ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.В. ДОРОШИН, М.М. КРИКУНОВ

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

САМАРА 2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.В. ДОРОШИН, М.М. КРИКУНОВ

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование, 24.04.02 Системы управления движением и навигация

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

УДК 629.78(075)
ББК 39.6я7
Д696

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Ю. М. З а б о л о т н о в,
канд. техн. наук М. В. Б о р и с о в

Дорошин, Антон Владимиович

Д696 Введение в динамику движения космического аппарата переменного состава: учебное пособие / *А.В. Дорошин, М.М. Крикунов.* — Самара: Издательство Самарского университета, 2022. — 109 с.

ISBN 978-5-7883-1804-2

Рассматриваются вопросы динамики движения космических аппаратов переменной массы, изложены основные аспекты углового и траекторного движения на активных участках траекторий.

Пособие предназначено для научно-методического сопровождения курсов «Динамика движения космических аппаратов переменного состава», «Задачи и методы классической механики», читаемых обучающимся Самарского университета по направлениям подготовки 24.04.02 Системы управления движением и навигация, 01.04.03 Механика и математическое моделирование соответственно, и может быть использовано при выполнении выпускных работ магистров соответствующих специальностей.

Разработано на кафедре динамики полёта и систем управления Самарского университета.

УДК 629.78(075)
ББК 39.6я7

ISBN 978-5-7883-1804-2

Содержание

Введение

Современные тенденции развития ракетно-космической техники предполагают использование технических устройств, сочетающих в себе многостепенные исполняющие механизмы, двигательные установки и управляющие элементы. Для моделирования движения технические объекты и устройства могут быть представлены разнообразными системами твердых тел постоянного и переменного состава (массы) со взаимосвязями.

Одним из распространенных видов аппаратов являются КА с двойным вращением, выполненные по схеме соосных тел, где одно из тел представляет собой основное тело-корпус аппарата, а второе тело — вращающийся ротор-стабилизатор.

В пособии рассматриваются вопросы, связанные с моделированием пространственного (углового) движения соосного КА переменного состава, включая динамические и инерционно-массовые модели КА с реактивными двигателями твердого топлива. Теоретическая часть, изложенная в первой главе, основана на классических работах [1, 6, 8, 9, 12].

Изложенные математические модели могут применяться для описания случаев движения КА переменной массы, как порождающие опорные модели для анализа движения при наличии разнообразных внешних возмущений, асимметрии в системе и эксцентриситетов тяги.

Глава 1

Основные теоремы динамики тела переменной массы

1.1. Введение и постановка задачи

Построение общей теории движения тел переменной массы в настоящем пособии будем осуществлять на основе классического труда Космодемьянского А.А. [6]. Это построение можно выполнить при помощи основных теорем механики: теоремы об изменении кинетического момента и теоремы об изменении кинетический энергии. Такой путь изучения движения тел переменной массы является наиболее простым и естественным. К формулировкам основных теорем механики для тел, масса которых изменяется с течением времени, можно идти различными путями. Мы будем следовать методу, широко применяемому в механике тел постоянной массы, рассматривая тело переменной массы как совокупность точек переменной массы, движение которых определяется уравнением Мещерского. Зная уравнения движения точки переменной массы и рассматривая тело как совокупность точек, можно получить простые формулы, выражающие основные теоремы динамики тела переменной массы.

Ограничимся в этой главе рассмотрением таких тел переменной массы, для которых излучение (отбрасывание) частиц происходит с некоторой части поверхности тела, причем частицы, не имеющие относительной скорости по отношению к системе осей координат, связанной с телом, считаются принадлежащими телу, а частицы, имеющие относительную скорость, телу не принадлежат и никакого влияния на его движение не оказывают. Реактивные силы и моменты принимаются во всем дальнейшем как результат контактного взаимодействия отбрасываемых частиц и тела в момент их отделения от основного тела. Основные кинетические величины: количество движения $\vec{Q}$, кинетический момент $\vec{K}$ и кинетическую энергию T — будем определять по формулам динамики системы точек постоянной массы, распространяя суммирование только на те точки тел, которые не имеют относительной скорости. Предположение о том, что взаимодействие отделяющихся частиц с основным телом происходит только в момент отделения (приобретение какой либо частицей относительной скорости эквивалентно приложению к основному телу местной импульсивной силы), позволяет получить закономерности, не зависящие от процесса излучения частиц, предшествующего моменту отделения, т.е. не зависящие от «истории» движения струи отброшенных частиц до рассматриваемого момента времени t. В рамках принимаемой гипотезы частицы струи воздействуют на тело по поверхности контакта, отделяющей в данный момент частицы струи от частиц основного тела. Если массы частиц, принадлежащих телу в данный момент времени, т.е. не имеющих относительных скоростей по отношению к основному телу переменной массы, движение которого мы изучаем, обозначить через m_ν, а их скорости относительно некоторой неподвижной системы через v_ν, то по определению основные кинетические величины можно записать в виде:

$$\vec{Q} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{v}_\nu, \tag{1.1}$$

$$\vec{K} = \sum_{\nu=1}^{n} (\vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu), \tag{1.2}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{v}_\nu^2. \tag{1.3}$$

Радиус-вектор центра масс тела будем определять по формуле:

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{v}_\nu}{M}, \tag{1.4}$$

где M — масса тела в рассматриваемый момент времени.

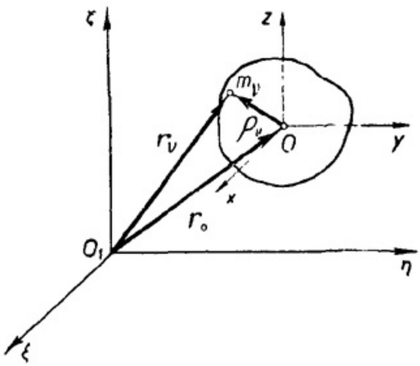

Рис. 1.1.

Так как в процессе излучения (отбрасывания) частиц положение центра масс остающихся частицы тела изменяется, то для всех дальнейших рассуждений удобно выбрать систему осей координат, связанную с движущимся телом, и поместить начало этих осей в некоторой точке этого тела. Пусть (рис. 1.1) радиус-вектор какой-либо точки относительно неподвижной системы $O_1\xi\eta\zeta$ равен $\vec{r}_\nu$, а радиус-вектор той же точки относительно подвижной системы $Oxyz$, неизменно связанной с основным телом, равен $\vec{\rho}_\nu$. Тогда, если положение подвижного начала координат определяется радиус-вектором $\vec{r}_0$, мы будем иметь очевидное геометрическое соотношение:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_\nu. \tag{1.5}$$

Дифференцируя равенство (1.5) один раз по времени, будем иметь:

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu)\,. \tag{1.6}$$

Вектор $\vec{v}_0$ характеризует движение основной точки (начала подвижной системы осей координат); векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu$ даёт составляющую скорости точки m_ν, обусловленную вращением. Дифференцируя (1.6) по времени получим:

$$\vec{w}_\nu = \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_\nu + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu)\,, \tag{1.7}$$

где $\vec{\varepsilon}$ — вектор мгновенного углового ускорения тела (системы $Oxyz$). Хорошо известно, что

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu) = -\omega^2 \vec{h}_\nu,$$

где h_ν — расстояние от линии действия вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ до рассматриваемой точки m_ν. Таким образом,

$$\vec{w}_\nu = \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_\nu - \omega^2 \vec{h}_\nu. \tag{1.8}$$

Если абсолютную скорость отбрасываемой частицы обозначить через $\vec{u}_\nu$, то очевидно, что

$$\vec{u}_\nu = \vec{v}_\nu + \vec{V}_{r\nu},$$

где $\vec{V}_{r\nu}$ — относительная скорость отбрасываемой частицы. Скорость точки тела (подвижного пространства), с которой в данный момент совпадает центр масс, равна:

$$\vec{v}_c^{(e)} = \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_c)\,.$$

Если скорость центра масс относительно системы $Oxyz$ обозначить через $\vec{q}_c$, то абсолютная скорость центра масс будет равна:

$$\vec{v}_c^{(e)} = \vec{v}_c - \vec{q}_c.$$

Для тел постоянной массы $\vec{q}_c = 0$. Относительное смещение центра масс для тел переменной массы обусловлено тем обстоятельством, что вследствие процесса отбрасывания частиц в конфигурации остающихся масс положение центра масс относительно системы $Oxyz$ изменяется. В дальнейшем мы будем называть $\vec{v}_c^{(e)}$ переносной скоростью центра масс, а $\vec{q}_c$ — относительной скоростью центра масс.

1.2. Теорема об изменении количества движения

Укажем прежде всего способ вычисления вектора количества движения для тела переменной массы. По определению имеем, что

$$\vec{Q} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{v}_\nu.$$

Так как

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu),$$

то

$$\vec{Q} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left[\vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu)\right] = \vec{v}_0 \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu + \vec{\omega} \times \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{\rho}_\nu.$$

Из основных определений следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu = M,$$

где M — масса тела в данный момент времени, а

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{\rho}_\nu = M \vec{\rho}_c,$$

где $\vec{\rho}_c$ — радиус-вектор центра масс тела в данный момент времени относительно системы осей $Oxyz$.

Таким образом, окончательно имеем:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times M\vec{\rho}_c = M\left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_c\right) = M\vec{v}_c^{(e)}. \tag{1.9}$$

Следовательно, *количество движения тела переменной массы равняется массе тела в данный момент времени, умноженной на скорость той точки подвижного пространства, с которой в данный момент совпадает центр масс тела.*

Так как

$$\vec{v}_c^{(e)} = \vec{v}_c - \vec{q}_c,$$

то

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c - M\vec{q}_c, \tag{1.10}$$

т.е. *количество движения тела переменной массы равно массе тела в данный момент времени, умноженной на абсолютную скорость центра масс минус произведение массы тела на относительную скорость центра масс.*

Если, например, излучающее тело закреплено, то $\vec{Q} = 0$ и, следовательно, $\vec{v}_c = \vec{q}_c$, т.е. в этом частном случае абсолютная скорость центра масс равна его относительной скорости.

Для того чтобы получить теорему об изменении количества движения, напишем уравнения Мещерского для каждой точки тела. Будем иметь тогда:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1\right) = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_1^{(i)} + \dfrac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left(m_2\vec{v}_2\right) = \vec{F}_2^{(e)} + \vec{F}_2^{(i)} + \dfrac{dm_2}{dt}\vec{u}_2 \\ \dotfill \\ \dotfill \\ \dfrac{d}{dt}\left(m_n\vec{v}_n\right) = \vec{F}_n^{(e)} + \vec{F}_n^{(i)} + \dfrac{dm_n}{dt}\vec{u}_n \end{array}\right\}. \tag{1.11}$$

В уравнениях (1.11) $\vec{F}_\nu^{(i)}$ есть равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к точке m_ν, $\vec{F}_\nu^{(e)}$ — равнодействующая всех внешних сил, приложенных к той же точке, $\vec{u}_\nu$ — абсолютная скорость частиц, излучаемых точкой m_ν. Складывая уравнения (1.11) получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\vec{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu^{(i)} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{dm_\nu}{dt}\vec{u}_\nu. \tag{1.12}$$

Мы знаем, что на основании третьего закона Ньютона

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_{\nu}^{(i)} = 0,$$

и, следовательно, (1.12) можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_{\nu}}{dt}\vec{u}_{\nu}, \tag{1.13}$$

где $\vec{R}^{(e)}$ — результирующая всех внешних сил.

Соотношение (1.13) показывает нам, что *производная по времени от количества движения тела переменной массы равна результирующей всех действующих на тело внешних сил плюс абсолютное количество движения частиц, отбрасываемых с поверхности тела в единицу времени.*

Соотношению (1.13) можно придать другую форму, если вспомнить, что

$$\vec{u}_{\nu} = \vec{v}_{\nu} + \vec{V}_{r\nu}$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_{\nu}}{dt}\vec{V}_{r\nu} = \vec{\Phi}_{r},$$

где $\vec{\Phi}_{r}$ есть результирующая всех реактивных сил. Заменяя $\vec{u}_{\nu}$ в (1.13) суммой $\vec{v}_{\nu} + \vec{V}_{r\nu}$ получим:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(e)} + \vec{\Phi}_{r} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_{\nu}}{dt}\vec{v}_{\nu}. \tag{1.14}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu = \vec{\Pi}_k$$

есть количество движения отбрасываемых в единицу времени частиц в их переносном движении. Таким образом, из (1.14) следует, *что производная по времени от количества движения тела переменной массы равна результирующей всех действующих на тело внешних и реактивных сил плюс количество движения частиц, отбрасываемых телом в единицу времени, в их переносном движении.*

Если абсолютная скорость излучаемых частиц равна нулю, то из соотношения (1.13) будем иметь:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(e)}, \tag{1.15}$$

т.е. в этом частном случае теорема об изменении количества движения тела переменной массы формулируется так же, как и для тела постоянной массы.

1.3. Теорема о движении центра масс

Напишем уравнения Мещерского для каждой точки тела переменной массы. Будем иметь:

$$\begin{gathered}
m_1 \vec{w}_1 = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_1^{(i)} + \vec{\Phi}_{1r}, \\
m_2 \vec{w}_2 = \vec{F}_2^{(e)} + \vec{F}_2^{(i)} + \vec{\Phi}_{2r}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
m_n \vec{w}_n = \vec{F}_n^{(e)} + \vec{F}_n^{(i)} + \vec{\Phi}_{nr}.
\end{gathered}$$

Сложим написанные уравнения почленно. Зная, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_{\nu}^{(e)} = \vec{R}^{(e)}, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_{\nu}^{(i)} = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \vec{\Phi}_{\nu r} = \vec{\Phi}_{r},$$

где $\vec{R}^{(e)}$ — результирующая всех внешних действующих на тело сил, а $\vec{\Phi}_r$ — результирующая реактивных сил, мы получим:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{R}^{(e)} + \vec{\Phi}_r. \tag{1.16}$$

В уравнении (1.16) $\vec{w}_\nu$ обозначает ускорение точки m_ν тела переменной массы в данный момент времени. Как известно из (1.8),

$$\vec{w}_\nu = \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_\nu - \omega^2 \vec{h}_\nu$$

и, следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{w}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(\vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_\nu - \omega^2 \vec{h}_\nu\right) =$$
$$= \vec{w}_0 \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu + \vec{\varepsilon} \times \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{\rho}_\nu - \omega^2 \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{h}_\nu.$$

Так как по основным определениям

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu = M, \quad \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{\rho}_\nu = M \vec{\rho}_c, \quad \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{h}_\nu = M \vec{h}_c,$$

то

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{w}_\nu = M \left(\vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_c - \omega^2 \vec{h}_c\right).$$

Ускорение

$$\vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_c - \omega^2 \vec{h}_c = \vec{w}_c^{(e)}$$

есть ускорение той точки подвижного пространства, с которой в данный момент времени совпадает центр масс рассматриваемого тела переменной массы. Таким образом:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{w}_\nu = M \vec{w}_c^{(e)}.$$

Подставляя вычисленное значение суммы в уравнение (1.16), можно написать его в виде:

$$M \vec{w}_c^{(e)} = \vec{R}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(r)}. \tag{1.17}$$

Уравнение (1.17) выражает закон движения центра масс для тела переменной массы, и мы можем сформулировать его в следующем виде: *произведение массы тела на ускорение той точки подвижного пространства, с которой в данный момент времени совпадает центр масс тела, равно результирующей всех внешний и реактивных сил, действующих на тело переменной массы. Или, иначе говоря, произведение массы тела на переносное ускорение его центра масс равно результирующей всех внешних и реактивных сил, действующих на тело переменной массы.*

Уравнению (1.17), которое характеризует переносное движение центра масс, можно придать более удобную форму*.

*В уравнении (1.17) $\vec{w}_c^{(e)}$ есть ускорение той точки подвижного пространства, с которой совпадает центр масс тела в данный момент времени. При отбрасывании частиц центр масс меняет своё положение относительно тех точек, которые принадлежат телу в течение всего движения.

Сосредоточим своё внимание на изучении движения какой-либо характерной точки тела, например на изучении движения подвижного начала координат (точки). Тогда, зная связь $\vec{w}_c^{(e)}$ с $\vec{w}_0$, мы получим из (1.17):

$$M\vec{w}_0 = \vec{R}^{(e)} + \vec{\Phi}_r - \vec{\varepsilon} \times M\vec{\rho}_c + M\omega^2\vec{h}_c. \tag{1.18}$$

Если тело движется поступательно, то $\vec{\omega} = 0$ и $\vec{\varepsilon} = 0$ и соотношение (1.18) дает следующее простое уравнение:

$$M\vec{w}_0 = \vec{R}^{(e)} + \vec{\Phi}_r \tag{1.19}$$

т.е. *при поступательном движении тела переменной массы произведение массы тела на ускорение какой-либо точки, принадлежащей телу в течение всего процесса движения, равно результирующей всех действующих на тело внешних и реактивных сил.*

Если в процессе отбрасывания частиц положение центра масс тела (центра масс остающихся частиц) не изменяется, то переносное ускорение центра масс равно его абсолютному ускорению по отношению к выбранной неподвижной системе осей. В этом частном случае уравнение (1.17) переходит в следующее:

$$M\vec{w}_c = \vec{R}^{(e)} + \vec{\Phi}_r. \tag{1.20}$$

Таким образом, если в процессе изменения массы тела центр масс остающихся частиц не имеет движения относительно системы подвижных осей $Oxyz$, то уравнение движения центра масс тела имеет такой же вид, что и уравнение движения точки переменной массы. В этом частном случае полностью имеет место формальная аналогия между соотношениями классической механики твердого тела постоянной массы и соотношениями механики тела переменной массы. В общем случае вследствие процесса отбрасывания частиц центр масс имеет движения относительно системы осей, неизменно связанной с телом переменной массы (относительно системы $Oxyz$). Это движение не обусловлено действующими внешними или реактивными силами, а целиком определяется геометрической конфигурацией частиц, которые мы считаем принадлежащими телу в данный момент времени. Чтобы пояснить это утверждение, рассмотрим один простейший случай.

Пусть тело, имеющее форму цилиндра, лежит на горизонтальной плоскости (рис. 1.2). Пусть отделение частиц происходит непрерывно бесконечно тонкими круглыми пластинками с относительной скоростью, равной нулю. Пусть перемещение границы aa_1, отделяющей частицы, принадлежащие телу в данный момент времени, от частиц, уже «отброшенных», происходит со скоростью v. Легко показать, что скорость центра масс относительно системы $Oxyz$ будет в этом частном случае равна $\dfrac{v}{2}$; однако эта скорость зависит только от того, какие частицы нашей механической системы точек мы считаем в данный момент времени принадлежащими телу переменной массы и какие частицы считаем уже отделившимися.

Относительное смещение центра масс, обусловленное отбрасыванием частиц, является принципиально новым процессом в задачах механики тела переменной массы. Этот новый специфический процесс движения обусловлен гипотезой близкодействия (контактного взаимодействия), которая принимается в первой главе [6].

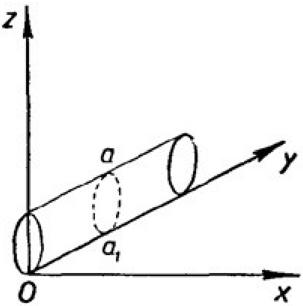

Рис. 1.2.

Уравнение движения центра масс в общем случае мы получим, если примем во внимание, что:

$$\vec{w}_c^{(a)} = \vec{w}_c^{(e)} + \vec{w}_c^{(r)} + 2\vec{\omega} \times \vec{q}_c,$$

где $\vec{w}_c^{(a)}$ — абсолютное ускорение центра масс, а $\vec{w}_c^{(r)}$ — относительное ускорение центра масс, откуда имеем:

$$\vec{w}_c^{(e)} = \vec{w}_c^{(a)} - \vec{w}_c^{(r)} - 2\left(\vec{\omega} \times \vec{q}_c\right).$$

Подставляя значение переносного ускорения центра масс в формулу (1.17), будем иметь:

$$M\vec{w}_c^{(a)} = \vec{R}^{(e)} + \vec{\Phi}_r + M\vec{w}_c^{(r)} + 2M\left(\vec{\omega} \times \vec{q}_c\right). \tag{1.21}$$

Таким образом, *центра масс тела движется как точка, масса которой равна массе всего тела в данный момент времени, к которой приложены результирующая всех внешних действующих на тело сил, результирующая всех реактивных сил и силы, обусловленные относительным и кориолисовым ускорением центра масс.*

Если тело переменной массы движется поступательно, то $\vec{\omega} = 0$ и уравнение (1.21) принимает более простой вид:

$$M\vec{w}_c^{(a)} = \vec{R}^{(e)} + \vec{\Phi}_r + M\vec{w}_c^{(r)}. \tag{1.22}$$

В большинстве практических задач относительное ускорение и ускорение Кориолиса центра масс движущихся объектов малы по сравнению с абсолютным ускорением. В этих случаях целесообразно уравнение центра масс тела переменной массы писать так же, как и уравнение движения точки переменной массы.

1.4. Кинетический момент тела переменной массы

Укажем прежде всего способ вычисления кинетического момента тела относительно неподвижных осей координат и установим его связь с кинетическим моментом тела относительно подвижных осей, начало которых совпадает с точкой O и которые движутся параллельно осям неподвижной системы $O_1\xi\eta\zeta$ (рис. 1.3).

Определим кинетический момент тела переменной массы относительно системы $O_1\xi\eta\zeta$ (неподвижного центра O_1) как векторную сумму кинетических моментов точек, составляющих тело в данный момент времени, т.е.

$$\vec{K} = \sum_{\nu=1}^{n} (\vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu), \tag{1.23}$$

где $\vec{r}_\nu$ — радиус-вектор точки m_ν относительно неподвижной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$, а $\vec{v}_\nu$ — скорость той же точки.

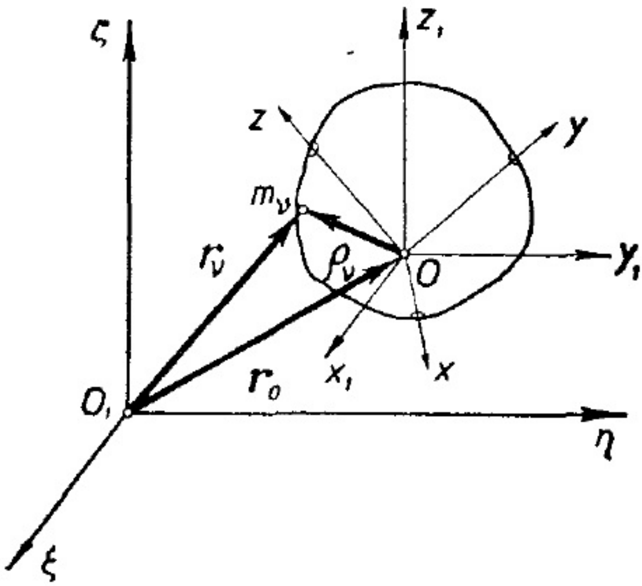

Рис. 1.3.

Для общности выводов будем предполагать, что начало подвижной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$ не совпадает с центром масс тела. Из треугольника O_1Om_ν (рис. 1.3) имеем:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_\nu.$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим:

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu.$$

Подставляя значения $\vec{r}_\nu$ и $\vec{v}_\nu$ в формулу (1.23), будем иметь:

$$\vec{K} = \sum_{\nu=1}^{n} (\vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} (\vec{r}_0 + \vec{\rho}_\nu) \times m_\nu \left[\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_0 \times m_\nu \vec{v}_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \vec{v}_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_0 \times m_\nu \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right) + \\ + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right).$$

Полагая, как и ранее, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{\rho}_\nu = M\vec{\rho}_c \qquad \text{и} \qquad \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu = M,$$

мы можем преобразовать полученные суммы к виду:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_0 \times m_\nu \vec{v}_0 = \vec{r}_0 \times M\vec{v}_0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \vec{v}_0 = \vec{\rho}_c \times M\vec{v}_0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_0 \times m_\nu \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right) = \vec{r}_0 \times \vec{\omega} \times M\vec{\rho}_c,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right) = \vec{K}_0,$$

где $\vec{K}_0$ есть кинетический момент тела переменной массы относительно оси точки системы $Ox_1y_1z_1$. Таким образом, кинетический момент тела относительно точки O_1 неподвижной системы $O_1\xi\eta\zeta$ можно представить в виде:

$$\vec{K} = \vec{K}_0 + \vec{r}_0 \times \vec{\omega} \times M\vec{\rho}_c + \vec{r}_0 \times M\vec{v}_0 + \vec{\rho}_c \times M\vec{v}_0. \tag{1.24}$$

Формулу (1.24) для дальнейшего запишем в несколько иной форме. Мы знаем, что переносная скорость центра масс равна:

$$\vec{v}_c^{(e)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_c,$$

а, следовательно,

$$\vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times M\vec{\rho}_c) + \vec{r}_0 \times M\vec{v}_0 = \vec{r}_0 \times M\left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_c\right) = \vec{r}_0 \times M\vec{v}_c^{(e)},$$

$$\vec{\rho}_c \times M\vec{v}_0 = \vec{\rho}_c \times \left[\vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_c) - (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_c)\right] M =$$
$$= \vec{\rho}_c \times M\vec{v}_c^{(e)} - \vec{\rho}_c \times M\left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_c\right).$$

Легко видеть, что

$$\vec{r}_0 \times M\vec{v}_c^{(e)} + \vec{\rho}_c \times M\vec{v}_c^{(e)} - \vec{\rho}_c \times M\left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_c\right) =$$
$$= \vec{r}_c \times M\vec{v}_c^{(e)} - \vec{\rho}_c \times M\left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_c\right).$$

Таким образом,

$$\vec{K} = \vec{K}_0 + \vec{r}_c \times M\vec{v}_c^{(e)} - \vec{\rho}_c \times M\left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_c\right). \tag{1.25}$$

Формула (1.25) показывает, что кинетический момент тела переменной массы относительно неподвижных осей координат равен кинетическому моменту тела в его движении относительно поступательно перемещающихся осей $Ox_1y_1z_1$ плюс кинетический момент центра масс в его переносном движении (в предположении, что в нем сосредоточена масса всего тела), минус кинетический момент центра масс в его переносном движении относительно системы $Ox_1y_1z_1$.

В частном случае, когда начало подвижной системы совпадает с центром масс, $\vec{\rho}_c = 0$ и

$$\vec{K} = \vec{K}_0 + \vec{r}_c \times M\vec{v}_c^{(e)}, \tag{1.26}$$

т. е. *если начало подвижной системы координат совпадает с центром масс тела, то кинетический момент тела относительно неподвижного центра равен кинетическому моменту центра масс тела плюс кинетический момент центра масс в его переносном движении при условии, что в нем сосредоточена масса всего тела.*

В частном случае, когда тело переменной массы вращается около неподвижной оси Oz_1 с угловой скоростью ω, легко найти проекцию вектора кинетического момента $\vec{K}$ на эту ось.

Из формулы (1.23) имеем:

$$\vec{K}_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu \right).$$

Полагая $x_\nu = h_\nu \cos\varphi$, $y_\nu = h_\nu \sin\varphi$, где h_ν — расстояние точки m_ν от оси Oz_1, получим:

$$x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu = h_\nu^2 \omega$$

и

$$\vec{K}_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu h_\nu^2 \omega = \omega \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu h_\nu^2 = I_{zz}\omega, \tag{1.27}$$

где I_{zz} есть момент инерции тела в данный момент времени относительно оси Oz_1.

Если твердое тело переменной массы движется так, что точка O тела остается во все время движения неподвижной, то, следуя методу Эйлера, можно найти проекции вектора кинетического момента на подвижные оси Ox, Oy, Oz, неизменно связанные с твердым телом.

Так как при движении твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, для вычисления распределения скоростей можно пользоваться формулой Эйлера, согласно которой:

$$\vec{v}_\nu = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu,$$

то выражение для вектора кинетического момента (1.23) можно записать в виде:

$$\vec{K}_0 = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right).$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получим:

$$\vec{K}_0 = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \omega \vec{\rho}_\nu^{\,2} - \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{\rho}_\nu \left(\vec{\omega} \vec{\rho}_\nu\right).$$

Обозначая проекции вектора мгновенной угловой скорости на подвижные оси $Oxyz$ через p, q, r и имея в виду, что осевые и центробежные моменты инерции тела определяются формулами:

$$I_{xx} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(y_\nu^2 + z_\nu^2\right), \quad I_{yy} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(z_\nu^2 + x_\nu^2\right),$$
$$I_{zz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(x_\nu^2 + y_\nu^2\right),$$
$$I_{yz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu z_\nu, \quad I_{zx} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu x_\nu, \quad I_{xy} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu y_\nu,$$

можно написать выражения для проекций вектора кинетического момента на оси Ox,Oy, Oz в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{llll} K_{Ox} = & I_{xx}p & -I_{xy}q & -I_{xz}r \\ K_{Oy} = & -I_{xy}p & +I_{yy}q & -I_{yz}r \\ K_{Oz} = & -I_{xz}p & -I_{yz}q & +I_{zz}r \end{array}\right\}. \tag{1.28}$$

В формулах (1.28) осевые и центробежные моменты в общем случае являются функциями времени.

1.5. Теорема об изменении кинетического момента

Напишем уравнение движения какой-либо точки массы m_ν в следующей форме

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \vec{v}_\nu\right) = \vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)} + \frac{dm_\nu}{dt}\vec{u}_\nu, \tag{1.29}$$

где $\vec{u}_\nu$ — абсолютная скорость частиц, отбрасываемых точкой m_ν, $\vec{F}_\nu^{(e)}$ — равнодействующая всех внешних сил, приложенных к точке m_ν, $\vec{F}_\nu^{(i)}$ — равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к этой же точке. Умножим уравнение (1.29) векторно слева на $\vec{r}_\nu$ и просуммируем по индексу ν от 1 до n, где n — число точек тела. Будем иметь:

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \frac{d}{dt}\left(m_\nu \vec{v}_\nu\right) = \\ &\qquad = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^{(i)} + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\vec{u}_\nu. \end{aligned} \tag{1.30}$$

На основании третьего закона Ньютона

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^{(i)} = 0.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \frac{d}{dt}\left(m_\nu \vec{v}_\nu\right) = \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu\right),$$

а

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^{(e)}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{\mathrm{O}_1} \vec{F}_\nu^{(e)} = \vec{\mathfrak{M}}^{(e)}$$

представляет собой результирующий момент всех внешних действующих на тело сил. Таким образом, соотношение (1.30) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{mom}_{\mathrm{O}_1} \vec{F}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\vec{u}_\nu. \tag{1.31}$$

Соотношение (1.31) выражает теорему об изменении кинетического момента тела в его движении относительно неподвижных осей. Эту теорему можно сформулировать так: *производная по времени от кинетического момента тела переменной массы равна сумме моментов всех внешних действующих на тело сил плюс сумма моментов абсолютных количеств движения частиц, отбрасываемых телом в единицу времени.*

Соотношению (1.31) можно придать другой вид, если вспомнить, что

$$\vec{u}_\nu = \vec{v}_\nu + \vec{V}_{r\nu}$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\vec{V}_{r\nu} = \vec{\mathfrak{M}}^{(r)}$$

есть результирующий момент реактивных сил относительно неподвижного начала координат. Очевидно, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\vec{u}_\nu = \overrightarrow{\mathfrak{M}}^{(r)} + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\vec{v}_\nu,$$

и, следовательно, (1.31) можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \overrightarrow{\mathfrak{M}}^{(e)} + \overrightarrow{\mathfrak{M}}^{(r)} + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\vec{v}_\nu, \tag{1.32}$$

т.е. *производная по времени от кинетического момента тела переменной массы равна сумме моментов всех внешних и реактивных действующих на тело сил плюс сумма моментов количеств движения частиц, отброшенных в единицу времени, в их переносном движении.*

Если абсолютные скорости отбрасываемых частиц равны нулю, то (1.31) принимает наиболее простую форму:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \overrightarrow{\mathfrak{M}}^{(e)}. \tag{1.33}$$

Таким образом, если абсолютные скорости отбрасываемых телом частиц равны нулю, то производная по времени от кинетического момента тела равняется сумме моментов внешних действующих сил. Следовательно, при выполнении гипотезы $\vec{u}_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ теорема об изменении кинетического момента формулируется так же, как и для тела постоянной массы.

В качестве примера применения уравнения (1.32) рассмотрим вращательное движение тела около неподвижной оси Oz_1 с угловой скоростью ω. В этом частном случае $\vec{v}_\nu = \omega \times \vec{\rho}_\nu$.

Проектируя обе части уравнения (1.32) на ось Oz_1, получим:

$$\frac{dK_z}{dt} = \mathfrak{M}_z^{(e)} + \mathfrak{M}_z^{(r)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt}\omega h_\nu^2, \qquad (1.34)$$

где (рис. 1.4) h_ν — расстояние точки массы m_ν от оси вращения.

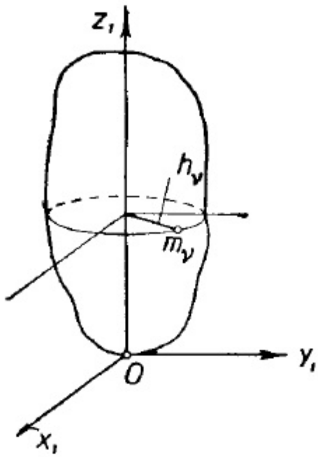

Рис. 1.4.

Так как по формуле (1.27):

$$\vec{K}_z = I_{zz}\omega,$$

а

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt}\omega h_\nu^2 = \omega\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu h_\nu^2 = \omega\frac{dI_{zz}}{dt},$$

то соотношение (1.34) можно написать в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(I_{zz}\omega\right) = \mathfrak{M}_z^{(e)} + \mathfrak{M}_z^{(r)} + \omega\frac{dI_{zz}}{dt},$$

или

$$I_{zz}\frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}_z^{(e)} + \mathfrak{M}_z^{(r)}. \tag{1.35}$$

Таким образом, *произведение момента инерции тела, вращающегося около неподвижной оси, на его угловое ускорение равно сумме моментов всех действующих на тело внешних и реактивных сил относительно оси вращения.*

Если относительная скорость отбрасываемых телом частиц равна нулю (частицы отделяются от вращающегося тела без ударов), то $\mathfrak{M}_z^{(r)} = 0$ и уравнение (1.35) примет вид:

$$I_{zz}\frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}_z^{(e)}. \tag{1.36}$$

Таким образом, важные для техники случаи вращения валов, веретен и т.п., когда отделяющиеся от тела частицы имеют скорости соответствующих точек тела, характеризуются уравнением вращения (1.36), которое формально ничем не отличается от хорошо известного уравнения вращения тела постоянной массы. Следует только иметь в виду, что $I_{zz} = I_{zz}(t)$.

Если абсолютная скорость излучаемых частиц равна нулю, то из уравнения (1.33) в проекции на ось Oz_1 получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(I_{zz}\omega\right) = \mathfrak{M}_z^{(e)}. \tag{1.37}$$

Таким образом, если выполняется гипотеза $\vec{u}_\nu = 0$, то в уравнение вращения момент инерции тела входит под знаком производной.

В целом ряде задач динамики механизмов и машин приходится иметь дело с уравнением вращения, в котором момент инерции является величиной переменной, хотя механическая система представляет собой систему тел постоянной массы. Для составления уравнения вращения в этом случае выбирают у машины или механизма одно какое-либо ведущее звено и отмечают на нем центр приведения. Зная движущие силы и силы сопротивления, можно методами динамики привести их к выбранному центру приведения и найти результирующую приведенную силу и результирующий приведенный момент, равных разности момента движущих сил и момента сил сопротивления. Приводя к ведущему звену все массы звеньев, мы можем определить приведенный момент инерции механизма $I_{zz}^{\text{прив}}$. Для большого класса задач динамики механизмов и машин приведенный момент инерции $I_{zz}^{\text{прив}}$, который мы в дальнейшем будем обозначать просто I, является функцией угла поворота ведущего звена машины, т.е.

$$I = I\left(\varphi\right).$$

Для такого типа задач с переменным моментом инерции можно составить уравнение вращения при помощи уравнений Лагранжа в обобщенных координатах. Для механической системы точек с одной степенью свободы и постоянной массой уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi},$$

где T — приведенная кинетическая энергия ведущего звена, равная $\dfrac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$, а $Q_{\varphi} = \mathfrak{M}_z$ есть разность моментов движущих сил и сил сопротивления на звене приведения.

Заметив, что

$$\frac{d}{dt}\left(I\omega\right)=\frac{d}{d\varphi}\left(I\omega\right)\omega,$$

и подставляя T и Q_φ в уравнение Лагранжа, мы получим:

$$\omega^2\frac{dI}{d\varphi}+I\omega\frac{d\omega}{d\varphi}-\frac{1}{2}\omega^2\frac{dI}{d\varphi}=\mathfrak{M}_z,$$

или

$$I\frac{d\omega}{dt}+\frac{1}{2}\omega^2\frac{dI}{d\varphi}=\mathfrak{M}_z. \tag{1.38}$$

На основании теоремы об изменении кинетического момента в форме (1.38) можно получить динамические уравнения движения для тела переменной массы, имеющего одну неподвижную точку. Эти уравнения будут естественным обобщением уравнений Эйлера, хорошо известных в динамике твердого тела постоянной массы. Если твердое тело имеет одну закрепленную точку, то $\vec{v}_\nu=\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\nu$. Производная по времени относительно неподвижных осей, имеющих начало в неподвижной точке, связана с производной относительно осей $Oxyz$ простым соотношением. Для производной $\dfrac{d\vec{K}}{dt}$ будем иметь:

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\frac{d^*\vec{K}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{K}, \tag{1.39}$$

где $\dfrac{d^*}{dt}$ есть знак производной относительно подвижных осей.

Теорема об изменении кинетического момента относительно осей $Oxyz$ будет иметь вид:

$$\frac{d^*\vec{K}_0}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{K}_0=\overrightarrow{\mathfrak{M}}_0^{(e)}+\overrightarrow{\mathfrak{M}}_0^{(r)}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{dm_\nu}{dt}\vec{\rho}_\nu\times\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\nu\right), \tag{1.40}$$

где

$$\vec{K}_0 = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{\rho}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu) \, .$$

Обозначим проекции мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ на подвижные оси $Oxyz$ через p, q, r, а осевые и центробежные моменты инерции тела — через I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{yz}, I_{zx}, I_{xy}. Спроектируем (1.40) на подвижные оси, неизменно связанные с телом, тогда, приняв во внимание уравнения (1.28), получим:

$$\frac{d}{dt}\left[I_{xx}p - I_{xy}q - I_{xz}r\right] + (qK_{Oz} - rK_{Oy}) = \\ \mathfrak{M}_{Ox}^{(e)} + \mathfrak{M}_{Ox}^{(r)} + \left(p\frac{dI_{xx}}{dt} - q\frac{dI_{xy}}{dt} - r\frac{dI_{xz}}{dt}\right), \quad (1.41)$$

. . . .

. . . .

или

$$I_{xx}\frac{dp}{dt} - I_{xy}\frac{dq}{dt} - I_{xz}\frac{dr}{dt} + \\ + \left[q\left(-I_{xz}p - I_{yz}q + I_{zz}r\right) - r\left(-I_{xy}p + I_{yy}q - I_{yz}r\right)\right] = \\ = \mathfrak{M}_{Ox}^{(e)} + \mathfrak{M}_{Ox}^{(r)}. \quad (1.42)$$

. . . .

. . . .

Если в процессе отбрасывания частиц оси Ox, Oy, Oz остаются главными осями инерции, то из (1.42) мы получим динамические уравнения в очень простой (эйлеровской) форме:

$$
\left.\begin{aligned}
I_{xx}\frac{dp}{dt} + (I_{zz} - I_{yy})\,qr &= \mathfrak{M}^{(e)}_{Ox} + \mathfrak{M}^{(r)}_{Ox}\\
I_{yy}\frac{dq}{dt} + (I_{xx} - I_{zz})\,rp &= \mathfrak{M}^{(e)}_{Oy} + \mathfrak{M}^{(r)}_{Oy}\\
I_{zz}\frac{dr}{dt} + (I_{yy} - I_{xx})\,pq &= \mathfrak{M}^{(e)}_{Oz} + \mathfrak{M}^{(r)}_{Oz}
\end{aligned}\right\}. \tag{1.43}
$$

Таким образом, *если твердое тело переменной массы имеет одну закрепленную точку и оси $Oxyz$ все время движения остаются главными осями инерции тела, то движение этого тела будет описываться такими же дифференциальными уравнениями, как и для тела постоянной массы, только в правых частях динамических уравнений, кроме моментов внешних сил, нужно прибавить еще моменты сил реактивных. Осевые моменты инерции тела будут функциями времени.*

1.6. Теорема об изменении кинетического момента относительно поступательно движущихся осей

Рассмотрим теорему об изменении кинетического момента относительно подвижных осей, имеющих начало в произвольной точке тела O, причем направление осей Ox_1, Oy_1, Oz_1 выбрано так, что они коллинеарны осям основной, неподвижной системы $N\xi\eta\zeta$ (рис. 1.5).

В дальнейших преобразованиях будем пользоваться следующими соотношениями:

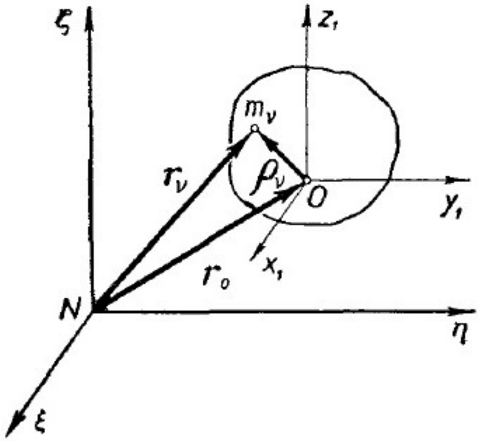

Рис. 1.5.

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_\nu,$$

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu,$$

$$\frac{d\vec{v}_c^{(e)}}{dt} = \vec{w}_c^{(e)} + \vec{\omega} \times \vec{q}_c,$$

$$\frac{d\vec{\rho}_c}{dt} = \vec{q}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_c,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu) = \vec{\omega} \times \left[M\vec{q}_c + \frac{dM}{dt}\vec{\rho}_c \right].$$

Как известно, кинетический момент тела переменной массы относительно неподвижных осей (неподвижного центра) имеет вид:

$$\vec{K} = \vec{K}_0 + \vec{r}_0 \times M\vec{v}_c^{(e)} + \vec{\rho}_c \times M\vec{v}_0. \qquad (1.44)$$

Для того чтобы получить теорему об изменении кинетического момента относительно поступательно движущихся осей, мы воспользуемся ранее полученной теоремой (1.32). Рассчитаем правую и левую части соотношения (1.32).

Дифференцируя (44) по времени, получим:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d\vec{K}_0}{dt} + \vec{v}_0 \times M\vec{v}_c^{(e)} + \vec{r}_0 \times \frac{dM}{dt}\vec{v}_c^{(e)} + \vec{r}_0 \times M\left(\vec{w}_c^{(e)} + \vec{\omega} \times \vec{q}_c\right) +$$
$$+ (\vec{q}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_c) \times M\vec{v}_0 + \vec{\rho}_c \times \frac{dM}{dt}\vec{v}_0 + \vec{\rho}_c \times M\frac{d\vec{v}_0}{dt} =$$
$$= \frac{d\vec{K}_0}{dt} + \vec{r}_0 \times \frac{dM}{dt}\vec{v}_c^{(e)} + \vec{r}_0 \times M\left(\vec{w}_c^{(e)} + \vec{\omega} \times \vec{q}_c\right) +$$
$$+ \vec{q}_c \times M\vec{v}_0 + \vec{\rho}_c \times \frac{dM}{dt}\vec{v}_0 + \vec{\rho}_c \times M\vec{w}_0. \quad (1.45)$$

Преобразуем теперь правую часть уравнения (1.32). Будем иметь:

$$\vec{\mathfrak{M}}^{(e)} = \vec{r}_0 \times \vec{R}^{(e)} + \vec{\mathfrak{M}}_0^{(e)}, \qquad \vec{\mathfrak{M}}^{(r)} = \vec{r}_0 \times \vec{\Phi}^{(r)} + \vec{\mathfrak{M}}_0^{(r)},$$
$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\vec{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\vec{v}_\nu\right) = \vec{r}_0 \times M\vec{v}_0 + \vec{r}_0 \times M(\vec{\omega} \times \vec{q}_c) +$$
$$+ \vec{r}_0 \times \frac{dM}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_c) + \left[M\vec{q}_c + \frac{dM}{dt}\vec{\rho}_c\right] \times \vec{v}_0 +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu). \quad (1.46)$$

Подставляя вычисленные значения производной от кинетического момента и преобразованную согласно (1.46) правую часть в соотношение (1.32), будем иметь после очевидных сокращений:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} + \vec{r}_0 \times M\vec{w}_c^{(e)} + \vec{\rho}_c \times M\vec{w}_0 =$$
$$= \vec{r}_0 \times \vec{R}^{(e)} + \vec{r}_0 \times \vec{\Phi}_r + \vec{\mathfrak{M}}_0^{(e)} + \vec{\mathfrak{M}}_0^{(r)} +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \vec{\rho}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu). \quad (1.47)$$

Так как на основании теоремы о движении центра масс мы можем написать следующее равенство:

$$\vec{a} \times M\vec{w}_c^{(e)} = \vec{a} \times \left(\vec{R}^{(e)} + \vec{\Phi}_r\right),$$

где $\vec{a}$ - любой вектор, то очевидно, что

$$\vec{r}_0 \times M\vec{w}_c^{(e)} = \vec{r}_0 \times \vec{R}^{(e)} + \vec{r}_0 \times \vec{\Phi}_r. \tag{1.48}$$

Принимая во внимание соотношение (1.48), теорему об изменении кинетического момента относительно системы осей $Ox_1y_1z_1$ можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{\mathfrak{M}}_0^{(e)} + \vec{\mathfrak{M}}_0^{(r)} + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{\rho}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right) - \vec{\rho}_c \times M\vec{w}_0. \tag{1.49}$$

Если начало поступательно движущихся осей координат совпадает с центром масс тела, то $\vec{\rho}_c = 0$ и выражение теоремы (1.49) принимает более простую форму:

$$\frac{d\vec{K}_c}{dt} = \vec{\mathfrak{M}}_c^{(e)} + \vec{\mathfrak{M}}_c^{(r)} + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{\rho}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right), \tag{1.50}$$

где $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu = \vec{v}_\nu'$ есть скорость точки m_ν относительно поступательно движущихся осей.

Таким образом, *производная по времени от кинетического момента, вычисленного относительно центра масс, равна сумме моментов всех внешних и реактивных сил плюс сумма моментов количеств движения частиц, отброшенных телом в единицу времени, в их движении относительно поступательно перемещающихся осей.*

Из выражения теоремы (1.50) следует, что при гипотезе контактного взаимодействия отбрасываемых частиц и тела, согласно которой частицы, получившие относительную скорость, уже не принадлежат к телу переменной массы и на него никак не действуют, математическое выражение теоремы для неподвижных осей и осей, имеющих начало в центре масс и движущихся поступательно относительно основной системы отсчета, совершенно одинаково.

Если принять гипотезу контактного взаимодействия (или близкодействия), то для подвижных и неподвижных осей координат проекций разностей:

$$\left[\frac{d\vec{K}}{dt} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt}\left(\vec{r}_\nu \times \vec{v}_\nu\right)\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{d\vec{K}_0}{dt} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt}\left(\vec{\rho}_\nu \times \vec{v}_\nu\right)\right]$$

на координатные оси дают в левых частях уравнений слагаемые того же вида, какие получаются при проектировании $\dfrac{d\vec{K}}{dt}$ и $\dfrac{d\vec{K}_0}{dt}$ на те же оси при постоянной массе тела. Это утверждение мы проверили для частных случаев движения тела; его легко доказать и в общем случае.

Введем в рассмотрение систему осей $Oxyz$ (рис. 1.3), неизменно связанную с движущимся телом; тогда

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \frac{d^*\vec{K}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_0, \tag{1.51}$$

где $\dfrac{d^*}{dt}$ есть знак производной относительно осей $Oxyz$.

Пусть подвижные оси координат суть главные оси инерции тела для точки O, и пусть для упрощения выкладок точка O совпадает с центром масс; тогда проекции вектора кинетического момента на эти оси будут равны:

$$\left.\begin{aligned} K_{cx} &= I_{xx}p \\ K_{cy} &= I_{yy}q \\ K_{cz} &= I_{zz}r \end{aligned}\right\}. \tag{1.52}$$

Уравнение (1.32) для подвижных осей примет вид:

$$\left[\frac{d\vec{K}_c}{dt} - \sum_{\nu=1}^{n}\left(\vec{\rho}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\vec{v}\,'_\nu\right)\right] + \vec{\omega} \times \vec{K}_c = \vec{\mathfrak{M}}_c^{(e)} + \vec{\mathfrak{M}}_c^{(r)}. \tag{1.53}$$

Так как

$$\vec{\omega} \times \vec{K}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ I_{xx}p & I_{yy}q & I_{zz}k \end{vmatrix},$$

то проекции этого слагаемого в уравнении (1.53) на оси Ox, Oy, Oz найти очень просто. Найдем проекцию на ось Ox вектора:

$$\vec{A} = \left[\frac{d\vec{K}_c}{dt} - \sum_{\nu=1}^{n}\left(\vec{\rho}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\vec{v}\,'_\nu\right)\right];$$

будем иметь при сделанных упрощающих предположениях:

$$A_x = \frac{dK_{cx}}{dt} - \left[\sum_{\nu=1}^{n}\vec{\rho}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right)\right]_x =$$

$$= \frac{dI_{xx}}{dt}p + I_{xx}\frac{dp}{dt} - p\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\left(y_\nu^2 + z_\nu^2\right) = I_{xx}\frac{dp}{dt}.$$

Аналогично легко найти, что $A_y = I_{yy}\dfrac{dq}{dt}$, $A_z = I_{zz}\dfrac{dr}{dt}$.

Проектируя (1.51) на подвижные оси, получим:

$$\left.\begin{aligned}
I_{xx}\frac{dp}{dt} + (I_{zz} - I_{yy})\,qr = \mathfrak{M}_{cx}^{(e)} + \mathfrak{M}_{cx}^{(r)}\\
I_{yy}\frac{dq}{dt} + (I_{xx} - I_{zz})\,rp = \mathfrak{M}_{cy}^{(e)} + \mathfrak{M}_{cy}^{(r)}\\
I_{zz}\frac{dr}{dt} + (I_{yy} - I_{xx})\,pq = \mathfrak{M}_{cz}^{(e)} + \mathfrak{M}_{cz}^{(r)}
\end{aligned}\right\}. \tag{1.54}$$

Уравнения (1.54) являются динамическими уравнениями типа Эйлера для тела переменной массы.

Если абсолютные скорости отбрасываемых частиц равны нулю, то

$$\begin{gathered}
\vec{\mathfrak{M}}_c^{(r)} + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\vec{\rho}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt}\vec{v}_\nu'\right) = \\
= \sum_{\nu=1}^{n}\vec{\rho}_\nu \times \left[\frac{dm_\nu}{dt}\left(\vec{V}_{r\nu} + \vec{v}_\nu'\right)\right] = \vec{v} \times \left[M\vec{q}_c + \frac{dM}{dt}\vec{\rho}_c\right].
\end{gathered} \tag{1.55}$$

Предполагая, что начало системы $Oxyz$ совпадает с центром масс тела и относительная скорость центра масс $q_c = 0$, мы получим следующее векторное уравнение движения тела переменной массы около неподвижной точки:

$$\frac{d\vec{K}_c}{dt} = \vec{\mathfrak{M}}_c^{(e)}.$$

В проекциях на оси, связанные с телом, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(I_{xx}p\right)+\left(I_{zz}-I_{yy}\right)qr=\mathfrak{M}_{cx}^{(e)}\\ \frac{d}{dt}\left(I_{yy}p\right)+\left(I_{xx}-I_{zz}\right)rp=\mathfrak{M}_{cy}^{(e)}\\ \frac{d}{dt}\left(I_{zz}p\right)+\left(I_{yy}-I_{xx}\right)pq=\mathfrak{M}_{cz}^{(e)}\end{aligned}\right\}. \tag{1.56}$$

1.7. Теорема об изменении кинетической энергии тела переменной массы

Мы определили кинетическую энергию тела переменной массы как сумму кинетических энергий точек, принадлежащих телу в данный момент времени, т.е.

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\vec{v}_\nu^2.$$

Установим связь между кинетической энергией тела T, вычисленной относительно $N\xi\eta\zeta$, и его кинетической энергией в движении относительно системы осей $Ox1y_1z_1$, движущихся поступательно относительно неподвижных осей координат $N\xi\eta\zeta$. Так как

$$\vec{v}_\nu=\vec{v}_0+\vec{v}_\nu',$$

то

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\left(\vec{v}_0+\vec{v}_\nu'\right)^2+\frac{1}{2}M\vec{v}_0^2+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\vec{v}_\nu'^{\,2}+v_0\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\vec{v}_\nu'.$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\vec{v}_\nu'^{\,2}=T_0$$

есть кинетическая энергия тела переменной массы относительно системы $Ox_1y_1z_1$, а

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{v}_\nu' = \vec{\omega} \times M\vec{\rho}_c.$$

Следовательно,

$$T = T_0 + \frac{1}{2}M\vec{v}_0^2 + \vec{v}_0\left(\vec{\omega} \times M\vec{\rho}_c\right). \tag{1.57}$$

Если начало подвижной системы $Ox_1y_1z_1$ совпадает с центром масс тела, то $\vec{v}_0 = \vec{v}_c^{(e)}$, $\vec{\rho}_c = 0$, тогда

$$T = T_c + \frac{1}{2}M\left(\vec{v}_c^{(e)}\right)^2, \tag{1.58}$$

т.е. кинетическая энергия тела переменной массы равна кинетической энергии центра масс в его переносном движении и в предположении, что в нём сосредоточена масса всего тела, плюс кинетическая энергия тела в его движении относительно осей постоянного направления, имеющих начало в центре масс.

Соотношение (1.58) будет совпадать с теоремой Кёнига, если относительная скорость центра масс $\vec{q}_c = 0$.

Сформулируем теорему об изменении кинетической энергии относительно неподвижных осей координат. Напишем для этого уравнение движения какой-либо точки m_ν. Будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu\vec{v}_\nu\right) = \vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(i)} + \frac{dm_\nu}{dt}\vec{u}_\nu, \tag{1.59}$$

где $\vec{F}_\nu^{(e)}$ — равнодействующая всех внешних сил, приложенных к точке m_ν, $\vec{F}_\nu^{(i)}$ — равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к той же точке, $\vec{u}_\nu$ — абсолютная скорость отбрасываемых частиц.

Умножим левую часть уравнения (1.59) на $\vec{v}_\nu dt$, а правую часть на равную величину $d\vec{r}_\nu$ и просуммируем по всем точкам тела переменной массы, принадлежащим ему в данный момент времени. Будем иметь:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{v}_\nu d\left(m_\nu \vec{v}_\nu\right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^{(e)} d\vec{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^{(i)} d\vec{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{u}_\nu d\vec{r}_\nu. \quad (1.60)$$

Так как

$$d\left(\frac{m_\nu \vec{v}_\nu^2}{2}\right) = dm_\nu \frac{\vec{v}_\nu^2}{2} + m_\nu d\left(\frac{\vec{v}_\nu^2}{2}\right),$$

то

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{v}_\nu d\left(m_\nu \vec{v}_\nu\right) = d\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu \vec{v}_\nu^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu \vec{v}_\nu^2}{2}.$$

Кроме того, суммы элементарных работ внешних и внутренних сил запишем сокращенно следующим образом:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^{(e)} d\vec{r}_\nu = \delta A^{(e)}, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^{(i)} d\vec{r}_\nu = \delta A^{(i)}.$$

Последнюю сумму в соотношении (1.60) можно записать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{u}_\nu d\vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} dm_\nu \vec{u}_\nu \vec{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{\Phi}_{r\nu} d\vec{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} dm_\nu \vec{v}_\nu^2.$$

Очевидно, что $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \vec{\Phi}_{r\nu} d\vec{r}_\nu = \delta A^{(r)}$ есть элементарная работа реактивных сил.

Подставляя преобразованные значения отдельных слагаемых в соотношение (1.60), получим:

$$dT = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)} + \delta A^{(r)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu \vec{v}_\nu^2}{2}. \tag{1.61}$$

Следовательно, *дифференциал кинетической энергии тела переменной массы равен сумме элементарных работ всех внешних, внутренних и реактивных сил, приложенных к данному телу, плюс кинетическая энергия частиц, отбрасываемых телом за время dt, обусловленная их переносным движением.*

Если абсолютная скорость отбрасываемых частиц равна нулю, то из соотношения (1.60) получаем:

$$dT + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu \vec{v}_\nu^2}{2} = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)}, \tag{1.62}$$

т.е. дифференциал кинетической энергии тела переменной массы плюс кинетическая энергия частиц, отбрасываемых телом за время dt, в их переносном движении равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на тело.

Наконец, если тело переменной массы абсолютно твердое и относительные скорости отбрасываемых частиц равны нулю, то из (1.61) имеем:

$$dT = \delta A^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu \vec{v}_\nu^2}{2}, \tag{1.63}$$

т.е. дифференциал кинетической энергии тела переменной массы равен сумме элементарных работ всех внешних сил плюс кинетическая энергия частиц, отброшенных телом за время dt, в их переносном движении.

Глава 2

Модель движения космического аппарата в канонических переменных

2.1. Уравнения движения тела переменной массы в обобщенных координатах

Пусть положение механической системы (тела переменной массы) определяется s независимыми параметрами q_1,, $q_2, \ldots,$ q_s, которые выберем за обобщенные (криволинейные) координаты тела.

Пусть

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu \left(q_1, \, q_2, \, \ldots, \, q_s, \, t\right). \tag{2.1}$$

Напишем дифференциальные уравнения Мещерского для точек тела переменной массы в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1\right) = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_1^{(i)} + \dfrac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 \\
\dfrac{d}{dt}\left(m_2\vec{v}_2\right) = \vec{F}_2^{(e)} + \vec{F}_2^{(i)} + \dfrac{dm_2}{dt}\vec{u}_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{d}{dt}\left(m_n\vec{v}_n\right) = \vec{F}_n^{(e)} + \vec{F}_n^{(i)} + \dfrac{dm_n}{dt}\vec{u}_n
\end{array}\right\}. \tag{2.2}$$

Умножим первое из уравнений (2.2) на $\delta\vec{r}_1$, второе на $\delta\vec{r}_2$ и т.д., последнее на $\delta\vec{r}_n$ и сложим все полученные таким образом соотношения. Будем иметь:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(m_\nu\vec{v}_\nu\right)\right]\delta\vec{r}_\nu = \\ = \sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu^{(e)}\delta\vec{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu^{(i)}\delta\vec{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{dm_\nu}{dt}\vec{u}_\nu\delta\vec{r}_\nu. \quad (2.3)$$

Во всем дальнейшем будем предполагать, что

$$\sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu^{(i)}\delta\vec{r}_\nu = 0. \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) вполне согласуется с гипотезой излучения частиц с поверхности тела и означает, что частицы, которые принадлежат телу, не смещаются друг относительно друга, а частицы, получившие относительную скорость $\vec{V}_{r\nu}$, считаются не принадлежащими телу.

Так как

$$\delta\vec{r}_\nu = \sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma,$$

то (2.3) можно написать в виде:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_\nu\vec{v}_\nu\right)\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma = \\ = \sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu^{(e)}\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{dm_\nu}{dt}\vec{u}_\nu\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma, \quad (2.5)$$

или

$$\sum_{\sigma=1}^{s}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_\nu\vec{v}_\nu\right)\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\right]\delta q_\sigma =$$
$$= \sum_{\sigma=1}^{s}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu^{(e)}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\right]\delta q_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{s}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{dm_\nu}{dt}\vec{u}_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\right]\delta q_\sigma. \quad (2.6)$$

Для дальнейших преобразований (2.6) нужно воспользоваться двумя следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} &= \frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial\dot{q}_\sigma}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\right) &= \frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial q_\sigma}\end{aligned}\right\}. \quad (2.7)$$

Известно, что:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu^{(e)}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma$$

есть обобщенная сила, отнесенная к координате q_σ. Кроме того,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_\nu\vec{v}_\nu\right)\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} = \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\vec{v}_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} - \sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\vec{v}_\nu\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\vec{v}_\nu\frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial\dot{q}_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\vec{v}_\nu\frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial q_\sigma} =$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\sigma}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}m_\nu\vec{v}_\nu^2 - \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}m_\nu\vec{v}_\nu^2 =$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma}, \quad (2.8)$$

где T — кинетическая энергия системы. При выводе (2.8) мы предполагали, что m_ν зависит только от времени t.

Обозначая

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{u}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{u}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} = P_\sigma, \tag{2.9}$$

уравнение (2.6) можно записать в виде:

$$\sum_{\sigma=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - Q_\sigma - P_\sigma \right] \delta q_\sigma = 0. \tag{2.10}$$

Так как по предположению криволинейные координаты независимы, то из (2.10) следует, что

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 + P_1 \\ \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 + P_2 \\ \dotfill \\ \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \dfrac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + P_s \end{array} \right\} . \tag{2.11}$$

Уравнения (2.11) суть уравнения Лагранжа второго рода для тела переменной массы. Число этих уравнений равно числу степеней свободы тела переменной массы и, в наших предположениях, числу независимых криволинейных координат.

Интересный частный случай уравнений (2.11) будет иметь место при условии

$$\vec{u}_\nu = \lambda_\nu (t) \vec{v}_\nu. \tag{2.12}$$

В этом случае

$$P_\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{u}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \frac{dm_\nu}{dt} \frac{\vec{v}_\nu^2}{2}. \quad (2.13)$$

Введем в рассмотрение функцию:

$$\Pi = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \frac{dm_\nu}{dt} \frac{\vec{v}_\nu^2}{2}, \quad (2.14)$$

которая характеризует приток энергии к телу переменной массы вследствие процесса отбрасывания частиц, тогда

$$P_\sigma = \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

и уравнения (2.11) можно записать в виде:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 + \dfrac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_1} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 + \dfrac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_2} \\ \dotfill \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \dfrac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \dfrac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_s} \end{array}\right\}. \quad (2.15)$$

Если абсолютные скорости отбрасываемых частиц равны нулю, то уравнения (2.11) можно записать так:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \\ \dotfill \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \dfrac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \end{array}\right\}, \quad (2.16)$$

т.е. *при выполнении гипотезы* $\vec{u}_\nu = 0$ *уравнения Лагранжа 2-го рода для тела переменной массы имеют точно такую же форму, что и для тела постоянной массы.* Следует, однако, отметить, что при стационарных связях и консервативных силах уравнения (2.16) не приводят к классическому интегралу энергии, если рассматривается случай тела переменной массы.

2.2. Канонические уравнения для тела переменной массы

Приведем систему уравнений Лагранжа (2.11) к каноническому виду. Вместо лагранжевых переменных $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ введем в рассмотрение новые, так называемые канонические переменные $q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s$. Переменные $p_1, p_2, \ldots, p_s$ называются обобщенными импульсами и определяются из соотношений вида:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \\ p_2 = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_s = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \end{array}\right\}. \tag{2.17}$$

Для того чтобы можно было выразить обобщенные скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ через обобщенные импульсы из системы линейных алгебраических уравнений (2.17) *, необходимо, чтобы

*Легко проверить, что кинетическая энергия T является квадратичной формой обобщенных скоростей и, следовательно, частные производные $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}$ суть линейные функции обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$.

функциональный определитель:

$$\left\| \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_i} \right\| \neq 0. \tag{2.18}$$

Так как T — положительная квадратичная форма, то для динамических задач условие (2.18) выполняется. Возьмем вариацию функции T, выраженной в переменных q_1, q_2, …, q_s, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, …, $\dot{q}_s$. Будем иметь:

$$\delta T = \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \delta \dot{q}_\sigma =$$
$$= \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma + \delta \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma \right) - \sum_{\sigma=1}^{s} \dot{q}_\sigma \delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \right),$$

или

$$\delta \left[-T + \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma \right] = \sum_{\sigma=1}^{s} \dot{q}_\sigma \delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma .$$

Введем в рассмотрение новую функцию:

$$H = \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma \right) - T$$

и выразим ее как функцию канонических переменных. Вариация этой новой функции равна:

$$\delta H = \sum_{\sigma=1}^{s} \dot{q}_\sigma \delta p_\sigma - \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma ,$$

причем $\dfrac{\partial T}{\partial q_\sigma}$ вычислено в предположении, что

$$T = T\left(q_1,\, \ldots,\, q_s,\, p_1,\, \ldots,\, p_s,\, t\right).$$

Но из уравнений (2.17):

$$\frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma} - P_\sigma - Q_\sigma = \dot p_\sigma - P_\sigma - Q_\sigma$$

и, следовательно,

$$\delta H = \sum_{\sigma=1}^{s} \dot q_\sigma \delta p_\sigma - \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\dot p_\sigma - P_\sigma - Q_\sigma\right) \delta q_\sigma. \tag{2.19}$$

Вычислим вариацию функции H, предполагая, что эта функция выражена в канонических переменных $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s$ и времени t. Будем иметь:

$$\delta H = \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma. \tag{2.20}$$

Сравнивая правые части соотношений (2.19) и (2.20), получим вследствие независимости вариаций переменных следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot q_\sigma = \dfrac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \\ \dot p_\sigma = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\sigma} + P_\sigma + Q_\sigma. \end{cases} \tag{2.21}$$

Если внешние действующие силы имеют потенциал и абсолютная скорость отбрасываемых частиц равна нулю, то функцию H можно определить в виде:

$$H = \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\dot q_\sigma - L,$$

где L — функция Лагранжа, равная $T+U$. Потенциальная функция $U(q_1, \ldots, q_s)$ такова, что

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}.$$

В рассматриваемом частном случае уравнения Лагранжа принимают весьма простую форму:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

и соотношение (2.19) будет иметь следующий простой вид:

$$\delta H = \sum_{\sigma=1}^{s} \dot{q}_\sigma \delta p_\sigma - \sum_{\sigma=1}^{s} \dot{p}_\sigma \delta q_\sigma,$$

причем для систем с консервативными внешними силами обобщенные импульсы определяются из соотношений:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}, \quad \ldots, \quad p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}.$$

При сделанных предположениях уравнения (2.21) принимают следующий простой вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_\sigma &= \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} \\ \dot{p}_\sigma &= -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \end{aligned}\right\}, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.22}$$

Таким образом, *если внешние силы, действующие на тело переменной массы, имеют потенциал и абсолютные скорости отбрасываемых телом частиц равны нулю, то канонические уравнения принимают форму уравнений Гамильтона для механической системы точек постоянной массы.*

Существенно отметить здесь, что функция H для случая стационарных связей является явной функцией времени и поэтому классические результаты о первых интегралах системы канонических уравнений имеют в задачах динамики тела переменной массы другой смысл.

2.3. Общий вид канонических уравнений при наличии реактивных сил

Далее будем рассматривать только движение, когда внешние силы, действующие на тело переменной массы, отсутствуют, но абсолютные скорости отбрасываемых частиц не равны нулю. Следовательно, в уравнениях (2.21):

$$Q_\sigma = 0, \quad P_\sigma \neq 0.$$

Тогда (2.21) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{q}_\sigma = \dfrac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \\ \dot{p}_\sigma = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\sigma} + P_\sigma. \end{cases} \tag{2.23}$$

Для получения канонических уравнений для тела переменного состава в явном виде необходимо выписать правые части уравнений (2.23).

2.3.1. Случай линейного изменения скорости

Рассмотрим сначала частный случай, когда скорость отбрасываемых частиц есть линейная функция скорости, то есть справедливо (2.12).

Таким образом, если масса является известной функцией времени: $m_\nu = m_\nu(t)$, то задача сводится к отысканию вектора $\vec{v}_\nu$. Теперь, если рассматривать данный частный случай (2.13), когда справедливо выражение (2.14), то задача об отыскании канонических уравнений Гамильтона сводится к отысканию квадрата длины вектора $\vec{v}_\nu$.

Найдем производную в (2.13):

$$P_\sigma = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\nu} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(t) \frac{dm_\nu}{dt} \frac{\vec{v}_\nu^2}{2} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\nu} \left(\frac{dm_\nu}{dt}\right) \frac{\vec{v}_\nu^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(t) \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\nu}. \quad (2.24)$$

Так как масса тела не зависит от обобщенных скоростей, то:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\nu} \left(\frac{dm_\nu}{dt}\right) \frac{\vec{v}_\nu^2}{2} = 0. \quad (2.25)$$

Подставляя (2.25) в (2.24), получим:

$$P_\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(t) \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\nu}. \quad (2.26)$$

Вычислим производные $\dfrac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}$ в (2.26), для чего продифференцируем (1.6) по обобщенным скоростям, полагая, что $\boxed{\dfrac{\partial \vec{v}_0}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0}$:

$$\frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma}\left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right) = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_\nu + \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{\rho}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}. \tag{2.27}$$

В силу того, что радиус-вектор точки явно не зависит от обобщенной скорости, то

$$\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{\rho}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0.$$

Следовательно

$$\frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma}\left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right) = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_\nu. \tag{2.28}$$

Подставим (2.28) в (2.26) и получим:

$$P_\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\left(t\right) \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_\nu\right). \tag{2.29}$$

Подставим в (2.29) выражение для вектора скорости (1.6), полагая $\boxed{\vec{v}_0 \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_\nu\right) = 0}$:

$$\begin{aligned} P_\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\left(t\right) \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_\nu\right) = \\ = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\left(t\right) \frac{dm_\nu}{dt} \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu\right) \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_\nu\right). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Запишем вспомогательные преобразования:

$$\left(\vec{a} \times \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{d} = \left[a,\ c,\ d\right],$$

$$d = b \times c.$$

Так как в смешанном произведении операции векторного и скалярного произведения переставимы, то:

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{d} = \left[\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{d}\right] =$$
$$= \vec{a} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{c} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right).$$

Распишем формулу для двойного векторного произведения:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{c} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}^{2} - \vec{c}\left(\vec{c} \cdot \vec{b}\right)\right).$$

Таким образом

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}^{2} - \vec{c}\left(\vec{c} \cdot \vec{b}\right)\right). \tag{2.31}$$

Используя вспомогательные вычисления (2.31), запишем:

$$(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{\nu}) \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \times \vec{\rho}_{\nu}\right) = \vec{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \cdot \vec{\rho}_{\nu}^{2} - \vec{\rho}_{\nu}\left(\vec{\rho}_{\nu} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_{\sigma}}\right)\right). \tag{2.32}$$

Подставим (2.32) в (2.30):

$$\begin{gathered} P_{\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu}(t) \frac{dm_{\nu}}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{\nu}) \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \times \vec{\rho}_{\nu}\right) = \\ = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu}(t) \frac{dm_{\nu}}{dt} \vec{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \cdot \vec{\rho}_{\nu}^{2} - \vec{\rho}_{\nu}\left(\vec{\rho}_{\nu} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_{\sigma}}\right)\right). \end{gathered} \tag{2.33}$$

Распишем выражение

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}^{2} - \vec{c}\left(\vec{c} \cdot \vec{b}\right)\right) = \tilde{W}$$

по компонентам в предположении, что

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$|\vec{c}|^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2,$$
$$\vec{c} \cdot \vec{b} = c_x b_x + c_y b_y + c_z b_z,$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z.$$

Тогда

$$\begin{gathered}
\tilde{W} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}^2 - \vec{c}\left(\vec{c} \cdot \vec{b}\right)\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{c}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \left(\vec{c} \cdot \vec{b}\right) = \\
= (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \left(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2\right) - \\
- (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) (c_x b_x + c_y b_y + c_z b_z) = \\
= a_x b_x c_x^2 + a_y b_y c_x^2 + a_z b_z c_x^2 + a_x b_x c_y^2 + a_y b_y c_y^2 + \\
+ a_z b_z c_y^2 + a_x b_x c_z^2 + a_y b_y c_z^2 + a_z b_z c_z^2 - \\
- a_x b_x c_x^2 - a_y b_x c_x c_y - a_z b_x c_x c_z - a_x b_y c_x c_y - a_y b_y c_y^2 - \\
- a_z b_y c_y c_z - a_x b_z c_x c_z - a_y b_z c_y c_z - a_z b_z c_z^2.
\end{gathered}$$

Приведем подобные:

$$\begin{gathered}
\tilde{W} = (a_y b_y + a_z b_z) c_x^2 + (a_x b_x + a_z b_z) c_y^2 + (a_x b_x + a_y b_y) c_z^2 - \\
- (a_y b_x + a_x b_y) c_x c_y - (a_z b_x + a_x b_z) c_x c_z - (a_z b_y + a_y b_z) c_y c_z.
\end{gathered}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\tilde{W} = a_x b_x \left(c_y^2 + c_z^2\right) + a_y b_y \left(c_x^2 + c_z^2\right) + a_z b_z \left(c_x^2 + c_y^2\right) -$$
$$- \left(a_y b_x + a_x b_y\right) c_x c_y - \left(a_z b_x + a_x b_z\right) c_x c_z - \left(a_z b_y + a_y b_z\right) c_y c_z.$$

Введем обозначения:

$$\vec{a} \quad \to \quad \vec{\omega} \quad = \quad \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.34}$$

$$\vec{b} \quad \to \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial \dot{q}_\sigma} & \dfrac{\partial q}{\partial \dot{q}_\sigma} & \dfrac{\partial r}{\partial \dot{q}_\sigma} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.35}$$

$$\vec{c} \quad \to \quad \vec{\rho}_\nu \quad = \quad \begin{pmatrix} x_\nu & y_\nu & z_\nu \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{2.36}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\vec{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \vec{\rho}_\nu^{\,2} - \vec{\rho}_\nu \left(\vec{\rho}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \right) = \\ = a_x b_x \left(y_\nu^2 + z_\nu^2\right) + a_y b_y \left(x_\nu^2 + z_\nu^2\right) + a_z b_z \left(z_\nu^2 + y_\nu^2\right) - \\ - \left(a_y b_x + a_x b_y\right) x_\nu y_\nu - \left(a_z b_x + a_x b_z\right) x_\nu z_\nu - \\ - \left(a_z b_y + a_y b_z\right) y_\nu z_\nu.\end{gathered} \tag{2.37}$$

Подставим (2.37) в (2.33):

$$P_\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\left(t\right) \frac{dm_\nu}{dt} \vec{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \cdot \vec{\rho}_\nu^{\,2} - \vec{\rho}_\nu \left(\vec{\rho}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\left(t\right) \frac{dm_\nu}{dt} \Big[a_x b_x \left(y_\nu^2 + z_\nu^2\right) + a_y b_y \left(x_\nu^2 + z_\nu^2\right) + a_z b_z \left(z_\nu^2 + y_\nu^2\right) -$$
$$- \left(a_y b_x + a_x b_y\right) x_\nu y_\nu - \left(a_z b_x + a_x b_z\right) x_\nu z_\nu - \left(a_z b_y + a_y b_z\right) y_\nu z_\nu \Big] =$$

$$= a_x b_x \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\left(t\right) \frac{dm_\nu}{dt} \left(y_\nu^2 + z_\nu^2\right) +$$

$$
\begin{gathered}
+ a_y b_y \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu (t) \frac{dm_\nu}{dt} \left(x_\nu^2 + z_\nu^2\right) + \\
+ a_z b_z \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu (t) \frac{dm_\nu}{dt} \left(z_\nu^2 + y_\nu^2\right) - \\
- \left(a_y b_x + a_x b_y\right) \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu (t) \frac{dm_\nu}{dt} x_\nu y_\nu - \\
- \left(a_z b_x + a_x b_z\right) \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu (t) \frac{dm_\nu}{dt} x_\nu z_\nu - \\
- \left(a_z b_y + a_y b_z\right) \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu (t) \frac{dm_\nu}{dt} y_\nu z_\nu. \qquad (2.38)
\end{gathered}
$$

Запишем вспомогательные преобразования:

$$
\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\lambda_\nu m_\nu x_\nu y_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \lambda_\nu x_\nu y_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{d\left(\lambda_\nu x_\nu y_\nu\right)}{dt} =
$$

$$
= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \lambda_\nu x_\nu y_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\lambda_\nu}{dt} m_\nu x_\nu y_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\left(x_\nu y_\nu\right)}{dt} m_\nu \lambda_\nu. \qquad (2.39)
$$

Так как рассматривается только твердое тело, то есть внутренние точки тела никуда не перетекают сами по себе, то

$$
\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \lambda_\nu \frac{d\left(x_\nu y_\nu\right)}{dt} = 0. \qquad (2.40)
$$

Поставляя (2.40) в (2.39) и меняя местами операции суммирования и дифференцирования, получим:

$$
\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \lambda_\nu x_\nu y_\nu = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\lambda_\nu m_\nu x_\nu y_\nu\right) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\lambda_\nu}{dt} m_\nu x_\nu y_\nu. \qquad (2.41)
$$

Пусть

$$\lambda_\nu = \lambda\left(t\right) \qquad \forall \nu = \left(1,\, 2,\, \ldots, n\right), \tag{2.42}$$

тогда (2.41) будет иметь вид:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \lambda_\nu x_\nu y_\nu = \frac{d}{dt}\lambda \sum_{\nu=1}^{n} \left(m_\nu x_\nu y_\nu\right) - \frac{d\lambda}{dt} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu y_\nu = \\ = \frac{d}{dt}\left(\lambda I_{XY}\right) - \frac{d\lambda}{dt} I_{XY} = \lambda \dot{I}_{XY}. \tag{2.43}$$

Аналогично (2.43) выпишем другие суммы из (2.38):

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \lambda_\nu x_\nu z_\nu = \lambda \dot{I}_{XZ}, \tag{2.44}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \lambda_\nu y_\nu z_\nu = \lambda \dot{I}_{YZ}, \tag{2.45}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \lambda_\nu \left(y_\nu^2 + z_\nu^2\right) = \lambda \dot{I}_{XX}, \tag{2.46}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \lambda_\nu \left(x_\nu^2 + z_\nu^2\right) = \lambda \dot{I}_{YY}, \tag{2.47}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \lambda_\nu \left(x_\nu^2 + y_\nu^2\right) = \lambda \dot{I}_{ZZ}. \tag{2.48}$$

Подставляя (2.43)–(2.48) в (2.38), получим:

$$P_\sigma = a_x b_x \lambda \dot{I}_{XX} + a_y b_y \lambda \dot{I}_{YY} + a_z b_z \lambda \dot{I}_{ZZ} - \\ - \left(a_y b_x + a_x b_y\right) \lambda \dot{I}_{XY} - \left(a_z b_x + a_x b_z\right) \lambda \dot{I}_{XZ} - \\ - \left(a_z b_y + a_y b_z\right) \lambda \dot{I}_{YZ} \tag{2.49}$$

или в матричной форме:

$$P_\sigma = \lambda \vec{a}^{\mathrm{T}} \dot{I} \vec{b}. \tag{2.50}$$

Возвращаясь к введенным обозначениям (2.34) и (2.35), запишем (2.50):

$$P_\sigma = \lambda \vec{a}^{\mathrm{T}} \dot{I} \vec{b} = \lambda \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}. \tag{2.51}$$

Заметим, что если главные оси инерции остаются неизменными, то

$$P_\sigma = a_x b_x \lambda \dot{I}_{XX} + a_y b_y \lambda \dot{I}_{YY} + a_z b_z \lambda \dot{I}_{ZZ}.$$

Подставим (2.51) в (2.23) и получим уравнения движения для тела переменного состава для случая (2.12):

$$\begin{cases} \dot{q}_\sigma = \dfrac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \\ \dot{p}_\sigma = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\sigma} + \lambda \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \dot{I} \dfrac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}. \end{cases} \tag{2.52}$$

2.3.2. Общий случай

Рассмотрим более общий случай, когда скорость отбрасываемых частиц $\vec{u}_\nu$ в (2.9) не является линейной функцией скорости, а имеет вид:

$$\vec{u}_\nu = \vec{v}_\nu + \vec{V}_{r\nu}, \tag{2.53}$$

где $\vec{v}_\nu$ определяется согласно (1.6), полагая $\boxed{\vec{v}_0 = 0}$, $\vec{V}_{r\nu}$ — относительная скорость отбрасываемой частицы.

Подставим выражение (2.53) в (2.9) и получим:

$$P_\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{u}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \left(\vec{v}_\nu + \vec{V}_{r\nu} \right) \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{V}_{r\nu} \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad (2.54)$$

где $\vec{V}_{r\nu}$ будем считать заданными, поскольку известно, как именно отбрасываются частицы.

Введем обозначения:

$$P_{\sigma 1} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad (2.55)$$

$$P_{\sigma 2} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{V}_{r\nu} \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}. \quad (2.56)$$

Тогда (2.54) примет вид:

$$P_\sigma = P_{\sigma 1} + P_{\sigma 2}. \quad (2.57)$$

Выражение (2.55) является частным случаем (2.26) при $\lambda = 1$. Подставим $\lambda = 1$ в (2.51) и получим:

$$P_{\sigma 1} = \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}. \quad (2.58)$$

При $\vec{V}_{r\nu} = \lambda_1 \vec{v}_\nu$ выражение (2.56) примет вид:

$$P_{\sigma 2} = \lambda_1 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad (2.59)$$

и тогда уравнения движения будут иметь вид (2.52) при условии, что $\lambda = 1 + \lambda_1$.

2.3.3. Отбрасывание частиц в одном направлении

Рассмотрим выражение (2.56). Обозначим компоненты вектора относительной скорости отбрасывания частиц $\vec{V}_{r\nu}$ следующим образом:

$$\vec{V}_{r\nu} = \left(V_\nu^1,\, V_\nu^2,\, V_\nu^3\right)^{\mathrm{T}}.$$

Предположим, что все частицы отбрасываются в одном и том же направлении:

$$V = (V_1,\, V_2,\, V_3)^{\mathrm{T}}. \tag{2.60}$$

Это допущение впоследствии даст возможность моделировать движение таких космических аппаратов, на которых установлен реактивный двигатель. Положение сопла такого двигателя и будет задавать вектор отбрасывания частиц.

Подставим (2.60) в (2.56). Будем иметь:

$$P_{\sigma 2} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{V}_{r\nu} \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_\nu \right) = \\ = \vec{V} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_\nu \right). \tag{2.61}$$

Внесем $\dfrac{dm_\nu}{dt}$ под векторное произведение, поскольку это просто число:

$$P_{\sigma 2} = \vec{V} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_\nu \right) = \\ = \vec{V} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \frac{dm_\nu}{dt} \vec{\rho}_\nu \right) =$$

$$= \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{\rho}_\nu \right). \quad (2.62)$$

Заметим, что:

$$\frac{d}{dt}(M\rho_C) = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{\rho}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_\nu \vec{\rho}_\nu) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \vec{\rho}_\nu \frac{dm_\nu}{dt} + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{d\vec{\rho}_\nu}{dt} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{n} \left(\vec{\rho}_\nu \frac{dm_\nu}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(M\rho_C) - \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{d\vec{\rho}_\nu}{dt}. \quad (2.63)$$

Поскольку тело твердое, то положения внутренних точек тела не зависят явно от времени:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{d\vec{\rho}_\nu}{dt} = 0. \quad (2.64)$$

Допущение (2.64) устанавливает ограничение на тот факт, что взаимное расположение точек тела остается неизменным, то есть позволяет говорить о системе материальных точек как о твердом теле.

Подставляя (2.64) в (2.63), получим:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\vec{\rho}_\nu \frac{dm_\nu}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(M\rho_C), \quad (2.65)$$

где $\rho_C = (X_C, Y_C, Z_C)^{\mathrm{T}}$ — радиус-вектор центра масс в текущий момент времени в связанной системе координат $OXYZ$, M — масса тела в текущий момент времени.

Выражение (2.65) позволяет избавиться от суммирования в (2.62). Подставляя (2.65) в (2.62), получим:

$$P_{\sigma 2} = \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \frac{d}{dt}\left(M\vec{\rho}_C\right). \tag{2.66}$$

Подставляя (2.58) и (2.66) в (2.57), получим:

$$P_\sigma = \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \frac{d}{dt}\left(M\vec{\rho}_C\right). \tag{2.67}$$

Если центр масс остается неподвижным, то

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{\rho}_C\right) = \dot{M}\vec{\rho}_C,$$

и тогда (2.67) примет вид:

$$\begin{aligned} P_\sigma = \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \dot{M} \cdot \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} \times \vec{\rho}_C = \\ = \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \dot{M}\left[\vec{V}, \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \vec{\rho}_C\right], \end{aligned} \tag{2.68}$$

где $\left[\vec{V}, \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \vec{\rho}_C\right]$ — смешанное произведение.

Подставляя (2.67) в (2.23) получим уравнения движения твердого тела переменного состава, полученные на основе формализма Гамильтона в общем виде:

$$\begin{cases} \dot{q}_\sigma = \dfrac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \\ \dot{p}_\sigma = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\sigma} + \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \dot{I} \dfrac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \left[\vec{V}, \dfrac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \dfrac{d}{dt}\left(M\vec{\rho}_C\right)\right]. \end{cases} \tag{2.69}$$

Подставляя (2.68) в (2.23) получим уравнения движения твердого тела переменного состава, полученные на основе формализма Гамильтона для случая, когда центр масс остается неподвижным в связанно системе координат:

$$\begin{cases} \dot{q}_\sigma = \dfrac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \\ \dot{p}_\sigma = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\sigma} + \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \dot{I} \dfrac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \dot{M} \left[\vec{V},\ \dfrac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}_\sigma},\ \vec{\rho}_C \right]. \end{cases} \tag{2.70}$$

2.4. Канонические уравнения в переменных Деприи

Канонические переменные Депри, описанные в [1, 18], получили широкое применение при исследовании движения твёрдых тел вследствие того, что выражение для гамильтониана в этих переменных имеет лишь одну позиционную координату. Это позволит впоследствии получить аналитические решения для некоторых уравнений. В зарубежных источниках эти переменные называют также переменными Серре [25] или переменными Серре-Андуайе [13, 22]. Договоримся для краткости далее использовать наименование переменных как переменные Депри.

Для записи уравнений движения в переменных Депри необходимо выразить в этих переменных правые части (2.70). Для этого возьмём известное выражение для гамильтониана твёрдого тела в переменных Депри [1]:

$$H = H\left(l,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ L,\ G,\ I_3\right) = \\ = \frac{G^2 - L^2}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C}, \tag{2.71}$$

где A, B, C — главные моменты инерции, l, φ_2, φ_3 — углы Депри, L, G, I_3 — импульсы, соответствующие углам Депри l, φ_2, φ_3.

Отметим, что переменные Депри при необходимости можно пересчитать в углы Эйлера или Крылова.

Найдём производные:

$$\frac{\partial H}{\partial L} = -L\left(\frac{\sin^2 l}{A\,(t)} + \frac{\cos^2 l}{B\,(t)}\right) + \frac{L}{C\,(t)}, \tag{2.72}$$

$$\frac{\partial H}{\partial G} = G\left(\frac{\sin^2 l}{A\,(t)} + \frac{\cos^2 l}{B\,(t)}\right), \quad \frac{\partial H}{\partial I_3} = 0, \tag{2.73}$$

$$\frac{\partial H}{\partial l} = \frac{1}{2}\left(G^2 - L^2\right)\left(\frac{1}{A\,(t)} - \frac{1}{B\,(t)}\right)\sin 2l, \tag{2.74}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot\varphi_2} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot\varphi_3} = 0. \tag{2.75}$$

Для записи уравнений в явном виде необходимо вычислить P_l и P_{φ_2} в правых частях уравнений (2.72).

Для записи уравнений движения в переменных Депри в явном виде найдём производные

$$\frac{\partial \vec\omega}{\partial l}, \quad \frac{\partial \vec\omega}{\partial \dot\varphi_2}, \quad \frac{\partial \vec\omega}{\partial \dot\varphi_3}.$$

Требуется вычислить:

$$\frac{\partial \vec\omega}{\partial l} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial l} & \frac{\partial q}{\partial l} & \frac{\partial r}{\partial l} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.76}$$

$$\frac{\partial \vec\omega}{\partial \dot\varphi_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \dot\varphi_2} & \frac{\partial q}{\partial \dot\varphi_2} & \frac{\partial r}{\partial \dot\varphi_2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.77}$$

$$\frac{\partial \vec\omega}{\partial \dot\varphi_3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \dot\varphi_3} & \frac{\partial q}{\partial \dot\varphi_3} & \frac{\partial r}{\partial \dot\varphi_3} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{2.78}$$

Для этого необходимо, чтобы компоненты вектора угловой скорости были вычислены в переменных Лагранжа.

Поскольку

$$p = p\,(l,\ L,\ G) = p\left(l,\ L\left(\dot{l},\ \dot{\varphi}_2\right),\ G\left(\dot{l},\ \dot{\varphi}_2\right)\right),$$

то запишем правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{l}} = \frac{\partial p\,(l,\ L,\ G)}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} + \frac{\partial p\,(l,\ L,\ G)}{\partial G} \cdot \frac{\partial G}{\partial \dot{l}}. \tag{2.79}$$

В переменных Деприи компоненты вектора угловой скорости имеют вид [1]:

$$p = \frac{1}{A}\sqrt{G^2 - L^2}\sin l, \quad q = \frac{1}{B}\sqrt{G^2 - L^2}\cos l, \quad r = \frac{L}{C}. \tag{2.80}$$

Выразим G и L через обобщённые скорости, для чего воспользуемся первыми двумя уравнениями (2.72). Поскольку преобразование линейное, то всегда можно выразить обобщённые скорости через импульсы:

$$\begin{cases} \dot{l} = -L\left(\dfrac{\sin^2 l}{A\,(t)} + \dfrac{\cos^2 l}{B\,(t)}\right) + \dfrac{L}{C\,(t)}, \\ \dot{\varphi}_2 = G\left(\dfrac{\sin^2 l}{A\,(t)} + \dfrac{\cos^2 l}{B\,(t)}\right), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{\frac{1}{C(t)} - \frac{\sin^2 l}{A(t)} - \frac{\cos^2 l}{B(t)}}\dot{l} = \dfrac{1}{\alpha_L\,(l,\ t)}\dot{l}, \\ G = \dfrac{1}{\frac{\sin^2 l}{A(t)} + \frac{\cos^2 l}{B(t)}}\dot{\varphi}_2 = \dfrac{1}{\alpha_G\,(l,\ t)}\dot{\varphi}_2, \end{cases} \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned} \alpha_L\,(l,\ t) &= \frac{1}{C\,(t)} - \frac{\sin^2 l}{A\,(t)} - \frac{\cos^2 l}{B\,(t)}, \\ \alpha_G\,(l,\ t) &= \frac{\sin^2 l}{A\,(t)} + \frac{\cos^2 l}{B\,(t)}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Выполним дифференцирование, используя (2.80) и (2.81):

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{l}} = -\frac{\sin l}{A\sqrt{G^2 - L^2}} \frac{L}{\alpha_L}.$$

Аналогично для других производных:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial \dot{l}} &= \frac{\partial q\,(l,\ L,\ G)}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} + \frac{\partial q\,(l,\ L,\ G)}{\partial G} \cdot \frac{\partial G}{\partial \dot{l}} = -\frac{\cos l}{B\sqrt{G^2 - L^2}} \frac{L}{\alpha_L}, \\
\frac{\partial r}{\partial \dot{l}} &= \frac{\partial r\,(l,\ L,\ G)}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} + \frac{\partial r\,(l,\ L,\ G)}{\partial G} \cdot \frac{\partial G}{\partial \dot{l}} = \frac{1}{C\alpha_L}, \\
\frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \frac{\partial p\,(l,\ L,\ G)}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} + \frac{\partial p\,(l,\ L,\ G)}{\partial G} \cdot \frac{\partial G}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{\sin l}{A\sqrt{G^2 - L^2}} \frac{G}{\alpha_G}, \\
\frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \frac{\partial q\,(l,\ L,\ G)}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} + \frac{\partial q\,(l,\ L,\ G)}{\partial G} \cdot \frac{\partial G}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{\cos l}{B\sqrt{G^2 - L^2}} \frac{G}{\alpha_G}, \\
\frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \frac{\partial r\,(l,\ L,\ G)}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} + \frac{\partial r\,(l,\ L,\ G)}{\partial G} \cdot \frac{\partial G}{\partial \dot{\varphi}_2} = 0.
\end{aligned}$$

Выпишем получившиеся векторы производных (2.76)–(2.78):

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{l}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin l}{A\sqrt{G^2 - L^2}} \dfrac{L}{\alpha_L} \\ -\dfrac{\sin l}{A\sqrt{G^2 - L^2}} \dfrac{L}{\alpha_L} \\ \dfrac{1}{C\alpha_L} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\varphi}_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin l}{A\sqrt{G^2 - L^2}} \dfrac{G}{\alpha_G} \\ \dfrac{\cos l}{B\sqrt{G^2 - L^2}} \dfrac{G}{\alpha_G} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\varphi}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Запишем необходимые скалярные и смешанные произведения в (2.68), используя компоненты вектора угловой скорости и (2.80) для P_l:

$$P_l = \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{l}} + \dot{M} \left[\vec{V},\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{l}},\ \vec{\rho}_C \right] = P_{l1} + P_{l2}. \tag{2.83}$$

Распишем каждый из компонентов P_{l1} и P_{l2} в (2.83). Будем иметь:

$$
\begin{aligned}
P_{l1} &= \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial l} = \\
&= p\frac{\partial p}{\partial l}\dot{I}_{XX} + q\frac{\partial q}{\partial l}\dot{I}_{YY} + r\frac{\partial r}{\partial l}\dot{I}_{ZZ} = \\
&= \frac{1}{A}\sqrt{G^2 - L^2} \cdot \left(-\frac{\sin l}{A\sqrt{G^2 - L^2}} \frac{L}{\alpha_L}\right) \sin l \cdot \dot{A} + \\
&+ \frac{1}{B}\sqrt{G^2 - L^2} \cdot \left(-\frac{\sin l}{A\sqrt{G^2 - L^2}} \frac{L}{\alpha_L}\right) \cos l \cdot \dot{B} + \\
&+ \frac{L}{C} \cdot \frac{1}{C\alpha_L} \cdot \dot{C} = \\
&= -\frac{L\sin^2 l}{A^2} \cdot \frac{\dot{A}}{\alpha_L} - \frac{L\cos^2 l}{B^2}\frac{\dot{B}}{\alpha_L} + \frac{L}{C^2} \cdot \frac{\dot{C}}{\alpha_L} = \\
&= \frac{L}{\alpha_L}\left(\frac{1}{C^2}\dot{C} - \frac{\sin^2 l}{A^2}\dot{A} - \frac{\cos^2 l}{B^2}\dot{B}\right),
\end{aligned} \tag{2.84}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{l2} &= \dot{M}\left[\vec{V},\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial l},\ \vec{\rho}_C\right] = \dot{M} \cdot \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ \dfrac{\partial p}{\partial l} & \dfrac{\partial q}{\partial l} & \dfrac{\partial r}{\partial l} \\ X_C & Y_C & Z_C \end{vmatrix} = \\
&= \dot{M}\left(V_1\left(\frac{\partial q}{\partial l}Z_C - \frac{\partial r}{\partial l}Y_C\right) + \right. \\
&+ V_2\left(\frac{\partial r}{\partial l}X_C - \frac{\partial p}{\partial l}Z_C\right) + \\
&\left. + V_3\left(\frac{\partial p}{\partial l}Y_C - \frac{\partial q}{\partial l}X_C\right)\right).
\end{aligned} \tag{2.85}
$$

Запишем необходимые скалярные и смешанные произведения в (2.68), используя компоненты вектора угловой скорости и (2.80) для P_{φ_2}:

$$P_{\varphi_2} = \vec{\omega}^T \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\varphi}_2} + \dot{M} \left[\vec{V},\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\varphi}_2},\ \vec{\rho}_C \right] = P_{\varphi_2 1} + P_{\varphi_2 2}. \tag{2.86}$$

Распишем каждый из компонентов $P_{\varphi_2 1}$ и $P_{\varphi_2 2}$ в (2.86). Будем иметь:

$$\begin{aligned}
P_{\varphi_2 1} &= \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \dot{I} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\varphi}_2} = \\
&= p \frac{\partial p}{\partial \dot{l}} \dot{I}_{XX} + q \frac{\partial q}{\partial \dot{l}} \dot{I}_{YY} + r \frac{\partial r}{\partial \dot{l}} \dot{I}_{ZZ} = \\
&= \frac{1}{A} \sqrt{G^2 - L^2} \sin l \cdot \frac{\sin l}{A\sqrt{G^2 - L^2}} \frac{G}{\alpha_G} \cdot \dot{A} + \\
&+ \frac{1}{B} \sqrt{G^2 - L^2} \cos l \cdot \frac{\cos l}{B\sqrt{G^2 - L^2}} \frac{G}{\alpha_G} \cdot \dot{B} + \frac{L}{C} \cdot 0 = \\
&= \frac{G \sin^2 l}{A^2} \cdot \frac{\dot{A}}{\alpha_G} + \frac{G \cos^2 l}{B^2} \cdot \frac{\dot{B}}{\alpha_G} = \\
&= \frac{G}{\alpha_G} \left(\frac{\sin^2 l}{A^2} \dot{A} + \frac{\cos^2 l}{B^2} \dot{B} \right),
\end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}
P_{\varphi_2 2} &= \dot{M} \left[\vec{V},\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\varphi}_2},\ \vec{\rho}_C \right] = \dot{M} \cdot \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ \dfrac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}_2} & \dfrac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}_2} & \dfrac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}_2} \\ X_C & Y_C & Z_C \end{vmatrix} = \\
&= \dot{M} \left(V_1 \left(\frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}_2} Z_C - \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}_2} Y_C \right) + \right. \\
&+ V_2 \left(\frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}_2} X_C - \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}_2} Z_C \right) + \\
&\left. + V_3 \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}_2} Y_C - \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}_2} X_C \right) \right),
\end{aligned} \tag{2.88}$$

$$P_{\varphi_3} = 0. \tag{2.89}$$

Подставляя (2.72)–(2.75) и (2.84)–(2.89) в (2.70), получим уравнения движения для тела переменного состава, полученные на основе формализма Гамильтона в переменных Деприи:

$$
\begin{cases}
\dot{l} = L\left(\dfrac{1}{C} - \dfrac{\sin^2 l}{A} - \dfrac{\cos^2 l}{B}\right), \; \dot{\varphi}_2 = G\left(\dfrac{\sin^2 l}{A} + \dfrac{\cos^2 l}{B}\right), \\
\dot{\varphi}_3 = 0, \qquad \dot{I}_3 = 0, \\
\dot{L} = -\dfrac{1}{2}\left(G^2 - L^2\right)\left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B}\right)\sin 2l + \\
\quad + \dfrac{L}{\alpha_L}\left(\dfrac{\dot{C}}{C^2} - \dfrac{\dot{A}}{A^2}\sin^2 l - \dfrac{\dot{B}}{B^2}\cos^2 l\right) + \\
\quad + \dot{M}\left(V_1\left(\dfrac{\partial q}{\partial \dot{l}} Z_C - \dfrac{\partial r}{\partial \dot{l}} Y_C\right) + \right. \\
\quad \left. + V_2\left(\dfrac{\partial r}{\partial \dot{l}} X_C - \dfrac{\partial p}{\partial \dot{l}} Z_C\right) + V_3\left(\dfrac{\partial p}{\partial \dot{l}} Y_C - \dfrac{\partial q}{\partial \dot{l}} X_C\right)\right), \\
\dot{G} = \dfrac{G}{\alpha_G}\left(\dfrac{\dot{A}}{A^2}\sin^2 l + \dfrac{\dot{B}}{B^2}\cos^2 l\right) + \\
\quad + \dot{M}\left(V_1\left(\dfrac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}_2} Z_C - \dfrac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}_2} Y_C\right) + \right. \\
\quad \left. + V_2\left(\dfrac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}_2} X_C - \dfrac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}_2} Z_C\right) + V_3\left(\dfrac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}_2} Y_C - \dfrac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}_2} X_C\right)\right).
\end{cases}
\tag{2.90}
$$

Из (2.90) видно, что два уравнения интегрируются в квадратурах:

$$
\varphi_3 = \varphi_3(0) = const, \quad I_3 = I_3(0) = const, \tag{2.91}
$$

и задача сводится к численному интегрированию только четырёх уравнений, что упрощает её решение.

Так как уравнения $\dot{\varphi}_3 = 0$ и $\dot{I}_3 = 0$ не представляют интереса для исследования, то исключим в дальнейшем их из рассмотрения.

В практических задачах часто имеет место случай, когда вектор скорости отбрасывания частиц коллинеарен оси аппликат связанной системы координат:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & V \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{2.92}$$

Отметим, что отбрасывание частиц по оси Z означает, что центр масс не остаётся неподвижным и движется по оси Z, а при симметричном изменении моментов инерции по другим осям координаты X_C и Y_C центра масс остаются постоянными. Если совместить начало неподвижной системы координат с положением центра масс в начальный момент времени, то

$$\frac{d}{dt}(MX_C) = 0, \quad \frac{d}{dt}(MY_C) = 0.$$

Подставим (2.92) в (2.90) и получим:

$$\begin{cases} \dot{l} = L\left(\dfrac{1}{C} - \dfrac{\sin^2 l}{A} - \dfrac{\cos^2 l}{B}\right), \ \dot{\varphi}_2 = G\left(\dfrac{\sin^2 l}{A} + \dfrac{\cos^2 l}{B}\right), \\ \dot{L} = -\dfrac{1}{2}\left(G^2 - L^2\right)\left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B}\right)\sin 2l + \\ \quad + \dfrac{L}{\alpha_L}\left(\dfrac{\dot{C}}{C^2} - \dfrac{\dot{A}}{A^2}\sin^2 l - \dfrac{\dot{B}}{B^2}\cos^2 l\right) + \\ \quad + \dot{M}V\left(\dfrac{\partial p}{\partial \dot{l}}Y_C - \dfrac{\partial q}{\partial \dot{l}}X_C\right), \\ \dot{G} = \dfrac{G}{\alpha_G}\left(\dfrac{\dot{A}}{A^2}\sin^2 l + \dfrac{\dot{B}}{B^2}\cos^2 l\right) + \dot{M}V\left(\dfrac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}_2}Y_C - \dfrac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}_2}X_C\right). \end{cases} \tag{2.93}$$

Пусть в начальный момент времени начало связанной системы координат совпадает с центром масс, то есть

$$X_C = 0, \quad Y_C = 0, \quad Z_C = 0. \tag{2.94}$$

Подставляя (2.94) в (2.93), получим:

$$\begin{cases} \dot{l} = L\left(\dfrac{1}{C} - \dfrac{\sin^2 l}{A} - \dfrac{\cos^2 l}{B}\right), \ \dot{\varphi}_2 = G\left(\dfrac{\sin^2 l}{A} + \dfrac{\cos^2 l}{B}\right), \\ \dot{L} = -\dfrac{1}{2}\left(G^2 - L^2\right)\left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B}\right)\sin 2l + \\ \quad + \dfrac{L}{\alpha_L}\left(\dfrac{\dot{C}}{C^2} - \dfrac{\dot{A}}{A^2}\sin^2 l - \dfrac{\dot{B}}{B^2}\cos^2 l\right), \\ \dot{G} = \dfrac{G}{\alpha_G}\left(\dfrac{\dot{A}}{A^2}\sin^2 l + \dfrac{\dot{B}}{B^2}\cos^2 l\right). \end{cases} \tag{2.95}$$

С учётом введённых обозначений (2.82) перепишем (2.95) в более компактном виде:

$$\begin{cases} \dot{l} = L\alpha_L, \quad \dot{\varphi}_2 = G\alpha_G, \\ \dot{L} = -\dfrac{1}{2}\left(G^2 - L^2\right)\left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B}\right)\sin 2l + \\ \quad + \dfrac{L}{\alpha_L}\left(\dfrac{\dot{C}}{C^2} - \dfrac{\dot{A}}{A^2}\sin^2 l - \dfrac{\dot{B}}{B^2}\cos^2 l\right), \\ \dot{G} = \dfrac{G}{\alpha_G}\left(\dfrac{\dot{A}}{A^2}\sin^2 l + \dfrac{\dot{B}}{B^2}\cos^2 l\right). \end{cases} \tag{2.96}$$

Уравнения (2.96) есть уравнения движения тела переменного состава в переменных Деприи, и могут в дальнейшем использоваться для анализа регулярной и хаотической динамики.

Глава 3

Моделирование пространственного движения соосных КА переменной массы

3.1. Инерционно-массовая модель реактивного двигателя твердого топлива

Прежде чем переходить к поиску зависимостей движения соосных тел с переменной массой от времени, рассмотрим некоторые вопросы, связанные с конструкцией и работой реактивных двигателей твердого топлива (РДТТ). РДТТ используются в качестве тормозных двигательных установок на малых спускаемых аппаратах (СА) систем дистанционного зондирования. Тормозная двигательная установка (ТДУ) является также вращающимся стабилизирующим блоком, поэтому ее инерционно-массовые характеристики, а также их изменение в процессе работы требуют отдельного рассмотрения. Для указанных целей предлагается краткий обзор основ конструкции и особенностей работы РДТТ подробно описанных, например, в [2, 3, 10].

РДТТ относятся к так называемым химическим или термохимическим ракетным двигателям. Все они работают по принципу превращения потенциальной химической энергии топлива в кинетическую энергию истекающих из двигателя газов. РДТТ состоит из корпуса, топливного заряда, реактивного сопла, воспламенителя и других элементов (рис. 3.1).

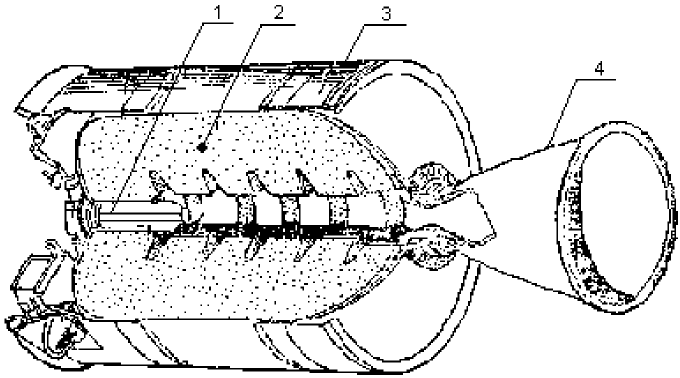

Рис. 3.1. Конструктивная схема РДТТ:
1 – воспламенитель, 2 – топливный заряд, 3 – корпус, 4 – сопло

Корпус РДТТ представляет собой прочный сосуд цилиндрической, сферической или другой формы, изготовленный либо из металла, либо из пластика. В корпусе содержится прочно скрепленный с ним заряд твердого топлива: обычно — механическая смесь кристаллического неорганического окислителя (например, перхлората аммония) с металлическим горючим (алюминий) и полимерным горючим связующим (полибутадиеновый каучук). Для зажигания топлива используется воспламенительное устройство, которое может входить непосредственно в конструкцию РДТТ или быть автономным. В простейшем случае воспламенительное устройство представляет собой быстровоспламеняющийся пакет дымного пороха в оболочке из материи или металла, который поджигается с помощью электрозапала или пиросвечи с пиропатроном.

В зависимости от конкретного назначения космические двигатели могут иметь тягу от сотых долей ньютона до нескольких меганьютонов, а продолжительность работы — от долей секунды до нескольких минут.

При всей простоте функциональной схемы РДТТ расчет его рабочих характеристик представляет собой сложную задачу. Решается она при помощи методов внутренней баллистики РДТТ, обсуждение которых выходит за рамки настоящего пособия и которые приведены в соответствующей литературе [2, 3, 10]. В этой связи отметим лишь основные особенности процессов выгорания, необходимые для дальнейшего механического моделирования движения КА с РДТТ.

Так, в том случае, когда физические условия во всех точках горящей поверхности заряда одинаковы и топливо однородно, оно сгорает равномерно, параллельными слоями, т.е. фронт горения перемещается от поверхностных слоев в глубь заряда с одинаковой скоростью во всех точках. Постоянство тяги или необходимое изменение ее во времени достигается применением топлив с разными скоростями горения и выбором соответствующей конфигурации топливного заряда.

Далее будем рассматривать КА с постоянной тягой ТДУ. Согласно гипотезе Циолковского [6] будет иметь место линейный закон изменения массы КА во все время работы РДТТ. На конце активного участка происходит мгновенное отключение ТДУ, так называемая «отсечка» тяги путем гашения заряда при быстром снижении давления в камере сгорания двигателя (пиротехнический пробой корпуса РДТТ, впрыскивание жидкости в камеру РДТТ и др. способы).

В космических РДТТ широко применяются так называемые заряды канального горения (рис. 3.2), сгорающие по поверхностям, которые образованы внутренними осевыми каналами круглого, звездообразного или другого поперечного сечения. Также распространены пакетные шашечные заряды, равномерно распределенные по объему камеры сгорания. Чтобы исключить горение по торцевым поверхностям (как и по части внутренних), на них наносят так называемые бронирующие покрытия на основе тех же материалов, что используются для теплозащиты корпуса. Часто применяются заряды более сложных конфигураций, образованных сочетанием простых форм.

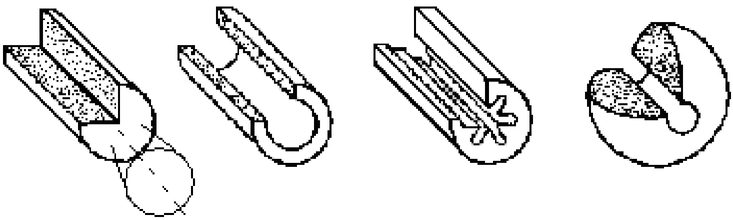

Рис. 3.2. Виды топливных зарядов РДТТ

Из линейного по времени закона расхода массы и анализа видов топливных зарядов, в особенности пакетно-шашечных и со звездообразной рабочей поверхностью, с высокой степенью точности следует линейный по времени закон убывания продольного и экваториального моментов инерции динамически симметричной ТДУ.

Проиллюстрируем это на примере выгорания цилиндрического заряда из цилиндрических шашек и со звездообразной рабочей поверхностью (рис. 3.3).

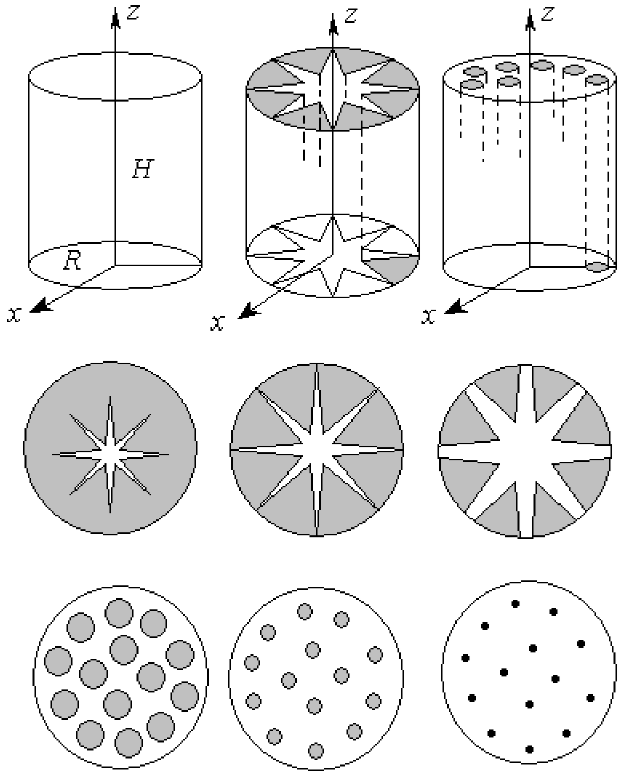

Рис. 3.3. Схемы выгорания зарядов

Моменты инерции однородного цилиндра радиуса R и высоты H можно вычислить по формулам:

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2, \quad I_x = m\left(\frac{H^2}{3} + \frac{R^2}{4}\right),$$

где m — масса однородного цилиндра.

Из схем выгорания приближенно можно заключить, что геометрическая конфигурация точек топлива почти не меняется в процессе выгорания, а топливо остается вполне равномерно распределенным по всему объему зарядов, и только средняя плотность топлива в общем объеме заряда равномерно и линейно убывает. Таким образом, заряд при работе РДТТ приближенно сохраняет топологическую конфигурацию и инерционные свойства цилиндра, что является справедливым для любой другой пространственной формы заряда. Так как моменты инерции сплошного равномерного цилиндра и любой другой равномерно заполненной материальной пространственной формы пропорциональны массе, которая линейно убывает во времени, то можно приближенно считать, что и моменты инерции зарядов также убывают по линейному закону:

$$I_z\left(t\right) \approx m\left(t\right)\frac{R^2}{2} = I_{z0} - at, \quad I_x\left(t\right) \approx \left(t\right)\left(\frac{H^2}{3} + \frac{R^2}{4}\right) = I_{x0} - bt.$$

Для других рабочих поверхностей и форм топливных зарядов вполне справедливым будет замечание о гораздо худшем соответствии изменения моментов инерции линейному закону. Однако, и для остальных форм зарядов на начальном этапе можно принять линейный закон изменения моментов инерции, хотя бы для проведения самого первого и весьма приближенного анализа движения.

Таким образом, приведено обоснование возможности использования линейных законов изменения для всех инерционно-массовых характеристик КА с РДТТ при постоянном расходе топлива, включая продольные и экваториальные моменты инерции.

3.2. Влияние пространственного движения КА на траекторное движение его центра масс

Одним из важных этапов движения КА переменного состава (массы) является его межорбитальный переход. Не ограничивая общности, рассмотрим выполнение межорбитального перехода КА на примере его спуска с орбиты, когда выполняется переход с рабочей орбиты на орбиту спуска (приводящую ко входу в атмосферу). Для реализации межорбитального перехода обычно выдается импульс тяги, изменяющий скорость центра масс КА, а, следовательно, и его орбиту. В случае выполнения спуска КА такой импульс должен обеспечить требуемые начальные условия входа КА в плотные слои атмосферы [5, 11] — обычно этот импульс является тормозящим. Посадка КА в штатном режиме в заданной области с минимальной величиной рассеивания точек посадки во многом определяется характеристиками аппарата и начальными условиями входа КА в атмосферу (рис. 3.4).

Работа ТДУ, создающей тормозную тягу, может продолжаться от нескольких секунд до нескольких десятков секунд. Для того чтобы сформировать и выдерживать все время работы ТДУ нужное направление вектора тормозной тяги, необходимо соответственным образом сориентировать продольную ось КА и каким-либо способом стабилизировать это направление.

Неэффективная стабилизация направления вектора тяги (продольной оси КА) приводит к возникновению прецессионного движения, «распыляющего» тягу, что в итоге изменяет его расчетное направление и величину, а также порождают ошибку в реализации межорбитального перехода (возмущает конечную орбиту). При реализации спуска КА это приводит к увеличению зоны рассеивания точек посадки (рис. 3.4).

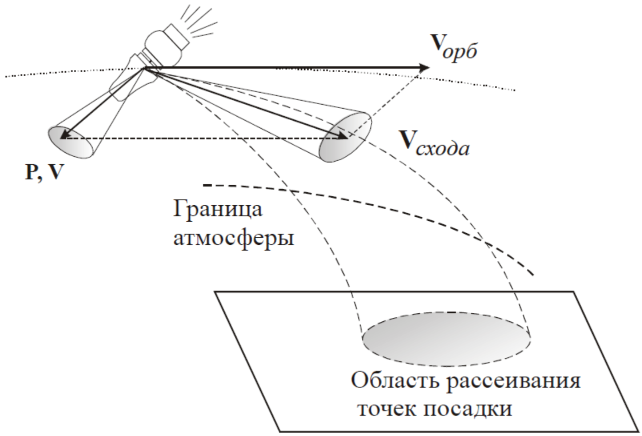

Рис. 3.4. Рассеивание точек посадки:
P, V – тормозной импульс и придаваемая им скорость, $V_{\text{орб}}$ – орбитальная скорость, $V_{\text{схода}}$ – результирующая скорость входа в атмосферу

Из описанного выше следует, что для выполнения точных межорбитальных переходов необходимо учитывать пространственное движение КА переменного состава вокруг центра масс и его влияние на траекторное движение центра масс КА.

Для этих целей можно использовать гироскопическую стабилизацию продольной оси КА, основанную на приведении в быстрое вращение целиком всего КА, либо его части, выполняющей функции стабилизирующего блока. КА, допускающий закрутку стабилизирующего блока, можно назвать спускаемым аппаратом с двойным вращением, а сам способ стабилизации — стабилизацией частичной закруткой.

3.3. Уравнения движения соосных тел переменной массы

Одной из возможных причин, изменяющей расчетный угол входа в атмосферу, является рассеивание тормозного импульса, уводящего СА с околоземной орбиты. Рассеивание тормозного импульса происходит из-за отклонений от выбранного направления вектора тормозной тяги вследствие нутационных колебаний и прецессии. После включения тормозной двигательной установки происходит расход топлива и, в силу изменения инерционно-массовых параметров, СА становится системой переменного состава. В этой связи представляется немаловажной оценка влияния изменения инерционно-массовых параметров на пространственное движение аппарата. Особое значение в этом случае имеет эволюция зависимости от времени угла нутации, определяющего пространственное отклонение продольной оси СА от стабилизируемого положения и, следовательно, рассеивание тормозного импульса.

Рассмотрим пространственное движение спускаемого аппарата с двойным вращением на активном участке траектории спуска. Построим уравнения движения СА относительно выбранного полюса, совпадающего с начальным положением центра масс аппарата, как системы соосных тел с переменной массой.

Выгорание топлива приводит к изменению инерционно-массовых параметров двигательной установки, представляющей собой вращающийся стабилизирующий блок. Вследствие выгорания топлива будет изменяться относительное положение центра масс СА.

Для моделирования движения спускаемого аппарата с вращающейся включенной ТДУ можно применить механическую систему соосных тел с переменной массой одного из тел, при этом по-прежнему первым соосным телом будем считать вращающуюся двигательную установку, а вторым – спускаемый аппарат или капсулу.

Для описания движения тела переменной массы примем гипотезу контактного взаимодействия отбрасываемых частиц и тела, так называемую гипотезу «близкодействия» [6], согласно которой частицы, получившие относительную скорость при отделении от тела, уже не принадлежат телу и никак на него не действуют.

Для вывода уравнений движения системы соосных тел с переменной массой воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента. Следует учесть тот факт, что центр масс, как уже было замечено, движется относительно тел системы вследствие изменения массы первого соосного тела. Поэтому целесообразно записывать уравнения движения в системе координат, жестко связанной с телами и имеющей начало в точке одного из тел, совпадающей с начальным положением центра масс.

Введем следующие системы координат (рис. 3.5): $C\xi\eta\zeta$ — неподвижная в абсолютном пространстве система координат; $OXYZ$ — подвижная система координат с началом в точке системы O, оси которой остаются коллинеарными осям неподвижной системы все время движения; $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ — системы координат, жестко связанные соответственно с телами 2 и 1, вращающиеся относительно системы $OXYZ$.

Для построения уравнений движения вычислим кинетический момент системы с переменной массой (см. п. 1.4).

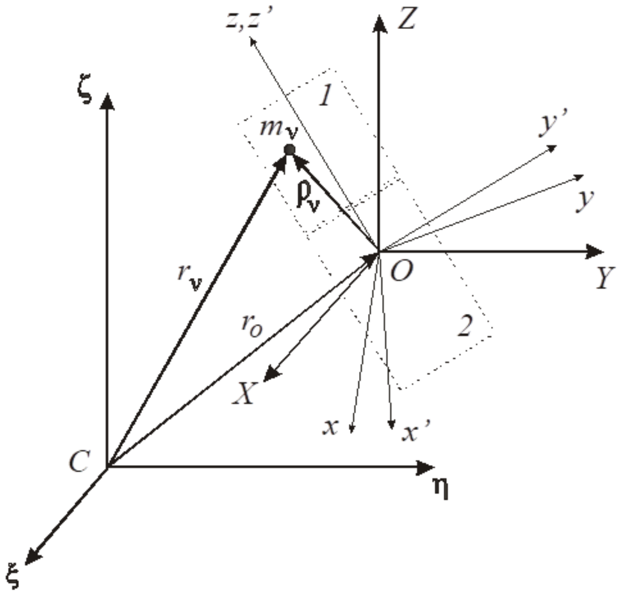

Рис. 3.5. Используемые системы координат

Запишем кинетический момент соосных тел в неподвижной системе координат как сумму кинетических моментов всех точек, составляющих эти тела. Из рис. 3.5 видно, что

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_\nu. \tag{3.1}$$

Точки, входящие в состав системы, отличаются своей принадлежностью к телу 1 или к телу 2. При выводе уравнений будем различать принадлежность точек телам 1 и 2 индексами ν_1 и ν_2.

Дифференцируя выражение (3.1) по времени, для скоростей точек получим:

$$\vec{v}_{\nu_i} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{\nu_i}, \qquad (i = 1, 2)\,, \tag{3.2}$$

где $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ — угловые скорости движения связанных с телами 1 и 2 систем координат $Ox'y'z'$ и $Oxyz$ соответственно.

Тогда кинетический момент системы запишется:

$$\vec{K} = \sum_{\nu_1} \vec{r}_{\nu_1} \times m_{\nu_1}\vec{v}_{\nu_1} + \sum_{\nu_2} \vec{r}_{\nu_2} \times m_{\nu_2}\vec{v}_{\nu_2}. \tag{3.3}$$

Очевидны следующие соотношения:

$$\sum_{\nu_i} m_{\nu_i} = m_i, \qquad \sum_{\nu_i} \vec{\rho}_{\nu_i} m_{\nu_i} = \vec{\rho}_{C_i} m_i,$$

где индекс $_i$ указывает на центр масс тела i.

С учетом (3.1) и (3.2), а также последних соотношений, выражение (3.3) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\vec{K} = \sum_{\nu_1} m_{\nu_1}\vec{\rho}_{\nu_1} \times \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1} + \\
+ \vec{r}_O \times m_1\vec{v}_O + \\
+ \vec{\rho}_{C_1} \times m_1\vec{v}_O + \\
+ \vec{r}_O \times \vec{\omega}_1 \times m_1\vec{\rho}_{C_1} + \\
+ \sum_{\nu_2} m_{\nu_2}\vec{\rho}_{\nu_2} \times \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2} + \\
+ \vec{r}_O \times m_2\vec{v}_O + \\
+ \vec{\rho}_{C_2} \times m_2\vec{v}_O + \\
+ \vec{r}_O \times \vec{\omega}_2 \times m_2\vec{\rho}_{C_2} = \\
= \vec{K}_{1,O} + \vec{r}_O \times m_1\vec{v}^{(e)}_{C_1} + \vec{\rho}_{C_1} \times m_1\vec{v}_O + \\
+ \vec{K}_{2,O} + \vec{r}_O \times m_2\vec{v}^{(e)}_{C_2} + \vec{\rho}_{C_2} \times m_2\vec{v}_O = \vec{K}_1 + \vec{K}_2,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\vec{K}_{1,O} = \sum_{\nu_1} m_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}, \quad \vec{K}_{2,O} = \sum_{\nu_2} m_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}$$

есть кинетические моменты тел 1 и 2 относительно точки O, вычисленные в системе координат $OXYZ$;

$$\vec{v}_{C_1}^{(e)} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{C_1}, \qquad \vec{v}_{C_2}^{(e)} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{C_2}$$

суть переносные скорости центов масс тел 1 и 2;

$$\begin{aligned} \vec{K}_1 &= \vec{K}_{1,O} + m_1 \vec{r}_O \times \vec{v}_{C_1}^{(e)} + \vec{\rho}_{C_1} \times m_1 \vec{v}_O, \\ \vec{K}_2 &= \vec{K}_{2,O} + m_2 \vec{r}_O \times \vec{v}_{C_2}^{(e)} + \vec{\rho}_{C_2} \times m_2 \vec{v}_O \end{aligned} \tag{3.5}$$

есть кинетические моменты тел 1 и 2, вычисленные отдельно в неподвижной системе координат $C\xi\eta\zeta$.

Запишем теорему об изменении кинетического момента системы переменной массы (см. формулу (1.32) на стр. 28):

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\mathfrak{M}}^{(e)} + \vec{\mathfrak{M}}^{(r)} + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu, \tag{1.32}$$

где $\vec{\mathfrak{M}}^{(e)}$ — главный момент внешних сил; $\vec{\mathfrak{M}}^{(r)}$ — главный момент реактивных сил; $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times \dfrac{dm_\nu}{dt} \vec{v}_\nu$ — сумма моментов количеств движений частиц, отброшенных в единицу времени в их переносном движении относительно системы координат $C\xi\eta\zeta$.

Следуя логике, описанной в п. 1.5, запишем теорему об изменении кинетического момента системы соосных тел относительно поступательно движущихся относительно неподвижного пространства осей $OXYZ$.

Получим некоторые вспомогательные соотношения. Вычислим скорость изменения радиусов векторов центров масс тел в системе $OXYZ$:

$$\frac{d\vec{\rho}_{C_i}}{dt} = \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{C_i} + \vec{q}_{C_i}, \tag{3.6}$$

где $\vec{q}_{C_i}$ — относительная скорость центра масс C_i, обусловленная изменением его положения относительно тел в связи с переменностью их масс.

Принимая во внимание соотношение (3.6), найдем производную переносной скорости центров масс тел:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}^{(e)}_{C_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}_O + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{C_i}\right] = \\ = \vec{w}_O + \vec{\varepsilon}_i \times \vec{\rho}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{q}_{C_i} = \\ = \vec{w}^{(e)}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{q}_{C_i},\end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\vec{w}^{(e)}_{C_i} = \vec{w}_O + \vec{\varepsilon}_i \times \vec{\rho}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{C_i}. \tag{3.8}$$

Последнее выражение определяет ускорение той точки подвижного пространства, с которой в данный момент совпадает центр масс тела i, т.е. переносное ускорение центра масс C_i.

Распишем также величину $\sum\limits_{\nu_i} \frac{dm_{\nu_i}}{dt}\left(\vec{\omega}_i \times \rho_{\nu_i}\right)$, необходимую для дальнейших преобразований:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu_i} \frac{dm_{\nu_i}}{dt}\left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{\nu_i}\right) = \vec{\omega}_i \times \sum_{\nu_i} \frac{dm_{\nu_i}}{dt}\vec{\rho}_{\nu_i} = \\ = \vec{\omega}_i \times \left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu_i} m_{\nu_i}\vec{\rho}_{\nu_i}\right) - \sum_{\nu_i} m_{\nu_i}\dot{\vec{\rho}}_{\nu_i}\right] =\end{aligned}$$

$$= \vec{\omega}_i \times \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{\rho}_{C_i} \right) - \sum_{\nu_i} m_{\nu_i} \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{\nu_i} \right) \right] =$$

$$= \vec{\omega}_i \times \left[\frac{dm_i}{dt} \vec{\rho}_{C_i} + m_i \dot{\vec{\rho}}_{C_i} - \vec{\omega}_i \times \sum_{\nu_i} m_{\nu_i} \vec{\rho}_{\nu_i} \right] =$$

$$= \vec{\omega}_i \times \left[\frac{dm_i}{dt} \vec{\rho}_{C_i} + m_i \dot{\vec{\rho}}_{C_i} - \vec{\omega}_i \times m_i \vec{\rho}_{C_i} \right] =$$

$$= \vec{\omega}_i \times \left[\frac{dm_i}{dt} \vec{\rho}_{C_i} + m_i \left(\vec{q}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{C_i} \right) - \vec{\omega}_i \times m_i \vec{\rho}_{C_i} \right] =$$

$$= \vec{\omega}_i \times \left[\frac{dm_i}{dt} \vec{\rho}_{C_i} + m_i \vec{q}_{C_i} \right]. \tag{3.9}$$

Для того, чтобы получить теорему об изменении кинетического момента относительно поступательно движущихся осей, воспользуемся (1.32), преобразовав правую и левую части выражения (1.32) с учетом соотношений (3.6)–(3.9). Продифференцируем по времени выражение для кинетического момента системы (3.4):

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d\vec{K}_{1,O}}{dt} +$$
$$+ \vec{v}_O \times m_1 \vec{v}_{C_1}^{(e)} + \vec{r}_O \times \frac{dm_1}{dt} \vec{v}_{C_1}^{(e)} +$$
$$+ \vec{r}_O \times m_1 \left(\vec{w}_{C_1}^{(e)} + \vec{\omega}_1 \times \vec{q}_{C_1} \right) +$$
$$+ \left(\vec{q}_{C_1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{C_1} \right) \times m_1 \vec{v}_O +$$
$$+ \vec{\rho}_{C_1} \times \frac{dm_1}{dt} \vec{v}_O + \vec{\rho}_{C_1} \times m_1 \frac{d\vec{v}_O}{dt} +$$
$$+ \frac{d\vec{K}_{2,O}}{dt} +$$
$$+ \vec{v}_O \times m_2 \vec{v}_{C_2}^{(e)} + \vec{r}_O \times \frac{dm_2}{dt} \vec{v}_{C_2}^{(e)} +$$
$$+ \vec{r}_O \times m_2 \left(\vec{w}_{C_2}^{(e)} + \vec{\omega}_2 \times \vec{q}_{C_2} \right) +$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\vec{q}_{C_2} + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{C_2}) \times m_2 \vec{v}_O + \\
&\qquad + \vec{\rho}_{C_2} \times \frac{dm_2}{dt}\vec{v}_O + \vec{\rho}_{C_2} \times m_2 \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \\
&= \frac{d\vec{K}_{1,O}}{dt} + \\
&\quad + \vec{r}_O \times \frac{dm_1}{dt}\vec{v}^{(e)}_{C_1} + \\
&\qquad + \vec{r}_O \times m_1 \left(\vec{w}^{(e)}_{C_1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{q}_{C_1}\right) + \\
&\qquad\quad + \vec{q}_{C_1} \times m_1 \vec{v}_O + \\
&\qquad\qquad + \vec{\rho}_{C_1} \times \frac{dm_1}{dt}\vec{v}_O + \vec{\rho}_{C_1} \times m_1 \vec{w}_O + \\
&+ \frac{d\vec{K}_{2,O}}{dt} + \\
&\quad + \vec{r}_O \times \frac{dm_2}{dt}\vec{v}^{(e)}_{C_2} + \\
&\qquad + \vec{r}_O \times m_2 \left(\vec{w}^{(e)}_{C_2} + \vec{\omega}_2 \times \vec{q}_{C_2}\right) + \\
&\qquad\quad + \vec{q}_{C_2} \times m_2 \vec{v}_O + \\
&\qquad\qquad + \vec{\rho}_{C_2} \times \frac{dm_2}{dt}\vec{v}_O + \vec{\rho}_{C_2} \times m_2 \vec{w}_O. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Выражение (3.10) есть аналог выражения (1.45), записанный для двух тел. Преобразуем правую часть выражения (1.32), но уже для системы двух тел:

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathfrak{M}}^{(e)} &= \vec{\mathfrak{M}}^{(e)}_1 + \vec{\mathfrak{M}}^{(e)}_2 = \\
&= \vec{r}_O \times \vec{R}^{(e)}_1 + \vec{r}_O \times \vec{R}^{(e)}_2 + \vec{\mathfrak{M}}^{(e)}_O = \vec{r}_O \times \vec{R}^{(e)} + \vec{\mathfrak{M}}^{(e)}_O, \\
\vec{\mathfrak{M}}^{(r)} &= \vec{\mathfrak{M}}^{(r)}_1 + \vec{\mathfrak{M}}^{(r)}_2 = \\
&= \vec{r}_O \times \vec{\Phi}^{(r)}_1 + \vec{r}_O \times \vec{\Phi}^{(r)}_2 + \vec{\mathfrak{M}}^{(r)}_O = \vec{r}_O \times \vec{\Phi}^{(r)} + \vec{\mathfrak{M}}^{(r)}_O,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times \frac{dm_{\nu}}{dt} \vec{v}_{\nu} = \sum_{\nu_1} \vec{r}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \vec{v}_{\nu_1} + \sum_{\nu_2} \vec{r}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt} \vec{v}_{\nu_2} = \\
&= \vec{r}_O \times \frac{dm_1}{dt} \vec{v}_O + \vec{r}_O \times m_1 \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{q}_{C_1}\right) + \vec{r}_O \times \frac{dm_1}{dt} \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{C_1}\right) + \\
&\qquad + \left[m_1 \vec{q}_{C_1} + \frac{dm_1}{dt} \vec{\rho}_{C_1} \right] \times \vec{v}_O + \\
&\qquad\qquad + \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right) + \\
&+ \vec{r}_O \times \frac{dm_2}{dt} \vec{v}_O + \vec{r}_O \times m_2 \left(\vec{\omega}_2 \times \vec{q}_{C_2}\right) + \vec{r}_O \times \frac{dm_2}{dt} \left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{C_2}\right) + \\
&\qquad + \left[m_2 \vec{q}_{C_2} + \frac{dm_2}{dt} \vec{\rho}_{C_2} \right] \times \vec{v}_O + \\
&\qquad\qquad + \sum_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt} \left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}\right),
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

где $\vec{R}_i^{(e)}$, $\vec{\Phi}_i^{(r)}$ — результирующие всех внешних и всех реактивных сил, приложенных к телу i; $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_O^{(e)}$ и $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_O^{(r)}$ — главные моменты внешних и реактивных сил относительно точки O.

Выражения (3.11) есть аналоги выражений (1.46), записанный для двух соосных тел.

С учетом (3.10) и (3.11) после сокращений выражение для теоремы об изменении кинетического момента (1.32) запишется:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\vec{K}_{1,O}}{dt} + \vec{r}_O \times m_1 \vec{w}_{C_1}^{(e)} + \vec{\rho}_{C_1} \times m_1 \vec{w}_O + \\
&+ \frac{d\vec{K}_{2,O}}{dt} + \vec{r}_O \times m_2 \vec{w}_{C_2}^{(e)} + \vec{\rho}_{C_2} \times m_2 \vec{w}_O = \\
&\qquad = \vec{r}_O \times \vec{R}_1^{(e)} + \vec{r}_O \times \vec{\Phi}_1^{(r)} + \\
&\qquad\qquad + \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right) +
\end{aligned}
$$

$$+\vec{r}_O \times \vec{R}_2^{(e)} + \vec{r}_O \times \vec{\Phi}_2^{(r)} + \\ + \sum_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt} (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}) + \\ + \vec{\mathfrak{M}}_O^{(e)} + \vec{\mathfrak{M}}_O^{(r)}. \tag{3.12}$$

Запишем теорему о движении центра масс системы переменной массы (см. формулу (1.17) на стр. 16):

$$m\vec{w}_C^{(e)} = \vec{R}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(r)}. \tag{1.17}$$

На основании теоремы (1.17) запишем для центров масс тел следующие уравнения движения, добавив к активным внешним и реактивным силам силы взаимодействия тел:

$$\begin{aligned} m_1\vec{w}_{C_1}^{(e)} &= \vec{R}_1^{(e)} + \vec{\Phi}_1^{(r)} + \vec{N}_{12}, \\ m_2\vec{w}_{C_2}^{(e)} &= \vec{R}_2^{(e)} + \vec{\Phi}_2^{(r)} + \vec{N}_{21}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $\vec{N}_{ij}$ — сила, действующая на тело i со стороны тела j, причем по закону равенства сил действия и противодействия:

$$\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21}.$$

Из последних соотношений следует:

$$\begin{aligned} \vec{r}_O \times m_1\vec{w}_{C_1}^{(e)} &= \vec{r}_O \times \left(\vec{R}_1^{(e)} + \vec{\Phi}_1^{(r)} + \vec{N}_{12}\right), \\ \vec{r}_O \times m_2\vec{w}_{C_2}^{(e)} &= \vec{r}_O \times \left(\vec{R}_2^{(e)} + \vec{\Phi}_2^{(r)} - \vec{N}_{12}\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Используя определение центра масс можно записать:

$$\vec{\rho}_C \times m\vec{w}_O = \left(\frac{\vec{\rho}_{C_1}m_1 + \vec{\rho}_{C_2}m_2}{m}\right) \times m\vec{w}_O =$$

$$= \vec{\rho}_{C_1} \times m_1 \vec{w}_O + \vec{\rho}_{C_2} \times m_2 \vec{w}_O, \quad (3.15)$$

где m — масса системы двух тел.

С учетом (3.14) и (3.15) теорему об изменении кинетического момента относительно системы осей $OXYZ$ можно записать:

$$\frac{d\vec{K}_{1,O}}{dt} + \frac{d\vec{K}_{2,O}}{dt} = \vec{\mathfrak{M}}_O^{(e)} + \vec{\mathfrak{M}}_O^{(r)} + \\ + \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt} (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}) + \sum_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt} (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}) - \\ - \vec{\rho}_C \times m \vec{w}_O. \quad (3.16)$$

Распишем левую часть выражения (3.16) с использованием понятия локальной производной в связанных с телами системах координат. При этом локальную производную от кинетического момента тела 2 будем искать в связанной с телом системе координат $Oxyz$, вращающейся относительно $OXYZ$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, а локальную производную от кинетического момента тела 1 — в системе $Ox'y'z'$, вращающейся со скоростью $\vec{\omega}_1$.

Учитывая последнее обстоятельство, для системы $OXYZ$ запишем:

$$\left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{1,O}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_{1,O} + \left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{2,O}}{dt}\right)_{Oxyz} + \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_{2,O} = \\ = \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt} (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}) + \sum_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt} (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}) - \\ - \vec{\rho}_C \times m \vec{w}_O + \vec{\mathfrak{M}}_O^{(e)} + \vec{\mathfrak{M}}_O^{(r)}, \quad (3.17)$$

где за скобками локальных производных в нижнем индексе указаны системы координат, в которых они берутся.

Перепишем выражение (3.17) в следующем окончательном виде:

$$\left[\left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{1,O}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} - \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right)\right] + \\ + \left[\left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{2,O}}{dt}\right)_{Oxyz} - \sum_{\nu_2} \vec{\rho}_{\nu_2} \times \frac{dm_{\nu_2}}{dt}\left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{\nu_2}\right)\right] + \\ + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_{1,O} + \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_{2,O} = \\ = \vec{\mathfrak{M}}_O^{(e)} + \vec{\mathfrak{M}}_O^{(r)} - \vec{\rho}_C \times m\vec{w}_O. \quad (3.18)$$

После приведенных выше общих рассуждений перейдем к построению уравнений движения спускаемого аппарата с двойным вращением как системы соосных тел, опираясь его на конкретные конструктивные особенности. Переменным по массе примем лишь тело 1, соответствующее тормозной двигательной установке. Из этого следует, что тело 2, соответствующее спускаемой капсуле, не создает реактивных сил, а также, в отличие от тела 1, не изменяет своих инерционно-массовых параметров, вычисленных в связанной с телом системе координат $Oxyz$ (так как точка не изменяет своего положения относительно тел).

Пусть тела 1 и 2 являются динамически симметричными, и пусть в процессе изменения массы тела 1 его динамическая симметрия не нарушается. При этом центр масс системы двух тел смещается с некоторой скоростью q_C строго вдоль направления продольной оси в сторону центра масс тела 2. Выберем за точку , как уже отмечалось, точку, совпадающую с начальным положением центра масс системы (рис. 3.6).

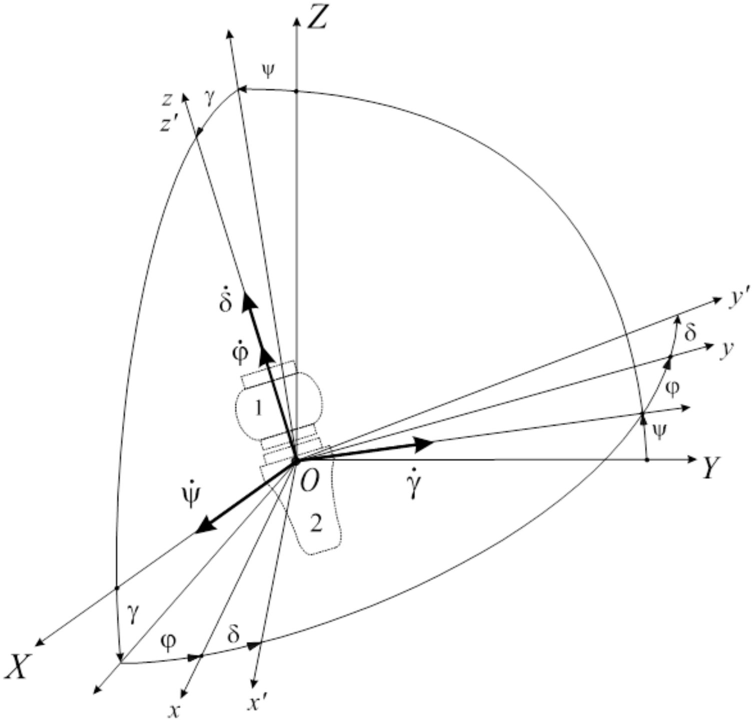

Рис. 3.6. Используемые системы координат
и параметры ориентации

Предположим также, что отброс точек при выработке топлива происходит строго в направлении продольной оси без линейных и угловых эксцентриситетов тяги, и тогда моменты от реактивных сил относительно точки будут отсутствовать. Запишем угловые скорости и кинетические моменты тел в проекциях на оси своих связанных систем координат:

$$\vec{\omega}_1 = p'\vec{i}' + q'\vec{j}' + r'\vec{k}',$$
$$\vec{\omega}_2 = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k},$$

$$\vec{K}_{1,O} = A_1(t)p'\vec{i}' + A_1(t)q'\vec{j}' + C_1(t)r'\vec{k}',$$
$$\vec{K}_{2,O} = A_2 p\vec{i} + A_2 q\vec{j} + C_2 r\vec{k},$$

где A_i и C_i — моменты экваториальный и продольный моменты инерции тела i, вычисленные в связанной с телом системе координат (для тела 2 — $Oxyz$, для тела 1 — $Ox'y'z'$), $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, $\left\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\right\}$ — орты указанных систем.

Тела системы могут вращаться относительно друг друга лишь в направлении общей продольной оси, совпадающей с Oz (а также с Oz'). При этом угол и скорость закручивания тела 1 относительно тела 2 в направлении продольной оси Oz обозначим, соответственно, как δ и σ, причем $\sigma = \dot{\delta}$. Ориентация соосных тел как спускаемого аппарата с двойным вращением и используемые системы координат указаны на рис. 3.6. Для рассматриваемого вида относительного движения тел будем иметь следующую связь компонент угловых скоростей тел:

$$p' = p\cos\delta + q\sin\delta, \quad q' = q\cos\delta - p\sin\delta, \quad r' = r + \sigma. \quad (3.19)$$

Рассмотрим свободное движение системы соосных тел переменной массы при отсутствии внешних сил и моментов. При выбранных предположениях выражение (3.18), определяющее теорему об изменении кинетического момента в поступательно движущихся осях $OXYZ$, запишется:

$$\left[\left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{1,O}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} - \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right)\right] + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_{1,O} +$$
$$+ \left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{2,O}}{dt}\right)_{Oxyz} + \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_{2,O} = -\vec{\rho}_C \times m\vec{w}_O. \quad (3.20)$$

Распишем проекцию на ось Ox' связанной с телом 1 системы координат $Ox'y'z'$ величины, стоящей в квадратных скобках в выражении (3.20). Опираясь на определение понятий главных и центробежных моментов инерции тел, а также на предположение о том, что динамическая симметрия тела 1 не нарушается в процессе изменения его массы (центробежные моменты инерции тождественно равны нулю), можно записать:

$$\vec{L} \overset{df}{=} \left(\frac{\tilde{d}\vec{K}_{1,O}}{dt}\right)_{Ox'y'z'} - \sum_{\nu_1} \vec{\rho}_{\nu_1} \times \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1}\right),$$

$$L_{x'} = \frac{dA_1}{dt} p' + A_1 \dot{p}' - \sum_{\nu_1} \left[\vec{\omega}_1 \rho_{\nu_1}^2 - \vec{\rho}_{\nu_1} \left(\vec{\rho}_{\nu_1} \cdot \vec{\omega}_1\right)\right]_{x'} =$$

$$= \frac{dA_1}{dt} p' + A_1 \dot{p}' - p' \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left(y_{\nu_1}'^2 + z_{\nu_1}'^2\right) +$$

$$+ q' \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} x'_{\nu_1} y'_{\nu_1} + r' \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} x'_{\nu_1} z'_{\nu_1} =$$

$$= \frac{dA_1}{dt} p' + A_1 \dot{p}' - p' \frac{dA_1}{dt} = A_1 \dot{p}'.$$

Аналогично находятся две другие проекции и поэтому для введенного вектора $\vec{L}$ можно записать:

$$L_{x'} = A_1 \dot{p}', \quad L_{y'} = A_1 \dot{q}', \quad L_{z'} = C_1 \dot{r}'. \tag{3.21}$$

Найдем проекции на оси системы координат $Oxyz$ произвольного вектора $\vec{a}$, записанного в проекциях на оси системы $Ox'y'z'$:

$$a_x = a_{x'} \cos\delta - a_{y'} \sin\delta; \;\; a_y = a_{y'} \cos\delta + a_{x'} \sin\delta; \;\; a_z = a_{z'}. \tag{3.22}$$

Запишем выражение (3.20) в проекциях на оси связанной с телом 2 системы координат $Oxyz$, опираясь на соотношения (3.19) и выражения (3.21), (3.22):

$$\begin{aligned}
&(A_2 + A_1(t))\,\dot{p} + (C_2 + C_1(t) - A_2 - A_1(t))\,qr + \\
&\qquad + C_1(t)q\sigma = -[m\vec{\rho}_C \times \vec{w}_O]_x, \\
&(A_2 + A_1(t))\,\dot{q} + (A_2 + A_1(t) - C_2 - C_1(t))\,pr - \\
&\qquad - C_1(t)p\sigma = -[m\vec{\rho}_C \times \vec{w}_O]_y, \\
&C_2\dot{r} + C_1(t)\,(\dot{r} + \dot{\sigma}) = -[m\vec{\rho}_C \times \vec{w}_O]_z.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

В силу принятых предположений о характере изменения массы системы, проекции векторов скорости относительного движения центра масс и его текущего положения в обеих системах координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ запишутся одинаково:

$$\begin{aligned}
&q_{Cx} = q_{Cx'} = 0; \quad q_{Cy} = q_{Cy'} = 0; \quad q_{Cz} = q_{Cz'} \overset{df}{=} -q_C; \\
&\rho_{Cx} = \rho_{Cx'} = 0; \quad \rho_{Cy} = \rho_{Cy'} = 0; \quad \rho_{Cz} = \rho_{Cz'} \overset{df}{=} \rho_C.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Используя выражение (3.8) и уравнения движения центров масс (3.13) при отсутствии внешних сил и моментов в системе координат $Oxyz$ можно записать:

$$\vec{w}_O = \frac{1}{m}\left(\vec{\Phi}^{(r)} - \vec{\varepsilon}_2 \times m\vec{\rho}_C - m\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_C\right). \tag{3.25}$$

Так как $\vec{\Phi}^{(r)} = \left(0,\ 0,\ \Phi_z^{(r)}\right)$, а $\vec{\rho}_C \times \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_C = 0$, то, вычисляя правые части выражений (3.23), в проекциях на оси $Oxyz$ в матричном виде получим:

$$[m\vec{\rho}_C \times \vec{w}_O] = -m\rho_C^2 \cdot \begin{bmatrix} \dot{p} & \dot{q} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{3.26}$$

В последнем выражении проекция центра масс системы на продольную ось изменяется во времени, т.е. $\rho_C = \rho_C(t)$.

С учетом (3.26) уравнения (3.23) запишутся:

$$\begin{gathered}
\left(A_2 + A_1(t) - m\rho_C^2(t)\right)\dot{p} + \\
+ \left(C_2 + C_1(t) - A_2 - A_1(t)\right)qr + C_1(t)q\sigma = 0, \\
\left(A_2 + A_1(t) - m\rho_C^2(t)\right)\dot{q} + \\
+ \left(A_2 + A_1(t) - C_2 - C_1(t)\right)pr - C_1(t)p\sigma = 0, \\
C_2\dot{r} + C_1(t)\left(\dot{r} + \dot{\sigma}\right) = 0.
\end{gathered} \tag{3.27}$$

Будем рассматривать такие системы соосных тел, для которых характерны малые относительные смещения центра масс в процессе изменения массы и, следовательно, величины $m\rho_C^2(t)$ можно исключить из рассмотрения. Например, в практических задачах дистанционного зондирования земной поверхности используются такие малые СА, для которых величина ρ_C^2 за все время движения не становится больше 0,03 м. При этом подобные аппараты имеют следующие примерные диапазоны изменения инерционно-массовых параметров в процессе выработки топлива:

$$\begin{gathered}
m \sim 65 \div 50 \text{ кг}, \\
A_1 \sim 3 \div 1 \text{ кгм}^2, \quad A_2 \sim 3 \text{ кгм}^2, \\
C_1 \sim 0,4 \div 0,2 \text{ кгм}^2, \quad C_2 \sim 0,3 \text{ кгм}^2.
\end{gathered}$$

Для таких СА справедливы следующие ограничения, накладываемые на инерционно-массовые параметры:

$$\sup_t m\rho_C^2(t) < 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad A_2 + A_1(t) \gg m\rho_C^2(t),$$

поэтому в уравнениях (3.27) можно опустить из рассмотрения величины $m\rho_C^2(t)$.

С учетом последнего предположения уравнения свободного движения системы соосных тел с переменной массой можно записать:

$$\begin{gathered}
(A_2 + A_1(t))\,\dot{p} + \\
\qquad + (C_2 + C_1(t) - A_2 - A_1(t))\,qr + C_1(t)q\sigma = 0, \\
(A_2 + A_1(t))\,\dot{q} + \\
\qquad + (A_2 + A_1(t) - C_2 - C_1(t))\,pr - C_1(t)p\sigma = 0, \\
C_2\dot{r} + C_1(t)\,(\dot{r} + \dot{\sigma}) = 0.
\end{gathered} \tag{3.28}$$

Система (3.28) показывает, что уравнения движения соосных тел с переменной массой в случае небольших относительных смещений центра масс отличаются от уравнений движения соосных тел постоянной массы лишь тем, что моменты инерции переменны во времени.

Уравнение для относительного угла закручивания можно получить с помощью уравнения Лагранжа второго рода, общий вид которого с учетом переменности массы можно записать (см. выражение (2.11) на стр. 48):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\partial T}{\partial \delta} = Q_\delta + P_\delta.$$

Вычислим обобщенную реактивную силу. P_δ, используя (2.9) (стр. 48). Будем иметь:

$$P_\delta = \sum_{\nu} \frac{dm_\nu}{dt}\left(\vec{u}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \sigma}\right) = \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt}\left(\vec{u}_{\nu_1} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{\nu_1}}{\partial \sigma}\right) =$$

$$= \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \vec{u}_{\nu_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1} \right) =$$

$$= \sum_{\nu_1} \left(\frac{dm_{\nu_1}}{dt} \vec{u}_{\nu_1} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial \sigma} \times \vec{\rho}_{\nu_1} \right) =$$

$$= \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \begin{vmatrix} u_{x\nu_1} & u_{y\nu_1} & u_{z\nu_1} \\ 0 & 0 & 1 \\ x_{\nu_1} & y_{\nu_1} & z_{\nu_1} \end{vmatrix} = \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left[u_{y\nu_1} x_{\nu_1} - u_{x\nu_1} y_{\nu_1} \right].$$

Так как $\vec{u}_{\nu_1} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{\nu_1} + \vec{V}_{r\nu_1}$, а также предполагая, что реактивная тяга направлена только вдоль продольной оси:

$$\sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} V_{xr\nu_1} = \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} V_{yr\nu_1} = 0,$$

$$\sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} V_{zr\nu_1} = \Phi_z^{(r)},$$

запишем последнее выражение в виде:

$$P_\delta = \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left[u_{y\nu_1} x_{\nu_1} - u_{x\nu_1} y_{\nu_1} \right] =$$

$$= \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left[v_{Oy} x_{\nu_1} - v_{Ox} y_{\nu_1} \right] + \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left[x_{\nu_1}^2 + y_{\nu_1}^2 \right] \cdot (r + \sigma) +$$

$$+ \sum_{\nu_1} \frac{dm_{\nu_1}}{dt} \left[-p x_{\nu_1} z_{\nu_1} - q y_{\nu_1} z_{\nu_1} \right] =$$

$$= \sum_{\nu_1} v_{Oy} \frac{d}{dt} \left(m_{\nu_1} x_{\nu_1} \right) - \sum_{\nu_1} v_{Ox} \frac{d}{dt} \left(m_{\nu_1} y_{\nu_1} \right) +$$

$$+ \frac{dC_1(t)}{dt} (r + \sigma) + p \dot{I}_{1xz} + q \dot{I}_{1yz} =$$

$$= v_{Oy} \frac{d}{dt} \left(m_1 x_{C_1} \right) - v_{Ox} \frac{d}{dt} \left(m_1 y_{C_1} \right) + \frac{dC_1(t)}{dt} (r + \sigma) + p \dot{I}_{1xz} + q \dot{I}_{1yz}.$$

Считая, что центробежные моменты инерции тела 1 тождественно равны нулю, т.е. происходит симметричное выгорание топлива, а также учитывая то обстоятельство, что центр масс тела 1 все время движения остается на продольной оси ($x_{C_1} \equiv y_{C_1} \equiv 0$), выражение для обобщенной реактивной силы P_δ, можно записать в окончательном виде:

$$P_\delta = \frac{dC_1(t)}{dt}\left(r+\sigma\right).$$

Для кинетической энергии системы и обобщенной силы справедливы следующие выражения:

$$T = \frac{1}{2}\left[A_1(t)\left(p^2+q^2\right)+C_1(t)(r+\sigma)^2\right]+\frac{1}{2}\left[A_2\left(p^2+q^2\right)+C_2r^2\right],$$
$$Q_\delta = \mathfrak{M}_{1,z}+\mathfrak{M}_\delta,$$

где $\mathfrak{M}_\delta$ — момент внутреннего взаимодействия тел; $\mathfrak{M}_{1,z}$ — момент внешних сил, приложенных к телу 1; A_i, C_i — главные моменты инерции тела i.

Так как выражение для кинетической энергии явно не зависит от угла относительного закручивания, то уравнение Лагранжа запишется следующим образом:

$$C_1(t)\left(\dot{r}+\dot{\sigma}\right) = \mathfrak{M}_{1,z}+\mathfrak{M}_\delta. \tag{3.29}$$

Отметим, что уравнение относительного закручивания (3.29) для системы переменного состава отличается от аналогичного уравнения для соосных тел постоянного состава только лишь тем, что продольный момент инерции становится функцией времени.

С учетом (3.29) при отсутствии моментов внешних сил уравнения (3.28) можно записать:

$$
\begin{gathered}
\left(A_2 + A_1(t)\right)\dot{p} + \left(C_2 + C_1(t) - A_2 - A_1(t)\right)qr + \\
+ C_1(t)q\sigma = 0, \\
\left(A_2 + A_1(t)\right)\dot{q} + \left(A_2 + A_1(t) - C_2 - C_1(t)\right)pr - \\
- C_1(t)p\sigma = 0, \\
\dot{r} = -\frac{\mathfrak{M}_\delta}{C_2}, \qquad \dot{\sigma} = \frac{\mathfrak{M}_\delta\left(C_1(t) + C_2\right)}{C_2 C_1(t)}.
\end{gathered}
\tag{3.30}
$$

Уравнения (3.30) представляют собой динамические уравнения свободного движения системы соосных тел переменного состава с учетом внутреннего взаимодействия. Уравнения (3.30) могут использоваться для описания пространственного движения СА с двойным вращением на активном участке спуска.

Следует отметить, что из полученных уравнений (3.27), полагая скорость относительной закрутки σ тождественно равной нулю, следуют уравнения свободного движения динамически симметричного твердого тела переменного состава вокруг своего центра масс при отсутствии реактивных моментов, записанные А. А. Космодемьянским [6]:

$$
\begin{cases}
A(t)\dot{p} + \left(C(t) - A(t)\right)qr = 0, \\
A(t)\dot{q} + \left(A(t) - C(t)\right)pr = 0; \\
C(t)\dot{r} = 0.
\end{cases}
\tag{3.31}
$$

Заключение

В пособии рассмотрена динамика движения КА переменного состава при реализации активных маневров, связанных с межорбитальными переходами (на примере перехода на орбиту спуска). Проиллюстрировано решение ряда сопутствующих задач, связанных с анализом пространственного движения КА.

Описанные в пособии подходы позволяют проводить исследование движения КА с двойным вращением при стабилизации частичной закруткой, а также осуществлять выбор начальных условий движения и инерционно-массовых параметров подобных аппаратов, обеспечивающих реализацию тех или иных режимов движения.

Пособие предназначено для научно-методического сопровождения курсов «Динамика движения космических аппаратов переменного состава», «Задачи и методы классической механики», читаемых обучающимся Самарского университета по направлениям 24.04.02 Системы управления движением и навигация и 01.04.03 Механика и математическое моделирование соответственно. Также пособие будет полезно магистрантам, обучающимся по смежным техническим и естественнонаучным направлениям подготовки (в рамках УГС 01 «Физико-математические науки» и 24 «Авиационная и ракетно-космическая техника»).

Список литературы

1. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 328 с.
2. *Виницкий А. М.* Ракетные двигатели на твердом топливе. — М. : Машиностроение, 1973. — 347 с.
3. *Виницкий А. М.* [и др.]. Конструкция и отработка РДТТ. — М. : Машиностроение, 1980. — 231 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.*, *Левин Л. М.* Теория полета неуправляемых ракет. — М. : Физматгиз, 1959. — 360 с.
5. *Каменков Е. Ф.* Маневрирование спускаемых аппаратов. Гиперболические скорости входа в атмосферу. — М. : Машиностроение, 1983. — 183 с.
6. *Космодемьянский А. А.* Курс теоретической механики. Ч. 2. — М. : Просвещение, 1966. — 398 с.
7. *Магнус К.* Гироскоп: теория и применение (пер. с немецкого). — М. : Мир, 1974.
8. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика : учебник. — 2-е изд., испр., доп. — М. : ЧеРо, 1999. — 572 с.
9. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы. — 1949.

10. *Рожков В. В.* Двигатели ракет на твердом топливе. — М. : Воениздат, 1971. — 118 с.

11. *Ярошевский В. А.* Вход в атмосферу космических летательных аппаратов. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 336 с.

12. *Ярошевский В. А.* Лекции по теоретической механике: учебное пособие. — М. : МФТИ, 2001. — 244 с.

13. *Andoyer H.* Cours de mécanique céleste. — Gauthier-Villars et cie, 1923.

14. *Aslanov V. S.*, *Doroshin A. V.* The motion of a system of coaxial bodies of variable mass // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2004. — Vol. 68, no. 6. — P. 899–908.

15. *Aslanov V. S.* Rigid Body Dynamics for Space Applications. — Butterworth-Heinemann, 2017. — 410 p.

16. *Chernousko F. L.*, *Akulenko L. D.*, *Leshchenko D. D.* Evolution of motions of a rigid body about its center of mass. — Springer, 2017. — 241 p.

17. *Cveticanin L.* Dynamics of bodies with time-variable mass. — Springer, 2016. — 193 p.

18. *Deprit A.* Free rotation of a rigid body studied in the phase plane // American Journal of Physics. — 1967. — Vol. 35, no. 5. — P. 424–428.

19. *Doroshin A. V.* Evolution of the precessional motion of unbalanced gyrostats of variable structure // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2008. — Oct. — Vol. 72, no. 3. — P. 259–269.

20. *Doroshin A. V.* Analysis of attitude motion evolutions of variable mass gyrostats and coaxial rigid bodies system // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2010. — Mar. — Vol. 45, no. 2. — P. 193–205.

21. *Grammel R.* Der Kreisel: seine theorie und seine Anwendungen. — Vieweg+ Teubner Verlag, 1920. — 350 p.

22. *Gurfil P.* [et al.]. The Serret-Andoyer formalism in rigid-body dynamics: I. Symmetries and perturbations // Regular and Chaotic Dynamics. — 2007. — Vol. 12, no. 4. — P. 389–425.

23. *Han X.* [et al.]. Variable Mass Control and Parameter Identification of Spacecraft Orbit Refueling Process // Mathematical Problems in Engineering. — 2022. — Vol. 2022. — P. 1–17.

24. *Quarta A. A.*, *Mengali G.* Radially accelerated trajectories for variable mass spacecraft // Aerospace Science and Technology. — 2015. — June. — Vol. 43. — P. 219–225.

25. *Serret J. A.* Mémoire sur l'emploi de la méthode de la variation des arbitraires dans la théorie des mouvements de rotation. — Firmin Didot, 1866.

26. *Wolny J.*, *Strzałka R.* Momentum in the dynamics of variable-mass systems: Classical and relativistic case // Acta Physica Polonica A. — 2019. — Vol. 135, no. 3. — P. 475–479.

Учебное издание

Дорошин Антон Владимирович,
Крикунов Михаил Михайлович

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 01.11.2022. Формат $60 \times 84/16$
Бумага офсетная. Печ. л. 7,0.
Тираж 120 экз. (1-й з-д 1–25). Заказ . Арт. – 23(Р2УП)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.