МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е. А. БАРОВА, Ю. Ж. ПЧЕЛКИНА

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2024

УДК 517.2(075)
ББК В161.11я7
Б 256

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. Н. П. Б а л а б а е в а,
канд. физ.-мат. наук, доц. Е. А. Э н б о м

Барова, Евгения Анатольевна

Б 256 **Введение в анализ:** учебно-методическое пособие / *Е. А. Барова, Ю. Ж. Пчелкина.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2024. – 176 с. ил.

ISBN 978-5-7883-2038-0

Приведены теоретико-практические материалы курса математического анализа по темам: введение в анализ, теория пределов.

Издание адресовано студентам очной, заочной и очно-заочной форм обучения, изучающим математический анализ.

УДК 517.2(075)
ББК В161.11я7

ISBN 978-5-7883-2038-0

Оглавление

Введение

Каждая наука изучает вполне определенные стороны математического мира. Например, физика занимается исследованием основных свойств и форм движения материи, химия изучает состав, строение и свойства молекул. Чем же занимается математика? Каков ее предмет? На этот вопрос, исчерпывающий ответ дал Ф. Энгельс: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира».

Понятие и объекты математики представляют собой абстракции наблюдаемых в природе явлений. Окружающий нас мир – это движение, процесс, а со всяким процессом связано представление о переменной величине. Именно переменная величина служит для изучения мира.

Вплоть до XVII века в математике изучались в основном постоянные величины или фигуры. Для математики того времени было типично решение таких задач: дано алгебраическое уравнение – найти его корни, или преобразовать данное алгебраическое или тригонометрическое выражение, вычислить значение какой-нибудь постоянной геометрической величины. В XVII веке в связи с бурным развитием производственных сил и общественных отношений появилась потребность в более глубоком изучении материальных процессов и явлений. В результате от изучения чисел математики переходят к изучению функций, от изучения отдельных состояний, отдельных моментов существования вещей (а именно для этих моментов достаточно было понятия постоянной величины) переходят к изучению процессов их изменения и развития. Это привело к изучению новой математической теории, называемой «математическим анализом».

Математический анализ есть, прежде всего, учение о переменных величинах. Развился он в XVII веке, трудами многих ученых, но законченное и систематическое изложение двух его основных разделов (дифференциального и интегрального) дали И. Ньютон и Д. Лейбниц.

Но математический анализ есть учение не просто о переменной величине. Ведь всякий процесс характеризуется по крайней мере двумя переменными величинами, изменение которых взаимно связано. Рассмотрим, например, механическое движение точки по прямой линии. Это есть процесс изменения положения точки на прямой линии с течением времени. Здесь связаны две переменные величины: время и путь. Это приводит к понятию функции. Таким образом, математический анализ – есть общее учение о функциях.

Но изучать функции можно разными методами, например, элементарными. Методом математического анализа изучения функций является метод пределов (в XVII веке его называли «методом бесконечно малых»).

Тема 1. Основные понятия математического анализа

1.1. Постоянные и переменные величины

Длина отрезка, масса тела, температура и прочие величины могут быть измерены, причем результат измерения записывается числом: 15 см, 5 кг, 20°, и так далее. В математике мы отходим от конкретной природы величины, что приводит к математическому понятию величины (15, 5, 20 и так далее).

Величины бывают постоянные и переменные. Величина называется *переменной,* если в условиях данного процесса она принимает различные значения. Если некоторая величина в данном процессе сохраняет одно и то же значение, то говорят, что она *постоянная* или *константа*. Переменные величины обычно обозначают x, y, а постоянные – a, b, c.

1.2. Некоторые понятия математической логики и комбинаторики

Правила построения суждения

Определение 1.1. *Суждением* называется законченная мысль, выраженная средствами естественного языка, которая состоит из четырех элементов: квантор, субъект, связка, предикат.

Например:

Квантор	*Субъект*	*Связка*	*Предикат*
Все	числа	являются	комплексными
Некоторые	натуральные числа	–	четные

В последнем случае подразумевается связка «являются». Логической связке может также соответствовать символ двоеточия. Вместо термина *предикат* используют также термин *свойство*.

В традиционной логике допускаются два типа суждений, каждый из которых характеризует возможные отношения между двумя классами (классом субъектов и классом предикатов):

1) все S являются P (каждый из S удовлетворяет свойству P);
2) некоторые из S являются P.

Квантор общности или *универсальный квантор* обозначается символом «∀». Читается как «все», «каждый», «для любого».

Квантор существования или *экзистенциальный квантор* обозначается символом «∃». Читается как «некоторые», «существует».

Связка обозначается символам «:» или может отсутствовать. Читается как «есть», «является», «такой что».

Например, суждение «Все натуральные числа являются положительными» в кванторах будет записано как «$\forall\, x \in \mathbb{N}:\ \ x > 0$».

И предикат, и субъект могут быть составными, в частности сами могут являться суждениями (состоять из квантора, субъекта и предиката). Кроме того, и предикат, и субъект в суждении могут быть и составными, в частности они сами могут оказаться суждениями.

Например,
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\!:\ \forall\, x\!:\ |x - a| < \delta, x \neq a\!:\ |f(x) - b| < \varepsilon.$

Обозначим за S_i классы субъектов, а за P_i – классы предикатов (или некоторые свойства, характеризующие эти классы). Тогда получим следующие составные части суждения:
$\forall\, \varepsilon \in S_1\!:\ P_1$, где $S_1 = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$, – класс субъектов, P_1 – предикат;
$P_1 = (\exists\ \delta(\varepsilon) \in S_2\!:\ P_2)$, где $S_2 = S_1$, P_2 – предикат;
$P_2 = (\forall\, x \in S_3\!:\ P_3)$, где $S_3 = S_3(\delta) = \{x \in \mathbb{R}\!:\ |x - a| < \delta\}$, P_3 – свойство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Отрицание суждения строиться по следующим формальным правилам:
1) квантор ∀ заменяется на квантор ∃;
2) квантор ∃ заменяется на квантор ∀;
3) предикат P заменяется на свое отрицание.

Например, для суждения

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\!:\ \forall\, x\!:\ |x - a| < \delta, x \neq a\!:\ |f(x) - b| < \varepsilon,$$

отрицанием станет суждение

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall \;\; \delta(\varepsilon) > 0\colon \; \exists\, x\colon \; |x - a| < \delta, x \neq a\colon \; |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

Понятие факториала

Определение 1.2. *Факториал* натурального числа n – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Тогда

$$n! = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n = (n-1)! \cdot n,$$

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1).$$

При этом для $n = 0$ принимается в качестве соглашения, что

$$0! = 1.$$

Двойной факториал натурального числа n определяется как произведение всех натуральных чисел на отрезке $[1, n]$, имеющих ту же чётность, что и число n:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n; \qquad (2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1).$$

Число сочетаний из $\mathbf{n}$ объектов по $\boldsymbol{k}$

Пусть имеется n различных объектов. Будем выбирать комбинации по k штук из n объектов, при этом будем обращать внимание на разный состав комбинаций, но не на порядок. Тогда число сочетаний из n объектов по k равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Пример 1.1. В качестве примера работы с числом сочетаний докажем равенство биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

Доказательство. По определению числа сочетаний:

$$C_n^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot \big(n - (k-1)\big)!} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!},$$

$$C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!}.$$

Тогда

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} =$$

[домножим числитель и знаменатель первой дроби на $(n-k+1)$,
второй дроби – на k]

$$= \frac{(n-k+1) \cdot n!}{(n-k+1) \cdot (n-k)! \cdot k!} + \frac{k \cdot n!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k+1)!} =$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{для удобства вычислений преобразуем знаменатели дробей:} \\ (n-k+1) \cdot (n-k)! = (n-k+1)!, \\ k \cdot (k-1)! = k!\end{array}\right]$$

$$= \frac{(n-k+1) \cdot n!}{(n-k+1)!\, k!} + \frac{k \cdot n!}{k!\, (n-k+1)!} = \frac{(n-k+1) \cdot n! + k \cdot n!}{(n-k+1)!\, k!} =$$

[вынесем в числителе за скобки $n!$]

$$= \frac{n! \cdot \big((n-k+1)+k\big)}{(n-k+1)! \cdot k!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(n-k+1)! \cdot k!} =$$

[преобразуем числитель: $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$]

$$= \frac{(n+1)!}{k!\, (n-k+1)!} = C_{n+1}^k. \quad \blacksquare$$

Примеры работы с суммой

Введём обозначение:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n =$$

$$= a_0 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n =$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n.$$

Пусть $C = \mathrm{const}$, тогда:

$$C \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k = C \cdot (a_0 + a_1 + \dots + a_n) =$$

$$= (C \cdot a_0 + C \cdot a_1 + \dots + C \cdot a_n) = \sum_{k=0}^{n} C \cdot a_k.$$

Пример 1.2. В качестве примера работы с суммой докажем равенство:

$$a^{n+1} - \ b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

Доказательство.

Рассмотрим правую часть равенства:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^0 b^n + a^1 b^{n-1} + a^2 b^{n-2} + \dots + a^{n-2} b^2 + a^{n-1} b^1 + a^n b^0.$$

Тогда

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \left(a \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \right) - \left(b \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \right) =$$

$$= a \cdot (a^0 b^n + a^1 b^{n-1} + a^2 b^{n-2} + \dots + a^{n-2} b^2 + a^{n-1} b^1 + a^n b^0) -$$

$$-b \cdot (a^0 b^n + a^1 b^{n-1} + a^2 b^{n-2} + \dots + a^{n-2} b^2 + a^{n-1} b^1 + a^n b^0) =$$

$$= (a a^0 b^n + a a^1 b^{n-1} + a a^2 b^{n-2} + \dots + a a^{n-1} b^1 + a a^n b^0) -$$

$$- (a^0 b b^n + a^1 b b^{n-1} + a^2 b b^{n-2} + \dots + a^{n-1} b b^1 + a^n b b^0) =$$

$$= (a^1 b^n + a^2 b^{n-1} + a^3 b^{n-2} + \dots + a^{n+1-1} b^1 + a^{n+1} b^0) -$$

$$-(a^0b^{n+1}+a^1b^{n+1-1}+a^2b^{n+1-2}+\dots+a^{n-1}b^{1+1}+a^nb^{0+1})=$$

$$=(a^1b^n+a^2b^{n-1}+a^3b^{n-2}+\dots+a^{n-1}b^2+a^nb^1+a^{n+1}b^0)-$$

$$-(a^0b^{n+1}+a^1b^n+a^2b^{n-1}+\dots+a^{n-2}b^3+a^{n-1}b^2+a^nb^1)=$$

$$=(a^1b^n+a^2b^{n-1}+a^3b^{n-2}+\dots+a^{n-1}b^2+a^nb^1)+(a^{n+1}b^0)-$$

$$-(a^0b^{n+1})-(a^1b^n+a^2b^{n-1}+\dots+a^{n-2}b^3+a^{n-1}b^2+a^nb^1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a^kb^{n+1-k}+(a^{n+1}b^0)-(a^0b^{n+1})-\sum_{k=1}^{n}a^kb^{n+1-k}=$$

$$=(a^{n+1}b^0)-(a^0b^{n+1})=a^{n+1}-b^{n+1}. \quad \blacksquare$$

1.3. Множества

Теория множеств – это раздел математики, в котором изучаются общие свойства множеств. Основатель – Георг Кантор.

Определение 1.3. *Множеством* называется совокупность объектов определённой природы. Обозначение: $A, B, X, \dots$

Объекты, из которых состоит данное множество, называются его *элементами.* Обозначение: $a, b, x, \dots$

$\boldsymbol{\emptyset}$ – пустое множество (не содержит ни одного элемента).

Принадлежность элемента множеству записывается так:

$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{B}$ – элемент a принадлежит множеству B,

$\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{C}$ – элемент x не принадлежит множеству C.

Способы задания множеств

1. Перечисляются все элементы множества, при этом элементы множества записываются в фигурных скобках.

Например, $A=\{1,2,3\}$, $X=\{\text{Иванов},\ \text{Петров}\}$.

2. Указывается характеристическое свойство множества – свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Например, $C = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}120$

Множества A и B называются *равными*, если они содержат одни и те же элементы. Обозначение:

$$\boldsymbol{A = B}.$$

Например,

- $A = B$, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 1, 2\}$;
- $C = D$, если $C = (-\infty; 1)$, $D = \{x:\ x - 1 < 0\}$.

Определение 1.4. Множество B является *подмножеством* множества A, если каждый элемент из множества B является элементом и множества A. Обозначение: $\boldsymbol{B \subset A}$.

Например, $D \subset C$, если $C = (-\infty;\ 0)$, $D = [-2;\ -1]$.

Замечания:

1) если $A = B$, то $A \subset B$, $B \subset A$;
2) пустое множество является подмножеством любого множества;
3) знак $\subset$ можно ставить только между множествами: $B \subset A$;
4) знак $\in$ можно ставить только между элементом множества и самим множеством: $x \in X$.

Операции над множествами

Определение 1.5. *Пересечением множеств A и B* называется множество, обозначаемое $\boldsymbol{A \cap B}$, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Пример 1.3.

Найти пересечение указанных множеств:

- для $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеем $A \cap B = \{2, 4\}$;
- для $C = (2; 4)$, $D = [3; 5]$ имеем $C \cap D = [3; 4)$;
- диаграммы Эйлера-Венна (рис. 1.1):

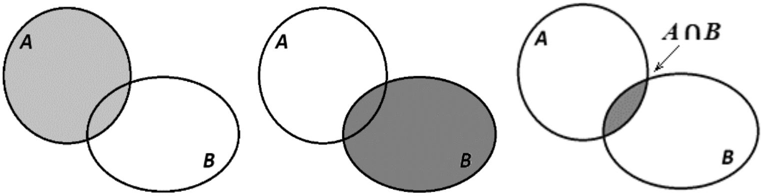

Рис. 1.1. Пересечение множеств

Определение 1.6. *Объединением множеств A и B* называется множество, обозначаемое $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств *A* или *B*:

$$A \cup B = \{x\colon\ x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пример 1.4.

Найти объединение указанных множеств:

- для $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеем
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\};$$
- для $C = (2; 4)$, $D = [3; 5]$ имеем $C \cup D = (2; 5]$;
- диаграммы Эйлера-Венна (рис. 1.2):

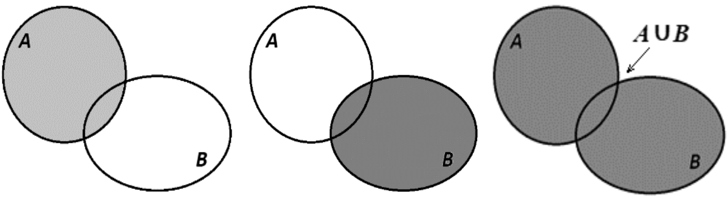

Рис. 1.2. Объединение множеств

Определение 1.7. *Разностью двух множеств A и B* называется множество, обозначаемое $\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B}$, состоящее из элементов множества *A*, не принадлежащих множеству *B*:

$$A \backslash B = \{x\colon\ x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Пример 1.5.

Найти разность указанных множеств:

- для $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеем $A \backslash B = \{6, 8\}$, $B \backslash A = \{1, 3, 5\}$;
- для $C = (2; 4)$, $D = [3; 5]$ имеем $C \backslash D = (2; 3)$, $D \backslash C = [4; 5]$;
- диаграммы Эйлера-Венна (рис. 1.3):

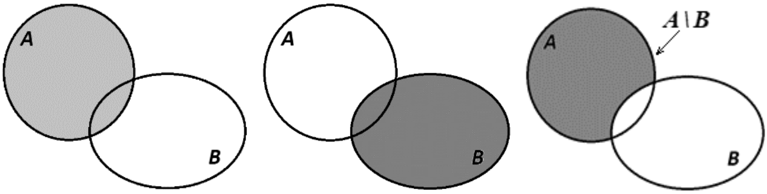

Рис. 1.3. Разность множеств

Если множество B является подмножеством множества A, то разность $A \backslash B$ называют *дополнением множества B до множества A* и обозначают $\overline{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{A}}$ (рис. 1.4). В случае числовых множеств запись $\overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{R}}$ или $\overline{\boldsymbol{A}}$ означает дополнение множества A до множества R действительных чисел.

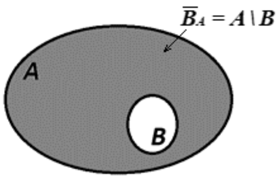

Рис. 1.4. Дополнение множества *B* до множества *A*

Определение 1.8. *Симметрической разностью двух множеств A и B* называется множество, обозначаемое $\boldsymbol{A \Delta B}$, состоящее из элементов разности $A \backslash B$ или разности $B \backslash A$:

$$A \Delta B = \{x\colon\ x \in A \backslash B \ \text{ или } x \in B \backslash A\} = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Пример 1.6.

Найти симметрическую разность указанных множеств:

- для $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеем $A \Delta B = \{1, 3, 5, 6, 8\}$;
- для $C = (2; 4)$, $D = [3; 5]$ имеем $C \Delta D = (2; 3) \cup [4; 5]$;

- диаграммы Эйлера-Венна (рис. 1.5):

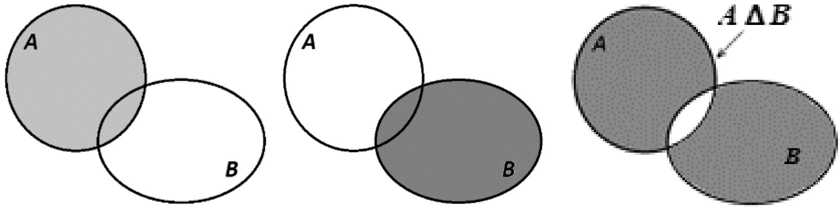

Рис. 1.5. Симметрическая разность множеств

Свойства операций над множествами

1) $A \cup B = B \cup A$,
2) $A \cap B = B \cap A$,
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
7) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$,
8) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,
9) $A \cup \emptyset = A$,
10) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
11) $A \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$,
12) $A \cap \mathbb{R} = A$,
13) $A \cup \bar{A} = \mathbb{R}$,
14) $A \cap \bar{A} = \emptyset$,
15) $A \cup A = A \cap A = A$,
16) $\bar{\bar{A}} = A$,
17) $A \backslash B = A \cap \bar{B}$,
18) $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$,
19) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$,
20) $A \triangle B = B \triangle A$.

Основные числовые множества

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел,

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел,

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел (отношение целого числа к натуральному числу),

$\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел,

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел (объединение рациональных и иррациональных чисел),

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Основные подмножества множества действительных чисел

Любое из данных множеств называется *промежутком*.

$[a;\ b]$ – *отрезок* или *сегмент* – это множество всех тех и только тех действительных чисел x, которые удовлетворяют неравенствам $a \le x \le b$. Символьное обозначение:

$$[a;\ b] = \{x \in \mathbb{R}:\ a \le x \le b\}.$$

$(a;\ b)$ – *интервал* – это множество всех тех и только тех действительных чисел x, которые удовлетворяют неравенствам $a < x < b$. Символьное обозначение:

$$(a;\ b) = \{x \in \mathbb{R}:\ a < x < b\}.$$

$[a;\ b)$ – *полуинтервал или полусегмент, открытый справа,* – это множество всех тех и только тех действительных чисел x, которые удовлетворяют неравенствам $a \le x < b$. Символьное обозначение:

$$[a;\ b) = \{x \in \mathbb{R}:\ a \le x < b\}.$$

$(a;\ b]$ – *полуинтервал или полусегмент, открытый слева,* – это множество всех тех и только тех действительных чисел x, которые удовлетворяют неравенствам $a < x \le b$. Символьное обозначение:

$$(a;\ b] = \{x \in \mathbb{R}:\ a < x \le b\}.$$

$[a; +\infty)$ – *бесконечный полуинтервал справа* – это множество всех тех и только тех действительных чисел x, которые удовлетворяют неравенству $x \ge a$. Символьное обозначение:

$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R}:\ x \geq a\}.$$

$(-\infty;\ b]$ – *бесконечный полуинтервал слева* – это множество всех тех и только тех действительных чисел x, которые удовлетворяют неравенству $x \leq b$. Символьное обозначение:

$$(-\infty;\ b] = \{x \in \mathbb{R}:\ x \leq b\}.$$

$(a;\ +\infty)$ – *бесконечный интервал справа* – это множество всех тех и только тех действительных чисел x, которые удовлетворяют неравенству $x > a$. Символьное обозначение:

$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R}:\ x > a\}.$$

$(-\infty;\ b)$ – *бесконечный интервал слева* – это множество всех тех и только тех действительных чисел x, которые удовлетворяют неравенству $x < b$. Символьное обозначение:

$$(-\infty;\ b) = \{x \in \mathbb{R}:\ x < b\}.$$

$(-\infty;\ +\infty)$ – совокупность всех действительных чисел.

1.4. Числовая прямая

Определение 1.9. *Числовая прямая* – это прямая, на которой указаны начальная точка O, положительное направление и единичный отрезок (рис. 1.6).

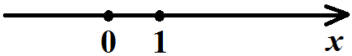

Рис. 1.6. Числовая прямая

Пусть M – произвольная точка числовой прямой. Поставим ей в соответствие действительное число x, равное длине отрезка OM, если точка M лежит правее точки O, или этой длине со знаком минус, если точка M лежит левее точки O (рис. 1.7). Число x называют абсциссой точки M.

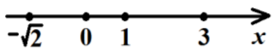

Рис. 1.7. Точки числовой прямой

Итак, каждой точке числовой прямой ставится в соответствие единственное действительное число x. Справедливо и обратное: каждому действительному числу x соответствует единственная точка числовой прямой, такая, что x выражает величину отрезка OM.

Итак, между точками числовой прямой и действительными числами установлено взаимно однозначное соответствие. Поэтому в дальнейшем мы будем иногда вместо слов «действительное число x» говорить «точка x».

1.5. Абсолютная величина (модуль) числа

Определение 1.10. *Абсолютной величиной (модулем) действительного числа*, называется само это число, если оно неотрицательно, и ему противоположное, если само число отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Свойства абсолютных величин

1º. Неравенство $|a| < b$ ($b > 0$) равносильно неравенствам $-b < a < b$.

Доказательство. Из неравенства $|a| < b$ следует, что $a < b$, если $a \geq 0$; и $-a < b$ или $a > -b$, если $a < 0$. Таким образом, из неравенства $|a| < b$ следует $-b < a < b$.

Пусть теперь $-b < a < b$. Отсюда $a < b$ и $-a < b$. В зависимости от своего знака (положительное или отрицательное) одно из чисел a или $(-a)$ дает $|a|$. Следовательно, одно из неравенств $a < b$ или $-a < b$ дает неравенство $|a| < b$.

Таким образом, неравенство $|a| < b$ равносильно неравенствам $-b < a < b$. Свойство доказано.

2º. Неравенство $|a| > b$ ($b > 0$) равносильно неравенствам $a > b$ или $a < -b$.

Доказательство. Из неравенства $|a| > b$ следует, что $a > b$, если $a \geq 0$; и $-a > b$ или $a < -b$, если $a < 0$. Таким образом, из неравенства $|a| > b$ следует $a > b$ или $a < -b$.

Пусть теперь $a > b$ или $a < -b$. В зависимости от своего знака (положительное или отрицательное) одно из чисел a или $(-a)$ дает $|a|$. Следовательно, одно из неравенств $a > b$ или $a < -b$ дает неравенство $|a| > b$.

Таким образом, неравенство $|a| > b$ равносильно неравенствам $a > b$ или $a < -b$. Свойство доказано.

3°. $|a+b| \leq |a| + |b|,$
$|a+b| \geq |a| - |b|.$

Доказательство. Докажем неравенство $|a+b| \leq |a| + |b|$. В силу определения абсолютной величины действительного числа справедливы неравенства:

$$-|a| \leq a \leq |a|, \qquad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Сложим записанные неравенства:

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|,$$
$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

По свойству 1° последние неравенства равносильны неравенству

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \tag{1.1}$$

Теперь докажем неравенство $|a+b| \geq |a| - |b|$. Обозначим

$$a = (a+b) - b.$$

Тогда, учитывая доказанное выше неравенство (1.1), имеем:

$$|a| = |(a+b) - b| = |(a+b) + (-b)| \leq |a+b| + |-b| =$$
$$= |a+b| + |b|.$$

Таким образом, $|a+b| + |b| \geq |a|$. Отсюда

$$|a+b| \geq |a| - |b|.$$

Свойство доказано.

4°. $|a-b| \geq |a| - |b|,$
$|a-b| \leq |a| + |b|.$

Доказательство. Докажем неравенство $|a - b| \geq |a| - |b|$, используя свойство 3°.

$$|a - b| = |a + (-b)| \geq |a| - |-b| = |a| - |b|.$$

Аналогично докажем неравенство $|a - b| \leq |a| + |b|$:

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|.$$

Свойство доказано.

5°. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Доказательство. Используем определение модуля числа.

Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то по определению $|a| = a$, $|b| = b$, при этом $|a| \cdot |b| = ab$. А учитывая, что в этом случае $ab \geq 0$, получаем $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$.

Если $a \geq 0$, $b < 0$, то по определению $|a| = a$, $|b| = -b$, при этом $|a| \cdot |b| = a \cdot (-b) = -ab$. А учитывая, что в этом случае $ab \leq 0$, получаем $|ab| = -ab = |a| \cdot |b|$.

Если $a < 0$, $b \geq 0$, то по определению $|a| = -a$, $|b| = b$, при этом $|a| \cdot |b| = -a \cdot b$. А учитывая, что в этом случае $ab \leq 0$, получаем $|ab| = -ab = |a| \cdot |b|$.

Если $a < 0$, $b < 0$, то по определению $|a| = -a$, $|b| = -b$, при этом $|a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b) = ab$. А учитывая, что в этом случае $ab \geq 0$, получаем $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$. Свойство доказано.

6°. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

Доказательство аналогично доказательству свойства 5^0.

1.6. Окрестность точки

Определение 1.11. Интервал вида $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется *ε-окрестностью точки a*, при этом a – центр окрестности, ε – радиус окрестности (рис. 1.8).

Обозначение: $U(a, \varepsilon)$.

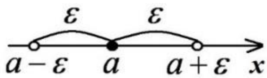

Рис. 1.8. Окрестность точки

Определение 1.12. *Проколотой окрестностью точки* a называется окрестность этой точки без самой точки a (рис. 1.9), то есть это объединение интервалов $(a-\varepsilon;\ a) \cup (a;\ a+\varepsilon)$.

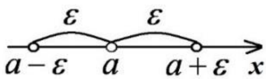

Рис. 1.9. Проколотая окрестность точки

Обозначение: $U(a, \varepsilon)$, $x \neq a$.

1.7. Верхняя и нижняя грани множества

Пусть E – некоторое подмножество множества действительных чисел. Через x обозначим любой элемент множества E.

Определение 1.13. Множество E называется *ограниченным снизу*, если существует такое действительное число a, что для любого числа $x \in E$ выполняется неравенство $x \geq a$.

Определение 1.14. Множество E называется *ограниченным сверху*, если существует такое действительное число b, что для любого числа $x \in E$ выполняется неравенство $x \leq b$.

Например, множество $E_1 = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$ является ограниченным снизу, так как существует такое число $a = 0$, что для любого числа $x \in E_1$ выполняется неравенство $x \geq 0$. В качестве числа a можно взять и другое число, например, 1. При этом множество E_1 неограниченно сверху.

Определение 1.15. Множество называется *ограниченным*, если оно ограничено и снизу, и сверху.

Например, множество $E_2 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ является ограниченным, так как для любого числа $x \in E_2$ выполняется неравенство $0 \leq x \leq 1$.

Определение 1.16. *Мажоранта* или *верхняя грань (граница)* числового множества E – это число b, такое что для любого элементы $x \in E$ справедливо неравенство $x \leq b$.

Определение 1.17. *Миноранта* или *нижняя грань (граница)* числового множества E – это число a, такое что для любого элементы $x \in X$ справедливо неравенство $x \geq a$.

Для множества E_2 верхней гранью является число $b = 1$, а нижней гранью – число $a = 0$. Однако для того же множества E_2 верхней гранью могут быть и числа $\sqrt{2}, \pi$ и другие, так как любой элемент множества E_2 не превосходит этих чисел.

Таким образом, если множество E имеет хотя бы одну верхнюю грань b, то верхних граней будет существовать бесконечное множество. Среди них можно выделить наименьшее число.

Определение 1.18. *Точной верхней гранью (наименьшей верхней границей)* множества E называется наименьшая из всех верхних граней этого множества. Обозначается: $\mathbf{sup}\,\boldsymbol{E}$. Читается супре́мум (лат. supremum – самый высокий).

Для рассмотренного множества E_2 имеем $\sup E_2 = 1$.

Определение 1.19. *Точной нижней гранью (наибольшей нижней границей)* множества E называется наибольшая из всех нижних граней этого множества. Обозначается: $\mathbf{inf}\,\boldsymbol{E}$. Читается и́нфимум (лат. infimum – самый низкий).

Для рассмотренного множества E_2 имеем $\inf E_2 = 0$.

Дадим другое определение точных верхней и нижней граней.

Определение 1.20. Число α называется *точной нижней гранью множества* E, если оно удовлетворяет условиям:

1) для любого элемента $x \in E$ справедливо $x \geq \alpha$,
2) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует элемент $x' \in E$, такой, что $x' < \alpha + \varepsilon$.

Определение 1.21. Число β называется *точной верхней гранью множества* E, если оно удовлетворяет условиям:

1) для любого элемента $x \in E$ справедливо $x \leq \beta$,
2) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует элемент $x' \in E$, такой, что $x' > \beta - \varepsilon$.

Определение 1.22. *Последовательность отрезков* $[a_1;\, b_1]$, $[a_2;\, b_2]$, ..., $[a_n;\, b_n]$, ... называется *стягивающейся*, если она обладает свойствами:

1) каждый последующий отрезок содержится в предыдущем
$$[a_n;\, b_n] \subset \cdots \subset [a_2;\, b_2] \subset [a_1;\, b_1],$$
2) длина n-го отрезка стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

Аксиома Кантора. Любая последовательность стягивающихся отрезков содержит одну общую точку.

Теорема 1.1. Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство проведем для точной верхней грани. Так как множество E ограничено сверху, то существует число $b \in \mathbb{R}$, такое, что для любого числа $x \in E$ выполняется неравенство
$$x \leq b. \tag{1.2}$$

Рассмотрим один элемент $x_0 \in E$. Тогда их неравенства (1.2) получаем, что $x_0 \leq b$. Возьмем некоторое действительное число $a < x_0$ и рассмотрим отрезок $[a;\, b]$, длина которого $d = b - a$. Этот отрезок обладает свойствами:

1) правее отрезка $[a;\ b]$ нет ни одного элемента из множества E (следует из неравенства (1.2));
2) $[a;\ b]$ содержит хотя бы один элемент множества E.

Разделим $[a;\ b]$ пополам точкой c. Получим два отрезка: $[a;\ c]$ и $[c;\ b]$. Если $[c;\ b]$ содержит хотя бы один элемент множества E, то он обладает указанными свойствами 1) и 2). В противном случае этими свойствами обладает $[a;\ c]$. Выберем тот отрезок, который подходит под свойства 1) и 2), и обозначим его $[a_1;\ b_1]$. Длина этого отрезка $d_1 = b_1 - a_1 = \frac{d}{2}$.

Разделим $[a_1;\ b_1]$ пополам. Из полученных отрезков выберем тот, который подходит под свойства 1) и 2), и обозначим его $[a_2;\ b_2]$. Длина этого отрезка $d_2 = b_2 - a_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d}{2^2}$.

Продолжим данный процесс, и на n-ом шаге получим $[a_n;\ b_n]$, длина которого $d_n = \frac{d}{2^n}$. Продолжая данный процесс неограниченно, получим последовательность отрезков

$$[a_1;\ b_1],\ \ [a_2;\ b_2],\ \ \dots,\ \ [a_n;\ b_n],\ \ \dots, \tag{1.3}$$

которая обладает свойствами:

1) правее каждого отрезка нет элементов из множества E,
2) каждый отрезок содержит хотя бы один элемент из множества E,
3) каждый последующий отрезок содержится в предыдущем,
4) длина n-го отрезка $d_n = \frac{d}{2^n}$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.

Из свойств 3) и 4) следует, что последовательность отрезков (1.3) является стягивающейся. Тогда по аксиоме Кантора существует единственная точка β, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.

Докажем, что β является точной верхней гранью множества E. Для этого достаточно показать, что выполняются условия 1) и 2) из определения точной верхней грани.

Докажем, что для любого $x \in E$ выполняется неравенство $x \leq \beta$ методом от противного. Допустим, что нашелся хотя бы один элемент $x_1 \in E$, такой что, $x_1 > \beta$. Тогда число $x_1 - \beta > 0$.

Так как по свойству 4) длина отрезка стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, то среди них найдется хотя бы один, длина которого меньше положительного числа $x_1 - \beta$. Обозначим этот отрезок $[a_k;\ b_k]$, при этом его длина

$$b_k - a_k < x_1 - \beta. \tag{1.4}$$

По своему происхождению β принадлежит всем отрезкам из последовательности (1.3), значит $\beta \in [a_k;\ b_k]$. Следовательно,

$$a_k \leq \beta. \tag{1.5}$$

Складывая неравенства (1.4) и (1.5), получим, что $b_k < x_1$. Это говорит о том, что правее отрезка $[a_k;\ b_k]$ есть элемент $x_1 \in E$, а это противоречит свойству 1) последовательности отрезков. Противоречие и доказывает условие 1) определения точной верхней грани.

Теперь докажем, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует элемент $x' \in E$, такой, что $x' > \beta - \varepsilon$. Рассмотрим $(b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$ – окрестность точки β радиуса ε. Так как по свойству отрезков 4) длина отрезков стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, то найдется отрезок $[a_m;\ b_m]$, длина которого меньше ε. А учитывая, что этот отрезок содержит точку β, то $[a_m;\ b_m] \subset (b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$.

По свойству отрезков 2) $[a_m;\ b_m]$ содержит хотя бы одну точку $x' \in E$. Тогда $x' \in (b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$. Откуда $x' > \beta - \varepsilon$ (рис. 1.10).

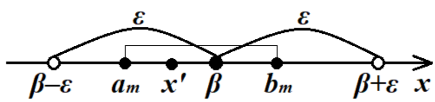

Рис. 1.10. Принадлежность элементов

Итак, для любого числа $\varepsilon > 0$ нашлась точка $x' \in E$, такая, что $x' > \beta - \varepsilon$. Тем самым доказано свойство 2) определения точной верхней грани.

Таким образом, выполняются оба условия определения точной верхней грани. Следовательно, число β является точной верхней гранью, то есть $\beta = \sup E$.

Доказательство того, что ограниченной снизу множество имеет точную нижнюю грань, проводится аналогично. Теорема доказана.

1.8. Метод математической индукции

Математическая индукция – метод математического доказательства, который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения для всех натуральных чисел.

Предположим, что требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений, зависящих от натуральных чисел: $F(1)$, $F(2)$, …, $F(n)$, $F(n+1)$, …

Если:

1) доказано, что $F(1)$ верно (это утверждение называется *базой индукции*),
2) для любого n доказано, что если верно $F(n)$, то верно $F(n+1)$ (это утверждение называется *индукционным переходом*),

то все утверждения последовательности верны.

Пример 1.7.

Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решение. Применим метод математической индукции.

При $n = 1$ формула верна:

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

Предположим, что при $n = k$ формула верна, то есть

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Покажем, что формула верна при $n = k + 1$.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=$$
$$=\frac{(k+1)\big(k(2k+1)+6(k+1)\big)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Итак,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Тогда по методу математической индукции формула верна для любого $n \in \mathbb{N}$. ■

Пример 1.18 (неравенство Бернулли). Если $n \geq 1$, $\alpha \geq -1$, $\alpha \neq 0$, то

$$(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha. \qquad (1.6)$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

Если $n=1$, то

$$(1+\alpha)^1 = 1+1\cdot\alpha,$$

то есть неравенство (1.6) справедливо.

Пусть неравенство (1.6) справедливо при $n=k$, то есть

$$(1+\alpha)^k > 1+k\alpha.$$

Покажем, что неравенство (1.6) имеет место при $n=k+1$:

$$(1+\alpha)^{k+1}=(1+\alpha)^k(1+\alpha)>\begin{Bmatrix}\alpha \geq= -1\\ 1+\alpha>0\end{Bmatrix}>(1+k\alpha)(1+\alpha)=$$
$$=1+k\alpha+\alpha+k\alpha^2=1+(k+1)\alpha+k\alpha^2>1+(k+1)\alpha.$$

Таким образом, неравенство (1.6) справедливо при любом $n \geq 1$. Что и требовалось доказать.

Тема 2. Действительная функция действительной переменной

2.1. Понятие функции

В теме 1 были даны понятия постоянной и переменной величин. Изучение одних величин оказывается в зависимости от изменения других величин, участвующий в данном процессе.

Пусть S – путь, проходимый свободно падающим телом, t – время падения тела. Известно, что $S = 0{,}5gt^2$. Зависимость между радиусом шара R и его объемом V выражается формулой $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. В этих примерах каждому рассматриваемому значению одной переменной величины (t или R) соответствует вполне определенное значение другой величины (S или V).

Часто бывает так, что различные физические закономерности выражаются зависимостью одного и того же типа. Например, $Q = 0{,}24Ri^2$ – количества тепла Q, выделяемое за 1 сек. в проводе электрическим током силы i (R – сопротивление провода); $E = 0{,}5mV^2$, где E – кинетическая энергия, V – скорость, m – масса.

Видно, что обе формулы выражают одну и ту же зависимость вида: $y = ax^2$ между величинами y и x (a – постоянное число). Так мы приходим к одному из важнейших понятий математического анализа – понятию функции.

Определение 2.1. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}$. Если каждому действительному числу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное действительное число $y \in Y$, то такое соответствие называется *действительной функцией действительной переменной* x.

Обозначение: $y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$, …

Символы f, F, φ означают закон, по которому каждому значению x из множества X ставится в соответствие единственное значение y из множества Y.

Определение 2.2. Числовое множество X, о котором идет речь в определении функции, называется *областью определения функции.*

Величину x называют *независимой переменной*, или *аргументом*. Ей можно придавать произвольно любые значения из множества X.

Если число x_0 принадлежит области определения X функции $y = f(x)$, то символ $f(x_0)$ называется *значением функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0.

2.2. Множество значений функции

Определение 2.3. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X. Совокупность всех значений величины y, соответствующих всем значениям x из множества X называется *множеством значений функции* $y = f(x)$. Обозначается множество значений функции через Y.

Пример 2.1.

- Для функции $y = \sin x$ областью определения является множество $X = (-\infty;\ +\infty)$, множеством значений – множество $Y = [-1;\ 1]$;
- Для функции $y = a^x$ имеем: $X = (-\infty;\ +\infty)$ – область определения, $Y = (0;\ +\infty)$ – множество значений. ■

2.3. График функции

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на множестве X. Рассмотрим прямоугольную систему координат xOy. Будем изображать множество X на оси абсцисс. Возьмем произвольное значение x_0 из множества X и найдем соответствующее значение функции $f(x_0)$. Построим точку $M_0(x_0;\ f(x_0))$. Рассуждая так для любой точки x из множества X, получим множество точек $M(x;\ f(x))$, называемое *графиком функции* (рис. 2.1).

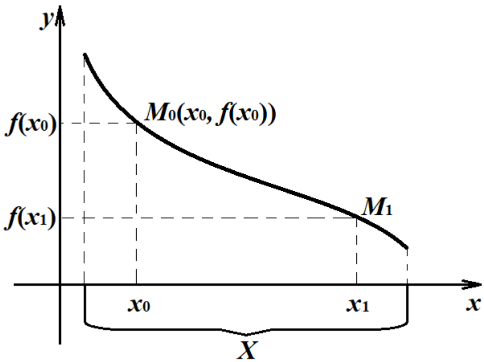

Рис. 2.1. Построение графика функции

Определение 2.4*.* *Графиком функции* $y = f(x)$, определенной на множестве X, называется множество точек плоскости, абсциссы которых есть значения аргументов из множества X, а ординаты – соответствующие значение функции.

В простейшем случае график функции представляет собой плавную линию. Но это может быть и множество точек, разбросанных на плоскости.

Например, график функции $y = [x]$ (антье x – целая часть x, то есть ближайшее целое число, не превосходящее x) (рис. 2.2).

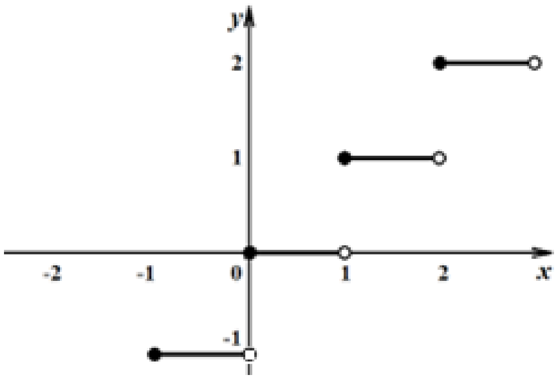

Рис. 2.2. График функции антье x

Возникает вопрос: является ли графиком функции $y = f(x)$ произвольно начерченная кривая на плоскости (см. рис. 2.3)?

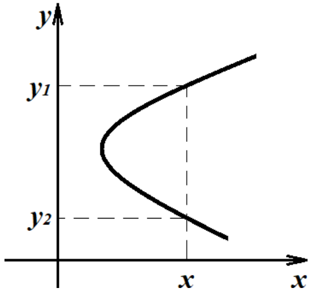

Рис. 2.3. Кривая, не являющаяся графиком функции $y = f(x)$

Ответ: не всегда, так как если хотя бы одной точке x соответствует несколько значений $f(x)$, то нарушается определение функции, и кривая не является графиком функции $y = f(x)$.

Построение графиков функции

Построение графика функции $y = c \cdot f(ax + b) + d$ в общем случае сводится к ряду преобразований (сдвиг, сжатие, растяжение и так далее) графика функции $y = f(x)$.

Функция	*Преобразование, которое следует провести с графиком функции $y = f(x)$ на плоскости xOy*
$f(x) + A$, $A \neq 0$	Если $A > 0$, то сдвиг графика $y = f(x)$ вверх по оси Oy на A единиц. Если $A < 0$, то сдвиг вниз графика $y = f(x)$ по оси Oy на $\|A\|$ единиц.
$f(x - a)$, $a \neq 0$	Если $a > 0$, то сдвиг графика $y = f(x)$ вправо по оси Ox на a единиц. Если $a < 0$, то сдвиг влево графика $y = f(x)$ по оси Ox на $\|a\|$ единиц.
$k \cdot f(x)$, $k > 0$, $k \neq 1$	Если $k > 1$, то растяжение графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy относительно оси Ox в k раз. Если $0 < k < 1$, то сжатие графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy относительно оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз.

$f(kx)$, $k > 0$, $k \neq 1$	Если $k > 1$, то сжатие графика $y = f(x)$ вдоль оси Ox относительно оси Oy в k раз. Если $0 < k < 1$, то растяжение графика $y = f(x)$ вдоль оси Ox относительно оси Oy в $\frac{1}{k}$ раз.
$-f(x)$	Симметричное отображение графика $y = f(x)$ относительно оси Ox.
$f(-x)$	Симметричное отображение графика $y = f(x)$ относительно оси Oy.
$\lvert f(x) \rvert$	Часть графика $y = f(x)$, расположенная выше оси Ox , остается без изменений, а часть графика $y = f(x)$, расположенная ниже оси оси Ox, симметрично отображается относительно оси Ox.
$f(\lvert x \rvert)$	Стереть часть графика $y = f(x)$, расположенную левее оси Oy. В области $x < 0$ построить симметричное отображение графика $y = f(x)$ относительно оси Oy, при этом не удаляя часть графика $y = f(x)$, расположенную правее оси Oy.

2.4. Способы задания функции

Задать функцию означает задать ее область определения X и закон соответствия, по которому каждому значению $x \in X$ соответствует единственное значение y. Функцию можно задать следующими способами.

1. Аналитический способ. В этом случае функция задается в виде формулы, указывающей, какие аналитические действия произвести над аргументом x, чтобы получить соответствующее значение y. Например, $y = \frac{\cos x^2 - 2\ln x}{\sqrt{x-1}}$.

Сюда же относится задание функции несколькими формулами. Например,

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{если } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Определение 2.5. *Областью существования функции, заданной аналитически,* является совокупность всех тех значений аргумента x, при которых формула имеет смысл.

Если функция задана одной формулой и никаких оговорок нет, то область существования функции совпадает с область определения. В общем случае область определения функции является подмножеством области существования функции.

Пример 2.2.

Найти область существования функции $y = \frac{\cos x^2 - 2\ln x}{\sqrt{x-1}}$.

Решение. По определению, областью существования данной функции является совокупность всех тех значений аргумента x, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 1 \ge 0, \\ \sqrt{x-1} \ne 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x - 1 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > 1; \end{cases} \Rightarrow x > 1.$$

Таким образом, $X = (1;\ +\infty)$. ■

В прикладных же вопросах аналитическое выражение, изображающее функцию, как правило, рассматривается не во всей области существования его, а лишь в некоторой ее части, выбор которой диктуется содержанием задачи.

Например: $y = \pi x^2$. Здесь $X = (-\infty;\ +\infty)$ – область существования функции. Но если это формула площади круга, то $X = (0;\ +\infty)$. Здесь уже множество $(0;\ +\infty)$ нельзя называть областью существования, а лишь областью определения функции $y = \pi x^2$.

2. Графический способ. В этом случае задается множество точек плоскости, обладающие тем свойством, что каждая прямая, параллельная оси ординат, пересекает его не более чем в одной точке.

3. Табличный способ. В этом случае задается таблица отдельных значений аргумента и соответствующих им значений функции (например, расписание движения поезда: оно определяет положение поезда в отдельные моменты времени, причем методом интерполяции можно вычислить местонахождения поезда в любой промежуточный момент времени).

4. Словесный способ. Зависимость между переменными x и y описывается словесно.

Пример 2.3.

Функция Дирихле $y = D(x)$. Значение функции $D(x)$ равно 1, если x – рациональное число; значение функции $D(x)$ равно 0, если x – иррациональное число. Например, $D(0) = 1$, $D(\pi) = 0$, $D(-0{,}5) = 1$, $D\left(\sqrt{2}\right) = 0$. График функции Дирихле существует, но построить его нельзя. ■

2.5. Основные элементарные функции

Среди функций, заданных аналитически, выделяют элементарные функции, которые делятся на алгебраические и трансцендентные.

Алгебраические функции.

1. *Постоянная функция* $y = c$, где $c = \mathrm{const}$. Область существования: $X = (-\infty;\ +\infty)$.

2. *Степенная функция с натуральным показателем* $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Область существования: $X = (-\infty;\ +\infty)$.

3. *Целая рациональная функция* (многочлен, расположенный по степеням x)

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n}$. Область существования: $X = (-\infty;\ +\infty)$.

4. *Дробно-рациональная функция* (отношение двух целых рациональных функций)

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}.$$

Область существования: $X = (-\infty;\ +\infty)$, кроме нулей знаменателя.

5. *Иррациональная функция* – это функция, заданные формулой, в которой над аргументом x производятся действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с рациональным показателем, извлечение корня.

Частным случаем иррациональной функции является степенная функция с рациональным показателем $y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$. Область определения иррациональной функции устанавливается в каждом конкретном случае особо.

Трансцендентные функции.

6. *Показательная функция* $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Ее область определения $X = (-\infty;\ +\infty)$.

7. *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Область определения $X = (0;\ +\infty)$.

8. *Тригонометрические функции*:

- $y = \sin x$, область определения $X = (-\infty;\ +\infty)$;
- $y = \cos x$, область определения $X = (-\infty;\ +\infty)$;
- $y = \operatorname{tg} x$, область определения $X = (-\infty;\ +\infty)$, кроме точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $y = \operatorname{ctg} x$, область определения $X = (-\infty;\ +\infty)$, кроме точек $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. *Обратные тригонометрические функции*:

- $y = \arcsin x$, область определения $X = [-1;\ 1]$;
- $y = \arccos x$, область определения $X = [-1;\ 1]$;
- $y = \mathrm{arctg}\, x$, область определения $X = (-\infty;\ +\infty)$;
- $y = \mathrm{arcctg}\, x$, область определения $X = (-\infty;\ +\infty)$.

10. Степенная функция с иррациональным показателем $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{I}$, область определения $X = (-\infty;\ +\infty)$.

2.6. Понятие сложной функции

Рассмотрим функцию $u = \varphi(x)$, определенную на множестве X. Пусть эта функция такова, что каждому значению $x_0 \in X$ она ставит в соответствие такое значение $u_0 = \varphi(x_0)$, что $u_0 \in U$. В этом случае говорят, что *функция φ отображает множество X* ***во*** *множество U*.

Если при этом окажется, что множество U является множеством значений функции $u = \varphi(x)$, то говорят, что *функция φ отображает множество X* ***на*** *множество U*.

Таким образом, отображения X на U является частным случаем отображения X в U.

Пример 2.4.

Рассмотрим функцию $u = \sin x$.

Говорят, что функция отображает множество $X = (-\infty;\ +\infty)$ во множество $U_1 = [-1;\ 2]$, так как для любого $x_0 \in X$ соответствующее значение функции $u_0 = \sin x_0 \in [-1;\ 1] \subset U_1$.

Говорят, что функция отображает множество $X = (-\infty;\ +\infty)$ во множество $U_2 = [-1;\ 1]$, так как для любого $x_0 \in X$ соответствующее значение функции $u_0 = \sin x_0 \in [-1;\ 1] = U_2$.

Говорят, что функция отображает множество $X = (-\infty;\ +\infty)$ на множество $U_2 = [-1;\ 1]$, так как для любого $x_0 \in X$ соответствующее значение функции $u_0 = \sin x_0 \in [-1;\ 1] = U_2$.

Нельзя сказать, что функция отображает множество $X = (-\infty;\ +\infty)$ на множество $U_1 = [-1;\ 2]$, так как для любого $x_0 \in X$ соответствующее значение функции $u_0 = \sin x_0 \in [-1;\ 1] \neq U_1$. ■

Определение 2.6. Если функция $y = f(u)$ определена на множестве U, функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве X, при этом функция φ отображает множество X во множество U, то *на множестве X определена сложная функция $y = f\big(\varphi(x)\big)$.*

Замечание 2.1. Множество X не обязательно должно быть областью определения функции $u = \varphi(x)$, оно может быть подмножеством данной области определения.

Пример 2.5.

Рассмотрим $y = \ln(x^2 + 1)$. Разобьем ее на цепочку функций: $y = \ln u$, где $u = x^2 + 1$.

Функция $y = \ln u$ определена на множестве $U = (0;\ +\infty)$. Функция $u = x^2 + 1$ определена на множестве $X = (-\infty;\ +\infty)$, при этом ее множество значений $[1;\ +\infty)$. Так как $[1;\ +\infty) \subset U$, то функция $u = x^2 + 1$ отображает множество X во множество U.

Таким образом, $y = \ln(x^2 + 1)$ – сложная функция, определенная на $X = (-\infty;\ +\infty)$. ■

Пример 2.6.

Рассмотрим $y = \arcsin(x^2 - 2)$. Разобьем ее на цепочку функций: $y = \arcsin u$, где $u = x^2 - 2$. Функция $y = \arcsin u$ определена на множестве $U = [-1;\ 1]$. Функция $u = x^2 - 2$ определена на множестве $X = (-\infty;\ +\infty)$, при этом ее множество значений $[-2;\ +\infty)$. Так как $[-2;\ +\infty) \not\subset U$, то функция $u = x^2 - 2$ не отображает множество X во множество U. И тогда функция

$y = \arcsin(x^2 - 2)$ не является сложной функций на множестве $X = (-\infty;\ +\infty)$.

Чтобы функция $y = \arcsin(x^2 - 2)$ являлась сложной функцией на множестве X, необходимо, чтобы выполнялось условие $u \in U$, то есть $-1 \le u \le 1$. Отсюда $-1 \le x^2 - 2 \le 1$. Решая неравенство, получим $x \in \left[-\sqrt{3};\ -1\right] \cup \left[1;\ \sqrt{3}\right]$.

Выберем $X = \left[-\sqrt{3};\ -1\right] \cup \left[1;\ \sqrt{3}\right]$. Тогда функция $y = \arcsin u$ определена на множестве $U = [-1;\ 1]$. Функция $u = x^2 - 2$ определена на множестве $X = \left[-\sqrt{3};\ -1\right] \cup \left[1;\ \sqrt{3}\right]$, при этом ее множество значений $[-1;\ 1]$. Так как $[-1;\ 1] = U$, то функция $u = x^2 + 1$ отображает множество X на множество U.

Таким образом, $y = \arcsin(x^2 - 2)$ – сложная функция, определенная на $X = \left[-\sqrt{3};\ -1\right] \cup \left[1;\ \sqrt{3}\right]$. ■

Тема 3. Общие свойства функций

3.1. Ограниченные и неограниченные функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X.

Ограниченные функции

Определение 3.1. Функция $f(x)$ называется *ограниченной на множестве* X, если существует положительное число K такое, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq K$.

Пример 3.1.

1. Функция $y = \sin x$ ограничена на области определения $X = (-\infty;\ +\infty)$, так как $|\sin x\ | \leq 1$ $(K = 1)$.

2. Функция $y = \frac{x^2}{1+2x^2}$ определена на множестве $X = (-\infty;\ +\infty)$. Оценим функцию:

$$\left|\frac{x^2}{1+2x^2}\right| = \frac{x^2}{1+2x^2} < \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, $\left|\frac{x^2}{1+2x^2}\right| < \frac{1}{2}$ для любого $x \in (-\infty;\ +\infty)$, то есть $K = \frac{1}{2}$. Следовательно, функция $y = \frac{x^2}{1+2x^2}$ ограничена на интервале $(-\infty;\ +\infty)$. ■

Определение 3.2. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *ограниченной на этом множестве*, если существуют числа A и B такие, что $A \leq f(x) \leq B$ для всех $x \in X$.

Определения 3.1 и 3.2 эквивалентны.

Геометрический смысл ограниченной функции

В определении 3.1 говорится, что существует число $K > 0$ такое, что $|f(x)| \leq K$ для всех $x \in X$, а это означает, что $-K \leq f(x) \leq K$ для $x \in X$, то есть график функции $y = f(x)$ для всех $x \in X$ не выходит за пределы прямых $y = K$ и $y = -K$ (рис. 3.1).

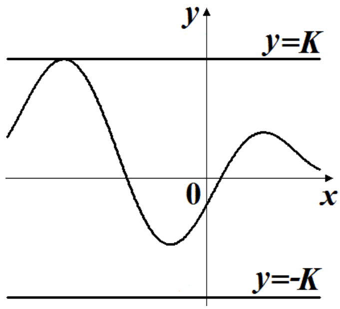

Рис. 3.1. Ограниченная функция по определению 3.1

Определение 3.2 геометрически означает, что найдутся две прямые $y = A$ и $y = B$ такие, что график функции $y = f(x)$ для $x \in X$ не выходит за пределы этих прямых (рис. 3.2).

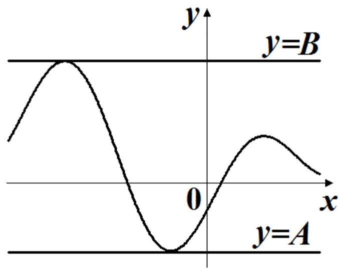

Рис. 3.2. Ограниченная функция по определению 3.2

Неограниченные функции

Определение 3.3. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *неограниченной на этом множестве*, если не существует такого числа $K > 0$, что $|f(x)| \leq K$ для всех $x \in X$.

Это «отрицательное» определение. Дадим определение в утвердительном смысле.

Определение 3.4. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *неограниченной на этом множестве*, если каково бы ни было положительное число K, существует хотя бы одно число $x' \in X$ такое, что $|f(x')| > K$.

Пример 3.2.

Докажем, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ неограниченна на интервале $(0;\ +\infty)$.

Решение. Возьмем произвольное число $K > 0$ и покажем, что найдется хотя бы одна точка $x' \in (0;\ +\infty)$ такая, что

$$|f(x')| = \left|\frac{1}{x'}\right| > K.$$

Очевидно, что x' можно взять из неравенства

$$\left|\frac{1}{x'}\right| > K \ \Leftrightarrow\ |x'| < \frac{1}{K} \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{K} < x' < \frac{1}{K}.$$

Учитывая, что $x' \in (0;\ +\infty)$, получаем $0 < x' < \frac{1}{K}$. Выберем $x' = \frac{1}{2K}$.

Итак, для любого положительного числа K нашлась точка $x' = \frac{1}{2K} \in (0;\ +\infty)$ такая, что $|f(x')| = \left|\frac{1}{x'}\right| = |2K| = 2K > K$. Следовательно, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ неограниченна на $(0;\ +\infty)$. ■

Геометрический смысл неограниченной функции

Геометрически неограниченность функции означает, что какова бы ни была полоса плоскости xOy между прямыми $y = K$ и $y = -K$, найдется хотя бы одна точка графика, лежащая вне этой полосы (рис. 3.3).

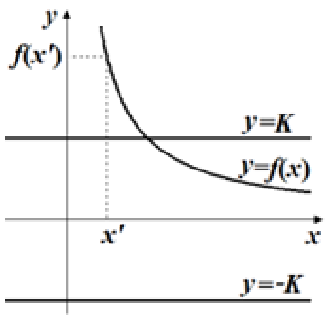

Рис. 3.3. Неограниченная функция

Замечание 3.1. Одна и та же функция на одном множестве может быть ограниченной, а на другом – неограниченной.

Например, $y = \operatorname{tg} x$ неограниченная на $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, и ограниченная на $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$.

3.2. Четные и нечетные функции

Определение 3.5. Множество X называется *симметричным*, если вместо с элементом x оно содержит и $(-x)$.

Например, множества $[-1;\ 1]$, $(-2;\ 2)$, $(-\infty;\ -3) \cup (3;\ +\infty)$ – симметричные множества; множество $[-2;\ 2)$ симметричным не является.

Определение 3.6. Функция $f(x)$, определенная на симметричном множестве X называется *четной на этом множестве*, если для каждой точки x из множества X выполняется условие $f(-x) = f(x)$.

Например, четными функциями являются:

- $y = x^4$ на $(-\infty;\ +\infty)$;
- $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ на $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 3.4).

Определение 3.7. Функция $f(x)$, определенная на симметричном множестве X, называется *нечетной на этом множестве*, если для каждой точки x из множества X выполняется условие $f(-x) = -f(x)$.

Например, нечетными функциями являются:

- $y = x\sqrt{4 - x^2}$ на $[-2;\ 2]$;
- $y = \sin x$ на $(-\infty;\ +\infty)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 3.5).

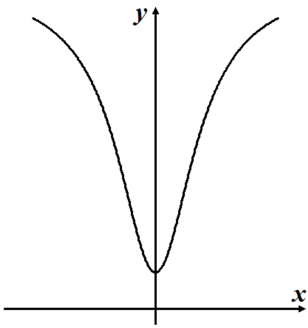

Рис. 3.4. График четной функции

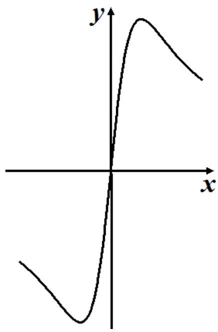

Рис. 3.5. График нечетной функции

Относительно четных и нечетных функций справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1. Алгебраическая сумма четных (нечетных) функций на множестве X есть функция четная (нечетная).

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) + g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – четные функции на множестве X. Так как

$$F(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = F(x),$$

то функция $F(x)$ – четная на множестве X.

Пусть теперь $F(x) = f(x) + g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – нечетные функции на множестве X. Так как

$$F(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) =$$
$$= -\big(f(x) + g(x)\big) = -F(x),$$

то функция $F(x)$ – нечетная на множестве X. Теорема доказана.

Теорема 3.2. Произведение двух четных функций или двух нечетных функций есть функция четная.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – четные функции на множестве X. Так как

$$F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = F(x),$$

то функция $F(x)$ – четная на множестве X.

Пусть теперь $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – нечетные функции на множестве X. Так как

$$F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot \big(-g(x)\big) =$$
$$= f(x) \cdot g(x) = -F(x),$$

то функция $F(x)$ – четная на множестве X. Теорема доказана.

Теорема 3.3. Произведение четной функции и нечетной функции, есть функция нечетная.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, где $f(x)$ – четная функция, а $g(x)$ – нечетная функция на множестве X. Так как

$$F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot \big(-g(x)\big) =$$
$$= -f(x) \cdot g(x) = -F(x),$$

то функция $F(x)$ – нечетная на множестве X. Теорема доказана.

3.3. Монотонные функции

Определение 3.8. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *возрастающей на множестве* X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$.

График возрастающей функции изображен на рис. 3.6. Например, функция антье возрастает на интервале $(-\infty, +\infty)$ (см. рис. 2.2).

Определение 3.9. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *строго возрастающей на множестве* X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

График строго возрастающей функции изображен на рис. 3.7.

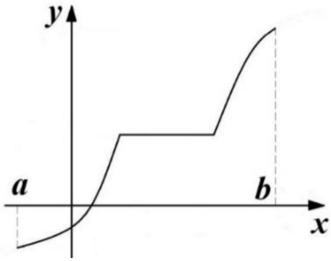

Рис. 3.6. Возрастающая функция

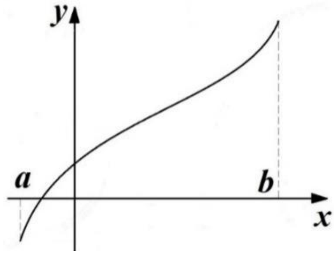

Рис. 3.7. Строго возрастающая функция

Определение 3.10. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *убывающей на множестве* X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.

График убывающей функции изображен на рис. 3.8.

Определение 3.11. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *строго убывающей на множестве* X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

График строго убывающей функции изображен на рис. 3.9.

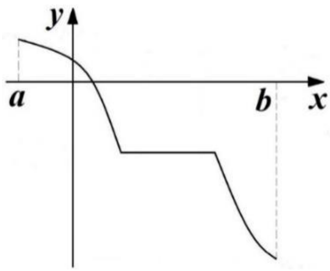

Рис. 3.8. Убывающая функция

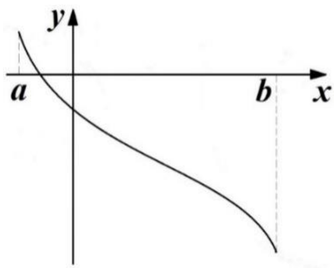

Рис. 3.9. Строго убывающая функция

Функции, возрастающие или убывающие на множестве X, называются *монотонными*.

3.4. Периодические функции

Определение 3.12. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *периодической*, если существует действительное число $T \neq 0$, такое, что выполняются условия:
1) если $x \in X$, то $(x + T) \in X$,
2) $f(x) = f(x \pm T)$.
При этом число T называется *периодом*.

Если число T является периодом функции $f(x)$, то и числа kT (где k – любое целое число, отличное от нуля) также являются периодами функции $f(x)$. Следовательно, периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Наименьший из положительных периодов функции называют *основным периодом*.

Теорема 3.4. Сумма, разность, произведение и частное двух функций с одинаковым периодом есть функция периодическая с тем же периодом.

Теорема 3.5. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом T, то функция $f(kx + b)$ – также периодическая с периодом $T_1 = \frac{1}{k}T$.

Обозначим периоды функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно T_f и T_g.

Определение 3.13. Говорят, что *периоды функций* $f(x)$ и $g(x)$ *соизмеримы*, если $T_f : T_g = p : q$, где p и q – целые числа.

Теорема 3.6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют соизмеримые периоды T_f и T_g, то они имеют общий период $T^* = T_f \cdot q = T_g \cdot p$.

Тема 4. Числовая последовательность

4.1. Понятие числовой последовательности

Ранее рассматривали примеры функций, областью определения которых являлись числовые промежутки. Теперь рассмотрим функции, заданные на множестве натуральных чисел, то есть функции вида $y = f(n)$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, которые называются *функциями натурального аргумента*.

Например, сумма $S = 2d(n-2)$ $(n \geq 3)$ внутренних углов n-угольника является функцией натурального аргумента $n = 3, 4, 5, \ldots$

Функция натурального аргумента $f(n)$ отличается от функции непрерывного аргумента тем, что ее значения можно занумеровать и расположить в определенном порядке: x_1, x_2, …, x_n, …, где $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, …, $x_n = f(n)$, …

Определение 4.1. *Последовательностью* называется функция натурального аргумента.

Определение 4.2. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие по определенному закону единственное действительное число x_n, то это соответствие называется *числовой последовательностью*. Обозначение: $\{x_n\}$.

Число x_1 называется *первым членом последовательности*, x_2 – *вторым членом последовательности*, …, x_n – *n-ым членом последовательности* или *общим членом последовательности*.

Последовательность имеет бесконечное множество членов. Зная общий член последовательности, можно найти любой член последовательности.

Пример 4.1.

Пусть общий член последовательности имеет вид $x_n = \frac{n}{n+1}$. Тогда

$$x_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \quad x_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{n}{n+1}, \quad \ldots.$$

Таким образом, последовательность имеет вид:

$$\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{4}, \ \ldots, \ \frac{n}{n+1}, \ \ldots \ \blacksquare$$

С геометрической точки зрения члены числовой последовательности можно изображать точками на числовой прямой.

Члены последовательности $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, рассмотренной в примере 4.1, изображены на рис. 4.1.

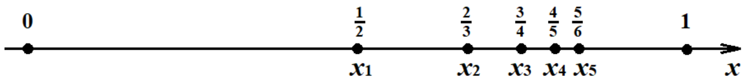

Рис. 4.1. Последовательность $\left\{\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}\right\}$

Пример 4.2.

Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. Она имеет вид:

$$-1, \ \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \ldots, \ \frac{(-1)^n}{n}, \ \ldots$$

Члены последовательности изображены на рис. 4.2.

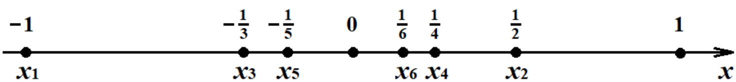

Рис. 4.2. Последовательность $\left\{\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}}\right\}$

4.2. Предел последовательности

Некоторые последовательности могут обладать особым свойством: их члены приближаются к определенному числу. В примере 4.1 видно, что члены последовательности $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ с ростом номера все ближе подходят к единице. А в примере 4.2 члены последовательности $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ с ростом номера все ближе подходят к нулю.

На рис. 4.1 видно, что расстояние от точек последовательности $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ до точки 1 уменьшается с возрастанием номера. Но мало того, что это расстояние уменьшается. Важно то, как оно уменьшается, – с ростом номера члена последовательности данное расстояние становится меньше некоторого наперед заданного положительного числа.

Данный факт формулируется в виде следующего определения.

Определение 4.3. Число b называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если каково бы ни было заданное положительное число ε, найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что для всех натуральных $n > N$ члены последовательности x_n удовлетворяют неравенству

$$|x_n - b| < \varepsilon. \qquad (4.1)$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

Последовательности, имеющие конечный предел, называются *сходящимися*.

Геометрический смысл предела последовательности

Неравенство (4.1) равносильно следующему неравенству

$$b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon, \quad n > N,$$

которое означает, что члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами $n > N$ попадают в ε-окрестность точки b.

Определение 4.4. Число b называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если каково бы ни была ε-окрестность точки b, найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что все члены последовательности с номерами $n > N$ попадают в эту окрестность.

При этом вне ε-окрестности точки b может находиться либо конечное число членов последовательности $\{x_n\}$, либо ни одного члена последовательности $\{x_n\}$.

Например, рассмотрим последовательность $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ из примера 4.2. На рис. 4.3 в ε-окрестности точки 0 содержатся все члены, начиная с четвертого номера. Следовательно, для данного ε можно взять $N = 3$, так как все члены последовательности $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ с номерами $n > 3$ попадают в ε-окрестность точки 0.

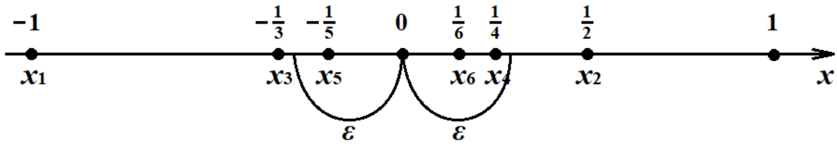

Рис. 4.3. Геометрическое определение предела последовательности

Замечание 4.1. Выбор числа N зависит от ε. Для различных ε числа N, вообще говоря, различны, причем с уменьшением ε число N, вообще говоря, увеличивается.

Замечание 4.2. Если неравенство (4.1) выполняется для $n > N$, то для $n > N_1$, где $N_1 > N$, неравенство (4.1) тем более будет выполняться, то есть для заданной величины ε номер N можно указывать неоднозначно. На рис. 4.3, наряду с номером $N = 3$ можно было выбрать $N_1 = 5$, так как все члены последовательности $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ с номерами $n > 5$ также попадают в ε-окрестность точки 0. Только $N = 3$, в отличие от $N_1 = 5$, это наименьший возможный номер. Таким образом, в определении предела последовательности не требуется находить N как наименьший возможный номер, достаточно показать, что существует хотя бы один номер N такой, что для любых натуральных $n > N$ выполнялось неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$.

Замечание 4.3 (о неравенствах). Неравенства $x > a$ и $x > [a]$ равносильны на множестве натуральных числе, но не равносильны на множестве действительных чисел.

Доказательство некоторых пределов последовательности

Пример 4.3.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon>0$ и докажем, что найдется натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что для любого натурального $n>N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon. \tag{4.2}$$

Выполняя равносильные преобразования на множестве натуральных чисел, получим, что

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{-1}{n+1}\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{n+1}<\varepsilon \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad n+1>\frac{1}{\varepsilon}\quad\Leftrightarrow\quad n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Тогда неравенство (4.2) равносильно неравенству

$$n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{4.3}$$

Выполнение определения предела последовательности достаточно показать для малых $\varepsilon>0$, так как для больших значений ε определение тем более будет выполняться. Поэтому будем считать, что ε столь мало, что $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\ge 1$. Тогда $\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]\in\mathbb{N}$.

Выберем $N=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$. Покажем, что для любого

$$n>N=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right] \tag{4.4}$$

выполняется неравенство (4.2).

Согласно замечанию 4.3 на множестве натуральных чисел неравенства (4.3) и (4.4) равносильны, то есть из выполнения неравенства (4.4) следует выполнение неравенства (4.3). В силу равносильности неравенств (4.2) и (4.3) получаем, что из выполнения неравенства (4.3) следует выполнение неравенства (4.2). Таким образом, по свойству транзитивности из выполнения неравенства (4.4) следует выполнение неравенства (4.2).

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось натуральное число N такое, что для любого натурального $n > N$ выполняется неравенство (4.2). Тогда по определению предела последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1. \qquad \blacksquare$$

Пример 4.4.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и докажем, что найдется натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что для любого натурального $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Выполняя равносильные преобразования на множестве натуральных чисел, получим, что

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тогда неравенство (4.5) равносильно неравенству

$$n > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.6}$$

Будем считать, что ε столь мало, что $\frac{1}{\varepsilon} \geq 1$. Тогда $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \in \mathbb{N}$. Выберем $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Покажем, что для любого

$$n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \tag{4.7}$$

выполняется неравенство (4.5).

Согласно замечанию 4.3 на множестве натуральных чисел неравенства (4.6) и (4.7) равносильны, то есть из выполнения неравенства (4.7) следует выполнение неравенства (4.6). В силу равносильности неравенств (4.5) и (4.6), получаем, что из выполнения неравенства (4.6) следует выполнение неравенства (4.5). Таким образом, по свойству транзитивности, из выполнения неравенства (4.7) следует выполнение неравенства (4.5).

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось натуральное число N такое, что для любого натурального $n > N$ выполняется неравенство (4.5). Тогда по определению предела последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0. \qquad \blacksquare$$

Замечание 4.4 (о характере стремления последовательности к своему пределу). Последовательность может стремиться к своему пределу так, что все члены последовательности остаются меньше своего предела (например, $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$), или больше своего предела (например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$), а может быть так, что члены последовательности располагаются по разные стороны от предела (например, $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$).

Пример 4.5.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \ \ (a > 1)$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и докажем, что найдется натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что для любого натурального $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon. \tag{4.8}$$

Так как $a > 1$, то $a^{\frac{1}{n}} > 1$, то есть $a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$. Следовательно, неравенство (4.8) равносильно неравенству

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon. \tag{4.9}$$

Выполняя равносильные преобразования на множестве натуральных чисел, получим, что

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a < (1+\varepsilon)^n.$$

Тогда неравенство (4.9) равносильно неравенству

$$a < (1+\varepsilon)^n. \tag{4.10}$$

Рассмотрим более простое неравенство

$$a < 1 + n\varepsilon, \tag{4.11}$$

которое не равносильно неравенству (4.10) (так как из неравенства (4.10) не следует неравенство (4.11)). Неравенство (4.11) равносильно неравенству

$$n > \frac{a-1}{\varepsilon}. \tag{4.12}$$

Выберем $N = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$ и докажем, что это такой номер N, что для любого натурального

$$n > N = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right] \tag{4.13}$$

выполняется неравенство (4.8).

По замечанию 4.3 неравенство (4.13) на множестве натуральных чисел равносильно неравенству (4.12). Так как неравенства (4.11) и (4.12) равносильны, то из неравенства (4.13) следует неравенство (4.11).

Докажем, что из неравенства (4.11) следует неравенство (4.10). Учитывая неравенство Бернулли:

$$1 + n\varepsilon < (1+\varepsilon)^n, \;\; n \geq 2, \tag{4.14}$$

получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$1 + n\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^n. \tag{4.15}$$

По свойству транзитивности из неравенств (4.15) и (4.11) получаем неравенство (4.10), то есть из неравенства (4.11) следует неравенство (4.10).

В силу равносильности неравенств (4.8) – (4.10) из неравенства (4.10) следует неравенство (4.8). Таким образом, из выполнения неравенства (4.13) следует выполнение неравенства (4.8).

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось натуральное число N такое, что для любого натурального $n > N$ выполняется неравенство (4.8). Тогда по определению предела последовательности

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (a > 1). \quad \blacksquare$$

Теорема 4.1. Всякая последовательность может иметь не более одного предела.

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b, \tag{4.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c, \quad b \neq c. \tag{4.17}$$

Равенство (4.16) означает, что для любого заданного положительного числа ε, а значит и для $\varepsilon = \left|\frac{b-c}{2}\right|$, найдется натуральное число $N_1(\varepsilon)$ такое, что для всех натуральных $n > N_1$ члены последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют неравенству

$$|x_n - b| < \varepsilon. \tag{4.18}$$

Равенство (4.17) означает, что для любого заданного положительного числа ε, а значит и для $\varepsilon = \left|\frac{b-c}{2}\right|$, найдется натуральное число $N_2(\varepsilon)$ такое, что для всех натуральных $n > N_2$ члены последовательности x_n удовлетворяют неравенству

$$|x_n - c| < \varepsilon. \tag{4.19}$$

Пусть N – наибольшее из чисел N_1 и N_2, тогда для любого $n > N$ одновременно выполняются неравенства (4.18) и (4.19).

Рассмотрим число $|b - c|$:

$$|b - c| = |(b - x_n) + (x_n - c)| \leq |b - x_n| + |x_n - c| < \varepsilon + \varepsilon =$$

$$= 2\varepsilon = 2\left|\frac{b - c}{2}\right| = |b - c|.$$

Итак, $|b - c| < |b - c|$. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение неверно. Таким образом, если последовательность имеет предел, то он единственен. Теорема доказана.

Свойства сходящихся последовательностей

1. Если $a_n \leq x_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.
2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и $b < c$ (соответственно $b > c$), то существует такой номер N, что $x_n < c$ при $n \geq N$ ($x_n > c$ при $n \geq N$).
3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и $x_n \geq c$ (соответственно $x_n \leq c$), $n \in \mathbb{N}$, то и $b \geq c$ (соответственно $b \leq c$).

4.3. Монотонные и ограниченные последовательности

Определение 4.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leq x_{n+1}$. Если при этом выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$, то последовательность называется *строго возрастающей*.

Определение 4.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *убывающей*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \geq x_{n+1}$. Если при этом выполняется неравенство $x_n > x_{n+1}$, то последовательность называется *строго убывающей*.

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.

Пример 4.6.

Доказать, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ строго убывающая.

Решение. Обозначим $x_n = \frac{1}{n}$. Тогда $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо:

$$n < n + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1},$$

то $x_n > x_{n+1}$. Следовательно, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ строго убывающая по определению. ■

Пример 4.7.

Доказать, что последовательность $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ строго возрастающая.

Решение. Обозначим $x_n = \frac{n}{2n+1}$. Тогда $x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n+1}{2n+3} = \frac{2n^2 + 3n - 2n^2 - 3n - 1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= -\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} < 0,$$

то $x_n < x_{n+1}$. Тогда последовательность $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ строго возрастает по определению. ■

Определение 4.7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует число B такое, что для всех натуральных n имеет место неравенство $x_n \leq B$.

Определение 4.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует число A такое, что для всех натуральных n имеет место неравенство $x_n \geq A$.

Пример 4.8.

1. Последовательность $\{-n\}$ ограничена сверху числом 0, так как для любого натурального n выполняется неравенство $x_n \leq 0$.
2. Последовательность $\{n^2\}$ ограничена снизу числом 1, так как для любого натурального n выполняется неравенство $x_n \geq 1$. ■

Определение 4.9. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, то есть если существуют два числа A и B такие, что для всех натуральных n имеют место неравенства $A \leq x_n \leq B$.

Определение 4.10. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует положительное число K такое, что для всех натуральных n имеет место неравенство $|x_n| \leq K$.

Пример 4.9.

1. Последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ограничена, так как она ограничена снизу числом 0, а сверху – числом 1.
2. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ограничена, так как существует положительное число $K = 1$ такое, что $\left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. ■

Теорема 4.2 (об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел). Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$. Докажем, что существуют такие числа A и B такие, что для всех натуральных n имеют место неравенства $A \leq x_n \leq B$.

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, то для произвольного $\varepsilon > 0$, а значит и для $\varepsilon = 1$ найдется N такой, что для любого натурального $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - b| < \varepsilon = 1$, то есть

$$b - 1 < x_n < b + 1, \;\; n > N. \tag{4.20}$$

Рассмотрим теперь все члены последовательности $\{x_n\}$, номера которых $n \leq N$, то есть члены $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Среди *конечного* множества чисел имеются наименьшее и наибольшее числа. Обозначим их m и M. Тогда

$$m \leq x_n \leq M, \;\; n \leq N. \tag{4.21}$$

Обозначим: $A = \min\{m,\ b-1\}$, $B = \max\{M,\ b+1\}$. Тогда из неравенств (4.20) и (4.21) с учетом обозначений следует, что

$$A < x_n < B,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, по определению, последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Теорема доказана.

Определение 4.11. Точная верхняя (точная нижняя) грань множества значений элементов последовательности $\{x_n\}$ называется *верхней (нижней) гранью последовательности* $\{x_n\}$. Обозначение: $\sup\{x_n\}$ или $\sup x_n$ (соответственно $\inf\{x_n\}$ или $\inf x_n$).

Если точная верхняя (точная нижняя) грань является числом, то это определение можно сформулировать следующим образом.

Определение 4.12. Число a называется *верхней (нижней) гранью последовательности* $\{x_n\}$, если:

1) $x_n \leq a$ (соответственно $x_n \geq a$) при $n \in \mathbb{N}$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что $x_N > a - \varepsilon$ (соответственно $x_N < a + \varepsilon$).

Теорема 4.3 (о существовании предела монотонной ограниченной последовательности). Если последовательность $\{x_n\}$ возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то эта последовательность имеет конечный предел, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\},\ \ \left(\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, которая возрастает и ограничена сверху. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она имеет точную верхнюю грань, то есть $\sup\{x_n\} = A$. Покажем, что $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Из того, что $A = \sup\{x_n\}$, следует, что $x_n \leq A$ для всех номеров $n \in \mathbb{N}$, и существует такой номер n_ε, что $x_{n_\varepsilon} > A - \varepsilon$. Тогда в силу монотонности последовательности $\{x_n\}$ для всех номеров $n \geq n_\varepsilon$ имеем

$$A - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \le x_n \le A < A + \varepsilon.$$

Поэтому $|A - x_n| < \varepsilon$ для всех $n \ge n_\varepsilon$, что и означает, что $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Аналогично доказывается существование предела для ограниченной снизу монотонно убывающий последовательности. Теорема доказана.

По теореме 4.2, если последовательный сходится, то она ограничена. Следовательно, что если монотонно возрастающая последовательность сходится, то она ограничена сверху. С другой стороны, если монотонно возрастающая последовательность ограничена сверху, то она сходится (по теореме 4.3). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие. Для того чтобы монотонно возрастающая последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху. Аналогичные утверждение справедливо и для монотонно убывающий последовательности.

Замечание 4.5. Если $[a_n, b_n]$ – система стягивающихся отрезков, а ξ – точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы, то

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

4.4. Предел последовательности $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$

Докажем, что данная последовательность возрастает и ограничена сверху.

Покажем, что последовательность строго возрастает, то есть для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ или

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Используем неравенство Бернулли (4.14). Обозначим

$$\alpha = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Тогда имеет место неравенство:

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-(n+1)\cdot\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-\frac{1}{n+1} \iff \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > \frac{n}{n+1} \iff$$

$$\iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{n}{n+1} \iff$$

$$\iff \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n} \iff \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \iff$$

$$\iff \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \iff \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Таким образом, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ строго возрастает.

Покажем, что последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ ограничена сверху. Для этого введем в рассмотрение вспомогательную последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ и докажем, что она убывает, то есть

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Из неравенства Бернулли (4.14) следует, что

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2} > 1-(n+2)\cdot\frac{-1}{n^2+2n} = 1+\frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) > \frac{n+1}{n} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n} \iff$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > 1 \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \iff$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Таким образом, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ убывает.

Из убывания вспомогательной последовательности следует, что любой ее член не превосходит первого члена, то есть

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \le \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Учитывая, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

по свойству транзитивности получаем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 4 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ ограничена сверху.

Итак, доказали, что последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ возрастает и ограничена сверху, то есть имеет конечный предел по теореме 4.3 о существовании предела монотонной ограниченной последовательности. Этот предел обозначают:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Подсчеты показали, что число $e = 2{,}7182818284590\ldots$ – иррациональное число.

4.5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 4.13. Пусть заданы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда *суммой, разностью и произведением этих последовательностей* называются соответственно последовательности

$\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$. Если $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, то *частным от деления последовательности* $\{x_n\}$ *на последовательность* $\{y_n\}$ называется последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. *Произведением последовательности* $\{x_n\}$ *на число* c называется последовательность $\{cx_n\}$.

Определение 4.14. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малый последовательностью*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Определение 4.14 можно сформулировать по-другому, используя определение предела последовательности.

Определение 4.15. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малый последовательностью*, если каково бы ни было заданное положительное число ε, найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что для всех натуральных $n > N$ члены последовательности x_n удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;
2) произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью;
3) произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Определение 4.16. $+\infty$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если каково бы ни было заданное положительное число E, найдется натуральное число $N(E)$, такое, что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство $x_n > E$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Определение 4.17. $-\infty$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если каково бы ни было заданное положительное число E, найдется натуральное число $N(E)$, такое, что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство $x_n < -E$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Определение 4.18. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой последовательностью*, если $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

Замечание 4.6. В определении бесконечного предела последовательности положительное число E нужно брать как можно большим, так как для малых E определение всегда выполняется.

Пример 4.10.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty \quad (a > 1)$.

Решение. Возьмем любое $E > 0$ и докажем, что найдется натуральное число $N(E)$ такое, что для любого натурального $n > N$ будет выполняться неравенство

$$a^n > E. \tag{4.22}$$

Так как $a > 1$, то $a = 1 + \alpha$ $(\alpha > 0)$ и неравенство (4.22) имеет вид:

$$(1 + \alpha)^n > E. \tag{4.23}$$

Рассмотрим более простое неравенство:

$$1 + n\alpha > E, \tag{4.24}$$

которое неравносильно неравенству (4.23). Но равносильно

$$n > \frac{E - 1}{\alpha}. \tag{4.25}$$

Будем считать, что E столь велико, что $\frac{E-1}{\alpha} \geq 1$. Выберем $N = \left[\frac{E-1}{\alpha}\right]$ и докажем, что для любого натурального

$$n > N = \left[\frac{E - 1}{\alpha}\right] \tag{4.26}$$

выполняется неравенство (4.22).

По замечанию 4.3 неравенство (4.26) на множестве натуральных чисел равносильно неравенству (4.25). Так как неравенства

(4.24) и (4.25) равносильны, то из неравенства (4.26) следует неравенство (4.24).

Докажем, что из неравенства (4.24) следует неравенство (4.23). По неравенству Бернулли для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha. \qquad (4.27)$$

По свойству транзитивности из неравенства (4.27) и (4.24) получаем неравенство (4.23), то есть из неравенства (4.24) следует неравенство (4.23). Так как неравенства (4.23) и (4.22) равны, то из выполнения неравенства (4.26) следует выполнение неравенства (4.22).

Итак, для любого $E > 0$ нашлось натуральное число N такое, что для любого натурального $n > N$ выполняется неравенство (4.22). Тогда по определению предела последовательности

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty \quad (a > 1). \qquad \blacksquare$$

4.6. Свойства пределов последовательности

Теорема 4.4. Для того, чтобы число b являлось пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = b + \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Обозначим $x_n = b + \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $\alpha_n = x_n - b$, $n \in \mathbb{N}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$, то есть неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Тогда по определению 4.15 $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Докажем достаточность. Пусть $x_n = b + \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Тогда по определению 4.15 для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, то есть неравенство

$|x_n - b| < \varepsilon$. Тогда, по определению 4.3 предела последовательности, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Теорема доказана.

Теорема 4.5. Если $x_n = c,\ n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\alpha_n\}$, где $\alpha_n = x_n - c = c - c = 0$. Тогда $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Следовательно, по теореме 4.4, $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Теорема доказана.

Теорема 4.6. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то последовательности $\{x_n \pm y_n\}$ также сходятся и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

то есть предел алгебраической суммы двух сходящихся последовательностей равен той же сумме пределов этих последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = b,\ \lim_{n\to\infty} y_n = c$. Тогда по теореме 4.4 имеем $x_n = b + \alpha_n,\ y_n = c + \beta_n,\ n \in \mathbb{N},$ где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Так как

$$x_n \pm y_n = (b + \alpha_n) \pm (c + \beta_n) = (b \pm c) + (\alpha_n \pm \beta_n),$$

а $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность (по свойству 1 бесконечно малых последовательностей), то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = b \pm c = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема доказана.

Следствие. Предел конечной алгебраической суммы сходящихся последовательностей равен той же алгебраической сумме пределов этих последовательностей.

Теорема 4.7. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то последовательности $\{x_n \cdot y_n\}$ также сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$

то есть предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению пределов этих последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$. Тогда по теореме 4.4 имеем $x_n = b + \alpha_n$, $y_n = c + \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Так как

$$x_n \cdot y_n = (b + \alpha_n) \cdot (c + \beta_n) = bc + (c\alpha_n + b\beta_n + \alpha_n\beta_n),$$

а $\{c\alpha_n + b\beta_n + \alpha_n\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность (по свойствам бесконечно малых последовательностей), то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = bc = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то последовательность $\{cx_n\}$ также сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim_{n\to\infty} x_n,$$

то есть постоянную можно выносить за знак последовательности.

Следствие 2. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и число $k \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{x_n^k\}$ также сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k.$$

Теорема 4.8. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ также сходится и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

то есть предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному от пределов этих последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$. Тогда по теореме 4.4 имеем $x_n = b + \alpha_n$, $y_n = c + \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Тогда

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{b}{c} = \frac{b + \alpha_n}{c + \beta_n} - \frac{b}{c} = \frac{1}{c(c + \beta_n)}(c\alpha_n - b\beta_n). \qquad (4.28)$$

Пусть $c > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c > \frac{c}{2}$, то по свойству 2 пределов последовательности, существует такой номер N, что $y_n > \frac{c}{2} > 0$ для всех номеров $n \geq N$. Поэтому при $n \geq N$ имеем

$$0 < \frac{1}{c(c+\beta_n)} = \frac{1}{cy_n} < \frac{2}{c^2}.$$

Отсюда следует, что последовательность $\left\{\frac{1}{c(c+\beta_n)}\right\}$ ограничена.

Последовательность $\{c\alpha_n - b\beta_n\}$ является бесконечно малой (по свойствам бесконечно малых последовательностей). Тогда и последовательность $\left\{\frac{1}{c(c+\beta_n)}(c\alpha_n - b\beta_n)\right\}$ является бесконечно малой. Следовательно, из (4.28) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{b}{c} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Аналогично доказывается случай, когда $c < 0$. Теорема доказана.

Замечание 4.7. В случае последовательностей, имеющих бесконечные пределы, утверждения теорем 4.6–4.8, вообще говоря, не имеют места.

4.7. Пример последовательности, не имеющей предела

Рассмотрим последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n + 1}{2}\right\} = 0,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ \dots,\ \ \frac{(-1)^n + 1}{2},\ \ \dots$$

Докажем, что никакое действительное число b не является пределом этой последовательности.

Для этого достаточно показать, что у каждого числа b найдется такая ε-окрестность, что нельзя указать натуральное число N такого, чтобы все члены последовательности с номерами $n > N$ попадали в эту окрестность точки b.

1. Докажем, что число $b = 0$ не является пределом последовательности. Для этого рассмотрим окрестность точки 0 радиуса $\frac{1}{2}$. В этой окрестности не содержатся члены с четными номерами. Значит нельзя указать натуральное число N такое, чтобы в окрестности точки 0 попадали все члены последовательности, начиная с этого номера (для любого N всегда будут находиться члены с нечетными номерами, большими N, не содержащиеся в этой окрестности).

2. Аналогично доказывается, что точка $b = 1$ не может быть пределом этой последовательности.

3. Пусть b – любое число, не равное 0 и 1. Тогда найдется окрестность точки b, которая не содержит чисел 0 и 1, а значит не содержит ни одного члена последовательности. Значит, такое число тоже не может быть пределом.

4. Покажем, что предел этой последовательности не может быть равным $+\infty$.

Действительно, если взять $E = 2$, то не найдется числа N такого, что $x_n > E$ для любого натурального $n > N$, ибо все члены последовательности меньше 2 (это 0 или 1).

5. Предел последовательности $\{x_n\}$ не может быть равным $-\infty$, так как при $E > 0$ ни один член последовательности не может быть меньше $(-E)$.

Итак, последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n+1}{2}\right\}$ не имеет предела.

Замечание 4.8. Для числовой последовательности возможны следующие случаи:

1) последовательность имеет конечный предел,
2) последовательность имеет бесконечный предел,
3) последовательность не имеет предела.

4.8. Числовая подпоследовательность. Частичный предел

Определение 4.19. Последовательность $\{y_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$, если для любого k существует такое натуральное n_k, что $y_k = x_{n_k}$, причем $n_{k_1} < n_{k_2}$, тогда и только тогда, когда $k_1 < k_2$. Последовательность $\{y_k\}$ обозначается в этом случае $\{x_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Иначе говоря, если дана какая-либо последовательность и из некоторого подмножество ее элементов образована новая последовательность, то она называется подпоследовательностью исходной последовательности, если порядок следования в ней элементов такой же, как и в заданной последовательности.

Например, последовательность 1, 3, 5, …, $2n + 1$, … является подпоследовательностью натурального ряда чисел 1, 2, …, n, …; а последовательность 2, 1, 3, 4, …, n, … нет. В обоих случаях элементы последовательностей образуют подмножество множества натуральных чисел, но в первом случае члены последовательности расположены в том же порядке, как и в натуральном ряде чисел, а во втором случае этот порядок нарушен.

Теорема 4.9 (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то есть существует такой отрезок $[a;\ b]$, что $a \leq x_n \leq b$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Разделим отрезок $[a;\ b]$ на два равных отрезка. По крайней мере один из получившихся отрезков содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим его через $[a_1;\ b_1]$. Пусть x_{n_1} – какой-либо из членов последовательности $\{x_n\}$, лежащий на отрезке $[a_1;\ b_1]$.

Теперь разделим отрезок $[a_1;\ b_1]$ на два равных отрезка. Снова хоть один из получившихся двух отрезков содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим его через $[a_2;\ b_2]$. В силу того, что на отрезке $[a_2;\ b_2]$ бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, найдется такой член x_{n_2}, что $x_{n_2} \in [a_2;\ b_2], n_2 > n_1$.

Продолжая процесс, получим последовательность отрезков $[a_n;\ b_n]$ и последовательность точек $x_{n_k} \in [a_k;\ b_k], k \in \mathbb{N}$. В силу построения последовательность $\{x_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Покажем, что эта подпоследовательность сходящаяся.

Последовательность отрезков $\{[a_k;\ b_k]\}$ является стягивающейся. Согласно лемме Кантора, существует единственная точка ξ, принадлежащая всем этим отрезкам. Тогда, по замечанию 4.5, $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$. А учитывая, что $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, $k \in \mathbb{N}$, по свойству 1) сходящихся последовательностей получаем, что последовательность $\{x_{n_k}\}$ тоже сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$. Таким образом, теорема доказана.

Определение 4.20. Предел любой сходящейся подпоследовательности данной последовательности называется ее *частичным пределом*.

Теорема Больцано-Вейерштрасса утверждает, что всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

Определение 4.21. Говорят, что *последовательность* $\{x_n\}$ *удовлетворяет условию Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ и $m > N$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Определение 4.21 можно сформулировать по-другому.

Определение 4.22. Говорят, что *последовательность* $\{x_n\}$ *удовлетворяет условию Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ и всех целых положительных чисел p выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Теорема 4.10 (критерий Коши). Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ и для всех целых положительных чисел p выполнялось неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Кратко: для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Тогда, по определению предела последовательности, для любого $\varepsilon > 0$, а значит и для $\frac{\varepsilon}{2}$, существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для любых натуральных $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Оценим $|x_{n+p} - x_n|$:

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - b) - (x_n - b)| \le$$
$$\le |x_{n+p} - b| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ и $m > N$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда существует такой номер N_1, что $|x_n - x_m| < 1$ при $n > N_1$ и $m > N_1$. В частности, если $n > N_1$ и $m = N_1$, то $|x_n - x_{N_1}| < 1$, то есть $x_{N_1} - 1 < x_n < x_{N_1} + 1$ при $n > N_1$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ ограничена при

$n > N_1$. Значит, по теореме 4.9 существует ее сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim\limits_{n\to-\infty} x_{n_k} = a$. Покажем, что вся данная последовательность $\{x_n\}$ также сходится и имеем пределом число a.

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда по определению предела последовательности существует номер $K(\varepsilon)$, такой, что для любых натуральных $k > K(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.29}$$

Причем, согласно определению 4.19 подпоследовательности, неравенство (4.29) выполняется для всех $n_k > n_{K(\varepsilon)}$.

Так как последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, то по определению 4.21 существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ и $m > N$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Положим $M = \max\{K(\varepsilon),\ N(\varepsilon)\}$ и зафиксируем некоторый номер $n_k > M$. Тогда для всех $n > M$ получим

$$|x_n - a| = \left|(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)\right| \le$$
$$\le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

А это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Теорема доказана.

Тема 5. Предел функции

5.1. Понятие предела функции

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки a.

Определение 5.1. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x*, стремящемся к* a, если каково бы ни было положительное число ε, существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам

$$|x-a|<\delta,\ \ x\neq a, \tag{5.1}$$

справедливо неравенство:

$$|f(x)-b|<\varepsilon. \tag{5.2}$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Определение 5.1 называется определением предела функции *по Коши*.

Дадим определение предела функции геометрически. Неравенства (5.1) равносильны неравенствам $a-\delta<x<a+\delta$, $x\neq a$, которые означают, что x находится в проколотой окрестности точки a радиуса δ, то есть $x\in U(a,\delta)$, $x\neq a$. Неравенство (5.2) равносильно неравенствам $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$, которые означают, что значение функции $f(x)$ находится в окрестности точки b радиуса ε, то есть $f(x)\in U(b,\varepsilon)$.

Тогда определение 5.1 предела функции можно сформулировать следующим образом.

Определение 5.2. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x*, стремящемся к* a, если какова бы ни была окрестность точки b радиуса ε, найдется окрестность точки a радиуса δ такая, что для всех x из проколотой окрестности точки a радиуса δ, соответствующие значения функции попадают в окрестность точки b радиуса ε.

Покажем графически, как по заданному ε находить δ (рис. 5.1). На оси Oy задаем произвольную окрестность точки b радиуса ε. Проводим прямые $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$, параллельные оси Ox, до пересечения с графиком функции $f(x)$. Отмечаем абсциссы найденных точек и расстояние ближайшей из этих точек до точки a обозначим через δ. Тогда для всех x из проколотой δ-окрестности точки a соответствующее значение функции попадает в ε-окрестность точки b.

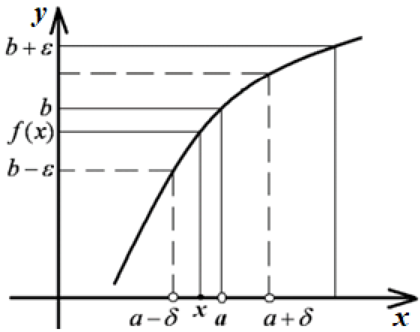

Рис. 5.1. Геометрическое изображение предела функции

Геометрически $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ означает, что как бы ни была узка полоса между прямыми $y = b \pm \varepsilon$, найдется δ-окрестность точки a такая, что все точки графика функции, абсциссы которых содержатся в проколотой δ-окрестности точки a, попадают внутрь этой полосы.

Замечание 5.1. Если ε уменьшать, то соответствующее значение δ также будет уменьшаться.

Замечание 5.2. В определении предела функции не требуется, чтобы неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ выполнялось и в самой точке a. Это рассчитано на тот случай, когда в точке a функция $f(x)$ не определена, или же определена, но значение $f(a) \neq b$ и не попадает в ε-окрестность точки b.

Теорема 5.1 (об ограниченности функции, имеющей конечный предел). Если функция имеет конечный предел при $x \to a$, то существует проколотая окрестность точки a, в которой функция ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Тогда, по определению, для любого $\varepsilon > 0$, а значит и для $\varepsilon = 1$, найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon = 1$.

Так как $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, то $a - b < x < a + b$, $x \neq a$, то есть нашлась проколотая окрестность точки a радиуса δ. Так как $|f(x) - b| < 1$, то $b - 1 < f(x) < b + 1$. Обозначим $A = b - 1$, $B = b + 1$. Тогда $A < f(x) < B$.

Итак, нашлась проколотая окрестность точки a радиуса δ, в которой для любого x выполняется неравенство $A < f(x) < B$, то есть функция ограничена. Теорема доказана.

Теорема 5.2 (о единственности предела функции). Функция $f(x)$ не может иметь более одного предела при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Предположим, что также $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \neq b$.

Так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то по определению предела функции для произвольного $\varepsilon > 0$, а значит и для $\varepsilon = \frac{|b-c|}{4}$, найдется $\delta_1 > 0$, такое, что для любого x, такого, что $|x - a| < \delta_1$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \frac{|b - c|}{4}. \tag{5.3}$$

Так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, то по определению предела функции для того же $\varepsilon = \frac{|b-c|}{4}$ найдется $\delta_2 > 0$, такое, что для любого x, такого, что $|x - a| < \delta_2$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$|f(x) - c| < \frac{|b - c|}{4}. \tag{5.4}$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любого x, такого, что $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, одновременно выполняются неравенства (5.3) и (5.4). Рассмотрим $|b - c|$:

$$|b - c| = \left|\left(b - f(x)\right) + \left(f(x) - c\right)\right| \leq |b - f(x)| + |f(x) - c| =$$

$$= |f(x) - b| + |f(x) - c| < \frac{|b - c|}{4} + \frac{|b - c|}{4} = \frac{|b - c|}{2}.$$

Получили $|b - c| < \frac{|b-c|}{2}$, что является противоречием. Следовательно, предположение неверно. Таким образом, функция имеет не более одного предела. Теорема доказана.

5.2. Пределы некоторых элементарных функций

Пример 5.1.

Для функции $y = x^n$ доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$.

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Надо найти $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, чтобы из неравенства $|x| < \delta$ и $x \neq 0$ следовало неравенство $|x^n| < \varepsilon$. Очевидно, что можно взять $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon}$.

Действительно, если теперь $|x| < \delta = \sqrt[n]{\varepsilon}$, то $|x|^n < \varepsilon$. Но так как $|x|^n = |x^n|$, то $|x^n| < \varepsilon$.

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon}$ такое, что как только $|x| < \delta$, так $|x^n| < \varepsilon$. Это и означает, по определению предела функции, что $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$. ■

Пример 5.2.

Для функции $y = C = \mathrm{const}$ доказать, что $\lim\limits_{x \to a} C = C$, где $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Возьмем $\varepsilon > 0$. Найдем $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, чтобы из неравенства $|x - a| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - C| < \varepsilon$. Но $f(x) = C$ при любых x. Следовательно, $|f(x) - C| = |C - C| = 0$ для всех x, а следовательно, $|f(x) - C| = 0 < \varepsilon$ для любых x. А значит в качестве δ можно брать любое число больше нуля. ■

Пример 5.3.

Для функции $y = \sin x$ доказать, что $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$, $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Известно неравенство, справедливое для любых α: $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$.

Действительно, если $|\alpha| \geq \frac{\pi}{2}$, то $|\sin \alpha| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |\alpha|$. Пусть теперь $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Тогда (см. рис. 5.2)

$$|\sin \alpha| = AC < AB = \pi \cdot OA \cdot \frac{\alpha}{\pi} = 1 \cdot \alpha = \alpha,$$

то есть $|\sin \alpha| < |\alpha|$. Также отметим, что $|\cos \alpha| \leq 1$ для всех α.

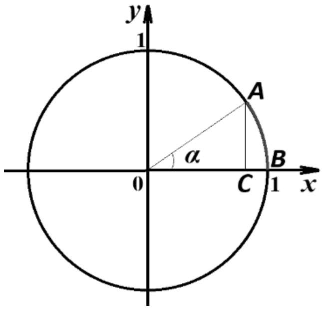

Рис. 5.2. Геометрическое представление функции $\sin \alpha$

Сначала докажем одно вспомогательное неравенство

$$|\sin x - \sin a| = \left|2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \leq 2 \cdot \left|\frac{x-a}{2}\right| \cdot 1 = |x-a|,$$

то есть $|\sin x - \sin a| \leq |x-a|$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы из неравенства $|x-a| < \delta$, $x \neq a$, следовало $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$. Очевидно, что в качестве δ можно взять любое положительное число, меньшее или равное ε.

Действительно, если $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$|\sin x - \sin a| \leq |x-a| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

то есть из $|x-a|<\delta$ следует $|\sin x-\sin a|<\varepsilon$, что и требовалось доказать. ■

Пример 5.4.

Для функции $y=\cos x$ доказать, что $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$, $a\in\mathbb{R}$.

Решение аналогично примеру 5.3.

5.3. Определение предела по Гейне

Ранее данное определение через ε и δ – это определение предела функции по Коши. Дадим определение предела функции по Гейне.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a, которую обозначим через X.

Определение 5.3. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x\to a$, если какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$ значений аргумента функции, сходящаяся к a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции всегда сходится к числу b.

Иначе определение по Гейне означает, что если для последовательности $\{x_n\}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то обязательно должно выполняться $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=b$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$.

Определения по Коши и по Гейне эквиваленты, то есть если число b является пределом функции $f(x)$ при $x\to a$ по Гейне, то это же число b является пределом функции $f(x)$ при $x\to a$ по Коши. И наоборот.

Определение предела функции по Гейне удобно использовать, если необходимо доказать, что предел функции $f(x)$ при $x\to a$ не существует. Для этого достаточно найти хотя бы две последовательности значений аргумента, сходящиеся к a, такие, чтобы последовательности соответствующих значений функции сходились к разным значениям.

Пример 5.5.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует.

Решение. Рассмотрим последовательность значений аргумента $\{x_n^1\}$: $x_n^1 = \frac{1}{\pi n}$. Здесь

$$\lim_{n\to\infty} x_n^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi n} = 0.$$

Тогда соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n^1)\}$:

$$f(x_n^1) = \sin\frac{1}{x_n^1} = \sin\pi n = 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

при этом $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^1) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$

Теперь рассмотрим последовательность значений аргумента $\{x_n^2\}$: $x_n^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$. Здесь

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} = 0.$$

Тогда соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n^2)\}$:

$$f(x_n^2) = \sin\frac{1}{x_n^2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

при этом $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^2) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

Итак, выбрав две последовательности значений аргумента $\{x_n^1\}$ и $\{x_n^2\}$, сходящиеся к 0, получили, что соответствующие последовательности значений функции $\{f(x_n^1)\}$ и $\{f(x_n^2)\}$ сходятся к разным числам. Следовательно, определение предела по Гейне не выполняется. Тогда $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует. ■

5.4. Бесконечно малые функции

Определение 5.4. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$.

Это значит, по определению предела, что для произвольного $\varepsilon > 0$, найдется $\delta > 0$, такое, что для всех x, таких, что $|x - a| < \delta$ и $x \neq a$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Пример 5.6.

1. $y = \sin x$ – бесконечно малая функция при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

2. $y = \cos x$ – бесконечно малая функция при $x \to \frac{\pi}{2}$, так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x = 0$. ■

Бесконечно малые функции при $x \to a$, иногда называется *бесконечно малыми величинами при* $x \to a$.

Теоремы о бесконечно малых функциях

Теорема 5.3. Сумма *конечного* числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство. Пусть

$$\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \ldots + \alpha_k(x),$$

где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, …, $\alpha_k(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{k}$. Так как $\alpha_1(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, то для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для всех x, таких, что $|x - a| < \delta_1$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{k}. \qquad (5.5)$$

Так как $\alpha_2(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, то для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, найдется $\delta_2 > 0$ такое, что для всех x, таких, что $|x - a| < \delta_2$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{k}. \qquad (5.6)$$

И так далее. Так как $\alpha_k(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, то для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{k}$ найдется $\delta_k > 0$ такое, что для всех x, таких, что $|x - a| < \delta_k$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$|\alpha_k(x)| < \frac{\varepsilon}{k}. \qquad (5.7)$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots \delta_k\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняются одновременно неравенства (5.5) – (5.7). Значит

$$|\alpha(x)| = |\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_k(x)| \leq$$
$$\leq |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| + \dots + |\alpha_k(x)| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon}{k} + \dots + \frac{\varepsilon}{k}}_{k\ \text{раз}} = \varepsilon.$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, что как только $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, так $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Это означает, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$. Теорема доказана.

Теорема 5.4. Произведение бесконечно малой функции при $x \to a$, на функцию, ограниченную в проколотой окрестности точки a, есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ ограничена в проколотой δ_1-окрестности точки a. Тогда существует число $K > 0$ такое, что для любого $x \in U(a, \delta_1)$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq K. \qquad (5.8)$$

Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{K}$ найдется δ_2-окрестность точки a, такая, что для всех $x \in U(a, \delta_2)$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{K}. \qquad (5.9)$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$, одновременно выполняются неравенства (5.8) и (5.9). Перемножим эти неравенства для $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$. Получим

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon.$$

Итак, для $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, что для любого x, удовлетворяющего неравенствам $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|\alpha(x) \cdot f(x)| < \varepsilon$, то есть $\alpha(x) \cdot f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$. Теорема доказана.

Следствие 1. Произведение функции, имеющей конечный предел при $x \to a$, на бесконечно малую функцию при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Следствие вытекает из теоремы потому, что функция, имеющая конечный предел, является по доказанной ранее теореме, ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки a.

Следствие 2. Произведение двух бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Следствие 3. Произведение постоянного числа на бесконечно малую функцию при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Теоремы о связи между функцией и ее пределом

Теорема 5.5. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то разность между функцией $f(x)$ и ее пределом b есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ тогда для любого $\varepsilon > 0$, найдется $\delta > 0$ такое, что для любого x, такого, что $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Если обозначить $\alpha(x) = f(x) - b$, то мы получим, что для $\varepsilon > 0$ нашлась $\delta > 0$ такое, что для любого x, такого, что $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$, то есть $\alpha(x)$ – есть бесконечно малая функция при $x \to a$. Теорема доказана.

Теорема 5.6. Если разность между функцией $f(x)$ и постоянным числом b есть бесконечно малая функция при $x \to a$, то число b есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $f(x) - b = \alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$, если $|x - a| < \delta$, $x \neq a$. Но это и означает, что $|f(x) - b| < \varepsilon$, если для $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Теорема доказана.

5.5. Теоремы о конечных пределах

Теорема 5.7 (о пределе суммы). Предел алгебраической суммы конечного числа функции при $x \to a$, каждая из которых имеет конечный предел при $x \to a$, равен той же алгебраической сумме пределов этих функций при $x \to a$.

Доказательство. Докажем для суммы двух функций. Пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{x \to a} g(x) = c.$$

Докажем, что

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = b + c. \quad (5.10)$$

Обозначим

$$f(x) - b = \alpha(x), \quad g(x) - c = \beta(x). \quad (5.11)$$

Тогда, по теореме 5.5 о связи между функцией и ее пределом, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$.

Из равенств (5.11) выразим

$$f(x) = \alpha(x) + b, \quad g(x) = \beta(x) + c.$$

Рассмотрим сумму функций:

$$f(x) + g(x) = (\alpha(x) + b) + (\beta(x) + c) = \big(\alpha(x) + \beta(x)\big) + (b + c).$$

Тогда

$$\big(f(x) + g(x)\big) - (b + c) = \alpha(x) + \beta(x).$$

Так как $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, то $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ по теореме 5.3 о сумме конечного числа бесконечно малых функций. Следовательно, по теореме 5.6 о связи между функцией и ее пределом, получаем

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = b + c,$$

то есть равенство (5.10) выполняется. Теорема доказана.

Теорема 5.8 (о пределе произведения). Предел произведения конечного числа функций при $x \to a$, каждая из которых имеет конечный предел при $x \to a$, равен произведению пределов этих функций при $x \to a$.

Доказательство. Докажем для суммы двух функций. Пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{x \to a} g(x) = c.$$

Докажем, что

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = bc. \qquad (5.12)$$

Обозначим

$$f(x) - b = \alpha(x), \quad g(x) - c = \beta(x). \qquad (5.13)$$

Тогда, по теореме 5.5 о связи между функцией и ее пределом, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$.

Из равенств (5.13) выразим

$$f(x) = \alpha(x) + b, \quad g(x) = \beta(x) + c.$$

Рассмотрим произведение функций:

$$f(x) \cdot g(x) = (\alpha(x) + b) \cdot (\beta(x) + c) =$$
$$= \alpha(x) \cdot \beta(x) + c \cdot \alpha(x) + b \cdot \beta(x) + bc.$$

Тогда

$$f(x) \cdot g(x) - bc = \alpha(x) \cdot \beta(x) + c \cdot \alpha(x) + b \cdot \beta(x).$$

Так как $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, то,

- функции $c \cdot \alpha(x)$ и $b \cdot \beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$ по следствию 3 к теореме 5.4 о произведении бесконечно малых функций на постоянную,
- функция $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ по теореме 5.4 о произведении бесконечно малых функций.

Тогда функция $\big(\alpha(x)\cdot\beta(x)+c\cdot\alpha(x)+b\cdot\beta(x)\big)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$ по теореме 5.3 о сумме конечного числа бесконечно малых функций.

Итак, $(f(x)g(x)-bc\ )$ – бесконечно малая функция при $x\to a$. Следовательно, по теореме 5.6 о связи между функцией и ее пределом, получаем

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=bc,$$

то есть равенство (5.12) выполняется. Теорема доказана.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак конечного предела, то есть

$$\lim_{x\to a}\big(c\cdot f(x)\big)=c\cdot\lim_{x\to a}f(x),$$

если $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ конечен.

Следствие 2. Предел степени функции $f(x)$ с натуральным показателем при $x\to a$ равен той же степени предела основания при $x\to a$, если предел основания конечен, то есть если $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ конечен, то

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^n=\Big(\lim_{x\to a}f(x)\Big)^n.$$

Теорема 5.9. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x\to a$, отличный от нуля, то функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\neq 0$. Тогда, по определению предела функции, для произвольного $\varepsilon>0$, а значит и для $\varepsilon=\frac{|b|}{2}>0$ найдется δ-окрестности точки a, такая, что для всех $x\in U(a,\delta)$, $x\neq a$ выполняется неравенство

$$|f(x)-b|<\frac{|b|}{2}.$$

По свойствам модуля для всех $x\in\mathbb{R}$, а значит и для $x\in U(a,\delta)$, $x\neq a$ имеем

$$|f(x) - b| \geq |b| - |f(x)|.$$

Из двух последних неравенств получаем, что для $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$|b| - |f(x)| < \frac{|b|}{2} \quad \text{или} \quad |f(x)| > \frac{|b|}{2}.$$

Тогда:

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|b|} \quad \text{или} \quad \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{2}{|b|}, \quad x \in (a - \delta, a + \delta), \;\; x \neq a.$$

Это означает, что нашлась проколотая δ-окрестность точки a, в которой функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена. Теорема доказана.

Теорема 5.10 (о пределе частного). Предел частного двух функций при $x \to a$, каждая из которых имеет конечный предел при $x \to a$, равен отношению предела числителя к пределу знаменателя при $x \to a$, если предел знаменателя при $x \to a$ отличен от нуля.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \neq 0$. Докажем, что

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}. \tag{5.14}$$

Рассмотрим разность функций

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \frac{c \cdot f(x) - b \cdot g(x)}{c \cdot g(x)} = \frac{1}{c \cdot g(x)} \cdot \big(c \cdot f(x) - b \cdot g(x)\big).$$

Рассмотрим функцию $\frac{1}{c \cdot g(x)}$. Так как

$$\lim_{x\to a} c \cdot g(x) = [\text{по следствию 1 к теореме 5.8}] =$$

$$= c \cdot \lim_{x\to a} g(x) = c \cdot c = c^2 \neq 0,$$

то по теореме 5.9 функция $c \cdot g(x)$ – ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Рассмотрим функцию $c \cdot f(x) - b \cdot g(x)$. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ конечны, то

$$\lim_{x\to a}\big(c\cdot f(x)-b\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to a}\big(c\cdot f(x)\big)-\lim_{x\to a}\big(b\cdot g(x)\big)=$$
$$=c\cdot\lim_{x\to a}f(x)-b\cdot\lim_{x\to a}g(x)=cb-bc=0.$$
Следовательно, функция $\big(c\cdot f(x)-b\cdot g(x)\big)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$.

Тогда по теореме 5.4 (о произведении ограниченной и бесконечно малой функции) функция $\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b}{c}$ – бесконечно малая функция при $x\to a$. Следовательно, по теореме 5.6 о связи между функцией и ее пределом, получаем
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c},$$
то есть равенство (5.14) выполняется. Теорема доказана.

Теорема 5.11 (о сохранении функцией знака своего предела). Если функция $f(x)$ при $x\to a$ имеет конечный предел, отличный от нуля, то существует проколотая окрестность точки a, в которой знак функции совпадает со знаком её предела.

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a}f(x)=b\neq 0$. По определению предела функции для произвольного $\varepsilon>0$, а значит и для $\varepsilon=|b|$, найдется δ-окрестность точки a, такая, что для любого $x\in U(a,\delta)$, $x\neq a$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<|b|$ или
$$b-|b|<f(x)<b+|b|. \tag{5.15}$$
Пусть $b>0$, тогда $|b|=b$ и неравенство (5.15) примет вид:
$$0<f(x)<2b,\ \ x\in U(a,\delta),\ \ x\neq a.$$
Следовательно, функция $f(x)$ положительна в проколотой окрестности точки a и ее знак совпадает со знаком предела.

Пусть $b<0$, тогда $|b|=-b$ и неравенство (5.15) примет вид:
$$2b<f(x)<0,\ \ x\in U(a,\delta),\ \ x\neq a.$$
Следовательно, опять знак функции совпадает со знаком ее предела в проколотой окрестности точки a. Теорема доказана.

Теорема 5.12 (о переходе к пределу в неравенстве). Если $f(x) > g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a, и если каждая из этих функций имеет конечный предел при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Доказательство. Пусть

$$f(x) > g(x), \quad x \in U(a, \delta_1), \quad x \neq a. \tag{5.16}$$

Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Предположим, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ конечны, то по теореме 5.7 о пределе суммы имеем

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) < 0.$$

По теореме 5.11 о сохранении функцией знака своего предела получаем, что $f(x) - g(x) < 0$ для $x \in U(a, \delta_2)$,$x \neq a$, то есть

$$f(x) < g(x), \quad x \in U(a, \delta_2), \quad x \neq a. \tag{5.17}$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$, одновременно выполняются неравенства (5.16) и (5.17), что не может быть. Противоречие доказывает теорему.

Теорема 5.13 (о пределе промежуточной функции). Если в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) < \varphi(x) < g(x)$, причём пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ конечны и равны между собой, то предел функции $\varphi(x)$ при $x \to a$ существует и равен пределу функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$.

Доказательство. Пусть

$$f(x) < \varphi(x) < g(x), \quad x \in U(a, \delta_1), \quad x \neq a, \tag{5.18}$$

при этом $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то для этого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_2 > 0$, такое, что для всех $x \in U(a, \delta_2)$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon. \tag{5.19}$$

Так как $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, то для этого же $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_3 > 0$ такое, что для всех $x \in U(a, \delta_3)$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon. \qquad (5.20)$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Тогда для всех $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$, выполняются все три неравенства (5.18) – (5.20). Отсюда получаем

$$b - \varepsilon < f(x) < \varphi(x) < g(x) < b + \varepsilon$$

или $b - \varepsilon < \varphi(x) < b + \varepsilon$. Тогда $|\varphi(x) - b| < \varepsilon$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|\varphi(x) - b| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b$. Теорема доказана.

Теорема 5.14 (о замене переменной в пределе функции). Если существуют $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $f(x) \neq b$ при $x \neq a$, и $\lim\limits_{y \to b} F(y)$, тогда при $x \to a$ существует предел сложной функции $F\big(f(x)\big)$ и

$$\lim_{x \to a} F\big(f(x)\big) = \lim_{y \to b} F(y).$$

Доказательство. Из определения предела функции следует, что функции $f(x)$ и $F(y)$ определены в некоторых окрестностях точек a и b соответственно, кроме, может быть, самих этих точек. Покажем, что существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что для любого $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$, имеет смысл сложная функция $F\big(f(x)\big)$ и можно ставить вопрос о существовании ее предела при $x \to a$.

Пусть функция $F(y)$ определена в ε-окрестности точки b, кроме, может быть, самой точки b. Так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то для заданного ε существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Учитывая, что по условию теоремы $f(x) \neq b$ при $x \neq a$, получаем, что $F\big(f(x)\big)$ – сложная функция, определенная в проколотой δ-окрестность точки a.

Пусть $\{x_n\}$ – некоторая последовательность, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \in U(a,\delta)$, $x_n \neq a$. Обозначим $y_n = f(x_n)$. По условию теоремы $y_n \neq b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} F\big(f(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{y\to b} F(y).$$

Так как последнее равенство справедливо для любой последовательности $\{x_n\}$, то, согласно определению предела функции по Гейне, получаем, что

$$\lim_{x\to a} F\big(f(x)\big) = \lim_{n\to\infty} F\big(f(x_n)\big) = \lim_{y\to b} F(y).$$

Теорема доказана.

5.6. Другие случаи пределов функции

Конечный предел функции при $x \to \pm\infty$

Определение 5.5. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ существует такое число $D(\varepsilon)$, что для всех $x > D$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

Геометрически это означает, что какова бы не была ε-окрестность точки b найдется число D такое, что для всех $x > D$ график функции заключен между прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$. С уменьшением ε число D может возрастать.

По мере возрастания x график функции будет приближаться к прямой $y = b$, оставаясь или ниже этой прямой (рис. 5.3.1), или выше этой прямой (рис. 5.3.2), или же график колеблется около прямой $y = b$, пересекая ее бесчисленное множество раз, причем амплитуда колебания стремится к нулю (рис. 5.3.3).

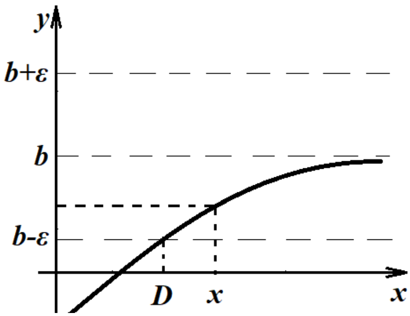

Рис. 5.3.1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, график функции ниже $y = b$

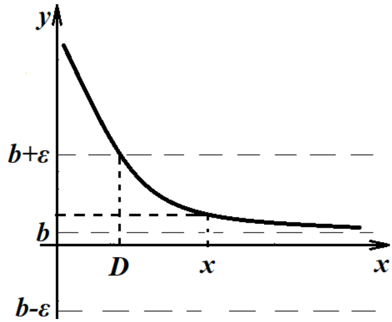

Рис. 5.3.2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, график функции выше $y = b$

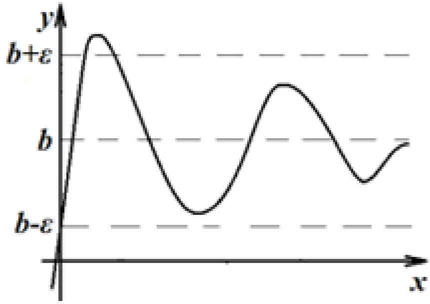

Рис. 5.3.3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, график функции пересекает $y = b$

Определение 5.6. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ существует такое число $D(\varepsilon)$, что для всех $x < D$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Геометрически это означает, что какова бы не была ε- окрестность точки b найдется число D такое, что для всех $x < D$ график функции заключен между прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$. С уменьшением ε число D может возрастать.

По мере возрастания x график функции будет приближаться к прямой $y = b$, оставаясь или ниже этой прямой (рис. 5.4), или выше этой прямой, или же график колеблется около прямой $y = b$, пересекая ее бесчисленное множество раз, причем амплитуда колебания стремится к нулю.

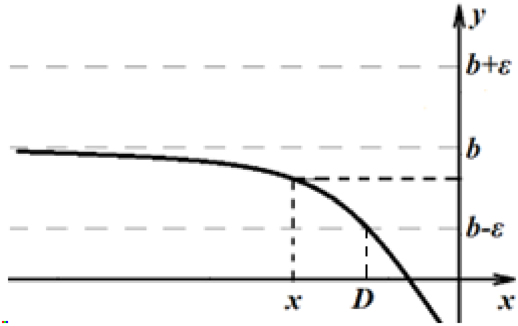

Рис. 5.4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, график функции ниже $y = b$

Пример 5.7. Доказать, что $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $D(\varepsilon)$, такое, что для любого $x < D$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Выполняя эквивалентные преобразования, получаем

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|x|} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon} \text{ или } x < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Учитывая, что $x \to -\infty$, будем считать, что x столь мало, что выполняется неравенство $x < -\frac{1}{\varepsilon}$. Выберем $D = -\frac{1}{\varepsilon}$.

Теперь покажем, что для любого $x < D = -\frac{1}{\varepsilon}$выполняется неравенство $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Действительно, если $x < -\frac{1}{\varepsilon} < 0$, то $0 > \frac{1}{x} > -\varepsilon$. Это означает, что $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует $D = -\frac{1}{\varepsilon}$, такое, что для любого $x < D$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Следовательно, по определению 5.5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

График функции $y = \frac{1}{x}$ при $x \to -\infty$ приближается к прямой $y = 0$ снизу (рис. 5.5). ■

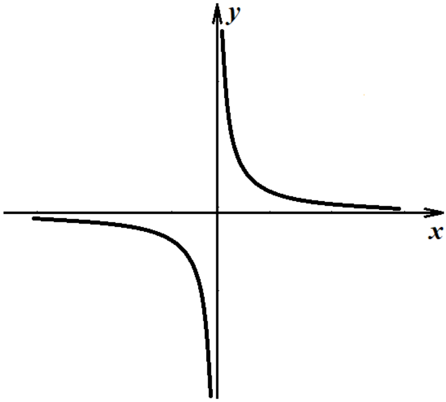

Рис. 5.5. График функции $y = \frac{1}{x}$

Бесконечные пределы функции при $x \to a$

Определение 5.7. $+\infty$ называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to a$, если каково бы ни было число $E > 0$, существует такое число $\delta(E) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $f(x) > E$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Геометрически это означает, что каково бы ни было $E > 0$, найдется δ-окрестность точки a такая, что для всех x из проколотой окрестности точки a график функции $y = f(x)$ лежит выше прямой $y = E$ (рис. 5.6).

Определение 5.8. $-\infty$ называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to a$, если каково бы ни было число $E > 0$, существует такое число $\delta(E) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $f(x) < -E$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Геометрически это означает, что каково бы ни было $E > 0$, найдется δ-окрестность точки a такая, что для всех x из проколотой окрестности точки a график функции $y = f(x)$ лежит ниже прямой $y = -E$ (рис. 5.7).

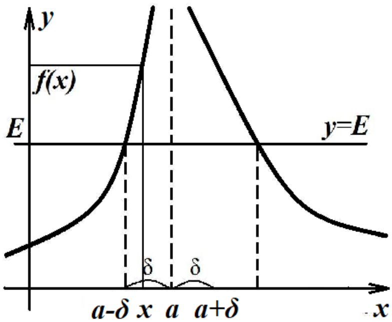

Рис. 5.6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

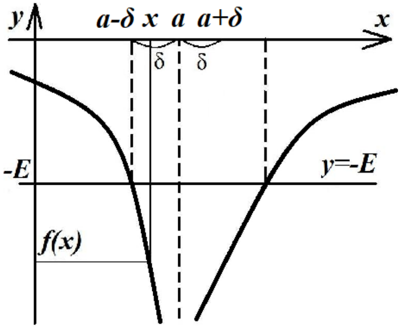

Рис. 5.7. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Пример 5.8. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Решение. Возьмем любое $E > 0$ и покажем, что существует $\delta(E) > 0$, такое, что для любого x, удовлетворяющего неравенствам $|x| < \delta$, $x \neq 0$, выполняется неравенство $\frac{1}{x^2} > E$. Выполняя эквивалентные преобразования, получаем

$$\frac{1}{x^2} > E > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1}{E} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{E}}. \qquad (5.21)$$

Выберем $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$. Теперь покажем, что для любого $|x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$ выполняется неравенство $\frac{1}{x^2} > E$. Это справедливо из-за эквивалентности преобразований (5.21).

Итак, для любого $E > 0$ существует $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}} > 0$, такое, что для любого $|x| < \delta$, $x \neq 0$, выполняется неравенство $\frac{1}{x^2} > E$. Следовательно, по определению 5.6 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

График функции $y = \frac{1}{x^2}$ при $x \to 0$ изображен на рис. 5.8. ■

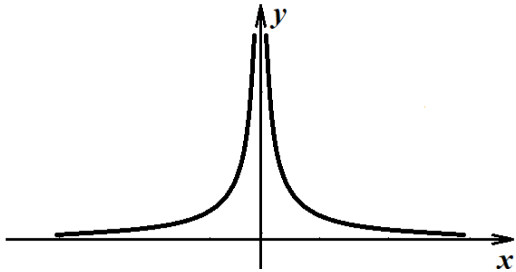

Рис. 5.8. График функции $y = \frac{1}{x^2}$

Бесконечные пределы функции при $x \to \pm\infty$

Определение 5.9. $+\infty$ называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если каково бы ни было число $E > 0$, существует такое число $D(E)$, что для всех $x > D$ выполняется неравенство $f(x) > E$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Замечание 5.3. С увеличением E увеличивается D.

Геометрически это означает, что для любого числа $E > 0$ найдется такое число D, что для всех $x > D$ график функции $y = f(x)$ лежит выше прямой $y = E$ (рис. 5.9).

Определение 5.10. $-\infty$ называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если каково бы ни было число $E > 0$, существует такое число $D(E)$, что для всех $x > D$ выполняется неравенство $f(x) < -E$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Геометрически это означает, что для любого числа $E > 0$ найдется такое число D, что для всех $x > D$ график функции $y = f(x)$ лежит ниже прямой $y = -E$ (рис. 5.10).

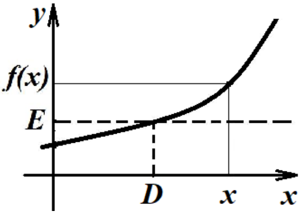

Рис. 5.9. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

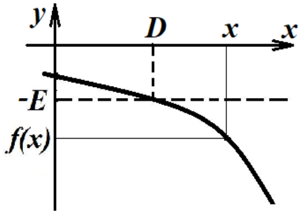

Рис. 5.10. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Определение 5.11. $+\infty$ называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если каково бы ни было число $E > 0$, существует такое число $D(E)$, что для всех $x < D$ выполняется неравенство $f(x) > E$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Геометрически это означает, что для любого числа $E > 0$ найдется такое число D, что для всех $x < D$ график функции $y = f(x)$ лежит выше прямой $y = E$ (рис. 5.11).

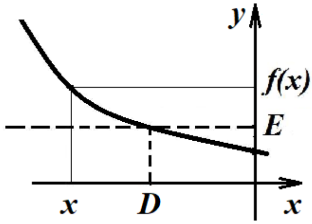

Рис. 5.11. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

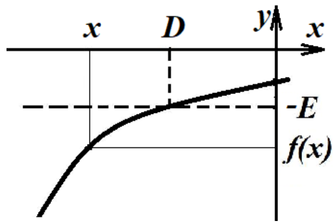

Рис. 5.12. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Определение 5.12. $-\infty$ называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если каково бы ни было число $E > 0$, существует такое число $D(E)$, что для всех $x < D$ выполняется неравенство $f(x) < -E$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Геометрически это означает, что для любого числа $E > 0$ найдется такое число D, что для всех $x < D$ график функции $y = f(x)$ лежит ниже прямой $y = -E$ (рис. 5.12).

Пример 5.9. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Решение. Возьмем любое $E > 0$ и покажем, что существует $D(E)$, такое, что для любого $x > D$, выполняется неравенство $x^2 > E$. Выполняя эквивалентные преобразования, получаем

$$x^2 > E > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \sqrt{E} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{E}, \\ x < -\sqrt{E}. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $x \to +\infty$, будем считать, что x столь мало, что выполняется неравенство $x > \sqrt{E}$. Выберем $D = \sqrt{E}$.

Теперь покажем, что для любого $x > D = \sqrt{E}$ выполняется неравенство $x^2 > E$. Действительно, если $x > \sqrt{E} > 0$, то $x^2 > E$.

Итак, для любого $E > 0$ существует $D = \sqrt{E}$, такое, что для любого $x > D$ выполняется неравенство $x > E$. Следовательно, по определению 5.9 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

График функции $y = x^2$ изображен на рис. 5.13. ■

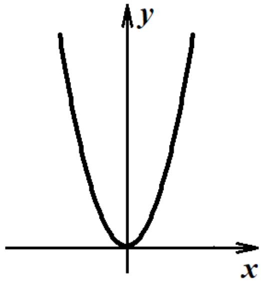

Рис. 5.13. График функции $y = x^2$

5.7. Бесконечно большие функции

Определение 5.13. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = +\infty$.

Применяя определение 5.6 бесконечного предела функции при $x \to a$, получаем другое определение.

Определение 5.14. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией при* $x \to a$, если каково бы ни было число $E > 0$, существует такое число $\delta(E) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $|x-a|<\delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x)|>E$.

Можно говорить о бесконечно больших функциях при $x \to \pm\infty$.

Среди бесконечно больших функций выделяются положительные и отрицательные бесконечно большие функции.

Определение 5.15. Функция $f(x)$ называется *положительной бесконечно большой функцией при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$. Функция $f(x)$ называется *отрицательной бесконечно большой функцией при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Замечание 5.4. Функция может быть бесконечно большой при $x \to a$, но не быть ни положительной, ни отрицательной бесконечно большой функцией.

Пример 5.10.

1) $y = \frac{1}{x^2}$ – положительная бесконечно большая функция при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$;
2) $y = -\frac{1}{x^4}$ – отрицательная бесконечно большая функция при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^4}\right) = -\infty$;
3) $y = \frac{1}{x}$ – бесконечно большая функция при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$, но не является ни положительной, ни отрицательной бесконечно большой функцией, так как в проколотой окрестности точки $x = 0$ принимает как положительные, так и отрицательные значения (см. рис. 5.5). ■

Теоремы о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями

Теорема 5.15. Если $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, то для любого $E > 0$, а значит и для $E = \frac{1}{\varepsilon}$, найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta,\ x \neq a,$ выполняется неравенство $|f(x)| > E = \frac{1}{\varepsilon}$. Выполняя эквивалентные преобразования, получим

$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta,\ x \neq a$, выполняется неравенство $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$. Следовательно, по определению $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция при $x \to a$. Теорема доказана.

Теорема 5.16. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, причем $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to a$.

Доказательство. Пусть по условию теоремы для всех $x \in U(a, \delta_1),\ x \neq a$, выполняется неравенство

$$\alpha(x) \neq 0. \tag{5.22}$$

Возьмем число $E > 0$. Так как $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, то для любого $\varepsilon > 0$, а значит и для $\varepsilon = \frac{1}{E}$, найдется такое число $\delta_2 > 0$, что для всех $x \in U(a, \delta_2),\ x \neq a$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon = \frac{1}{E}. \tag{5.23}$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$, одновременно выполняются неравенства (5.22) и (5.23). Следовательно, дробь $\frac{1}{|\alpha(x)|}$ имеет смысл в этой окрестности точки a, причем из неравенства (5.23) следует, что $\frac{1}{|\alpha(x)|} > E$ или $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > E$.

Итак, любого $E > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > E$. Следовательно, по определению, $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to a$. Теорема доказана.

Теоремы о бесконечно больших функциях

Теорема 5.17. Сумма двух бесконечно больших функций одного знака при $x \to a$ есть бесконечно большая функция того же знака при $x \to a$.

Доказательство. Докажем теорему для суммы $f(x)$ и $g(x)$ – положительных бесконечно больших функций при $x \to a$.

Возьмем произвольное число $E > 0$. Так как $f(x)$ – положительная бесконечно большая функция при $x \to a$, то для любого $E > 0$, а значит и для $E_1 = \frac{E}{2}$, найдется такое число $\delta_1 > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $|x - a| < \delta_1$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$f(x) > E_1 = \frac{E}{2}. \tag{5.24}$$

Так как $g(x)$ – положительная бесконечно большая функция при $x \to a$, то для любого $E > 0$, а значит и для $E_1 = \frac{E}{2}$, найдется такое число $\delta_2 > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $|x - a| < \delta_2$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$g(x) > E_1 = \frac{E}{2}. \tag{5.25}$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$, одновременно выполняются неравенства (5.24) и (5.25). Сложим неравенства (5.24) и (5.25):

$$f(x) + g(x) > 2E_1 = E.$$

Итак, любого $E > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $f(x) + g(x) > E$. Следовательно, по определению $f(x) + g(x)$ – положительная бесконечно большая функция при $x \to a$. Теорема доказана.

Теорема 5.18. Произведение двух бесконечно больших функций при $x \to a$ есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \to a$. Возьмем произвольное число $E > 0$. Тогда для числа $E_1 = \sqrt{E}$ найдутся такие числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что

$$|f(x)| > E_1 = \sqrt{E}, \quad x \in U(a, \delta_1), \ x \neq a, \tag{5.26}$$

$$|g(x)| > E_1 = \sqrt{E}, \quad x \in U(a, \delta_2), \ x \neq a. \tag{5.27}$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$, одновременно выполняются неравенства (5.26) и (5.27). Перемножим неравенства (5.26) и (5.27):

$$|f(x)| \cdot |g(x)| > E_1^2 = E,$$

$$|f(x) \cdot g(x)| > E.$$

Итак, любого $E > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) \cdot g(x)| > E$. Следовательно, по определению $f(x) \cdot g(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$. Теорема доказана.

Теорема 5.19. Алгебраическая сумма бесконечно большой функции при $x \to a$ и функции, ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки a, есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $g(x)$ – ограниченная функция в некоторой проколотой окрестности точки a. Тогда существует такое число $K > 0$, что для всех $x \in U(a, \delta_1)$, $x \neq a$, выполняется неравенство

$$|g(x)| < K. \tag{5.28}$$

Пусть $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$. Тогда для любого числа $E > 0$, а значит и для $E_1 = E + K$, существует такое число $\delta_2 > 0$, что для всех $x \in U(a, \delta_2)$, $x \neq a$, выполняется

$$|f(x)| > E_1 = E + K. \tag{5.29}$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$, одновременно выполняются неравенства (5.28) и (5.29). Рассмотрим $|f(x) \pm g(x)|$:

$$|f(x) \pm g(x)| \geq |f(x)| - |g(x)| > E + K - K = E.$$

Итак, любого $E > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) \pm g(x)| > E$. Следовательно, по определению $f(x) \pm g(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$. Теорема доказана.

Так как частным случаем ограниченной функции являются постоянная и функция, имеющая конечный предел, то имеют место следствия.

Следствие 1. Сумма бесконечно большой функции при $x \to a$ и функции, имеющей конечный предел при $x \to a$, есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

Следствие 2. Сумма функции бесконечно большой при $x \to a$ и постоянной есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

Пример 5.11.

Функция $y = x^2 + \sin x$ – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$, так как x^2 – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$ (доказано в примере 5.7), а $\sin x$ – ограниченная функция. ■

Теорема 5.20. Произведение бесконечно большой функции при $x \to a$ на функцию, имеющую конечный предел при $x \to a$, отличный от нуля, есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, а $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{f(x) \cdot g(x)} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

Так как $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ по теореме 5.15 о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций. Так как $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$ $= b \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b} \neq 0$ по теореме 5.10 о пределе частного, то есть функция $\frac{1}{g(x)}$ имеет конечный предел при $x \to a$. Значит, по следствию 1 к теореме 5.4 о бесконечно малых функциях, функция $\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$ (как произведение бесконечно малой , при этом $\frac{1}{f(x) \cdot g(x)} \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a.

Тогда по теореме 5.16 о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций получаем, что $f(x) \cdot g(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$. Теорема доказана.

Следствие. Произведение бесконечно большой функции при $x \to a$ на постоянную, отличную от нуля, есть функция бесконечно большая при $x \to a$.

Теорема 5.21. Частное от деления ограниченной функции в проколотой окрестности точки a на бесконечно большую функцию при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, а функция $g(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a. Рассмотрим функцию

$$\frac{g(x)}{f(x)} = g(x) \cdot \frac{1}{f(x)}.$$

Так как $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ по теореме 5.15 о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций. А учитывая, что $g(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a, по теореме 5.4 о бесконечно малых функция получаем, что функция $\frac{g(x)}{f(x)}$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ (как произведение бесконечно малой и ограниченной функций). Теорема доказана.

Следствие 1. Частное от деления функции, имеющей конечный предел при $x \to a$, на бесконечно большую функцию при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Следствие 2. Частное от деления постоянного числа на бесконечно большую функцию при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Теорема 5.22. Частное от деления бесконечно большой функции при $x \to a$ на функцию, ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки a, причем отличную от нуля в этой окрестности, есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, а функция $g(x) \neq 0$ ограничена в проколотой окрестности точки a. Рассмотрим функцию $\frac{g(x)}{f(x)}$, которая является бесконечно малой функций при $x \to a$ по теореме 5.21, причем отличной от нуля в проколотой окрестности точки a. Тогда по теореме 5.16 о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций получаем, что $\frac{f(x)}{g(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to a$. Теорема доказана.

Следствие 1. Частное от деления бесконечно большой функции при $x \to a$ на постоянную, отличную от нуля, есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

Следствие 2. Частное от деления бесконечно большой функции при $x \to a$ на функцию, имеющую конечный предел при $x \to a$, причем отличную от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a, есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

Теорема 5.23. Частное от деления функции, имеющей конечный предел при $x \to a$, отличный от нуля, на бесконечно малую функцию при $x \to a$, отличную от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a, есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$, а $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a. Тогда по теореме 5.16 о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to a$. Тогда по теореме 5.20 о произведении бесконечно большой функции на функцию, имеющую конечный предел, отличный от нуля, получаем, что $f(x) \cdot \frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to a$. Теорема доказана.

Следствие. Частное от деления постоянного числа, отличного от нуля, на бесконечно малую функцию при $x \to a$, отличную от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a, есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

5.8. Неопределенности

1°. Рассмотрим отношение двух функций $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Здесь можно столкнуться с особым обстоятельством: известны пределы функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, но о пределе их частного общего утверждения сделать нельзя. Этот предел, в зависимости от частного закона изменения обеих функций, может иметь различные значения или вовсе не существовать.

Пример 5.12.

1. $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x$ – бесконечно малые функции при $x \to 0$. Здесь $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{x^2}{x} = x$ – бесконечно малая функция при $x \to 0$.
2. $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x^4$ – бесконечно малые функции при $x \to 0$. Здесь $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$ – бесконечно большая функция при $x \to 0$.
3. $\alpha(x) = 2x$, $\beta(x) = 3x$ – бесконечно малые функции при $x \to 0$. Здесь $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$ – постоянная функция. ■

Таким образом, в случае отношения двух бесконечно малых функций при $x \to a$ говорят, что *имеется неопределенность вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$. При этом процесс вычисления $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в каждом конкретном случае называется *раскрытием неопределенности*.

2°. Рассмотрим отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \to a$, при этом их знак не важен. В этом случае *имеется неопределенность вида* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Этот предел, в зависимости от частного закона изменения обеих функций, может иметь различные значения или вовсе не существовать.

Пример 5.13.

1. $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ – бесконечно большие функции при $x \to +\infty$. Здесь $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x} = x$ – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$.
2. $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ – бесконечно большие функции при $x \to +\infty$. Здесь $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.
3. $f(x) = x$, $g(x) = 3x$ – бесконечно большие функции при $x \to +\infty$. Здесь $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$ – постоянная функция. ■

3°. Рассмотрим произведение двух функций $\alpha(x) \cdot f(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, при этом их знак не важен. В этом случае *имеется неопределенность вида* $[0 \cdot \infty]$. Этот предел, в зависимости от частного закона изменения обеих функций, может иметь различные значения или вовсе не существовать.

Пример 5.14.

1. $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, $f(x) = x$ – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$. Тогда $\alpha(x)f(x) = \frac{1}{x}$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.
2. $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, $f(x) = x^3$ – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$. Тогда $\alpha(x)f(x) = x$ – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$.
3. $\alpha(x) = \frac{1}{2x}$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, $f(x) = 3x$ – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$. Тогда $\alpha(x)f(x) = \frac{3}{2}$ – постоянная функция. ■

4°. Рассмотрим сумму двух функций $f(x)+g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \to a$ разных знаков. В этом случае *имеется неопределенность вида* $[\infty - \infty]$. Этот предел, в зависимости от частного закона изменения обеих функций, может иметь различные значения или вовсе не существовать.

Пример 5.15.

1. $\alpha(x) = 2x$, $g(x) = -x$ – бесконечно большие функции при $x \to +\infty$. Здесь $f(x) + g(x) = x$ – положительная бесконечно большая функция при $x \to +\infty$.
2. $f(x) = x$, $g(x) = -x$ – бесконечно большие функции при $x \to +\infty$. Здесь $f(x) + g(x) = 0$ –бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.
3. $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$ – бесконечно большие функции при $x \to +\infty$. Здесь $f(x) + g(x) = 1$ – постоянная функция, предел которой при $x \to +\infty$ равен 1 ■

5.9. Вычисление предела целой рациональной функции

Целая рациональная функция – это функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_0,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$, $a_0 \neq 0$.

Вычисление предела при $x \to a$, $a = \mathrm{const}$

Используя теоремы 5.7 о пределе суммы и 5.8 о пределе произведения, получаем

$$\lim_{x \to a} P_n(x) = P_n(a).$$

Пример 5.16.

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to -1}(2x^2 - 3x + 1)$.

$$\lim_{x \to -1}(2x^2 - 3x + 1) = 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 6. \quad ■$$

Вычисление предела при $x \to \pm\infty$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to\pm\infty} P_n(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n).$$

Так как $x \to \pm\infty$, то x – бесконечно большая функция при $x \to \pm\infty$, причем она может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от знака. Следовательно, x^{n-i}, $i = \overline{0, n-1}$, – бесконечно большие функции при $x \to \pm\infty$ по теореме 5.18 о произведении бесконечно больших функций. Тогда a_ix^{n-i}, $i = \overline{0, n-1}$, – бесконечно большие функции при $x \to \pm\infty$ по следствию к теореме 5.20 о произведении бесконечно большой функции и постоянной. Таким образом, получаем алгебраическую сумму бесконечно больших функций, а значит, и неопределенность вида $[\infty - \infty]$.

Для раскрытия неопределенности вынесем за скобки старший член многочлена:

$$\lim_{x\to\pm\infty} P_n(x) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right),$$

где a_0x^n – бесконечно большая функция при $x \to \pm\infty$.

Рассмотрим

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right).$$

Так как x^{n-i}, $i = \overline{0, n-1}$, – бесконечно большие функции при $x \to \pm\infty$, то $\frac{1}{x^{n-i}}$, $i = \overline{0, n-1}$, – бесконечно малые функции при $x \to \pm\infty$ по теореме 5.15 о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций. Значит, $\frac{a_i}{a_0}\cdot\frac{1}{x^i}$, $i = \overline{1, n}$, – бесконечно малые функции при $x \to \pm\infty$ по следствию 3 к теореме 5.4 о произведении бесконечно малой и ограниченной функций. Тогда по теореме 5.7 о пределе суммы получаем

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right)=$$
$$=1+0+0+\cdots+0+0=1\neq 0.$$

Таким образом, по теореме 5.20 о произведении бесконечно большой функции и функции, имеющей конечный предел, отличный от нуля, получаем, что $P_n(x)$ – бесконечно большая функция при $x\to\pm\infty$ и ее пределе равен $\pm\infty$ в зависимости от старшего члена.

Правило вычисления $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\pm\infty} P_n(x)}$**.** *Предел целой рациональной функции при $x\to\pm\infty$ всегда равен ∞, знак которой зависит от старшего члена многочлена $P_n(x)$.*

Пример 5.17.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2\left(1-\dfrac{2}{3x}+\dfrac{1}{3x^2}\right)=$

$$\left[\lim_{x\to+\infty}3x^2=\begin{bmatrix}x\to+\infty\\x^2\to+\infty\\3x^2\to+\infty\end{bmatrix}=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\underbrace{\frac{2}{3x}}_{\text{бмф}}+\underbrace{\frac{1}{3x^2}}_{\text{бмф}}\right)=1\right]$$

$=+\infty.$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3+x-5)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{5}{2x^3}\right)=$

$$\left[\lim_{x\to-\infty}2x^3=\begin{bmatrix}x\to-\infty\\x^3\to-\infty\\2x^3\to-\infty\end{bmatrix}=-\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\underbrace{\frac{1}{2x^2}}_{\text{бмф}}-\underbrace{\frac{5}{2x^3}}_{\text{бмф}}\right)=1\right]$$

$=-\infty.$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}3x^2\left(1-\dfrac{2}{3x^2}\right)=$

$$\left[\lim_{x\to-\infty}3x^2=\begin{bmatrix}x\to-\infty\\x^2\to+\infty\\3x^2\to+\infty\end{bmatrix}=+\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1-\underbrace{\frac{2}{3x^2}}_{\text{бмф}}\right)=1\right]$$

$=+\infty.$ ■

5.10. Вычисление предела дробно-рациональной функции

Дробно-рациональная функция – это функция вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m},$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно.

Вычисление предела при $x \to a$, $a = \mathrm{const}$

Согласно пункту о вычислении предела целой рациональной функции

$$\lim_{x \to a} P_n(x) = P_n(a), \quad \lim_{x \to a} Q_m(x) = Q_m(a).$$

1. Пусть $P_n(a)$ – любое число, $Q_m(a) \neq 0$. Тогда по теореме 5.10 о пределе частного

$$\lim_{x \to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} P_n(x)}{\lim\limits_{x \to a} Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

2. Пусть $P_n(a) \neq 0$, $Q_m(a) = 0$. Тогда по следствию 1 к теореме 5.23 об отношении функции, имеющей конечный предел (*кп*), не равный нулю, к бесконечно малой функции (*бмф*), получаем бесконечно большую функцию при $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left[\frac{\text{кп} \neq 0}{\text{бмф}} = \text{ббф}\right] = \infty.$$

3. Пусть $P_n(a) = Q_m(a) = 0$. В этом случае имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, один из которых $(x - a)$, а второй – многочлен, степени на единицу меньше, чем изначальный.

$$\lim_{x \to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)P_{n-1}^1(x)}{(x - a)Q_{m-1}^1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P_{n-1}^1(x)}{Q_{m-1}^1(x)}$$

Далее опять находим пределы числителя и знаменателя и проверяем получившийся случай.

Пример 5.18.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^3-2x+2}=$

$$=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x)=1^1+1=2,\\ \lim\limits_{x\to 1}(x^3-2x+2)=1^3-2\cdot 1+2=1\neq 0,\end{bmatrix}=\frac{2}{1}=2.$$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^3-2x}=$

$$=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to -1}(x^2+x)=(-1)^2+(-1)=0,\\ \lim\limits_{x\to -1}(x^3-2x)=(-1)^3-2\cdot(-1)=1\neq 0,\end{bmatrix}=\frac{0}{3}=0.$$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-1}{x^2-5x+6}=$

$$=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 2}(3x^3-1)=3\cdot 2^3-1=23\neq 0, & \Rightarrow \dfrac{\text{кп}\neq 0}{\text{бмф}}=\text{ббф}\\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+6)=2^2-5\cdot 2+6=0 & \end{bmatrix}=\infty.$$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8}=$

$$=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)=2^2-3\cdot 2+2=0,\\ \lim\limits_{x\to 2}(x^3-8)=2^3-8=0\end{bmatrix}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2+x+1}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=2-1=1,\\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+1)=2^2+2+1=7\neq 0,\end{bmatrix}=\frac{1}{7}.\quad\blacksquare$$

Вычисление предела при $\boldsymbol{x}\to\pm\infty$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}.$$

Так $x\to\pm\infty$, то, согласно вычислению предела целой рациональной функции, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – бесконечно большие функции при

$x \to \pm\infty$. Тогда при вычислении $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия в числителе и знаменателе вынесем за скобки старший член.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{x^n}\right)}{b_0 x^m \left(1 + \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{b_2}{b_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{b_0} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{b_0} \cdot \frac{1}{x^m}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \frac{1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{b_2}{b_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{b_0} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{b_0} \cdot \frac{1}{x^m}}.$$

Ранее было доказано, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{x^n}\right) = 1.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{b_2}{b_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{b_0} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{b_0} \cdot \frac{1}{x^m}\right) = 1.$$

Следовательно, по теореме 5.10 о пределе частного, получаем

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{b_2}{b_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{b_0} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{b_0} \cdot \frac{1}{x^m}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Рассмотрим $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$.

1. Пусть $n > m$. Тогда $n - m > 0$. В этом случае по теореме 5.18 о произведении бесконечно больших функций имеем, что x^{n-m} – бесконечно большая функция при $x \to \pm\infty$. Тогда $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$ – бесконечно большая функция при $x \to \pm\infty$ по следствию к теореме 5.20 о произведении бесконечно большой функции и постоянной. Следовательно, по теореме 5.20 о произведении бесконечно

большой функции и функции, имеющей конечный предел, отличный от нуля, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to \pm\infty$, знак которой зависит от старших членов многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, и ее предел равен $+\infty$ или $-\infty$.

2. Пусть $n = m$. Тогда $n - m = 0$, а значит, $x^{n-m} = 1$. Тогда по теореме 5.8 о пределе произведения

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0}{b_0} \frac{1 + \frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_1}{b_0}\cdot\frac{1}{x} + \frac{b_2}{b_0}\cdot\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{b_0}\cdot\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{b_0}\cdot\frac{1}{x^m}} =$$

$$= \frac{a_0}{b_0}\cdot 1 = \frac{a_0}{b_0}.$$

3. Пусть $n < m$. Тогда $n - m < 0$, а значит $m - n > 0$. В этом случае $x^{n-m} = \frac{1}{x^{m-n}}$. Так как x^{m-n} – бесконечно большая функция при $x \to \pm\infty$ (см. пункт 1), то x^{n-m} – бесконечно малая функция при $x \to \pm\infty$ по теореме 5.15 о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций. Тогда по теореме 5.8 о пределе произведения

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \frac{1 + \frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_1}{b_0}\cdot\frac{1}{x} + \frac{b_2}{b_0}\cdot\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{b_0}\cdot\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{b_0}\cdot\frac{1}{x^m}} =$$

$$= \frac{a_0}{b_0}\cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Правило вычисления $\boldsymbol{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}}$**.** *Предел дробно-рациональной функции при* $x \to \pm\infty$ *равен*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\infty, & \text{если} \quad n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если} \quad n=m,\\ 0, & \text{если} \quad n<m.\end{cases}$$

Пример 5.19.

1) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-2x+1}{1-2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3\left(1-\frac{2}{3x^2}+\frac{1}{3x^3}\right)}{-2x\left(-\frac{1}{2x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{2}x^2\frac{1-\frac{2}{3x^2}+\frac{1}{3x^3}}{-\frac{1}{2x}+1}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{3}{2}x^2=\left[\begin{array}{c}x\to-\infty\\ x^2\to+\infty\\ -\dfrac{3}{2}x^2\to-\infty\end{array}\right]=-\infty,\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{2}{3x^2}+\frac{1}{3x^3}}{-\frac{1}{2x}+1}=\dfrac{1}{1}=1\end{array}\Rightarrow \text{ббф}\cdot\underbrace{\text{кп}}_{\neq 0}=\text{ббф}\right]=-\infty$$

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-2x+1}{2x^2-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2\left(1-\frac{2}{5x}+\frac{1}{5x^2}\right)}{2x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2}\frac{1-\frac{2}{5x}+\frac{1}{5x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\left[\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2},\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2}{5x}+\frac{1}{5x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{1}=1\end{array}\right]=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$$

3) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{3x^2-4x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{3x^2\left(1-\frac{4}{3x}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3x}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{3x}} = \left[\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3x}=0,\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{3x}}=\frac{1}{1}=1\end{array}\right] = 0\cdot 1 = 0 \ \blacksquare$$

5.11. Вычисление пределов иррациональных функций

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to A}\sqrt[n]{f(x)}$, где $n\in\mathbb{N}$, а A может быть как постоянной величиной, так и $\pm\infty$.

1. Если $\lim\limits_{x\to A} f(x) = b \geq 0$, где $b = \mathrm{const}$, то

$$\lim_{x\to A}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to A} f(x)} = \sqrt[n]{b}.$$

2. Если $\lim\limits_{x\to A} f(x) = b < 0$, где $b = \mathrm{const}$, то

$$\lim_{x\to A}\sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases}\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to A} f(x)} = \sqrt[n]{b}, & \text{если } n - \text{нечетное},\\ \text{не существует}, & \text{если } n - \text{четное}.\end{cases}$$

3. Если $\lim\limits_{x\to A} f(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x\to A}\sqrt[n]{f(x)} = +\infty.$$

4. Если $\lim\limits_{x\to A} f(x) = -\infty$, то

$$\lim_{x\to A}\sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases}-\infty, & \text{если } n - \text{нечетное},\\ \text{не существует}, & \text{если } n - \text{четное}.\end{cases}$$

Если под знаком предела стоит алгебраическая комбинация иррациональных функций, то возможно появление неопределенностей вида $[\infty - \infty]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для их раскрытия необходимо выражение, которое дает неопределенность, умножить и разделить на многочлен, позволяющие применить формулу сокращенного умножения:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3,$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$$

и так далее. Формула выбирается в зависимости от степени корня.

Для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, так же, как и для дробно-рациональной функции, в числителе и знаменателе надо вынести за скобки слагаемое с наибольшей степенью.

Пример 5.20.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2-3x+6}=$

$$=\left[\lim_{x\to 1}(x^2-3x+6)=1^2-3\cdot 1+6=4>0\right]=\sqrt{4}=2.$$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt[3]{\dfrac{1-2x^2}{2x^2+3x-5}}=$

$$=\left[\begin{gathered}\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x^2}{2x^2+3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}{2x^2\left(1+\frac{3}{2x}-\frac{5}{2x^2}\right)}=\\ =\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1-\frac{1}{2x^2}}{1+\frac{3}{2x}-\frac{5}{2x^2}}\right)=-\frac{1}{1}=-1<0,\\ n=3-\text{нечетное}\end{gathered}\right]=$$

$$=\sqrt[3]{-1}=-1.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^2}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 0}1=1,\\ \lim\limits_{x\to 0}x^2=0\end{bmatrix}=+\infty\right]=+\infty.$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2+x}}$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right)=-1<0$$

и $n = 2$ – четное, то искомый предел не существует.

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}} =$

$$= \left[\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2x-1}-1\right) = \sqrt{2\cdot 1-1}-1 = 0, \\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}\right) = \sqrt{1+1}-\sqrt{3-1} = 0 \end{array}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(2x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)}{(2x-2)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{2x-1}+1} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right) = \sqrt{1+1}+\sqrt{3-1} = 2\sqrt{2}, \\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2x-1}+1\right) = \sqrt{2\cdot 1-1}+1 = 2 \neq 0, \\ \text{теорема о пределе частного} \end{array}\right] = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x^2+1}\right) =$

$$= \left[\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[3]{x-1} = \left[\lim\limits_{x\to +\infty}(x-1) = +\infty\right] = +\infty, \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[3]{x^2+1} = \left[\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+1) = +\infty\right] = +\infty \end{array}\right] = [\infty-\infty] =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x^2+1}\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\right)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^3}-\sqrt[3]{(x^2+1)^3}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{x-x^2-2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)(x^2+1)}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{x^4\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-x^{\frac{2}{3}}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^{\frac{2}{3}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt[3]{x^2}\right) = \left[\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\right] = -\infty, \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}} = \frac{1}{1} = 1 \end{array}\right]$$

$$= -\infty. \quad \blacksquare$$

5.12. Вычисление пределов тригонометрических функций

Пусть $x \to a$, $a = \text{const}$. Ранее было доказано:

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a,$$

$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a.$$

По теореме 5.10 о пределе частного

$$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a, \quad \text{если} \quad a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{x\to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a, \quad \text{если} \quad a \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $x \to \pm\infty$. Тогда пределы элементарных тригонометрических функций не существуют. Но функции $\sin x$ и $\cos x$ являются ограниченными функциями на всей числовой прямой. Следовательно, возможно их взаимодействие с бесконечно большими и бесконечно малыми функциями, используя теоремы:

– 5.4 о произведении бесконечно малой и ограниченной функций (получаем бесконечно малую функцию),
– 5.19 об алгебраической сумме бесконечно большой и ограниченной функций (получаем бесконечно большую функцию),
– 5.21 об отношении ограниченной и бесконечно большой функций (получаем бесконечно малую функцию),
– 5.22 об отношении бесконечно большой и ограниченной функций (получаем бесконечно большую функцию).

В качестве иллюстрации теоремы 5.19 можно привести пример 5.11.

Пример 5.21.

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$$

Функция x^2 – бесконечно малая при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$, то $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует. Однако $\sin\frac{1}{x}$ – ограниченная функция. Тогда по теореме 5.4 о произведении бесконечно малой и ограниченной функций получаем, что $x^2\sin\frac{1}{x}$ – бесконечно малая функция при $x \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$. ■

Первый замечательный предела

Теорема 5.24 (первый замечательный предел). Функция $\frac{\sin x}{x}$ стремится к единице при x, стремящемся к нулю, то есть

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{5.30}$$

Доказательство. Из тригонометрического единичного круга (рис. 5.14) ясно, что

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x\,,\ \ x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right).$$

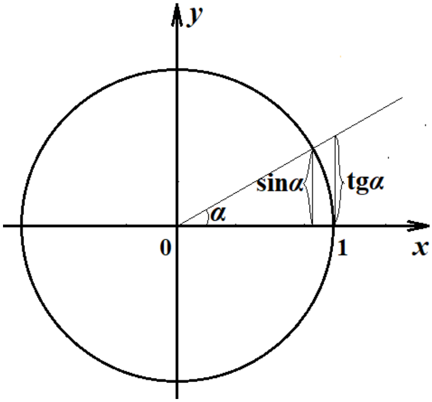

Рис. 5.14. Тригонометрический единичный круг

Разделим все части этих неравенств на $\sin x$, учитывая, что $\sin x > 0$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Отсюда

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \;\; x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \qquad (5.31)$$

Докажем, что неравенства (5.31) выполняются и для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Так как $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, то $0 < -x < \frac{\pi}{2}$. Тогда можно применить неравенства (5.31):

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1, \;\; x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right).$$

Учитывая свойство четности для функции $\cos x$ и нечетности для функции $\sin x$, получаем

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \;\; x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right).$$

Таким образом, неравенства (5.31) выполняются для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$.

Так как $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, то по теореме 5.13 о пределе промежуточной функции, получаем, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Теорема доказана.

Следствие 1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Доказательство.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1, \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 \quad \text{по 1 замечательному пределу} \end{array} \right] = \frac{1}{1} = 1.$$

Следствие 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Доказательство.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{по 1 замечательному пределу}, \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = \left[\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \neq 0 \end{array} \right] = \dfrac{1}{1} = 1 \end{array} \right] = \frac{1}{1} = 1.$$

Следствие 3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$.

Доказательство.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} x}{x}} = \left[\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1, \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \neq 0 \quad \text{по следствию 2} \end{array} \right] = \frac{1}{1} = 1.$$

Замечание 5.5 Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to A$, где A может быть как постоянной, так и $\pm\infty$, то

$$\lim_{x\to A}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Да, если $\lim\limits_{x\to A}\alpha(x) = 0$, то выполнив замену $\alpha(x) = t$ и применив теорему 5.14 о замене переменной в пределе функции, получим

$$\lim_{x\to A}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1.$$

Пример 5.22.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2\frac{\sin 2x}{2x}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \lim\limits_{x\to 0} 2 = 2, \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = [t = 2x \to 0] = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1 \end{bmatrix} = 2\cdot 1 = 2. \quad \blacksquare$$

5.13. Вычисление пределов показательной и логарифмической функций

Показательная функция

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Ее область определения $X = (-\infty;\ +\infty)$.

Последующие примеры носят теоретический характер.

Пример 5.23.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ при $a > 1$.

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. В примере 4.5 было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Очевидно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ из неравенства $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ в силу возрастания функции $y = a^x$ $(a > 1)$ получаем, что

$$a^{-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}}. \qquad (5.32)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, то по определению 4.3 предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N_1(\varepsilon)$, что для любого $n > N_1$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство $\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$, которое равносильно неравенствам

$$1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon. \qquad (5.33)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$, то для того же $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N_2(\varepsilon)$, что для любого $n > N_2$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon. \qquad (5.34)$$

Выберем такой номер N_0, что $N_0 > N_1$ и $N_0 > N_2$. Тогда для $n = N_0$ одновременно выполняются неравенства (5.32) – (5.34). Следовательно,

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon. \qquad (5.35)$$

Рассмотрим $x \in \left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$. Так как $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$, то, учитывая, что функция $y = a^x$ $(a > 1)$ возрастает, получаем

$$a^{-\frac{1}{n}} < a^x < a^{\frac{1}{n}}. \qquad (5.36)$$

Тогда из неравенств (5.35) и (5.36) получаем $1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$ или $|a^x - 1| < \varepsilon$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \frac{1}{N_0}$, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x| < \delta$, выполняется неравенство $|a^x - 1| < \varepsilon$. Следовательно, по определению 5.1 предела функции, $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$. ■

Пример 5.24.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \ a > 1, \\ 0, & \text{если } \ 0 < a < 1. \end{cases}$

Доказательство. Пусть $a > 1$. Возьмем любое $E > 0$. В примере 4.10 было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$. По определению 4.16 бесконечного предела последовательности для любого $E > 0$ существует такой номер $N(E)$, что для любого $n > N, n \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство $a^n > E$. Зафиксируем $n = N_0$.Тогда

$$a^{N_0} > E. \tag{5.37}$$

Рассмотрим $x > N_0$. Так как функция $y = a^x$ $(a > 1)$ возрастает, то

$$a^x > a^{N_0}. \tag{5.38}$$

Тогда из неравенств (5.37) и (5.38) получаем $a^x > E$.

Итак, для любого $E > 0$ существует такое число $D = a^{N_0}$, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $x > D$, выполняется неравенство $a^x > E$. Следовательно, по определению 5.9 бесконечного предела функции, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty, a > 1$.

Пусть $0 < a < 1$. Определим $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$. Тогда $a^x = \frac{1}{b^x}$ Так как выше доказано, что $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = +\infty$, то b^x, $b > 1$, – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$. Тогда по теореме 5.15 о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций получаем, что a^x, $0 < a < 1$, – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$. Значит $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0, 0 < a < 1$. ■

Пример 5.25.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{если } \ a > 1, \\ +\infty, & \text{если } \ 0 < a < 1. \end{cases}$

Доказательство. Пусть $a > 1$. Выполним замену переменной $t = -x$. Тогда при $x \to -\infty$ имеем $t \to +\infty$. В этом случае по теореме 5.14 о замене переменной в пределе функции

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{t\to+\infty} a^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a^t}.$$

В примере 5.14 доказано, что $\lim\limits_{t\to+\infty} a^t = +\infty$, $a > 1$. Тогда a^t – бесконечно большая функция при $t \to +\infty$. Тогда по теореме 5.15 о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций получаем, что $\frac{1}{a^t}$, $a > 1$, – бесконечно малая функция при $t \to +\infty$. Значит $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, $a > 1$.

Пусть $0 < a < 1$. Обозначим $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$. Тогда $a^x = \frac{1}{b^x}$ Так как выше доказано, что $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x = 0$, то b^x, $b > 1$, – бесконечно малая функция при $x \to -\infty$. Тогда по теореме 5.16 о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций получаем, что a^x, $0 < a < 1$, – бесконечно большая функция при $x \to -\infty$. Значит $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, $0 < a < 1$. ■

Логарифмическая функция

Рассмотрим логарифмическую функцию $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Ее область определения $X = (0;\ +\infty)$.

Пример 5.26.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \ a > 1, \\ -\infty, & \text{если } \ 0 < a < 1. \end{cases}$

Доказательство. Пусть $a > 1$. Возьмем любое число $E > 0$ и покажем, что существует такое число $D(E)$, что для любого $x > D$ выполняется неравенство $\log_a x > E$.

Так как функция $y = a^x$, $a > 1$, возрастает, то $a^{\log_a x} > a^E$. Отсюда $x > a^E$. Выберем $D = a^E$. Теперь покажем, что для любого $x > D = a^E$ выполняется неравенство $\log_a x > E$. Это следует в силу возрастания функции $y = \log_a x$, $a > 1$: так как $x > a^E$, то $\log_a x > \log_a a^E = E$. Таким образом, по определению 5.9 получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ при $a > 1$.

Пусть $0 < a < 1$. Обозначим $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$. Тогда

$$\log_a x = \log_{\frac{1}{b}} x = -\log_b x.$$

Так как при $b > 1$ доказано, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_b x = +\infty$, то

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \lim_{x \to +\infty} (-\log_b x) = -\lim_{x \to +\infty} \log_b x = -\infty. \quad \blacksquare$$

5.14. Вычисление пределов показательно-степенной функции

Ранее были рассмотрены функции:

1) $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, – степенная функция,
2) $y = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, – показательная функция.

Определение 5.16. *Показательно-степенная функция* – это функция вида $y = [u(x)]^{v(x)}$, где функции $u(x) > 0$ и $v(x)$ определены на одном и том же множестве.

Рассмотрим $\lim\limits_{x \to A} [u(x)]^{v(x)}$, где A может быть как постоянной величиной, так и $\pm\infty$.

1. Пусть функции $u(x)$и $v(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$, при этом $\lim\limits_{x \to a} u(x) > 0$. Тогда

$$\lim_{x \to A} [u(x)]^{v(x)} = \left[\lim_{x \to A} u(x)\right]^{\lim\limits_{x \to A} v(x)}.$$

2. Пусть $\lim\limits_{x \to A} u(x) = b > 0$, $b \neq 1$, $\lim\limits_{x \to A} v(x) = \pm\infty$. Тогда получаем аналоги примерам 5.24 и 5.25:

$$\lim_{x \to A} [u(x)]^{v(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \ b > 1, \ \lim\limits_{x \to A} v(x) = +\infty, \\ 0, & \text{если } \ b > 1, \ \lim\limits_{x \to A} v(x) = -\infty, \\ 0, & \text{если } \ 0 < b < 1, \ \lim\limits_{x \to A} v(x) = +\infty, \\ +\infty, & \text{если } \ 0 < b < 1, \ \lim\limits_{x \to A} v(x) = -\infty. \end{cases}$$

3. Пусть $\lim\limits_{x \to A} u(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to A} v(x) = \pm\infty$. Тогда

$$\lim_{x \to A}[u(x)]^{v(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad \lim\limits_{x \to A} v(x) = +\infty, \\ 0, & \text{если} \quad \lim\limits_{x \to A} v(x) = -\infty. \end{cases}$$

Доказательство случаев 1–3 можно провести, используя основное логарифмическое тождество. Пусть, например,

$$\lim_{x \to A} u(x) = b > 1, \qquad \lim_{x \to A} v(x) = +\infty.$$

Тогда

$$\lim_{x \to A}[u(x)]^{v(x)} = \lim_{x \to A} e^{[u(x)]^{v(x)}} = \lim_{x \to A} e^{v(x)\ln u(x)}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to A} u(x) = b > 1$, то $\lim\limits_{x \to A} \ln u(x) = \ln b > 0$, при этом $\ln u(x)$ – функция, имеющая конечный предел при $x \to A$. Так как $\lim\limits_{x \to A} v(x) = +\infty$, то $v(x)$ – положительная бесконечно большая функция при $x \to A$. Следовательно, по теореме 5.20 о произведении бесконечно большой функции на функцию, имеющую конечный предел, получаем, что $v(x)\ln u(x)$ – положительная бесконечно большая функция при $x \to A$. Учитывая, что $e > 1$, согласно примеру 5.24, получаем, что $\lim\limits_{x \to A} e^{v(x)\ln u(x)} = +\infty$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to A}[u(x)]^{v(x)} = +\infty$.

Пример 5.27.

1) $\lim\limits_{x \to \pi}(1 - \cos x)^{1 - \sin x} =$

$$= \begin{bmatrix} \lim\limits_{x \to \pi}(1 - \cos x) = 1 - \cos\pi = 2 > 0, \\ \lim\limits_{x \to \pi}(1 - \sin x) = 1 - \sin\pi = 1 \end{bmatrix} = 2^1 = 2.$$

2) $$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1 + 2x}{x + 1}\right)^{3x} = \begin{bmatrix} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + 2x}{x + 1} = 2 > 0, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty \end{bmatrix} = +\infty.$$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty}(1 - 2x^3)^{x+1} =$

$$= \begin{bmatrix} \lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x^3) = \begin{bmatrix} x \to -\infty, \\ x^3 \to -\infty, \\ -2x^3 \to +\infty \end{bmatrix} = +\infty, \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty \end{bmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

Неопределенности. Второй замечательный предел

При нахождении предела показательно-степенной функции возможно возникновение неопределенностей вида:

$[1^\infty]$, если $\lim\limits_{x\to A} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to A} v(x) = \pm\infty$,

$[0^0]$, если $\lim\limits_{x\to A} u(x) = \lim\limits_{x\to A} v(x) = 0$,

$[\infty^0]$, если $\lim\limits_{x\to A} u(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to A} v(x) = 0$.

Для раскрытия неопределенностей вида $[0^0]$ и $[\infty^0]$ необходимо использовать основное логарифмическое тождество

$$\lim_{x\to A}[u(x)]^{v(x)} = \lim_{x\to A} e^{\ln[u(x)]^{v(x)}} = \lim_{x\to A} e^{v(x)\ln u(x)}$$

и вычислить $\lim\limits_{x\to A} e^{v(x)\ln u(x)}$.

Для раскрытия неопределенности вида $[1^\infty]$ необходимо использовать теорему.

Теорема 5.25 (второй замечательный предел). Показательно-степенная функция $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ стремится к иррациональному числу e при x, стремящемся к бесконечности, то есть

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{5.39}$$

Доказательство. В теме 4 было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, где $n \in \mathbb{N}$. Пусть теперь $x \to \infty$, принимая как дробные, так и отрицательные значения.

Пусть $x \to +\infty$. Каждое его значение заключено между двумя натуральными числами: $n \le x < n+1$. При этом будут выполняться неравенства

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

Если $x \to +\infty$, то и $n \to +\infty$. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$, то

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Тогда по теореме 5.13 о пределе промежуточной функции, получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Пусть $x \to -\infty$. Введем новую переменную $t = -(x+1) \to +\infty$ при $x \to -\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right) =$$

$$= \left[\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e, \quad \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) = 1\right] = e\cdot 1 = e.$$

Теорема доказана.

График функции $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ приведен на рис. 5.15.

Замечание 5.6. Если выполнить замену $\alpha = \frac{1}{x}$, то при $x \to \infty$ имеем $\alpha \to 0$, $\alpha \neq 0$. Тогда формула 5.39 примет эквивалентный вид:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

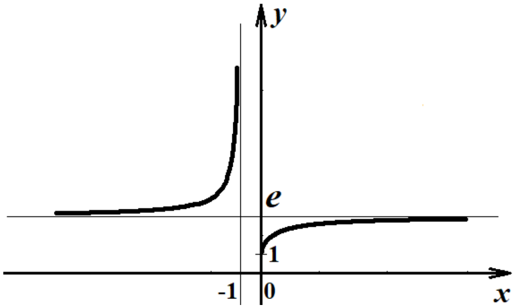

Рис. 5.15. График функции $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Замечание 5.7. Второй замечательный предел применяется только для раскрытия неопределенности $[1^\infty]$, то есть, когда предел основания показательно-степенной функции равен единице. Если предел основания отличен от единицы, то второй замечательный предел не применяется.

Следствие 1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Доказательство.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right) = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e > 0\right] = \ln e = 1.$$

Следствие 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$ при $a > 0$, $a \neq 1$.

Доказательство.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{\ln a^x} = \left[\begin{array}{c} t = a^x - 1, \\ \lim\limits_{x \to 0} t = \lim\limits_{x \to 0} (a^x - 1) = a^0 - 1 = 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следствие 3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1.$

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1+x)^{\alpha}}-1}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}\right)$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}=\begin{bmatrix} t=\alpha\ln(1+x), \\ \lim\limits_{x\to 0}t=\lim\limits_{x\to 0}\alpha\ln(1+x)=\alpha\ln 1=0\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

то по теореме о пределе произведения

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}=1\cdot 1=1.$$

Пример 5.28.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{1+3x}=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{2x+1}=1, & \Rightarrow\quad [1^{\infty}] \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1+3x)=+\infty & \end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{1+3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2(1+3x)}{2x+1}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}=\begin{bmatrix}\alpha=\frac{-2}{2x+1}, \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{2x+1}=0\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2(1+3x)}{2x+1}=-3,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{1+3x} = e^3. \quad ■$$

5.15. Односторонние пределы функции

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Согласно определению 5.2 это означает, что какова бы ни была ε-окрестность точки b, найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех x из проколотой окрестности точки a радиуса δ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Однако данное неравенство может выполняться не во всей проколотой окрестности точки a, а только для левой или только для правой половины окрестности. В этом случае число b называется *односторонним пределом функции*.

Определение 5.17. Число b называется *левым пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a*, если каково бы ни было положительное число ε, существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех $x \in (a - \delta;\ a)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае $x \to a$, оставаясь меньшим a.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

Геометрическая иллюстрация левого предела функции приведена на рис. 5.16.

Определение 5.18. Число b называется *правым пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a*, если каково бы ни было положительное число ε, существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех $x \in (a;\ a + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае $x \to a$, оставаясь большим a.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

Иногда правый и левый пределы функции $f(x)$ обозначают соответственно $f(a + 0)$ и $f(a - 0)$.

Геометрическая иллюстрация правого предела функции приведена на рис. 5.17.

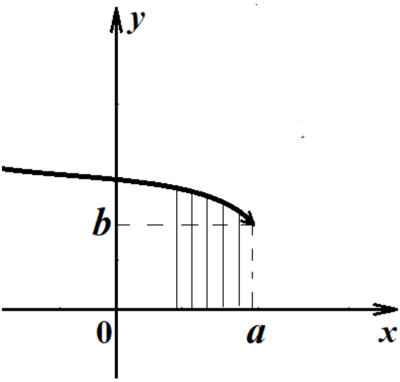

Рис. 5.16. Левый предел функции

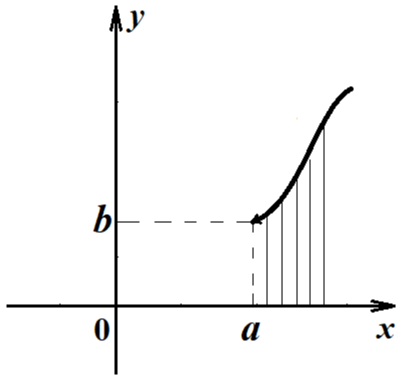

Рис. 5.17. Правый предел функции

Связь между односторонними пределами пределом функции

Теорема 5.26. Если односторонние пределы функции при $x \to a$ равны между собой и равны b, то при $x \to a$ существует предел функции, так же равный b.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$. Покажем, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. По определению 5.17 левого предела функции найдется такое число $\delta_1(\varepsilon) > 0$, что для любых $x \in (a - \delta_1;\ a)$ выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \qquad (5.40)$$

Так как число b является и правым пределом функции $f(x)$, то для того же числа ε найдется такое число $\delta_2(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in (a;\ \ a + \delta_2)$ выполняется неравенство (5.40).

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда неравенство (5.40) выполняется для всех $x \in (a - \delta; a + \delta)$, $x \neq a$. А это по определению 5.1 предела функции означает, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Теорема доказана.

Теорема 5.27. Если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то существуют оба односторонних предела при $x \to a$ и они равны b.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то по определению 5.1 предела функции для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in U(a, \delta)$, $x \neq a$, выполянется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Следовательно, это неравенство выполняется как для $x \in (a - \delta; a)$, так и для $x \in (a; a + \delta)$. А это по определениям 5.17 и 5.18 говорит о существовании односторонних пределов функции, при этом $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$. Теорема доказана.

Следствие. Если при $x \to a$ существуют оба односторонних предела функции, но они не равны между собой, то предел функции при $x \to a$ не существует.

Доказательство проведем методом от противного. Пусть $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Предположим, что существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Тогда по теореме 5.27 существуют оба односторонних предела при $x \to a$ и они равны b. А это противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение неверно и $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не существует. Что и требовалось доказать.

Пример 5.29.

Рассмотрим односторонние пределы функции

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$$

при $x \to 0$. Найдем левый предел при $x \to 0 - 0$. Так как

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{-бмф} = -ббф\right] = -\infty,$$

то

$$\lim_{x \to 0-0} 2^{1/x} = 0.$$

Значит

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=\left[\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to 0-0} 1=1,\\ \lim\limits_{x\to 0-0}(1+2^{1/x})=1+0=1\end{array}\right]=\frac{1}{1}=1.$$

Найдем правый предел при $x\to 0+0$. Так как

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{+\text{бмф}}=+\text{ббф}\right]=+\infty,$$

то

$$\lim_{x\to 0+0} 2^{1/x}=+\infty.$$

Значит

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=\left[\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to 0-0} 1=1,\\ \lim\limits_{x\to 0-0}(1+2^{1/x})=+\infty\end{array}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\text{ббф}}=\text{бмф}\right]=0.$$

Так как односторонние пределы существуют, но не равны между собой, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{1/x}}$ не существует. ■

5.16. Сравнение бесконечно малых функций

Определение 5.19. Функция $f(x)$ называется *ограниченной по сравнению с функцией $g(x)$ в окрестности точки a*, если существуют такие постоянные $c>0$ и $\delta>0$, то для всех x, удовлетворяющих неравенствам $|x-a|<\delta,\ x\neq a$, выполянется неравенство $|f(x)|\leq c|g(x)|$.

Обозначение: $f(x)=O\big(g(x)\big)$ при $x\to a$.

Замечание 5.8. Значок $x\to a$ здесь имеет отличный от обычного смысл: он указывает на то, что рассматриваемое свойство имеет место лишь в некоторой окрестности точки a, ни о каком пределе здесь речи нет.

Например, $\frac{1}{x}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x\to 0$, так как $\left|\frac{1}{x}\right|\leq\frac{1}{x^2}$ при $|x|\leq 1$.

Замечание 5.9. Запись $f(x)=O(1)$ при $x\to a$ означает, что функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$, при этом $\beta(x) \neq 0$ в проколотой окрестности точки a.

Определение 5.20. $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией *высшего порядка* по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Обозначение: $\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big)$.

Пример 5.30.

$\alpha(x) = x^2$ и $\beta(x) = \sin x$ – бесконечно малые функции при $x \to 0$. Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x\right) = 1 \cdot 0 = 0,$$

то $\alpha(x) = x^2$ является бесконечно малой функцией высшего порядка по сравнению с $\beta(x) = \sin x$ при $x \to 0$. Или же можно записать $x^2 = o(\sin x)$.

Замечание 5.10. Запись $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

Определение 5.21. $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией *низшего порядка* по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$.

Пример 5.31.

$\alpha(x) = \operatorname{tg} x$ и $\beta(x) = x^3$ – бесконечно малые функции при $x \to 0$. Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{1}{x^2}\right) = [1 \cdot \text{ббф} = \text{ббф}] = +\infty,$$

то $\alpha(x) = \operatorname{tg} x$ является бесконечно малой функцией низшего порядка по сравнению с $\beta(x) = x^3$ при $x \to 0$.

Определение 5.22. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется бесконечно малыми функциями *одного порядка* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ конечен и отличен от нуля.

Пример 5.32.
$\alpha(x) = \sin x$ и $\beta(x) = 2x$ – бесконечно малые функции при $x \to 0$. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} \neq 0,$$

то $\alpha(x) = \sin x$ и $\beta(x) = x$ являются бесконечно малыми функциями одного порядка при $x \to 0$.

Замечание 5.10. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$, но $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то говорят, то бесконечно малые функции *не сравнимы между собой*.

Например, $\alpha(x) = x$ и $\beta(x) = x\sin\frac{1}{x}$ – бесконечно малые функции при $x \to 0$ (*вопрос: почему $\beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to 0$?*[1])

Эквивалентные функции

Определение 5.23. Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, отличные от нуля в проколотой окрестности точки a, называются эквивалентными функциями при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема 5.28. Для того, чтобы две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$ при $x \neq a$, были эквивалентными

---

[1] $\beta(x) = x\sin\frac{1}{x}$ – бесконечно малая функция при $x \to 0$ по теореме 5.4 о произведении бесконечно малой и ограниченной функций

при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий

$$\alpha(x) - \beta(x) = o\big(\alpha(x)\big), \tag{5.41}$$

$$\alpha(x) - \beta(x) = o\big(\beta(x)\big). \tag{5.42}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, при этом $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$ при $x \neq a$. И пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Покажем, что выполняются условия (5.41) и (5.42).

Так как $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$, то по определению 5.23 имеем $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Тогда по теореме 5.5 о связи между функцией и ее пределом получаем, что $\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$. Отсюда $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) = 0$ или $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0$. Следовательно, по определению 5.20 получаем, что $\alpha(x) - \beta(x)$ – бесконечно малая функция высшего порядка по сравнению с $\beta(x)$, то есть выполняется равенство (5.41). Аналогично из условия $\lim\limits_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$ получаем равенство (5.42).

Докажем достаточность. Пусть выполняется равенство (5.41). Тогда по определению 5.20 имеем, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0$. Отсюда $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) = 0$, то есть функция $\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right)$ является бесконечно малой при $x \to a$. Тогда по теореме 5.6 о связи между функцией и ее пределом получаем, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Следовательно, по теореме 5.23 имеем $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$. Для равенства (5.42) доказательство аналогично. Теорема доказана.

Следствие. Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, где $c = \text{const}$, то $\alpha(x) \sim c\beta(x)$ и $\alpha(x) = c\beta(x) + o\big(\beta(x)\big)$ при $x \to a$.

Теорема 5.29. Пусть $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$. Тогда если существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, причем

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ конечен. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \right).$$

Так как $(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = 1$. Учитывая, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ конечен, по теореме 5.8 о пределе произведения получаем

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot 1 = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пусть $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \infty$. В этом случае теорему о пределе произведения применить нельзя. Но учитывая, что $\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, а $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \right) = 1 \neq 0$, по теореме 5.20 о произведении бесконечно большой функции и функции, имеющей ненулевой конечный предел, получаем, что $\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to a$ того же знака, что и $\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. Следовательно,

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.30. Если в конечной сумме бесконечно малых функций при $x \to a$ одно слагаемое является бесконечно малой функцией низшего порядка по сравнению с остальными слагаемыми при $x \to a$, то вся сумма эквивалентна этому слагаемому.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, при этом $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция низшего порядка по сравнению с $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ при $x \to a$. Докажем, что $\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x) \sim \alpha(x)$. Для этого вычислим предел

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\left(1 + \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} + \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\right).$$

Так как $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция низшего порядка по сравнению с $\beta(x)$, $\gamma(x)$ при $x \to a$, то $\beta(x)$, $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции высшего порядка по сравнению с $\alpha(x)$ при $x \to a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\left(1 + \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} + \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Значит по определению 5.23 эквивалентных функций получаем, что $\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x) \sim \alpha(x)$. Теорема доказана.

Таблица эквивалентных функций при $x \to 0$

1) $\sin x \sim x$,
2) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$,
3) $\operatorname{tg} x \sim x$,
4) $\arcsin x \sim x$,
5) $\operatorname{arctg} x \sim x$,
6) $e^x - 1 \sim x$,
7) $\ln(1 + x) \sim x$,
8) $(1 + x)^m - 1 \sim mx$,
9) $a^x - 1 \sim x \ln a$.

Пример 5.30.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\arcsin 3x}$.

Так как

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos 2x) = 1-\cos 0 = 1-1 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\arcsin 3x = \arcsin 0 = 0,$$

то имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Перейдем к эквивалентным функциям.

Рассмотрим $1-\cos 2x$. Выполним замену $2x = t$, при этом $\lim\limits_{x\to 0} t = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$. Тогда $1-\cos t \sim \frac{t^2}{2}$ при $t \to 0$. Следовательно, $1-\cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2$ при $x \to 0$.

Рассмотрим $\arcsin 3x$. Выполним замену $3x = z$, при этом $\lim\limits_{x\to 0} z = \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$. Тогда $\arcsin z \sim z$ при $z \to 0$. Следовательно, $\arcsin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$.

Тогда, учитывая, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3} = \frac{2\cdot 0}{3} = 0,$$

получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\arcsin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x} = 0. \quad \blacksquare$$

Тема 6. Непрерывность функции

6.1. Непрерывность функции в точке

Определение 6.1. Разность $\Delta x = x_1 - x_0$ называется *приращением аргумента в точке* x_0, где x_1 – любая точка, отличная от данной точки x_0.

При рассмотрении приращения аргумента

$$\Delta x = x_1 - x_0. \tag{6.1}$$

Возможны два случая, когда $\Delta x > 0$ и когда $\Delta x < 0$.

Пусть функция $f(x)$ определена в точках x_0 и x_1.

Определение 6.2. *Приращением функции* $f(x)$ *в точке* x_0 называется разность

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0), \tag{6.2}$$

при этом может быть $\Delta y < 0$, $\Delta y = 0$, $\Delta y > 0$.

Если из формулы (6.1) выразить $x_1 = x_0 + \Delta x$ и подставить в формулу (6.2), то приращение функции $f(x)$ в точке x_0 можно записать в виде:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{6.3}$$

На рис. 6.1 покажем приращение аргумента и приращение функции геометрически.

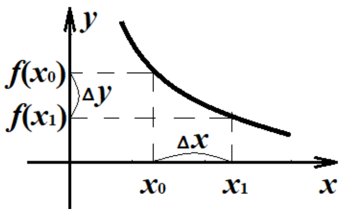

Рис. 6.1. Приращения аргумента и функции

На рис. 6.1 $\Delta x > 0$, $\Delta y < 0$.

Определение 6.3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{6.4}$$

Пример 6.1.

1. Функция $y = \sin x$ является непрерывной в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, так как $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ (доказано в примере 5.3).

2. Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ Выясним, будет ли эта функция непрерывна в точке $x = 0$. Так как

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad f(0) = 1,$$

то $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Следовательно, функция является непрерывной в точке $x = 0$. ■

Если к равенству (6.4) применить определение конечного предела функции при $x \to x_0$, то получим другое определение.

Определение 6.4. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если каково бы ни было положительное число ε, существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Замечание 6.1. В определении 6.4 не пишем $x \neq x_0$, так как неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ выполняется и в самой точке $x = x_0$, так как $f(x_0) - f(x_0) = 0 < \varepsilon$.

Получим еще одно определение непрерывной функции в точке. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Если $x \to x_0$, то $\Delta x \to 0$. Из равенства (6.4) с учетом теоремы о связи между функцией и ее пределом получаем, что $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Следовательно, $\Delta y \to 0$ при $x \to x_0$. Таким образом, если $x \to x_0$, то $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Определение 6.5. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy.

Свойства функции, непрерывной в точке

Теорема 6.1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда по определению 6.4 для любого числа $\varepsilon > 0$, а значит и для $\varepsilon = 1$, найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = 1$. Следовательно, для любой точки $x \in U(x_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1.$$

Значит функция $f(x)$ ограничена в $U(x_0, \delta)$. Теорема доказана.

Теорема 6.2. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то найдется окрестность точки x_0, в которой функция имеет такой же знак, что и в самой точке x_0.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и при этом $f(x_0) > 0$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$. По теореме о сохранении функцией знака своего предела получаем, что существует проколотая окрестность точки x_0, в которой знак функции совпадает со знаком её предела. А учитывая, что $f(x_0) > 0$, получаем, что $f(x) > 0$ для любой точки x из окрестности точки x_0. Аналогично доказывается и для случая, когда $f(x_0) < 0$. Теорема доказана.

6.2. Непрерывность функции на множестве

Определение 6.6. Функция называется *непрерывной на множестве X*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема 6.3 (о непрерывности суммы, произведения и частного). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве X, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ также непрерывны на этом множестве. А при дополнительном условии, что $g(x) \neq 0$ на множестве

X, функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна на множестве X.

Доказательство. Докажем для суммы двух функций. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве X. Тогда они непрерывны в любой точке множества X. Произвольно выберем точку $x_0 \in X$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то есть по определению 6.3 имеем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Аналогично, так как $g(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) + g(x)$. По теореме о пределе суммы, учитывая, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ существуют и конечны, получаем

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = f(x_0) + g(x_0) = \varphi(x_0).$$

Тогда по определению 6.3 функция $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ непрерывна в точке x_0. В силу произвольности выбора точки x_0 получаем, что функция $\varphi(x)$ непрерывна в любой точке множества X, а значит функция $\varphi(x)$ непрерывна на множестве X.

Доказательство для произведения двух функций аналогично.

Докажем для частного двух функций. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве X, при этом $g(x) \neq 0$ для любой точки $x \in X$. Тогда они непрерывны в любой точке множества X. Произвольно выберем точку $x_0 \in X$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то есть справедливо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$.

Рассмотрим функцию $\psi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. По теореме о пределе частного, учитывая, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ существуют и конечны, получаем

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \psi(x_0).$$

Тогда по определению 6.3 функция $\psi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0. В силу произвольности выбора точки x_0, получаем, что функция $\psi(x)$ непрерывна в любой точке множества X, а значит функция $\psi(x)$ непрерывна на множестве X. Теорема доказана.

Непрерывность основных элементарных функций

1. *Постоянная функция* $f(x) = C$ непрерывна на множестве $X = \mathbb{R}$.

Доказательство. Возьмём произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Для любой последовательности $\{x_n\}$, такой что $x_n \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} C = C.$$

Тогда по определению Гейне $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C$. А так как $f(x_0) = C = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то по определению 6.3 функция $f(x) = C$ непрерывна в точке x_0. В силу произвольности выбора точки x_0 получаем, что функция $f(x) = C$ непрерывна в любой точке множества $\mathbb{R}$, а значит непрерывна на всем множестве $\mathbb{R}$. Что и требовалось доказать.

2. *Степенная функция с натуральным аргументом* $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывна на множестве $X = \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = x$. Покажем, что она непрерывна на множестве $\mathbb{R}$. Возьмём произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Для любой последовательности $\{x_n\}$, такой что $x_n \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Тогда по определению Гейне $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = x_0$. А так как $g(x_0) = x_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то по определению 6.3 функция $g(x) = x$ непрерывна в точке x_0. В силу произвольности выбора точки x_0 получаем, что функция $g(x) = x$ непрерывна в любой точке множества $\mathbb{R}$, а значит непрерывна на всем множестве $\mathbb{R}$.

Тогда функция $f(x) = x^n = \underbrace{g(x) \cdot g(x) \cdot \ldots \cdot g(x)}_{n \text{ множителей}}$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}$ по теореме о непрерывности произведения функций. Что и требовалось доказать.

3. *Целая рациональная функция*

$$f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

непрерывна на множестве $X = \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g_i(x) = a_i x^{n-i}$, $i = \overline{0, n}$. Каждая из этих функций непрерывна на множестве $\mathbb{R}$ по теореме 6.3 о непрерывности произведения двух функций, одна из которых постоянная, а вторая – степенная. Тогда функция $f(x) = P_n(x)$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}$ по теореме 6.3 о непрерывности суммы функций. Что и требовалось доказать.

4. *Дробно-рациональная функция* $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ как отношение двух целых рациональных функций непрерывна на множестве $X = \mathbb{R} \backslash \{x\colon\ Q_m(x) = 0\}$ по теореме 6.3 о непрерывности частного двух функций.

5. *Тригонометрические функции.*

$f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ непрерывны на множестве $X = \mathbb{R}$.

$f(x) = \operatorname{tg} x$ непрерывна на множестве $X = \mathbb{R} \backslash \left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$f(x) = \operatorname{ctg} x$ непрерывна на множестве $X = \mathbb{R} \backslash \{x\colon\ x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Непрерывность сложной функции

Определение 6.7. Если функция $y = f(u)$ определена на множестве U, функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве X, при этом функция φ отображает множество X во множество U, то *на множестве X определена сложная функция $y = f\big(\varphi(x)\big)$*.

Теорема 6.4 (о непрерывности сложной функции). Если функция $y = f(u)$ непрерывна на множестве U, а функция $u = \varphi(x)$ непрерывна на множестве X, при этом функция φ отображает множество X во множество U, то сложная функция $y = f\big(\varphi(x)\big)$ непрерывна на множестве X.

Доказательство. Чтобы доказать, что функция $y = f\big(\varphi(x)\big)$ непрерывна на множестве X достаточно доказать ее непрерывность в произвольной точке $x_0 \in X$. Для этого используем определение 6.4 функции, непрерывной в точке. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$\left|f\big(\varphi(x)\big) - f\big(\varphi(x_0)\big)\right| < \varepsilon. \tag{6.5}$$

Обозначим $u_0 = \varphi(x_0)$. Так как функция φ отображает множество X во множество U, то $u_0 \in U$. Так как функция $y = f(u)$ непрерывна на множестве U, то она непрерывна и в точке u_0. Следовательно, по определению 6.4 функции, непрерывной в точке, имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_1(\varepsilon) > 0$, что для любых u, удовлетворяющих неравенству

$$|u - u_0| < \delta_1, \tag{6.6}$$

выполняется неравенство

$$|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon. \tag{6.7}$$

Так как функция $u = \varphi(x)$ непрерывна на множестве X, то она непрерывна и в точке x_0. По определению 6.4 функции, непрерывной в точке, имеем, что для любого $\varepsilon > 0$, а значит и для $\varepsilon = \delta_1$

существует такое число $\delta_2(\varepsilon) > 0$, что для любых x, удовлетворяющих неравенству

$$|x - x_0| < \delta_2, \tag{6.8}$$

выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon = \delta_1. \tag{6.9}$$

Покажем, что из неравенства (6.8) следует неравенство (6.5). Так как из неравенства (6.8) следует выполнимость неравенства (6.9), то с учетом обозначения $u_0 = \varphi(x_0)$ и того, что $u = \varphi(x)$, получаем, что из неравенства (6.8) следует выполнимость неравенства $|u - u_0| < \delta_1$, которое является неравенством (6.6). Так как из неравенства (6.6) следует выполнимость неравенства (6.7), то по свойству транзитивности из неравенства (6.8) следует неравенство (6.7). Заменяя $u = \varphi(x)$, $u_0 = \varphi(x_0)$, вместо неравенства (6.7) получаем неравенство (6.5). Таким образом, из неравенства (6.8) следует выполнимость неравенства (6.5).

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству (6.8), выполняется неравенство (6.5). Что и требовалось доказать.

Свойства функции, непрерывной на отрезке

Теорема 6.5 (первая теорема Вейерштрасса – о связи непрерывности с ограниченностью). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Докажем теорему методом от противного. Допустим, что функция $f(x)$ неограничена на отрезке $[a;\ b]$. Разделим отрезок $[a;\ b]$ пополам. Получим два отрезка. Причем хотя бы на одном из них функция неограниченна, так как в противном случае функция оказалась бы ограниченна на всем отрезке $[a;\ b]$. Выберем из этих двух отрезков один, на котором функция $f(x)$ неограничена и обозначим его $[a_1;\ b_1]$, при этом его длина $d_1 = b_1 - a_1 = \frac{d}{2}$, где d –длина отрезка $[a; b]$. Разделим $[a_1;\ b_1]$ пополам и из двух отрезков выберем тот, на котором функция $f(x)$ неограниченна. Обозначим его

$[a_2;\ b_2]$, при этом $d_2 = \frac{d}{2^2}$. Продолжая этот процесс неограниченное число раз, получим последовательность отрезков $[a_1;\ b_1]$, $[a_2;\ b_2]$, …, $[a_n;\ b_n]$, …, которая обладает свойствами:

1) каждый последующий отрезок содержится в предыдущем,
2) длина n-го отрезка $d_n = \frac{d}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$,
3) на каждом отрезке функция $f(x)$ неограниченна.

Из свойств 1) и 2) следует, что записанная последовательность отрезков является стягивающейся. Тогда по аксиоме Кантора существует единственная точка x_0, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности. Так как каждый из этих отрезков принадлежит отрезку $[a;\ b]$ то $x_0 \in [a;\ b]$.

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ по условию теоремы. Тогда функция $f(x)$ непрерывна и в точке x_0. По свойству функции, непрерывной в точке (теорема 6.1), найдется $U(x_0, \delta)$, в которой функция $f(x)$ является ограниченной.

Так как по свойству 2) отрезков $d \to 0$ при $n \to \infty$, то среди этих отрезков найдется хотя бы один, длина которого меньше δ. Обозначим его $[a_k;\ b_k]$. А так как к тому же этот отрезок содержит в себе точку x_0, то $[a_k;\ b_k] \subset U(x_0, \delta)$. Так как функция ограничена во всей окрестности $U(x_0, \delta)$, то она ограничена и на части этой окрестности, то есть на $[a_k;\ b_k]$. А это противоречит свойству отрезков 3). Следовательно, наша допущение, что функции неограничена на отрезке $[a;\ b]$ неверно. Тогда функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;\ b]$. Теорема доказана.

Замечание 6.2. Требование непрерывности функции именно на отрезке важно, так как функция может быть непрерывна на интервале, но при этом быть неограниченной на этом интервале. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна на $(0;\ 1)$, но является неограниченной на $(0;\ 1)$.

Теорема 6.6 (вторая теорема Вейерштрасса – о наибольшем и наименьшем значениях). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то она имеет на этом отрезке наименьшее и наибольшее значения.

Доказательство. Пусть Y – это множество значений функции $f(x)$ на $[a;\ b]$. По теореме 6.5 функция $f(x)$ ограничена на отрезки $[a;\ b]$. Это означает, что множество Y ограниченно. То есть для любого $x \in [a;\ b]$ выполняется неравенство $A \leq f(x) \leq B$. То есть множество Y ограничено и сверху, и снизу. По теореме о существовании точных граней множества получаем, что множество Y имеет точную верхнюю и точную нижнюю грань, которые обозначим $M = \sup Y$, $m = \inf Y$. Тогда $m \leq f(x) \leq M$ для любого $x \in [a;\ b]$. Чтобы доказать, что функция имеет на отрезке $[a;\ b]$ наибольшее и наименьшее значение, достаточно доказать, что хотя бы в одной точке $x \in [a;\ b]$ функция примет значение M и в какой-то другой точке – значение m.

Докажем, что функции может достигать на отрезке $[a;\ b]$ точной верхней грани M. Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что для любого $x \in [a;\ b]$ выполняется неравенство $f(x) < M$. Тогда справедливо $M - f(x) > 0$ для любого $x \in [a;\ b]$. Причем функция $M - f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$. А тогда по теореме 6.3 о непрерывности частного функция $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на $[a;\ b]$. Следовательно, по теореме 6.5 о связи непрерывности с ограниченностью функция $\varphi(x)$ ограничена на $[a;\ b]$. Это означает, что существует число $K > 0$ такое, что для любого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| \leq K$. А это равносильно тому, что $\frac{1}{M - f(x)} \leq K$. Отсюда $M - f(x) \geq \frac{1}{K}$ и, соответственно $f(x) \leq M - \frac{1}{K}$. А это противоречит тому, что M – точная верхняя грань для значений функции $f(x)$. Таким образом, наше допущение, что $f(x)$ ни при каких $x \in [a;\ b]$ не может достигать значения M, неверно. Значит, хотя бы при одном $x \in [a;\ b]$ имеет место, что $f(x) = M$. А это означает, что функция $f(x)$ принимает на $[a;\ b]$ наибольшее значение M.

Доказательство для наименьшего значения аналогично. Теорема доказана.

Теорема 6.7 (первая теорема Больцано-Коши). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$ и принимает на концах этого отрезка значение разных знаков, то внутри $[a;\ b]$ найдется хотя бы одна точка x_0, в которой значение функции равно нулю, то есть $f(x_0) = 0$.

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что $f(x) \neq 0$ для любого $x \in [a;\ b]$. Применим метод пополамного деления. Делим $[a; b]$ пополам точкой c (рис. 6.2). Так как по допущению $f(c) \neq 0$, то на концах либо $[a;\ c]$, либо $[c;\ b]$ функция будет принимать значение разных знаков. Выберем такой отрезок, на концах которого функция принимает значение разных знаков, и обозначим его $[a_1;\ b_1]$. При этом длина отрезка $[a_1;\ b_1]$ будет равна $d_1 = \frac{d}{2}$, где d – длина $[a;\ b]$.

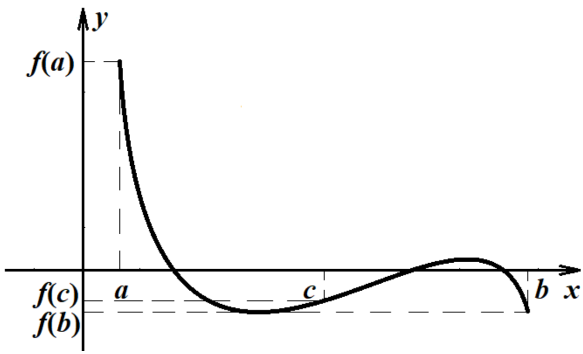

Рис. 6.2. Метод пополамного деления

Делим отрезок $[a_1;\ b_1]$ пополам и из двух новых отрезков выбираем тот, на концах которого функция принимает значение разных знаков. Обозначим его $[a_2;\ b_2]$. При этом его длина $d_2 = \frac{d}{2^2}$.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность отрезков $[a_1;\ b_1]$, $[a_2;\ b_2]$, ..., $[a_n;\ b_n]$, ..., которая обладает свойствами:

1) каждый последующий отрезок содержится в предыдущем,
2) длина n-го отрезка $d_n = \frac{d}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$,
3) на концах каждого из этих отрезков функция $f(x)$ принимает значения разных знаков.

Из свойств 1) и 2) следует, что записанная последовательность отрезков является стягивающейся. Тогда по аксиоме Кантора существует единственная точка x_0, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности. Так как каждый из этих отрезков принадлежит отрезку $[a;\ b]$ то $x_0 \in [a;\ b]$. А так как по условию теоремы функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то она непрерывна и в точке x_0.

По допущению $f(x_0) \neq 0$. Тогда по теореме 6.2 о свойстве функции, непрерывной в точке, получаем, что существует δ-окрестность точки x_0, в которой знак функции совпадает с $f(x_0)$, то есть в $U(x_0, \delta)$ функция сохраняет постоянный знак.

Так как по свойству 2) $d \to 0$ при $n \to \infty$, то среди последовательности отрезков найдется хотя бы один, длина которого меньше δ. Обозначим $[a_k;\ b_k]$. Так как этот отрезок содержит к тому же точку x_0, то $[a_k; b_k] \subset U(x_0, \delta)$. Учитывая, что в этой окрестности функция $f(x)$ сохраняет свой знак, то и на отрезке $[a_k;\ b_k]$ функция $f(x)$ сохраняет свой знак. Поэтому и на концах отрезка $[a_k;\ b_k]$ функция $f(x)$ имеет один и тот же знак. А это противоречит свойству 3) последовательности отрезков. Полученное противоречие означает, что допущение о том, что что $f(x) \neq 0$ для любого $x \in [a;\ b]$, неверно. Поэтому хотя бы в одной точке из отрезка $[a;\ b]$ функция обратится в ноль. Теорема доказана.

Теорема 6.8 (вторая теорема Больцано-Коши). Если функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;\ b]$, принимает на концах отрезка два различных значения, то она принимает любое промежуточное значение между ними.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, при этом $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$. Докажем, что существует число $C \in (A;\ B)$ такое, что найдется хотя бы одна точка $x_0 \in (a;\ b)$ такая, что$f(x_0) = C$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - C$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$ по условию, а постоянная функция непрерывна на $(-\infty;\ +\infty)$, а значит и на $[a;\ b]$, то функция $g(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$ как разность двух непрерывных функций. Найдем значение функции $g(x)$ на концах $[a;\ b]$.

$$g(a) = f(a) - C = A - C < 0, \qquad g(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Итак, непрерывная на $[a;\ b]$ функция $g(x)$ принимает на концах этого отрезка значения разных знаков. Тогда по теореме 6.7 о нулевом значении непрерывной функции внутри отрезка получаем, что внутри $[a;\ b]$ найдется хотя бы одна точка x_0, в которой $g(x_0) = 0$. Следовательно, $f(x_0) - C = 0$, то есть $f(x_0) = C$. Теорема доказана.

Равномерная непрерывность функции на множестве

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на множестве X. Тогда она непрерывна в каждой точке этого множества. Пусть точки $x_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$. Применим определение непрерывности функции в каждой из этих точек.

Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_1, то $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$. Или для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_1(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_1| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_2, то для того же числа $\varepsilon > 0$ найдется, вообще говоря, другое число $\delta_2(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_2| < \delta_2$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_2, то для того же числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_3(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_3| < \delta_3$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_3)| < \varepsilon$.

И так далее. Таким образом, выбор δ для одного и того же ε зависит не только от ε, но и от той точки, в которой функция непрерывна. Иногда бывают такие функции, у которых для разных точек в области непрерывности можно указать общее δ. В таком случае функцию называют равномерно непрерывной на множестве X.

Определение 6.8. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* X, если для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек x_1 и x_2 из множества X, таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Покажем, что если функция равномерно непрерывна на множестве X, то она и непрерывна в каждой точке этого множества. Действительно, полагая в приведенном определении, что $x_1 = x$, $x_2 = x_0$, где $x_0 \in X$ – произвольная фиксированная точка, получаем, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следовательно, по определению 6.4, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Итак, из равномерной непрерывности функции на множестве следует непрерывность функции на этом множестве.

Однако из непрерывности функции на множестве X не следует равномерная непрерывность на этом множестве. Но при более жестких условиях, когда множество X является отрезком, имеет место теорема.

Теорема 6.9 (Кантора). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что для некоторого определенного числа $\varepsilon > 0$ какое бы число $\delta(\varepsilon) > 0$ не выбрать, найдутся две точки x_1 и x_2 из $[a;\ b]$, таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, для которых выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$.

Теперь рассмотрим такую последовательность $\{\delta_n\}$ положительных чисел, что $\delta_n \to 0$. Для каждого δ_n найдутся в $[a;\ b]$ такие значения x_n и x_{0_n}, что $\left|x_n - x_{0_n}\right| < \delta$, для которых выполняется неравенство $\left|f(x_n) - f\left(x_{0_n}\right)\right| \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}$.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить частичную подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in [a;\ b]$.

Так как $\left|x_n - x_{0_n}\right| < \delta$, а $\delta_n \to 0$, то $x_n - x_{0_n} \to 0$. Учитывая, что $\{x_n\} \to x_0$, получаем, что и $\left\{x_{0_n}\right\} \to x_0$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то $f(x_n) \to f(x_0)$ и $f\left(x_{0_n}\right) \to f(x_0)$. Следовательно, $f(x_n) - f\left(x_{0_n}\right) \to 0$. А это противоречит тому, что $\left|f(x_n) - f\left(x_{0_n}\right)\right| \geq \varepsilon$. Полученное противоречие и доказывает теорему. Терема доказана.

6.3. Точки разрыва функции

Когда ранее говорили, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то предполагали, что функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и при этом $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. То есть для непрерывности в точке, а должны выполняться следующие условия:

1) функция $f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и существует $f(x_0)$;
2) должен существовать $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, а значит, должны существовать

оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$ и они должны быть равны между собой;

3) должно выполняться равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 6.9. Есть ли функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то она называется *точкой разрыва функции* $f(x)$. Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой разрыва, достаточно нарушения хотя бы одного из трех условий.

Классификация точек разрыва

Определение 6.10. Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, если односторонние пределы функции при $x \to x_0 \pm 0$ существуют и конечны. При этом точка x_0 называется *точкой разрыва с конечным скачком*, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, но либо односторонние производные не равны $f(x_0)$, либо в точке x_0 функция не определена.

Пример 6.2.

Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$. Она непрерывна на множестве $X = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва. Определим ее тип. Так как

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} =$$

$$\left[\begin{gathered}\lim_{x \to 0-0} 1 = 1, \\ \lim_{x \to 0-0} \left(1 + 2^{\frac{1}{x}}\right) = \left[\lim_{x \to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = \left[\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty\right] = 0\right] = 1 + 0 = 1\end{gathered}\right]$$

$$= \frac{1}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\left[\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to 0+0} 1 = 1,\\ \lim\limits_{x\to 0+0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)=\left[\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty\right]=+\infty\right]=+\infty\end{array}\right]=0,$$

то есть односторонние пределы существуют и конечны, то $x = 0$ – точка разрыва первого рода. Так как $\lim\limits_{x\to 0-0} y \neq \lim\limits_{x\to 0+0} y$, то $x = 0$ – точка разрыва с конечным скачком, что видно на рис. 6.3. ■

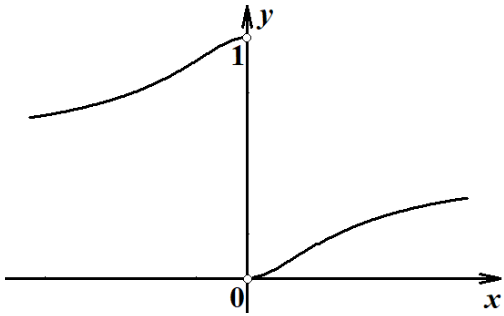

Рис. 6.3. Точка разрыва с конечным скачком

***Пример* 6.3.**

Рассмотрим функцию $y = \frac{\sin x}{x}$. Она непрерывна на множестве $X = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва. Определим ее тип. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ по первому замечательному пределу, то $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Следовательно, односторонние пределы существуют и конечны, а $x = 0$ – точка разрыва первого рода. Так как при этом функция $y = \frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$, то $x = 0$ – точка устранимого разрыва, что видно на рис. 6.4.

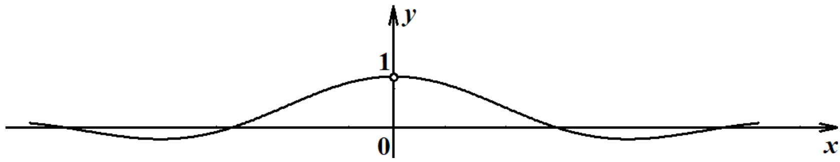

Рис. 6.4. Точка устранимого разрыва

Если дополнить функцию $y = \frac{\sin x}{x}$ значением в точке $x = 0$, равным 1, то получим непрерывную функцию из примера 6.1(2). ■

Определение 6.11. Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из односторонних пределов функции при $x \to x_0 \pm 0$ равен бесконечности или не существует.

Пример 6.4.

Для функции $y = \frac{1}{x}$ точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, что видно на рис. 6.5.

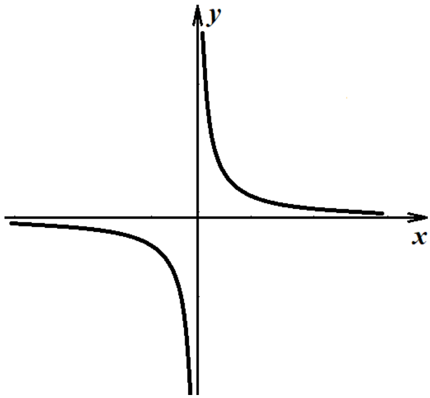

Рис. 6.5. Точка разрыва второго рода

6.4. Обратная функция и ее непрерывность

Известно, что признаком функции является то, что каждому значению аргумента из некоторого множества должно соответствовать единственное значение функции.

Пусть для функции $y = f(x)$ множество X является областью определения, а множество Y – множеством значений функции. Это означает, что для каждого $x \in X$ с помощью функции $y = f(x)$ ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$. При этом каждому $y \in Y$ соответствует хотя бы одно $x \in X$, такое, что $f(x) = y$. Таким образом, обратное соответствие не всегда является однозначным.

Определение 6.12. Если функция $y = f(x)$ с областью определения X и множеством значений Y такова, что каждому значению $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$, такое, что $f(x) = y$, то такое соответствие определяет на множестве Y функцию от y, которая обозначается $x = f^{-1}(y)$ и называется *обратной функцией по отношению к заданной*.

Из определения следует, что если $f^{-1}(y_0) = x_0$, то $f(x_0) = y_0$. Подставляя одно в другое, получаем

$$f\left(f^{-1}(y_0)\right) = y_0, \qquad f^{-1}\left(f(x_0)\right) = x_0,$$

то есть взаимообратные функции, действуя друг на друга, «погашают» себя и остается только аргумент.

График обратной функции

Если функция $x = f^{-1}(y)$ – обратная функция для функции $y = f(x)$, то в такой записи графики этих функций совпадают, только область определения функции $f(x)$ изображается на оси Ox, а область определения обратной функции $f^{-1}(y)$ изображается на оси Oy и совпадает с множеством значений функции $f(x)$.

Если же у обратной функции аргумент y обозначить через x, а значение функции через y, то есть $y = f^{-1}(x)$, то в такой записи график обратной функции будет симметричен с графиком заданной функции относительно прямой $y = x$ (рис. 6.6).

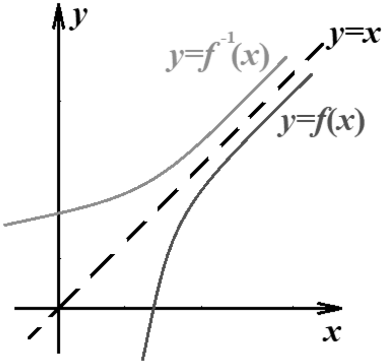

Рис. 6.6. График обратной функции

Действительно, если точка $M(a;b)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, то $b=f(a)$. Тогда по определению 6.12 обратной функции имеем, что $a=f^{-1}(b)$. А это означает, что точка $M_1(b;a)$ принадлежит графику функции $x=f^{-1}(y)$. При этом точки $M(a;b)$ и $M_1(b;a)$ симметричны относительно прямой $y=x$.

Существование обратной функции на отрезке

Теорема 6.10. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и строго возрастает (убывает) на $[a;b]$, то на $[c;d]$ (на $[d;\ c]$), где $c=f(a)$, $d=f(b)$, существует функция $x=f^{-1}(y)$, обратная к данной, которая также непрерывна и строго возрастает (убывает) на $[c;\ d]$ (на $[d;\ c]$).

$\boldsymbol{y=\arcsin x}$

Рассмотрим функцию $\boldsymbol{y=\sin x}$. Она непрерывна на всей области существования $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$. Но на множестве $D(y)$ функция $y=\sin x$ не является обратной, так как для каждого значения y_0 из множества значений функции $y=\sin x$ ставится в соответствие не единственное значение $x_0\in D(y)$, такое, что $\sin x_0=y_0$. Например, значению $y_0=0$ соответствуют $x_0=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, при этом $\sin x_0=\sin\pi k=0=y_0$.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на множестве $X = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \subset D(y)$. На этом отрезке функция непрерывна и строго возрастает. Тогда, учитывая, что $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, по теореме 6.10 о существовании обратной функции на отрезке получаем, что на $[-1;\ 1]$ существует функция, обратная данной функции, которую обозначим $\boldsymbol{x = \arcsin y}$. При этом функция $x = \arcsin y$ непрерывна и строго возрастает на $[-1;\ 1]$. Перейдем к привычному обозначению аргумента и запишем полученную функцию в виде $\boldsymbol{y = \arcsin x}$. Эта функция обладает свойствами:

1) функция определена на $[-1;\ 1]$;
2) функция непрерывна на $[-1;\ 1]$;
3) функция строго возрастает на $[-1;\ 1]$;
4) множество значений $Y = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
5) график функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 6.7);
6) $\lim\limits_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$ для любого $x_0 \in [-1;\ 1]$.

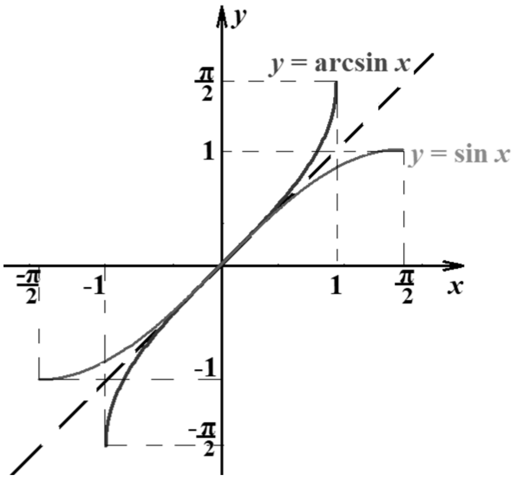

Рис. 6.7. График функции $y = \arcsin x$

$\boldsymbol{y = \arccos x}$

Рассмотрим функцию $\boldsymbol{y = \cos x}$. Она непрерывна на всей области существования $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$. Но на множестве $D(y)$ функция $y = \cos x$ не является обратной, так как для каждого значения y_0 из множества значений функции $y = \cos x$ ставится в соответствие не единственное значение $x_0 \in D(y)$, такое, что $\cos x_0 = y_0$. Например, значению $y_0 = 0$ соответствуют $x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, при этом $\cos x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0 = y_0$.

Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на множестве $X = [0;\ \pi] \subset D(y)$. На этом отрезке функция непрерывна (так как она непрерывна на $(-\infty;\ +\infty)$) и строго убывает. Тогда, учитывая, что $\cos(0) = 1$, $\cos \pi = -1$, по теореме 6.10 о существовании обратной функции на отрезке получаем, что на $[-1;\ 1]$ существует функция, обратная данной функции, которую обозначим $\boldsymbol{x = \arccos y}$. При этом функция $x = \arccos y$ непрерывна и строго возрастает на $[-1;\ 1]$.

Перейдем к привычному обозначению аргумента и запишем полученную функцию в виде $\boldsymbol{y = \arccos x}$. Эта функция обладает свойствами:

1) функция определена на $[-1;\ 1]$;
2) функция непрерывна на $[-1;\ 1]$;
3) функция строго убывает на $[-1;\ 1]$;
4) множество значений $Y = [0;\ \pi]$;
5) график функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 6.8);
6) $\lim\limits_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0$ для любого $x_0 \in [-1;\ 1]$.

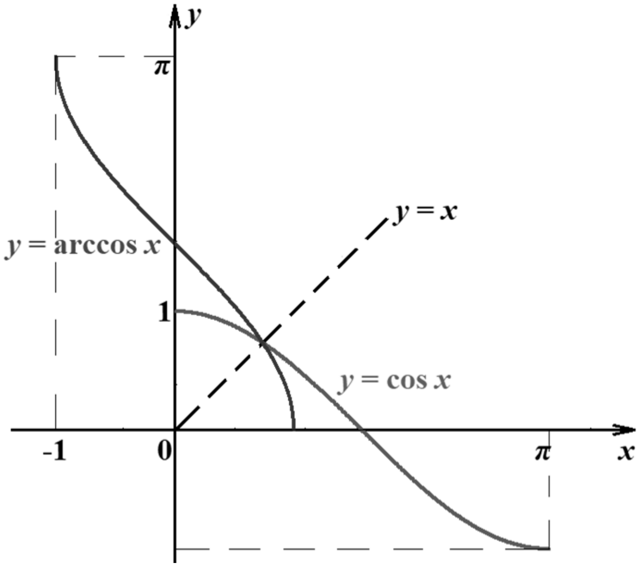

Рис. 6.8. График функции $y = \arccos x$

Существование обратной функции на интервале

Теорема 6.11. Если функция $f(x)$ непрерывна и строго возрастает (строго убывает) на $(a;\ b)$, при этом существуют пределы $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = c$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = d$, то на $(c;\ d)$ (на $(d;\ c)$) существует функция $x = f^{-1}(y)$, обратная к данной, которая также непрерывна и строго возрастает (убывает) на $(c;\ d)$ (на $(d;\ c)$).

$$\boldsymbol{y = \mathbf{arctg}\, x}$$

Рассмотрим функцию $\boldsymbol{y = \mathbf{tg}\, x}$ на множестве $X = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. На этом интервале функция непрерывна и строго возрастает. Тогда, учитывая, что $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$, по теореме 6.11 о существовании обратной функции на интервале получаем, что на $(-\infty;\ +\infty)$ существует функция, обратная данной функции, которую обозначим $\boldsymbol{x = \mathbf{arctg}\, y}$. При этом функция $x = \operatorname{arctg} y$ непрерывна и строго возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$.

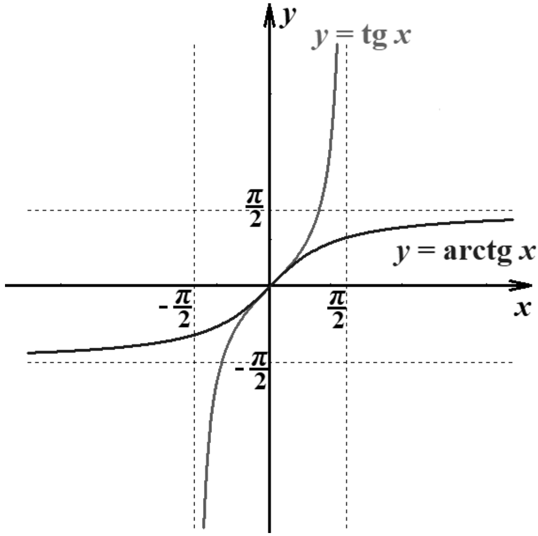

Рис. 6.9. График функции $y = \operatorname{arctg} x$

Перейдем к привычному обозначению аргумента и запишем полученную функцию в виде $\boldsymbol{y = \operatorname{arctg} x}$. Эта функция обладает свойствами:

1) функция определена на $(-\infty;\ +\infty)$;
2) функция непрерывна на $(-\infty;\ +\infty)$;
3) функция строго возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$;
4) множество значений $Y = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;
5) график функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 6.9);
6) $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0$ для любого $x_0 \in (-\infty;\ +\infty)$;
7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

$\boldsymbol{y = \operatorname{arcctg} x}$

Рассмотрим функцию $\boldsymbol{y = \operatorname{ctg} x}$ на множестве $X = (0;\ \pi)$. На этом интервале функция непрерывна и строго убывает. Тогда, учитывая, что $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty$, по теореме 6.11

о существовании обратной функции на интервале получаем, что на $(-\infty;\ +\infty)$ существует функция, обратная данной функции, которую обозначим $\boldsymbol{x = \operatorname{arcctg} y}$. При этом функция $x = \operatorname{arcctg} y$ непрерывна и строго убывает на $(-\infty;\ +\infty)$.

Перейдем к привычному обозначению аргумента и запишем полученную функцию в виде $\boldsymbol{y = \operatorname{arcctg} x}$. Эта функция обладает свойствами:

1) функция определена на $(-\infty;\ +\infty)$;
2) функция непрерывна на $(-\infty;\ +\infty)$;
3) функция строго убывает на $(-\infty;\ +\infty)$;
4) множество значений $Y = (0;\ \pi)$;
5) график функции $y = \operatorname{arcctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{ctg} x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 6.10);
6) $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0$ для любого $x_0 \in (-\infty;\ +\infty)$;
7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$.

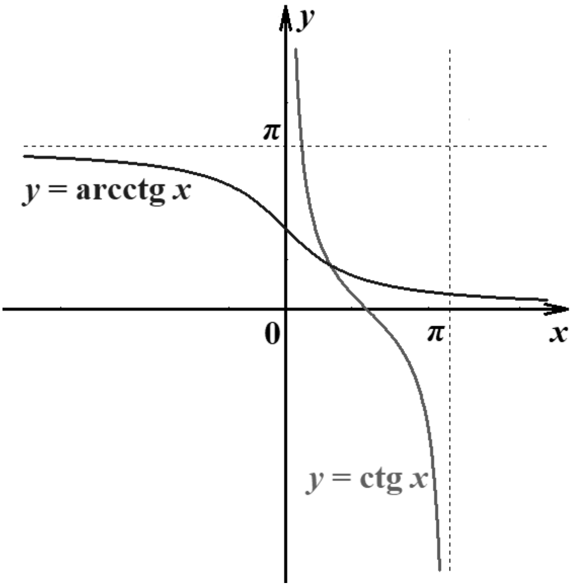

Рис. 6.10. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

$$\boldsymbol{y = \log_a x}$$

Для введения логарифмической функции найдем множество непрерывности показательной функции $y = a^x$. Покажем, что это множество $X = (-\infty;\ +\infty)$. Для этого докажем непрерывность этой функции в каждой точке $x_0 \in (-\infty;\ +\infty)$.

При рассмотрении темы предел функции было доказано, что $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 = a^0$. Это означает, что функция $y = a^x$ непрерывна в точке $x = 0$. Рассмотрим точку $x_0 \neq 0$.

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} (a^{x_0} \cdot a^{x-x_0}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \lim\limits_{x\to x_0} a^{x_0} = a^{x_0} = \mathrm{const}, \\ \lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} = [t = x - x_0 \to 0] = \lim\limits_{t\to 0} a^t = 1 \end{bmatrix} = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0},$$

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ для любого $x_0 \in (-\infty;\ +\infty)$. Следовательно, функция $y = a^x$ непрерывна на $X = (-\infty;\ +\infty)$.

Рассмотрим функцию $\boldsymbol{y = a^x}$, $\boldsymbol{a > 1}$, на множестве $X = (-\infty;\ +\infty)$. На этом интервале функция непрерывна и строго возрастает. Тогда, учитывая, что $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty$, по теореме 6.11 о существовании обратной функции на интервале получаем, что на $(0;\ +\infty)$ существует функция, обратная данной функции, которую обозначим $\boldsymbol{x = \log_a y}$. При этом функция $x = \log_a y$ непрерывна и строго возрастает на $(0;\ +\infty)$.

Перейдем к привычному обозначению аргумента и запишем полученную функцию в виде $\boldsymbol{y = \log_a x}$. Эта функция обладает свойствами:

1) функция определена на $(0;\ +\infty)$;
2) функция непрерывна на $(0;\ +\infty)$;
3) функция строго возрастает на $(0;\ +\infty)$;
4) множество значений $Y = (-\infty;\ +\infty)$;

5) график функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 6.11);
6) $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$ для любого $x_0 \in (0;\ +\infty)$;
7) $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.

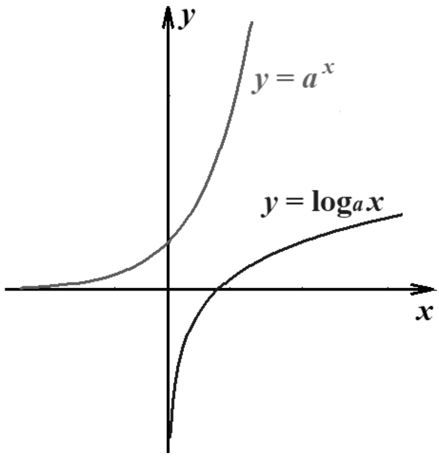

Рис. 6.11. График функции $y = \log_a x$, $a > 1$

Рассмотрим функцию $\boldsymbol{y = a^x}$, $\boldsymbol{0 < a < 1}$, на множестве $X = (-\infty;\ +\infty)$. На этом интервале функция непрерывна и строго убывает. Тогда, учитывая, что $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, по теореме 6.11 о существовании обратной функции на интервале получаем, что на $(0;\ +\infty)$ существует функция, обратная данной функции, которую обозначим $\boldsymbol{x = \log_a y}$. При этом функция $x = \log_a y$ непрерывна и строго убывает на $(0;\ +\infty)$.

Перейдем к привычному обозначению аргумента и запишем полученную функцию в виде $\boldsymbol{y = \log_a x}$. Эта функция обладает свойствами:
1) функция определена на $(0;\ +\infty)$;
2) функция непрерывна на $(0;\ +\infty)$;
3) функция строго убывает на $(0;\ +\infty)$;
4) множество значений $Y = (-\infty;\ +\infty)$;

5) график функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 6.12);

6) $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$ для любого $x_0 \in (0;\ +\infty)$;

7) $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.

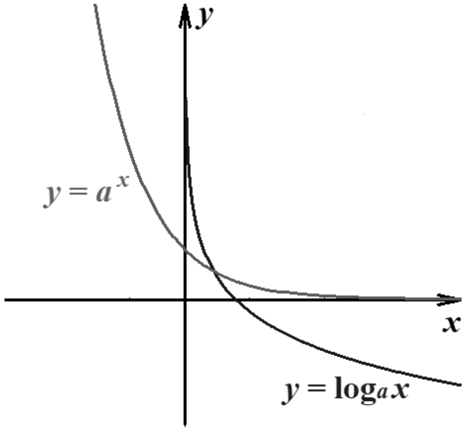

Рис. 6.12. График функции $y = \log_a x$, $0 < a < 1$

Литература

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. для вузов / Г.Н. Берман – СПб.: Лань, 2010. – 432 с.

2. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике: учеб. для вузов / Л.А. Кузнецов – СПб.: Лань, 2013. – 257 с.

3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. для вузов / Н.С. Пискунов – М.: Интеграл–Пресс, 2012. – 560 с.

4. Петрушко, И.М. Курс высшей математики. Лекции и практикум: учеб. для вузов / И.М. Петрушко – СПб.: Лань, 2010. – 608 с.

5. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. Часть 1 / Г.М. Фихтенгольц – СПб.: Лань, 2023. — 444 с.

Учебное издание

Барова Евгения Анатольевна
Пчелкина Юлия Жиганшевна

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 26.04.2024. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 11,0.
Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ . Арт. – 1 (Р1УМП)/2024.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.