МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры и геометрии

И.В.Демин, Р.М.Рудман

ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Учебное пособие

для студентов механико-математического факультета

Издательство «Самарский университет»
2002

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

ББК 22.143
УДК 512.64
Д 306

Демин И.В., Рудман Р.М. Задачи по линейной алгебре: Учеб. пособие. Самара: Издательство «Самарский университет», 2002. - 48 с.

Набор задач соответствует программе курсов «Линейная алгебра», «Алгебра и геометрия» и включает в себя темы : «Векторные пространства», «Линейные операторы», «Евклидовы и унитарные пространства, «Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением».

Материал одного параграфа в основном соответствует одному практическому занятию.

Предназначено для студентов 1 курса специальностей «Математика», «Прикладная математика», «Компьютерная безопасность».

ББК 22.143
УДК 512.64

Рецензент проф. В.М.Чернов

1. БАЗИС ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА. КООРДИНАТЫ. ЗАМЕНА БАЗИСА

Векторы $e_1, ..., e_n$, x заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что $e_1, ..., e_n$ - также базис, и найти координаты вектора x в этом базисе.

1. $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,2)$, $e_3 = (1,2,3)$, $x = (6,9,14)$.

2. $e_1 = (2,1,-3)$, $e_2 = (3,2,-5)$, $e_3 = (1,-1,1)$, $x = (6,2,-7)$.

3. $e_1 = (1, 2,-1,-2)$, $e_2 = (2,3,0,-1)$, $e_3 = (1,2,1,4)$,
$e_4 = (1,3,-1,0)$, $x = (7,14,-1,2)$.

4. $e_1 = (1, 2,3,4)$, $e_2 = (2,1,4,5)$, $e_3 = (3,2,1,6)$,
$e_4 = (4,1,2,8)$, $x = (2,-2,2,1)$.

Доказать,что каждая из двух систем векторов является базисом, и найти связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах:

5. $s = ((3,4),(5,6)), s' = ((9,10),(1,2))$.

6. $s = ((2,7),(1,5)), s' = ((1,2),(-1,-8))$.

7. $s = ((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)), s' = ((3,1,4),(5,2,1),(1,1,-6))$.

8. $s = ((1,2,1),(2,3,3)(3,8,2)), s' = ((3,5,8),(5,14,13),(1,9,2))$.

9. $s = ((1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,3,2,3))$,
$s' = ((1,0,3,3),(-2,-3,-5,-4),(2,2,5,4),(-2,-3,-4,-4))$.

10. Пусть в векторном пространстве $\mathcal{R}^2$ своими координатами заданы векторы $\{e_i\}, \{e'_i\}, i = 1,2$. Доказать, что $\{e_i\}, \{e'_i\}$ -базисы, и найти координаты вектора v в базисе $\{e'_i\}$, если заданы его координаты в базисе $\{e_i\}$, а также координаты вектора w в базисе $\{e_i\}$, если даны его координаты в базисе $\{e'_i\}$:

а) $e_1 = (2,1), e_2 = (1,3), v = (1,1)$,
$e'_1 = (-1,3), e'_2 = (3,1), w = (3,-2)$;

б) $e_1 = (-1, 1), e_2 = (-2, 3), v = (35, -12)$,

$e_1' = (3, 2), e_2' = (4, 3), w = (-3, 2)$;

в) $e_1 = (-1, 3), e_2 = (3, -8), v = (2, 1)$,

$e_1' = (1, 0), e_2' = (3, 1), w = (-2, 1)$;

г) $e_1 = (2, 5), e_2 = (1, 2), v = (1, -2)$,

$e_1' = (7, 6), e_2' = (8, 7), w = (1, -1)$.

11.Доказать,что в пространстве $R[x]_n$ многочленов степени $\leq n$ с вещественными коэффициентами системы $(1, x, ..., x^n)$ и $(1, x-a, (x-a)^2, ...(x-a)^n)$ $(a \in R)$ являются базисами,и найти координаты многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + ... a_n x^n$ в этих базисах и матрицу перехода от первого базиса ко второму.

12. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

а) поменять местами два вектора первого базиса;

б) поменять местами два вектора второго базиса;

в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

2. ПОДПРОСТРАНСТВА

Является ли линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

13. Векторы плоскости с началом О, концы которых лежат на одной из двух прямых, пересекающихся в точке О.

14.Векторы плоскости с началом О, концы которых лежат на данной прямой.

15. Векторы плоскости с началом О, концы которых не лежат на данной прямой.

16. Векторы координатной плоскости, концы которых лежат в первой четверти.

17. Векторы пространства R^n, координаты которых - целые числа.

18. Векторы пространства R^n, координаты которых удовлетворяют уравнению: $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$.

19. Последовательности вещественных чисел, имеющие предел.

20. Последовательности вещественных чисел, имеющие предел a.

21. Последовательности вещественных чисел, удовлетворяющие рекуррентному соотношению: $u(n+2)+\alpha u(n+1)+\beta u(n) = f(n)$, где $(f(n))$ -фиксированная последовательность, α, $\beta \in R$.

22. Многочлены четной степени с коэффициентами из поля F.

23. Многочлены с коэффициентами из поля F, не содержащие четных степеней x.

Доказать, что следующие совокупности векторов пространства R^n образуют подпространства, и найти их базисы и размерности:

24. Векторы, у которых совпадают первая и последняя координаты.

25. Векторы, у которых координаты с четными номерами равны 0.

26. Векторы, у которых координаты с четными номерами равны между собой.

27. Векторы вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, ...)$.

Выяснить, какие из следующих совокупностей матриц порядка n над полем K образуют векторные пространства относительно сложения и умножения матриц на элементы поля K, и найти их базисы и размерности:

28. Все матрицы.

29. Симметрические матрицы.

30. Кососимметрические матрицы.

31. Невырожденные матрицы.

32. Вырожденные матрицы.

33. Матрицы со следом, равным нулю.

34. Матрицы, перестановочные с фиксированной матрицей A (при нахождении базиса и размерности считать матрицу A диагональной с различными диагональными элементами).

35. Матрицы, перестановочные со всеми матрицами.

Пусть K^∞-пространство бесконечных последовательностей с элементами из поля K. Выяснить, какие из следующих совокупностей последовательностей составляют в K^∞ подпространство:

36. Последовательности, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля.

37. Последовательности, в которых лишь конечное число элементов равно нулю.

38. Последовательности, в которых все элементы отличны от 1.

39. Ограниченные последовательности (при $K = R$).

Выяснить, какие из следующих совокупностей многочленов образуют подпространства в пространстве $R[x]_n$, и найти их базисы и размерности:

40. Многочлены, имеющие данный корень $\alpha \in R$.

41. Многочлены, имеющие данный корень $\alpha \in C \backslash R$.

42. Многочлены, имеющие данные корни: $\alpha_1, ..., \alpha_k \in R$.

43. Многочлены, имеющие данный простой корень $\alpha \in R$.

3. ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА. СУММА И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВ. ПРЯМАЯ СУММА

Найти базис и размерность линейной оболочки следующих систем векторов:

44.((1,0,0,-1),(2,1,1,0),(1,1,1,1),(1,2,3,4),(0,1,2,3)).

45.((3,1,1,2),(4,3,4,3),(5,5,7,4),(8,1,0,5)).

46.((4,2,3,1,5),(7,3,5,5,6),(5,3,4,-2,9),(4,0,2,14,-6),(1,1,1,-3,4)).

47.((1,1,1,1,0), (1,1,-1,-1,-1), (2,2,0,0,-1), (1,1,5,5,2), (1,-1,-1,0,0)).

Найти системы линейных уравнений,задающие линейные оболочки следующих систем векторов:

48. ((1,-1,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1)).

49. ((1,-1,1,-1,1),(1,1,0,0,3),(3,1,1,-1,7),(0,2,-1,1,2)).

Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек следующих систем векторов:

50.$S = ((7,1,2),(9,5,8),(5,-3,-4))$,

$T = ((8,3,5),(1,2,3),(11,-4,-5))$.

51.$S = ((1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3))$,

$T = ((2,3,-1),(1,2,2),(1,1,-3))$.

52.$S = ((1,2,1,-2),(2,3,1,0),(1,2,2,-3))$,

$T = ((1,1,1,1),(1,0,1,-1),(1,3,0,-4))$.

53. $S = ((1,4,5,3),(3,6,2,5),(1,3,3,2))$,

$T = ((1,3,2,4),(0,1,1,3),(1,2,3,7))$.

54. $S = ((-1,6,4,7,-2),(-2,3,0,5,-2),(-3,6,5,6,-5))$,

$T = ((1,1,2,1,-1),(0,-2,0,-1,-5),(2,0,2,1,-3))$.

55. $S = ((1,1,0,0,-1),(0,1,1,0,1),(0,0,1,1,1))$,

$T = ((1,0,1,0,1),(0,2,1,1,0),(1,2,1,2,-1))$.

Доказать для подпространств U и V в R^4, что $R^4 = U \oplus V$, и найти проекцию вектора x на подпространство U параллельно V:

56. $U =< (1,1,1,1),(-1,-2,0,1) >$, $V =< (-1,-1,1,-1),(2,2,0,1) >$, $x = (4,2,4,4)$.

57. $U =< (1,2,3,4),(2,3,4,1),(3,4,1,2) >$, $V =< (4,1,2,3) >$, $x = (2,8,6,4)$.

58. $U =< (1,9,8,12) >$, $V =< (1,3,1,1),(2,8,4,5),(1,5,4,5) >$, $x = (0,-12,-13,-21)$

59. $U =< (2,4,1,1),(7,9,4,2) >$, $V =< (1,10,1,3),(8,6,3,1) >$, $x = (18,3,7,-1)$

60. Пусть подпространства $U, V \subseteq R^n$ заданы системами уравнений: $x_1+x_2+...+x_n = 0$, $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Доказать, что $R^n = U \oplus V$, и найти проекции единичных векторов на U параллельно V и на V параллельно U.

61. Доказать, что пространство матриц $M_n(R)$ является прямой суммой подпространства симметрических и подпространства кососимметрических матриц, и найти проекции матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1\ 1 ... 1 \\ 0\ 1 ... 1 \\ ...... \\ 0\ 0 ... 1 \end{pmatrix}$$

на каждое из этих подпространств параллельно другому.

4. ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР И ЕГО МАТРИЦА. ЯДРО И ОБРАЗ

Какие из следующих отображений в соответствующих векторных пространствах являются линейными операторами? Найти образы и ядра операторов:

62. $x \to a$ (a - фиксированный вектор).

63. $x \to x + a$ (a - фиксированный вектор).

64. $x \to \alpha x$ (α-фиксированный скаляр).

65. $x \to (x, a)b$ (V- евклидово пространство,a, b - фиксированные векторы).

66. $x \to (x, a)x$ (V- евклидово пространство, a - фиксированный вектор).

67. $f(x) \to f(ax + b)$ ($f \in R[x]_n$; a, b-фиксированные числа).

68. $f(x) \to f(x+1) - f(x)$ ($f \in R[x]_n$).

69. $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$.

70. $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$.

71. $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

72. $f(x) \to f^{(k)}(x)$ ($f \in R[x]_n$).

73.$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3)$.

Доказать, что в пространстве R^3 существует единственный линейный оператор, переводящий векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3, и найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

74. $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (0, 1, 2)$, $a_3 = (1, 0, 0)$,
$b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, -1)$, $b_3 = (2, 1, 2)$.

75. $a_1 = (2, 0, 3)$, $a_2 = (4, 1, 5)$, $a_3 = (3, 1, 2)$,

$b_1 = (1,2,-1)$, $b_2 = (4,5,-2)$, $b_3 = (1,-1,1)$.

Найти матрицы линейных операторов:

76. $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$ в пространстве R^3 в базисе из единичных векторов.

77. Поворота плоскости на угол α в произвольном ортонормированном базисе.

78. Поворота трехмерного пространства на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, заданной в прямоугольной системе координат уравнениями: $x_1 = x_2 = x_3$ в базисе из единичных векторов осей координат.

79. Проектирования трехмерного пространства на координатную ось вектора e_2 параллельно координатной плоскости векторов e_1 и e_3 в базисе e_1, e_2, e_3.

80. Оператора $x \to (x,a)a$ в евклидовом пространстве в ортонормированном базисе (e_1, e_2, e_3) при $a = e_1 - 2e_3$ в указанном базисе.

81. Оператора $X \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$ в пространстве $M_2(R)$ в базисе из матричных единиц: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

82. Оператора $X \to X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в пространстве $M_2(R)$ в базисе из матричных единиц.

83. Оператора $X \to X^t$ в пространстве $M_2(R)$ в базисе из матричных единиц.

84. Оператора $X \to AXB$ (A и B -фиксированные матрицы) в пространстве $M_2(R)$ в базисе, состоящем из матричных единиц.

85. Оператора $X \to AX + XB$ (A и B -фиксированные матрицы) в пространстве $M_2(R)$ в базисе, состоящем из матричных единиц.

86. Оператора дифференцирования в пространстве $R[X]_n$ в базисе $(1, x, ..., x^n)$.

87. Оператора дифференцирования в пространстве $R[X]_n$ в базисе $(x^n, x^{n-1}, ..., 1)$.

88. Оператора дифференцирования в пространстве $R[X]_n$ в базисе

$$(1, x-1, (x-1)^2/2, ..., (x-1)^n/n!).$$

5. ИЗМЕНЕНИЕ МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРА ПРИ ЗАМЕНЕ БАЗИСА. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

89. Линейное преобразование ϕ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого преобразования в базисе:

a) e_1, e_3, e_2, e_4; b)$e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

90. Пусть линейный оператор в пространстве $R[x]_2$ имеет в базисе

$(1, x, x^2)$ матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе

$(3x^2 + 2x + 1, x^2 + 3x + 2, 2x^2 + x + 3)$.

91. Зная матрицу A оператора в базисе

$4e_1 + 6e_2 + 9e_3, e_1 + 2e_2 + 3e_3, 3e_1 + 5e_2 + 8e_3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, найти

его матрицу в базисе (e_1, e_2, e_3).

92. Пусть линейный оператор в пространстве R^3 имеет в базисе ((8,-6,7),(-16,7,-13),(9,-3,7)) матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе $((1,-2,1),(3,-1,2),(2,1,2))$.

93. Пусть $f:\mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^2$- линейное отображение, e_1, e_2, e_3 -базис $\mathcal{R}^3$, g_1, g_2 - базис $\mathcal{R}^2$ и $f(e_1) = 2g_1 + g_2, f(e_2) = -g_1 + g_2, f(e_3) = g_1 - 2g_2$. Пусть $v = e_1 - 2e_2 + e_3$. Найти координаты вектора $f(v)$ в базисе g_1, g_2.

94. Пусть в условиях предыдущей задачи:

$e'_1 = -e_1 + e_2, e'_2 = e_2 - e_3, e'_3 = e_1 + e_3, g'_1 = g_1 - g_2, g'_2 = -g_1 + 2g_2$ новые базисы. Найти матрицу оператора f в базисах $\{e'_i\}$ и $\{g'_j\}$.

95. Пусть преобразование Φ в базисе $a_1 = (1,2)$, $a_2 = (2,3)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Преобразование Ψ в базисе $b_1 = (3,1)$, $b_2 = (4,2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования $\Phi + \Psi$ в базисе b_1, b_2.

96. Преобразование Φ в базисе $a_1 = (-3,7)$, $a_2 = (1,-2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а преобразование Ψ в базисе $b_1 = (6,-7)$, $b_2 = (-5,6)$ - матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования $\Phi\Psi$ в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

97. Два базиса $\{e_1, e_2\}$ и $\{a_1, a_2\}$, линейный оператор f и вектор x удовлетворяют соотношениям:

а) $e_1 = a_1 + 2a_2, a_2 = e_2 - e_1, f(e_1) = 2a_1 + a_2, f(a_2) = e_1 - e_2$, $x = 2a_1 - e_2$;

б) $a_1 = a_2 - e_1, e_2 = a_1 + 3e_1, f(a_1) = e_1 - 3a_2, f(e_2) = 2a_1 - 3e_2$, $x = e_1 + 2e_2$.

Найти матрицу оператора и координаты $f(x)$ вектора в этих двух базисах.

6. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА. КОРНЕВЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов,заданных в некотором базисе указанными матрицами. Если матрица оператора приводится к диагональному виду путем перехода к новому базису, то найти эту диагональную матрицу и соответствующий базис:

98. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **99.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **100.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **101.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

102. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **103.** $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$. **104.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

105. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **106.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **107.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

108. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **109.** $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

110. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **111.** $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **112.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

113. Найти все подпространства трехмерного пространства, инвариантные относительно линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

114. Найти все подпространства трехмерного пространства, инвариантные одновременно относительно двух линейных преобразований, заданных матрицами:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и корневые подпространства линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами:

115. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **116.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **117.** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

118. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Следующие λ-матрицы привести к нормальной диагональной форме путем элементарных преобразований:

119. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **120.** $\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{pmatrix}$. **121.** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 5 \end{pmatrix}$.

122. $\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)^3 \end{pmatrix}$. **123.** $\begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda^2 \\ 3\lambda - 1 & 3\lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 2\lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

124. $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 - \lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2 - \lambda & 3\lambda^2 - \lambda & \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 + \lambda & 3\lambda^2 + 3\lambda \end{pmatrix}$. **125.** $\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$.

126. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda + 1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1)^2 \end{pmatrix}$. **127.** $\begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 + \lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$.

8. ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖИТЕЛИ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ

Следующие λ-матрицы привести к нормальной диагональной форме с помощью наибольших общих делителей миноров:

$$\textbf{128.}\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{129.}\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) \end{pmatrix}.$$

130.$diag((\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3); (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$; $(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4); (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4))$.

$$\textbf{131.}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.\textbf{132.}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{133.}\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5+\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{134.}\begin{pmatrix} 2\lambda^2-12\lambda+16 & 2-\lambda & 2\lambda^2-12\lambda+17 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ \lambda^2-6\lambda+7 & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{135.}\ \begin{pmatrix} 3\lambda^2-5\lambda+2 & 0 & 3\lambda^2-6\lambda+3 \\ 2\lambda^2-3\lambda+1 & \lambda-1 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \\ 2\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}.$$

Найти нормальную диагональную форму квадратной λ-матрицы, если известны ее элементарные делители, ранг r и порядок n:

136. $\lambda+1$, $\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$, $\lambda-1$, $(\lambda-1)^2$, r=4, n=5.

137. $\lambda+2$, $(\lambda+2)^2$, $(\lambda+2)^3$, $\lambda-2$, $(\lambda-2)^3$, $r=n=4$.

138. $\lambda-1$, $\lambda-1$, $(\lambda-1)^3$, $\lambda+2$, $(\lambda+2)^2$, $r=4$, $n=5$.

Пользуясь тем, что совокупность элементарных делителей клеточно-диагональной матрицы равна объединению (с надлежащими повторениями) совокупностей элементарных делителей всех ее диагональных клеток, найти нормальную диагональную форму следующих λ-матриц:

$$\textbf{139.}\ \begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^3 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{140.}\ \begin{pmatrix} \lambda^2-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{141.}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^3+6\lambda^2+9\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-6\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-4\lambda+4 & 0 & 0 \\ \lambda^4+\lambda^3-6\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

142.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^4+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^2+2\lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

143. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$

144. $\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-4 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+6\lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2+5\lambda-7 \end{pmatrix}.$

9. КРИТЕРИЙ ПОДОБИЯ МАТРИЦ

Выяснить, являются ли подобными между собой следующие матрицы:

145. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$.

146. $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{pmatrix}$.

147. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

$$C = \begin{pmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{pmatrix}.$$

148. $A = \begin{pmatrix} 14 & -2 & -7 & -1 \\ 20 & -2 & -11 & -2 \\ 19 & -3 & -9 & -1 \\ -6 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -19 & 4 \\ 1 & 6 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

$$C = \begin{pmatrix} 41 & -4 & -26 & -7 \\ 14 & -13 & -91 & -18 \\ 40 & -4 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для данных матриц A и B найти невырожденную матрицу T такую, что $B = T^{-1}AT$:

149. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}.$

150. $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{pmatrix}.$

151. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 24 & -11 & -22 \\ 20 & -8 & -20 \\ 12 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$

10. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА. МИНИМАЛЬНЫЙ МНОГОЧЛЕН

Найти минимальные многочлены следующих матриц:

152. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **153.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Найти нормальную жорданову форму матрицы A, если даны инвариантные множители ее характеристической матрицы:

154. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 1, E_3(\lambda) = E_4(\lambda) = \lambda - 1,$
$E_5(\lambda) = E_6(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$.

155.$E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = E_3(\lambda) = 1$, $E_4(\lambda) = \lambda + 1$, $E_5(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, $E_6(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$.

156. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 1, E_3(\lambda) = \lambda - 2, E_4(\lambda) = \lambda^2 - 4.$

Найти жорданову форму матрицы линейного оператора и матрицу перехода к базису, в котором матрица оператора является жордановой, если в исходном базисе оператор задан матрицей:

157. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. **158.** $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. **159.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$.

160. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **161.** $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **162.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

163. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **164.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$. **165.** $\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

166. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **167.** $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти жорданову форму матрицы:

168. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. **169.** $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. **170.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

171. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. **172.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

173. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **174.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

175. $\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \ldots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \ldots & 2 \\ 0 & 0 & n & \ldots & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

Порядок последних двух матриц равен n.

11. ПРИЛОЖЕНИЯ ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЫ

Используя жорданову форму, вычислить:

176. A^{100} и $\cos \pi A$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

177. A^{50} и $\sin \pi A$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

178. $\sqrt{A}$ и $tg(\pi/A)$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

179. $\sqrt{A}$ и $\cos(\pi A/6)$, где $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

180. e^A и $\sin(\pi A/6)$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

181. e^A и $\ln(A/2)$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

182. e^A и $e^{\cos(\pi A/2)}$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

183. $\ln \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. **184.** $\sin \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$.

12. МЕТОД ЛАГРАНЖА ПРИВЕДЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Найти канонический вид в области вещественных чисел следующих квадратичных форм:

185. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

186. $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

187. $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

188. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

189. $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм:

190. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

191. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

192. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

193. $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

194. $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.

195. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

196. $3x_1^2+2x_2^2-x_3^2-2x_4^2+2x_1x_2-4x_2x_3+2x_2x_4$.

Следующие квадратичные формы привести к каноническому виду с целыми коэффициентами и найти выражение новых неизвестных через старые:

197. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

198. $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$.

199. $1/2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$.

13. БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. МЕТОД ЯКОБИ. КРИТЕРИЙ СИЛЬВЕСТРА

Найти матрицу билинейной функции в новом базисе, если заданы ее матрица в старом базисе и формулы перехода:

200. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + e_3$, $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$.

201. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 + 2e_2 - e_3$, $e_2' = e_2 - e_3$, $e_3' = -e_1 + e_2 - 3e_3$.

Пусть билинейная функция f задана в некотором базисе матрицей F; найти $f(x, y)$, если:

202. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $x = (1, 0, 3)$, $y = (-1, 2, -4)$.

203. $F = \begin{pmatrix} i & 1+i & 0 \\ -1+i & 0 & 2-i \\ 2+i & 3-i & -1 \end{pmatrix}$,

$$x = (1+i, 1-i, 1), y = (-2+i, -i, 3+2i)$$

Найти симметричную билинейную функцию, ассоциированную с квадратичной формой:

204. $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

205. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Найти симметричную билинейную функцию, ассоциированную с квадратичной формой $g(x) = f(x,x)$, если:

206. $f(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_1 - 5x_2y_3 + x_3y_3$.

207. $f(x,y) = -x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_3$.

Методом Якоби найти канонический вид симметрических билинейных функций:

208. $2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 + 3x_3y_3$.

209. $2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_2y_3 + 3x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3$.

Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

210. $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

211. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

212. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

213. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

214. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Найти все значения параметра λ, при которых отрицательно определены следующие квадратичные формы:

215. $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$.

216. $\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

14. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки системы:

217. ((1,2,2,-1),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7)).

218. ((1,1,-,1,-2),(5,8,-2,-3),(3,9,3,8)).

219. ((2,1,3,-1),(7,4,3,-3),(1,1,-6,0),(5,7,7,8)).

220. ((1,-1,1,-1),(4,-2,2,-4),(3,1,-1,-1),(4,0,2,-2)).

221. ((i,1,i,1),(0,0,2i,2),(-2-2i,2i,-2,2+2i),(1+4i,-i,-1+2i,2+i)).

222. $((1,i,1,i),(-1+i,1-i,-1+i,1-i),(1+i,1+i,1+3i,3+i),$ $(-1+i,3-i,1+3i,5+i))$.

Дополнить до ортогонального базиса систему векторов:

223. ((1,-2,2,-3),(2,-3,2,4)).

224. ((1,1,1,2),(1,2,3,-3)).

Дополнить до ортонормированного базиса систему векторов

225. ((2/3,1/3,2/3),(1/3,2/3,-2/3)).

226. ((1/2,1/2,1/2,1/2),(1/2,1/2,-1/2,-1/2)).

227. Многочлены: $P_0 = 1$, $P_k = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k], (k = 1, 2, ..., n)$

называются многочленами Лежандра:

а) доказать, что многочлены Лежандра образуют ортогональный базис в евклидовом пространстве $R[x]_n$ со скалярным произведением:

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx;$$

б) найти явный вид многочленов $P_k(x)$ для $k \leq 4$;

в) доказать, что $degP_k(x) = k$, и найти развернутое выражение по степеням x для $P_k(x)$ при всех k;

г) вычислить длину многочлена Лежандра $P_k(x)$;

д) вычислить значение $P_k(1)$;

е) доказать, что при применении процесса ортогонализации к базису $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ пространства $R[x]_n$ получается базис, элементы которого лишь постоянными множителями отличаются от соответствующих многочленов Лежандра, и найти эти множители;

ж) доказать, что интеграл $\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx$, где $f(x)$ - многочлен степени с вещественными коэффициентами со старшим коэффициентом 1, достигает своего минимума $\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}^2}$ при $f(x) = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} P_n(x)$.

15. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

228. ((1,0,2,1),(2,1,2,3),(0,1,-2,1)).

229. ((1,1,1,1),(-1,1,-1,1),(2,0,2,0)).

Найти уравнения, задающие ортогональное дополнение к подпространству, заданному системой уравнений:

230. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

231. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0. \end{cases}$

Найти проекцию вектора $\bar{x}$ на подпространство L и ортогональную составляющую вектора $\bar{x}$:

232. $L =< (1,1,1,1), (1,2,2,-1), (1,0,0,3) >$, $\bar{x} = (4,-1,-3,4)$.

233. $L =< (2,1,1,-1), (1,1,3,0), (1,2,8,1) >$, $\bar{x} = (5,2,-2,2)$.

234. L задано системой уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \end{cases} \quad \bar{x} = (7, -4, -1, 2).$$

16. МАТРИЦА ГРАМА

Вычислить объем n-мерного параллелепипеда со сторонами:

235. (1,-1,1,-1),(1,1,1,1),(1,0,-1,0),(0,1,0,-1).

236. (1,1,1,1),(1,-,1-1,1),(2,1,1,3),(0,1,-1,0).

237. (1,1,1,2,1), (1,0,0,1,-2), (2,1,-1,0,2,), (0,7,3,-4,-2), (39,-37,51,-29,5).

238. (1,0,0,2,5), (0,1,0,3,4), (0,0,1,4,7), (2,-3,4,11,12), (0,0,0,0,1)

Найти расстояние от вектора $\bar{x}$ до подпространства, заданного системой уравнений:

239. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases} \quad \bar{x} = (2, 4, 0, -1).$

240. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases} \quad \bar{x} = (3, 3, -4, 2).$

241. $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5$, $\bar{x} = (3, 3, -1, 1, -1)$.

242. $x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = 0$, $\bar{x} = (3, 3, -1, 1, -1)$.

Найти угол между вектором $\bar{x}$ и подпространством L:

243. $L = \langle (3, 4, -4, -1), (0, 1, -1, 2) \rangle$, $\bar{x} = (2, 2, 1, 1)$.

244. $L = \langle (5, 3, 4, -3), (1, 1, 4, 5), (2, -1, 1, 2) \rangle$, $\bar{x} = (1, 0, 3, 0)$.

245. Найти угол между диагональю n-мерного куба и его k-мерной гранью.

17. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

246. Найти оператор, сопряженный к проектированию координатной плоскости на ось абсцисс параллельно биссектрисе первой и третьей четвертей.

247. Пусть (e_1, e_2) - ортонормированный базис эрмитова векторного пространства и f - линейный оператор, заданный в базисе g_1, g_2 матрицей A. Найти матрицу сопряженного оператора f^* в этом базисе, если:

а) $g_1 = e_1,\ g_2 = e_1 + e_2;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $g_1 = e_1 + ie_2,\ g_2 = e_2;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $g_1 = e_1 + e_2,\ g_2 = e_1 + 2e_2;\ A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$;

г) $g_1 = (1+i)e_1 + e_2,\ g_2 = e_1 + (1-i)e_2;\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

248. Линейное преобразование φ евклидова пространства в базисе из векторов $f_1 = (1,2,1), f_2 = (1,1,2), f_3 = (1,1,0)$ задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу сопряженного преобразования φ^* в том же базисе, считая, что координаты векторов базиса даны в некотором ортонормированном базисе.

Пусть в некотором базисе скалярное произведение задано билинейной формой f , а линейный оператор φ матрицей A. Найти матрицу сопряженного оператора в том же базисе:

249. $f = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

250. $f = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

251. $f = 3x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - 2x_3y_1 - x_3y_2 + 2x_3y_3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

252. $f = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

253. Пусть V - пространство вещественных бесконечно дифференцируемых периодических функций периода $h > 0$ со скалярным произведением:

$$\int_{-h}^{h} f(x)g(x)dx.$$

Найти оператор, сопряженный к оператору дифференцирования D.

Доказать, что отображения A и B, заданные правилами

$$A(f) = \sum_{i=0}^{n} u_i D^i(f), \qquad B(f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i D^i(u_i f),$$

где $u_0, u_1, ... u_n \in V$ - фиксированные функции, являются линейными операторами в V и $B = A^*$.

Доказать, что оператор, определенный правилом

$$A(f) = \sin^2 \frac{2\pi}{h} x D^2(f) + \frac{2\pi}{h} \cos \frac{4\pi}{h} x D(f),$$

является самосопряженным.

18. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Найти собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе оператора,заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

254. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **255.** $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$. **256.** $\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

257. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. **258.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **259.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

260. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **261.** $\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$.

262. $\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$. **263.** $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$.

264. Доказать, что многочлены Лежандра составляют собственный базис для самосопряженного оператора, определенного правилом: $(A(f))(x) = (x^2-1)f''(x) + 2xf'(x)$, в пространстве многочленов степени $\leq$n со скалярным произведением: $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

19. УНИТАРНЫЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Найти собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе унитарного оператора,заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

265. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq k\pi)$. **266.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}$.

267. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$.

Найти канонический базис и матрицу в этом базисе ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

268. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **269.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

270. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **271.** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

272. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. **273.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

274. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

ОТВЕТЫ

1. (1,2,3). **2.** (1,1,1). **3.** (0,2,1,2).

4. (-1,1,-1,1). **5.**$x_1 = -2x_1' + 2x_2', x_2 = 3x_1' - x_2'$.

6. $x_1 = x_1' + x_2', x_2 = -x_1' - 3x_2'$.

7. $x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3'; x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3'; x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'$.

8. $x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3'; x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3'; x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'$.

9. $x_1 = 2x_1' + x_3' - x_4'; \quad x_2 = -3x_1' + x_2' - 2x_3' + x_4';$

$x_3 = x_1' - 2x_2' + 2x_3' - x_4'; \quad x_4 = x_1' - x_2' + x_3' - x_4'$.

10. а) $v = (0,9;1,3), w = (-6,8;4,6)$;

б) $v = (-29;19), w = (3;-1)$;

в) $v = (7;-2), w = (11;4)$;

г) $v = (-8;7), w = (1;-3)$.

11. $a_0, a_1, ..., a_n; f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha)/2!, ..., f^{(n)}(\alpha)/n!$;

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \ldots & (-1)^n\alpha^n \\ 0 & 1 & -2\alpha & 3\alpha^2 & \ldots & (-1)^n n\alpha^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

12. а) поменяются местами две строки; б) поменяются местами два столбца; в) произойдет симметричное отражение матрицы относительно ее центра. **13,15,16,17,22** не является. **18,19,23-** является.

14.Является,если прямая проходит через 0. **20.** Является, если $a = 0$.

21. Является,если f-нулевая последовательность.

24.((1,0,0,...,0,1),(0,1,0,...,0,0),(0,0,1,..0,0),...,(0,0,0,...,1,0)); $n - 1$.

25.((1,0,...0),(0,0,1,0,...,0),(0,0,0,0,1,...,0),...); $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

26.К векторам из 25 добавить вектор (1,1,1,...1,1);$1 + \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

27. (1,0,1,0,1,...),(0,1,0,1,0,...)); 2 при $n > 1$.

28.$\{E_{ij} | i, j = 1, 2, ...n\}; n^2$.

29. $\{E_{ij} + E_{ji} | 1 \le i \le j \le n\}$; $n(n+1)/2$.

30. Если $char K \neq 2$, то $\{E_{ij} - E_{ji} | 1 \le i < j \le n\}; n(n-1)/2$; при $char K = 2$ ответ, как и в задаче **29.**

31,32,37,38,43 - не является. **36,39** -является.

33. $\{E_{11} - E_{ii} | i = 2, 3, ..., n\} \cup \{E_{ij} | i, j = 1, 2, ..., n; i \neq j\}; n^2 - 1$.

34. $\{E_{ii} | i = 1, 2, ..., n\}; n$. **35.** $E; 1$.

40. $(x - \alpha), (x - \alpha)^2, ..., (x - \alpha)^n; n$.

41. $f, xf, x^2 f, ..., x^{n-2} f$, где $f = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}; n - 1$.

42. $f, xf, x^2 f, ..., x^{n-k} f$, где $f = (x - \alpha_1)...(x - \alpha_k); n - k + 1$.

44. $a_1, a_2, a_4; 3$. **45.** $a_1, a_2, 2$. **46.** $a_1, a_2, 2$.

47. $a_1, a_2, a_5; 3$.

48. $x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

49. $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0,\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 - x_5 = 0$.

50. Сумма и пересечение совпадают, базис: a_1, a_2.

51. Базис суммы: a_1, a_2, b_1:

базис пересечения: $c = 2a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = (3, 5, 1)$.

52. Базис суммы: a_1, a_2, a_3, b_1;

базис пересечения: $b_1 = -2a_1 + a_2 + a_3$, $b_3 = 5a_1 - a_2 - 2a_3$.

53. Базис суммы: a_1, a_2, a_3, b_3;

базис пересечения: $b_1 = 3a_1 + a_2 - 5a_3$, $b_2 = 4a_1 + a_2 - 7a_3$.

54. Базис суммы: a_1, a_2, a_3, b_1;

базис пересечения: (1,1,1,1,1), (0,2,3,1,-1).

55. Базис суммы: a_1, a_2, a_3, b_1;

базис пересечения: (1,1,1,1,0), (1,0,0,1,-1).

56. (-1,-3,1,3). **57.** (6,9,8,7).

58. (-2,-18,-16,-24). **59.** (3,1,2,0).

60. Проекция вектора e_i на U имеет i-ю координату $(n-1)/n$, а остальные равны $(-1/n)$; проекция на V имеет все координаты, равные $1/n$.

61. $A = 1/2(A + A^t) + 1/2(A - A^t)$.

62. Является, если $a = 0$; образ- $\{0\}$; ядро-V.

63. Является, если $a = 0$; образ- V; ядро-$\{0\}$.

64. Если $\alpha \neq 0$, то V, $\{0\}$; если $\alpha = 0$, то $\{0\}$,V.

65. Если $a, b \neq 0$, то $< b >$, $< a >^{\perp}$; если $a = 0$ или $b = 0$, то $\{0\}$,V.

66. Является, если $a = 0$; $\{0\}$, V.

67. Если $a \neq 0$, то $R[x]_n$, $\{0\}$; если $a = 0$, то R, $\{(x-b)f | f \in R[x]_{n-1}\}$.

68.$R[x]_{n-1}$, R. **69,70** не является.

71. R^3, $\{0\}$. **72.** $R[x]_{n-k}$, $R[x]_{k-1}$.

73. $< (1,0,1),(1,1,0) >, < (-1,1,1) >$.

74. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **75.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$. **76.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

77. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, если положительное направление отсчета углов совпадает с направлением кратчайшего поворота, переводящего первый базисный вектор во второй.

78. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **79.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **80.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

81. $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$. **82.** $\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$. **83.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

84. $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_3 & a_2b_1 & a_2b_3 \\ a_1b_2 & a_1b_4 & a_2b_2 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_3 & a_4b_1 & a_4b_3 \\ a_3b_2 & a_3b_4 & a_4b_2 & a_4b_4 \end{pmatrix}$, где $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

85. $\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_3 & a_2 & 0 \\ b_2 & a_1+b_4 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4+b_1 & b_3 \\ 0 & a_3 & b_2 & a_4+b_4 \end{pmatrix}$.

86. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

87. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 88. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

89. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 89. b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

90. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 91. $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ -13 & 10 & 0 \\ -21 & 16 & 0 \end{pmatrix}$. 92. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

93. $(5,-3)$ **94.** $\begin{pmatrix} -6 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

95. $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29{,}5 & -25 \end{pmatrix}$. **96.** $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$.

97. а) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $(0,2)$, $(2,6)$;

б) $\begin{pmatrix} 26/3 & 20 \\ -4/3 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -9 & -13/3 \end{pmatrix}$, $(126/3,-34/3)$, $(-26,44/3)$.

98. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$; $c(1,1,-1)$, где $c\neq 0$.

99. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$; $c_1(1,2,0)+c_2(0,0,1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно.

100. $\lambda_1=1$; $c(1,1,1)$; $\lambda_2=\lambda_3=0$; $c(1,2,3)$, где $c\neq 0$.

101. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$; $c(3,1,1)$, где $c\neq 0$.

102. $\lambda_1=3$; $c(1,2,2)$; $\lambda_2=\lambda_3=-1$; $c(1,2,1)$, где $c\neq 0$.

103. $\lambda_1=\lambda_2=1$; $c_1(2,1,0)+c_2(1,0,-1)$; $\lambda_3=-1$; $c(3,5,6)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно и $c\neq 0$; $diag(1,1,-1)$;

базис: ((2,1,0),(1,0,-1),(3,5,6)).

104. $\lambda_1=1$; $c(1,2,1)$; $\lambda_2=2+3i$; $c(3-3i,5-3i,4)$; $\lambda_3=2-3i$; $c(3+3i,5+3i,4)$, где $c\neq 0$; $diag(1,2+3i,2-3i)$; базис: ((1,2,1), (3-3i, 5-3i, 4), (3+3i, 5+3i, 4)).

105. $\lambda_1=\lambda_2=1$; $c(0,0,0,1)$; $\lambda_3=\lambda_4=0$; $c_1(0,1,0,0)+c_2(0,0,1,0)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно, $c\neq 0$.

106. $\lambda_1=\lambda_2=1$; $c_1(1,0,1,0)+c_2(0,0,0,1)$; $\lambda_3=\lambda_4=0$; $c_1(0,1,0,0)+c_2(0,0,1,0)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно; $diag(1,1,0,0)$; базис: ((1,0,1,0), (0,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0)).

107. $\lambda=2$; $c_1(1,1,-1,0)+c_2(1,1,0,1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно.

108. $\lambda_1 = 1$; $c(1,1,1)$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$; $c_1(1,1,0) + c_2(1,0,-3)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно, $c \neq 0$; $diag(1,2,2)$;
базис: ((1,1,1), (1,1,0), (1,0,-3)).

109. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $c(1,1,0)$; $\lambda_3 = 2$; $c(2,1,1)$, где $c \neq 0$.

110. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$; $c_1(1,1,0,0) + c_2(1,0,1,0) + c_3(1,0,0,1)$; $\lambda_4 = -2$; $c(1,-1,-1,-1)$, где c_1, c_2, c_3 не равны нулю одновременно, $c \neq 0$; $diag(2,2,2,-2)$; базис: ((1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (1,-1,-1,-1)).

111. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $c_1(0,1,1,1) + c_2(3,2,3,-3)$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$; $c(1,1,1,0)$, где c_1, c_2 не равны нулю одновременно, $c \neq 0$.

112. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $c_1(1,0,0,1) + c_2(0,1,1,0)$; $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$; $c_1(0,-1,1,0) + c_2(-1,0,0,1)$, где c_1, c_2 не равны нулю одновременно; $diag(1,1,-1,-1)$; базис: ((1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,-1,1,0),(-1,0,0,1)).

113. Прямая с базисным вектором $a_1 = (2,2,-1)$, любая прямая плоскости L с базисными векторами $a_2 = (1,1,0)$ и $a_3 = (1,0,-1)$, то есть плоскости: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, сама эта плоскость L, любая плоскость, проходящая через вектор a_1, все пространство и нулевое подпространство.

114. Прямая с базисным вектором (1,2,-1), плоскость с базисными векторами (1,1,1) и (1,2,3), то есть плоскость с уравнением:
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, все пространство и нулевое подпространство.

115. $\lambda_1 = 1$; $<(1,1,1)>$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$; $<(1,1,0),(1,0,-3)>$.

116. $\lambda_1 = 3$; $<(1,2,2)>$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$; $<(1,1,0);(1,0,-1)>$.

117. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; R^3.

118. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; $<(1,0,1,0),(1,0,0,1)>$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$; $<(1,0,0,0),(0,1,0,1)>$.

119. $diag(1,\lambda^2)$. **120.** $diag(\lambda+1, \lambda^3+\lambda^2-2\lambda-2)$.

121. $diag(1,\lambda^2+5\lambda)$. **122.** $diag(\lambda-1,(\lambda+1)(\lambda-1^3))$.

123. $diag(1, \lambda, 0)$. **124.** $diag(\lambda, \lambda^2 + \lambda, \lambda^3 + \lambda^2)$.

125. $diag(1, 1, (\lambda - 2)^3)$. **126.** $diag(1, \lambda^2 + \lambda, \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda)$.

127. $diag(1, \lambda, \lambda^2 + \lambda)$. **128.** $diag(1, \lambda(\lambda-1)(\lambda-2), \lambda(\lambda-1)(\lambda-2))$.

129. $diag(\lambda, \lambda, \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3))$.

130. $diag(1, P, P, P)$, где $P = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$.

131. $diag(1, 1, 1, \lambda^4)$. **132.** $diag(1, 1, \lambda^2, \lambda^2)$.

133. $diag(1, 1, 1, 1, \lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1)$.

134. $diag(1, \lambda\text{-}3, (\lambda\text{-}3)^2)$.

135. $diag(\lambda - 1, \lambda - 1, (\lambda - 1)^2)$.

136. $diag(1, \lambda + 1, \lambda^2 - 1, \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1, 0)$.

137. $diag(1, \lambda + 2, \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8, \lambda^6 - 12\lambda^4 + 48\lambda^2 - 64)$.

138. $diag(1, \lambda - 1, \lambda^2 + \lambda - 2, \lambda^5 + \lambda^4 - 5\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 4, 0)$.

139. $diag(1, \lambda(\lambda+1), \lambda(\lambda+1)(\lambda-1), \lambda^2(\lambda+1)^3(\lambda-1)^2)$.

140. $diag(1, \lambda^3 - 4\lambda, \lambda^3 - 4\lambda, \lambda^4 - 4\lambda^2)$.

141. $diag(1, P, P, P^2)$, где $P = \lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda$.

142. $diag(1, \lambda^2 - 1, (\lambda^2 - 1)^2, (\lambda^2 - 1)^3)$.

143. $diag(1, \lambda - 1, \lambda^2 - 1, 0)$. **144.** $diag(1, 1, \lambda^2 - 4, 0)$.

145,146 подобны.

147. Матрицы A и C подобны между собой, но не подобны матрице B.

148. Матрицы B и C подобны между собой, но не подобны матрице A.

149. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. **150.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$. **151.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

152. $\lambda^2 - 4\lambda + 4$. **153.** $\lambda^2 - 5\lambda + 6$. **154.** $diag(1, 1, 1, 1, -2, -2)$.

155. $diag\left(-1, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, 5\right)$.

156. Таких матриц нет.

157. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **158.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

159. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

160. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

161. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. **162.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

163. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **164.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

165. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

166. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

167. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

168. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. **169.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

170. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$. **171.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

172. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **173.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

174. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **175.** $\begin{pmatrix} n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$.

176. $\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100} & 2(3^{100} - 2^{100}) \\ -3(3^{100} - 2^{100}) & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

177. $2^{50} \begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -\pi & \pi \\ -\pi & \pi \end{pmatrix}$.

178. $\pm\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1+\pi/8 & -\pi/8 \\ \pi/8 & 1-\pi/8 \end{pmatrix}$.

179. $\pm\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $1/10 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

180. $\begin{pmatrix} 4e-3 & 2-2e \\ 6e-6 & 4-3e \end{pmatrix}$ u $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3/2 \end{pmatrix}$.

181. $\begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1/2+2\pi ik & -1/2 \\ 1/2 & 2\pi ik-1/2 \end{pmatrix}$.

182. $\begin{pmatrix} 3e-1 & e & -3e+1 \\ 3e & e+3 & -3e-3 \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3-2e & 1-e & 3e-3 \\ 3-3e & 1 & 3e-3 \\ 3-3e & 1-e & 4e-3 \end{pmatrix}$.

183. $\begin{pmatrix} 3+2\pi in & -15 & 6 \\ 1 & -5+2\pi in & 2 \\ 1 & -5 & 2+2\pi in \end{pmatrix}$, где $i=\sqrt{-1}$, n – целое.

184. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

185. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$. **186.** $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. **187.** $y_1^2-y_2^2$.

188. $y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2$. **189.** $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

190. $y_1^2+y_2^2-y_3^2; x_1=y_1-1/2y_2+5/6y_3, x_2=1/2y_2-1/6y_3, x_3=1/3y$.

191. $y_1^2+y_2^2-y_3^2; x_1=1/2y_1+y_2, x_2=y_2+y_3, x_3=-y_2+y_3$.

192. $y_1^2-y_2^2-y_3^2; x_1=y_1-y_2-y_3, x_2=y_1+y_2-y_3, x_3=y_3$.

193. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$; $x_1=\sqrt{2}/2y_1-5\sqrt{3}/3y_2+\sqrt{3}/3y_3$, $x_2=-\sqrt{3}/3y_+\sqrt{3}/3y_3$, $x_3=\sqrt{3}/3y_2+\sqrt{3}/3y_3$.

194. $y_1^2+y_2^2-y_3^2; x_1=-3/4y_1-1/4y_2+\sqrt{3}/6y_3, x_2=-1/2y_1-1/2y_2$, $x_3=1/2y_1+1/2y_2$.

195. $y_1^2-y_2^2; x_1=y_1-y_2-y_3, x_2=y_1+y_2-y_4, x_3=y_3, x_4=y_4$.

196. $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y-4^2$;

$x_1=\sqrt{3}/3y_1-\sqrt{15}/15y_2+2\sqrt{85}/85y_3-\sqrt{629}/629y_4$,

$x_2=\sqrt{15}/5y_2-6\sqrt{85}/85y_3+3\sqrt{629}/629y_4$,

$x_3=\sqrt{85}/17y_3+6\sqrt{629}/629y_4$,

$x_4=\sqrt{629}/37y_4$.

197. $2y_1^2+10y_2^2+190y_3^2$; $y_1=x_1-1/2x_2+x_3$, $y_2=1/2x_2-1/10x_3$, $y_3=1/10x_3$.

198.$3y_1^2-30y_2^2+530y_3^2$; $y_1=x_1+2/3x_2-1/2x_3$, $y_2=1/3x_2-1/20x_3$, $y_3=1/20x_3$.

199.$2y_1^2+6y_2^2-6y_3^2+2y_4^2$; $y_1=1/2x_1-1/2x_2$, $y_2=1/2x_2+1/6x_3$, $y_3=1/6x_3+1/2x_4$, $y_4=3/2x_4$.

200. $\begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$. **201.** $\begin{pmatrix} 11 & 8 & 15 \\ 6 & 5 & 12 \\ 11 & 10 & 29 \end{pmatrix}$. **202.** -43. **203.** 1-19i.

204. $x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2-3x_1y_3-3x_3y_1+2x_2y_3+2x_3y_2-x_3y_3$.

205.$1/2(x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3+x_3y_2)$.

206.$2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1-2x_1y_3-2x_3y_1-5/2x_2y_3-5/2x_3y_2+x_3y_3$.

207.$-2x_2y_2+3/2x_2y_3+3/2x_3y_2-1/2x_1y_3-1/2x_3y_1+2x_3y_3$.

208.$2x_1'y_1'-1/2x_2'y_2'+3x_3'y_3'$. **209.** $x_1'y_1'-x_2'y_2'+16x_3'y_3'$.

210. $\lambda>2$. **211.**$|\lambda|<\sqrt{5/3}$. **212.** $-0,8<\lambda<0$.

213, 214 -таких λ не существует. **215.** $\lambda<-20$.

216. $\lambda<-0,6$.

217.((1,2,2,-1),(2,3,-3,2),(2,-1,-1,-2)).

218.((1,1,-1,-2),(2,5,1,3)). **219.**((2,1,3,-1),(3,2,-3,-1)).

220.((1,-1,1,-1),(1,1,-1,-5),(1,0,0,1),(0,1,1,0)).

221.((i,1,i,1),(-i,-1,i,1),(-i,1,-i,1),(i,-1,-i,1)).

222.((1,i,1,i),(i,1,i,1),(-i,-1,i,1),(-1,-i,1,i)).

223.((2,2,1,0),(5,-2,-6,-1)). **224.**((1,-2,1,0),(25,4,-17,-6)).

225.(2/3,-2/3,-1/3).

226.((1/2,-1/2,1/2,-1/2),(1/2,-1/2,-1/2,1/2)).

227. б) $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=1/2(3x^2-1)$,
$P_3(x)=1/2(5x^3-3x)$, $P_4(x)=1/8(35x^4-30x^2+3)$;

в) $P_k(x) = \sum_{j=0,j\geq k/2}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2j-1)}{(k-j)!(2k-j)!2^{k-j}}x^{2j-k}$;

г) $\sqrt{2/(2k+1)}$; д) 1.

228. ((2,-2,-1,0),(1,1,0,-1)). **229.** ((0,1,0,-1),(1,0,-1,0)).

230. $x_2 + x_4 = 0$.

231. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $-18x_1 + x_2 + 18x_3 + 11x_4 = 0$.

232. (1,-1,-1,5),(3,0,-2,-1). **233.** (3,1,-1,-2),(2,1,-1,4).

234. (0,-3/2,3/2,0),(7,-5/2,-5/2,2).

235. 8. **236.** 4. **237.** 12714. **238.** 0. **239.** $\sqrt{4}$. **240.** 2.

241. 1/5. **242.** $\sqrt{3/5}$. **243.** 60^0. **244.** 30^0. **245.** $\arccos\sqrt{k/n}$.

246. Проектирование параллельно оси ординат на биссектрису второй и четвертой четверти.

247. а) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3+2i & 1-i \\ 4-4i & -1-2i \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 25+4i & 40+6i \\ -15-2i & -24-3i \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 13 & 9+8i \\ -9+8i & -11 \end{pmatrix}$.

248. $\begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$. **249.** $\begin{pmatrix} 128 & 313 & 454 \\ 36 & 117 & 145 \\ -61 & -197 & -245 \end{pmatrix}$.

250. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. **251.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. **252.** $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

253. а) $D^* = -D$; б) интегрировать по частям.

254. $diag(1,3)$; $(1/\sqrt{2}(1,-1), 1/\sqrt{2}(1,1))$.

255. $diag(9,18,-9)$; $(1/3(2,2,1), 1/3(2,-1,-2), 1/3(1,-2,2))$.

256. $diag(9,9,27)$; $(1/\sqrt{2}(1,1,0), 1/\sqrt{18}(1,-1,-4), 1/3(2,-1,1))$.

257. $diag(6,6,3)$; $(1/\sqrt{6}(1,-2,1), 1/\sqrt{2}(-1,0,1), 1/\sqrt{3}(1,1,1))$.

258. $diag(1,1,-1)$; $(1/\sqrt{2}(1,0,1), (0,1,0), 1/\sqrt{2}(1,0,-1))$.

259. $diag(1,1,-1,-1)$;

$(1/\sqrt{2}(1,0,0,1),\ 1/\sqrt{2}(0,1,1,0), 1/\sqrt{2}(1,0,0,-1),\ 1/\sqrt{2}(0,1,-1,0))$.

260. $diag(2,2,2,-2)$;
$(1/\sqrt{2}(1,1,0,0),\ 1/2(1,-1,1,1),\ 1/\sqrt{2}(0,0,1,-1),\ 1/2(1,-1,-1,-1))$.

261. $diag(5,-1); (1/\sqrt{3}(1+i,1), 1/\sqrt{6}(1+i,-2))$.

262. $diag(2,4); (1/\sqrt{2}(1,-i), 1/\sqrt{2}(1,i))$.

263. $diag(2,8); (1/\sqrt{6}(2-i,-1), 1/\sqrt{6}(1,2+i))$.

265. $diag(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}); (1/\sqrt{2}(1,i), 1/\sqrt{2}(1,-i))$.

266. $diag(1+i\sqrt{2}, 1-i\sqrt{2}); ((1/\sqrt{4-2\sqrt{2}})(1,-i(1-\sqrt{2})), ((1/\sqrt{4-2\sqrt{2}})(i(1-\sqrt{2},-1))$,

267. $diag(1,i,-i); (1/3(2,-2i,i), 1/3(2,i,-2i), 1/3(-i,2,2))$.

268. $diag(1,1,-1); (1/\sqrt{3}(1,1,1), 1/\sqrt{2}(1,0,-1), 1/\sqrt{6}(1,-2,1))$.

269. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; (1/\sqrt{2}(1,1,0), (0,0,1), 1/\sqrt{2}(1,-1,0))$.

270. $1/2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$;
$(1/\sqrt{3}(1,1,1), 1/\sqrt{6}(2,-1,-1), 1/\sqrt{2}(0,1,-1))$.

271. $1/2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}; (1/\sqrt{2}(1,1,0), 1/\sqrt{2}(1,-1,0), (0,0,1))$.

272. $1/4\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}-1 & -\sqrt{7+4\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{7+4\sqrt{2}} & 2\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$;

$(\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}(1-\sqrt{2},1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}(-2,1-\sqrt{2},\sqrt{2}-1))$.

273. $diag(1,1,1,-1)$;

$(1/2(1,1,1,-1), 1/2(1,1,-1,1), 1/2(1,-1,1,1), 1/2(-1,1,1,1))$.

274. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ o & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

$(1/\sqrt{2}(1,1,0,0), 1/\sqrt{2}(0,0,1,-1), 1/\sqrt{2}(1,-1,0,0), 1/\sqrt{2}(0,0,1,1))$. .

СОДЕРЖАНИЕ