МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Самарский государственный университет

Кафедра оптики и спектроскопии

В.В.Ивахник

Введение в геометрическую оптику

Курс лекций
для студентов физических специальностей,
специализирующихся по оптике и лазерной физике

Издательство "Самарский университет"

2002

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Самарского государственного университета

ББК 22.24
И 237
УДК 535

Ивахник В.В. Введение в геометрическую оптику: Курс лекций для студентов физических специальностей, специализирующихся по оптике и лазерной физике. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2002, 85с.: ил.47.

В основу учебного пособия положен курс лекций, читаемый автором в течение последних лет студентам III курса физического факультета. Самарского государственного университета. Основное внимание уделено последовательному выводу основных соотношений геометрической оптики, анализу в параксиальном приближении оптических систем, как идеальных оптических систем, использованию матричных методов в параксиальной оптике, рассмотрению аберраций Зайделя.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федеральной целевой программы "Государственная интеграция высшего образования и фундаментальной науки"

Рецензент: заведующий лабораторией Института систем обработки изображений РАН, д. физ.-мат. наук, проф. Котляр В.В.

Введение

Свет – это электромагнитная волна с частотой примерно равной $\nu = 6\cdot10^{14}$ Гц (длиной волны $\lambda = \frac{c}{\nu} = 0.5$ мкм). Поэтому при описании световой волны, как и любой другой, мы должны говорить о частоте, амплитуде, фазе (поверхностях равной амплитуды, фазы...), рассматривать их изменение в пространстве и времени. Однако при решении подавляющего числа оптических задач можно забыть, что свет – волна, и описывать его распространение с помощью понятия светового луча. Мы можем перейти от волнового к лучевому описанию оптического явления, когда длина волны $\lambda \to 0$. Круг явлений, которые можно описать, пренебрегая конечностью длины волны, рассматривается в разделе оптики – геометрическая оптика. Геометрическая оптика – это метод описания оптических явлений в условиях, когда длина волны намного меньше характерного масштаба явления.

Термин геометрическая оптика употребляется в различных значениях. Геометрическая оптика в узком "лучевом" смысле изучает способы построения изображений в оптических системах с помощью понятия светового луча. Геометрическая оптика в широком "волновом" понимании выступает как метод приближенного описания волновых полей. При волновом толковании лучи образуют как бы геометрический костяк, на который "нашивается" волновое поле.

Лекция 1
Уравнения геометрической оптики

Рассмотрим распространение световой волны в непроводящей области пространства, в которой отсутствуют свободные электрические заряды. Система уравнений Максвелла имеет вид:

$$\begin{aligned} rot\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ rot\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ div\vec{B} &= 0, \\ div\ \vec{D} &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - вектора напряженности электрического и магнитного полей, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ - вектора электрической и магнитной индукции, c - скорость света.

Система уравнений Максвелла дополняется материальными уравнениями

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu\vec{H}, \\ \vec{D} &= \varepsilon\vec{E}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где ε и μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Для оптического диапазона длин волн, как правило, $\mu \approx 1$.

Будем считать, что в среде распространяются монохроматические волны, т.е.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},\ t) &= \vec{E}_0(\vec{r})\exp(i\omega\ t), \\ \vec{H}(\vec{r},\ t) &= \vec{H}_0(\vec{r})\exp(i\omega\ t). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Подставив (1.3) в (1.1) с учетом (1.2), получим

$$\begin{aligned} rot\vec{E}_0 &= -ik_0\vec{H}_0, \\ rot\vec{H}_0 &= ik_0\varepsilon\vec{E}_0, \\ div\vec{H}_0 &= 0, \\ div\varepsilon\vec{E}_0 &= 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, ω циклическая частота, λ_0 - длина волны в вакууме, $\vec{r}$ радиус-вектор.

В однородной изотропной среде на больших расстояниях от излучателя существует решение системы уравнений Максвелла в виде плоских волн, комплексная амплитуда которых имеет вид

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{e}\,\exp(-i\vec{k}\vec{r}),$$
$$\vec{H}_0(\vec{r}) = \vec{h}\,\exp(-i\vec{k}\vec{r}), \tag{1.5}$$

где $\vec{k} = k_0 n\vec{s}$, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ - показатель преломления, $\vec{s}$ – единичный вектор, определяющий направление распространения волны.

В случае неоднородной среды будем искать решение системы уравнений Максвелла, представив комплексную амплитуду волны следующим образом:

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{e}(\vec{r})\exp[-ik_0 L(\vec{r})],$$
$$\vec{H}_0(\vec{r}) = \vec{h}(\vec{r})\exp[-ik_0 L(\vec{r})].$$

Функция $L(\vec{r})$ называется функцией эйконала и имеет размерность оптической длины. Подставим выражения для $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ в систему уравнений Максвелла.

Будем использовать соотношения

$$rot(a\cdot\vec{A}) = a\,rot(\vec{A}) + [grad(a)\times\vec{A}]\ ,$$
$$div(a\cdot\vec{A}) = a\ \ div(\vec{A}) + (\vec{A}\cdot grad(a)),$$
$$grad(a\cdot b) = a\ \ grad(b) + b\ \ grad(a).$$

Здесь $\vec{A}$ - векторная функция, a и b - скалярные функции.

Тогда имеем

$$rot\vec{H}_0 = \exp(-ik_0 L(\vec{r}))rot(\vec{h}) - ik_0\exp(-ik_0 L(\vec{r}))\left[grad(L)\times\vec{h}\right] =$$
$$\exp(-ik_0 L(\vec{r}))\left\{rot(\vec{h}) - ik_0\left[grad(L)\times\vec{h}\right]\right\},$$
$$rot\vec{E}_0 = \exp(-ik_0 L(\vec{r}))\left\{rot(\vec{e}) - ik_0\left[grad(L)\times\vec{e}\right]\right\},$$
$$div\vec{H}_0 = div(\vec{h}\cdot\exp(-ik_0 L(\vec{r})) = \exp(-ik_0 L(\vec{r}))\left\{div(\vec{h}) - ik_0\left(\vec{h}\cdot grad(L)\right)\right\},$$
$$div\varepsilon\vec{E}_0 = \exp(-ik_0 L(\vec{r}))\left\{\varepsilon\cdot div(\vec{e}) - ik_0\varepsilon\left(\vec{h}\cdot grad(L)\right) + \left(\vec{h}\cdot grad(\varepsilon)\right)\right\}.$$

Используя записанные выше соотношения, перепишем систему уравнений (1.4) следующим образом:

$$rot(\vec{e}) - ik_0\left[grad(L)\times\vec{e}\right] = -ik_0\mu\vec{h},$$
$$rot(\vec{h}) + ik_0\left[grad(L)\times h\right] = ik_0\varepsilon\vec{e},$$
$$div(\vec{h}) - ik_0\left(\vec{h}\cdot grad(L)\right) = 0, \tag{1.6}$$
$$\varepsilon\cdot div(\vec{e}) - ik_0\left(\vec{e}\cdot grad(L)\right)\varepsilon + \left(\vec{e}\cdot grad(\varepsilon)\right) = 0.$$

Разделим правую и левую части уравнений (1.6) на ik_0. В правые части уравнений перенесем слагаемые с множителем $1/k_0$

$$
\begin{gathered}
\left[grad(L)\ \times\vec{e}\right]-\mu\cdot\vec{h}=\frac{1}{ik_0}rot(\vec{e}),\\
\left[grad(L)\times\ \vec{h}\right]+\varepsilon\cdot\vec{e}=-\frac{1}{ik_0}rot(\vec{h}),\\
(\vec{h}\cdot grad(L))=\frac{1}{ik_0}div(\vec{h}),\\
(\vec{e}\cdot grad(L))=\frac{1}{ik_0}\left\{div(\vec{e})+\left(\vec{e}\cdot grad(\ln(\varepsilon))\right)\right\}.
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

Нас интересует решение, соответствующее условию $k_0\to\infty$. Тогда слагаемые в правых частях системы уравнений (1.7) можно отбросить

$$
\begin{gathered}
[grad(L)\ \times\vec{h}]+\varepsilon\vec{e}=0,\\
[grad(L)\ \times\vec{e}]-\mu\vec{h}=0,\\
(\vec{e}\cdot grad(L))=0,\\
(\vec{h}\cdot grad(L))=0.
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

Отметим сразу, что полученные уравнения не могут описать, например, явления, происходящие вблизи фокальной точки линзы. Действительно, ведь в этой области производные по пространственным координатам от компонент векторов $\vec{e}$ и $\vec{h}$ становятся сравнимы с k_0, поэтому слагаемыми в правых частях системы уравнений (1.7) пренебречь нельзя.

Из четырех уравнений системы (1.8) независимыми являются первые два уравнения. Третье и четвертое уравнения получают из первых двух путем их скалярного умножения на векторную функцию $grad(L)$.

Уравнения

$$
\boxed{\begin{gathered}
[grad(L)\times\vec{h}]+\varepsilon\vec{e}=0,\\
[grad(L)\times\vec{e}]-\mu\vec{h}=0
\end{gathered}}
\tag{1.9}
$$

называются уравнениями геометрической оптики.

Уравнения (1.9) – это шесть скалярных уравнений относительно шести неизвестных h_x, h_y, h_z и e_x, e_y, e_z. Эта система имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю. Выразив $\vec{h}$ из второго уравнения (1.9) и подставив в первое уравнение, имеем

$$[grad(L)\times[grad(L)\times\vec{e}]]+\varepsilon\mu\vec{e}=0.$$

Воспользуемся правилом $[\vec{A}[\vec{B}\vec{C}]]=\vec{B}(\vec{A}\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\vec{B})$. Тогда записанное выше уравнение примет вид

$$grad(L)\left(grad(L)\cdot\ \vec{e}\right)-\vec{e}\cdot\left(grad(L)\right)^2+\varepsilon\mu\vec{e}=0.$$

Учитывая условие $(grad(L)\cdot\vec{e})=0$, получим

$$\boxed{\left(grad(L)\right)^2 = n^2} \tag{1.10}$$

или в явном виде

$$\boxed{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z)}.$$

Уравнение (1.10) называется уравнением эйконала. Поверхности равного эйконала ($L(\vec{r}) = const$) называются волновыми или фазовыми поверхностями.

Лекция 2

Световые лучи. Закон интенсивности. Изменение интенсивности по световому лучу

2.1. Световые лучи

Усредненные по времени значения электрической ($w_e = \frac{1}{4\pi}\bar{D}\cdot\bar{E}$) и магнитной ($w_m = \frac{1}{4\pi}\vec{B}\cdot\vec{H}$) составляющих объемной плотности энергии электромагнитного поля, используя выражение $\left\langle \cos^2(\omega t - \varphi)\right\rangle = \frac{1}{2}$, можно записать следующим образом:

$$\left\langle w_e\right\rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi}\vec{e}\cdot\vec{e}^*, \tag{2.1}$$

$$\left\langle w_m\right\rangle = \frac{\mu}{16\pi}\vec{h}\cdot\vec{h}^* \tag{2.2}$$

Подставив значение $\vec{e}^*$ из первого уравнения (1.9) в (2.1) и $\vec{h}$ из второго уравнения (1.9) в (2.2), получим

$$\left\langle w_e\right\rangle = \frac{1}{16\pi}(\vec{e}\cdot[\vec{h}^*\times grad(L)]), \tag{2.3}$$

$$\left\langle w_h\right\rangle = \frac{1}{16\pi}(\vec{h}^*\cdot[grad(L)\times\vec{e}]). \tag{2.4}$$

Из (2.3), (2.4) следует, что в приближении геометрической оптики усредненные по времени значения объемной плотности электрической и магнитной составляющих энергии равны $\left\langle w_e\right\rangle = \left\langle w_h\right\rangle$.

Рассмотрим усредненное по времени значение вектора Умова-Пойнтинга

$$\left\langle \vec{P}\right\rangle = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\{[\vec{e}\times\vec{h}^*]\}. \tag{2.5}$$

С учетом (1.9) выражение для вектора Умова-Пойнтинга перепишется следующим образом:

$$\left\langle \vec{P}\right\rangle = \frac{c}{8\pi\mu}\mathrm{Re}\left\{\left[\vec{e}\times\left[grad(L)\times\vec{e}^*\right]\right]\right\} = \frac{c}{8\pi\mu}\mathrm{Re}\left\{\left(\vec{e}\cdot\vec{e}^*\right)grad(L) - \left(grad(L)\cdot\vec{e}\right)\vec{e}^*\right\} = $$

$$= \frac{c}{8\pi\mu}(\vec{e}\cdot\vec{e}^*)grad(L) = \frac{2c\varepsilon}{16\mu\varepsilon}(\vec{e}\cdot\vec{e}^*)grad(L) = \frac{2\left\langle w_e\right\rangle c}{n}\cdot\frac{grad(L)}{n}$$

Или

$$\left\langle \vec{P}\right\rangle = \upsilon\left\langle w\right\rangle\bar{s}\ , \tag{2.6}$$

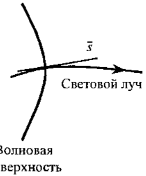


Рис. 2.1. Определение светового луча

где $\langle w\rangle = \langle w_e\rangle + \langle w_h\rangle = 2\langle w_e\rangle$, $\quad \upsilon = c/n$, $\dfrac{grad\,L}{n} = \vec{s}$ - единичный вектор (это следует из уравнения эйконала (1.10)), направленный по нормали к волновой поверхности.

Направление усредненного вектора Умова-Пойнтинга совпадает с нормалью к волновой поверхности, а абсолютная величина равна произведению средней плотности энергии на скорость.

Введем понятие световых лучей. **Это кривые, ортогональные в каждой точке к волновым поверхностям (поверхностям равного эйконала)** (рис.2.1). Этим кривым будем приписывать направление. Направление луча совпадает с направлением вектора Умова-Пойнтинга.

Пусть имеется световой луч. Положение произвольной точки на луче можно определить либо с помощью радиус-вектора $\vec{r}$, либо, связав с лучом криволинейную систему координат, с помощью расстояния по световому лучу s от этой точки до начала системы координат. Тогда

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{s} = \frac{grad(L)}{n}$$

или

$$\boxed{n\frac{d\vec{r}}{ds} = grad(L)}\,. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) называется уравнением луча.

Если посмотреть на уравнение луча (2.7) и уравнения (1.8), полученные при условии $k_0 \to \infty$, то видно, что в каждой точке пространства векторы $\vec{e}$ и $\vec{h}$ ортогональны вектору $\vec{s}$, определяющему направление распространения светового луча.

Используя определение производной по направлению, найдем изменение функции эйконала по световому лучу

$$\frac{dL}{ds} = grad\ L\cdot\frac{d\vec{r}}{ds} = n \qquad \Rightarrow \qquad dL = nds\,. \tag{2.8}$$

Расстояние между волновыми поверхностями по лучу обратно пропорционально показателю преломления.

Введем следующим образом понятие оптической длины светового луча между точками P_1 и P_2 (оптический путь):

$$[P_1P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n\,ds\,.$$

Из определения оптической длины и (2.8) следует, что оптическая длина по световому лучу между точками P_1 и P_2 равна разности значений функций эйконала в этих точках

$$\int_{P_1}^{P_2} n\, ds = L(P_1) - L(P_2). \qquad (2.9)$$

Таким образом, оптическая длина от источника света до любой точки на волновой поверхности по лучу является постоянной величиной.

Если рассмотреть две произвольные волновые поверхности, то из (2.9) также следует, что *оптическая длина пути между двумя волновыми поверхностями одинакова для любого светового луча.* Это утверждение называется **принципом равного оптического пути.**

2.2. Закон интенсивности

Из электродинамики известно, что в непроводящей среде при отсутствии механической работы закон сохранения энергии можно записать следующим образом:

в интегральном виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint_{\Sigma} \vec{P}\, d\vec{\sigma}\,, \qquad (2.10)$$

в дифференциальном виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + div(\vec{P}) = 0. \qquad (2.11)$$

Здесь $W = \int_V w\ dV$ - энергия, содержащаяся в объеме пространства V, ограниченном поверхностью Σ.

Усреднив уравнение (2.11), получим

$$div\left\langle \vec{P} \right\rangle = 0. \qquad (2.12)$$

При выводе выражения (2.12) использовали, что $\dfrac{\partial w}{\partial t} \sim \sin(2\omega t - \varphi)$, поэтому $\left\langle \dfrac{\partial w}{\partial t} \right\rangle = 0$.

По определению интенсивность $I = \left|\left\langle \vec{P} \right\rangle\right| = \upsilon \left\langle w \right\rangle$ - энергия, протекающая в единицу времени через единицу площади.

Тогда закон сохранения энергии в приближении геометрической оптики примет вид

$$\boxed{div(I \cdot \vec{s}) = 0}. \qquad (2.13)$$

Для того чтобы понять смысл этого соотношения, рассмотрим узкую трубку световых лучей. Она строится следующим образом. Берем две волновые поверхности. На первой волновой поверхности берется маленькая площадка $d\Sigma_1$ (термин "маленькая площадка" означает, что изменением интенсивности в пределах площадки можно пренебречь). Рассматриваются лучи, проходящие через точки кривой, ограничивающей эту площадку. Эти лучи на второй волновой поверхности вырезают площадку $d\Sigma_2$ (рис.2.2). Две площадки и боковая поверхность, образованная лучами, проходящими через кривые, ограничивающие площадки и создают замкнутую лучевую трубку.

Проинтегрируем правую и левую части уравнения (2.13) по объему лучевой трубки и, применив теорему Гаусса, перейдем от интеграла по объему к интегралу по поверхности, ограничивающей этот объем

$$\int_V div(I\cdot\vec{s})dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_\Sigma I\,\vec{s}\cdot d\vec{\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_\Sigma I\vec{s}\cdot\vec{p}\,d\sigma = 0. \quad (2.14)$$

Здесь $d\vec{\sigma} = \vec{p}\,d\sigma$ - вектор элементарной площадки, $\vec{p}$ - единичный вектор, направленный по нормали к поверхности элементарной площадки.

Интеграл по поверхности лучевой трубки можно разбить на три интеграла: интегралы по поверхностям $d\Sigma_1$ и $d\Sigma_2$ и интеграл по боковой поверхности лучевой трубки. Величина этих интегралов зависит от скалярного произведения

$$(\vec{s}\cdot\vec{p}) = \begin{cases} 1 \;\textit{на поверхности}\; d\Sigma_2, \\ -1 \;\textit{на поверхности}\; d\Sigma_1, \\ 0 \;\textit{на боковой поверхности}. \end{cases} \quad (2.15)$$

С учетом (2.15) выражение (2.14) можно переписать следующим образом:

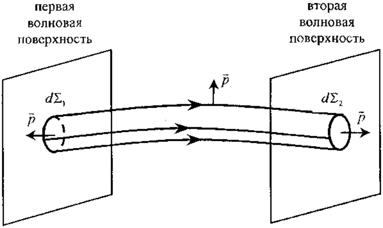


Рис. 2.2. Трубка световых лучей

$$-\int_{d\Sigma_1} I \ \ d\sigma + \int_{d\Sigma_2} I \ \ d\sigma = 0.$$

Или

$$\boxed{I_1\, d\Sigma_1 = I_2\, d\Sigma_2}. \tag{2.16}$$

Таким образом, получили, что величина $I\,d\Sigma$ остается постоянной вдоль трубки световых лучей. Это соотношение выражает закон интенсивности в геометрической оптике.

2.3. Изменение интенсивности по световому лучу

Используя закон сохранения энергии (2.13), можно найти изменение интенсивности по световому лучу (рис. 2.3). Распишем операцию дивергенции от $I \cdot \vec{s}$

$$div\left(I\cdot\vec{s}\right) = div\left(I\cdot\frac{grad(L)}{n}\right) = \frac{I}{n}div(grad(L)) + \left(grad(L)\cdot\ grad\left(\frac{I}{n}\right)\right). \tag{2.17}$$

Вспомним, что $div\cdot grad = \nabla^2$ Тогда уравнение (2.17) перепишется следующим образом

$$\frac{I}{n}\nabla^2 L + \left(grad(L)\cdot\ grad\left(\frac{I}{n}\right)\right) = 0. \tag{2.18}$$

Введем дифференциальный оператор $\dfrac{d}{d\tau} = grad(L)\cdot grad$. Тогда выражение (2.18) примет вид

$$\nabla^2 L = -\frac{d}{d\tau}\ln\frac{I}{n} \tag{2.19}$$

Проинтегрируем правую и левую части уравнения (2.19) по переменной τ

$$\ln\frac{I}{n}\bigg|_{P_1}^{P_2} = -\int_{P_1}^{P_2}\nabla^2 L\, d\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2}{n_1}\exp\left\{-\int_{P_1}^{P_2}\nabla^2 L \ \ d\tau\right\}. \tag{2.20}$$

Подействуем оператором $\dfrac{d}{d\tau}$ на функцию эйконала

Рис. 2.3. Изменение интенсивности по световому лучу

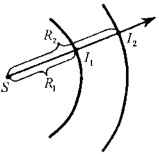


Рис. 2.4. Изменение интенсивности по лучу для точечного источника света

$$\frac{dL}{d\tau} = (grad(L) \cdot grad(L)) \quad \Rightarrow$$

$$d\tau = \frac{dL}{\left(grad(L)\right)^2} = \frac{dL}{n^2} = \frac{n}{n^2}\frac{ds}{} = \frac{ds}{n}$$

Таким образом в (2.20) $d\tau$ можно заменить на $\frac{ds}{n}$. Интегрирование по "неизвестному" параметру τ это интегрирование по криволинейной координате от точки P_1 до точки P_2. Выражение (2.20) перепишется следующим образом:

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2}{n_1}\exp\left\{-\int_{P_1}^{P_2}\frac{\nabla^2 L}{n}ds\right\}}. \qquad (2.21)$$

Выражение (2.21) описывает изменение интенсивности по световому лучу.

Пусть имеется точечный источник света, расположенный в однородной изотропной среде. В однородной среде световой луч распространяется прямолинейно, а волновые поверхности – это сферические поверхности. Выберем начало системы координат в месте расположения точечного источника (рис.2.4). Тогда выражение для функции эйконала можно записать следующим образом:

$$L(x,y,z) = n\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Найдем $\nabla^2 L$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = n\frac{x}{R}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = n\left\{\frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3}\right\} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 L = n\left\{\frac{3}{R} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^3}\right\} = n\frac{2}{R}.$$

Здесь $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ В (2.21) интегрирование по ds заменим на интегрирование по dR. Для луча, распространяющегося от точечного источника в однородной среде, выражение (2.21) примет вид

$$\frac{I_2}{I_1} = \exp\left\{-\int_{R_1}^{R_2}\frac{2}{R}dR\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \qquad (2.22)$$

Здесь R_1 и R_2 - расстояния от точек P_1 и P_2 до точечного источника света.

Получен хорошо известный результат – интенсивность света обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света до точки наблюдения.

Лекция 3

Дифференциальное уравнение светового луча. Закон преломления. Интегральный инвариант Лагранжа. Принцип Ферма

3.1. Дифференциальное уравнение светового луча

Если известно изменение показателя преломления в пространстве, то, используя уравнение эйконала, можно найти функцию эйконала, а затем, используя уравнение светового луча

$$n\frac{d\bar{r}}{ds} = grad\, L,$$

найти направление распространения светового луча.

Продифференцируем правую и левую части уравнения светового луча по криволинейной координате s $(\frac{d}{ds})$:

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\bar{r}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(grad\, L). \qquad (3.1)$$

Распишем правую часть уравнения (3.1):

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(grad\, L) &= \frac{d\bar{r}}{ds}\cdot grad(grad\quad L) = \frac{grad\quad L}{n}\cdot grad(grad\quad L) = \\ &\frac{1}{2n} grad(grad\quad L)^2 = \frac{1}{2n} grad(n^2) = grad\quad n\end{aligned} \qquad (3.2)$$

С учетом (3.2) уравнение (3.1) примет вид

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\bar{r}}{ds}\right) = grad\, n}. \qquad (3.3)$$

Уравнение (3.3) называется **дифференциальным уравнением светового луча.**

Пусть среда, в которой распространяется световой луч, однородна, т.е. $grad\, n = 0$. Тогда уравнение (3.3) примет вид

$$\frac{d}{ds}(n\frac{d\bar{r}}{ds}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = 0.$$

Записанное выше уравнение имеет следующее решение

$$\bar{r} = \bar{a}_1 \cdot s + \bar{b}_1,$$

где $\bar{a}_1$ и $\bar{b}_1$ - постоянные, определяемые из граничных условий. Радиус-вектор линейно меняется в зависимости от криволинейной координаты, т.е. в однородной среде световые лучи распространяются по прямым линиям.

Рассмотрим общий случай распространения светового луча в среде с произвольно меняющимся показателем преломления.

Введем вектор кривизны

$$\vec{K} = \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{\nu}. \tag{3.4}$$

Здесь $\vec{\nu}$ единичный вектор, направленный по нормали к световому лучу ($\vec{\nu} \perp \vec{s}$), ρ - радиус кривизны.

Распишем левую часть дифференциального уравнения светового луча (3.3)

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(n\,\vec{s}) = \vec{s}\frac{dn}{ds} + n\frac{d\vec{s}}{ds} = \vec{s}\frac{dn}{ds} + n\vec{K} \tag{3.5}$$

С учетом (3.5) дифференциальное уравнение светового луча можно переписать следующим образом:

$$n\vec{K} = grad\;n - \vec{s}\frac{dn}{ds} \tag{3.6}$$

Разделив правую и левую части уравнения (3.6) на n и умножив на единичный вектор $\vec{\nu}$, получим

$$\left|\vec{K}\right| = \frac{1}{\rho} = \vec{\nu}\left\{\frac{grad\,n}{n} - \frac{\vec{s}}{n}\frac{dn}{ds}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{n}(\vec{\nu}\cdot grad\,n). \tag{3.7}$$

Из определения радиус кривизны всегда положителен. Тогда из (3.7) следует, что

$$(\vec{\nu}\cdot\;grad\,n) \geq 0. \tag{3.8}$$

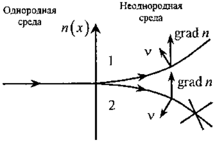


Рис. 3.1. Распространение луча в неоднородной среде

На рис.3.1 для среды с плавно увеличивающимся показателем преломления приведены две возможные траектории луча 1 и 2.

Градиент от функции – это вектор, направленный в сторону увеличения показателя преломления. Из (3.8) следует, что угол между векторами $\vec{\nu}$ и $grad(\ln n)$ должен быть меньше $\frac{\pi}{2}$, а это значит, что реальный луч будет распространяться в сторону с большим значением показателя преломления, т.е. по траектории 1.

3.2. Закон преломления

Рассмотрим поведение лучей, пересекающих поверхность, разделяющую две однородные среды с различными показателями преломления.

Воспользуемся уравнением светового луча. Осуществим операцию ротор от правой и левой частей уравнения светового луча. Учитывая, что $rot(grad\ f) \equiv 0$, получим

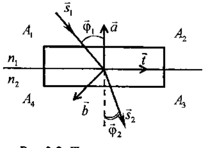


Рис.3.2. Преломление луча

$$rot(n\,\vec{s}) = 0. \tag{3.9}$$

Заменим поверхность резкого раздела двух сред переходным слоем, в пределах которого происходит плавное изменение показателя преломления от n_1 до n_2. Рассмотрим маленькую площадку $A_1A_2A_3A_4$, стороны которой параллельны и перпендикулярны поверхности раздела сред (рис.3.2). Введем три единичных вектора: вектор $\vec{a}$, направленный по нормали к границе раздела, вектор $\vec{t}$, направленный вдоль стороны площадки A_1A_2, и вектор $\vec{b}$, направленный по нормали к этой площадке.

Проинтегрируем правую и левую части уравнения по площадке и, используя теорему Стокса, перейдем от интеграла по площади к интегралу по контуру, ограничивающему площадку $A_1A_2A_3A_4$

$$\int\limits_{\Sigma} rot(n\cdot\vec{s})\,d\vec{\sigma} = \oint n\vec{s}\cdot d\vec{r} = 0. \tag{3.10}$$

Интеграл по контуру, ограничивающему площадку, разбивается на четыре интеграла

$$\oint n\vec{s}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{A_1A_2} n\vec{s}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{A_2A_3} n\vec{s}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{A_3A_4} n\vec{s}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{A_4A_1} n\vec{s}\cdot d\vec{r}$$

Считаем $A_2A_3 \to 0$ и $A_1A_4 \to 0$, поэтому интегралами по этим отрезкам контура пренебрегаем. Площадка $A_1A_2A_3A_4$ - маленькая, т.е.

$$\int\limits_{A_1A_2} n\vec{s}\cdot d\vec{r} = n_1\vec{s}_1 \int\limits_{A_1A_2} d\vec{r} = n_1(\vec{s}_1\cdot\vec{t})\,dl \quad \text{и} \quad \int\limits_{A_3A_4} n\vec{s}\cdot d\vec{r} = -n_2(\vec{s}_2\cdot\vec{t})\,dl, \tag{3.11}$$

где $dl = A_1A_2 = A_3A_4$. С учетом (3.11) выражение (3.10) перепишется следующим образом:

$$\vec{t}\cdot(n_1\vec{s}_1 - n_2\vec{s}_2) = 0.$$

Или, учитывая, что $\vec{t} = [\vec{b}\times\vec{a}]$, получим

$$[\vec{b}\times\vec{a}]\,(n_1\vec{s}_1 - n_2\vec{s}_2) = 0. \tag{3.12}$$

Используя свойство векторно-скалярного произведения, перепишем (3.12) в виде

$$\vec{b}\cdot[\vec{a}\times(n_1\cdot\vec{s}_1 - n_2\cdot\vec{s}_2)] = 0. \tag{3.13}$$

Поскольку ориентация площадки, а следовательно, и единичного вектора $\bar{b}$ бралась произвольной, то

$$[\bar{a}\times(n_1\bar{s}_1-n_2\bar{s}_2)]=0 \quad \Rightarrow \quad n_1[\bar{a}\times\bar{s}_1]=n_2[\bar{a}\times\bar{s}_2]. \tag{3.14}$$

Из полученного уравнения следует, что тангенциальные составляющие вектора $n\bar{s}$ непрерывны при переходе через границу раздела сред, или что вектор $n_1\bar{s}_1-n_2\bar{s}_2$ перпендикулярен нормали к этой поверхности.

Если φ_1 и φ_2 – углы падения и преломления, то, приравняв значения модулей правой и левой частей (3.14), имеем

$$n_2\sin\varphi_2=n_1\sin\varphi_1. \tag{3.15}$$

Получили закон Снеллиуса или закон преломления. Заметим, что этот закон справедлив, если $\lambda\to 0$ (закон правильного преломления).

3.3. Интегральный инвариант Лагранжа

Пусть имеется неоднородная среда с плавно меняющимся показателем преломления. Рассмотрим распространение в ней светового луча. Выделим произвольную площадку Σ (рис. 3.3). Как и при рассмотрении закона преломления проинтегрируем по площади площадки правую и левую части выражения (3.9) и, воспользовавшись теоремой Стокса, получим

$$\oint n\vec{s}\cdot d\vec{r}=0. \tag{3.16}$$

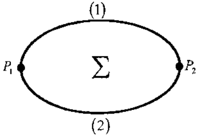


Рис. 3.3. К выводу интегрального инварианта Лагранжа

На замкнутой кривой, ограничивающей площадку, возьмем две произвольные точки P_1 и P_2. Тогда выражение (3.16) можно переписать следующим образом:

$$\int_{P_1(1)}^{P_2} n\bar{s}\cdot d\vec{r}=\int_{P_1(2)}^{P_2} n\bar{s}\cdot d\vec{r}. \tag{3.17}$$

Цифры 1 и 2 означают, что интегрирование ведется по первой или второй кривой.

Интеграл $\int_{P_1}^{P_2} n\vec{s}\cdot d\vec{r}$, взятый между любыми двумя точками среды P_1 и P_2, не зависит от пути интегрирования.

Полученное соотношение (3.17) называется интегральным инвариантом Лагранжа.

$$\boxed{\int_{P_1}^{P_2} n\bar{s}\cdot d\vec{r}=const}. \tag{3.18}$$

При выводе интегрального инварианта Лагранжа считали, что показатель преломления среды плавно меняется от точки к точке. Однако интегральный инвариант Лагранжа можно распространить и на случай среды со скачкообразным изменением показателя преломления.

3.4. Принцип Ферма

Принцип Ферма (принцип наикратчайшего расстояния) утверждает, что оптическая длина реального луча между точками P_1 и P_2 короче оптической длины любой другой кривой, соединяющей эти две точки и лежащей в регулярной окрестности луча. Окрестность называется регулярной, если через любую точку пространства (этой окрестности) проходит один и только один луч.

Для доказательства принципа Ферма рассмотрим пучок световых лучей. Возьмем произвольный луч и на нем две точки. Соединим точки P_1 и P_2 произвольной кривой (рис.3.4).

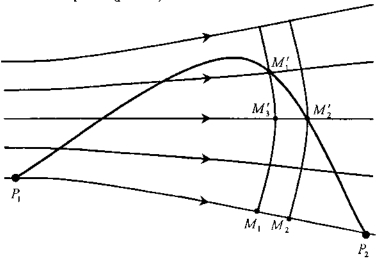


Рис. 3.4. Доказательство принципа Ферма

Рассмотрим две произвольные близко расположенные волновые поверхности. Эти поверхности пересекают луч в точках M_1 и M_2, а произвольную кривую, соединяющую точки P_1 и P_2, в точках M_1' и M_2'. Докажем, что оптический путь между точками M_1 и M_2 меньше оптического пути между точками M_1' и M_2'.

Применим интегральный инвариант Лагранжа к «треугольнику» $M_1'M_2'M_3'$

$$\int\limits_{M_1'}^{M_2'} n\vec{s}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{M_2'}^{M_3'} n\vec{s}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{M_3'}^{M_1'} n\vec{s}\cdot d\vec{r} = 0. \qquad (3.19)$$

На волновом фронте $\bar{s} \perp d\bar{r}$, поэтому $\int\limits_{M_3'}^{M_1'} n \ \bar{s} \cdot d\bar{r} = 0$ На отрезке $M_1'M_3'$ единичный вектор $\bar{s}$ параллелен вектору $d\bar{r}$, поэтому

$$\int\limits_{M_3'}^{M_2'} n \ \bar{s} \cdot d\bar{r} = \int\limits_{M_3'}^{M_2'} nds = [M_3'M_2'] = [M_1M_2] \qquad (3.20)$$

На отрезке $M_1'M_2'$ имеем

$$\int\limits_{M_1'}^{M_2'} n\bar{s} \cdot d\bar{r} = \int\limits_{M_1'}^{M_2'} n\,ds\cos\psi \leq \int\limits_{M_1'}^{M_2'} n\,ds = [M_1'M_2'], \qquad (3.21)$$

где ψ - угол между вектором $\bar{s}$ и направлением элементарного отрезка $d\bar{r}$

Из (3.19) с учетом (3.20), (3.21) следует, что

$$[M_1M_2] = [M_3'M_2'] \geq \quad [M_1'M_2']. \qquad (3.22)$$

Аналогично, взяв любые две другие близко расположенные волновые поверхности, можно показать, что между этими поверхностями оптическая длина отрезка на реальном луче короче оптической длины отрезка на любой другой кривой, соединяющей точки P_1 и P_2.

Проинтегрировав правую и левую части неравенства (3.22), получим

$$\int\limits_{P_1(C)}^{P_2} n\,ds \leq \int\limits_{P_1(C_1)}^{P_2} n\,ds. \qquad (3.23)$$

Здесь C - кривая, взятая по световому лучу, C_1 - произвольная кривая.

Принцип Ферма доказан.

Лекция 4
Распространение луча в световоде

В физическом словаре дается следующее определение световода. Световод (оптический волновод) это закрытое устройство для направленной передачи света. Как правило, в световоде показатель преломления меняется в поперечном направлении (оси X и Y) и не меняется вдоль направления распространения луча (ось Z). В световоде выделяют сердцевину, оболочку и защитное покрытие (рис.4.1).

Если показатель преломления плавно меняется в поперечном направлении, световод называется градиентным световодом. Рассмотрим наиболее простой вид плоского градиентного световода, диэлектрическая проницаемость которого изменяется по закону

$$\varepsilon = n^2(x) = n_1^2\left[1 - 2\Delta\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]. \qquad (4.1)$$

Здесь n_1 – значение показателя преломления на оси световода, Δ и a - параметры, определяющие, как и на сколько быстро изменяется в поперечном направлении показатель преломления. Световод, изменение диэлектрической проницаемости которого описывается выражением (4.1), называется параболическим световодом (рис. 4.2.а).

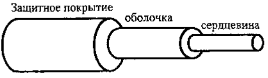


Рис. 4.1. Световод

Если распространение световых лучей рассматривается вблизи оси

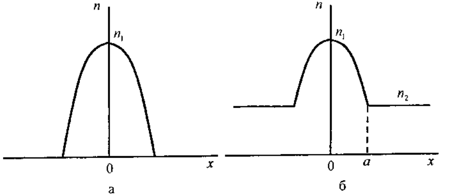


Рис. 4.2. Изменение показателя преломления в параболическом световоде с неограниченным (а) и ограниченным (б) профилями

световода, т.е. считается, что $2\Delta\left(\frac{x}{a}\right)^2 << 1$, то

$$n(x) = n_1\left[1 - \Delta\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]. \tag{4.2}$$

Заметим, что световод с диэлектрической проницаемостью, описываемой выражением (4.1), это модельный световод. Это следует уже из тех соображений, что координата x не может принимать любое значение. Действительно, если $x \to \pm\infty$, то $\varepsilon < 0$, что физически бессмысленно. Тем не менее, используя модель параболического световода, в первом приближении можно описать достаточно большой класс градиентных световодов. В качестве конкретного примера часто рассматривается световод, диэлектрическая проницаемость которого в зависимости от координаты х меняется по закону

$$n^2(x) = \begin{cases} n_1^2\left[1 - 2\Delta\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] & при\ |x| \le a, \\ n_2^2 = n_1^2(1 - 2\Delta) & при\ |x| > a. \end{cases} \tag{4.3}$$

Световод, изменение диэлектрической проницаемости которого описывается выражением (4.3), называется параболическим световодом с ограниченным профилем (рис. 4.2.б). Из (4.3), в частности, становится понятным физический смысл параметра $2\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}$. Если в световоде изменение показателя преломления при переходе от оси световода ($x = 0$) к оболочке ($x = a$) небольшое ($n_2 - n_1 << n_1$), то

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

Таким образом, параметр Δ характеризует относительное изменение показателя преломления.

Для определения "траектории" луча в градиентном световоде воспользуемся дифференциальным уравнением луча

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = grad(n). \tag{4.4}$$

Дифференциальное уравнение луча представим в виде двух скалярных уравнений

$$\frac{d}{ds}\left(n(x)\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dn}{dx}, \tag{4.5}$$

$$\frac{d}{ds}\left(n(x)\frac{dz}{ds}\right) = 0. \tag{4.6}$$

Что такое $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$? Если ввести угол Φ_Z между касательной к "траектории" луча и осью Z (рис.4.3), то

$$\frac{dx}{ds} = \sin\Phi_Z(x), \tag{4.7}$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos\Phi_Z(x). \tag{4.8}$$

Из уравнения (4.6) следует, что при переходе от одной точки "траектории" луча к другой точке траектории выполняется условие

$$n(x)\cos\Phi_Z(x) = const \quad \Rightarrow \quad \boxed{n(x)\cos\Phi_Z(x) = n(0)\cos\Phi_Z(0)}. \tag{4.9}$$

Здесь $n(0)$ и $\Phi_Z(0)$ - значения показателя преломления и угла между касательной к "траектории" луча и осью Z на оси световода. Выражение (4.9) является обобщением закона Снеллиуса.

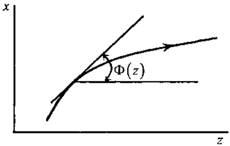


Рис. 4.3. Распространение светового луча в градиентном световоде

Пусть по мере удаления от оси световода показатель преломления уменьшается. Тогда, как следует из (4.9), существует граничное значение координаты $x = x_{tp}$, когда $\cos\Phi_Z(x_{tp}) = 1$, т.е. сам угол $\Phi_Z(x_{tp}) = 0$. Причем положение этой границы определяется углом $\Phi_Z(0)$. За этой границей луч распространяться не может. Точка, в которой угол $\Phi_Z(x_{tp}) = 0$, называется точкой поворота (рис.4.4.а). Поперечная координата точки поворота определяется из условия

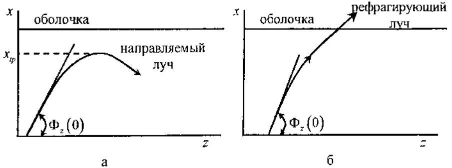


Рис. 4.4. Распространение в световоде направляемого (а) и рефрагирующего (б) лучей

$$n(x_{tp}) = n(0)\cos\Phi_Z(0). \qquad (4.9)$$

Возможна ситуация, когда условие (4.9) не может быть выполнено. На "траектории" луча изменение показателя преломления от $n(x=0)$ до значения показателя преломления в оболочке не приводит к тому, что в какой-то точке начинает выполняться записанное выше условие. Дойдя до границы раздела сердцевина - оболочка, луч преломится на ней и будет распространяться в оболочке (рис.4.4.б).

При фиксированных параметрах световода выйдет луч из световода или будет распространяться в сердцевине световода, зависит от угла $\Phi_z(0)$.

Все лучи, распространяющиеся в световоде, делятся на

направляемые лучи: $0 \le \Phi_Z(0) \le \Phi_C$,

рефрагирующие лучи: $\Phi_C \le \Phi_Z(0) \le \frac{\pi}{2}$

Здесь Φ_C - критический угол, определяемый из условия

$$n(x_{tp}) = n_2 = n(0)\cos\Phi_C \quad \Rightarrow \quad \cos\Phi_C = \frac{n_2}{n(0)} \qquad (4.10)$$

В случае параболического световода с ограниченным профилем

$$\cos\Phi_C = \frac{n_2}{n_1}$$

Для параболического световода с неограниченным профилем найдем значение "точки поворота"

$$n_1\left[1-\Delta\left(\frac{x_{tp}}{a}\right)^2\right] = n_1\cos\Phi_Z(0) \quad \Rightarrow \quad x_{tp} = a\left\{\frac{1-\cos\Phi_Z(0)}{\Delta}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Для нахождения "траектории" луча вернемся к уравнению (4.5). Воспользуемся тем, что $n\frac{dz}{ds} = const = \beta$. Тогда $ds = \frac{ndz}{\beta}$ и в (4.5) вместо производной по ds можно перейти к производной по dz

$$\beta\frac{d}{ndz}\left\{n\frac{dx}{ndz}\beta\right\} = \frac{dn}{dx} \quad \Rightarrow \quad \beta^2\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{2}\frac{dn^2(x)}{dx} \qquad (4.11)$$

Преобразуем левую часть уравнения (4.11)

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dx}{dz}\right)\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dz}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \qquad (4.12)$$

С учетом (4.12), проинтегрировав правую и левую части уравнения (4.11), получим

$$\beta^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = n^2 + C. \qquad (4.13)$$

Для определения постоянной C рассмотрим точку поворота. В точке поворота луч распространяется параллельно оси Z ($\frac{dx}{dz}=0$). Тогда уравнение (4.13) можно переписать

$$n^2\left(x_{tp}\right)+C=0. \tag{4.14}$$

Из определения константы β и (4.9) следует, что $n^2(x_{tp})=\beta^2$. Таким образом $C=-\beta^2$

Уравнение (4.13) примет вид

$$\beta\frac{dx}{dz}=\left\{n^2(x)-\beta^2\right\}^{1/2} \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx}=\frac{\beta}{\sqrt{\left(n^2(x)-\beta^2\right)}}. \tag{4.15}$$

Если граничные условия выбраны таким образом, что на передней грани световода ($z=0$) $x=x_0$, то решение уравнения (4.15) для параболического световода есть

$$z=\frac{\beta a}{n_1\sqrt{2\Delta}}\left\{\arcsin\left(\frac{x}{a}\frac{n_1\sqrt{2\Delta}}{\sqrt{\left(n_1^2-\beta^2\right)}}\right)-\arcsin\left(\frac{x_0}{a}\frac{n_1\sqrt{2\Delta}}{\sqrt{\left(n_1^2-\beta^2\right)}}\right)\right\} \tag{4.16}$$

или

$$x=x_0\cos\left(\frac{zn_1\sqrt{2\Delta}}{a\beta}\right)+\frac{a\beta}{n_1\sqrt{2\Delta}}\cdot tg\Phi_0\cdot\sin\left(\frac{zn_1\sqrt{2\Delta}}{a\beta}\right). \tag{4.17}$$

Здесь Φ_0 - угол наклона светового луча в точке $x=x_0$, $z=0$,

$$tg\Phi_0=\left.\frac{dz}{dx}\right|_{z=0,x=x_0}$$

Из (4.16), (4.17) следует наличие у "траектории" луча периода Δz, равного

$$\frac{zn_1\sqrt{2\Delta}}{a\beta}+2\pi=\frac{(z+\Delta z)\,n_1\sqrt{2\Delta}}{a\beta} \quad\Rightarrow\quad \Delta z=z_p=\frac{2\pi a\beta}{n_1\sqrt{2\Delta}}. \tag{4.18}$$

С учетом (4.18) уравнение "траектории" луча (4.17) можно записать следующим образом:

$$x=x_0\cos\left(\frac{2\pi z}{z_p}\right)+\frac{z_p}{2\pi}tg\Phi_0\cdot\sin\left(\frac{2\pi z}{z_p}\right). \tag{4.19}$$

Характерный вид "траектории" луча в параболическом световоде изображен на рис. 4.5.

При распространении лучей под небольшим углом к оси световода ($\cos\Phi_Z(0)\approx 1$) имеем

$$\beta \approx n_1,\ z_p \approx \frac{2\pi \quad a}{\sqrt{2\Delta}} \qquad (4.20)$$

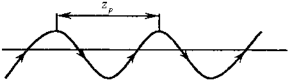


Рис. 4.5. Распространение луча в параболическом световоде

Из (4.20) видно, что период "траектории" луча не зависит от угла на оси световода между касательной к "траектории" луча и осью Z. Это приводит к эффекту фокусировки, т.е., если взять точку на оси световода и рассматривать исходящие из нее лучи, то через расстояние $z_p/2$ они вновь соберутся в точку (рис.4.6). Таким образом, световод с параболическим показателем преломления обладает фокусирующими свойствами.

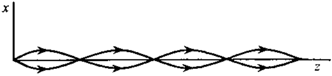


Рис. 4.6. Фокусировка световых лучей

Если послать на световод параллельный пучок лучей (Φ_0=0), то из (4.19)

$$x = x_0 \cos\left(\frac{2\pi z}{z_p}\right).$$

Параллельный пучок лучей собирается в точку, расположенную на расстоянии $z_p/4$ от начала световода.

Лекция 5-6

Идеальное изображение. Теорема Максвелла. Проективное преобразование. Кардинальные точки. Построение изображения в центрированных оптических системах

5-6.1. Идеальное изображение

Пусть имеется точечный источник света P, из которого выходит бесконечное число световых лучей. После прохождения световыми лучами оптической системы через любую точку среды в общем случае проходит конечное число лучей. Однако в некоторых случаях существует точка P_1, через которую проходит бесконечное число лучей, вышедших из точки P (рис. 5-6.1). *Точка P_1 называется стигматическим или резким изображением точки P* Точки P и P_1 называются *сопряженными точками,* если любая из точек является стигматическим изображением другой точки.

Рис. 5-6.1. Понятие изображения

Множество точек, каждую из которых можно рассматривать как точечный источник света, образуют пространство предметов. Множество изображений точек образуют пространство изображений.

Оптический прибор называется идеальным, если он для каждой точки пространства предметов дает стигматическое изображение в пространстве изображений. В общем случае не все лучи, вышедшие из точки P, достигнут пространства изображения (часть из них задерживается, например, диафрагмами). Говорят, что лучи, достигающие пространства изображений, лежат в поле зрения оптического прибора.

Мы определили две сопряженные точки. Аналогично дается определение сопряженных кривых, поверхностей. Пусть C кривая в пространстве предметов. *Кривая C_1 в пространстве изображений сопряжена кривой C, если для любой точки, расположенной на кривой C, ее стигматическое изображение лежит на кривой C_1.* Если любая кривая C в пространстве предметов идеально отображается (т.е. отображается стигматично) в кривую C_1 в пространстве изображений, то говорят, что пространство предметов идеально отображается в пространство изображений.

Часто используется понятие абсолютного прибора. *Оптическая система, дающая стигматическое изображение трехмерного объекта, называется абсолютным прибором.* Ниже понятия абсолютный прибор и идеальная оптическая система будем рассматривать как эквивалентные понятия.

Оптические приборы, формирующие идеальное изображение, представляют практический интерес. Как будет показано, реальные оптические приборы в параксиальном приближении ведут себя как абсолютные приборы.

5-6.2. Теорема Максвелла

Определение. *Для абсолютного прибора оптическая длина кривой в пространстве предметов равна оптической длине ее изображения.*

Докажем теорему в частном случае (доказательство Ленца).

Пусть имеется абсолютный оптический прибор. Для доказательства теоремы Ленц предположил, что **все лучи** от любой точки пространства предметов достигают точки пространства изображений. Т.е., если имеется некоторая точка A и ее стигматическое изображение точка A_1, то неважно, как направлен луч из точки A в точку A_1 по часовой или против часовой стрелки, и тот и другой лучи обязательно пересекутся в точке A_1. Световой луч представляет замкнутую кривую.

Рассмотрим две точки A и B, лежащие на луче. Сопряженные точки A_1 и B_1 лежат на изображении луча (рис. 5-6.2).

Рис. 5-6.2. Доказательство теоремы Максвелла

Оптическая длина отрезков AB и A_1B_1 по часовой стрелке равна оптической длине отрезков BA и B_1A_1 против часовой стрелки соответственно, т.е.

$$[AB]=[BA]=L,\ [A_1B_1]=[B_1A_1]=L_1.$$

Воспользуемся принципом равного оптического пути. Приравняв оптические пути от точки A до точки A_1 по лучу по часовой и против часовой стрелок, получим

$$L_0+d_0=L_1+d_1. \tag{5-6.1}$$

Здесь $d_0=[BA_1]$ и $d_1=[AB_1]$.

Аналогично приравняв оптические пути от точки B до точки B_1 по лучу по часовой и против часовой стрелок, получим

$$L_0+d_1=L_1+d_0. \tag{5-6.2}$$

Равенства (5-6.1) и (5-6.2) одновременно будут выполняться лишь в случае, когда

$$L_1 = L_0 .$$

Теорема Максвелла доказана.

Из теоремы Максвелла вытекает ряд интересных следствий.

Следствие 1.

Рассмотрим, например, маленький треугольник со сторонами dS_1, dS_2 и dS_3 (термин "маленький" означает, что в пределах треугольников показатель преломления среды можно считать постоянным). Пусть изображением этого треугольника будет треугольник со сторонами dS_1', dS_2' и dS_3'. Если треугольники находятся в однородных средах с показателями n_1 и n_1', то, согласно теореме Максвелла,

$$n_1 dS_1 = n_1' dS_1', \quad n_1 dS_2 = n_1' dS_2', \quad n_1 dS_3 = n_1' dS_3'.$$

Следовательно, треугольники подобны. Из подобия треугольников следует, что угол между любыми прямыми в пространстве предметов равен углу между изображением этих прямых в пространстве изображений.

Если углы равны, то преобразование, которое осуществляет абсолютный прибор, является конформным (это определение конформного преобразования). Абсолютный прибор конформно отображает трехмерное пространство предметов в трехмерное пространство изображений. Но конформное отображение трехмерной области в трехмерную область может быть осуществлено либо с помощью проективного преобразования, либо с помощью преобразования инверсии, либо с помощью их комбинаций.

Таким образом, преобразование (отображение) абсолютным прибором пространства предметов в пространство изображений является либо проективным преобразованием, либо инверсией, либо их комбинацией.

1. Преобразование инверсии – это такое преобразование, когда любой точке P ставится в соответствие своя точка P', расположенная на прямой, проходящей через общий центр O. Причем произведение $OP \cdot OP'$ остается величиной постоянной, не зависящей от расстояния от точки P до точки O.
2. Проективное преобразование – это такое преобразование, при котором прямая линия преобразуется в прямую линию.

Следствие 2.

Увеличение $\frac{dS_1'}{dS_1}$ для любых двух линейных элементов равно отношению показателей преломления. В частности, если $n_1 = n_1' = const$, то увеличение $\frac{dS_1'}{dS_1} = 1$. Таким образом, идеальное отображение абсолютным прибором двух однородных областей друг в друга всегда тривиально в том смысле, что изображение полностью равно предмету. Единственный известный оптический прибор, осуществляющий такое преобразование, - это плоское зеркало или система плоских зеркал.

5-6.3. Проективное преобразование. Кардинальные точки

Пусть имеется точка $P(x, y, z)$ и ее стигматическое изображение – точка $P'(x', y', z')$. *Преобразование называется проективным, если координаты точек P и P' связаны соотношением*

$$\boxed{x' = \frac{F_1}{F_0}, \quad y' = \frac{F_2}{F_0}, \quad z' = \frac{F_3}{F_0}}, \tag{5-6.3}$$

где $F_j = a_j x + b_j y + c_j z + d_j$; a_j, b_j, c_j, d_j - постоянные величины; $j = 0 \div 3$.

Аналогично определяется обратное проективное преобразование

$$x = \frac{F_1'}{F_0'}, \quad y = \frac{F_2'}{F_0'}, \quad z = \frac{F_3'}{F_0'}, \tag{5-6.4}$$

где $F_j' = a_j' x' + b_j' y' + c_j' z' + d_j'$; a_j', b_j' , c_j', d_j' - постоянные величины.

Изображение любой точки, лежащей в плоскости $F_0 = 0$, находится на бесконечности, поэтому плоскость $F_0 = 0$ называется *фокальной плоскостью пространства предметов.*

Плоскость, определяемая условием $F_0' = 0$, называется *фокальной плоскостью пространства изображений.*

Лучи, исходящие из любой точки фокальной плоскости, после прохождения оптической системы распространяются параллельно.

Более подробно остановимся на центрированных идеальных оптических системах. **Центрированные оптические системы это системы, полученные путем вращения кривых второго порядка относительно общей оси, причем центры этих кривых лежат на этой оси, которая называется главной оптической осью центрированной системы** (рис.5-6.3).

Из осевой симметрии оптической системы следует, что фокальные плоскости это плоскости, перпендикулярные оптической оси. Точки пересечения фокальных плоскостей с главной оптической осью системы на-

Рис. 5-6.3. Определение центрированной оптической системы

зываются фокальными точками (фокусами - F, F'): F – фокальная точка в пространстве предметов, F' – фокальная точка в пространстве изображений.

Из осевой симметрии оптической системы также следует, что изображение точки P точка P' лежит в плоскости, проходящей через точку P и главную оптическую ось.

Плоскости, проходящие через оптическую ось, называются меридиональными плоскостями. Рассмотрим меридиональную плоскость, проходящую через точку P. Пусть ось z направлена вдоль оптической оси, а ось y лежит в той же плоскости, что и точка P. Координаты точек P и P' есть

$$P(0, y, z),$$
$$P'(0, y', z').$$

Прямое проективное преобразование может быть записано следующим образом:

$$y' = \frac{b_2 y + c_2 z + d_2}{b_0 y + c_0 z + d_0}, \qquad (5\text{-}6.5)$$

$$z' = \frac{b_3 y + c_3 z + d_3}{b_0 y + c_0 z + d_0}. \qquad (5\text{-}6.6)$$

Из осевой симметрии центрированной оптической системы следует, что

$$z'(-y,\ z) = z'(y,\ z), \qquad (5\text{-}6.7)$$

$$y'(-y, z) = -y'(y, z). \qquad (5\text{-}6.8)$$

Для выполнения условия (5-6.7) необходимо, чтобы $b_3 = b_0 = 0$. Для выполнения условия (5-6.8) необходимо, чтобы $c_2 = d_2 = 0$.

Таким образом, проективное преобразование при наличии осевой симметрии оптической системы есть

$$y' = \frac{b_2 y}{c_0 z + d_0}, \qquad (5\text{-}6.9)$$

$$z' = \frac{c_3 z + d_3}{c_0 z + d_0} \qquad (5\text{-}6.10)$$

Разрешая уравнения (5-6.9) и (5-6.10) относительно z и y, найдем обратное проективное преобразование

$$y = \frac{y'}{b_2}\left[\frac{c_0 d_3 - d_0 c_3}{c_0 z' - c_3}\right], \qquad (5\text{-}6.11)$$

$$z = \frac{-d_0 z' + d_3}{c_0 z' - c_3} \qquad (5\text{-}6.12)$$

Из прямого и обратного проективного преобразования вытекает, что уравнения фокальных плоскостей есть:

в пространстве предметов

$$c_0 z + d_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{d_0}{c_0}, \tag{5-6.13}$$

в пространстве изображений

$$c_0 z' - d_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{c_3}{c_0}. \tag{5-6.14}$$

До сих пор координаты точек P и P' рассматривались в одной системе координат. Теперь будем рассматривать координаты точки P в системе координат с центром в точке F, а координаты точки P' в системе координат с центром в точке F' (рис.5-6.4). Новые координаты будем обозначать большими буквами ($P(X.Y)$, $P'(X',Y')$). Переход от "старых" к "новым" координатам осуществляется по правилу

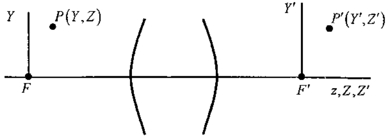


Рис. 5-6.4. Проективное преобразование центрированной оптической системой

$$\begin{aligned} Y &= y, \\ Y' &= y', \end{aligned} \tag{5-6.15}$$

$$Z = z - \left(-\frac{d_0}{c_0}\right) \Rightarrow c_0 Z = c_0 z + d_0, \tag{5-6.16}$$

$$Z' = z' - \left(\frac{c_3}{c_0}\right) \Rightarrow c_0 Z' = c_0 z' - c_3. \tag{5-6.17}$$

С учетом новых систем координат выражения, описывающие проективное преобразование пространства предметов в пространство изображений, есть

$$\begin{aligned} &Y' = \frac{b_2 Y}{c_0 Z}, \quad c_0 Z' = c_0 z' - c_3 = \frac{c_3\left(c_0 z + d_0\right) - c_3 d_0 + c_0 d_3}{c_0 Z} - c_3, \\ &Z' = \frac{-c_3 d_0 + c_0 d_3}{c_0^2 Z} \end{aligned} \tag{5-6.18}$$

Обозначим $f = \dfrac{b_2}{c_0}$, $\quad f' = \dfrac{-c_3 d_0 + c_0 d_3}{c_0 b_2}$.

Тогда преобразование (5-6.18) можно переписать следующим образом:

$$\boxed{\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{Z} = \frac{Z'}{f'}} \tag{5-6.19}$$

Из (5-6.19) следует

$$\boxed{Z \cdot Z' = f \cdot f'}. \tag{5-6.20}$$

Уравнение (5-6.20) называется уравнением Ньютона.

Постоянная f называется фокусным расстоянием в пространстве предметов, постоянная f' - фокусным расстоянием в пространстве изображений.

При фиксированном положении плоскости Z из (5-6.19) имеем

$$Y' = \frac{f}{Z} Y \;\Rightarrow\; dY' = \frac{f}{Z} dY. \tag{5-6.21}$$

Введем поперечное увеличение оптической системы

$$\left(\frac{dY'}{dY}\right)_{Z=const} = \frac{Y'}{Y} = \frac{f}{Z} = \frac{Z'}{f'}. \tag{5-6.22}$$

Введем продольное увеличение оптической системы

$$\left(\frac{dZ'}{dZ}\right) = -\frac{Z}{Z'} = -\frac{f \cdot f'}{Z^2} = -\frac{Z'^2}{f \cdot f'}. \tag{5-6.23}$$

Сравнивая (5-6.23) и (5-6.22), найдем связь между продольным и поперечным увеличениями оптической системы

$$\left(\frac{dZ'}{dZ}\right) = -\frac{f'}{f} \cdot \left(\frac{dY'}{dY}\right)^2_{Z=const} \tag{5-6.24}$$

Поперечное увеличение равно единице, если

$$\begin{aligned} Z &= f, \\ Z' &= f' \end{aligned} \tag{5-6.25}$$

Уравнения (5-6.25) определяют плоскости, которые называются *главными плоскостями. Главные плоскости - это сопряженные плоскости, для которых поперечное увеличение равно единице* (рис.5-6.5). Точки пере-

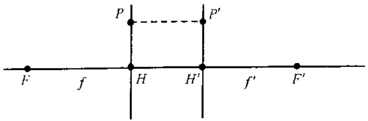


Рис. 5-6.5. Главные плоскости оптической системы

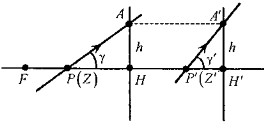


Рис. 5-6.6. Узловые точки оптической системы

сечения главных плоскостей с оптической осью системы называются *главными точками* (H, H'): H - главная точка в пространстве предметов, H' - главная точка в пространстве изображений. *Фокусное расстояние - это расстояние от фокальной точки до главной точки.*

Возьмем на оптической оси точку P с координатой Z. Пусть ее стигматическим изображением будет точка P' с координатой Z' Пошлем из точки P произвольный луч, который пересекает главную плоскость в пространстве предметов в точке A, расположенной на расстоянии h от оптической оси. Сопряженный луч пересекает главную плоскость в пространстве изображений в точке A', расположенной тоже на расстоянии h от главной оптической оси (рис.5-6.6). Введем понятие углового увеличения

$$\Gamma = \frac{tg\gamma'}{tg\gamma},$$

где γ и γ' - углы между оптической осью и сопряженными световыми лучами, проходящими через точки A и A' соответственно. Найдем выражения для тангенсов этих углов

$$tg\gamma = \frac{h}{f-Z},\ tg\gamma' = \frac{h}{f'-Z'} \tag{5-6.26}$$

С учетом (5-6.26) выражение для углового увеличения оптической системы примет вид

$$\frac{tg\gamma'}{tg\gamma} = \frac{f-Z}{f'-Z'} = \frac{1-\dfrac{Z}{f}}{1-\dfrac{Z'}{f'}}\cdot\frac{f}{f'} = \frac{1-\dfrac{Z}{f}}{1-\dfrac{f}{Z}}\cdot\frac{f}{f'} = -\frac{Z}{f'} = -\frac{f}{Z'}. \tag{5-6.27}$$

Угловое увеличение равно единице, если

$$Z = -f', \quad Z' = -f. \tag{5-6.28}$$

Выражение (5-6.28) определяет координаты двух сопряженных точек (N, N'), лежащих на оптической оси, для которых угловое увеличение равно единице. Такие точки называются *узловыми точками (узлами)*: N узловая точка в пространстве предметов, N' - узловая точка в пространстве изображений. Плоскости, перпендикулярные оптической оси и проходящие через узловые точки, называются *узловыми плоскостями*.

Две фокальные точки (плоскости), две главные точки (плоскости), две узловые точки (плоскости) образуют *кардинальные точки (плоскости)* оптической системы. С точки зрения построения изображений знание кардинальных точек полностью определяет оптическую систему.

5-6.4. Построение изображения в центрированных оптических системах

Покажем, как, зная положение кардинальных точек, построить изображение в идеальной центрированной системе. В качестве объекта рассмотрим точку P (рис.5-6.7). Для построения изображения точки P воспользуемся двумя из следующих трех лучей.

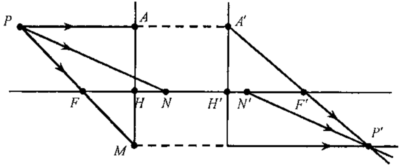


Рис. 5-6.7. Лучи, используемые при построении изображения в оптической системе

Первый луч (PA) выходит из точки P параллельно главной оптической оси. Изображением этого луча будет луч, проходящий через фокальную точку F'. Для определения направления луча, вышедшего из оптической системы, точку пересечения луча PA с главной плоскостью в пространстве изображений A' соединим с фокусом системы F'. Луч $A'F'$ является изображением луча PA.

Второй луч (PF) направим из точки P через фокальную точку оптической системы F. Изображением луча PF будет луч, распространяющийся параллельно главной оптической оси. Для нахождения расстояния между вышедшим лучом и главной оптической осью продолжим луч PF до пересечения в точке M с главной плоскостью в пространстве предметов. Через точку M проведем линию, параллельную главной оптической оси (MP'). Луч MP' является изображением луча PF.

Третий луч (PN) направим из точки P в узел оптической системы. Для определения луча, вышедшего из оптической системы, через узел N' проведем линию, параллельную PN. Луч $P'N'$ является изображением луча PN.

Все описанные выше лучи пересекаются в точке P', давая изображение точки P

На практике для построения изображения точки достаточно знать направления распространения после прохождения оптической системы двух лучей. Поэтому оптическая система оказывается полностью определенной, если известны положения четырех кардинальных точек оптической системы: F,H,F',H'; F,N,F',N'; F,H,N,F'; F,H,N,H'; F,H,N,N'; F,F',H',N'; H,F',H',N'; N,F',H',N'

Замечание. Выбор четырех из шести кардинальных точек производится из условия, что положение двух оставшихся кардинальных точек можно найти, используя (5-6.25), (5-6.28).

Пример. Рассмотрим построение изображения точки P, если известно положение кардинальных точек F,H,N,H' (рис.5-6.8).

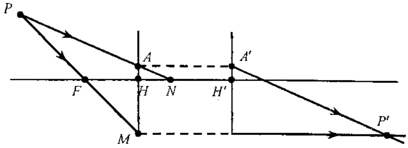


Рис. 5-6.8. Построение изображения точки с помощью кардинальных точек F,H,N,H'

Найдем изображение в оптической системе двух световых лучей: PF и PN. Изображением луча PF является луч MP'. Методика его построения изложена выше. Для нахождения изображения луча PN воспользуемся тем, что луч PN и его изображение параллельны. Пусть луч PN пересекает главную плоскость в пространстве предметов в точке A. Изображением точки A будет точка A', лежащая в главной плоскости в пространстве изображений. Эта же точка лежит на изображении луча PN. Таким образом, для нахождения изображения луча PN необходимо через точку A' провести прямую, параллельную лучу PN ($A'P'$). Пересечение лучей MP' и $A'P'$ дает точку P', которая является изображением точки P.

Лекция 7
Характеристические функции Гамильтона: точечная характеристика, смешанная характеристика, угловая характеристика

Мы говорили о геометрической оптике (в узком смысле) как о методе построения геометрического изображения с использованием понятия луча. Введем ряд функций (характеристик), которые бы описывали связь между предметом и изображением. До сих пор единственная функция, которая использовалась для описания распространения луча, была функция $L(\vec{r})$.

7.1. Точечная характеристика

Пусть имеются две точки P_1 и P_2, через которые проходит световой луч. Точка P_1 лежит в пространстве предметов, а точка P_2 – в пространстве изображений. Введем две системы координат: одну в пространстве предметов, другую в пространстве изображений. Для простоты считаем, что соответствующие оси 1-ой и 2-ой систем координат параллельны. Пусть x_1,

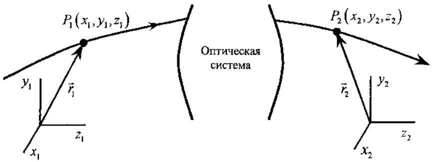


Рис. 7.1. Точечная характеристика

y_1, z_1 координаты точки P_1 в 1-ой системе координат, x_2, y_2, z_2 – координаты точки P_2 во 2-ой системе координат (рис.7.1).

Точечная характеристика определяется как оптическая длина отрезка светового луча между двумя точками P_1 и P_2:

$$V(x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2) = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_{P_1}^{P_2} n\ ds. \tag{7.1}$$

В лекции 1 показано, что $dL = n\,ds$, тогда

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = L(P_2) - L(P_1) = L(\vec{r}_2) - L(\vec{r}_1). \tag{7.2}$$

Введем лучевой вектор как произведение единичного вектора $\vec{s}$ на показатель преломления

$$n\ \vec{s} = \vec{\xi}.$$

Из уравнения светового луча (2.7) и (7.2) следует, что значения лучевых векторов в точках P_1 и P_2 есть

$$\vec{\xi}_1 = n_1 \ \vec{s}_1 = grad^{(1)} L\big|_{P_1} = -grad^{(1)}V, \tag{7.3}$$

$$\vec{\xi}_2 = n_2 \vec{s}_2 = grad^{(2)} L\big|_{P_2} = grad^{(2)}V. \tag{7.4}$$

Индексы 1 и 2 в (7.3), (7.4) указывают, что дифференцирование осуществляется по координатам первой и второй систем координат.

Как следует из (7.3), (7.4) **знание точечной характеристики позволяет найти компоненты лучевых векторов в точках P_1 и P_2.**

Точечная характеристика удовлетворяет уравнению эйконала, записанному как в координатах x_1, y_1, z_1, так и в координатах x_2, y_2, z_2,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)^2 = n_1^2, \tag{7.5}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)^2 = n_2^2. \tag{7.6}$$

7.2. Смешанная характеристика

Смешанная характеристика определяется как функция

$$W = V - \vec{r}_2 \ \vec{\xi}_2. \tag{7.7}$$

Точечная характеристика – это функция от шести независимых переменных (а именно, координат точек P_1 и P_2). А от каких независимых переменных зависит функция W? Для ответа на этот вопрос найдем изменение смешанной характеристики

$$dW = dV - d\vec{r}_2\vec{\xi}_2 - \vec{r}_2 \ d\vec{\xi}_2. \tag{7.8}$$

Вспомним, что

$$V = L(\vec{r}_2) - L(\vec{r}_1) \Rightarrow dV = dL(\vec{r}_2) - dL(\vec{r}_1) =$$

$$= d\vec{r}_2 \cdot grad^{(2)}L - d\vec{r}_1 \cdot grad^{(1)}L = \vec{\xi}_2 d\vec{r}_2 - \vec{\xi}_1 d\vec{r}_1.$$

Тогда

$$dW = \vec{\xi}_2 d\vec{r}_2 - \vec{\xi}_1 d\vec{r}_1 - \vec{\xi}_2 d\vec{r}_2 - \vec{r}_2 d\vec{\xi}_2 = -\vec{\xi}_1 d\vec{r}_1 - \vec{r}_2 d\vec{\xi}_2 \Rightarrow W = W\left(\vec{r}_1, \vec{\xi}_2\right). \tag{7.9}$$

Таким образом смешанная характеристика является функцией координат точки P_1 и проекций лучевого вектора $\vec{\xi}_2$ на оси координат. Как следует из (7.9), **знание смешанной характеристики позволяет найти компоненты лучевого вектора в точке P_1 и координаты точки P_2**

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial x_1} = -\xi_{1X}, \quad \frac{\partial W}{\partial y_1} = -\xi_{1Y}, \quad \frac{\partial W}{\partial z_1} = -\xi_{1Z}, \\ &\frac{\partial W}{\partial \xi_{2X}} = -x_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi_{2Y}} = -y_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi_{2Z}} = -z_2. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Рис. 7.2. Смешанная характеристика

Смешанная характеристика удовлетворяет уравнению эйконала, записанному в координатах x_1, y_1, z_1,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_1}\right)^2 = n_1^2 \qquad (7.11)$$

Рассмотрим случай, когда после прохождения оптической системы луч распространяется в однородной среде (рис.7.2). Из начала системы координат в пространстве изображений опустим перпендикуляр на световой луч в пространстве изображений. Точка D_2 - основание перпендикуляра на луче. Скалярное произведение $\vec{r}_2\ \vec{\xi}_2$ является оптической длиной отрезка D_2P_2.

Смешанная характеристика определяется как оптическая длина отрезка светового луча между точками P_1 и D_2.

Уравнения эйконала в пространстве изображений можно представить в виде

$$\xi_{2X}^2 + \xi_{2Y}^2 + \xi_{2Z}^2 = n_2^2 = const.$$

Взяв дифференциал от правой и левой частей уравнения эйконала, получим

$$\xi_{2X} d\xi_{2X} + \xi_{2Y} d\xi_{2Y} + \xi_{2Z} d\xi_{2Z} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\xi_{2Z} = -\frac{\xi_{2X} d\xi_{2X} + \xi_{2Y} d\xi_{2Y}}{\xi_{2Z}}$$

(7.12)

После подстановки (7.12) в (7.9) изменение смешанной характеристики запишется следующим образом:

$$dW = -\vec{\xi}_1 d\vec{r}_1 - (x_2 - \frac{\xi_{2X}}{\xi_{2Z}} z_2) d\xi_{2X} - (y_2 - \frac{\xi_{2Y}}{\xi_{2Z}} z_2) d\xi_{2Y}. \qquad (7.13)$$

Из (7.13) следует, что W является функцией пяти независимых переменных. Если заданы координаты точки P_1 на световом луче и даны компоненты лучевого вектора в пространстве изображений, то, зная смешанную характеристику и взяв производную от нее по х–ой и у–ой компонентам лучевого вектора в пространстве изображений, получим уравнения двух плоскостей

$$\frac{\partial W}{\partial \xi_{2X}} = -(x_2 - \frac{\xi_{2X}}{\xi_{2Z}} z_2),$$
$$\frac{\partial W}{\partial \xi_{2Y}} = -(y_2 - \frac{\xi_{2Y}}{\xi_{2Z}} z_2). \qquad (7.14)$$

Пересечением этих плоскостей является прямая линия, вдоль которой в пространстве изображений распространяется световой луч.

7.3. Угловая характеристика

Угловая характеристика определяется как функция

$$T = V + \vec{\xi}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{\xi}_2 \cdot \vec{r}_2. \qquad (7.15)$$

Для определения переменных, от которых зависит угловая характеристика, найдем ее изменение

$$dT = dV + d\vec{\xi}_1 \vec{r}_1 + \vec{\xi}_1 d\vec{r}_1 - \vec{\xi}_2 d\vec{r}_2 - d\vec{\xi}_2 \vec{r}_2 = \vec{r}_1 d\vec{\xi}_1 - \vec{r}_2 d\vec{\xi}_2. \qquad (7.16)$$

Из (7.16) следует, что угловая характеристика зависит от компонент лучевых векторов в пространстве предметов и в пространстве изображений

$$T = T(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2).$$

Пусть до оптической системы и после нее луч распространяется в однородной среде (рис.7.3). Из начала системы координат в пространстве предметов опустим перпендикуляр на световой луч в пространстве предметов. Точка D_1 - основание перпендикуляра на световом луче. Скалярное произведение $\vec{r}_1 \ \vec{\xi}_1$ является оптической длиной отрезка D_1P_1.

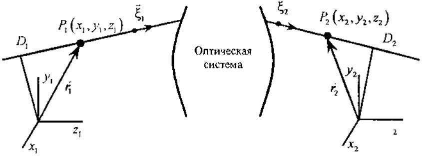


Рис.7.3. Угловая характеристика

Угловая характеристика определяется как оптическая длина отрезка светового луча между точками D_1 и D_2.

Запишем уравнение эйконала в пространстве предметов в виде

$$\xi_{1X}^2 + \xi_{1Y}^2 + \xi_{1Z}^2 = n_1^2 = const.$$

Взяв дифференциал от правой и левой частей уравнения эйконала, получим

$$\xi_{1X} d\xi_{1X} + \xi_{1Y} d\xi_{1Y} + \xi_{1Z} d\xi_{1Z} = 0, \quad \Rightarrow \quad d\xi_{1Z} = -\frac{\xi_{1X} d\xi_{1X} + \xi_{1Y} d\xi_{1Y}}{\xi_{1Z}} \tag{7.17}$$

С учетом (7.12), (7.17) изменение угловой характеристики можно представить в виде

$$dT = (x_1 - \frac{\xi_{1X}}{\xi_{1Z}} z_1) d\xi_{1X} + (y_1 - \frac{\xi_{1Y}}{\xi_{1Z}} z_1) d\xi_{1Y} - (x_2 - \frac{\xi_{2X}}{\xi_{2Z}} z_2) d\xi_{2X} - (y_2 - \frac{\xi_{2Y}}{\xi_{2Z}} z_2) d\xi_{2Y}.$$

Угловая характеристика является функцией четырех независимых переменных: ξ_{1X}, ξ_{1Y}, ξ_{2X}, ξ_{2Y}. Знание угловой характеристики позволяет получить четыре уравнения, задающие четыре плоскости,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \xi_{1X}} = (x_1 - \dfrac{\xi_{1X}}{\xi_{1Z}} z_1), \\ \dfrac{\partial T}{\partial \xi_{1Y}} = (y_1 - \dfrac{\xi_{1Y}}{\xi_{1Z}} z_1), \end{cases} \tag{7.18}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \xi_{2X}} = -(x_2 - \dfrac{\xi_{2X}}{\xi_{2Z}} z_2), \\ \dfrac{\partial T}{\partial \xi_{2Y}} = -(y_2 - \dfrac{\xi_{2Y}}{\xi_{2Z}} z_2). \end{cases} \tag{7.19}$$

Пересечение двух плоскостей, определяемых из (7.18), задает прямую линию, вдоль которой распространяется луч, падающий на оптическую систему. Пересечение плоскостей, определяемых из (7.19), задает прямую линию, вдоль которой распространяется луч, прошедший оптическую систему.

Таким образом, если до и после оптической системы среды однородные, **знание угловой характеристики позволяет найти прямые, вдоль которых распространяются луч, падающий на оптическую систему, и луч, прошедший оптическую систему.**

Лекция 8-9

Угловая характеристика преломляющей поверхности вращения. Нулевой инвариант Аббе. Формула тонкой линзы. Формула Смита-Гельмгольца

8-9.1. *Угловая характеристика преломляющей поверхности вращения*

Пусть имеются две однородные среды с показателями преломления n_1 и n_2, которые разделены параболической поверхностью вращения (рис.8-9.1). В системе координат с центром в точке O при условии, что ось Z совпадает с осью вращения и направлена "вдоль направления распространения лучей", уравнение параболической поверхностью вращения есть

$$z = \frac{1}{2r}\left(x^2 + y^2\right), \tag{8-9.1}$$

где r – радиус кривизны у вершины (точка O) поверхности. Радиус кривизны считается положительным (отрицательным), если центр кривизны расположен справа (слева) от вершины поверхности.

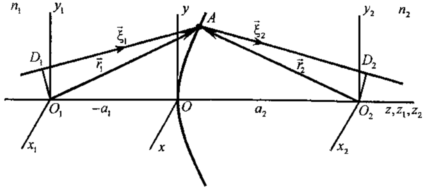


Рис.8-9.1. Преломляющая поверхность

Введем в пространстве предметов систему координат с центром в точке O_1 и в пространстве изображений систему координат с центром в точке O_2. Центры систем координат расположены на оси вращения. Направления осей всех трех систем координат параллельны. В системе координат с центром в точке O координаты точек O_1 и O_2 есть

$$O_1(0,0,-a_1),$$

$$O_2(0,0,a_2).$$

Здесь a_1 и a_2 – расстояния от точек O_1 и O_2 до точки O.

Пусть луч падает на границу раздела двух сред, преломляется и распространяется в пространстве изображений. Направление распространения луча в пространстве предметов задается лучевым вектором $\vec{\xi}_1$, в пространстве изображений лучевым вектором $\vec{\xi}_2$. Опустим из точек O_1 и O_2 перпендикуляры на лучи в пространстве предметов и в пространстве изображений соответственно.

Положение точки преломления светового луча (A) в системе координат, расположенной в пространстве предметов, определяется радиус-вектором $\vec{r}_1$, в системе координат, расположенной в пространстве изображений, радиус-вектором $\vec{r}_2$. В системе координат с центром в точке O проекции этих радиус-векторов на оси координат есть

$$\vec{r}_1(x, y, z - a_1),$$
$$\vec{r}_2(x, y, z - a_2).$$

Здесь x, y, z – координаты точки A в системе координат с центром в точке O.

Угловая характеристика – это оптический путь по световому лучу от точки D_1 до точки D_2

$$T = [D_1A] + [AD_2]. \tag{8-9.2}$$

Оптические пути по световым лучам можно представить следующим образом:

$$[D_1A] = \vec{r}_1\vec{\xi}_1 = x\xi_{1X} + y\xi_{1Y} + (z - a_1)\xi_{1Z}, \tag{8-9.3}$$

$$[AD_2] = -\vec{r}_2\vec{\xi}_2 = -x\xi_{2X} - y\xi_{2Y} - (z - a_2)\xi_{2Z}. \tag{8-9.4}$$

С учетом (8-9.3), (8-9.4) выражение для угловой характеристики поверхности вращения (8-9.2) примет вид

$$T = x(\xi_{1X} - \xi_{2X}) + y(\xi_{1Y} - \xi_{2Y}) + z(\xi_{1Z} - \xi_{2Z}) - a_1\xi_{1Z} + a_2\xi_{2Z}. \tag{8-9.5}$$

В полученном выражении для угловой характеристики надо заменить координаты x, y, z на проекции лучевых векторов $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$.

Вспомним, что при выводе закона преломления (выражение 3.14) было показано, что разность лучевых векторов $(\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2)$ параллельна вектору, направленному по нормали к границе раздела двух сред. С другой стороны, если имеется некоторая поверхность, задаваемая уравнением

$$f(x, y, z) = 0,$$

то $grad\,f$ - вектор, также направленный по нормали к этой поверхности. В нашем случае в качестве функции f выступает функция вида

$$f = z - \frac{1}{2r}(x^2 + y^2). \tag{8-9.6}$$

Таким образом, справедливо равенство

$$(\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2) = \lambda grad\left\{z - \frac{1}{2r}(x^2 + y^2)\right\}. \tag{8-9.7}$$

Здесь λ - коэффициент пропорциональности. Векторное уравнение (8-9.7) разложим на три скалярных уравнения

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=-\lambda\frac{1}{r}x=\xi_{1X}-\xi_{2X},$$

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=-\lambda\frac{1}{r}y=\xi_{1Y}-\xi_{2Y}, \qquad (8\text{-}9.8)$$

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=\lambda=\xi_{1Z}-\xi_{2Z}.$$

Из третьего уравнения (8-9.8) найдем коэффициент λ. Подставив значение этого коэффициента в первое и второе уравнения (8-9.8), получим

$$x=-r\frac{\xi_{1X}-\xi_{2X}}{\xi_{1Z}-\xi_{2Z}},$$

$$y=-r\frac{\xi_{1Y}-\xi_{2Y}}{\xi_{1Z}-\xi_{2Z}} \qquad (8\text{-}9.9)$$

Координату z найдем, подставив (8-9.9) в (8-9.1),

$$z=\frac{r}{2}\frac{(\xi_{1X}-\xi_{2X})^2+(\xi_{1Y}-\xi_{2Y})^2}{(\xi_{1Z}-\xi_{2Z})^2} \qquad (8\text{-}9.10)$$

С учетом (8-9.9) и (8-9.10) выражение для угловой характеристики поверхности вращения (8-9.5) примет вид

$$T=-r\frac{(\xi_{1X}-\xi_{2X})^2}{(\xi_{1Z}-\xi_{2Z})}-r\frac{(\xi_{1Y}-\xi_{2Y})^2}{(\xi_{1Z}-\xi_{2Z})}+\frac{r}{2}\frac{(\xi_{1X}-\xi_{2X})^2+(\xi_{1Y}-\xi_{2Y})^2}{(\xi_{1Z}-\xi_{2Z})}+$$

$$a_1\xi_{1Z}-a_2\xi_{2Z}=-\frac{r}{2}\frac{(\xi_{1X}-\xi_{2X})^2+(\xi_{1Y}-\xi_{2Y})^2}{(\xi_{1Z}-\xi_{2Z})}+a_1\xi_{1Z}-a_2\xi_{2Z} \quad . \qquad (8\text{-}9.11)$$

В однородной среде, используя уравнение эйконала

$$\xi_{jX}^2+\xi_{jY}^2+\xi_{jZ}^2=n_j^2 \ (j=1,2),$$

компоненты ξ_{1Z} и ξ_{2Z} можно записать в виде

$$\xi_{1Z}=\{n_1^2-(\xi_{1X}^2+\xi_{1Y}^2)\}^{\frac{1}{2}} \ ,$$

$$\xi_{2Z}=\{n_2^2-(\xi_{2X}^2+\xi_{2Y}^2)\}^{\frac{1}{2}} \ . \qquad (8\text{-}9.12)$$

Будем рассматривать световые лучи, распространяющиеся под небольшими углами к оптической оси,

$$|\xi_{jX}|,\ |\xi_{jY}|<<n_j. \qquad (8\text{-}9.13)$$

Тогда, раскладывая в ряд выражения для проекций лучевых векторов на ось Z (8-9.12) и учитывая первые два слагаемых в разложении, получим

$$\xi_{1Z} \approx n_1 - \frac{1}{2n_1}\left(\xi_{1X}^2 + \xi_{1Y}^2\right), \qquad \xi_{2Z} \approx n_2 - \frac{1}{2n_2}\left(\xi_{2X}^2 + \xi_{2Y}^2\right) \tag{8-9.14}$$

С учетом (8-9.14) выражение для угловой характеристики поверхности вращения примет вид

$$T = -\frac{r}{2}\frac{\xi_{1X}^2 + \xi_{2X}^2 + \xi_{1Y}^2 + \xi_{2Y}^2 - 2\left(\xi_{1X}\xi_{1X} + \xi_{1Y}\xi_{2Y}\right)}{n_1 - n_2 - \frac{1}{2n_1}\left(\xi_{1X}^2 + \xi_{1Y}^2\right) + \frac{1}{2n_2}\left(\xi_{2X}^2 + \xi_{2Y}^2\right)} + a_1 n_1 - \frac{a_1}{2n_1}\left(\xi_{1X}^2 + \xi_{1Y}^2\right) - a_2 n_2 + \frac{a_2}{2n_2}\left(\xi_{2X}^2 + \xi_{2Y}^2\right) \tag{8-9.15}$$

При условии, что световые лучи распространяются под небольшими углами к оптической оси, слагаемыми $\frac{1}{n_1}(\xi_{1X}^2 + \xi_{1Y}^2)$ и $\frac{1}{n_2}(\xi_{2X}^2 + \xi_{2Y}^2)$ в знаменателе первого слагаемого в (8-9.15) можно пренебречь.

Введем новые переменные

$$u^2 = \xi_{1X}^2 + \xi_{1Y}^2,$$
$$v^2 = \xi_{2X}^2 + \xi_{2Y}^2,$$
$$w^2 = \xi_{1X}\xi_{2X} + \xi_{1Y}\xi_{2Y}.$$

Выражение для угловой характеристики (8-9.15) примет вид

$$T = -\frac{r}{2(n_1 - n_2)}\left(u^2 + v^2 - 2w^2\right) + a_1 n_1 - \frac{a_1}{2n_1}u^2 - a_2 n_2 + \frac{a_2}{2n_2}v^2 \tag{8-9.16}$$

Или

$$T = T_0 + T_2,$$

где $T_0 = a_1 n_1 - a_2 n_2$, $T_2 = Au^2 + Bv^2 + Cw^2$,

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{n_2 - n_1} + \frac{a_1}{n_1}\right),\ B = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{n_2 - n_1} - \frac{a_2}{n_2}\right),\ C = -\frac{r}{n_1 - n_2}.$$

8-9.2. *Нулевой инвариант Аббе*

Параксиальная оптика – это раздел оптики, рассматривающий вопросы формирования изображения точек, лежащих непосредственно вблизи оптической оси, и распространение лучей под небольшими углами к оптической оси (см. условие 8-9.13).

Вновь рассмотрим преломляющую поверхность вращения, разделяющую две однородные среды. Пусть точка $P_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на падающем луче, а точка $P_2(x_2, y_2, z_2)$ - на преломленном луче (рис.8-9.2). Используя

(7.18), (7.19) и выражение для угловой характеристики поверхности вращения (8-9.16), получим

$$x_1 - \frac{\xi_{1X}}{\xi_{1Z}} z_1 = 2A\xi_{1X} + C\xi_{2X}, \tag{8-9.17}$$

$$y_1 - \frac{\xi_{1Y}}{\xi_{1Z}} z_1 = 2A\xi_{1Y} + C\xi_{2Y}, \tag{8-9.18}$$

$$x_2 - \frac{\xi_{2X}}{\xi_{2Z}} z_2 = -2B\xi_{2X} - C\xi_{2X}, \tag{8-9.19}$$

$$y_2 - \frac{\xi_{2Y}}{\xi_{2Z}} z_2 = -2B\xi_{2Y} - C\xi_{1Y}. \tag{8-9.20}$$

В параксиальном приближении в левых частях уравнений (8-9.17)-(8-9.20) можно заменить $\xi_{1Z} \approx n_1$, $\xi_{2Z} \approx n_2$.

Предположим, что падающий и преломленный лучи распространяются в меридиональной плоскости YZ ($\xi_{1X} = \xi_{2X} = 0$). Тогда уравнение (8-9.18) определяет прямую, вдоль которой распространяется падающий луч, а уравнение (8-9.20) определяет прямую, вдоль которой распространяется преломленный луч. Выразим ξ_{2Y} из уравнения (8-9.18)

$$\xi_{2Y} = \frac{1}{C}(y_1 - \frac{\xi_{1Y}}{n_1} z_1 - 2A\xi_{1Y})$$

и подставим в уравнение (8-9.20)

$$y_2 = \left(\frac{z_2}{n_2} - 2B\right)\frac{y_1}{C} + \xi_{1Y}\left\{\left(2B - \frac{z_2}{n_2}\right)\left(2A + \frac{z_1}{n_1}\right)\frac{1}{C} - C\right\}. \tag{8-9.21}$$

Уравнение (8-9.21) определяет зависимость координаты точки P_2 на ось Y от координаты точки P_1 на эту ось и направления распространения падающего луча.

Поставим вопрос. Когда все лучи, исходящие из точки P_1, после пре-

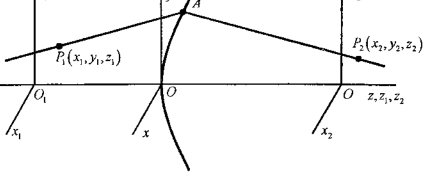


Рис.8-9.2. Вывод нулевого инварианта Аббе

ломления на поверхности раздела двух сред пройдут через точку P_2? Для выполнения этого необходимо, чтобы в уравнении (8-9.21) отсутствовала зависимость у-ой координаты точки P_2 от ξ_{1Y}. Это возможно при выполнении условия

$$\left(2B-\frac{z_2}{n_2}\right)\left(2A+\frac{z_1}{n_1}\right)=C^2. \tag{8-9.22}$$

Подставив в (8-9.22) значения для A, B и C при условии, что точки O_1 и O_2 совпадают с точкой O $\left(a_1=a_2=0\right)$, получим

$$\left(\frac{r}{n_2-n_1}-\frac{z_2}{n_2}\right)\left(\frac{r}{n_2-n_1}+\frac{z_1}{n_1}\right)=\frac{r^2}{(n_2-n_1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{n_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{z_1}\right)=n_2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{z_2}\right)}. \tag{9.23}$$

Выражение (8-9.23) получило название нулевой инвариант Аббе. Величина

$$P=\frac{n_2-n_1}{r}$$

называется оптической силой преломляющей поверхности.

Поперечное увеличение оптической системы – преломляющая поверхность вращения можно представить следующим образом:

$$\frac{y_2}{y_1}=-\frac{1}{C}\left(2B-\frac{z_2}{n_2}\right).$$

Подставив значения B и C, получим

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{n_2-n_1}{n_2 r}\left(\frac{n_2 r}{n_2-n_1}-z_2\right). \tag{8-9.24}$$

Поперечное увеличение равно единице, если $z_2=0$. Таким образом, главные плоскости преломляющей поверхности вращения совпадают и проходят через ее вершину (точку O). Для определения положения фокальных точек воспользуемся нулевым инвариантом Аббе.

Если $z_1\to-\infty$, то координата фокальной точки преломляющей поверхности вращения в пространстве изображений (задняя фокальная точка) есть

$$z_{2F}=\frac{n_2 r}{n_2-n_1}$$

Если $z_2\to\infty$, то координата фокальной точки преломляющей поверхности вращения в пространстве предметов (передняя фокальная точка) есть

$$z_{1F} = -\frac{n_1 r}{n_2 - n_1}.$$

По определению фокусные расстояния – это расстояния между фокальными и главными точками. Зная положения фокальных и главных точек, найдем величину переднего и заднего фокусных расстояний

$$f_1 = -z_{1F},$$

$$f_2 = -z_{2F}.$$

Отношение фокусных расстояний преломляющей поверхности вращения есть

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2} \qquad (8\text{-}9.25)$$

Покажем, что преобразование пространства предметов в пространство изображений, осуществляемое в параксиальном приближении преломляющей поверхностью вращения, аналогично преобразованию, осуществляемому идеальной оптической системой.

Начало системы координат в пространстве предметов совместим с передней фокальной точкой, а начало системы координат в пространстве изображений с задней фокальной точкой. Координаты точки в пространстве предметов в системах координат с центрами в точках O и F_1 связаны соотношениями

$$X_1 = x_1,\ Y_1 = y_1,\ Z_1 = z_1 - z_{1F} = z_1 + f_1.$$

Координаты точки в пространстве изображений в системах координат с центрами в точках O и F_2 связаны соотношениями

$$X_2 = x_2,\ Y_2 = y_2,\ Z_2 = z_2 - z_{2F} = z_2 + f_2.$$

С учетом выражений для переднего и заднего фокусных расстояний формула (8-9.24) в новых координатах примет вид

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{f_2} = \frac{f_1}{Z_1} \qquad (8\text{-}9.26)$$

Выражение (8-9.26) полностью аналогично выражению (5-6.19), полученному при рассмотрении преобразования идеальной оптической системой пространства предметов в пространство изображений.

8-9.3. Формула тонкой линзы

Линза – это оптическая система, состоящая из двух преломляющих поверхностей второго порядка, ограничивающих участок однородной изотропной среды (рис. 8-9.3). Преломляющие поверхности отделяют среду с показателем преломления n_2 от среды с показателем преломления n_1. Будем считать, что преломляющие поверхности - это параболические поверхности вращения с радиусами кривизны r_1 и r_2. Оси вращения обеих поверхностей совпадают. Ось вращения является главной оптической осью линзы.

На оптической оси на расстоянии $-z_1$ от первой преломляющей поверхности вращения возьмем точку P_1. Ее изображением на этой преломляющей поверхности будет точка P_2', расположенная на расстоянии z_2'. Изображением точки P_2' на второй преломляющей поверхности вращения будет точка P_2 ($-z_1'$ и z_2 - расстояния от точек P_2' и P_2 до второй преломляющей поверхности).

Используя нулевой инвариант Аббе, запишем

для первой преломляющей поверхности

$$\frac{n_2}{z_2'} - \frac{n_1}{z_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}, \tag{8-9.27}$$

для второй преломляющей поверхности

$$\frac{n_1}{z_2} - \frac{n_2}{z_1'} = \frac{n_2 - n_1}{r_2}. \tag{8-9.28}$$

Сложив уравнения (8-9.27) и (8-9.28), получим

$$\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} = (n_{21} - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{n_{21} d}{z_1' z_2'}. \tag{8-9.29}$$

Здесь $d = z_2' - z_1'$ - расстояние между вершинами преломляющих поверхностей, $n_{21} = n_2/n_1$.

Линза называется тонкой, если расстояние между вершинами преломляющих поверхностей намного меньше радиусов кривизны этих поверхностей:

$$d << |r_1|, |r_2|.$$

В случае тонкой линзы можно считать, что положение вершин преломляющих поверхностей (точки O' и O'') совпадают. Главные плоскости

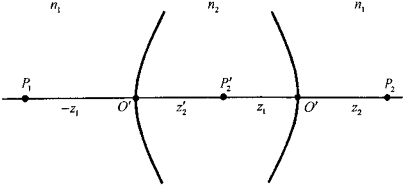


Рис. 8-9.3. Линза

тонкой линзы также совпадают и проходят именно через эту точку.

Из (8-9.29) расстояния между предметом и линзой, изображением и линзой связаны соотношением

$$\boxed{\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1}=\frac{1}{F}}, \qquad (8\text{-}9.30)$$

где $\frac{1}{F}=(n_{21}-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$. Выражение (8-9.30) получило название формулы тонкой линзы.

8-9.4. Формула Смита-Гельмгольца

Рассмотрим произвольную центрированную оптическую систему, состоящую из N преломляющих поверхностей (рис.8-9.4). Преломляющая поверхность Σ_j разделяет среды с показателями преломления n_j и n_{j+1}. Обозначим фокусные расстояния j-ой преломляющей поверхности f_j и f_j'.

Возьмем две точки P_1 и P_1', расположенные в меридиональной плоскости в среде с показателем преломления n_1. Изображениями этих точек в оптической системе, состоящей из первой преломляющей поверхности, являются точки P_2 и P_2', в оптической системе, состоящей из первой и второй преломляющих поверхностей, точки P_3 и P_3', ..., в оптической системе, состоящей из N преломляющих поверхностей, точки P_{N+1} и P_{N+1}'.

Координаты точек $P_1(X_1,Y_1)$ и $P_1'(X_1',Y_1')$ определим в системе координат с центром в передней фокальной точке первой преломляющей поверхности. Координаты точек $P_2(X_2,Y_2)$ и $P_2'(X_2',Y_2')$ определим в системе координат с центром в задней фокальной точке первой преломляющей поверхности. Тогда, используя (8-9.26), можно записать

$$\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{f_1}, \qquad \frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{f_1'}, \qquad (8\text{-}9.31)$$

$$\frac{Y_1'}{Y_2'}=\frac{Z_1'}{f_1}, \qquad \frac{Y_2'}{Y_1'}=\frac{Z_2'}{f_1'}. \qquad (8\text{-}9.32)$$

Вычтя из первого уравнения (8-9.31) первое уравнение (8-9.32), а из второго уравнения (8-9.31) второе уравнение (8-9.32), получим

$$\frac{\Delta Z_1}{f_1}=\frac{Y_1Y_2'-Y_2Y_1'}{Y_2Y_2'}, \qquad (8\text{-}9.33)$$

$$\frac{\Delta Z_2}{f_1'}=-\frac{Y_1Y_2'-Y_2Y_1'}{Y_1Y_1'}. \qquad (8\text{-}9.34)$$

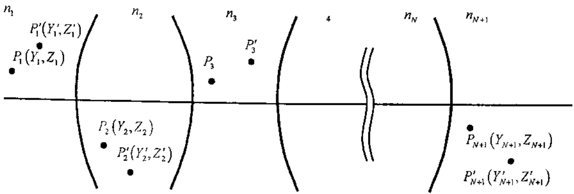


Рис. 8-9.4. Центрированная оптическая система, состоящая из N преломляющих поверхностей

Здесь $\Delta Z_1 = Z_1 - Z_1'$, $\Delta Z_2 = Z_2 - Z_2'$. Разделив (8-9.33) на (8-9.34), получим

$$\frac{\Delta Z_1}{f_1 Y_1 Y_1'} = -\frac{\Delta Z_2}{f_1' Y_2 Y_2'}. \tag{8-9.35}$$

С учетом связи между фокусными расстояниями преломляющей поверхности (8-9.25) выражение (8-9.35) примет вид

$$\frac{n_1 Y_1 Y_1'}{\Delta Z_1} = \frac{n_2 Y_2 Y_2'}{\Delta Z_2} \tag{8-9.36}$$

Заметим, что вид выражения (8-9.36) не меняется при смещении начал систем координат вдоль оси Z.

Аналогичные выражения получим, рассматривая преломление на второй и последующих поверхностях. В общем случае для j-ой преломляющей поверхности можно записать

$$\boxed{\frac{n_j Y_j Y_j'}{\Delta Z_j} = \frac{n_{j+1} Y_{j+1} Y_{j+1}'}{\Delta Z_{j+1}}}. \tag{8-9.37}$$

Выражение $\dfrac{n_j Y_j Y_j'}{\Delta Z_j}$ является инвариантным при последовательном преобразовании на преломляющих поверхностях, из которых состоит центрированная оптическая система.

Введем угол между лучем и оптической осью

$$tg\gamma_j = \frac{Y_j'}{\Delta Z_j}.$$

Тогда выражение (8-9.37) можно записать в виде

$$n_j Y_j tg\gamma_j = n_{j+1} Y_{j+1} tg\gamma_{j+1}. \tag{8-9.38}$$

В параксиальном приближении $tg\gamma_j \approx \gamma_j$ и выражение (8-9.38) перепишется следующим образом:

$$\boxed{n_j Y_j \gamma_j = n_{j+1} Y_{j+1} \gamma_{j+1}}. \tag{8-9.39}$$

Формула (8-9.39) получила название формулы Смита-Гельмгольца. Выражение $n_j Y_j \gamma_j$ называется инвариантом Смита-Гельмгольца.

Рассмотрим следствия, вытекающие из формулы Смита-Гельмгольца.

Следствие 1.

Пусть перед оптической системой в меридиональной плоскости расположены две точки с координатами (Y, Z) и $(Y + dY, Z + dZ)$, заданными в системе координат с центром в переднем фокусе первой преломляющей поверхности. Изображением этих точек в оптической системе будут точки с координатами (Y', Z') и $(Y' + dY', Z' + dZ')$, заданными в системе координат с центром в заднем фокусе последней преломляющей поверхности.

Используя выражение (8-9.37), запишем

$$\frac{n_1 Y(Y+dY)}{dZ}=\frac{n_{N+1}Y'(Y'+dY')}{dZ'} \tag{8-9.40}$$

В предельном случае $dY \to 0$, $dZ \to 0$ выражение (8-9.40) можно переписать следующим образом:

$$\frac{dZ'}{dZ}=\left(\frac{Y'}{Y}\right)^2\frac{n_{N+1}}{n_1} \tag{8-9.41}$$

С учетом того, что в плоскости $Z=const$ поперечное увеличение оптической системы есть

$$\left(\frac{dY'}{dY}\right)_{Z=const}=\frac{Y'}{Y},$$

выражение (8-9.41) можно записать в виде

$$\frac{dZ'}{dZ}=\left(\frac{dY'}{dY}\right)^2\frac{n_{N+1}}{n_1} \tag{8-9.42}$$

При рассмотрении проективного преобразования, осуществляемого идеальной оптической системой, было показано, что

$$\left(\frac{dZ'}{dZ}\right)=-\left(\frac{dY'}{dY}\right)^2_{Z=const}\frac{f'}{f}$$ (формула (5-6.24)).

Сравнивая записанное выше выражение с выражением (8-9.42), видим, что между фокусными расстояниями центрированной оптической системы существует простая связь вида

$$\frac{f}{f'}=-\frac{n_1}{n_{N+1}}. \tag{8-9.43}$$

В частности, если показатели преломления равны, то фокусное расстояние в пространстве предметов равно по величине и противоположно по знаку фокусному расстоянию в пространстве изображений.

Из (8-9.43) и определения положения узловых точек (см. выражение (5-6.28)) следует также, что если показатели преломления равны, то положения главных и узловых точек центрированной оптической системы совпадают.

Следствие 2.

Из формулы Смита-Гельмгольца следует, что

$$\left(\frac{Y'}{Y}\right)\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{n_1}{n_{N+1}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dY'}{dY}\right)\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{n_1}{n_{N+1}} \tag{8-9.44}$$

В произвольной плоскости $Z=const$ произведение поперечного увеличения на угловое увеличение оптической системы есть величина постоянная, равная при $n_1=n_{N+1}$ единице.

Лекция 10-11

Матричные методы в параксиальной оптике: основные понятия, матрица перемещения, матрица преломляющей поверхности, матрица линзы, матрица произвольной центрированной оптической системы, физический смысл матричных элементов, экспериментальное определение матрицы оптической системы, связь матричных элементов с положением кардинальных точек оптической системы

10-11.1. Основные понятия

Пусть имеется центрированная оптическая система (рис.10-11.1). Рассмотрим луч, лежащий в меридиональной плоскости. "Траектория" луча, проходящего через оптическую систему (а это совокупность преломляющих поверхностей, разделяющих однородные среды), будет состоять из последовательности прямых отрезков. Каждый из прямых отрезков определяется координатами одной принадлежащей ему точки и углом между отрезком и оптической осью Z.

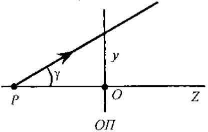


Рис. 10-11.1. Описание распространения луча

Выберем любую плоскость, перпендикулярную оси Z, и назовем ее опорной плоскостью (ОП). Тогда прямую, вдоль которой распространяется световой луч, можно определить двумя параметрами: высотой, на которой этот луч пересекает ОП, и углом между прямой и оптической осью системы. Угол считаем положительным, если он соответствует вращению против часовой стрелки от положительного направления оси Z к направлению, в котором распространяется свет.

При рассмотрении распространения света в оптической системе используется не одна ОП, а на каждом этапе, по мере того как происходит переход от одних элементов оптической системы к другим, выбирается своя опорная плоскость.

Для проведения расчетов более удобно работать не с углом, а с произведением угла на показатель преломления $V = n\gamma$ (нормированный угол). В параксиальном приближении при переходе через плоскую преломляющую поверхность

$$n\gamma = const .$$

Для определения "траектории" луча в оптической системе необходимо рассмотреть:

1) перемещение луча в однородной среде между двумя преломляющими поверхностями;
2) прохождение луча через преломляющую поверхность.

Луч пересекает $ОП_1$, относительно которой он характеризуется высотой y_1 и углом V_1, затем проходит оптическую систему и наконец достигает $ОП_2$, которую пересекает на высоте y_2 под углом V_2 к оптической оси (рис.10-11.2). *Под оптической системой будем понимать совокупность участков свободного пространства и преломляющих поверхностей, расположенных между опорными плоскостями $ОП_1$ и $ОП_2$.*

Стоит задача: найти связь между вектором $X_1(y_1,V_1)$ и вектором

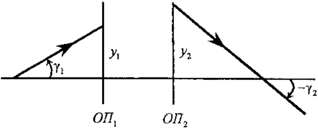


Рис. 10-11.2. Оптическая система в матричной оптике

$X_2(y_2,V_2)$. В параксиальном приближении эта связь линейна, тогда вектора X_1 и X_2 связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_2 = MX_1. \qquad (10\text{-}11.1)$$

Здесь $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ – матрица оптической системы. Как будет показано далее, матричные элементы таковы, что определитель

$$AD - BC = 1. \qquad (10\text{-}11.2)$$

Если рассмотреть луч, проходящий в обратном направлении, то

$$X_1 = M^{-1} X_2 = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} X_2. \qquad (10\text{-}11.3)$$

10-11.2. Матрица перемещения (или матрица участка свободного пространства)

Найдем координаты луча X, прошедшего участок свободного пространства между опорными плоскостями $ОП_1$ и $ОП_2$толщиной t (рис.10-11.3). Заметим, что

$$V_1 = V_2, \qquad (10\text{-}11.4)$$

$$y_2 = y_1 + PQ = y_1 + t \cdot tg\gamma_1 = y_1 + \frac{t}{n_2} \cdot V_1. \qquad (10\text{-}11.5)$$

Из (10-11.1) компоненты векторов X_1 и X_2 связаны соотношениями

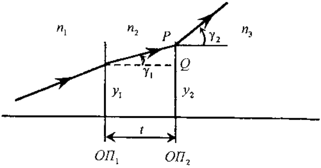


Рис. 10-11.3. Оптическая система - участок свободного пространства

$$y_2 = Ay_1 + BV_1, \tag{10-11.6}$$

$$V_2 = Cy_1 + DV_1. \tag{10-11.7}$$

Сравнивая (10-11.4) и (10-11.5) с (10-11.6) и (10-11.7), найдем матрицу перемещения

$$F = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10-11.8}$$

где $T = \frac{t}{n}$ - приведенная длина. Из (10-11.8) видно, что определитель матрицы $\|F\| = 1$.

Матрица оптической системы, состоящей из нескольких плоскопараллельных, например, четырех слоев, равна произведению матриц отдельных слоев (рис.10-11.4)

$$F = F_5 F_4 F_3 F_2 = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=2}^{5} T_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10-11.9}$$

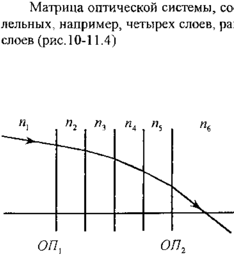


Рис. 10-11.4. Оптическая система, состоящая из совокупности преломляющих слоев

Видно, что матрица не меняется, как бы не располагались слои. Меняется коэффициент отражения, однако геометрия передаваемого изображения будет той же самой.

Приведенная толщина $\frac{t}{n}$ отражает определенное физическое явление. Если слой воздуха заменим таким же слоем вещества с показателем преломления n, то предмет нам будет казаться расположенным на расстоянии $\frac{t}{n}$, т.е. происходит как бы приближение объекта к наблюдателю.

10-11.3. Матрица преломляющей поверхности

Пусть имеется сферическая граница раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2. Радиус кривизны поверхности r Радиус кривизны считается положительным, если центр кривизны расположен справа от поверхности. Рассмотрим две опорные плоскости, проходящие через вершину преломляющей поверхности и через точку пересечения луча с этой поверхностью соответственно (рис.10-11.5).

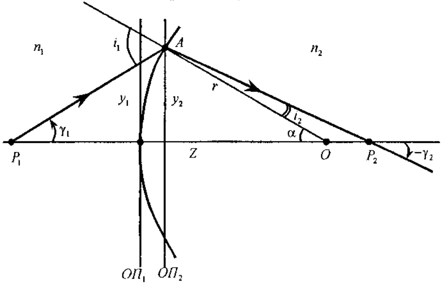


Рис. 10-11.5. Преломление луча на сферической поверхности

В параксиальном приближении ОП$_1$ совпадает с ОП$_2$, поэтому

$$y_1 = y_2. \tag{10-11.10}$$

Теперь необходимо найти, как связано V_2 с V_1 и y_1. Используя закон преломления, можно записать

$$n_1 i_1 = n_2 i_2, \tag{10-11.11}$$

где i_1 и i_2 - углы падения и преломления. Из ΔP_1AO и ΔP_2AO следует, что

$$i_1 = \gamma_1 + \alpha = \gamma_1 + \frac{y_1}{r}, \tag{10-11.12}$$

$$i_2 = \alpha - (-\gamma_2) = \alpha + \gamma_2 = \gamma_2 + \frac{y_2}{r}. \qquad (10\text{-}11.13)$$

При записи (10-11.12), (10-11.13) считали, что $\alpha = \frac{y_1}{r}$ Подставив (10-11.12) и (10-11.13) в (10-11.11), получим

$$n_1\left(\gamma_1 + \frac{y_1}{r}\right) = n_2\left(\gamma_2 + \frac{y_2}{r}\right). \qquad (10\text{-}11.14)$$

Сравнивая (10-11.4) и (10-11.5) с (10-11.10) и (10-11.14), найдем матрицу преломляющей поверхности

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_1 - n_2}{r} & 1 \end{pmatrix}. \qquad (10\text{-}11.15)$$

Из (10-11.15) видно, что определитель матрицы $\|R\| = 1$.

10-11.4. Матрица линзы

Линза представляет оптическую систему, состоящую из двух преломляющих поверхностей с радиусами r_1 и r_2 и участка свободного пространства толщиной d (рис.10-11.6). Для нахождения матрицы линзы рассмотрим последовательное преобразование вектора $X_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$,

на первой преломляющей поверхности:

$$X_1' = R_1 X_1,$$

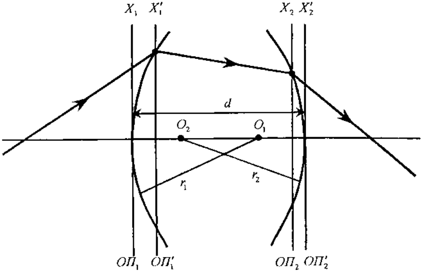


Рис. 10-11.6. Прохождение луча через линзу

на участке свободного пространства:

$$X_2' = FX_1' = FR_1X_1,$$

на второй преломляющей поверхности:

$$X_2 = R_2\, X_2' = R_2\, F\, R_1\, X_1.$$

Таким образом, матрица линзы есть произведение трех матриц

$$R_Л = R_2FR_1. \qquad (10\text{-}11.16)$$

В случае тонкой линзы ($d \to 0$) выражение (10-11.16) примет вид

$$R_Л = R_2R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_2-n_1}{r_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_1-n_2}{r_1} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n_2-n_1)\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \qquad (10\text{-}11.17)$$

Из (10-11.17) следует, что определитель матрицы $\|R_л\| = 1$.

Заметим, если произведение матриц перемещений или преломлений коммутативно (в силу вида самих матриц), т.е. $F_1F_2 = F_2F_1$ и $R_1R_2 = R_2R_1$, то

$$R_1F_1 \neq F_1R_1.$$

10-11.5. Матрица произвольной центрированной оптической системы

Рассмотрим распространение светового луча через оптическую систему, состоящую из N преломляющих поверхностей, которые разделяют $N+1$ участков свободных пространств (рис.10-11.7). В качестве входной опорной плоскости выберем плоскость, расположенную на расстоянии t_a от первой преломляющей поверхности, а в качестве выходной – на расстоянии t_b от задней преломляющей поверхности. Нам необходимо найти связь между векторами X_{2N+2} и X_1.

$$X_2 = M_1X_1, \qquad X_3 = M_2X_2 = M_2M_1X_1, \qquad X_4 = M_3X_2 = M_3M_2M_1X_1, \ \ldots$$

Тогда

$$X_{2N+2} = MX_1,$$

где

$$M = M_{2N+1}M_{2N} \cdot \ldots . M_2M_1. \qquad (10\text{-}11.18)$$

Здесь M_j - матрица j-ого элемента оптической системы.

Если матрица равна произведению матриц, то ее определитель равен произведению определителей отдельных матриц

$$\|M\| = \|M_{2N+1}\| \cdot \|M_{2N}\| \cdot \ldots . \|M_2\| \cdot \|M_1\|.$$

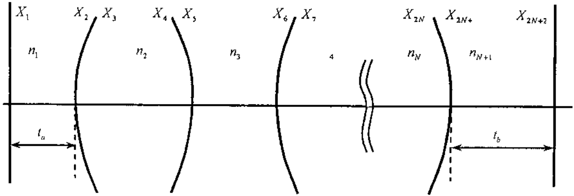


Рис. 10-11.7. Оптическая система, состоящая из $2N+1$ оптических элементов

Поскольку определители $\|M_j\|=1$, то и определитель матрицы центрированной оптической системы равен 1. Это означает, что все лучи, выходящие из точки с координатой y_1 в $ОП_1$,

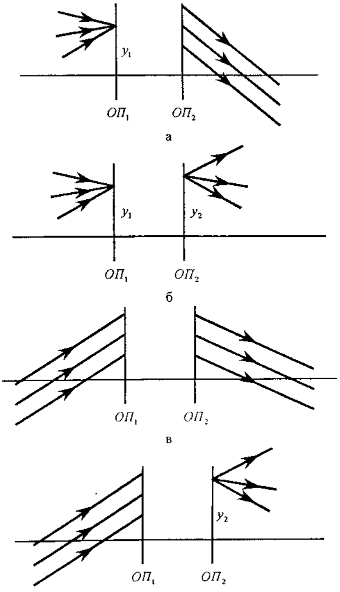


Рис. 10-11.8. Пояснение физического смысла матричных элементов

10-11.6. Физический смысл матричных элементов

Остановимся на физическом смысле величин, входящих в матрицу. Будем рассматривать оптические системы, в которых один из матричных элементов равен нулю.

1. Пусть D=0, тогда

$$V_2 = Cy_1 + 0 \cdot V_1 = Cy_1.$$

Все лучи выйдут из выходной $ОП_2$ под одним и тем же углом независимо от угла, под которым они входили в точку y_1 (рис. 10-11.8.а). Отсюда следует, что в этом случае $ОП_1$ – это передняя фокальная плоскость.

2. Пусть B=0, тогда

$$y_2 = Ay_1 + 0 \cdot V_1 = Ay_1.$$

Это значит, что все лучи, проходящие точку y_1, после оптической системы пройдут через одну точку y_2 (рис. 10-11.8.б). Это значит, что точки y_1 и y_2 сопряженные. Также сопряжены плоскости $ОП_1$ и $ОП_2$. Элемент матрицы $A = \dfrac{y_2}{y_1}$ определяет поперечное увеличение оптической системы.

3. Пусть C=0, тогда

$$V_2 = DV_1.$$

Это означает, что пучок лучей, который входит параллельным в систему, и выйдет из нее параллельным (рис. 10-11.8.в). Система, преобразующая параллельный пучок лучей в параллельный, называется телескопической. Матричный элемент $D = \dfrac{V_2}{V_1}$ определяет угловое увеличение оптической системы ($\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} = D\dfrac{n_1}{n_2}$).

4. Пусть A=0, тогда

$$y_2 = BV_1.$$

Все лучи, входящие в оптическую систему под одним и тем же углом V_1 пересекутся в опорной плоскости $ОП_2$ в точке y_2 (рис. 10-11.8.г). Оптическая система собирает параллельный пучок лучей в точку, расположенную в плоскости $ОП_2$, т.е. эта плоскость является задней фокальной плоскостью.

10-11.7. Экспериментальное определение матрицы оптической системы

Возьмем в качестве $ОП_1$ плоскость, расположенную вплотную к первой преломляющей поверхности, а в качестве $ОП_2$ – плоскость, расположенную вплотную к последней преломляющей поверхности.

Возьмем предмет, размеры которого известны и, расположив его на расстоянии R перед $ОП_1$, найдем изображение. Пусть оно лежит на расстоянии S за $ОП_2$. Тогда матрица новой оптической системы, включающая в себя два участка свободного пространства размерами R и S и оптическую систему, матрицу которой необходимо определить, есть

$$\begin{pmatrix}1 & S\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & R\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & S\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A & AR+B\\C & CR+D\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}A+SC & AR+B+S(CR+D)\\C & CR+D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A' & B'\\C' & D'\end{pmatrix}. \qquad (10\text{-}11.19)$$

Плоскости предмета и изображения сопряжены, поэтому элемент матрицы новой оптической системы

$$B' = AR + B + S(CR + D) = 0. \qquad (10\text{-}11.20)$$

Поперечное увеличение оптической системы есть

$$\frac{y_2}{y_1} = A + SC. \qquad (10\text{-}11.21)$$

Воспользуемся также условием, что определитель матрицы

$$(A + SC)(CR + D) = 1. \qquad (10\text{-}11.22)$$

Измеряемыми экспериментально величинами являются расстояния S, R и поперечное увеличение. Будем перемещать предмет и измерять поперечное увеличение. Построим график зависимости поперечного увеличения от расстояния S: $\frac{y_2}{y} = A + SC$ это прямая линия (рис. 10-11.9). Тангенс угла этой прямой позволяет определить величину C, а пересечение прямой с $ОП_1$ определить величину A. Используя (10-11.20) и (10-11.21), найдем матричный элемент

$$B = -AR - \frac{S}{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}.$$

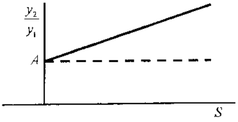


Рис. 10-11.9. Зависимость поперечного увеличения от положения изображения

Используя (10-11.21) и (10-11.22), найдем матричный элемент

$$D = \frac{1}{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)} - CR.$$

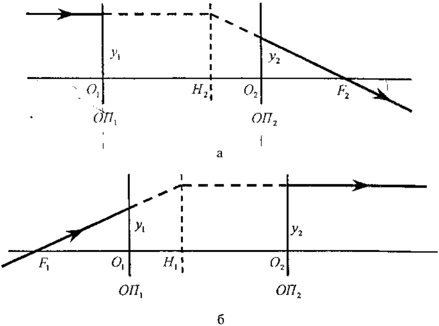


Рис. 10-11.10. Связь матричных элементов с кардинальными точками

10-11.8. Связь матричных элементов с положением кардинальных точек оптической системы

Пусть имеется оптическая система, характеризуемая матрицей $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Необходимо, зная элементы матрицы, определить положение кардинальных точек оптической системы относительно опорных плоскостей $ОП_1$ и $ОП_2$.

Отметим, что для произвольного луча (рис. 10-11.1) расстояние между точкой пересечения луча с оптической осью и опорной плоскость есть

$$-\frac{y}{tg\gamma} = -\frac{ny}{\gamma n} = -\frac{ny}{V} \qquad (10\text{-}11.23)$$

Для определения положения заднего фокуса возьмем луч, параллельный оптической оси (рис.10-11.10.а),

$$X_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем параметры луча, вышедшего из оптической системы,

$$X_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay_1 \\ Cy_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда расстояние между точкой пересечения вышедшего луча с оптической осью F_2 (эта точка определяет положение заднего фокуса оптической системы) и $OП_2$ есть

$$O_2F_2 = -\frac{n_2 Ay_1}{Cy_1} = -\frac{n_2 A}{C}. \qquad (10\text{-}11.24)$$

Положение главной плоскости в пространстве изображений найдем следующим образом:

$$O_2H_2 = -\frac{(y_1 - y_2)n_2}{\gamma_2 n_2} = -\frac{(1-A)y_1}{Cy_1}n_2 = -n_2\frac{1-A}{C} \qquad (10\text{-}11.25)$$

Найдем заднее фокусное расстояние оптической системы

$$f_2 = F_2H_2 = F_2O_2 + O_2H_2 = \frac{n_2 A}{C} + n_2\frac{(1-A)}{C} = \frac{n_2}{C} \qquad (10\text{-}11.26)$$

Для нахождения положения фокальной и главной точек в пространстве изображений предположим, что луч входит в оптическую систему, проходя через фокальную точку, т.е. после прохождения оптической системы он пойдет параллельно главной оптической оси (рис.10-11.10.б)

$$X_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из условия $V_2 = 0$ найдем расстояние от $OП_1$ до передней фокальной точки F_1

$$V_2 = y_1 C + DV_1 = 0, \quad \Rightarrow \quad O_1F_1 = -\frac{y_1 n_1}{V_1} = \frac{Dn_1}{C} \qquad (10\text{-}11.27)$$

Расстояние от $OП_1$ до передней главной точки найдем следующим образом:

$$O_1H_1 = \frac{y_2 - y_1}{\gamma_1} = \frac{Ay_1 + BV_1 - y_1}{V_1}n_1 = Bn_1 + (A-1)\frac{y_1}{V_1}n_1 = Bn_1 - (A-1)\,n_1\frac{D}{C} =$$
$$= \frac{n_1\{BC - AD + D\}}{C} = n_1\frac{D-1}{C} \qquad (10\text{-}11.28)$$

Используя (10-11.28) и (10-11.29), найдем переднее фокусное расстояние

$$f_1 = F_1H_1 = F_1O_1 + O_1H_1 = n_1\frac{D-1}{C} - \frac{Dn_1}{C} = f_1 = -\frac{n_1}{C}. \qquad (10\text{-}11.29)$$

Для нахождения узловых точек, как и при экспериментальном определении матричных элементов, перейдем к новой оптической системе, опорные плоскости которой сопряжены. Матрица новой оптической системы описывается выражением (10-11.19). Узловые точки – это сопряженные точки, лежащие на оптической оси ($y_1 = y_2 = 0$). Из условия $y_2 = 0$ следует, что

$$V_2 = D'V_1 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_2 = \frac{D'n_1}{n_2}\gamma_1, \tag{10-11.30}$$

где $D' = CR + D$. Для узловых точек угловое увеличение равно единице. Используя (10-11.30), найдем расстояние от $ОП_2$ до задней узловой точки

$$CR + D = \frac{n_2}{n_1} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{C}\cdot\left(\frac{n_2}{n_1} - D\right). \tag{10-11.31}$$

Расстояние от $ОП_1$ до задней узловой точки найдем из условия, что матричный элемент новой оптической системы $B' = 0$

$$AR + B + S(CR + D) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad AR + B + \frac{n_2}{n_1}S = 0. \tag{10-11.32}$$

Или с учетом (10-11.31) имеем

$$S = -\frac{n_1}{n_2}(AR + B) = -\frac{n_1}{n_2}\left[\frac{A}{C}\left(\frac{n_2}{n_1} - D\right) + B\right] = \frac{n_1 - n_2 A}{n_2 C}. \tag{10-11.33}$$

Лекция 12

Фотометрические величины: фотометрическая яркость, освещенность, сила света. Зрачки, люки оптической системы. Связь между фотометрической яркостью предмета и изображения

До сих пор при изучении оптических систем не затрагивался вопрос о соответствии энергетических характеристик объекта и изображения.

12.1. *Фотометрические величины: фотометрическая яркость, освещенность, сила света*

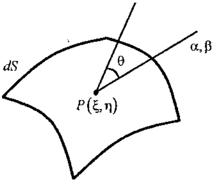


Рис. 12.1. Элементарная поверхность

Рассмотрим свет, испускаемый элементом поверхности dS. Пусть $P(\xi,\eta)$ - произвольная точка на этой поверхности, координаты которой в криволинейной системе, связанной с поверхностью, есть ξ и η (рис.12.1).

Количество усредненной во времени энергии, испускаемой (прошедшей, рассеянной) за единицу времени площадкой dS в телесный угол $d\Omega$ в направлении, определяемом полярными углами α и β, есть

$$dF = B(\xi,\eta,\alpha,\beta)dSd\Omega\cos\theta. \tag{12.1}$$

Здесь $B(\xi,\eta,\alpha,\beta)$ - фотометрическая яркость в точке P в направлении, определяемом углами α и β, θ - угол между нормалью к поверхности и направлением, определяемом углами α и β.

Введем понятие дифференциальной силы света как количества энергии, испускаемой площадкой dS в единичный телесный угол,

$$dI = \frac{dF}{d\Omega} = BdS\cos\theta. \tag{12.2}$$

Тогда под силой света будем понимать количество энергии, испускаемой в единичный телесный угол площадкой S,

$$I(\alpha,\beta) = \int_S B(\xi,\eta,\alpha,\beta)\cos\theta \ \ dS. \tag{12.3}$$

Введем понятие дифференциальной освещенности как количества энергии, испускаемой в телесный угол $d\Omega$ единичной площадкой,

$$dE = \frac{dF}{dS} = B(\xi,\eta,\alpha,\beta)d\Omega\cos\theta. \tag{12.4}$$

Тогда под освещенностью будем понимать количество энергии, испускаемой в полный телесный угол единичной площадкой,

$$E(\xi,\eta)=\int B(\xi,\eta,\alpha,\beta)\cos\theta d\Omega. \qquad (12.5)$$

Характер изменения B от положения точки P на поверхности и от направления излучения зависит от свойств поверхности, от того, гладкая она или шероховатая, излучает или поглощает свет. Часто можно считать, что фотометрическая яркость не зависит от направления излучения, т.е.

$$B(\xi,\eta,\alpha,\beta)=B(\xi,\eta). \qquad (12.6)$$

В этом случае говорят, что излучение изотропно. Тогда, если излучающая поверхность плоская, то $\cos\theta = const$, и зависимость силы света от направления излучения есть

$$I(\alpha,\beta)=\cos\theta\int_S B(\xi,\eta)dS \Rightarrow$$

$$I(\alpha,\beta)=I(\theta)=I_0\cos\theta. \qquad (12.7)$$

Здесь $I_0=\int_S B(\xi,\eta)dS$ сила света в направлении нормали к поверхности.

Соотношение (12.7) называется законом Ламберта. Если он выполняется, то говорят, что поверхность диффузно излучает (рассеивает) свет.

12.2. Зрачки, люки оптической системы

Световой поток, достигающий пространства изображений, зависит, как правило, не только от фотометрической яркости исходного предмета, но и от размеров оптических элементов и диафрагм. *Диафрагма (D) – это отверстие в непрозрачном экране, обычно круглое с центром на оптической оси. Под диафрагмой будем понимать не только отверстия, но и оправы линз, зеркал и других оптических элементов.*

Пусть имеется оптическая система. Выберем в пространстве предметов плоскость наблюдения, которая перпендикулярна оптической оси и пересекает ее в точке P. Изображением точки P является точка P_1.

Построим параксиальные изображения всех диафрагм, входящих в оптическую систему, в пространстве предметов и в пространстве изображений, т.е. находим изображения каждой диафрагмы D_j в предшествующей ей части (D'_j) и в последующей ей части оптической системы (D''_j) (рис.12.2).

Изображение диафрагмы в пространстве предметов, которое видно из точки P под наименьшим углом, образует *входной зрачок* оптической системы. Изображением входного зрачка в оптической системе является *выходной зрачок*. Он виден под наименьшем углом в пространстве изображений из точки P_1. Реальная диафрагма, изображением которой являет-

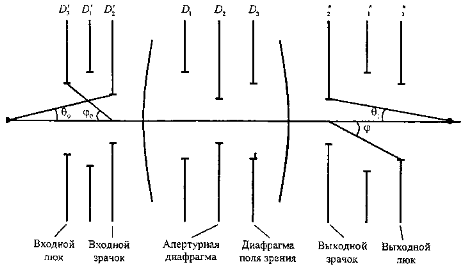


Рис. 12.2. Диафрагмы оптической системы

ся входной зрачок, называется **апертурной диафрагмой**. На рис. 12.2 входным и выходным зрачками являются изображения диафрагм D_2' и D_2'', апертурной диафрагмой является диафрагма D_2. Угол $2\theta_0$, под которым виден диаметр входного зрачка из точки P, называется угловой апертурой со стороны предмета или просто угловой апертурой. Угол $2\theta_1$, под которым из точки P_1 виден выходной зрачок, называется угловой апертурой со стороны изображения. **Угловая апертура определяет угловой размер светового пучка, который преобразуется (не задерживается) оптической системой.** Если входной зрачок расположен на минус бесконечности, то оптическая система называется телецентрической со стороны предмета, если на бесконечности располагается выходной зрачок, то система называется телецентрической со стороны изображения.

Наряду с апертурной диафрагмой введем понятие диафрагмы поля зрения. Она определяет ту часть протяженного предмета, которая отображается оптической системой. Для ее нахождения расположим наблюдателя в центре входного зрачка. Изображение диафрагмы, которое видно из центра входного зрачка под наименьшим углом, называется *входным люком*. Изображением входного люка в пространстве изображений является выходной люк. Реальная диафрагма, изображение которой есть входной люк, называется **диафрагмой поля зрения**. На рис. 12.2 входным и выходным люками являются изображения D_3' и D_3''. Диафрагмой поля зрения является диафрагма D_3. Угол $2\varphi_0$, под которым из центра входного зрачка виден входной люк, называется углом поля зрения. А угол $2\varphi_1$, под которым выходной люк виден из центра выходного зрачка, называется углом поля изображения.

Входной люк определяет размер области в плоскости наблюдения, лучи от точек которой проходят через оптическую систему.

12.3. Связь между фотометрической яркостью предмета и изображения

Пусть предметом является небольшая плоская площадка dS_0, перпендикулярная к оптической оси и излучающая по закону Ламберта (рис.12.3).

Энергия, излучаемая в единицу времени в направлении θ в телесный угол $d\Omega$, есть

$$dF_0 = B_0 dS_0 \cos\theta \, d\Omega, \qquad (12.8)$$

где $d\Omega = d\varphi \sin\theta d\theta$. Тогда энергия, излучаемая площадкой в телесный угол, определяемый угловой апертурой, есть

$$F_0 = dS_0 B_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} \sin\theta\cos\theta d\theta = dS_0 \cdot B_0 \cdot \pi \cdot \sin^2\theta_0. \qquad (12.9)$$

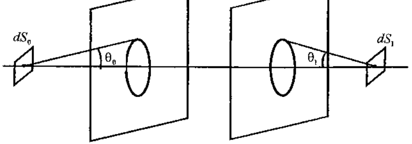


Рис. 12.3. Связь между фотометрической яркостью предмета и изображения

Аналогично найдем энергию, которая падает в пространстве изображений на площадку dS_1,

$$F_1 = dS_1 \cdot B_1 \cdot \pi \cdot \sin^2\theta_1 . \tag{12.10}$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$F_1 \le F_0 .$$

Тогда

$$B_1 \sin^2\theta_1 dS_1 \le B_0 \sin^2\theta_0 dS_0 .$$

Или

$$B_1 \le B_0 \frac{dS_0}{dS_1}\frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta_1} \tag{12.11}$$

Если предположить, что оптическая система удовлетворяет условию Смита-Гельмгольца (8-9.39), то

$$\frac{dS_0}{dS_1}\frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta_1} \approx \left(\frac{y_0}{y_1}\right)^2 \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^2 = \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2$$

Здесь n_0 и n_1 - показатели преломления пространства предметов и пространства изображений соответственно. С учетом условия Смита-Гельмгольца выражение (12.11) примет вид

$$B_1 \le \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0 . \tag{12.12}$$

При $n_1 = n_0$ фотометрическая яркость изображения всегда меньше фотометрической яркости предмета.

Лекция 13-14

Лучевая и волновая аберрации. Связь между волновой и лучевой аберрациями. Разложение волновой аберрации в ряд. Аберрации Зайделя

Основная задача оптической системы, строящей изображение, осуществить без искажений преобразования пространства предметов в пространство изображений. Если оптическая система преобразует плоский объект, расположенный перпендикулярно оптической оси системы, то его неискаженное изображение получается при выполнении следующих условий:

1) каждой точке плоскости предмета должна соответствовать точка в пространстве изображений;

2) все точки изображения должны лежать в плоскости, перпендикулярной оптической оси системы;

3) поперечное увеличение должно быть постоянной величиной по всему объекту.

Нарушение хотя бы одного из трех перечисленных выше условий приводит к искажению изображения. В оптике для описания искажения изображения оптической системой используют понятие аберрация (от латинского слова aberration – отклонение).

Ниже при изучении аберраций оптических систем будем считать, что объект, изображение которого формируется оптической системой, излучает или освещается монохроматическим светом. Т.е. с самого начала не будем рассматривать так называемые хроматические аберрации оптической системы, обусловленные зависимостью показателя преломления от длины волны.

13-14.1. Лучевая и волновая аберрации

Рассмотрим центрированную оптическую систему (рис. 13-14.1). Выделим четыре плоскости, перпендикулярные оптической оси, а именно, плоскость предмета, плоскости входного и выходного зрачков, плоскость параксиального изображения. Точки пересечения плоскостей с оптической осью системы обозначим, соответственно, O_1, O_1', O_2', O_2.

Под плоскостью параксиального изображения будем понимать плоскость, в которой располагаются точки, являющиеся изображением точек предметной плоскости, при условии, что для всех точек выполняются соотношения параксиальной оптики.

В плоскости предмета возьмем произвольную точку P. Ее параксиальным изображением будет точка P_2^*, расположенная в плоскости параксиального изображения. Рассмотрим произвольный световой луч, исходящий из точки P. Этот луч (или его продолжение) пересекает входной и

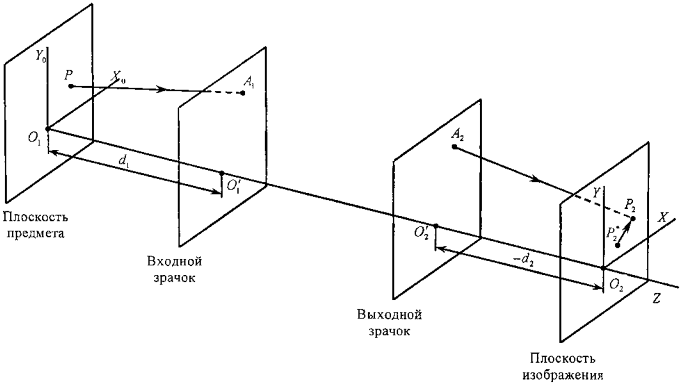


Рис. 13-14.1. Положение плоскостей предмета, изображения и плоскостей входного и выходного зрачков

выходной зрачки в точках A_1 и A_2, а плоскость параксиального изображения в точке P_2.

Вектор $P_2^*P_2$, характеризующий отклонение точки пересечения светового луча от точки параксиального изображения, называется вектором лучевой аберрации. Значение вектора лучевой аберрации зависит как от положения точки P, так и направления распространения светового луча, исходящего из этой точки.

Введем понятие волновой аберрации. Для этого через центр выходного зрачка проведем сферическую поверхность, центр которой совпадает с точкой P_2^* Радиус сферы обозначим буквой R. Назовем эту сферу опорной сферой Гаусса. Если бы оптическая система не искажала изображения, то опорная сфера Гаусса совпадала бы с волновой поверхностью волны, идущей из точки P и проходящей через центр выходного зрачка. Реальная волновая поверхность, проходящая через точку O_2', отличается от сферической поверхности.

Для большей наглядности последующих результатов предположим, что световые лучи, исходящие из точки P, лежат в меридиональной плоскости. Тогда точки A_1, A_2, P_2 также лежат в меридиональной плоскости. Обозначим через Q и Q_1 точки пересечения светового луча с опорной сферой Гаусса и с реальным волновым фронтом (рис. 13-14.2).

Волновой аберрацией назовем оптический путь по световому лучу между опорной сферой Гаусса и реальной волновой поверхностью. Т.е. волновая аберрация – это оптический путь между точками Q и Q_1

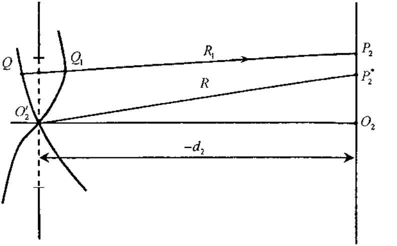


Рис. 13-14.2. Волновая и лучевая аберрации

$$\Phi = [QQ_1].$$

Волновая аберрация, как и вектор лучевой аберрации, является функцией, зависящей от положения точки P и направления распространения светового луча, исходящего из этой точки.

Введем две декартовые системы координат. Центр одной из них совместим с точкой O_1, а центр другой - с точкой O_2. Положение точек P, A_1, O_1 будем рассматривать в первой системе координат, а положение точек P_2^*, P_2, A_2, Q, Q_1, O_2' - во второй системе координат.

Запишем координаты точек, приведенных на рис. 13-14.1 и рис.13-14.2, которые в дальнейшем будут использоваться при расчете волновых аберраций оптической системы,

$$P(x_0, y_0, 0), \quad A_1(x_0', y_0', d_1), \quad O_1'(0,0,d_1),$$

$$P_2^*(x^*, y^*, 0), \quad P_2(x_1, y_1, 0), \quad A_2(x_2, y_2, -d_2), \quad Q(x, y, z), \quad O_2'(0,0,-d_2).$$

Здесь d_1 - расстояние от плоскости предмета до плоскости входного зрачка, d_2 - расстояние от плоскости параксиального изображения до плоскости выходного зрачка.

Волновую аберрацию можно представить как разность оптического пути по световому лучу от точки P до точки Q и оптического пути по световому лучу от точки P до точки Q_1. Таким образом, выражение для волновой аберрации можно записать следующим образом

$$\Phi = V(P,Q) - V(P,O_2') = V(x_0, y_0, 0, x, y, z) - V(x_0, y_0, 0, 0, 0, -d_2). \quad (13\text{-}14.1)$$

При записи (13-14.1) учитывали, что поскольку точки Q_1 и O_2' лежат на одной волновой поверхности, то $V(P,Q_1) = V(P,O_2')$.

Координата z, входящая в выражение (13-14.1), не является независимой. Действительно, точка Q лежит на опорной сфере Гаусса, поэтому справедливо уравнение

$$(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + z^2 = R^2 \quad (13\text{-}14.2)$$

Координаты точки P_2^* однозначно связаны с координатами точки P: $x^* = Mx_0$, $y^* = My_0$, где M - поперечное увеличение оптической системы. Таким образом, координата z является функцией координат x_0, y_0, x, y. От этих же координат зависит и волновая аберрация

$$\Phi = \Phi(x_0, y_0, x, y).$$

13-14.2. Связь между волновой и лучевой аберрациями

Для нахождения связи между вектором лучевой аберрации и волновой аберрацией рассмотрим частные производные от волновой аберрации по координатам x и y. Используя определение волновой аберрации (13-14.1), можно записать

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dx} \qquad (13\text{-}14.3)$$

Из определения точечной характеристики (см. выражение (7.4)) следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \xi_{2x}, \ \frac{\partial V}{\partial z} = \xi_{2z}.$$

Здесь ξ_{2x} и ξ_{2z} - проекции на оси X и Z лучевого вектора в точке Q. Если расстояние от точки Q до точки P_2 обозначить R_1, то выражения для ξ_{2x} и ξ_{2z} через координаты точек Q и P_2 можно записать следующим образом:

$$\xi_{2x} = n_2 \frac{x_1 - x}{R_1}, \qquad \xi_{2z} = -n_2 \frac{z}{R_1}. \qquad (13\text{-}14.4)$$

Здесь n_2 - показатель преломления пространства изображений.

Из (13-14.2) имеем

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{(x - x^*)}{z} \qquad (13\text{-}14.5)$$

Подставив (13-14.4), (13-14.5) в (13-14.3), получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = n_2 \frac{x_1 - x^*}{R_1}$$

Таким образом, показано, что проекция вектора лучевой аберрации на ось X связана с волновой аберрацией следующим образом:

$$(P_2^* P_2)_x = x_1 - x^* = \frac{R_1}{n_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Аналогично можно показать, что проекция вектора лучевой аберрации на ось Y следующим образом связана с волновой аберрацией:

$$(P_2^* P_2)_y = y_1 - y^* = \frac{R_1}{n_2}\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

При рассмотрении аберраций большинства оптических систем в записанных выше выражениях можно с хорошей точностью заменить R_1 на R. Тогда связь между проекциями вектора лучевой аберрации на оси X и Y и волновой аберрацией запишется в виде

$$\boxed{(P_2^* P_2)_x = x_1 - x^* \cong \frac{R}{n_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x}}, \qquad (13\text{-}14.6)$$

$$\boxed{(P_2^* P_2)_y = y_1 - y^* \cong \frac{R}{n_2}\frac{\partial \Phi}{\partial y}}. \qquad (13\text{-}14.7)$$

13-14.3. Разложение волновой аберрации в ряд

Из осевой симметрии центрированной оптической системы следует, что в действительности волновая аберрация зависит не от четырех независимых переменных x_0, y_0, x, y, а от трех их комбинаций

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \overline{r}\overline{r}_0 = xx_0 + yy_0 .$$

Разложим волновую аберрацию в ряд по переменным r_0^2, r^2, $\overline{r}\overline{r}_0$

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(2)} + \Phi^{(4)} + \ldots + \Phi^{(2n)} + \ldots \qquad (13\text{-}14.8)$$

Здесь $\Phi^{(2n)}$ - многочлен степени $2n$. Вследствие симметрии оптической системы в разложении отсутствуют многочлены нечетных степеней.

В выражении (13-14.8) многочлены $\Phi^{(0)}$ и $\Phi^{(2)}$ равны нулю.

Равенство нулю многочлена $\Phi^{(0)} = \Phi(0,0,0,0)$ вытекает из определения волновой аберрации. В центре выходного зрачка волновая аберрация равна нулю

$$\Phi(x_0, y_0, 0, 0) \equiv 0 . \qquad (13\text{-}14.9)$$

Для доказательства равенства нулю многочлена второй степени воспользуемся методом от противного. Запишем общий вид выражения для многочлена второй степени

$$\Phi^{(2)} = \alpha\left(x_0^2 + y_0^2\right) + \beta\left(x^2 + y^2\right) + \gamma\left(xx_0 + yy_0\right) \qquad (13\text{-}14.10)$$

и предположим, что он не равен нулю. Здесь α, β, γ - некоторые постоянные коэффициенты.

Равенство нулю коэффициента α в выражении для многочлена второй степени следует из (13-14.9).

Найдем, используя (13-14.6) и (13-14.7), компоненты вектора лучевой аберрации

$$x_1 - x^* = \frac{R}{n_2}\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} = \frac{R}{n_2}\left(2\beta x + \gamma x_0\right), \qquad (13\text{-}14.11)$$

$$y_1 - y^* = \frac{R}{n_2}\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial y} = \frac{R}{n_2}\left(2\beta y + \gamma y_0\right). \qquad (13\text{-}14.12)$$

Для доказательства равенства нулю коэффициента β возьмем в предметной плоскости точку P, лежащую на оптической оси $(x_0 = 0,\ y_0 = 0)$. Точка параксиального изображения P_2^* совпадает с точкой O_2. Тогда из (13-14.11) и (13-14.12) компоненты вектора лучевой аберрации перепишутся в виде

$$x_1 - x^* = \frac{2R}{n_2}\beta x , \qquad (13\text{-}14.13)$$

$$y_1 - y^* = \frac{2R}{n_2}\beta y. \qquad (13\text{-}14.14)$$

В выражениях (13-14.13) и (13-14.14) с хорошей степенью точности можно заменить координаты точки пересечения луча с опорной сферой Гаусса (точка $Q(x, y, z)$) координатами точки пересечения луча с выходным зрачком (точка $A_2(x_2, y_2, -d_2)$):

$$x_1 - x^* \cong \frac{2R}{n_2}\beta x_2, \qquad (13\text{-}14.15)$$

$$y_1 - y^* \cong \frac{2R}{n_2}\beta y_2. \qquad (13\text{-}14.16)$$

Из линейной зависимости компонент вектора лучевой аберрации от координат x_2 и y_2 следует, что все лучи, вышедшие из точки P после прохождения оптической системы, сойдутся в точке P_3, не совпадающей с точкой параксиального изображения P_2. Действительно, рассмотрим три световых луча, исходящих из точки P и распространяющихся в меридиональной плоскости XZ: один из них проходит через центр выходного зрачка, а два других пересекают выходной зрачок в точках $A_2(x_2, 0, -d_2)$ и $A_2'(x_2', 0, -d_2)$, а плоскость параксиального изображения в точках $P_2(x_1, 0, 0)$ и $P_2'(x_1', 0, 0)$ (рис. 13-14.3). У трапеций $O_2' A_2 P_2 P_2^*$ и $O_2' A_2' P_2' P_2^*$ одна боковая сторона общая, а отношение оснований трапеций есть величина постоянная

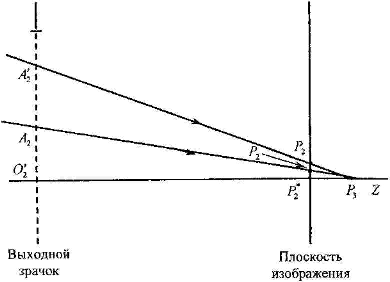


Рис. 13-14.3. Доказательство равенства нулю коэффициента β

$$\frac{x_1 - x^*}{x_2} = \frac{x_1' - x^*}{x_2'} = \frac{2R}{n_2}\beta . \qquad (13\text{-}14.17)$$

Выражение (13-14.17) может выполняться лишь при условии, что все три луча $O_2'P_2^*$, A_2P_2, $A_2'P_2'$ пересекается в одной точке P_3.

Таким образом, из условия $\beta \neq 0$ приходим к выводу о существовании еще одного параксиального изображения.

Аналогичный вывод вытекает из условия не равенства нулю коэффициента γ

Отсюда можно сделать заключение, что исходное предположение о неравенстве нулю многочлена $\Phi^{(2)}$ неверно, т.е. $\Phi^{(2)} = 0$.

Низшая степень неравного нулю многочлена в разложении (13-14.8) оказывается равной четырем.

13-14.4. Аберрации Зайделя

Аберрации, описываемые многочленом четвертой степени в разложении волновой аберрации в ряд по имени впервые их рассмотревшего ученого, называются аберрациями Зайделя.

В выражении для волновой аберрации перейдем от координат точки $Q(x, y, z)$, расположенной на опорной сфере Гаусса, к координатам точки $A_2(x_2, y_2, -d_2)$, являющейся пересечением светового луча с выходным зрачком:

$$\Phi(r_0^2,\ r^2,\ \overline{rr_0}) \quad \Rightarrow \quad \varphi((r_0^2,\ \rho^2,\ k^2).$$

Здесь $\rho^2 = x_2^2 + y_2^2$, $k^2 = x_2x_0 + y_2y_0$.

Можно показать, что связь между компонентами лучевой аберрации и волновой аберрацией есть

$$(P_2^*P_2)_x = x_1 - x^* \cong \frac{R}{n_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \qquad (13\text{-}14.18)$$

$$(P_2^*P_2)_y = y_1 - y^* \cong \frac{R}{n_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} \qquad (13\text{-}14.19)$$

Выражение для волновой аберрации Зайделя можно записать следующим образом:

$$\varphi^{(4)} = -\frac{1}{4}Ar_0^4 - \frac{1}{4}B\rho^4 - Ck^4 + \frac{1}{2}Dr_0^2\rho^2 + Er_0^2k^2 + F\rho^2k^2. \qquad (13\text{-}14.20)$$

Знаки и обозначения аберрационных коэффициентов в разложении (13-14.20) общеприняты. Из (13-14.9) следует, что $A = 0$. Величина аберрационных коэффициентов B, C, D, E, F зависит от конкретного вида рассматриваемой оптической системы.

Функция $\varphi^{(4)}$ состоит из пяти слагаемых, каждое из которых описывает определенный вид аберрации:

$$-\frac{1}{4}B\rho^4 \text{ – сферическая аберрация,}$$

$$-Ck^4 \text{ – астигматизм,}$$

$$\frac{1}{2}Dr_0^2\rho^2 \text{ – кривизна поля,}$$

$$Er_0^2k^2 \text{ – дисторсия,}$$

$$F\rho^2k^2 \text{ – кома.}$$

Для упрощения последующего анализа аберраций будем считать, что точка P, изображение которой строится оптической системой, расположена на оси Y $(P(0, y_0, 0))$. Положение точки пересечения светового луча с выходным зрачком будем описывать в полярной системе координат:

$$x_2 = \rho\cos\phi, \qquad y_2 = \rho\sin\phi.$$

Тогда выражение 13-14.13 примет вид

$$\varphi^{(4)} = -\frac{1}{4}B\rho^4 - Cy_0^2\rho^2\sin^2\phi + \frac{1}{2}Dy_0^2\rho^2 + Ey_0^3\rho\sin\phi + Fy_0\rho^3\sin\phi. \quad (13\text{-}14.21)$$

Выражения, связывающие компоненты вектора лучевой аберрации с волновой аберрацией, перепишутся следующим образом

$$\Delta_x = \frac{n_2}{R}\left(x_1 - x^*\right) = -B\rho^3\cos\phi + Dy_0^2\rho\cos\phi + 2Fy_0\rho^2\sin\phi\cos\phi, \qquad (13\text{-}14.22)$$

$$\Delta_y = \frac{n_2}{R}\left(y_1 - y^*\right) = -B\rho^3\sin\phi - 2Cy_0^2\rho\sin\phi + Dy_0^2\rho\sin\phi + Ey_0^3 + $$
$$+Fy_0\rho^2\left(\cos^2\phi + 3\sin^2\phi\right) \qquad (13\text{-}14.23)$$

Введем понятие аберрационных кривых.

Аберрационные кривые – это кривые, полученные при пересечении световых лучей, проходящих через определенные зоны выходного зрачка с плоскостью параксиального изображения. В качестве зон берутся, как правило, окружности, центры которых совпадают с центром выходного зрачка $(\rho = const)$.

Остановимся более подробно на анализе отдельных видов аберраций. С этой целью будем считать, что все аберрационные коэффициенты кроме коэффициента исследуемой аберрации равны нулю.

Сферическая аберрация

Функция, описывающая сферическую аберрацию, имеет вид

$$\varphi^{(4)} = -\frac{1}{4}B\rho^4 \qquad (13\text{-}14.24)$$

Из (13-14.22) и (13-14.23) выражения для компонент вектора лучевой аберрации есть

$$\Delta_x = -B\rho^3 \cos\phi, \qquad (13\text{-}14.25)$$

$$\Delta_y = -B\rho^3 \sin\phi. \qquad (13\text{-}14.26)$$

Используя (13-14.25) и (13-14.26), можно записать

$$\Delta_x^2 + \Delta_y^2 = B^2\rho^6. \qquad (13\text{-}14.27)$$

Из (13-14.27) следует, что в случае сферической аберрации аберрационными кривыми будут окружности с центром в точке параксиального изображения (рис. 13-14.4.а). Если радиус выходного зрачка a, то изображением точки будет круглое пятно радиусом $\dfrac{R}{n_2} Ba^3$

Аберрация кома

Функция, описывающая аберрацию кома, имеет вид

$$\varphi^{(4)} = F\rho^2 k^2. \qquad (13\text{-}14.28)$$

Из (13-14.22) и (13-14.23) выражения для компонент вектора лучевой аберрации есть

$$\Delta_x = 2Fy_0\rho^2 \sin\phi\cos\phi, \qquad (13\text{-}14.29)$$

$$\Delta_y = Fy_0\rho^2\left(\cos^2\phi + 3\sin^2\phi\right). \qquad (13\text{-}14.30)$$

Используя 13-14.29 и 13-14.30 и тригонометрические соотношения $2\sin\phi\cos\phi = \sin 2\phi$, $\cos^2\phi + 3\sin^2\phi = 2 - \cos 2\phi$, получим

$$\Delta_x^2 + \left(\Delta_y - 2Fy_0\rho^2\right)^2 = F^2 y_0^2 \rho^4. \qquad (13\text{-}14.31)$$

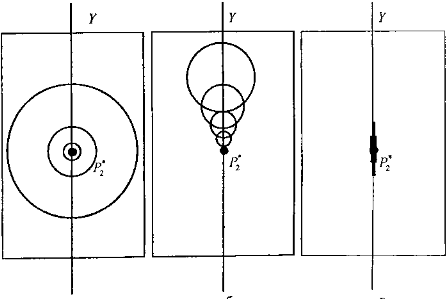


Рис. 13-14.4. Аберрационные кривые

Из (13-14.31) следует, что в случае аберрации кома аберрационными кривыми будут окружности, радиус и положение центра которых зависит от радиуса зоны (рис. 13-14.4.б). С увеличением радиуса зоны происходит рост радиуса окружности аберрационной кривой и увеличивается смещение центра окружности от точки параксиального изображения.

Астигматизм

Функция, описывающая аберрацию астигматизм, имеет вид

$$\varphi^{(4)} = -Ck^4 \qquad (13\text{-}14.32)$$

Из (13-14.22) и (13-14.23) выражения для компонент вектора лучевой аберрации есть

$$\Delta_x = 0, \qquad (13\text{-}14.33)$$

$$\Delta_y = -2Cy_0^2\rho\sin\phi. \qquad (13\text{-}14.34)$$

Из равенства нулю проекции вектора лучевой аберрации на ось X следует, что аберрационные кривые – это отрезки прямых, направленных вдоль оси Y, размер которых равен $\frac{4R}{n_2}2Cy_0^2\rho$. Середины отрезков совпадают с точкой параксиального изображения (рис. 13-14.4.в).

С учетом размера выходного зрачка изображением точки будет отрезок размером $\frac{4R}{n_2}2Cy_0^2a$, направленный по прямой, проходящей через начало системы координат (точку O_2) и точку параксиального изображения.

Рассмотренные выше три типа аберраций приводят к размытию изображения точки в "пятно"

Дисторсия

Функция, описывающая аберрацию дисторсии, имеет вид

$$\varphi^{(4)} = Er_0^2k^2 \qquad (13\text{-}14.35)$$

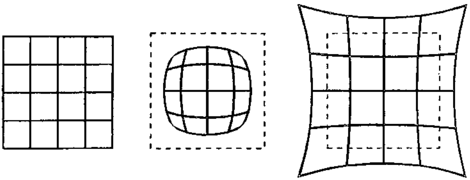
Из (13-14.22) и (13-14.23) выражения для компонент вектора лучевой аберрации есть

$$\Delta_x = 0, \qquad (13\text{-}14.36)$$

$$\Delta_y = Ey_0^3. \qquad (13\text{-}14.37)$$

Отсутствие зависимости компонент вектора лучевой аберрации от радиуса зоны выходного зрачка свидетельствует о том, что при наличии аберрации дисторсии изображением точки является точка, смещенная относительно параксиального изображения на величину, определяемую выражением (13-14.37). Величина смещения зависит от положения точки в пространстве предметов. Таким образом, *аберрация дисторсия приводит к* *возникновению зависимости поперечного увеличения оптической системы от положения точки в пространстве предметов*

В зависимости от знака аберрационного коэффициента E различают "подушкообразную" ($E > 0$) и "бочкообразную" ($E < 0$) дисторсии. На рис.13-14.5 для объекта в виде сетки приведены изображения: неискаженного объекта (а), объекта при наличии "бочкообразной" дисторсии (б), объекта при наличии "подушкообразной" дисторсии (в),



а б в

Рис. 13-14.5. Аберрация дисторсия

Кривизна поля

Функция, описывающая аберрацию кривизна поля, имеет вид

$$\varphi^{(4)} = \frac{1}{2} D r_0^2 \rho^2 \qquad (13\text{-}14.38)$$

Из (13-14.22) и (13-14.23) выражения для компонент вектора лучевой аберрации есть

$$\Delta_x = D y_0^2 \rho \cos\phi, \qquad (13\text{-}14.39)$$

$$\Delta_y = D y_0^2 \rho \sin\phi. \qquad (13\text{-}14.40)$$

Используя (13-14.39) и (13-14.40), можно записать

$$\Delta_x^2 + \Delta_y^2 = D^2 y_0^4 \rho^2 \qquad (13\text{-}14.41)$$

Из (13-14.41) следует, что, как и в случае сферической аберрации, аберрационными кривыми будут окружности с центром в точке параксиального изображения, радиус которых квадратично возрастает с увеличением расстояния от точки P до оптической оси.

С учетом размера выходного зрачка в плоскости параксиального изображения изображением точки будет круглое пятно радиусом $\frac{R}{n_2} D y_0^2 a$.

Формально при фиксированном положении в пространстве предметов точки P выражение для функции, описывающей аберрацию кривизна поля совпадает с многочленом второй степени $\beta\left(x^2+y^2\right)$. Поэтому, проводя рассуждения сходные с рассуждениями, используемыми при анализе многочлена $\beta\left(x^2+y^2\right)$, получим, что с учетом аберрации кривизны поля изображением точки будет точка, смещение которой от плоскости параксиального изображения возрастает с увеличением расстояния от точки P до оптической оси.

Таким образом, *как и аберрация дисторсия, аберрация кривизна поля приводит к возникновению зависимости увеличения оптической системы от положения точки в пространстве предметов.*

Список источников

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Гл. 3-5. М.: Наука. 1970. 719с.
2. Джеррард А., Берч Дж. М. Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978. 341с.
3. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984. 512с.

Содержание