{m_A} \cdot y_B}{1 + \frac{m_B}{m_A}}, \quad z_C = \frac{z_A + \frac{m_B}{m_A} \cdot z_B}{1 + \frac{m_B}{m_A}} .$$

Таким образом,

$$x_C = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}, \quad y_C = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B}, \quad z_C = \frac{m_A z_A + m_B z_B}{m_A + m_B} .$$

Методом математической индукции можно доказать аналогичные формулы для системы $n$ материальных точек ($m_A, m_B, \ldots, m_n$):

$$x = \frac{m_A x_A + m_B x_B + \ldots + m_n x_n}{m_A + m_B + \ldots + m_n},$$

$$y = \frac{m_A y_A + m_B y_B + \ldots + m_n y_n}{m_A + m_B + \ldots + m_n},$$

$$z = \frac{m_A z_A + m_B z_B + \ldots + m_n z_n}{m_A + m_B + \ldots + m_n}.$$

## § 16. Скалярное произведение двух векторов

Определение 1. Углом $\varphi$ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется наименьший угол между несущими их полупрямыми. Этот угол обозначается еще так:

$$\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$$

и принимает значения от 0 до П.

Определение 2. Скалярным произведением двух векторов называется произведение модулей этих векторов и косинуса угла между ними.

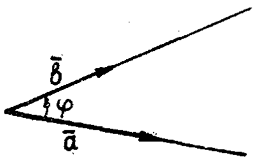



Рис. 28.

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается через $(\bar{a}, \bar{b})$ и через $\bar{a} \cdot \bar{b}$

Следовательно,

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi .$$

Поскольку

$$|\bar{b}| \cdot \cos\varphi = \text{Пр}_{\bar{a}} \bar{b}, \quad |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = \text{Пр}_{\bar{b}} \bar{a},$$

то $$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot \text{Пр}_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{Пр}_{\bar{b}} \bar{a},$$

то есть скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из векторов на проекцию другого на ось направления первого вектора (или: равно модулю одного из векторов, умноженному на проекцию другого вектора на ось направления первого вектора).

В механике скалярное произведение силы $\overline{F}$ и перемещения точки приложения $\overline{S}$ дает работу, производимую силой $\overline{F}$ на пути $S$:

$$A = \overline{F} \cdot \overline{S} = |\overline{F}| \cdot |\overline{S}| \cdot \cos\varphi \quad .$$

Рассмотрим основные свойства скалярного произведения.

I) $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$ - свойство переместительности.

2) $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны между собой (нулевой вектор имеет неопределенное направление, и его можно считать перпендикулярным к любому вектору).

3) $(a, a) = |\bar{a}|^2$,

следовательно, $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Величина $\bar{a}^2 = (\bar{a}, \bar{a})$ называется скалярным квадратом вектора $\bar{a}$.

4) $(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b})$ - сочетательное свойство скалярного произведения относительно числового множителя.

Доказательство.

$$(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{b}| \cdot \text{Пр}_{\bar{b}}(\lambda\bar{a}) = |\bar{b}| \cdot (\lambda\, \text{Пр}_{\bar{b}}\, \bar{a}) = \lambda \cdot (|\bar{b}| \cdot \text{Пр}_{\bar{b}}\, \bar{a}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b}) \quad .$$

5) $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$ - свойство распределительности скалярного умножения относительно сложения.

Доказательство.

$$(\bar{a} + \bar{b},\ c) = |\bar{c}| \cdot \text{Пр}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = |\bar{c}| \cdot (\text{Пр}_{\bar{c}}\, \bar{a} + \text{Пр}_{\bar{c}}\, \bar{b}) =$$

$$= |\bar{c}| \cdot \text{Пр}_{\bar{c}}\, \bar{a} + |\bar{c}| \cdot \text{Пр}_{\bar{c}}\, \bar{b} = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c}) \quad .$$

## § 17. Выражение скалярного произведения и косинуса угла между двумя векторами через проекции этих векторов

Пусть заданы векторы $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$,

тогда $(\bar{a},\bar{b})=(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},\ x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z\bar{k})=$

$$=x_1\cdot x_2(\bar{i},\bar{i})+x_1y_2(\bar{i},\bar{j})+x_1z_2(\bar{i},\bar{k})+y_1x_2(\bar{j},\bar{i})+y_1y_2(\bar{j},\bar{j})+$$

$$+y_1z_2(\bar{j},\bar{k})+z_1x_2(\bar{k},\bar{i})+z_1y_2(\bar{k},\bar{j})+z_1z(\bar{k},\bar{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

так как $(\bar{i},\bar{i})=(\bar{j},\bar{j})=(\bar{k},\bar{k})=1$, а $(\bar{i},\bar{j})=(\bar{i},\bar{k})=$

$$=(\bar{j},\bar{i})=(\bar{j},\bar{k})=(\bar{k},\bar{j})=(\bar{k},\bar{i})=0 .$$

Итак,

$$(\bar{a},\bar{b})=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2 ,$$

то есть скалярное произведение векторов, заданных проекциями в прямоугольной системе координат, равно сумме произведений одноименных проекций.

С другой стороны,

$$(\bar{a},\bar{b})=|a|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi ,$$

следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} .$$

<u>Примеры</u>: 1. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}=\{2;\ 1;\ -2\}$ и $\bar{b}=\{3;\ 2;\ 6\}$.

<u>Решение</u>.

$$(\bar{a},\bar{b})=2\cdot 3+1\cdot 2+(-2)\cdot 6=-4.$$

2. Найти угол между векторами

$$\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{b}=3\bar{i}+2\bar{j}+6\bar{k} \ .$$

Решение.

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{-4}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{9+4+36}}=-\frac{4}{21} \ ;$$

откуда

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{4}{21}\right)=\pi-\arccos\frac{4}{21} \ .$$

## § 18. Векторное произведение двух векторов

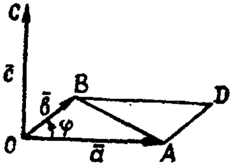



Рис. 29.

Определение. Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, который определяется следующими условиями (рис. 29):

1. $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi=S_{OADB}$ ;

2. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, причем, направлен в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ вокруг общего начала представлялся происходящим против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\bar{c}$.

Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается через $[\bar{a}, \bar{b}]$ или $\bar{a}\times\bar{b}$.

Рассмотрим основные свойства векторного произведения.

1. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$ - свойство антиперестановочности (вектор $\bar{c}$ меняет направление на противоположное).

2. Векторное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы а и в коллинеарны (нулевой вектор можно считать коллинеарным по отношению к любому вектору).

3. $[\lambda\bar{a},\bar{b}]=\lambda[\bar{a},\bar{b}]=[\bar{a},\lambda\bar{b}]$ - свойство сочетательности относительно числового множителя (числовой множитель можно выносить за знак векторного произведения).

<u>Доказательство</u>. Векторы $[\lambda\bar{a}, \bar{b}]$ и $\lambda[\bar{a}, \bar{b}]$ направлены одинаково (следует из определения векторного произведения), а площадь параллелограмма, построенного на векторах $\lambda\bar{a}$ и $\bar{b}$ в $|\lambda|$ раз больше площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, следовательно, длины векторов $|\lambda\bar{a}, \bar{b}|$ и $\lambda|\bar{a}, \bar{b}|$ равны.

Таким образом, свойство доказано.

4. $[(\bar{a}+\bar{b}), \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$ – свойство распределительности векторного умножения относительно сложения.

Из определения векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ следует, что площадь параллелограмма ОАДВ равна (численно) модулю векторного произведения

$$S = |[\bar{a}, \bar{b}]|$$

этих векторов, а площадь треугольника ОАВ равна половине этого модуля:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\left|\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right| .$$

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими проекциями:

$$a = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \bar{b} = \{x_2, y_2, z\} .$$

Учитывая свойства векторного произведения, получим:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = [x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}, \quad x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z\bar{k}] =$$

$$= x_1x_2[\bar{i}, \bar{i}] + x_1y_2[\bar{i}, \bar{j}] + x_1z_2[\bar{i}, \bar{k}] + y_1x_2[\bar{j}, \bar{i}] + y_1y_2[\bar{j}, \bar{j}] +$$

$$+ y_1z_2[\bar{j}, \bar{k}] + z_1x_2[\bar{k}, \bar{i}] + z_1y_2[\bar{k}, \bar{j}] + z_1z_2[\bar{k}, \bar{k}] .$$

так как $[\bar{i}, \bar{i}] = [\bar{j}, \bar{j}] = [\bar{k}, \bar{k}] = 0$, $\quad [\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}$,

$[\bar{i}, \bar{k}] = -\bar{j}$, $[\bar{j}, \bar{i}] = -\bar{k}$, $[\bar{j}, \bar{k}] = \bar{i}$, $[\bar{k}, \bar{i}] = \bar{j}$, $[\bar{k}, \bar{j}] = -\bar{i}$, то $[\bar{a}, \bar{b}] = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\bar{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\bar{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\bar{k} =$

$= \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{j} \cdot (-1) \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ .

Итак, $$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Пример. На плоскости XOY даны три точки A $(x_1, y_1)$, B$(x_2\ y_2)$ и C$(x_3, y_3)$.

Найти площадь треугольника ABC.

Решение. $S = \frac{1}{2}\left|[\overline{AB}, \overline{AC}]\right| = \frac{1}{2}\left|[(x_2 - x_1)\cdot\bar{i} + (y_2 - y_1)\cdot\bar{j};\ (x_3 - x_1)\bar{i} + (y_3 - y_1)\bar{j}]\right| =$
$= \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1)[\bar{i}, \bar{j}] + (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)[\bar{j}, \bar{i}]\right| = \frac{1}{2}\left|[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)]\bar{k}\right| =$
$= \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\right|$ , т.к. $[\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}$ и $|\bar{k}| = 1$ .

Итак, $S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\right|$ .

Преобразуем эту формулу:

$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = x_2 y_3 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_1 - y_2 x_3 + y_2 x_1 +$
$+ y_1 x_3 - y_1 x_1 = (x_2 y_3 - y_2 x_3)\cdot 1 - (x_1 y_3 - y_1 x_3)\cdot 1 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\cdot 1 =$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

Таким образом,

$$S_\Delta = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

Если три точки лежат на одной прямой, то $S_\Delta = 0$, поэтому

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Последнее равенство является условием принадлежности трех точек к одной прямой.

Задача. Расстояние от точки до прямой.

Пусть дана точка М ($x_1$, $y_1$, $z_1$ ). Найти расстояние от этой точки до прямой, соединяющей точки А ($x_2$, $y_2$, $z_2$ ) и В ($x_3$, $y_3$, $z_3$ ). Найдем площадь треугольника АВМ:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AM}, \overline{AB}\right]\right| .$$

Расстояние от точки М до прямой АВ есть высота этого треугольника и площадь треугольника будет:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot h \left|\overline{AB}\right| ,$$

Следовательно,

$$h \cdot \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AM} \times \overline{AB}\right|$$

Отсюда,

$$h = \frac{\left|\overline{AM} \times \overline{AB}\right|}{\left|\overline{AB}\right|} .$$

## § 19. Векторно скалярное произведение трех векторов

Пусть в пространстве даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Можно представить себе три различных произведения этих векторов. Если умножить вектор $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ скалярно и полученное число умножить на вектор $\bar{c}$, то получится вектор, который не представляет собой особого интереса.

Если умножить вектор $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ векторно и полученный вектор умножить векторно на вектор $\bar{c}$, то такое произведение называется двойным векторным произведением. Его рассматривать не будем.

Рассмотрим смешанное или векторно скалярное произведение данных векторов, для чего вектор $\bar{d} = [\bar{a}, \bar{b}]$ умножим скалярно на вектор $\bar{c}$. Такое произведение обозначается так: $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$ или так: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Выясним геометрический смысл смешанного произведения.

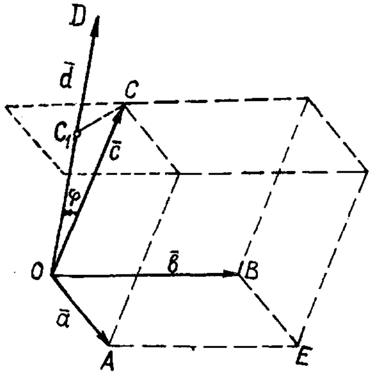



Рис. 30.

<u>Теорема.</u> Векторно скалярное произведение трех некомпланарных векторов есть число, абсолютная величина которого равна объему параллелепипеда, построенного на данных векторах, как на ребрах, выходящих из общей вершины.

<u>Доказательство</u>. Вектор $\bar d = [\bar a, \bar в]$ (рис. 30) перпендикулярен к плоскости векторов $\bar a$ и $\bar в$, то есть к плоскости основания параллелепипеда.

Умножая вектор $\bar d$ на вектор $\bar c$ скалярно, получим:

$$(\bar d, \bar c) = |\bar d| \cdot |\bar c| \cdot \cos\varphi = |\bar d| \cdot \text{Пр}_{\bar d}\bar c = S_{OAEB} \cdot (\overline{OC}_1),$$

где $\varphi$ - угол между векторами $\bar c$ и $\bar d$, а абсолютная величина алгебраического значения $(OC_1)$ равна высоте параллелепипеда, то есть

$$(OC_1) = \pm h,$$

(+)— если $\bar a$, $\bar в$ и $\bar c$ образуют правую, и (-)— если они образуют левую тройку.

Следовательно, $([\bar a, \bar в], \bar c) = \pm V_{пар}$,

откуда $$V_{пар} = |([\bar a, \bar в], \bar c)|.$$

Если

$$\bar a = x_1\bar i + y_1\bar j + z_1\bar k, \quad \bar в = x_2\bar i + y_2\bar j + z_2\bar k \quad \text{и} \quad \bar c = x_3\bar i + y_3\bar j + z_3\bar k,$$

то $$([\bar a, \bar в], \bar c) = \left(\bar i \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar k \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, x_3\bar i + y_3\bar j + z_3\bar k\right) =$$

$$= x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $$V = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Если векторы компланарны, то $([a, в], c) = 0$, т.к.

Равенство
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

является условием компланарности трех векторов.

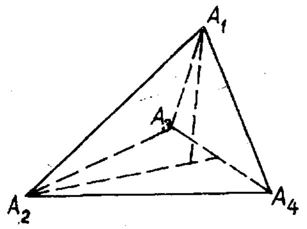
Задача. Расстояние от точки до плоскости.

Пусть дана точка $A_I$ $(x_I, y_I, z_1)$ и плоскость, в которой лежат три точки $A_2$ $(x_2, y_2, z_2)$, $A_3$ $(x_3, y_3, z_3)$ и $A_4$ $(x_4, y_4, z_4)$, тогда объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{A_2 A_I}$, $\overline{A_2 A_3}$ и $\overline{A_2 A_4}$, равен абсолютной величине смешанного произведения этих векторов

$$V_{пар} = \left|\left(\left[\overline{A_2A_1}, \overline{A_2A_3}\right], \overline{A_2A_4}\right)\right|,$$

и объем пирамиды

$$V_{пир} = \pm \frac{1}{6}\left(\left[\overline{A_2A_1}, \overline{A_2A_3}\right], \overline{A_2A_4}\right).$$




С другой стороны, объем пирамиды равен

$$V_{пир} = S_{\Delta A_2A_3A_4} \cdot \frac{h}{3},$$

где $h$ - высота, опущенная из вершины $A_I$ на грань $A_2$ $A_3$ $A_4$, но

$$S_{\Delta A_2A_3A_4} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{A_2A_3}, \overline{A_2A_4}\right]\right|$$

и $V_{пир} = \dfrac{h}{6}\left|\left[\overline{A_2A_3}, \overline{A_2A_4}\right]\right|$.

Следовательно, $h\left|\left[\overline{A_2A_3}, \overline{A_2A_4}\right]\right| = \pm\left(\left[\overline{A_2A_1}, \overline{A_2A_3}\right], A_2A_4\right)$,

отсюда $h = \pm \dfrac{\left(\left[\overline{A_2A_1}, \overline{A_2A_3}\right], \overline{A_2A_4}\right)}{\left(\left[\overline{A_2A_3}, \overline{A_2A_4}\right]\right)}$.

# ГЛАВА III

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### § I. Геометрический образ и его уравнение

Определение. Геометрическое место точек пространства (двухмерного или трехмерного), обладающих одним и тем же свойством, называется геометрическим образом этого свойства.

Если обозначить через X, У, Z координаты призвольной (говорят: текущей) точки геометрического образа, то равенство $F(x,y,z)=0$ если оно возможно, где $F(x,y,z)$ -есть аналитическое выражение относительно х, у, z, называется уравнением геометрического образа.

Равенство $$F(x,y,z)=0$$

выражает свойство, общее для всех точек данного геометрического образа. О точках такого геометрического образа говорят, что их координаты удовлетворяют данному уравнению.

В двухмерном пространстве уравнение геометрического образа в общем случае имеет вид
$$F(x,y)=0\ .$$

Если геометрический образ является общей частью других геометрических образов, то аналитически он выражается как система уравнений этих образов, так как координаты точек пересечения удовлетворяют уравнениям пересекающихся геометрических образов. Мы будем рассматривать только такие геометрические образы, которые аналитически выражаются уравнениями.

### § 2. Задачи на составление уравнений некоторых геометрических образов

Задача I. Составить уравнение окружности радиуса $R$, расположенной в плоскости ХОУ с центром в точке $O_1$ (а, в).

Решение. Произвольная точка М (х, у) этой окружности обладает тем свойством, что ее расстояние от точки $O_1$ равно $R$, то есть

$$|\overline{O_1M}|=R$$

или

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

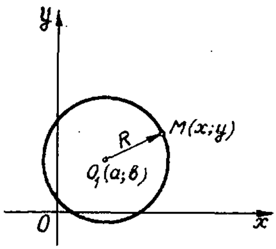



Рис. 3I.

Возведя обе части в квадрат, получим уравнение окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

где а и $b$ есть абсцисса и ордината центра, $R$ - радиус, а х и у - координаты произвольной точки окружности.

Задача 2. Составить уравнение сферы радиуса $R$ с центром в точке $O_1$(а; в; с).

Решение. Рассуждая аналогично предыдущему, получим уравнение сферы в виде

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \quad .$$

Задача 3. Составить уравнение прямой, расположенной в плоскости ХОУ перпендикулярно оси ОХ и проходящей через точку $X = X_0$ этой оси.

Решение. Произвольная точка М (х, у) этой прямой обладает тем свойством, что ее абсцисса $X = X_0$. Поэтому равенство

$$X = X_0$$

является уравнением этой прямой.

Задача 4. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси ОХ и проходящей через точку $X = X_0$ этой оси.

Решение. Аналогично предыдущему равенство

$$X = X_0$$

является уравнением этой плоскости.

## § 3. Геометрический смысл уравнения

I. Пусть задано уравнение $F(x) = 0$. (Тождества не рассматриваем).

I. Если мы рассматриваем это уравнение в одномерном пространстве, то каждому решению (во множестве действительных чисел) этого уравнения на оси абсцисс соответствует точка ($x_I$, $x_2$, $x_3$, ...,$x_n$). Следовательно, в этом случае уравнение

$$F(x) = 0$$

геометрически определяет некоторое множество изолированных точек оси ОХ.

2) В двухмерном пространстве $XOY$ (или $XOZ$) уравнение

$$F(x) = 0$$

определяет некоторое множество прямых, перпендикулярных оси $OX$ и проходящих через точки, указанные в первом пункте, ибо координаты всех точек этих прямых удовлетворяют данному уравнению.

3) В трехмерном пространстве уравнение

$$F(x) = 0$$

определяет некоторое множество плоскостей, перпендикулярных оси $OX$ и проходящих через точки, указанные в первом пункте.

2. Пусть задано уравнение

$$F(x, y) = 0.$$

I) Если мы рассматриваем это уравнение в двухмерном пространстве, то каждой паре значений $x$ и $y$, удовлетворяющей данному уравнению, на плоскости $XOY$ соответствует точка $M\,(x;\,y)$, а множество всех решений определяет некоторую линию на этой плоскости.

В частном случае уравнение

$$F(x;\,y) = 0$$

определяет одну или несколько изолированных точек.

Уравнение

$$x^2 + (y - 1)^2 = 0$$

определяет точку $(0;\,1)$.

Уравнение

$$F(x;\,y) = 0$$

может не определить никакого геометрического места точек, например,

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

2) Если рассматривать уравнение

$$F(x;\,y) = 0$$

в трехмерном пространстве, то оно определяет цилиндрическую поверхность, проходящую перпендикулярно плоскости $XOY$ через линию, указанную в первом пункте (которая является направляющей, а образующая проходит через точку этой линии параллельно оси $OZ$), так как координаты любой точки этой поверхности удовлетворяют данному уравнению.

В частном случае это будет одна или несколько прямых, перпендикулярных плоскости ХОУ и проходящих через точки, указанные в пункте (2-I) или не будет определять никакого геометрического образа.

3) Пусть задано уравнение

$$F(x,\ y,\ z\ ) = 0.$$

В общем случие это уравнение определяет поверхность в трехмерном пространстве. В частном случае оно определяет одну или несколько точек или совсем не определяет ни одной точки.

## § 4. Геометрический образ первого порядка. Прямая на плоскости

Определение. Геометрическое место точек, выражаемое одним уравнением, линейным относительно текущих координат, называется геометрическим образом первого порядка.

Уравнение геометрического образа первого порядка в двухмерном пространстве имеет вид

$$Ax + By + C = 0 . \qquad ( I )$$

Выясним, что представляет собой этот образ.

Пусть $M_0\ (x_0;\ y_0)$ и $M\ (x;\ y)$ суть данная и текущая точки этого образа. Тогда их координаты удовлетворяют данному уравнению и, следовательно, будут справедливы равенства

$$Ax_0 + By_0 + C = 0$$

и

$$Ax + By + C = 0,$$

откуда

$$A\ (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0. \qquad ( 2 )$$

Рассмотрим скалярное произведение векторов:

$$\bar{n} = \{A\,;\,B\} \quad и \quad \bar{\ell} = \bar{r} - \bar{r}_0 = \{x - x_0\,;\ y - y_0\} \ ,$$

где $\quad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} \quad$ и $\quad \bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j}$ .

Итак, $(\bar{n}, \bar{\ell}) = (\bar{n}, \bar{r} - \bar{r}_0) = A(X - X_0) + B(Y - Y_0)$ .

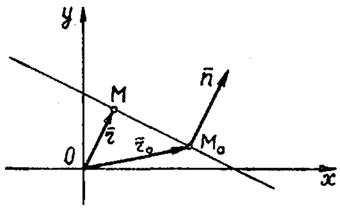



Рис. 32.

Следовательно, данное уравнение можно переписать в векторной форме:

$$(\bar{n}, \bar{r} - r_0) = 0 \qquad (3)$$

так как

$$C = -Ax_0 - By_0 \ .$$

Из равенства (3) видно, что вектор

$$\bar{\ell} = \bar{r} - \bar{r}_0 \ ,$$

проведенный из данной точки геометрического образа в произвольную точку этого образа, перпендикулярен данному вектору $\bar{n}$ , следовательно, произвольная точка этого образа лежит на прямой, проходящей через точку $M_0$ $(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}$ , который называется в связи с этим нормальным вектором прямой.

<u>Замечание</u>. Два уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

определяют одну и ту же прямую, если их соответствующие коэффициенты пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = t \ .$$

В самом деле, если координаты точки $M_1$ $(x_1, y_1)$ удовлетворяют второму уравнению

$$A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0,$$

то они удовлетворяют и первому уравнению (умножив почленно последнее равенство на $t$ , получим

$$tA_2x_1 + tB_2y_1 + tC_2 = 0$$

или

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C = 0).$$

Геометрически это означает, что у прямой может быть бесчисленное множество нормальных векторов, направления которых одинаковы или противоположны, а длины различные.

Покажем теперь, что кроме точек указанной прямой никакие другие точки не принадлежат геометрическому образу, выражаемому уравнением

$$Ax + By + C = 0.$$

Пусть точка $M_2$ $(x_2; y_2)$ не лежит на указанной прямой, тогда вектор $\bar{r}_2 - \bar{r}_0$ не перпендикулярен вектору $\bar{n}$ и

$$(\bar{n}, \bar{r}_2 - \bar{r}_0) \neq 0 ,$$

следовательно,

$$Ax_2 + By_2 - (Ax_0 + By_0) = Ax_2 + By_2 - [(Ax_0 + By_0 + C) - C] = Ax_2 + By_2 + C \neq 0,$$

т.е. координаты точки $M_2$ не удовлетворяют уравнению. Любая точка $M_2$, не лежащая на указанной прямой, не принадлежит рассматриваемому геометрическому образу.

Задача. Дана прямая, проходящая через две точки $M_I$ $(x_I; y_I)$ и $M_2$ $(x_2; y_2)$. Составить уравнение этой прямой.

Решение. Вектор $\overline{M_I M_2}$ лежит на данной прямой. Его проекции суть числа $(x_2 - x_I)$ и $(y_2 - y_I)$.

Вектор
$$\bar{n} = \left\{ \frac{1}{x_2 - x_1} ; \; -\frac{1}{y_2 - y_1} \right\}$$

перпендикулярен вектору $\overline{M_I M_2}$, так как

$$(\bar{n} ; \overline{M_1 M_2}) = 0 .$$

Следовательно, $\bar{n}$ – нормальный вектор данной прямой, но тогда векторы $\overline{M_I M}$, где $M$ – текущая точка прямой, и $\bar{n}$ перпендикулярны и

$$(\bar{n} , \overline{M_I M}) = 0$$

есть уравнение данной прямой в векторной форме. В координатной форме уравнение будет иметь вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = 0 \qquad (4)$$

или

$$\frac{1}{x_2-x_1}x+\frac{1}{y_1-y_2}\cdot y+\left(\frac{x_1}{x_1-x_2}+\frac{y}{y_2-y_1}\right)=0 .$$

Положив

$$\frac{1}{x_2-x_1}=A , \quad \frac{1}{y_1-y_2}=B$$

и

$$\frac{x_1}{x_1-x_2}+\frac{y_1}{y_2-y_1}=C ,$$

получим уравнение $Ax + By + C = 0$ первой степени относительно текущих координат. За вектор $\bar{n}$ можно было взять и другой вектор, перпендикулярный данной прямой. В этом случае говорят, что коэффициенты уравнения А,В и С находится с точностью до постоянного множителя, то есть все такие уравнения являются уравнениями данной прямой. Поэтому не будем рассматривать уравнения, коэффициенты которых пропорциональны, как различные уравнения.

Итак, каждому уравнению первой степени относительно текущих координат соответствует единственная прямая на плоскости, а каждой прямой на плоскости соответствует единственное уравнение первой степени относительно текущих координат.

Таким образом, множество прямых на плоскости ХОУ и множество уравнений первой степени относительно текущих координат Х и У находятся во взаимно однозначном соответствии.

Замечание 3. Уравнение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} , \qquad (5)$$

получаемое из уравнения (4), называется уравнением прямой, проходящей через две данные точки.

Замечание 4. Уравнение прямой, проходящей через две точки, можно было составить, исходя из условия принадлежности трех точек к одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда опять получается уравнение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

или, используя условие коллинеарности векторов $\{x-x_1;\ y-y_1\}$ и $\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

## § 5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

### I. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

В § 4. было получено уравнение прямой

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0)$. Его можно переписать, если $B\neq 0$, в виде

$$y-y_0=-\frac{A}{B}(x-x_0).$$

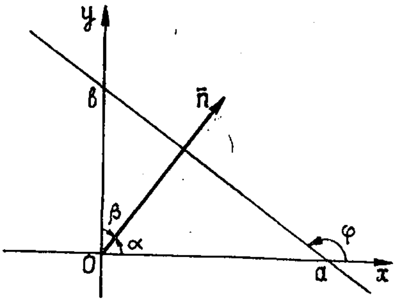



Рис. 33.

Выясним геометрический смысл коэффициента $K=-\frac{A}{B}$.

Направляющие косинусы нормального вектора

$$\bar{n}=\{A;\ B\}$$

суть

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ и } \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Поскольку $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$,

то $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$

и $\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

Далее,

$$A=\cos\alpha\cdot\sqrt{A^2+B^2}, \quad B=\sin\alpha\cdot\sqrt{A^2+B^2}$$

и

$$k=-\frac{A}{B}=-ctg\,\alpha=-ctg\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=tg\,\varphi \; .$$

Здесь $\varphi$ (рис. 33) есть угол между положительным направлением оси OX и данной прямой (угол наклона данной прямой к оси OX). Значит,

$$k=tg\,\varphi$$

есть тангенс этого угла.

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0\ (x_0;\ y_0)$ в данном направлении, образующем угол $\varphi$ с положительным направлением оси OX, запишется в виде

$$y-y_0=k\,(x-x_0),$$

где

$$k=tg\,\varphi$$

называется угловым коэффициентом данной прямой.

2. Исходя из уравнения

$$Ax+By+C=0,$$

если $B\neq 0$, прямую можно записать в виде уравнения

$$y=\frac{-A}{B}x-\frac{C}{B}$$

или, в новых обозначениях,

$$y=kx+b,$$

где $k=-\frac{A}{B}$ есть угловой коэффициент прямой, а

$$b=-\frac{C}{B}$$

есть начальная ордината прямой (алгебраическое значение отрезка, отсекаемого прямой от оси ординат, одним из концов которого является начало координат), так как $y=b$ при $x=0$ (рис. 33).

## § 6. Расположение прямой на плоскости относительно осей координат

Пусть задана прямая

$$Ax + By + C = 0$$

в плоскости ХОУ.

I. Если ни один из коэффициентов А,В и С не равен нулю, то говорят, что

$$Ax + By + C = 0$$

есть прямая общего положения.

Рассмотрим частные случаи, когда некоторые коэффициенты уравнения прямой равны нулю.

2. С = 0. Прямая

$$Ax + By = 0$$

проходит через начало координат, так как точка О (о; о) своими координатами удовлетворяет уравнению.

3. А = 0. Вектор $\bar{n}$ перпендикулярен оси ОХ, а прямая

$$By + C = 0$$

или

$$y = \bar{b}$$

параллельна оси ОХ и отсекает от оси ОУ отрезок, алгебраическое значение которого есть

$$b = -\frac{C}{B} .$$

4. В = 0. Вектор $\bar{n}$ перпендикулярен оси ОУ, а прямая $Ax + c = 0$

или

$$x = a$$

параллельна этой оси и отсекает от оси ОХ отрезок, алгебраическое значение которого есть

$$a = -\frac{C}{A} .$$

5. $A = C = 0$. Прямая

$$By = 0$$

или

$$y = 0$$

совпадает с осью OX.

6. $B = C = 0$. Прямая

$$Ax = 0$$

или

$$x = 0$$

совпадает с осью OY.

## § 7. Уравнение прямой в отрезках

Прямая общего положения

$$Ax + By + C = 0$$

проходит через точки $M_1\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ и $M_2\left(0; -\frac{C}{B}\right)$, так как координаты этих точек удовлетворяют уравнению прямой. Введем, согласно § 7, обозначения:

$$a = -\frac{C}{A} \quad \text{и} \quad b = -\frac{C}{B}$$

и подставим в данное уравнение выражения

$$A = -\frac{C}{a} \quad \text{и} \quad B = -\frac{C}{b},$$

получим

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0,$$

откуда получается уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 .$$

Полученное уравнение называется уравнением прямой в отрезках. Здесь $a$ и $b$ суть алгебраические значения отрезков, отсекаемых прямой от осей координат, соответственно OX и OY (рис. 33).

## § 8. Нормальное уравнение прямой

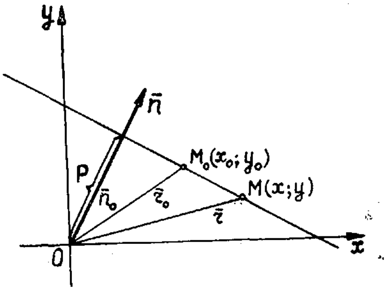



Рис. 34.

Пусть вектор $\bar{n}$ заданной прямой $Ax + By + C = 0$ (I) направлен от начала координат к этой прямой (рис. 34). Запишем уравнение прямой в векторной форме

$$\bar{n}\cdot\bar{r} - \bar{n}\cdot\bar{r}_o = 0 . \qquad (2)$$

Разделим почленно равенство (2) на $|\bar{n}| = \sqrt{A^2+B^2}$

получим
$$\bar{n}^o\cdot\bar{r} - \bar{n}^o\cdot\bar{r}_o = 0 ,$$

где
$$\bar{n}^o = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$$

-единичный вектор направления вектора $\bar{n}$.

Рассмотрим скалярные произведения:

I) $\bar{n}\cdot\bar{r} = x\cdot\cos\alpha + y\cdot\cos\beta$ ,

где $\alpha$ и $\beta$ - углы (рис. 33), которые образует вектор $\bar{n}$ с координатными осями, причем,

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha .$$

2) $\bar{n}^o\cdot\bar{r}_o = 1\cdot|\bar{r}_o|\cdot\cos(\widehat{\bar{n};\bar{r}_o}) = \Pi p_n\bar{r}_o = p > 0$ ,

так как векторы $\bar{n}$ и $\bar{r}_o$ образуют острый угол. Здесь $p$ -расстояние от начала координат до данной прямой (рис. 34).

Таким образом, уравнение прямой принимает вид

$$x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha - p = 0 ,$$

где $p > 0$ и $\alpha$ — угол, который образует нормальный вектор прямой с осью ОХ. Оно называется нормальным уравнением прямой. Коэффициенты уравнения прямой при Х и У, если оно имеет нормальный вид, удовлетворяют условию

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 .$$

<u>Замечание</u>. Если вектор $\bar{n}$ имеет направление, противоположное рассмотренному, то при преобразовании уравнения прямой к нормальному виду следует делить почленно на

$$-|\bar{n}| = -\sqrt{A^2+B^2} ,$$

т.к. $\bar{n}\cdot\bar{r}_0 < 0$. При этом вектор $-\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$ есть единичный вектор, перпендикулярный данной прямой и направленный от начала координат к прямой, а

$$-\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}\cdot\bar{r}_0 > 0$$

– есть расстояние от начала координат до прямой.

Итак, чтобы уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

привести к нормальному виду, необходимо произвести почленное умножение его на число

$$N = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} ,$$

которое называется нормирующим множителем данного уравнения. Знак этого множителя выбирается так, чтобы было

$$N\cdot C < 0$$

(противоположно знаку свободного члена).

## § 9. <u>Расстояние от точки до прямой</u>

Пусть дана прямая

$$Ax + By + C = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

и точка $M_I\ (x_I;\ y_I)$. Найдем расстояние $d$ от точки $M_I$ до данной прямой (рис. 35).

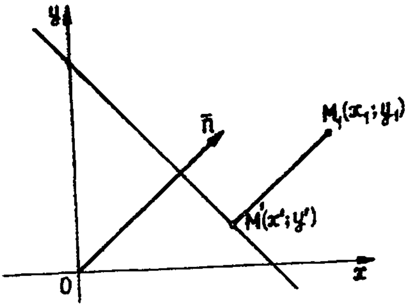



Рис. 35.

Так как векторы $\bar{n}=\{A;\ B\}$ и $\overline{M'M_1}$, где $M'(x';\ y')$ есть проекция точки $M_1$ на данную прямую, коллинеарны, то

$$(\bar{n},\overline{M'M_1}) = \pm|\bar{n}|\cdot d \quad . \qquad (2)$$

В равенстве (2) правая часть берется со знаком (+) или (-) в зависимости от того, направлены векторы $\bar{n}$ и $\overline{M'M_1}$ в одну сторону или в противоположные стороны.

Так как

$$(\bar{n},\overline{M'M_1}) = A(x_1-x')+B(y_1-y') = Ax_1+By_1-(Ax'+By') =$$

$$= Ax_1+By_1-[(Ax'+By'+C)-C] = Ax_1+By_1+C$$

и

$$|\bar{n}| = \sqrt{A^2+B^2} \ ,$$

то

$$d = \pm\frac{(\bar{n},\overline{M'M_1})}{|\bar{n}|} = \pm\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

или

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \ .$$

<u>Замечание</u>. Если уравнение прямой приведено к нормальному виду

$$x\cdot\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \ ,$$

то его нормальный вектор

$$\bar{n}^\circ = \{\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha\}$$

направлен от начала координат к прямой и $d = \pm(\bar{n}^\circ,\ \overline{M'M_1})$ .

В этом случае величина

$$\delta=(\bar{n}^{\circ}, \overline{M'M_1})=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha)= \\ =x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p$$

называется отклонением точки $M_I$ от прямой. Это отклонение положительно, если точка $M_I$ и начало координат лежат по разные стороны от прямой (векторы $\bar{n}^{\circ}$ и $\overline{M'M_I}$ направлены в одну сторону), и – отрицательно, если точка $M_I$ и начало координат лежат по одну сторону от прямой (векторы направлены в противоположные стороны).

Таким образом,

$$d=|\delta| .$$

## § I0. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Задача о взаимном расположении двух прямых на плоскости сводится к алгебраической задаче исследования системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Пусть две прямые на плоскости заданы уравнениями:

$$A_Ix + B_Iy + C_I = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Здесь возможны три случая.

I) Прямые пересекаются. Если прямые пересекаются, то они имеют одну общую точку и система имеет единственное решение, то есть определитель системы $\Delta \neq 0$ и точка пересечения находится по формулам:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta y}{\Delta} .$$

2) Прямые параллельны.

Система не имеет решения, если

$$\Delta=0, \text{ но } \Delta_x\neq 0, \ \Delta_y\neq 0 .$$

В этом случае
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2} .$$

или

$$K_1 = K_2 .$$

3) Прямые сливаются.

Система имеет бесчисленное множество решений, если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ .

Тогда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = m ,$$

то есть коэффициенты пропорциональны и система сводится к одному уравнению:

$$A_1 = A_2 m , \quad B_1 = B_2 m , \quad C_1 = C_2 m ,$$

$$m(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0 , \ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 .$$

## § II. Угол между двумя прямыми

Пусть заданы две прямые

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

и

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

которые, пересекаясь, образуют угол $\theta$ . Из рис. 36 ясно, что

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$tg\theta = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2} ,$$

но

$$tg\,\varphi_1 = \kappa_1$$

и

$$tg\,\varphi_2 = \kappa_2$$

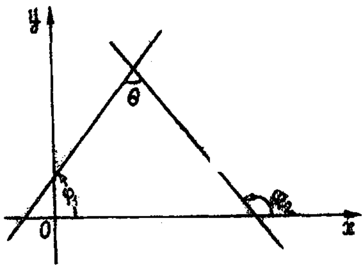



Рис. 36.

— угловые коэффициенты данных прямых.

Итак,

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{K_2-K_1}{1+K_1\cdot K_2} \qquad (\text{I})$$

Если

$$\varphi_1=\varphi_2$$

то

$$K_I=K_2 .$$

Это равенство является условием параллельности двух прямых (очевидно, что из условия $K_I = K_2$ следует, что $\varphi_1=\varphi_2$ ).

Формула (I) не имеет смысла, если хотя бы один из трех углов $\theta, \varphi_1, \varphi_2$ – прямой.

Если

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

(прямые перпендикулярны), то

$$\varphi_2=\frac{\pi}{2}+\varphi_1$$

$$K_2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right)=-\operatorname{ctg}\varphi_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}=-\frac{1}{K_1} .$$

Равенство

$$K_1\cdot K_2=-I$$

является условием перпендикулярности двух прямых.

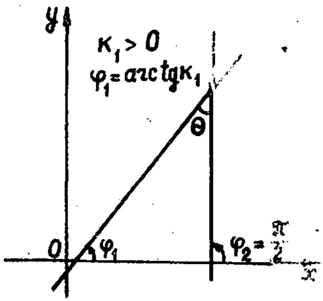



Рис. 37.

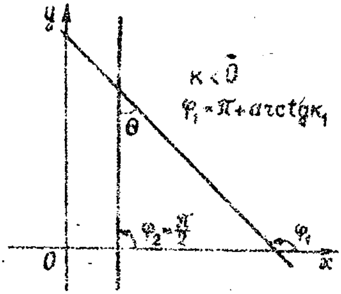



Рис. 38.

Если $\varphi_1 \neq \varphi_2$ и один из этих углов - прямой (уравнение прямой имеет вид Ах + С = 0), например, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, то

$$\theta = \frac{\pi}{2} - arctg\,k_1$$

при $k_1 > 0$

и

$$\theta = \frac{\pi}{2} + arctg\,k_1$$

при $k_1 < 0$ .

Замечание. Угол между двумя данными прямыми равен углу между их нормальными векторами

$$\bar{n}_1 = \{A_1; B_1\}$$

и

$$\bar{n}_2 = \{A_2; B\} ,$$

поэтому он может быть вычислен по формуле

$$\cos\theta = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} .$$

## § 12. Пучок прямых

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1 (x_1, y_1)$ в данном направлении имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1) .$$

Придавая параметру к различные значения, можно получать всевозможные прямые, проходящие через точку $M_1$, за исключением прямой $x = x_1$, так как в этом случае прямая перпендикулярна оси OX и параметр K не имеет смысла.

В связи с вышеизложенным уравнение

$$y - y_1 = k (x - x_1)$$

называется уравнением пучка прямых, определяемого точкой $M_1$, которая называется центром пучка.

Точка $M_1$ может быть задана как точка пересечения двух данных прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (1)$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad (2)$$

В этом случае уравнение пучка можно записать в виде

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0 , \qquad (3)$$

где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ есть любые действительные числа, причем

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0 .$$

В самом деле, равенство (3) есть уравнение первой степени относительно текущих координат и точка пересечения прямых (1) и (2) своими координатами удовлетворяет этому уравнению, следовательно, это есть уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых (1) и (2), причем, придавая параметрам $\lambda_1$ и $\lambda_2$ различные значения, можно получать всевозможные прямые, принадлежащие пучку.

Обратно, если нужно выбрать из пучка прямых (3) ту, которая удовлетворяет данным условиям, то можно подобрать такие значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$, что из уравнения пучка (3) при этом получается уравнение этой прямой. Пусть, например, из пучка, определяемого прямыми

$$2x - y = 0$$

$$x + y - 2 = 0$$

нужно выбрать прямую, параллельную прямой

$$x - 3y + 2 = 0.$$

Уравнение пучка:

$$\lambda_1(2x - y) + \lambda_2(x + y - 2) = 0$$

или

$$(2\lambda_1 + \lambda_2)x + (-\lambda_1 + \lambda_2)y + (-2\lambda_2) = 0$$

Из условия параллельности прямых получим:

$$-\frac{2\lambda_1 + \lambda_2}{-\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{3}$$

откуда

$$\lambda_1 = -\frac{4}{5} \cdot \lambda_2$$

При этом уравнение принимает вид

$$\left(-\frac{8}{5}\lambda_2 + \lambda_2\right)x + \left(\frac{4}{5}\lambda_2 + \lambda_2\right)y - 2\lambda_2 = 0$$

или

$$3 \cdot x - 9y + 10 = 0.$$

Это есть уравнение искомой прямой.

Если прямые (I) и (2) параллельны, то уравнение (3) дает семейство прямых, параллельных данным прямым. Если прямые (I) и (2) совпадают, то уравнение (3) есть уравнение той же самой прямой.

## § 13. Плоскость в пространстве

Уравнение геометрического образа первого порядка в трехмерном пространстве имеет вид

$$Ax + By + Cz + Д = 0. \qquad (I)$$

Это есть уравнение плоскости. В самом деле, если $M_0$ $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и $M$ $(x;\ y;\ z)$ суть данная и текущая точки этого образа, то вектор

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\}$$

перпендикулярен данному вектору $\bar{n} = \{A;\ B;\ C\}$:

$$(\bar{n}, \overline{M_0M}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = Ax + By + Cz + D - (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

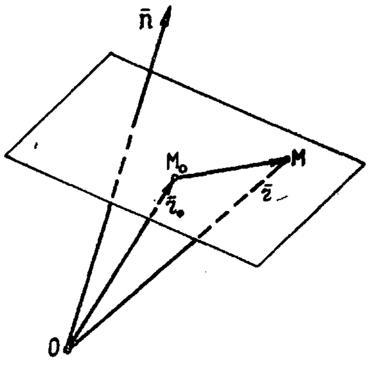



Рис. 39.

Таким образом, вектор, проведенный из данной точки геометрического образа в произвольную его точку перпендикулярен данному вектору, но это означает, что произвольная точка этого образа лежит в плоскости, проходящей через данную точку $M_0$ перпендикулярно данному вектору

$$\bar{n} = \{A;\ B;\ C\},$$

который называется в связи с этим нормальным вектором плоскости. Вектор

$$\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0,$$

где

$$\bar{r} = \{x;\ y;\ z\}$$

и
$$\bar{r}_0=\{x_0;\ y_0;\ z_0\}\ ,$$

поэтому уравнение плоскости (I) можно переписать в векторной форме в виде

$$\bar{n}\cdot(\bar{r}-\bar{r}_0)=0$$

или

$$\bar{n}\cdot\bar{r}-\bar{n}\cdot\bar{r}_0=0$$

или, в координатной форме,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ ,$$

которое называется уравнением плоскости, проходящей через данную точку.

Замечание I. Так как

$$(-\bar{n})\cdot(\bar{r}-\bar{r}_0)=0\ ,$$

то и вектор ( $-\bar{n}$ ) называется нормальным вектором данной плоскости. Как видно, геометрические образы первого порядка в двухмерном и трехмерном пространстве аналогичны друг другу (определяются точкой и нормальным вектором), поэтому они обладают аналогичными свойствами.

Замечание 2. Два уравнения

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

и

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

определяют одну и ту же плоскость, если их коэффициенты соответственно пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}=t\ .$$

Геометрически это означает, что у плоскости может быть бесконечное множество нормальных векторов, направления которых одинаковы или противоположны и длины различные.

Если вектор ( $\bar{r}_2 - \bar{r}_0$ ) проведен из данной точки $M_0$ в точку $M_2$, не лежащую на рассмотренной плоскости, то

$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=Ax_2+By_2+Cz_2-(Ax_0+By_0+Cz_0)=$$

$$A(x_2-x_0)+B(y_2-y_0)+C(z_2-z_0)=\bar{n}\cdot(\bar{r}_2-\bar{r}_0)\neq 0 ,$$

что означает, что точка $M_2$ не принадлежит данному геометрическому образу.

Задача. Дана плоскость, проходящая через три точки, не лежащие на одной прямой: $M_1$ ($x_1$; $y_1$; $z_1$ ), $M_2$ ($x_2$; $y_2$; $z_2$ ) и $M_3$($x_3$; $y_3$; $z_3$).

Составить уравнение этой плоскости.

Решение. Найдем вектор, перпендикулярный данной плоскости, для чего можно взять векторное произведение

$$\bar{n}=\left|\overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3}\right|=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k},$$

где

$$A=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix},$$

$$B=\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1\\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix},$$

$$C=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2y_3-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.$$

Так как точки $M_1$, $M_2$ и $M_3$ различны, то $\bar{n}$ не является нулевым вектором. Любая точка $M$ ($x$; $y$; $z$) плоскости обладает тем свойством, что вектор $\overline{M_1 M}$ перпендикулярен вектору $\bar{n}$, следовательно,

$$(\bar{n}, \overline{M_1 M}) = 0$$

есть уравнение плоскости, указанной в условии задачи, в векторной форме. В координатной форме при этом получается уравнение

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

или

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где

$$D=-(Ax_1+By_1+Cz_1).$$

В качестве вектора $\bar{n}$ можно было взять и другой вектор, перпендикулярный данной плоскости. Поэтому все полученные при этом уравнения являются уравнениями данной плоскости. Их соответственные коэффициенты пропорциональны. Такие уравнения не будем рассматривать как различные уравнения. Таким образом, множество плоскостей в пространстве $OXYZ$ и множество уравнений первой степени относительно текущих координат $X$, $Y$, $Z$ находится во взаимно однозначном соответствии.

Замечание. Задачу о составлении уравнения плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой, можно было решить, используя условие компланарности трех векторов $\overline{M_1 M_2}$ $\overline{M_1 M_3}$ и $\overline{M_1 M}$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

## § 14. Расположение плоскости относительно осей координат

Пусть в пространстве $OXYZ$ задана плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

1. Если ни один из коэффициентов А, В, С и Д не равен нулю, то говорят, что

$$Ax + By + Cz + Д = 0$$

есть уравнение плоскости общего положения (рис. 40).

2. Д = 0. Плоскость

$$Ax + By + Cz = 0$$

проходит через начало координат, так как числа $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ удовлетворяют уравнению плоскости.

3. А = 0. Вектор $\bar{n} = \{0; B; C\}$ перпендикулярен оси ОХ, а плоскость

$$By + Cz + Д = 0$$

параллельна оси ОХ (рис. 41).

4. В = 0. Плоскость параллельна оси ОУ.

5. С = 0. Плоскость параллельна оси OZ.

6. А = В = 0. Вектор $\bar{n} = \{0; 0; C\}$ перпендикулярен плоскости ХОУ, а плоскость

$$Cz + Д = 0$$

параллельна плоскости ХОУ и отсекает от оси OZ отрезок, алгебраическое значение которого есть

$$c = -\frac{D}{C} \qquad \text{(рис. 42).}$$

7. А = С = 0. Плоскость

$$By + Д = 0$$

параллельна плоскости XOZ и отсекает от оси ОУ отрезок, алгебраическое значение которого есть

$$b = -\frac{Д}{B}.$$

8. В = С = 0. Плоскость

$$Ax + Д = 0$$

параллельна плоскости УOZ и отсекает от оси ОХ отрезок, алгебраическое значение которого есть

$$a = -\frac{Д}{A}.$$

9. $A = Д = 0$. Плоскость

$$By + Cz = 0$$

проходит через начало координат и параллельна оси OX, то есть проходит через ось OX.

10. $A = B = Д = 0$. Плоскость

$$Cz = 0$$

или

$$z = 0$$

совпадает с плоскостью XOY.

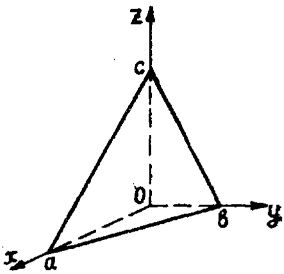



Рис.40.

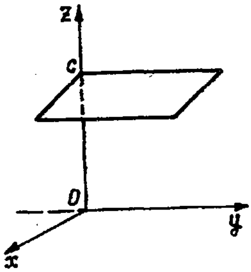



Рис. 41.

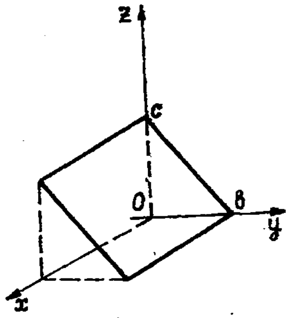



Рис. 42.

## § 15. Уравнение плоскости в отрезках

Плоскость общего положения

$$Ax + By + Cz + Д = 0$$

проходит через точки $M_1 \left(-\frac{Д}{A}, 0; 0\right)$, $M_2 \left(0; -\frac{Д}{B}, 0\right)$ и $M_3 \left(0; 0; -\frac{Д}{C}\right)$,

так как координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости.

Введем, согласно § 14, обозначения:

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}$$

и подставим в данное уравнение выражения

$$A=-\frac{D}{a}\ ,\quad B=-\frac{D}{b}\ ,\quad C=-\frac{D}{c}\ .$$

При этом получим:

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$$

или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ .$$

Полученное уравнение называется уравнением плоскости в отрезках. Здесь a, в и c суть алгебраические значения отрезков (рис. 40), отсекаемых плоскостью от осей координат, соответственно OX, XУ и $OZ$ .

## § 16. Нормальное уравнение плоскости

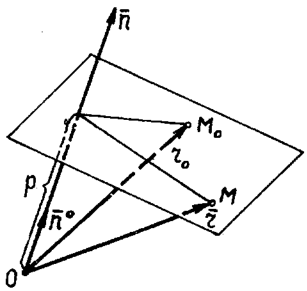



Рис. 43.

Пусть вектор $\bar{n}$ плоскости

$$Ax + By + Cz + Д = 0 \quad (1)$$

направлен от начала координат к плоскости (рис. 43). Запишем уравнение плоскости в векторной форме:

$$\bar{n}\cdot\bar{r}-\bar{n}\cdot\bar{r}_0=0\ . \qquad (2)$$

Разделив почленно равенство (2) на

$$|\bar{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ ,$$

получим $\bar{n}^0\cdot\bar{r}-\bar{n}^0\cdot\bar{r}_0=0$ ,

где $\bar{n}^0=\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$ есть единичный вектор направления вектора $\bar{n}$ .

Поскольку

$$\bar{n}^0\cdot\bar{r}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\ ,$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ - углы, которые образует вектор $\bar{n}$ с координатными осями, и

$$\bar{n}^0\cdot\bar{r}_0=\Pi p_{\bar{n}}\bar{r}_0=p>0$$

(векторы $\bar{n}$ и $\bar{r}_0$ образуют острый угол) есть расстояние от начала координат до данной плоскости, то уравнение плоскости принимает вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \quad ,$$

где $p > 0$, и называется нормальным уравнением плоскости.

Как известно из векторной алгебры, углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ должны удовлетворять условию

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad .$$

<u>Замечание</u>. Если вектор имеет направление, противоположное рассмотренному, то при преобразовании уравнения плоскости к нормальному виду следует делить почленно на

$$-|\bar{n}| = -\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

так как $\bar{n}\cdot\bar{r}_0 < 0$. При этом вектор $-\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$ есть единичный вектор, перпендикулярный данной плоскости и направленный от начала координат к плоскости, а

$$-\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}\cdot\bar{r}_0 = p > 0$$

есть расстояние от начала координат до плоскости.

Итак, чтобы уравнение плоскости (I) привести к нормальному виду, нужно произвести почленное умножение всех его членов на число

$$N = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad ,$$

которое называется нормирующим множителем данного уравнения. При этом знак в нем выбирается так, чтобы было

$$N\cdot D < 0$$

то есть противоположно знаку свободного члена.

## § 17. Расстояние от точки до плоскости

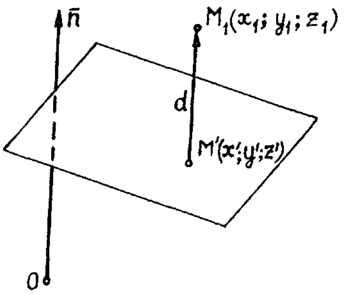



Рис. 44.

Пусть дана плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

и точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$. Найдем расстояние $d$ этой точки от данной плоскости (рис. 44).

Так как векторы

$$\bar{n} = \{A;\ B;\ C\}$$

и

$$\overline{M'M_1},$$

где $M'(x'; y'; z')$ есть основание перпендикуляра, проведенного из точки $M_1$ к данной плоскости, коллинеарны, то

$$(\bar{n}, \overline{M'M_1}) = \pm|\bar{n}| \cdot d \quad . \qquad (2)$$

В равенстве (2) правая часть берется со знаком (+) или (-) в зависимости от того, направлены векторы $\bar{n}$ и $\overline{M'M_1}$ в одну или в противоположные стороны.

Так как

$$(\bar{n}; \overline{M'M_1}) = A(x_1 - x') + B(y_1 - y') + C(z_1 - z') =$$

$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax' + By' + Cz') = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D -$$

$$- (Ax' + By' + Cz' + D) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

(точка $M'$ лежит на данной плоскости) и

$$|\bar{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad ,$$

то

$$d = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

или

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ .$$

Замечание. Если уравнение плоскости приведено к нормальному виду

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 ,$$

то его нормальный вектор

$$\bar{n}^{\circ}=\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$$

направлен от начала координат к плоскости и

$$d=\pm(\bar{n}^{\circ};\ \overline{M'M_1}) .$$

В этом случае величина

$$\delta=(\bar{n}^{\circ};\ M'M_1)=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-(x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma)=$$
$$=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p-(x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma-p)=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+$$
$$+z\cos\gamma-p$$

называется отклонением точки $M_I$ от плоскости. Это отклонение положительно, если точка $M_I$ и начало координат лежат по разные стороны от плоскости (векторы $\bar{n}^{\circ}$ и $\overline{M'\ M_I}$ направлены в одну сторону), и - отрицательно, если точка $M_I$ и начало координат лежат по одну сторону от плоскости (векторы направлены в противоположные стороны).
Таким образом,

$$d=|\delta| .$$

## § 18. Взаимное расположение двух плоскостей

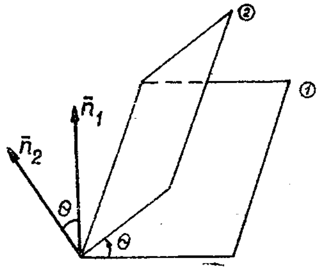


Рис. 45.

Пусть в пространстве заданы две плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D=0 \qquad (I)$$

и

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 . \qquad (2)$$

Линейный угол $\theta$ между этими плоскостями равен углу между их нормальными векторами (рис. 45).

Поэтому

$$\cos\theta = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} .$$

Если плоскости взаимно перпендикулярны, то

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

и

$$(n_1 ; n_2) = 0 .$$

Поэтому равенство

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

является условием перпендикулярности двух плоскостей. Если же плоскости параллельны, то векторы $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ коллинеарны и, следовательно,

$$\bar{n}_1 = t\bar{n}_2 ,$$

откуда получается условие параллельности двух плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \ (=t) .$$

Это условие включает в себя и случай совпадающих плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} .$$

Плоскости не совпадают, если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} .$$

## § I9. Прямая линия в пространстве

Как известно, две непараллельные плоскости пересекаются по прямой линии, следовательно, прямая в пространстве может быть задана как система, составленная из уравнений данных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 , \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 , \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

так как координаты любой точки этой линии удовлетворяют обоим уравнениям.

Уравнения (I) называются общими уравнениями прямой. Эта прямая проходит перпендикулярно относительно нормальных векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ данных плоскостей (I), следовательно, вектор

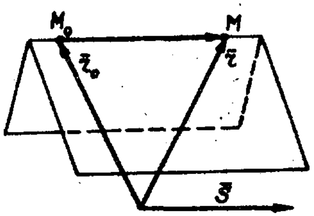



Рис. 46.

$$\bar{S}=[\bar{n}_1;\bar{n}_2]=m\bar{i}+n\bar{j}+p\bar{k}, \quad (2)$$

где $m=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $n=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$

и $p=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$,

параллелен прямой.

Если $M_0(a;\ в;\ c)$ и $M\ (x;\ y;\ z)$ есть данная и текущая точки прямой, то векторы $\bar{S}$ и $\overline{M_0M}$ (рис. 46), коллинеарны, следовательно,

$$\overline{M_0M}=t\bar{S}$$

или

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p}\ (=t) \quad . \qquad (3)$$

Условие коллинеарности векторов (3) дает канонические уравнения рассматриваемой прямой, так как равенствам (3) удовлетворяют координаты только тех точек, которые лежат на линии пересечения плоскостей (I).

Вектор $\bar{S}$, параллельный данной прямой, называется направляющим вектором этой прямой, а его проекции $m$, $n$ и $p$ – направляющими коэффициентами прямой. В случае, если в качестве направляющего вектора прямой взять единичный вектор $\bar{S}^{\circ}$ направления вектора $\bar{S}$, то уравнения прямой примут вид

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-в}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma},$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ есть проекции вектора $\bar{S}^{\circ}$, которые называются направляющими косинусами прямой (вектора $\bar{S}$ ). Эти косинусы можно найти по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \quad \cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \quad \cos\gamma=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

В канонических уравнениях прямой (3) все коэффициенты $m, n$ и $p$ одновременно в нуль обратиться не могут, так как вектор $\bar{S}$ не является нулевым вектором. Однако некоторые из этих коэффициентов могут равняться нулю. В этом случае запись (3) понимают условно, а именно так, что проекции векторов $\bar{S}$ и $\overline{M_0M}$ на одну и ту же ось одновременно равны нулю. Например, если $m = 0$, то и $x-a = 0$, а данная прямая находится в плоскости, перпендикулярной оси OX и пересекающей ось OX в точке $x = a$. Следовательно, данная прямая перпендикулярна оси OX и все ее точки имеют одну и ту же абсциссу $x = a$.

При $n = p = 0$ прямая перпендикулярна плоскости $YOZ$, то есть параллельна оси OX.

Из треугольника $OM_0M$ (рис. 46) следует, что

$$\overline{OM} = \overline{OM_0} + \overline{M_0M},$$

поэтому прямая в пространстве может быть задана уравнением в векторной форме:

$$\bar{r}=\bar{r}_0+t\cdot\bar{S}, \qquad (4).$$

где

$$\bar{r}_0=\{a;\ b;\ c\}, \quad \bar{r}=\{x;\ y;\ z\}$$

и

$$t\bar{S}=\overline{M_0M},$$

а $t$ играет роль переменного параметра.

При изменении значения $t$ точка M перемещается по данной прямой. Если $t$ пробегает значения от ( $-\infty$ ) до ( $+\infty$ ), то точка M описывает всю прямую.

Уравнение (4) равносильно трем равенствам:

$$x=a+tm, \quad y=b+tn, \quad z=c+tp; \qquad (5)$$

которые называются параметрическими уравнениями прямой.

## § 20. Преобразование видов уравнений пространственной прямой

Пусть прямая в пространстве задана общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы записать эту прямую в виде векторного уравнения (или в каноническом виде), нужно задать точку $M_0$ и направляющий вектор $\bar{S}$ этой прямой. Это можно сделать следующим образом. Положив $z_0 = 0$, найти соответствующие значения $x_0$ и $y_0$. Получаем при этом точку $M_0(x_0; y_0; 0)$.
В качестве вектора $\bar{S}$ можно взять векторное произведение векторов $\bar{n}_1$ и $n_2$:

$$\bar{S}=[\bar{n}_1; \bar{n}_2].$$

В итоге получаем уравнение

$$\bar{r}=\bar{r}_0+t\bar{S}$$

или $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z}{p}$,

от которого легко перейти к параметрическим уравнениям, а затем и к каноническим (или векторному).

Если прямая задана каноническими уравнениями:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}, \qquad (2)$$

то легко получить параметрические уравнения:

$$\left(\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{p}=t\right) \quad x=a+mt,\ y=b+nt,\ z=c+pt\ .$$

От параметрических уравнений легко перейти к векторному:

$$\bar{r}=\bar{r}_0+t\bar{S}\ .$$

Система уравнений плоскостей

$$\begin{cases} \dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}, \\ \dfrac{x-a}{m}=\dfrac{z-c}{p}, \end{cases}$$

проходящих через данную прямую, дает общие уравнения прямой.

## § 21. Уравнения прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через две точки пространства $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

В этом случае в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\overline{M_1M_2}$, проекции которого на координатные оси будут:

$$m=x_2-x_1\ ,\quad n=y_2-y_1\ ,\quad p=z_2-z_1\ .$$

Уравнения искомой прямой примут вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ .$$

## § 22. Угол между двумя прямыми в пространстве

Углом между двумя прямыми в пространстве будем называть любой из углов, образованных прямыми, проведенными через произвольную точку того же пространства параллельно данным прямым. Очевидно, угол между направляющими векторами прямых равен одному из вышеуказанных углов.

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и
$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_1}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2} ,$$

тогда направляющие векторы этих прямых есть

$$\bar{S}_1=\{m_1 ;\ n_1 ;\ p_1\}$$

и
$$\bar{S}_2=\{m_2 ;\ n_2 ;\ p_2\}$$

и, следовательно, угол $\varphi$ между прямыми можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{S}_1 ; \bar{S}_2)}{|\bar{S}_1|\cdot|\bar{S}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} .$$

Так как косинус второго угла отличается от рассмотренного косинуса только знаком, то по формуле

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

можно найти оба угла.

Если прямые перпендикулярны, то

$$(\bar{S}_1 ; \bar{S}_2)=0 .$$

Следовательно, равенство

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 .$$

является условием перпендикулярности двух прямых.

Если прямые параллельны, то

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

(условие параллельности прямых), т.к. в этом случае векторы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ коллинеарны:

$$\bar{S}_1=t\,\bar{S}_2 .$$

11-7897

## § 23. Пересечение двух прямых

Пусть заданы две прямые своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и $$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

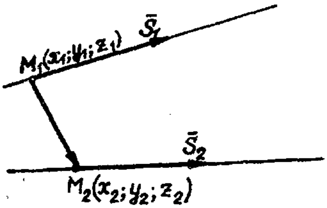



Рис. 47.

Если прямые не параллельны (условие

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (1)$$

не выполняется), то они либо скрещивающиеся, либо пересекающиеся. Если прямые пересекаются, то векторы $\overline{M_1M_2}$, $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ (рис. 47) компланарны.

Здесь

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$$

$$\bar{S}_1=\{m_1,\ n_1,\ p_1\},\qquad \bar{S}_2=\{m_2,\ n_2,\ p_2\}$$

Таким образом, необходимым условием пересечения двух прямых является равенство

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Если равенство (1) не выполняется, а равенство (2) выполняется, то прямые пересекаются, а если равенства (1) и (2) не выполняются, то прямые скрещивающиеся.

## § 24. Основные задачи на плоскость

Задача I. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости.

Пусть дана точка $M_I(x_I, y_I, z_1)$ и плоскость

$$A_I x + B_I y + C_I z + Д_I = 0,$$

то есть дан вектор $\bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$.

Напишем уравнение искомой плоскости, проходящей через данную точку:

$$\bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_1) = 0$$

или

$$A(x - x_I) + B(y - y_I) + C(z - z_1) = 0,$$

где

$$\bar{n} = \{A; B; C\}.$$

Эта плоскость должна быть параллельна данной плоскости, следовательно, вектор $\bar{n}$ коллинеарен вектору $\bar{n}_1$, то есть

$$\bar{n} = \lambda \bar{n},$$

Можно взять $\bar{n} = \bar{n}_1$, то есть $A = A_I$, $B = B_I$, $C = C_I$ $\left(\frac{A}{A_I} = \frac{B}{B_I} = \frac{C}{C_I}\right)$.

Тогда уравнение искомой плоскости примет вид:

$$A_I(x - x_I) + B_I(y - y_I) + C_I(z - z_1) = 0.$$

Пример: Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(I, 2, -I)$ параллельно плоскости

$$3x - 2y + z - 5 = 0.$$

<u>Решение</u>. Дано: $M_I$ (I,2, - I) и $\bar{n}_1=\{3, -2, I\}$.

Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости.

Искомая плоскость есть

$$3(x - I) - 2(y - 2) + (z + I) = 0$$

или

$$3x - 2y + z + 2 = 0.$$

<u>Задача 2</u>. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки перпендикулярно данной плоскости.

Пусть дано: точки $M_I(x_I, y_I, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и плоскость

$$A_I x + B_I y + C_I z + Д_I = 0,$$

нормальный вектор которой есть

$$n_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\}.$$

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_I$

$$\bar{n}\cdot(\bar{r} - r_1) = 0$$

или

$$A(x - x_I) + B(y - y_I) + (z - z_1) = 0.$$

Но этому же уравнению должны удовлетворять координаты точки $M_2$, то есть

$$\bar{n}\cdot(\bar{r}_2 - r_1) = 0.$$

Кроме того, вектор $\bar{n}$ перпендикулярен вектору $\bar{n}_1$. Итак, вектор $\bar{n}$ должен быть перпендикулярен векторам $\bar{n}_1$ и $\overline{M_I M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$.

Можно взять вектор $\bar{n}$ равный векторному произведению векторов $\bar{n}_1$ и $\overline{M_I M_2}$, то есть

$$\bar{n} = \bar{n}_1 \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1).$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М (I,2, -I) перпендикулярно двум плоскостям

$$2x - y + z - 5 = 0$$

и

$$2x - 8y + z - 3 = 0.$$

Дано: $\bar{n}_1=\{2; -1; 1\}$, $\bar{n}_2=\{2; -8; 1\}$ и $M(1; 2; -1)$.

Найти уравнение плоскости.

Решение.

$$\bar{n}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 1 \end{vmatrix}=7\bar{i}-14\bar{k},$$

$$\bar{n}=7(\bar{i}-2\bar{k}).$$

За нормальный вектор искомой плоскости можно взять вектор

$$\bar{n}_3=\bar{i}-2\bar{k},$$

коллинеарный вектору $\bar{n}$.

Тогда уравнение искомой плоскости будет

$$\bar{n}_3\cdot(\bar{r}-\bar{r}_1)=0$$

или, так как

$$(\bar{r}-\bar{r}_1)=\{(x-1);(y-2);(z+1)\}$$

и

$$\bar{n}_3=\{1; 0; -2\},$$

$$1(x-1)+0(y-2)-2(z+1)=0.$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости есть

$$x - 2z - 3 = 0.$$

<u>Пример</u>. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_I(I, I, I)$ и $M_2\ (0, I, -I)$ перпендикулярно плоскости

$$x + y + z = 0.$$

<u>Решение</u>. Дано:

$$\bar{n}_1=\{1;\ 1;\ 1\},\quad \bar{r}_1=\{1;\ 1;\ 1\},\quad \bar{r}_2=\{0;\ 1;\ -1\}.$$

Найти уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости

$$x + y + z = 0$$

и проходящей через точки $M_I$ и $M_2$. Искомое уравнение плоскости будет

$$\bar{n}\cdot(\bar{r}-\bar{r}_1)=0$$

или

$$A\,(x - I) + B\,(y - I) + C\,(z - I) = 0.$$

Точка $M_2$ должна удовлетворять этому уравнению:

$$\bar{n}\cdot(\bar{r}_2-\bar{r}_1)=0,$$

то есть

$$\bar{n}\perp\bar{r}_2-\bar{r}_1.$$

Вектор

$$\overline{M_IM_2}=\bar{r}_2-\bar{r}_1=-\bar{i}-2\bar{k}.$$

Нормальный вектор искомой плоскости есть

$$\bar{n}=\bar{n}_1\times\overline{M_1M_2}$$

или

$$\bar{n}=\bar{n}_1\times(\bar{r}_2-\bar{r}_1).$$

$$\bar{n}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=-2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}.$$

Искомое уравнение будет

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0,$$

откуда

$$-2x+y+z=0$$

или

$$2x-y-z=0.$$

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно двум плоскостям

$$A_1x+B_1y+C_1z+Д_1=0$$

и

$$A_2x+B_2y+C_2z+Д_2=0.$$

Так как даны две плоскости их уравнениями, то нам известны нормальные векторы этих плоскостей

$$\bar{n}_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$$

и

$$\bar{n}_2=\{A_2;\ B_2;\ C_2\}.$$

Нормальный вектор искомой плоскости должен быть перпендикулярен векторам $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$. Следовательно, его можно взять равным векторному произведению этих векторов:

$$\bar{n}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2.$$

Пусть

$$\bar{n}=\{A;\ B;\ C\},$$

тогда уравнение искомой плоскости будет

$$\bar{n}\cdot(\bar{r}-\bar{r}_1)=0$$

или

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

## § 25. Прямая и плоскость

Пусть в пространстве заданы прямая

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \qquad (1)$$

и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2)$$

Как известно, углом $\varphi$ между прямой и плоскостью называется угол, образованный этой прямой и ее проекцией на плоскость. Это определение дает два угла (острый и тупой), дополняющие друг друга до $\pi$. В зависимости от выбора направляющего вектора прямой $\bar{s}$ и нормального вектора плоскости $\bar{n}$, угол между ними $\psi$ может быть равен $\frac{\pi}{2}-\varphi$ или $\frac{\pi}{2}+\varphi$, если $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ и $\varphi-\frac{\pi}{2}$, или $\frac{3}{2}\pi-\varphi$, если $\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\pi$.

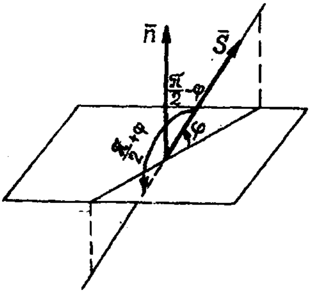


Рис. 48.

Во всех случаях $\cos\psi=\pm\sin\varphi$,

поэтому $\sin\varphi=|\cos\psi| \quad (\sin\varphi\geq 0)$.

Итак,
$$\sin\varphi=\left|\frac{(\bar{n};\bar{s})}{|\bar{n}|\cdot|\bar{s}|}\right|=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (3)$$

Если прямая и плоскость параллельны, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{s}$ перпендикулярны, следовательно, равенство

$$Am+Bn+Cp=0$$

является условием параллельности прямой и плоскости. Если же прямая и плоскость перпендикулярны, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{s}$ коллинеарны, следовательно, условием перпендикулярности прямой и плоскости являются равенства:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} .$$

Если прямая и плоскость пересекаются, то для нахождения точки пересечения необходимо решить систему, составленную из уравнений этих геометрических образов относительно x, y и $z$ .

Для простоты решения записывают прямую в виде параметрических уравнений

$$x=a+tm , \quad y=b+tn , \quad z=c+tp . \qquad 4)$$

Подставив эти выражения в уравнение плоскости (2), получим значение параметра $t$ , соответствующее искомой точке пересечения:

$$t=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp} .$$

Подставив это значение $t$ в равенства (4), получим координаты искомой точки.

Если выполняются условия параллельности прямой и плоскости

$$Am+Bn+Cp=0$$

и принадлежности точки прямой $M_0(a,b,c)$ плоскости

$$Aa+Bb+Cc+D=0 ,$$

то прямая лежит в плоскости.

## § 26. Основные задачи на прямую и плоскость в пространстве

Задача I. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно данной плоскости

$$Ax + By + Cz + Д = 0$$

Направляющий вектор искомой прямой коллинеарен нормальному вектору

$$\bar{n}=\{A ;\ B ;\ C\} ,$$

следовательно,
$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \quad .$$

Искомое уравнение будет:
$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C} \quad .$$

<u>Пример</u>. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, -2, -3)$ перпендикулярно плоскости
$$2x - 3y + z - 5 = 0 .$$

<u>Решение</u>.
$$\bar{n}=\{2, -3, 1\}, \quad \bar{S}=\{m, n, p\}$$
$$\bar{n} \parallel \bar{S}, \qquad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \quad .$$

Можно взять $m=2, \quad n=-3, \quad p=1$ .

Искомое уравнение есть
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+3}{1} \quad .$$

<u>Задача 2</u>. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно данной прямой
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad .$$

В качестве нормального вектора плоскости можно взять вектор
$$\bar{S}=\{m; n; p\} \quad ,$$
так как вектор $\bar{S}$ коллинеарен нормальному вектору. Искомое уравнение будет
$$m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0 \quad .$$

<u>Пример</u>. Через точку М (3, -2, I) провести плоскость, перпендикулярную прямой

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3} .$$

<u>Решение</u>. $\bar{S}=\{4;\ -1;\ 3\}$ , $\bar{S} \parallel \bar{n}$ .

Искомое уравнение будет

$$4(x-3)-1(y+2)+3(z-1)=0$$

или

$$4x-y+3z-17=0 .$$

<u>Задача 3</u>. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

и через данную точку $M_I(x_I;y_1;z_1)$, не лежащую на данной прямой. Искомая плоскость может быть представлена уравнением

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 ,$$

где нормальный вектор

$$\bar{n}=\{A, B, C\}$$

нам неизвестен.

Вектор $\overline{M_0M_I}=\{x_1-x_0 ,\ y_1-y_0 ,\ z_1-z_0\}$

лежит на искомой плоскости, следовательно, этот вектор перпендикулярен вектору $\bar{n}$ . Вектор

$$\bar{S}=\{m, n, p\}$$

тоже перпендикулярен вектору $\bar{n}$ . Итак, нормальный вектор искомой плоскости

$$\bar{n}=\overline{M_0M_1}\times\bar{S} .$$

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_I(2, -2, 0)$ и через прямую

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-2}.$$

Решение. $\bar{S}=\{2, 1, -2\}$ и $\overline{M_0M_1}=\{1; 0, 1\}$.
Нормальный вектор плоскости

$$\bar{n}=\bar{S}\times\overline{M_0M_1}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}-4\bar{j}-\bar{k},$$

$$\bar{n}=\{1, -4, -1\}.$$

Искомое уравнение есть

$$1(x-2)-4(y+2)-1(z-0)=0$$

или

$$x-4y-z-10=0.$$

Задача 4. Найти проекцию точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость

$$A_I x + B_I y + C_I z + Д_I = 0.$$

Составляем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0$ и перпендикулярной к данной плоскости, а затем находим точку пересечения этого перпендикуляра с данной плоскостью.

Пример. Найти проекцию точки $M(I,2,-3)$ на плоскость

$$6x - y + 3z - 4I = 0.$$

Решение. Запишем уравнение прямой, перпендикулярной к данной плоскости и проходящей через точку $M(I, 2, -3)$:

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{3}$$

и найдем точку пересечения этой прямой с данной плоскостью:

$$\begin{cases} x=6t+1\ , \\ y=-t+2\ , \\ z=3t-3\ ; \end{cases}$$

$$6(6t+1)-(2-t)+3(3t-3)-41=0\ ,$$
$$36t+6-2+t+9t-9-41=0\ ,$$
$$46t=4\ ,\quad t=1\ ;$$
$$x=7\ ,\quad y=1,\quad z=0\ .$$

Искомая проекция будет $M_p(7,\ 1,\ 0)$.

Задача 5. Составить уравнение проекции прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

на плоскость

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Напишем уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярную данной плоскости. Нормальный вектор этой плоскости перпендикулярен вектору $\bar{S}=\{m,n,p\}$ и вектору $\bar{n}_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$. Можно взять в качестве нормального вектора вектор, равный векторному произведению векторов $\bar{S}\times\bar{n}_1$ и эта плоскость проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Полученная плоскость и данная плоскость, взятые вместе, дадут нам линию пересечения, которая и является искомой проекцией.

Пример. Составить уравнение проекции прямой

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-4}{1}$$

на плоскость

$$2x-2y+3z-5=0.$$

Решение. Нам известны векторы $\vec{S}=\{5, 1, 1\}$, $\vec{n}_1=\{2;-2;3\}$ и точка $M_0$ (3, -I, 4). Нормальный вектор плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно данной плоскости будет:

$$\vec{n}=\vec{S}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}=5\vec{i}-13\vec{j}-12\vec{k} .$$

Уравнение плоскости будет:

$$5(x-3)-13(y+1)-12(z-4)=0,$$
$$5x-13y-12z+20=0.$$

Искомая проекция будет:

$$\begin{cases} 5x-13y-12z+20=0, \\ 2x-2y+3z+5=0. \end{cases}$$

Задача 6. Найти расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} .$$

Через точку $M_1$ проводим плоскость, перпендикулярную данной прямой

$$m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0 .$$

Затем находим точку пересечения данной прямой с этой плоскостью и расстояние от этой точки до точки $M_1$.

Пример. Найти расстояние точки M (I, 3, 5) до прямой

$$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-1} .$$

Плоскость, перпендикулярная прямой и проходящая через точку M (I,3,5), будет

$$1(x-1)-1(y-3)-1(z-5)=0$$

или

$$x-y-z+7=0.$$

Найдем точку пересечения этой плоскости с данной прямой:

$$x=t,\quad y=-1-t,\quad z=2-t,\quad t+1+t-2+t+7=0,\quad 3t=-6,\quad t=-2,$$
$$x=-2,\quad y=1,\quad z=4,\quad M_p(-2,1,4).$$

Расстояние от данной точки M (I, 3, 5) до точки $M_p(-2, 1, 4)$ будет:

$$d=\sqrt{(1+2)^2+(3-1)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}\quad.$$

Задача 7. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\quad.$$

Здесь возможны три случая:

1) прямые пересекаются и расстояние между ними равно нулю,
2) прямые параллельны,
3) прямые скрещиваются.

I. Если $(\bar S_1\times\bar S_2)\cdot\overline{M_1M_2}=0$ , причем $\bar S_1$ и $\bar S_2$ не коллинеарны,

где $\bar S_1=\{m_1;\, n_1;\, p_1\}$, $\bar S_2=\{m_2;\, n_2;\, p_2\}$, $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1\}$

то кратчайшее расстояние между прямыми равно нулю.

2. Если векторы $\bar S_1$ и $\bar S_2$ коллинеарны, то прямые параллельны. В этом случае достаточно найти расстояние от любой точки прямой, например, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до другой прямой.

Пример. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x+6}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}$$

и

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-1}\quad.$$

<u>Решение.</u> Дано: $\bar{S}_1=\{1,-2,-1\}$, $\bar{S}_2=\{1,-2,-1\}$, $M_1(-6;-1;0)$, $M_2(1;0;-1)$.

Найдем расстояние от точки $M_2(1,0,-1)$ до прямой

$$\frac{x+6}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}\ .$$

Для этого через точку $M_2$ проведем плоскость, перпендикулярную второй прямой:

$$1(x-1)-2(y-0)-1(z+1)=0$$

или

$$x-2y-z-2=0.$$

Найдем точку пересечения этой плоскости с прямой

$$\frac{x+6}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}$$

или

$$\begin{cases} x=t-6\ , \\ y=-2t-1, \\ z=-t\ . \end{cases}$$

Имеем:

$$1(t-6)-2(-2t-1)-1(-t)-2=0\ ,\quad 6t-6=0,\quad t=1,$$

$$x=-5,\quad y=-3,\quad z=-1,\quad M_p(-5,-3,-1)\ .$$

Расстояние от точки $M_2$ до $M_p$ будет

$$d=\sqrt{(1+5)^2+(0+3)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{6^2+3^2+0}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

„Кратчайшее" расстояние между данными параллельными прямыми будет равно $3\sqrt{5}$.

3. Если прямые скрещиваются, то через одну из прямых проводим плоскость, параллельную второй прямой, а затем находим расстояние от точки, заданной на второй прямой, до этой плоскости.

<u>Пример.</u> Найти кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$$

и

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{3} \quad .$$

<u>Решение</u>. Дано: $\bar{S}_1=\{1,-1,2\}$, $M_1(3,1,2)$;
$\bar{S}_2=\{-1,3,3\}$, $M_2(0,2,0)$.

Проведем через первую прямую плоскость, параллельную второй прямой. Искомая плоскость будет проходить через точку $M_I(3, I, 2)$:

$$A(x-3)+B(y-I)+C(z-2)=0$$

Нормальный вектор этой плоскости будет перпендикулярен векторам $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$, поэтому его можно взять равным

$$\bar{n}=\bar{S}_1\times\bar{S}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix}=-9\bar{i}-5\bar{j}+2\bar{k} \ ;$$

$$\bar{n}=\{-9,-5,2\} \ .$$

Уравнение плоскости примет вид

$$-9(x-3)-5(y-I)+2(z-2)=0,$$
$$9(x-3)+5(y-I)-2(z-2)=0$$

или

$$9x+5y-2z-28=0.$$

Теперь найдем расстояние от точки $M_2(0, 2, 0)$ до этой плоскости:

$$d=\frac{|9\cdot0+5\cdot2-2\cdot0-28|}{\sqrt{9^2+5^2+2^2}}=\frac{18}{\sqrt{110}} \ .$$

Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми равно $\frac{18}{\sqrt{110}}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно прямым

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Нормальный вектор искомой плоскости перпендикулярен векторам $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ следовательно, его можно взять равным векторному произведению векторов $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ :

$$\bar{n}=\bar{S}_1\times\bar{S}_2 .$$

Тогда искомое уравнение будет (если $\bar{n}=\{A, B, C\}$ )

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Пример. Составить уравнение плоскости,проходящей через точку $M(1,1,-3)$ и параллельной прямым

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{11}=\frac{z-2}{6}$$

и

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1} .$$

Решение. Дано: $M_1(1,-2,2)$, $\bar{S}_1=\{2, 11, 6\}$;
$M_2(0,1,-2)$, $\bar{S}_2=\{1, 2, 1\}$.

Нормальный вектор искомой плоскости будет перпендикулярен векторам $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ и , следовательно, его можно взять равным

$$\bar{n}=\bar{S}_2\times\bar{S}_1=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 11 & 6\end{vmatrix}=\bar{i}-4\bar{j}+7\bar{k} ;$$

$$\bar{n}=\{1, -4, 7\}$$

Искомое уравнение будет:

$$1(x - 1) - 4(y - 1) + 7(z + 3) = 0$$

или

$$x - 4y + 7z + 24 = 0.$$

## § 27. Пучок плоскостей

Пусть в пространстве даны две плоскости своими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (1)$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (2)$$

Если плоскости (1) и (2) пересекаются, то уравнение

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (3)$$

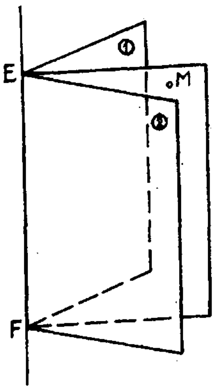



Рис. 49.

определяет плоскость, проходящую через прямую, определяемую данными плоскостями. В самом деле, координаты любой точки прямой $EF$ (рис. 49) удовлетворяют уравнению (3), так как, удовлетворяя уравнениям (1) и (2), они обращают выражения, стоящие в скобках уравнения (3), в нуль. Параметры $\lambda_1$ и $\lambda_2$ в уравнении (3) могут принимать всевозможные действительные значения, причем

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0 \ .$$

При этом получаются всевозможные плоскости, проходящие через прямую, определяемую уравнениями (1) и (2).

Обратно, если нужно выбрать плоскость, проходящую через прямую $EF$ и удовлетворяющую еще одному условию, то можно найти такие значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$, что из уравнения (3) выделится уравнение искомой плоскости.

<u>Задача</u>. Выбрать из уравнения (3) уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащую на прямой $\varepsilon F$.

<u>Решение</u>. Подставив координаты точки $M_0$ в уравнение (3), получим:

$$\lambda_1(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)+\lambda_2(A_2x_0+B_2y_0+C_2z+D_2)=0 .$$

Если точка $M_0$ не лежит на плоскости (I), то

$$\lambda_1=-\frac{A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2}{A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1}\cdot\lambda_2=R\lambda_2 .$$

Подставим это выражение для $\lambda_1$ в уравнение (3):

$$R\lambda_2(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

или, приведя подобные члены,

$$(RA_1+A_2)x+(RB_1+B_2)y+(RC_1+C_2)z+(RD_1+D_2)=0 .$$

Это есть уравнение искомой плоскости, так как она проходит через прямую $\varepsilon F$ и координаты точки $M_0$ удовлетворяют ему.

Если же точка $M_0$ лежит на плоскости (I), то

$$\lambda_2=-\frac{A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1}{A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2}\cdot\lambda_1=0 .$$

При этом получается уравнение плоскости (I):

$$\lambda_1(A_Ix+B_Iy+C_1z+Д_I)=0$$

или

$$A_Ix+B_Iy+C_Iz+Д_I=0.$$

В случае, если $M_0$ лежит на плоскости (2), то $\lambda_1=0$ и получается уравнение (2).

В связи с вышеизложенным уравнение (3) называется уравнением пучка плоскостей, проходящих через данную прямую.

<u>Замечание</u>. Если данные плоскости параллельны, то уравнение (3) определяет семейство плоскостей, параллельных данным плоскостям.

## § 28. Взаимное расположение трех плоскостей

Три плоскости в пространстве

$$A_I x + B_I y + C_I z + Д_I = 0, \qquad (I)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + Д_2 = 0, \qquad (II)$$

$$A_3 x + B_3 y + C_3 z + Д_3 = 0 \qquad (III)$$

могут быть так расположены, что их нормальные векторы будут компланарными или некомпланарными. Рассмотрим эти случаи.

### I. Случай некомпланарных нормальных векторов
### Точка пересечения трех плоскостей

Пусть нормальные векторы

$\bar{n}_1=\{A_1; B_1; C_1\}$, $\bar{n}_2=\{A_2; B_2; C_2\}$ и $\bar{n}_3=\{A_3; B_3; C_3\}$

данных плоскостей (I), (II) и (III) не компланарны. В этом случае данные плоскости имеют единственную общую точку, а система трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}, \qquad (2)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A_3 & -D_3 & C_3 \end{vmatrix}; \ \Delta_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & -D_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

все определители третьего порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} A_I & B_I & C_I & -Д_I \\ A_2 & B_2 & C_2 & -Д_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -Д_3 \end{pmatrix} . \qquad (4)$$

Поскольку векторы не компланарны, то их векторно скалярное произведение не равно нулю, то есть $\Delta \neq 0$ и формулы Крамера имеют смысл.

## 2. Случай компланарных векторов

Если нормальные векторы плоскостей $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ и $\bar{n}_3$ компланарны, то $\Delta = 0$ и формулы Крамера (2) не имеют смысла. Для всевозможных подслучаев расположения плоскостей в пространстве, нормальные векторы которых компланарны, общим является то, что все они параллельны одной и той же прямой.

Рассмотрим эти подслучаи.

I. Нормальные векторы плоскостей коллинеарны.

Из условия коллинеарности векторов следует, что коэффициенты при X, У и Z уравнений плоскостей соответственно пропорциональны:

$$A_I : A_2 : A_3 = B_I : B_2 : B_3 = C_I : C_2 : C_3 . \qquad (5)$$

а) Если все три плоскости совпадают, то каждая точка любой плоскости является общей для всех плоскостей, а система (I) имеет бесчисленное множество решений.

В этом случае все три уравнения выражают аналитически одну и ту же плоскость и отличаются друг от друга постоянным множителем, следовательно, отношения свободных членов

$$Д_I : Д_2 : Д_3$$

равны отношениям (5). Тогда все определители третьего порядка и миноры матрицы (4) равны нулю.

б) Если среди трех плоскостей, нормальные векторы которых коллинеарны, есть несовпадающие плоскости, то не существует общих точек всех плоскостей, а система (I) не имеет решения.

<u>Теорема I.</u> Если определитель третьего порядка равен нулю, то, по крайней мере, один из его рядов является линейной комбинацией двух других параллельных ему рядов.

<u>Доказательство.</u> Пусть

$$\begin{vmatrix} a_I & b_I & c_I \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Если окажется, что минор $\begin{vmatrix} a_I & b_I \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ равен нулю, то

$$\frac{a_2}{a_I} = \frac{b_2}{b_I} = t$$

и определитель (6) преобразуется к виду

$$\begin{vmatrix} a_I & b_I & c_I \\ 0 & 0 & c_2 - tc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

откуда

$$(c_2 - tc_1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Если

$$c_2 - tc_1 = 0 ,$$

то

$$\frac{c_2}{c_2} = t$$

и получается, что

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} ,$$

то есть элементы второй строки пропорциональны соответствующим элементам первой строки. Элементы второй строки получаются путем сложения элементов первой строки, умноженных на $t$, и элементов третьей строки, умноженных на ноль, то есть вторая строка является линейной комбинацией первой и третьей строк.

Если же

$$c_2 - t\,c_I \neq 0,$$

то

$$a_I\,в_3 - a_3\,в_I = 0$$

или

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_3}{b_3} .$$

Но тогда элементы второго столбца пропорциональны элементам первого столбца, то есть второй столбец является линейной комбинацией первого и третьего столбцов.

Пусть теперь минор $\begin{vmatrix} a_I & в_I \\ a_2 & в_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю. В этом случае можно единственным образом подобрать такие два числа $\alpha$ и $\beta$, что будут справедливы равенства

$$a_I\alpha + a_2\beta = a_3 ,$$
$$в_I\alpha + в_2\beta = в_3 .$$

В самом деле, эта система имеет единственное решение, так как определитель системы отличен от нуля.

Если окажется, что

$$c_3 = c_I\alpha + c_2\beta ,$$

то третья строка является линейной комбинацией первых двух строк.

Если же

$$c_3 \neq c_I\alpha + c_2\beta ,$$

то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 - \alpha c_1 - \beta c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (c_3 - \alpha c_1 - \beta c_2)\cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

что противоречит условию. Теорема доказана.

<u>Теорема 2</u>. Если какой-либо столбец определителя третьего порядка является линейной комбинацией двух других столбцов, то найдется в этом определителе и строка, являющаяся линейной комбинацией двух других строк.

<u>Доказательство</u>.

Пусть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha a_1 + \beta b_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha a_2 + \beta b_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha a_3 + \beta b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Тогда, если окажется, что минор $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ равен нулю, то

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

и вторая строка является линейной комбинацией первой и третьей строк.

Если же этот минор не равен нулю, то система

$$\begin{cases} a_1 m + a_2 n = a_3 \\ b_1 m + b_2 n = b_3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и элементы третьей строки получаются путем сложения элементов первой строки, умноженных на $m$ и элементов второй строки, умноженных на $n$, то есть третья строка является линейной комбинацией первых двух строк. Теорема доказана.

Если рассмотреть в этом случае матрицу (4), то все ее определители третьего порядка равны нулю, в том числе и определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & -D_3 \end{vmatrix} ,$$

так как

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} .$$

Но тогда одна из его строк является линейной комбинацией двух других строк, следовательно, одна из строк матрицы (4) является линейной комбинацией двух других строк.

Этот вывод вполне согласуется с тем, что две параллельные плоскости (например, плоскости (I) и (II)) образуют семейство параллельных плоскостей, выражаемое уравнением:

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

а третья плоскость принадлежит этому семейству.

Все миноры матрицы, которые не содержат свободных членов "Д", равны нулю, а некоторые миноры, содержащие свободные члены "Д" уравнений параллельных плоскостей (с индексами "I" и "2"), отличны от нуля, так как

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2},$$

и найдем, по крайней мере, один из коэффициентов $A_I$, $B_I$, $C_I$, который отличен от нуля.

2) Пусть векторы $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ коллинеарны между собой, но не коллинеарны вектору $\bar{n}_3$, причем

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2},$$

то есть плоскости (I) и (II) параллельны (не совпадают). В этом случае система (I) не имеет решения.

Плоскость (III) пересекает две первые плоскости и не принадлежит семейству параллельных плоскостей, образуемому первыми двумя плоскостями, каждая из первых двух плоскостей не принадлежит пучку плоскостей, образуемому двумя остальными плоскостями. Следовательно, никакая строка матрицы (4) не является линейной комбинацией двух других строк и, по крайней мере, один из определителей третьего порядка этой матрицы, содержащих элементы "Д", отличен от нуля (в противоположном случае оказалось бы, что какая-нибудь строка матрицы (4) была бы линейной комбинацией двух других строк).

3) Если три плоскости пересекаются по трем параллельным прямым, то они не имеют ни одной общей точки, а система (I) не имеет решения.

В этом случае ни одна из плоскостей не принадлежит пучку, образованному двумя другими плоскостями. Следовательно, эти плоскости не имеют ни одной общей точки, а система (I) не имеет решения.

Ни одна строка матрицы (4) не является линейной комбинацией двух других строк и, по крайней мере, один из определителей третьего порядка, содержащих элементы "Д", отличен от нуля.

4) Если три плоскости пересекаются по одной и той же прямой, то каждая точка этой прямой является общей для всех плоскостей, а система (I) имеет бесчисленное множество решений.

В этом случае две несовпадающие плоскости (случай трех совпадающих плоскостей рассмотрен) образуют пучок плоскостей, которому принадлежит и третья плоскость. Эта третья плоскость может совпадать с одной из первых плоскостей.

Пусть плоскости (I) и (II) образуют пучок плоскостей, которому принадлежит и плоскость (III), тогда третья строка матрицы (4) является линейной комбинацией первых двух строк. Значит, все определители третьего порядка этой матрицы равны нулю.

Всякое решение системы (I) является решением системы:

$$\begin{aligned} &A_1x_1 + B_1y + C_1z + D_1 = 0\ , \\ &A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

и, обратно, всякое решение системы (7) является решением и системы (I). Так как векторы $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ не коллинеарны, то среди миноров матрицы (4), составленных из коэффициентов $A_I$, $B_I$, $C_I$, $A_2$, $B_2$, $C_2$, найдется, по крайней мере, один минор, отличный от нуля.

## § 29. Связка плоскостей

Если три плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\ ,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

и

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

имеют единственную общую точку, то уравнение

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+$$
$$+\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0$$

при всевозможных значениях параметров $\lambda_1, \lambda_2$ и $\lambda_3$ одновременно не равных нулю, есть уравнение плоскости, проходящей через ту же общую точку. Придавая всевозможные значения параметрам $\lambda_1, \lambda_2$ и $\lambda_3$, будем получать всевозможные плоскости, проходящие через указанную точку. В связи с этим последнее уравнение называется связкой плоскостей, образованной тремя данными плоскостями. Уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

также дает связку плоскостей, проходящих через точку ( $x_0$ , $y_0$, $z_0$ ) при всевозможных A , B и C, одновременно не равных нулю.

## § 30. Исследование системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1 ,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2 ,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3 . \end{aligned} \qquad (1)$$

1. Если определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

не равен нулю, то система (1) имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z=\frac{\Delta z}{\Delta} .$$

2. Если же $\Delta = 0$, то следует рассмотреть все остальные определители третьего порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

а именно:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

1) Если окажется, что хотя бы один из определителей (4) отличен от нуля, то система (I) не имеет решения.

2) Пусть все определители третьего порядка (4) матрицы (3) равны нулю. Будем рассматривать всевозможные миноры второго порядка матрицы (3).

а) Если окажется, что все они равны нулю, то все три уравнения системы (I) равносильны между собой и система сводится к одному уравнению.

Для нахождения решений системы нужно в одном из его уравнений придавать значения двум неизвестным и находить соответствующие значения третьего неизвестного.

При этом получается тройка чисел, являющаяся решением системы (I). Система имеет бесчисленное множество решений.

<u>Примечание</u>. В рассмотренном случае

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3 = c_1 : c_2 : c_3 = d_1 : d_2 : d_3 .$$

б) Если все миноры второго порядка матрицы (3), составленные из элементов "а", "в" и "с" равны нулю, а какой-нибудь минор, содержащий элементы " $d$ " отличен от нуля, то система (I) не имеет решения.

в) Если все миноры каких-нибудь двух строк (например, первой и второй) равны нулю, то нужно рассмотреть систему, составленную из двух уравнений, среди которых должно быть и не рассмотренное уравнение ( то есть, третье).

Если окажется, что какой-нибудь минор, составленный из коэффициентов при неизвестных этих уравнений не равен нулю, то, оставляя члены с этими неизвестными в левой части и перенося остальные члены в правую часть, мы будем получать для каждого значения неизвестного правой части единственные значения первых двух неизвестных, получая всякий раз тройку чисел, являющуюся решением системы (I). Система имеет бесчисленное множество решений.

г) Если же окажется, что для каждой пары строк определителя $\Delta$ найдется хотя бы по одному минору, отличному от нуля, то система имеет бесчисленное множество решений, которые находятся аналогично предыдущему, причем берется система из двух любых уравнений системы (I).

## § 31. Исследование однородных систем

1. Однородная система двух уравнений с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \ , \\ a_2x + b_2y = 0 \ . \end{cases}$$

Такая система всегда имеет нулевое решение $x = 0$, $y = 0$.

Если $\Delta \neq 0$, то это решение является единственным.

Если же $\Delta = 0$, то однородная система, кроме нулевого, имеет бесчисленное множество решений.

В самом деле, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

то есть

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} ,$$

то одно из уравнений есть следствие другого. Система сводится к одному уравнению, например,

$$a_1x + b_1y = 0$$

и, следовательно, имеет бесчисленное множество решений, определяемых с точностью до произвольного множителя $k$:

$$x = kb_1 , \quad y = -ka_1$$

и отличных от нулевого при $k \neq 0$.

Геометрически уравнениям заданной системы соответствует пара прямых, проходящих через начало координат, которые либо имеют одну общую точку - начало координат, либо сливаются, то есть имеют бесчисленное множество общих точек.

2. Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0\,, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0\,. \end{cases}$$

Предположим, что, по крайней мере, один из определителей

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z\,, \\ a_2x + b_2y = -c_2z\,. \end{cases}$$

При определенном численном значении $z$ система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\,, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\,,$$

где $z$ принимает любые значения.

Преобразуем полученные выражения:

$$\begin{vmatrix} -c_1 z & b_1 \\ -c_2 z & b_2 \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = z \cdot \Delta_3 \ ,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 z \\ a_2 & -c_2 z \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -z \cdot \Delta_2 \ ,$$

тогда

$$x = \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \cdot z, \qquad y = \frac{-\Delta_2}{\Delta_1} \cdot z \ .$$

Обозначим

$$\frac{z}{\Delta_1} = K \ ,$$

тогда

$$x = \Delta_3 \cdot K \ , \quad y = -\Delta_2 \cdot K \ , \quad z = \Delta_1 \cdot K \ .$$

Полученные выражения определяют все решения системы. Если $k = 0$, то получим нулевое решение.

Если все три определителя равны нулю:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0 \ ,$$

то система сводится к одному уравнению. Такая система имеет бесконечное множество решений; чтобы получить одно из них, следует двум неизвестным дать произвольные численные значения, а третье найти из уравнения.

3. Однородная система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \ , \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \ , \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0 \ . \end{cases} \qquad (1)$$

Такая система всегда имеет нулевое решение:

$$x = 0,\ y = 0,\quad z = 0$$

Если же $\Delta = 0$, то однородная система имеет бесконечное множество ненулевых решений. В этом случае либо какое - нибудь одно уравнение является следствием двух других, либо какие-нибудь два уравнения являются следствиями третьего.

Докажем это, предполагая, что хотя бы один из миноров определителя отличен от нуля, например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

При этом условии два первых уравнения заданной системы имеют бесконечное множество совместных ненулевых решений, определяемых формулами

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot K; \quad y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot K; \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot K \qquad (2)$$

при любом значении к.

Если $\Delta = 0$, то все эти числа удовлетворяют также и третьему уравнению системы. В самом деле, подставляя их вместо неизвестных в левую часть третьего уравнения, будем иметь:

$$a_3x + b_3y + c_3z = \left(a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\cdot\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)K = \Delta\cdot K$$

и получим в результате подстановки нуль, так как по условию $\Delta = 0$. Таким образом, формулы (2) при любом "к" определяют решение системы (I). Если $к \neq 0$, то это решение будет ненулевым. В этом случае одно из уравнений системы является следствием двух других. Данная система равносильна системе, состоящей из двух вышеуказанных уравнений.

Предположим, что все миноры определителя системы $\Delta$ равны нулю. Тогда любая пара уравнений имеет пропорциональные коэффициенты, следовательно, одно из них будет получаться умножением всех членов другого на некоторый общий множитель. Значит,в системе (I) два уравнения являются следствиями третьего. Данная система равносильна одному из ее уравнений. Такая система имеет бесчисленное множество ненулевых решений, так как двум неизвестным можно придавать численные значения, а третье находить из любого уравнения системы.

Итак, однородная система (I) имеет ненулевые решения в том и только в том случае, когда $\Delta = 0$.

## О Г Л А В Л Е Н И Е