МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры и геометрии

А. Н. ПАНОВ

ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Издательство "Самарский университет"
2005

Печатается по разрешению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

Панов А.Н. Задачи по линейной алгебре и геометрии: Учебное пособие, Самара: Издательство "Самарский университет", 2005, с.38

Данное пособие предназначено для студентов 2 курса специальности "Математика". Набор задач соответствует программе практических занятий по курсу "Линейная алгебра и геометрия "в 3-4 семестрах.

Рецензенты:
д.ф.-м.н., профессор С.П.Мищенко, д.т.н., профессор И.А.Тимбай, к.ф.-м.н., доцент О.Ф.Меньших

§1. Симметрические многочлены

1.1. Выразить через элементарные симметрические многочлены:
a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$;
b) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$;
c) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$;
d) $(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$;
e) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$;
f) $x_1^5x_2^2 + x_1^2x_2^5 + x_1^5x_3^2 + x_1^2x_3^5 + x_2^5x_3^2 + x_2^2x_3^5$.
g) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$.
1.2. Выразить через элементарные симметрические многочлены следующие однородные симметрические многочлены:
a) $x_1^3 + \ldots$; b) $x_1^3x_2 + \ldots$; c) $x_1^4 + \ldots$; d) $x_1^3x_2x_3x_4 + \ldots$.

1.3. Вычислить значение симметрического многочлена от корней уравнения $f(x) = 0$:
a) $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3$, $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$;
b) $x_1^3x_2x_3 + \ldots$, $f(x) = x_1^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1$;
c) $x_1^4x_2 + \ldots$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$;
d) $x_1^3x_2^3 + \ldots$, $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$.
1.4. Найти сумму пятых степеней корней уравнения $x^6 - 4x^5 + 3x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.
1.5. Найти сумму восьмых степеней уравнения $x^4 - x^3 - 1 = 0$.
1.6. Найти сумму десятых степеней уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$.
1.7. Применяя степенные суммы, вычислить дискриминанты следующих многочленов:
a) $x^3 - 2x + 1$; b) $x^3 - x^2 - x - 1$; c) $x^4 - x^2 + x + 1$; d) $x^4 + a$.

§2. Результант и дискриминант

2.1. Вычислить результанты следующих многочленов:
a) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $2x^2 - x - 1$;
b) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $x^2 + x + 3$;
c) $x^3 - x^2 - 1$ и $x^2 + a$.
2.2. При каком λ многочлены имеют общий корень:
a) $x^3 - \lambda x + 2$ и $x^2 + \lambda x + 2$;
b) $x^3 - 2x^2 + x - 2$ и $x^2 - 3x + \lambda$;

c) $x^3 + 2\lambda x^2 + 2x + 1$ и $x^2 - \lambda x - 2$.

2.3. Решить системы уравнений:

a) $\begin{cases} y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0, \\ y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^2 + x^2 - 3x - y = 0, \\ y^2 - 6xy - x^2 + 7x + 11y - 12 = 0. \end{cases}$.

2.4. Используя связь результанта и дискриминанта, вычислить дискриминант многочлена:

a) $x^3 - x^2 - 2x + 1$;

b) $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$;

c) $3x^3 + 3x^2 + 5x + 2$.

2.5. При каком λ многочлен имеет кратные корни:

a) $x^3 - 3x + \lambda$;

b) $x^4 - 4x + \lambda$;

c) $x^3 - 8x^2 + (13 - \lambda)x - (6 + 2\lambda)$.

2.6. Вычислить дискриминант многочлена $x^n + a$.

2.7. Вычислить дискриминант многочлена $x^n + px + q$.

§3. Алгебраические числа и конечные поля

3.1. Пусть x_1, x_2, x_3 корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Найти уравнения, корнями которых являются:

a) $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $x_2 + x_3$; b) x_1^2, x_2^2, x_3^2; c) x_1^3, x_2^3, x_3^3.

3.2. Пусть α корень уравнения $f(x) = 0$. Найти уравнение, корнем которого будет число β, если:

a) $f(x) = x^3 - 3x - 4$ и $\beta = \alpha^2 + \alpha + 1$;

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ и $\beta = \alpha^2 + 1$;

c) $f(x) = x^4 - x - 2$ и $\beta = \alpha^3 - 2$.

3.3. Исключить иррациональность в знаменателе выражений:

$$\text{a) } \frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}; \quad \text{b) } \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 3}; \quad \text{c) } \frac{1}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} - 1}; \quad \text{d) } \frac{1}{\sqrt[3]{25} - 2\sqrt[3]{5} - 1}.$$

3.4. Исключить иррациональность в знаменателе выражений:

a) $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-\alpha+1}$, где $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$;

b) $\frac{\alpha-1}{2\alpha^2+\alpha+1}$, где $\alpha^3 - 2\alpha - 1 = 0$.

3.5. Какие многочлены второй степени неприводимы над полем $\mathbb{F}_2$?

3.6. Составить таблицу умножения в поле $\mathbb{F}_4 = \{a+bj |\ a,b \in \mathbb{F}_2;\ j^2+j+1 = 0\}$.
3.7. Какие многочлены третьей степени неприводимы над полем $\mathbb{F}_3$?
3.8. Найти обратные элементы a) $\frac{1}{j}$, b) $\frac{1}{j^2+j+1}$, c) $\frac{1}{j^2+j}$ в поле $\mathbb{F}_8 = \{a+bj+cj^2 |\ a,b,c \in \mathbb{F}_2;\ j^3+j+1 = 0\}$.
3.9. Доказать, что элемент $k = j + j^2$ в поле $\mathbb{F}_8$ (см. задачу 3.8) удовлетворяет уравнению $x^3 + x^2 + 1 = 0$.
3.10. Найти обратные элементы b) $\frac{1}{k+1}$, b) $\frac{1}{k^2+k+1}$, c) $\frac{1}{k^2+1}$ в поле $\mathbb{F}_8 = \{a+bk+ck^2 |\ a,b,c \in \mathbb{F}_2;\ k^3+k^2+1 = 0\}$.
3.11. Какие многочлены второй степени неприводимы над полем $\mathbb{F}_3$?
3.12. Найти обратные элементы b) $\frac{1}{j}$, b) $\frac{1}{j+5}$, c) $\frac{1}{j+4}$ в поле $\mathbb{F}_9 = \{a+bj |\ a,b \in \mathbb{F}_3;\ j^2+1 = 0\}$.
3.13. Найти все элементы в поле $\mathbb{F}_9$(см.задачу 3.12.), удовлетворяющие уравнению $x^2 + x - 1 = 0$.
3.14. Найти обратные элементы b) $\frac{1}{k+1}$, b) $\frac{1}{k+3}$, c) $\frac{1}{k+2}$ в поле $\mathbb{F}_9 = \{a+bk |\ a,b \in \mathbb{F}_3;\ k^2+k-1 = 0\}$.
3.15. Найти образующие в группе обратимых элементов $\mathbb{F}_9^*$ поля $\mathbb{F}_9 = \{a+bj |\ a,b \in \mathbb{F}_3;\ j^2+1 = 0\}$.
3.16. Сколько неприводимых многочленов четвёртой степени над полем $\mathbb{F}_2$? Построить поле $\mathbb{F}_{16}$ как расширение поля $\mathbb{F}_2$ четвёртой степени.
3.17. Построить поле $\mathbb{F}_{16}$ как расширение поля $\mathbb{F}_4$ второй степени.

§4. λ-матрицы

Следующие λ-матрицы привести элементарными преобразованиями к каноническому виду:

$$\textbf{4.1.}\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \textbf{4.2.}\ \begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}; \quad \textbf{4.3.}\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+5 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{4.4.}\ \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \textbf{4.5.}\ \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2-\lambda & \lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}$$

$$\textbf{4.6.}\ \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

4.7. Выяснить эквивалентны ли следующие λ-матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-2\lambda & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следующие матрицы привести к канонической форме при помощи делителей миноров:

4.8. $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$; **4.9**. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$;

4.10. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$.

4.11. Выяснить подобны ли следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}.$$

§5. Жорданова форма матрицы

Найти жорданову форму матрицы и жорданов базис для следующих матриц:

5.1. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **5.2**. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$. **5.3**. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$. **5.4**. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

5.5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 10 & 5 \\ 2 & -14 & -8 \end{pmatrix}$. **5.6**. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **5.7**. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

5.8. $\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. **5.9**. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. **5.10**. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

5.11. $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 11 & -4 & 3 \\ 6 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. **5.12**. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **5.13**. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 11 & -8 & 3 \\ 9 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

5.14. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -2 & -5 & 13 \\ -1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$. **5.15**. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. **5.16**. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

5.17. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **5.18**. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Найти жорданову форму следующих матриц:

5.19. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **5.20**. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **5.22**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.23. Пусть J нильпотентная жорданова $n \times n$-клетка. Найти жорданову форму для J^2.
5.24. Доказать, что, если 3×3-матрица A нильпотентна, то $A^3 = 0$.
5.25. Пусть J нильпотентная жорданова $n \times n$-клетка. Доказать, что не существует матрицы B такой, что $B^2 = J$.

§6. Функции от матриц

Получить формулу для нахождения $f(A)$ и вычислить A^n и $\exp(tA)$ для следующих матриц:

6.1. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$; **6.2**. $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -27 & -11 \end{pmatrix}$; **6.3**. $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$; **6.4**. $\begin{pmatrix} -16 & 5 \\ -45 & 14 \end{pmatrix}$.

Вычислить следующие функции от матриц:

6.5. $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; **6.6**. $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$;

6.7. $\sin A$, где $A = \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$

Получить формулу для нахождения $f(A)$ и вычислить $\exp(tA)$ для следующих матриц:

$$\textbf{6.8}.\ A=\begin{pmatrix}-2&0&1\\-7&2&-1\\-3&0&2\end{pmatrix};\qquad \textbf{6.9}.\ A=\begin{pmatrix}-2&0&1\\3&0&-2\\-3&1&3\end{pmatrix};$$

$$\textbf{6.10}.\ A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\-2&3&4\end{pmatrix};\qquad \textbf{6.11}.\ A=\begin{pmatrix}3&3&1\\-2&-3&-2\\2&4&3\end{pmatrix};$$

$$\textbf{6.12}.\ A=\begin{pmatrix}3&3&1\\-1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix};\qquad \textbf{6.13}.\ A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}.$$

6.14. Доказать, что для любой комплексной невырожденной матрицы A существует комплексная матрица B такая, что $A=e^B$.

6.15. Доказать, что для следующей вещественной невырожденной матрицы A не существует вещественной матрицы B такой, что $A=e^B$: $a)$ $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $b)$ $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}$.

6.16. Получить формулу для общего члена рекуррентной последовательности $D_n=pD_{n-1}+qD_{n-2}$ через D_1, D_2. Указание: использовать

$$\begin{pmatrix}D_n\\D_{n-1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}D_{n-1}\\D_{n-2}\end{pmatrix},\ \text{где } A=\begin{pmatrix}p&q\\1&0\end{pmatrix}.$$

§7.Билинейные и квадратичные формы

7.1. Найти матрицу билинейной формы в новом базисе, если задана её матрица в старом базисе и матрица перехода

$a)$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, $\overline{e}'_1=\overline{e}_1-\overline{e}_2$, $\overline{e}'_2=\overline{e}_1+\overline{e}_3$, $\overline{e}'_3=\overline{e}_1+\overline{e}_2+\overline{e}_3$.

$b)$ $\begin{pmatrix}0&2&1\\-2&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$, $\overline{e}'_1=\overline{e}_1+2\overline{e}_2-3e_3$, $\overline{e}'_2=\overline{e}_2-\overline{e}_3$, $\overline{e}'_3=-\overline{e}_1+\overline{e}_2-3\overline{e}_3$.

7.2. Пусть билинейная форма $f(x,y)$ задана в некотором базисе матрицей F. Вычислить $f(x,y)$, если

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $x = (1, 0, 3)$, $y = (-1, 2, -4)$.

$b)$ $\begin{pmatrix} i & 1+i & 0 \\ -1+i & 0 & 2-i \\ 2+i & 3-i & -1 \end{pmatrix}$, $x = (1+i, 1-i, 1)$, $y = (-2+i, -i, 3+2i)$.

7.3. Найти симметрическую билинейную форму, ассоциированную с квадратичной формой:
$a)$ $x_1^2 + 2x_2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$,
$b)$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

7.4. Найти симметрическую билинейную форму, ассоциированную с квадратичной формой $f(x, x)$, если
$a)$ $f(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_1 - 5x_2y_3 + x_3y_3$,
$b)$ $f(x, y) = -x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_3$.

Найти нормальный вид в поле вещественных чисел и невырожденное преобразование приводящее к этому виду для следующих квадратичных форм:

7.5. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.
7.6. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
7.7. $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.
7.8. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

Найти все значений λ, для которых следующие квадратичные формы положительно определены:

7.9. $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
7.10. $2x_1 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.
7.11. Доказать, что $f(X, Y) = \mathrm{Tr} XY^t$ – симметрическая положительно определённая билинейная форма на линейном пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$.
7.12. Доказать, что $f(X, Y) = \mathrm{Tr} XY$ – симметрическая билинейная форма на линейном пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Найти положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы $f(X, X)$.

Доказать, что следующие квадратичные формы положительно определены:

7.13. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} x_ix_j$.
7.14. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$.

§8. Евклидовы и унитарные пространства

Проверить что следующие векторы попарно ортогональны и дополнить их до ортогональных базисов:
8.1. $(1,-2,2,-3)$, $(2,-3,2,4)$;   **8.2**. $(1,1,1,-2)$, $(1,2,3,3)$.

Дополнить следующие системы до ортонормированных базисов:
8.3. $(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$;   **8.4**. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис в подпространстве, натянутом на следующие векторы:
8.5. $(1,2,2,-1)$, $(1,1,-5,3)$, $(3,2,8,-7)$.
8.6. $(1,1,-1,-2)$, $(5,8,-2,-3)$, $(3,9,3,8)$.
8.7. $(2,1,3,-1)$, $(7,4,3,-3)$, $(1,1,-6,0)$, $(5,7,7,8)$.

Разложить вектор $\overline{x}$ в виде $\overline{x}=\overline{y}+\overline{z}$, где $\overline{y}$ лежит в под пространстве L, а $\overline{z}$ в ортогональном дополнении к L:
8.8. $\overline{x}=(4,-1,-3,4)$, L натянуто на векторы $\overline{a}_1=(1,1,1,1)$, $\overline{a}_2=(1,2,2,-1)$, $\overline{a}_3=(1,0,0,3)$.
8.9. $\overline{x}=(5,2,-2,2)$, L натянуто на векторы $\overline{a}_1=(2,1,1,-1)$, $\overline{a}_2=(1,1,3,0)$, $\overline{a}_3=(1,2,8,1)$.
8.10. $\overline{x}=(7,-4,-1,2)$, L – пространство решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+2x_3-9x_4=0 \end{cases}$$

§9. Сопряженный оператор

9.1. Пусть $\overline{e}_1,\overline{e}_2$ – ортонормированный базис и линейный оператор ϕ имеет в базисе $\overline{f}_1=\overline{e}_1$, $\overline{f}_2=\overline{e}_1+\overline{e}_2$ матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матриц линейного оператора ϕ^* в том же базисе $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$.
9.2. Линейный оператор ϕ имеет в базисе $\overline{f}_1=(1,2,1)$, $\overline{f}_2=(1,1,2)$, $\overline{f}_3=(1,1,0)$ матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу сопряженного оператора в том же базисе, если координаты векторов базиса даны в некотором ортонормированном базисе.

9.3. Найти матрицу линейного оператора ϕ^* в ортонормированном базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, если оператор ϕ переводит векторы $\overline{a}_1 = (0,0,1)$, $\overline{a}_2 = (0,1,1)$, $\overline{a}_3 = (1,1,1)$ в $\overline{b}_1 = (1,2,1)$, $\overline{b}_2 = (3,1,2)$, $\overline{b}_3 = (7,-1,4)$. Координаты всех векторов даны в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$.

9.4. Найти матрицу сопряженного оператора ϕ^* в $\mathbb{R}^3$ для скалярного произведения $f(\overline{x}, \overline{y})$ и линейного оператора ϕ, заданного матрицей A:

$a)$ $f(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1+5x_2y_2+6x_3y_3+2x_1y_3+2x_3y_1+3x_2y_3+3x_3y_2$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$b)$ $f(\overline{x}, \overline{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

9.5. Даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в унитарном(евклидовом) пространстве. Найти сопряженный оператор к линейному оператору $\phi(\overline{x}) = (\overline{x}, \overline{a})\overline{b}$.

9.6. Найти сопряженный оператор к линейному оператору $\phi(\overline{x}) = [\overline{x}, \overline{a}]$ в пространстве геометрических векторов.

9.7. Пусть xOy декартова система координат на плоскости и ϕ проектирование на ось $0x$ параллельно биссектрисе первой и третьей четверти. Найти сопряженный оператор ϕ^*.

9.8. Путь V пространство вещественных многочленов со скалярным произведением $(f,g) = \sum \frac{1}{i!} a_i b_i$, $f(x) = \sum a_i x^i$ и $g(x) = \sum b_i x^i$. Доказать, что сопряженный оператор к оператору дифференцирования в V совпадает с оператором умножения на x. Найти сопряженный оператор к дифференциальному оператору $\psi(f) = x^3 f''$.

9.9. Пусть V пространство финитных функций на $\mathbb{R}$ (финитная функция – бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторого отрезка) со скалярным произведением $(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$. Найти сопряженный оператор к оператору дифференцирования $D(f) = f'$. Найти сопряженный оператор к дифференциальному оператору $\psi(f) = x^3 f''$.

9.10. Пусть V евклидово пространство вещественных $n \times n$-матриц со скалярным произведением $(X,Y) = \mathrm{Tr} XY^t$ (см. задачу 7.11). Найти сопряженный оператор к оператору умножения $\phi(X) = AX$ на некоторую матрицу A.

§10. Самосопряженные операторы

10.1. Найти диагональную форму и ортонормированный базис из собственных векторов для самосопряженного оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей:

$$a)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -7 \\ -2 & -7 & 1 \end{pmatrix},\quad c)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\sqrt{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad e)\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix},\quad f)\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 13 \end{pmatrix},$$

$$g)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad h)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k)\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix},\quad m)\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix},\quad n)\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}.$$

10.2. a) Доказать, что оператор $\phi(f) = (x^2-1)f'' + 2xf'$ является самосопряженным оператором в евклидовом пространстве вещественных многочленов относительно скалярного произведения $(f,g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$. b) Доказать, что многочлены Лежандра $Q_k(x) = \frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$ составляют ортогональный базис из собственных векторов оператора ϕ. Найти собственные значения для $Q_k(x)$.

§11. Ортогональные и унитарные операторы

11.1. Найти ортонормированный базис из собственный векторов для унитарных операторов, заданных матрицами:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}(\alpha \neq k\pi),\quad \text{b)}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

11.2. Найти каноническую матрицу и канонический канонический базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$\text{a) } \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{f) } \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{g) } \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{h) } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{i) } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

11.3. Доказать. что, a) если A кососимметрическая (т.е. $A^t = -A$) вещественная матрица, то $\exp A$ – ортогональная матрица, b) если B косоэрмитова (т.е. $B^* = -B$) матрица, то $\exp B$ унитарная матрица.

11.4. Доказать, что унитарные(ортогональные) матрицы образуют группу относительно умножения.

11.5. a) Доказать, что для любой ортогональной матрицы R с определителем равным 1 существует кососимметрическая вещественная матрица A такая, что $R = \exp A$. Найти матрицу A для R из задачи 11.2(b).

b) Доказать, что для любой унитарной матрицы U с существует косоэрмитова матрица такая, что $U = \exp B$. Найти матрицу B для U из задачи 11.1(b).

§12. Классификация кривых и поверхностей второго порядка

12.1. Определить тип кривой:
(1) $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$, (2) $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 3 = 0$, (3) $3x^2 - 12x - 6y + 11 = 0$, (4) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$, (5) $4x^2 - y^2 - 16x + 6y + 23 = 0$, (6) $3x^2 + 12x + 16y - 12 = 0$, (7) $9x^2 - 4y^2 + 36x - 16y + 20 = 0$, (8) $x^2 + x - 6 = 0$.

12.2.Линия второго порядка определяется уравнением $x^2-2y+\lambda(y^2-2x) = 0$. Определить тип линии при изменении параметра λ и найти ее расположение относительно данной системы координат.

12.3. Определить тип кривой, найти её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
2) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
3) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;
4) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$;
5)$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$;
6) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;
7) $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$;
8) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
9) $2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$;
10) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.
11) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$;
12) $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = -$;
13) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$;
14) $3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 2 = 0$;
15) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20x + 30y + 16 = 0$.

12.4. Определить тип кривой $x^2+2\alpha xy+y^2 = 1$ в зависимости от значения параметра α.

12.5. Определить вид поверхности и её расположение в пространстве:
1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;
2) $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12y + 44 = 0$;
3) $z^2 = 2xy$;
4) $z = xy$;
5) $x^2 + 2x + 3y + 4z + 5 = 0$.

12.6. Доказать, что каждая из следующих поверхностей является поверхностью вращения, определить тип, написать каноническое уравнение, найти ось вращения:
1) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 8zx - 14x - 4y + 14z + 18 = 0$;
2) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 4yz + 8zx - 6x + 6y + 6z + 10 = 0$;
3) $2xy + 2yz + 2zx + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$;
4) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$;
5) $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xy - 4x - 8y + 3 = 0$;
6) $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 2zx + 10x - 4y + 2z + 4 = 0$;
7) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 1 = 0$;
8) $4xy + yz + 4zx + 4x + 4y + 4z + 3 = 0$.

12.7. Определить вид каждой из следующих поверхностей второго порядка, написать её каноническое уравнение и найти каноническую систему

координат:
1) $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8zx-28x+2y+16z+45=0$;
2) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$;
3) $7x^2+7y^2+16z^2-10xy-8yz-8zx-16x-16y-8z+72=0$;
4) $4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4zx-16x-16y+10z-2=0$;
5) $2x^2-7y^2-4z^2+4xy+20yz-16zx+60x-12y+12z-90=0$;
6) $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$;
7) $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$;
8) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2yz+2zx-4x+6y-2z+3=0$;
9) $x^2+5x^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0$;
10) $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10zx+2x+4y-10z-1=0$;
11) $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+4z=0$.

§13. Движения плоскости и пространства

13.1. Выяснить геометрический смысл следующих движений плоскости:

$$1)\ \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1 \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+2 \end{cases},\quad 2)\ \begin{cases} x'=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+6 \\ y'=-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-12 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-2 \\ y'=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+3 \end{cases},\quad 4)\ \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+1 \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+2 \end{cases}$$

13.2. Записать формулой отражение относительно прямой 1) $x+y-5=0$, 2). $2x+y-2=0$

13.3. Выяснить геометрический смысл следующих движений пространства:

$$1)\ \begin{cases} x'=\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}y+\frac{10}{15}z+7 \\ y'=\frac{2}{15}x+\frac{14}{15}y-\frac{5}{15}z+4 \\ z'=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z+6 \end{cases},\quad 2)\ \begin{cases} x'=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z+1 \\ y'=-\frac{11}{15}x+\frac{10}{15}y+\frac{2}{15}z+2 \\ z'=\frac{2}{15}x+\frac{5}{15}y-\frac{14}{15}z+3 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x'=\frac{6}{7}x-\frac{2}{7}y-\frac{3}{7}z+7 \\ y'=-\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z+14 \\ z'=-\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-7 \end{cases},\quad 4)\ \begin{cases} x'=-\frac{6}{7}x+\frac{2}{7}y+\frac{3}{7}z-7 \\ y'=\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z-14 \\ z'=\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+7 \end{cases},$$

$$5)\begin{cases} x'=-\frac{4}{9}x-\frac{1}{9}y-\frac{8}{9}z+14 \\ y'=-\frac{7}{9}x-\frac{4}{9}y+\frac{4}{9}z+2 \\ z'=\frac{4}{9}x-\frac{8}{9}y-\frac{1}{9}z-5 \end{cases},\quad 6)\ \begin{cases} x'=\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}y+\frac{10}{15}z+2 \\ y'=\frac{2}{15}x+\frac{14}{15}y-\frac{5}{15}z+4 \\ z'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z+6 \end{cases},$$

$$7) \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1 \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 \\ z' = z + 3 \end{cases}, \quad 8) \begin{cases} x' = z + 1 \\ y' = x \\ z' = y \end{cases}, \quad 9) \begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = x \\ z' = y \end{cases}$$

13.4. Найти матрицу преобразования симметрии относительно прямой с направляющим вектором $(2, 2, 1)$, проходящей через начало координат.

13.5. Найти матрицу преобразования симметрии относительно плоскости $2x - 2y + z = 0$.

§14. Аффинные пространства

14.1. Составить уравнения

1) прямой, проходящей через точки $A = (-1, 0, 3, -2)$, $B = (2, 1, 4, 5)$;

2) двумерной плоскости, проходящей через точки $A = (-2, 1, 1, 1)$, $B = (1, 3, -5, 2)$, $C = (0, 1, 1, 4)$;

3) трёхмерной плоскости, проходящей через точки $A = (1, 1, 0, -1)$, $B = (2, -1, 3, 3)$, $C = (1-, 1, 1, 5)$, $D = (0, 0, 3, -1)$.

14.2. Составить уравнение гиперплоскости в четырёхмерном пространстве, проходящей через точку $A = (-1, 2, 3, 5)$ параллельно гиперплоскости $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5 = 0$.

14.3. Составить уравнение прямой в четырёхмерном пространстве, проходящей через точку $A = (-1, 3, 4, 0)$ параллельно прямой $x_1 = 2 + 3t$, $x_2 = -1 + t$, $x_3 = 7t$, $x_4 = 2 - t$.

14.4. Составить уравнения трёхмерной плоскости в пятимерном пространстве, проходящей:

1) через точку $A = (0, 1, -1, 3, 4)$ параллельно трёхмерной плоскости $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0$;

2) через точки $M = (1, 3, 1, 0, 1)$, $N = (0, 0, 1, 1, -1)$ параллельно двумерной плоскости $x_1 + x_2 - 1 = 0$, $x_1 - x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + x_3 - x_5 + 1 = 0$.

14.5. Составить уравнения двумерной плоскости в четырёхмерном пространстве, содержащей

1) точку $A = (-1, 0, 2, 3)$ и прямую $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 3 + 2t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = 3t$;

2) параллельные прямые $x_1 = -1 + 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 0$, $x_4 = -5 - t$ и $x_1 = 3 + 2t$, $x_2 = -4 + t$, $x_3 = 1$, $x_4 = -t$.

14.6. Исследовать расположение прямой и двумерной плоскости в четырёхмерном пространстве, если двумерная плоскость задаётся уравнениями

$x_1 - 2x_3 + 1 = 0$, $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2 = 0$ и прямой:
1) $x_1 = 3 + 2t$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2 + t$, $x_4 = t$;
2) $x_1 = -2 + 3t$, $x_2 = 3 - t$, $x_3 = -1 + 2t$, $x_4 = -4 + 4t$;
3) $x_1 = 6 + t$, $x_2 = 5 - t$, $x_3 = 1 + 2t$, $x_4 = 1 + 3t$;
4) $x_1 = -1 + 2t$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = t$, $x_4 = 1 - t$.

14.7. Найти координаты проекции точки $M = (5, 0, -3, 4)$ четырёхмерного пространства:
1) на гиперплоскость $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$ параллельно прямой $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 3 + 4t$, $x_3 = 3t$, $x_4 = 1 + t$;
2) на двумерную плоскость $x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$, $x_1 + x_2 = x_4$ параллельно двумерной плоскости $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1 - 2x_4 - 3 = 0$.

14.8. Найти ортогональную проекцию точки A на гиперплоскость Γ, где
1) $A = (7, -1, 6, 1)$, $\Gamma:\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$;
2) $A = (1, 2, 8, -2)$, $\Gamma:\ 2x_1 - 2x_3 + x_4 = 11$.

14.9. Найти точку, симметричную точке A относительно гиперплоскости Γ, где
1) $A = (5, 5, 3, 3)$, $\Gamma:\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2 = 0$;
2) $A = (3, 5, -3, 5)$, $\Gamma:\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 2 = 0$.

14.10. Найти ортогональную проекцию точки A на прямую L, где
1) $A = (1, -5, 2, 0)$, L: $x_1 = 4 + t$, $x_2 = 3 + 2t$, $x_3 = -3 - t$, $x_4 = 7 + 3t$;
2) $A = (-2, 1, 4, 2)$, L: $x_1 = -3 + 2t$, $x_2 = 3 - t$, $x_3 = -1 + t$, $x_4 = -3 + t$.

14.11. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую L, где
1) $A = (1, -3, -2, 4)$, L: $x_1 = 4 + 3t$, $x_2 = 2 + t$, $x_3 = 3 + t$, $x_4 = -1 - t$;
2) $A = (1, -3, -1, 3)$, L: $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 1 - 2t$, $x_3 = -1 + 2t$, $x_4 = t$.

14.12. Найти расстояние от точки A до прямой L, где
1) $A = (0, 3, 2, -5)$, L: $x_1 = 1 + t$, $x_2 = -t$, $x_3 = 2 + 2t$, $x_4 = -2 + 2t$;
2) $A = (2, -2, 1, 5)$, L: $x_1 = 3 + t$, $x_2 = -1 + t$, $x_3 = 2 + t$, $x_4 = -t$.

14.13. Найти расстояние от точки A до двумерной плоскости Γ, где:
1) $A = (4, 2, -5, 1)$, $\quad \Gamma$: $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$
2) $A = (2, 4, -4, 2)$, $\quad \Gamma$: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

14.14. Найти расстояние между прямыми L_1 и L_2, где:
1) L_1: $x_1 = 1 + t$, $x_2 = -1$, $x_3 = -t$, $x_4 = -2 + t$, $\quad L_2$: $x_1 = 4 + t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = t$.

2) L_1: $x_1 = 2 + t$, $x_2 = -1 - 2t$, $x_3 = 2 + 2t$, $x_4 = 1 - t$, L_2: $x_1 = 3 - t$, $x_2 = 1 + 2t$, $x_3 = -1 - 2t$, $x_4 = 2 + t$.
14.15. Найти угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и плоскостью Г, где
1) $A = (1, 2, 2, 3)$, $B = (4, 0, 0, 2)$, Г: $x_1 = 1 + t_1$, $x_2 = 2 + t_2$, $x_3 = -t_1 + t_2$, $x_4 = 3$;
2) $A = (0, 1, -1, 0, 1)$, $B = (3, 1, 0, 1, 2)$, Г: $x_1 = t_1 + t_2$, $x_2 = 5$, $x_3 = -t_2$, $x_4 = -t_1 + t_2$, $x_5 = 2 + t_1$;
14.16. Найти расстояние между плоскостями Γ_1 и Γ_2, где Γ_1: $2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$, $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 8$ и Γ_2: $x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2$, $x_1 - x_3 - x_4 = 0$.

§15. Тензоры

15.1. Найти значение $F(v, f)$ тензора $F = e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes (e_1 + 3e_3)$, где $v = e_1 + 5e_2 + 4e_3$, $f = e^1 + e^2 + e^3$.
15.2. Найти значение тензора $A \otimes B - B \otimes A$ от набора $(v_1, \dots, v_5)$, где
1) $A = e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^2 \otimes e^2$, $B = e^1 \otimes e^1 \otimes (e^1 - e^3)$, $v_1 = e_1$, $v_2 = e_1 + e_2$, $v_3 = e_2 + e_3$, $v_4 = v_5 = e_2$;
2) $A = e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1$, все координаты тензора B равны 1 и $v_1 = e_1 + e_2$, $v_2 = e_2 + e_3$, $v_3 = e_3 + e_1$, $v + 4 = v_5 = e_2$.
15.3. Найти значение $F(v, v, v, f, f)$ тензора $F \in T_3^2(V)$, если все координаты тензора F равны 3, $v = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$, $f = e^1 - e^4$.
15.4. Пусть $n = 4$ и $A = e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes e_3 + e^3 \otimes e_4 \in T_1^1(V)$. Найти все такие
a) $f \in V^*$, что $A(v, f) = 0$ для любого $v \in V$;
b) $v \in V$, что $A(v, f) = 0$ для любого $f \in V^*$.
15.5. Найти ранг билинейных функций, представленных тензорами:
1) $(e^1 + e^2) \otimes (e^1 + e^3) - e^1 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^2$;
2) $(e^1 - 2e^3) \otimes (e^1 + 3e^2 - e^4) + (e^1 - 2e^3) \otimes e^4$;
3) $(e^1 + e^3) \otimes (e^2 + e^4) - (e^2 - e^4) \otimes (e^1 - e^3)$.
15.6. Оператор $\phi : V \to V$ представлен тензором $\Phi \in T_1^1(V)$. Вычислить $\phi(v)$, если
1) $\Phi = e^1 \otimes e_3$, $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$;
2) $\Phi = (e^1 + e^2) \otimes (e_3 + e_4)$, $v = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 3e_4$.
15.7. Оператор $\phi : V \to V$ представлен тензором $\Phi \in T_1^1(V)$. Каким тензором представляется оператор ϕ^2, если:
1) $\Phi = (2e^1 - e^3) \otimes (e_1 + e_2)$;
2) $\Phi = e^1 \otimes e_2 + (e^1 + 2e^2) \otimes e_3$.

15.8. Найти координату $\tilde{a}_{123}^{12}$ тензора $A \in T_3^2(V)$, все координаты которого равны 2, в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15.9. Найти координаты
1) $\tilde{a}_{12}^{1}$ тензора $a = e^1 \otimes e^2 \otimes (e_1 + e_2) \in T_2^1(V)$ в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) $\tilde{a}_{1}^{12}$ тензора $a \in T_1^2(V)$, все координаты которого равны 1, в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3) $\tilde{a}_{31}^{12}$ тензора $a = e^2 \otimes e^1 \otimes e_3 \otimes e_1 + e^3 \otimes e^3 \otimes e_1 \otimes e_2 \in T_2^2(V)$ в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

15.10. Найти свёртку тензора
1) $(e_1 + 3e_2 - e_3) \otimes (e^1 - 2e^3 + 3e^4) - (e_1 + e_3) \otimes (e^1 - 3e^3 + e^4)$;
2) $(e_1 + 2e_2 + 3e_3) \otimes (e^1 + e^2 - 2e^3) - (e_1 - e_2 + e_4) \otimes (e^2 - 2e^3 - 3e^4)$;
3) $e_1 \otimes (e^1 + e^2 + e^3 + e^4) + e_2 \otimes (e^1 + 2e^2 + 2^3 + 4e^4) + 2e_3 \otimes (e^1 - e^2 - e^4)$.
15.11. Найти жорданову форму матрицы оператора $\phi \otimes \psi$, если матрицы операторов ϕ и ψ имеют жордановы формы
1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
15.12. Доказать, что 1) $\mathrm{Tr}(\phi \otimes \phi) = (\mathrm{Tr}(\phi))^2$, 2) $\det(\phi \otimes \phi) = (\det \phi)^{2n}$, где $n = \dim V$.
15.13. Вычислить
1) $(e_1 + 2e_2 + 3e_3) \wedge (e_1 - e_2 + 3e_3) + (e_1 - 3e_3) \wedge (2e_1 + 3e_2 + e_3)$;
2) $a \wedge a$, где $a = e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_4$;
3) $(2e_1 + 3e_2 + e_3) \wedge (e_1 + 2e_2 - 3e_3) \wedge (e_1 + 3e_2 + 2e_3)$;
4)$(2e_1 - 3e_2 + 5e_3 + 4e_4) \wedge (-5e_1 + 7e_2 - 9e_3 - 6e_4) \wedge (e_1 - e_2 + 2e_3 + e_4) \wedge (2e_1 + 4e_2 + 7e_3 + 2e_4)$.

15.14. Матрица оператора ϕ в базисе e_1, e_2, e_3 равна

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $\wedge^2\phi$ в базисе $e_1 \wedge e_2$, $e_2 \wedge e_3$, $e_3 \wedge e_1$.

15.15. Найти жорданову форму матрицы оператора $\wedge^2\phi$, если матрица оператора ϕ имеет жорданову форму:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

15.16. Найти плюккеровы координаты подпространства W, если
W натянуто на векторы
1) $(1, 2, 3)$, $(3, 1, -1)$;
2) $(2, 3, -1, 4)$, $(3, 1, -6, 1)$;
3) $(1, 2, -1, 1)$, $(1, 3, 2, 0)$, $(2, 5, 2, -1)$, $(3, 7, 1, 0)$;
W задаётся системой однородных уравнений:
4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;
5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$

15.17. Вычислить значения внешней формы ω от набора векторов:
1) $\omega = e^1 \wedge e^2 + 2e^2 \wedge e^3$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 3, 4)$;
2) $\omega = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + 2e^3 \wedge e^2 \wedge e^4 + e^4 \wedge e^3 \wedge e^1$, $v_1 = (1, 1, 1, 3)$, $v_2 = (1, 2, 2, 4)$, $v_3 = (1, 2, 3, 6)$;

$$3)\ \ \omega = \sum_{1 \le i < j \le 4} e^i \wedge e^j, \quad v_1 = (1, 1, 3, 2), \quad v_2 = (1, 2, 4, 1);$$

4) ω как в 3), $v_1 = (1, 2, 2, -2)$, $v_2 = (1, 4, 3, -5)$;

5) $\omega = \sum\limits_{1 \le i < j < k \le 5} e^i \wedge e^j \wedge e^k$, $v_1 = (1, 1, 1, 2, 4)$, $v_2 = (1, 2, 2, 2, 5)$, $v_3 = (1, 2, 3, 1, 5)$;

6) ω как в 5), $v_1 = (1, 1, 2, 2, 4)$, $v_2 = (1, 2, 4, 3, 7)$, $v_3 = (1, 2, 6, 5, 10)$.

15.18. Вычислить значения дифференциальной формы ω в точке A от набора векторов, касательных к кривым:
1) $\quad \omega = xydx \wedge dy + (x^2 + z^2)dy \wedge dz, \quad A = (1, 1, 1)$

$\overline{r}_1(t) = (1+t, 1+2t, 1+3t), \quad \overline{r}_2 = (2t-1, t^2-3t+3, t^3+7t-7);$

2) $\quad \omega = (x+y)dx \wedge dy + xzdx \wedge dz + yzdy \wedge dz, \quad A = (1, -2, 1),$
$\overline{r}_1(t) = (e^t, e^{2t}-3, e^{-t}), \quad \overline{r}_2 = (2t^2-1, t-3, 2t-1);$

3) $\omega = xyzdx \wedge dy \wedge dz, \quad A = (1, 1, 2),$
$\overline{r}_1(t) = (t, t, t+1), \quad \overline{r}_2 = (t, 3t-2, 3t-1), \overline{r}_3 = (-t^2+2, 3t+4, 2t+4);$

4) $\omega = (x_1+x_2+x_3)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_1x_2x_4dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4, \quad A = (1, 1, 1, 1),$
$\overline{r}_1(t) = (e^t, e^t, e^t, e^{2t}), \quad \overline{r}_2(t) = (e^t, e^{2t}, e^{2t}, e^{2t}), \overline{r}_3 = (t, t^2, 3t-2, t);$

5) $\omega = (x_1-x_3)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (x_2+x_4)dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4, \quad A = (1, -1, -1, -1),$
$\overline{r}_1(t) = (e^t, e^t-2, e^t-2, e^{6t}-2), \quad \overline{r}_2(t) = (t+1, 2t-1, 2t-1, 11t-1),$
$\overline{r}_3 = (t^2-t+1, 2t-3, 3t-4, 14t-15).$

15.19. Вычислить значение формы ω от набора векторных полей:
1) $\omega = yzdx + xzdy + xydz$, $v = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$;
2) $\omega = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz$, $v_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$, $v_2 = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial}{\partial z}$.

15.20. Вычислить коммутаторы следующих векторных полей:
1) $v_1 = \frac{d}{dx}$, $v_2 = x\frac{d}{dx}$, $v_3 = x^2\frac{d}{dx}$;
2) $w_1 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$, $w_2 = y\frac{\partial}{\partial x}$, $w_3 = x\frac{\partial}{\partial y}$.

§16. Задачи по топологии и теории многообразий

Обозначения : $\overline{A}$ - замыкание A, $\mathrm{Int}(A)$ – внутренность A, $\Gamma(A)$ – граница A.

1. Найти $\overline{A}$, $\mathrm{Int}(A)$, $\Gamma(A)$ в $\mathbb{R}_{\text{евкл.}}$, $\mathbb{R}_{\text{дискр.}}$, $\mathbb{R}_{\text{трив.}}$, $\mathbb{R}_{\text{фреше}}$ для следующих подмножеств $(a, b]$, $\mathbb{Z}$, $\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{Z}\}$, $\{1, 2, 3\}$.

2. Доказать, что следующие семейства подмножеств $\mathbb{R}^2$ задают топологию: a) множества симметричные относительно нуля, b) множества симметричные относительно некоторой прямой $\{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$. Найти $\overline{A}$, $\mathrm{Int}(A)$, $\Gamma(A)$ для следующих множеств $\{(0, 0)\}$, $\{(1, 0)\}$, $\{y = x - 2\}$.

3. a) Доказать, что семейство подмножеств $\{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}$ является топологией на $\mathbb{R}$. b)Доказать, что семейство Λ подмножеств $\{[a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}$ не является топологией на $\mathbb{R}$. Какие множества являются открытыми с самой слабой топологии, содержащей Λ.

4. Пусть $X = \mathbb{Z}$ и Λ семейство $\{V_m\}$ подмножеств

$$V_m = \{n \in \mathbb{Z} | \text{ n делится на } 2^m\}.$$

Доказать, что Λ – топология на $\mathbb{R}$. Указать открытые окрестности точек $1, 10, 16$. Найти замыкание, внутренность и границу для a) $\{1\}$, b) $\{1, 2\}$.
5. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $T = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{2\}\}$. Доказать, что T топология на X. Найти замыкание, внутренность и границу для a)$\{1, 3\}$, b) $\{1, 2, 3\}$.}
6. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Lambda = \{X, \{1, 3\}, \{2, 3, 4\}, \}$. Какие множества открыты (замкнуты) в самой слабой топологии T, содержащей Λ. Найти замыкание, внутренность и границу в топологии T для для a)$\{1\}$, b) $\{1, 2, 3\}$.
7. Описать все топологии на двоеточии. Упорядочить их по усилению.
8. Описать все топологии на троеточии. Упорядочить их по усилению.
9. Привести пример множества A на прямой $\mathbb{R}_{\text{евкл.}}$, для которого следующие семь множеств различны $A, \overline{A}, \mathrm{Int}(A), \mathrm{Int}(\overline{A}), \overline{\mathrm{Int}(A)}, \overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}, \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)})$.
10. Привести пример открытых множеств A и B на $\mathbb{R}_{\text{евкл.}}$, для которых $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ попарно различны.
11. Привести пример двух интервалов на прямой $\mathbb{R}_{\text{евкл.}}$, для которых $A \cap \overline{B}$ не содержится в $\overline{A \cap B}$.
12. Показать, что $\Gamma(\overline{A}) \subset \Gamma(A)$ и $\Gamma(\mathrm{Int}(A)) \subset \Gamma(A)$. Привести пример на $\mathbb{R}_{\text{евкл.}}$, когда эти три множества различны.
13. Доказать, что $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$. Привести пример, когда $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}$.
14. Доказать, что $\mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$. Привести пример, когда $\mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B \neq \mathrm{Int}(A \cup B)$.
15. Верно ли, что для всякого семейства подмножеств в топологическом пространстве выполнено

$$a) \ \bigcup \overline{A_\alpha} = \overline{\bigcup A_\alpha}, \quad b) \ \bigcap \mathrm{Int}A_\alpha = \mathrm{Int} \bigcap A_\alpha.$$

16. Доказать эквивалентность метрических топологий с метриками

$$a) \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad b) \ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad c) \ \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|.$$

17. Описать все метризуемые топологии на конечном множестве.
18. Существует ли в $\mathbb{R}_{\text{евкл.}}$, $\mathbb{R}_{\text{дискр.}}$, $\mathbb{R}_{\text{трив.}}$, $\mathbb{R}_{\text{фреше}}$ a) счетное всюду плотное множество, b) счетная база.

19. Пусть p простое число. Обозначим через $\nu(n)$ показатель максимальной степени p, на которую делится n. Положим $\nu(\frac{n}{m}) = \nu(n) - \nu(m)$. Доказать, что любого $\rho > 0$ формула $\|x\| = \rho^{\nu(x)}$ определяет норму на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (p-адическая норма).
20. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Будут ли следующие семейства подмножеств базами топологии в X :

$$a)\ S = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}, \quad b)\ S = \{\{1, 2\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{3, 4\}\}.$$

Дать описание соответствующих топологий. Найти замыкание, внутренность и границу для $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$.
21. Дать описание топологий $a)$ $\mathbb{R}_{\text{евкл.}} \times \mathbb{R}_{\text{евкл.}}$, $b)$ $\mathbb{R}_{\text{евкл.}} \times \mathbb{R}_{\text{дискр.}}$, $c)$ $\mathbb{R}_{\text{фреше}} \times \mathbb{R}_{\text{трив.}}$; d) доказать, что топология $\mathbb{R}_{\text{фреше}} \times \mathbb{R}_{\text{фреше}}$ не совпадает с $\mathbb{R}^2_{\text{зар.}}$.
22. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$ и $T_X = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}\}$, $T_Y = \{\emptyset, Y, \{1\}\}$ топологии на X, Y. Какие множества являются открытыми в $X \times Y$. Найти замыкание и внутренность множества $a)$ $\{(1, 2)\}$, $b)$ $\{(1, 1)\}$, $c)$ $\{(3, 1)\}$.
23. Найти индуцированную топологию с $\mathbb{R}_{\text{евкл.}}$, $\mathbb{R}_{\text{дискр.}}$, $\mathbb{R}_{\text{трив.}}$, $\mathbb{R}_{\text{фреше}}$ на $\mathbb{Z}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $[a, b]$.
24. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $T = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{2\}\}$. Какие множества открыты в индуцированной топологии на $a)$ $A = \{1, 2, 4\}$, $b)$ $A = \{1, 2, 3\}$. Найти замыкание и внутренность для $\{1\}$ и $\{1, 2\}$ в каждом из этих подмножеств.
25. Доказать, что любые два интервала $[a, b]$ и $[c, d]$ на $\mathbb{R}_{\text{евкл.}}$ гомеоморфны.
26. Доказать, что любой интервал (a, b) гомеоморфен $\mathbb{R}$ в евклидовой топологии.
27. Доказать, что (a, b) и $(c, +\infty)$ на $\mathbb{R}_{\text{евкл.}}$ гомеоморфны.
28. Какие из следующих функций $\sin x$, $\mathrm{sgn} x$, $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n$ непрерывны в следующих топологиях a) $\mathbb{R}_{\text{евкл.}} \to \mathbb{R}_{\text{евкл.}}$, b) $\mathbb{R}_{\text{евкл.}} \to \mathbb{R}_{\text{фреше}}$, c) $\mathbb{R}_{\text{фреше}} \to \mathbb{R}_{\text{евкл.}}$, b) $\mathbb{R}_{\text{фреше}} \to \mathbb{R}_{\text{фреше}}$.
29. Доказать, что открытые квадрат и круг гомеоморфны.
30. Доказать, что открытый шар на плоскости и $\mathbb{R}^2_{\text{евкл.}}$ гомеоморфны.
31. Доказать, что $f^{-1}(\overline{A}) \supset \overline{f^{-1}(A)}$ для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ и подмножества $A \subset Y$. Привести пример, когда подмножества различны.

32. Какие из следующих топологических пространств являются отделимыми (компакными, связными) : a)$\mathbb{R}_{\text{евкл.}}$, b) $\mathbb{R}_{\text{дискр.}}$, c) $\mathbb{R}_{\text{дискр.}}$, d) $\mathbb{R}_{\text{дискр.}}$, e) $\mathbb{R}^n_{\text{зар.}}$, f) X={1,2,3,4} с топологией из задачи 5, 6) X={1,2,3,4} с топологий из задачи 6.

33. Какие из перечисленных ниже множеств $\mathbb{R}_{\text{евкл.}}$ и $\mathbb{R}^2_{\text{евкл.}}$ компактны $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, $\{(x, y) | \ x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\{(x, y) | \ x^2 + y^2 \geq 1\}$.

34.Классифицировать все компактные кривые и поверхности второго порядка.

35. Являются ли компактными топологическое пространство из a) задачи 2, b) задачи 3.

36. Доказать что матричная группа a) $\mathbb{O}(n, \mathbb{R})$, b) $\mathbb{U}(n)$ является компактом.

37. Доказать, что матричные группы $\mathbb{GL}(n)$, $\mathbb{SL}(n)$ не являются компактами.

38. Какие из кривых(поверхностей) второго порядка являются связными.

39. Доказать связность окружности, сферы, плоскости, цилиндра, тора, бутылки Клейна.

40.1 Доказать, что матричные группы a)$\mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$, b) $\mathbb{SO}(n, \mathbb{R})$, d) $\mathbb{U}(n)$, e) $\mathbb{SU}(n)$ являются связными. Найти связные компоненты группы $\mathbb{O}(n, \mathbb{R})$.

40.2. Найти связные компоненты групп $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. Указание: воспользоваться разложением $A = UDN$ произвольного элемента $A \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, в котором $U \in \mathbb{O}(n, \mathbb{R})$, D диагональная матрица с положительными элементами и N унипотентная треугольная матрица.

41.3. Доказать, связность матричной группы $\mathbb{SL}(n)$ над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

40.4. Какие из перечисленных матричных групп являются односвязными.

41. Доказать, что отрезок и квадрат не гомеоморфны.

42. Доказать, что S^1, $[a, b]$, $(a, b]$, (a, b) попарно не гомеоморфны.

43. Какие из букв А,Б,В,М,С русского алфавита гомеоморфны.

44. Доказать, что буквы A, P, Q, R латинского алфавита попарно не гомеоморфны.

45. Доказать, что множество $S_{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^n | \ x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 = 1\}$ гомеоморфна $S^{p-1} \times \mathbb{R}^q$ (в евклидовой топологии).

46. Пусть $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{1, 2\}$ и $\phi : X \to Y_{\text{дискр.}}$, для которого $\phi(0) = \phi(1) = 1$, $\phi(2) = 2$. Описать все топологии на X, для которых отображение ϕ непрерывно.

47. X, Y, ϕ из предыдущей задачи, $T_X = \{X, \emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2, \}\}$. Описать все топологии на Y для которых ϕ непрерывно.

48. Доказать, что $\mathbb{R}^n - \{0\}$ гомеоморфно $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ (топология евклидова).

49. Пусть σ циклическая перестановка множества $\Lambda_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Описать все топологии на X, для которых σ непрерывно.

50. Пусть $I^2 = \{(x, y)|\ 0 \le x, y \le 1\}$. Построить факторпространства I^2/R по следующим отношениям эквивалентности a) $R_1 :\ (x, 1) \sim (x, -1)$, b) $R_2 :\ (1, y) \sim (-1, -y)$, c) $R_3 :\ (x, 1) \sim (x, -1), (1, y) \sim (-1, y)$, d) $R_4 :\ (x, 1) \sim (x, -1), (1, y) \sim (-1, -y)$, e) $R_5 :\ (x, 1) \sim (-x, -1), (1, y) \sim (-1, -y)$.

51. Доказать, что $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ гомеоморфно пространству, полученному из круга отождествлением противоположных точек на границе.

52. Какое пространство получится, если стянуть $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ на $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ в точку.

53. Какое пространство получится, если разрезать если $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ по $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$.

54. Описать факторпространства $\mathbb{R}$ по отношению к следующим отношениям эквивалентности a) $x \sim y \ \Leftrightarrow\ x^2 = y^2$, b) $x \sim y \ \Leftrightarrow\ \sin x = \sin y$, c) $x \sim y \ \Leftrightarrow\ x = ay$ для некоторого $a \neq 0$, в) $x \sim y \ \Leftrightarrow\ x = y + n$ для некоторого целого n.

55. Описать факторпространства $\mathbb{R}^2$ по отношению к следующим отношениям эквивалентности a) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \ \Leftrightarrow\ x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$, b) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \ \Leftrightarrow\ x_1^2 = x_2^2,\ y_1^2 = y_2^2$.

56. Описать пространство орбит группы G матриц $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ на плоскости по формуле $\rho(g) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a^{-1}by \\ a^{-1}y \end{pmatrix}$. Доказать, что пространство орбит не отделимо.

57. Найти фундаментальную область и описать факторпространство для a) действия $\rho(n)x = x + n$ группы $G = \mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}$; b) действия $\rho(n)(x, y) = (x+n, y)$ группы $G = \mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}^2$; c) действия $\rho(n)A = S^n(A)$ (где S некоторая скользящая симметрия) группы $G = \mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}^2$; d) действия $\rho(n, m)(x, y) = (x + n, y + m)$ группы $G = \mathbb{Z}^2$ на $\mathbb{R}^2$.

58. Описать пространство орбит на $\mathbb{R}^2$ под действием циклической группы вращений.

59. Описать пространство орбит на $\mathbb{R}^2$ под действием группы симметрий правильного n-угольника.

60. Доказать, что пространство прямых на плоскости гомеоморфно листу Мёбиуса.

61. Построить согласованные системы карт на *a*) $\mathbb{R}^n$, *b*) S^n, *c*) торе, *d*) цилиндре, *e*) листе Мёбиуса.
62. Доказать, что конус $x^2 + y^2 = z^2$ не является топологическим многообразием.
63. Какие из поверхностей второго порядка являются гладкими (т.е. бесконечно дифференцируемыми) многообразиями? Построить системы согласованных карт.
64. Доказать, что группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ являются гладкими многообразиями.
65. Доказать, что группы a) $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, b) $\mathrm{U}(n)$, c) $\mathrm{SU}(n)$ являются гладкими многообразиями. Построить систему согласованных карт. Вычислить размерность.
66. Построить систему согласованных карт на a) проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$, b) многообразии k-мерных подпространств n-мерного пространства (Грассманово многообразие).
67. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xz - yt = 0 \\ yz - xt - zt = 0 \end{cases}$$

определяет гладкое двумерное подмногообразие в $\mathbb{R}^4 - \{(0,0,0,0)\}$.
68. При каком a следующие уравнения определяют двумерные гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$:
1) $x_0^3 + x_2^3 + x_3^3 - a(x_0 + x_1 + x_2)^3 = 0$;
2) $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + ax_0x_1x_2 = 0$.
69. Найти эйлерову характеристику плоского многоугольника, сферы, тора, цилиндра, сферы с g ручками.
70. Найти касательное пространство в заданной точке к сфере, однолостному гиперболоиду.
71. Найти касательное пространство в точке E к группе a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, b) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, c) $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, d) движений плоскости.
72. Вычислить дифференциал следующих отображений:
1) $\phi(g) = g^2$, $\phi : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ в a) произвольной точке $g = g_0$, b) в единице $g = e$;
2) $\phi(g) = g^{-1}$, $\phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ в a) произвольной точке $g = g_0$, b) в единице $g = e$;
3) $\phi(g) = gAg^{-1}$, $\phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ в a) произвольной точке $g = g_0$, b) в единице $g = e$;

4) $\phi(g) = \det(g)$, $\phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ в единице $g = e$.

§17. Ответы

1.1. a) $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$; b) $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$; ; c) $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$; , d) $2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3$; e) $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3$; f) $\sigma_1^3\sigma_2^2 - 2\sigma_1^4\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2^3 + 6\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_2^2\sigma_3 - 7\sigma_1\sigma_3^2$; g) $\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^3$.
1.2 a) $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$; b) $\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2 + 4\sigma_4$; c) $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$; d) $\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2\sigma_4 - \sigma_1\sigma_5 + 6\sigma_6$.
1.3. a) -35; b) 16; c) $\frac{25}{27}$; d) $\frac{35}{27}$.
1.4. $s_5 = 859$. **1.5**. $s_8 = 13$. **1.6**. $s_{10} = 621$.
1.7. a) 5; b) -44; c) -23; d) $256a^3$.

2.1. a)-7; b) 243; c) $a^3 + a^2 - 2a + 1$.
2.2. a) $\lambda = 3$ и $\lambda = -1$; b) $\lambda = 2, 1 \pm 3i$; c) $\lambda = 1, -\frac{5}{2} \pm \frac{7\sqrt{3}}{6}i$.
2.3. a) $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(0, -1)$, $(-2, 1)$; b) $(0, 1)$, $(3, 0)$, $(2, 2)$, $(2, -1)$.
2.4. a) 49, b) -107, c) -843.
2.5. a) $\lambda = \pm 2$; b) $\lambda = 3, -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$; c) $\lambda = 0, -3, 125$.
2.6. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}$.
2.7. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n q^{n-1} + (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (n-1)^{n-1} p^n$.

3.1. a) $x^3 + 2ax^2 + (a^2 + b)x + (ab - c) = 0$; b) $x^3 - (a^2 - 2b)x^2 + (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$; c) $x^3 + (a^3 - 3ab + 3c)x^2 + (b^3 - 3abc + 3c^2)x + c^3 = 0$.
3.2. a) $x^3 - 9x^2 + 9x - 9 = 0$ b) $x^3 - 7x^2 + 3x - 1 = 0$ c) $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0$.
3.3. a) $\frac{7}{15} - \frac{1}{15}\sqrt[3]{2} - \frac{2}{15}\sqrt[3]{4}$; b) $-1 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$; c) $-\frac{11}{46} - \frac{3}{46}\sqrt[3]{5} - \frac{5}{46}\sqrt[3]{25}$.
3.4. a)$-\alpha$; b) $-\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\alpha^2$. **3.5**. $x^2 + x + 1$. **3.7**. $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2 + 1$.
3.8. a) $1 + j^2$; b) j^2; c) $1 + j$. **3.10**. a) k^2 , b)$1 + k^2$; c) $1 + k + k^2$
3.11. $x^2 + 1$, $x^2 + x - 1$, $x^2 - x + 1$. **3.12**.a) $-j$, b)$j + 1$, c) $j - 1$. **3.13**. $1 \pm j$. **3.14**. a) k, b) $k + 1$, c) $-k + 1$. **3.15**. Четыре элемента $\pm 1 \pm j$. .
3.16. $x^4 + x^3 + 1$, $\mathbb{F}_{16} = \{a + bi + ci^2 + di^3 |\ a, b, c, d \in \mathbb{F}_2;\ i^4 + i^3 + 1 = 0\}$.
3.17. $\mathbb{F}_{16} = \{a + bk |\ a, b \in \mathbb{F}_4;\ k^2 + k + j = 0\}$, где $\mathbb{F}_4 = \{a + bj |\ a, b \in \mathbb{F}_2;\ j^2 + j + 1 = 0\}$.

4.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$; **4.2**. $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda-2 \end{pmatrix}$; **4.3**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+5) \end{pmatrix}$;

4.4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **4.5**. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix}$; **4.6**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$;

4.7. Эквивалентны. **4.8**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$; **4.9**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+2\lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$;

4.10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$. **4.11**. Подобны.

5.1. $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (3,1)$, $\overline{f}_2 = (-1,1)$.

5.2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (-4,-4)$, $\overline{f}_2 = (1,0)$.

5.3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (3,9)$, $\overline{f}_2 = (1,0)$.

5.4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (1,4,3)$, $\overline{f}_2 = (1,0,0)$, $\overline{f}_3 = (3,0,1)$.

5.5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (6,6,-8)$, $\overline{f}_2 = (3,1,0)$, $\overline{f}_3 = (2,1,-1)$.

5.6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (2,-2,2)$, $\overline{f}_2 = (1,1,3)$, $\overline{f}_3 = (1,0,0)$.

5.7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (1,2,1)$, $\overline{f}_2 = (1,1,0)$, $\overline{f}_3 = (1,2,2)$.

5.8. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (3,1,1)$, $\overline{f}_2 = (1,0,0)$, $\overline{f}_3 = (5,0,1)$.

5.9. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (3, 7, 5)$, $\overline{f}_2 = (-2, -4, -2)$, $\overline{f}_3 = (1, 1, 0)$.

5.10. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (3, 5, 6)$, $\overline{f}_2 = (2, 1, 0)$, $\overline{f}_3 = (-1, 0, 1)$.

5.11. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (-2, -4, -2)$, $\overline{f}_2 = (5, 11, 6)$, $\overline{f}_3 = (1, 0, 0)$.

5.12. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (1, -3, -2)$, $\overline{f}_2 = (1, 0, 0)$, $\overline{f}_3 = (1, 0, 1)$.

5.13. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (1, 5, 13)$, $\overline{f}_2 = (4, 8, 4)$, $\overline{f}_3 = (1, 0, -1)$.

5.14. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (3, 1, 1)$, $\overline{f}_2 = (0, -2, -1)$, $\overline{f}_3 = (1, 0, 0)$.

5.15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (3, 1, 3, 1)$, $\overline{f}_2 = (0, -2, 0, -1)$, $\overline{f}_3 = (1, 0, 0, 0)$, $\overline{f}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

5.16. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (1, 1, 3, 4)$, $\overline{f}_2 = (1, 0, 0, 0)$, $\overline{f}_3 = (-1, -1, 0, -1)$, $\overline{f}_4 = (0, 1, 0, 0)$.

5.17. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (4, 4, 0, 0)$, $\overline{f}_2 = (1, 0, 0, 0)$, $\overline{f}_3 = (2, 2, 2, 2)$, $\overline{f}_4 = (1, 0, 1, 0)$.

5.18. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (-1, -3, 0, 0)$, $\overline{f}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\overline{f}_3 = (1, -7, 4, 2)$, $\overline{f}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

5.19. $\mathrm{diag}(1, 2, 3, 4)$.

5.20. blok-diag $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

5.21. Если $\alpha = -1$, то blok-diag $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$; если $\alpha \neq -1$, то blok-diag $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right)$.

5.22. Жорданова клетка с числом $\alpha = 1$.

6.1. $A^n = \begin{pmatrix} -2 \cdot 5^n + 3^{n+1} & 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 3^n \\ -3 \cdot 5^n + 3^{n+1} & 3 \cdot 5^n - 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$, $e^{At} = \begin{pmatrix} -2e^{5t} + 3e^{3t} & 2e^{5t} - 2e^{3t} \\ -3e^{5t} + 3e^{3t} & 3e^{5t} - 2e^{3t} \end{pmatrix}$.

6.2. $A^n = (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} 9n - 2 & 3n \\ -27n & -2 - 9n \end{pmatrix}$, $e^{At} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 9t + 1 & 3t \\ -27t & 1 - 9t \end{pmatrix}$.

6.3. $A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 4^n - \frac{1}{2}(-2)^n & \frac{1}{2} \cdot 4^n - \frac{1}{2}(-2)^n \\ -\frac{3}{2} \cdot 4^n + \frac{3}{2}(-2)^n & -\frac{1}{2} \cdot 4^n + \frac{3}{2}(-2)^n \end{pmatrix}$,

$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{3}{2}e^{4t} + \frac{3}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}$.

6.4. $A^n = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} -15n - 1 & 5n \\ -45n & -1 + 15n \end{pmatrix}$, $e^{At} = e^{-t} \begin{pmatrix} -15t + 1 & 5t \\ -45t & 1 + 15t \end{pmatrix}$.

6.5. $\sqrt{A} = \pm\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

6.6. $\sqrt{A} = \pm\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$, $\pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

6.7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.8. $e^{At} = \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{e^{-t}}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

6.9. $e^{At}=\frac{e^t}{4}\begin{pmatrix}-2 & -1+2t & 1+2t\\ 6 & 5-6t & -1-6t\\ -6 & -1+6t & 5+6t\end{pmatrix}+\frac{e^{-t}}{4}\begin{pmatrix}6 & 1 & -1\\ -6 & -1 & 1\\ 6 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

6.10. $e^{At}=e^{2t}\begin{pmatrix}1-t+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2}+2t & t-\frac{t^2}{2}\\ t & 1-t & -t\\ -2t+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2}+3t & 1+2t-\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}$;

6.11. $e^{At}=e^{t}\begin{pmatrix}1+2t & -t^2+3t & -t^2+t\\ -2t & 1-4t+t^2 & t^2-2t\\ 2t & -t^2+4t & 1+2t-t^2\end{pmatrix}$;

6.12. $e^{At}=e^{t}\begin{pmatrix}-1 & -4-t & -t-2\\ 1 & 3+t & 1+t\\ -1 & -t-2 & -t\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

6.13. $e^{At}=\frac{e^t}{3}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}+\frac{e^{-2t}}{3}\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 6 & 4 & -2\\ -6 & -4 & 2\end{pmatrix}$.

7.1. a) $\begin{pmatrix}0 & -6 & -9\\ -2 & 20 & 30\\ -3 & 30 & 45\end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix}11 & 8 & 15\\ 6 & 5 & 12\\ 11 & 10 & 29\end{pmatrix}$.

7.2. a) 43; $b)1-19i$.

7.3. a) $x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2-3x_1y_3-3x_3y_1+2x_2y_3+2x_3y_2-x_3y_3$;
$b)$ $\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3+x_3y_2)$.

7.4. a) $2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1-2x_1y_3-2x_3y_1-\frac{5}{2}x_2y_3-\frac{5}{2}x_3y_2+x_3y_3$;
$b)$ $-2x_2y_2+\frac{3}{2}x_2y_3+\frac{3}{2}x_3y_2-\frac{1}{2}x_1y_3-\frac{1}{2}x_3y_1+2x_3y_3$.

7.5. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$. **7.6**. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. **7.7**. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$. **7.8**. $y_1^2-y_2^2$. **7.9**. $\lambda>2$. **7.10**. $|\lambda|<\sqrt{\frac{5}{3}}$. **7.12**. Положительный индекс инерции $\frac{n(n+1)}{2}$, отрицательный $\frac{n(n-1)}{2}$

8.1. Например: $(2,2,1,0)$, $(5,-2,-6,-1)$.
8.2. Например: $(1,-2,1,0)$, $(25,4,-17,-6)$.
8.3. Один из векторов $\pm(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.
8.4. Например: $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
8.5. $(1,2,2,-1)$, $(2,3,-3,2)$, $(2,-1,-1,-2)$.
8.6. $(1,1,-1,-2)$, $(2,5,1,3)$.
8.7. $(2,1,3,-1)$, $(3,2,-3,-1)$, $(1,5,1,10)$.
8.8. $\overline{y}=(1,-1,-1,5)$, $\overline{z}=(3,0,-2,-1)$.

8.9. $\overline{y} = (3, 1, -1, -2)$, $\overline{z} = (2, 1, -1, 4)$.
8.10. $\overline{y} = (5, -5, -2, -1)$, $\overline{z} = (2, 1, 1, 3)$.

9.1. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. **9.2**. $\begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$. **9.3**. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
9.4. $a)$ $\begin{pmatrix} 128 & 313 & 454 \\ 36 & 117 & 145 \\ -61 & -197 & -245 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.
9.5.$\phi^*(\overline{y}) = (\overline{y}, \overline{b})\overline{a}$. **9.6**. $\phi^*(\overline{x}) = -\phi$.
9.7. ϕ^* –проектирование на биссектрису второй и четвёртой четверти параллельно оси $0y$. **9.8**. $\psi^*(f) = x^2 f'''$.
9.9. $D^*(f) = -f'$, $\psi^*(f) = x^3 f'' + 6x^2 f' + 6xf$.
9.10. $\phi^*(X) = A^t X$.

10.1. a $\mathrm{diag}(7, -3)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)$,
$b)$ $\mathrm{diag}(0, 9, -6)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{18}}(4, -1, 1)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$, $\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$,
$c)$ $\mathrm{diag}(12, -2, -2)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 0, 1)$, $\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}(1, -5, -3)$,
$d)$ $\mathrm{diag}(-1, -4, 4)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2\sqrt{2}, -1, 1)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$, $\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$,
$e)$ $\mathrm{diag}(9, 3, 3)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$,
$f)$ $\mathrm{diag}(15, -3, -3)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{18}}(1, 1, 4)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\overline{f}_3 = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$
$g)$ $\mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0)$, $\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$,
$\overline{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)$,
$h)$ $\mathrm{diag}(3, -1, -1, -1)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$, $\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 1, -2, 0)$,
$\overline{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 1, 1 - 3)$.
$k)$ $\mathrm{diag}(5, -1)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + i, 1)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 + i, -2)$,
$m)$ $\mathrm{diag}(2, 4)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)$,
$n)$ $\mathrm{diag}(2, 8)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 - i, -1)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2 + i)$.
10.2. $k(k + 1)$.

11.1. a) $\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$, $\bar{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\bar{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

b) $\begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(1, -i(1-\sqrt{2})), \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(i(1-\sqrt{2}), -1)$.

11.2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\overline{f}_2 = (0, 0, 1)$, $\overline{f}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1)$, $\overline{f}_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,

c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{\sqrt{11}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{11}}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(-3, 1, -1), \overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{22}}(2, 3, -3)$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} & \sqrt{\frac{7}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{7}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}(1-\sqrt{2}, 1, -1), \overline{f}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
$\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}(-2, \sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2})$.

e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} & \sqrt{\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}} & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}(-1-\sqrt{2}, 1, 1), \overline{f}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,
$\overline{f}_3 = -\frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}(2, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\overline{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\overline{f}_3 = (0, 0, 1)$.

g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{7}}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{7}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{7}})$, $\overline{f}_2 = (0, 1, 0)$, $\overline{f}_3 = (\frac{1}{\sqrt{7}}, 0, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}})$.

h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\overline{f}_2 = (0, 0, 1)$, $\overline{f}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

i) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overline{f}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\overline{f}_2 = (0, 1, 0)$, $\overline{f}_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$.

12.3. 1) Эллипс $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$, $O' = (2, 3)$, $\overline{e}'_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$, $\overline{e}'_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$;
2) гипербола $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$, $O' = (1, 1)$, $\overline{e}'_1 = (\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$, $\overline{e}'_2 = (-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$;
3) парабола $y'^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O' = (3, 2)$, $\overline{e}'_1 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$, $\overline{e}'_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$;
4) пересекающиеся прямые $x - y - 1 = 0$, $x - 4y + 2 = 0$;
5) параллельные прямые $2x - 3y + 1 = 0$, $2x - 3y - 2 = 0$;
6) эллипс $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1$, $O' = (-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$, $\overline{e}'_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $\overline{e}'_2 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$;
7) гипербола $\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{9} = 1$, $O' = (2, -1)$, $\overline{e}'_1 = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$, $\overline{e}'_2 = (-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$;
8) парабола $y'^2 = 4\sqrt{2}x'$, $O' = (2, 1)$, $\overline{e}'_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\overline{e}'_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$;
9)пересекающиеся прямые $2x + 3y - 5 = 0$, $x - 4y + 2 = 0$;
10) параллельные прямые $2x - y + 1 = 0$, $2x - y - 4 = 0$;
11) эллипс $\frac{x'^2}{35/6} + \frac{y'^2}{35/36} = 1$, $O' = (\frac{7}{6}, \frac{1}{3})$, $\overline{e}'_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$, $\overline{e}'_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$;
12) гипербола $\frac{x'^2}{9/8} - \frac{y'^2}{9/5} = 1$, $O' = (0, 1)$, $\overline{e}'_1 = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$, $\overline{e}'_2 = (-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$;
13) парабола $y'^2 = 10x'$, $O' = (-1, 2)$, $\overline{e}'_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, $\overline{e}'_2 = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$;
14) пересекающиеся прямые $x + y - 2 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$;
15) параллельные прямые $2x - 3y - 2 = 0$, $2x - 3y - 8 = 0$;

12.5. 1) круглый цилиндр $(x - 1)^2 + (y + \frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9}$;
2) однополостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{16} - \frac{z'^2}{16} = -1$ с центром $O' = (-4, 0, -6)$, ось вращения параллельна оси Ox,
3) круговой конус $-x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$, угол между образующими и осью конуса равен $\frac{\pi}{4}$, вершина $(0, 0, 0)$,направляющий вектор оси конуса $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$;
4) гиперболический параболоид $x'^2 - y'^2 = 2z'$;
5) параболический цилиндр $x'^2 - 5y' = 0$.

12.6. 1) Однополостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{2/3} + \frac{y'^2}{2/3} - \frac{z'^2}{1/3} = 1$, центр $O' = (1, 1, -1)$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$;
2) параболоид вращения $x'^2 + y'^2 = \frac{2}{3}z$, центр $O' = (1, 0, -1)$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$;
3) двуполостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{1/2} + \frac{y'^2}{1/2} - \frac{z'^2}{1/4} = -1$, центр $O' = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$;
4) эллипсоид вращения $x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{4} = 1$, центр $O' = (1, 1, 1)$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$;

5) двуполостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{1/6}+\frac{y'^2}{1/6}-\frac{z'^2}{1/2}=-1$, центр $O'=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ж
6) круглый цилиндр $x'^2+y'^2=\frac{1}{6}$, линия центров $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$;
7) круглый цилиндр $x'^2+y'^2=\frac{2}{3}$, линия центров $x=y=z$;
8) круговой конус $x'^2+y'^2-2z'^2=0$, центр $O'=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, направляющий вектор оси вращения $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$;

12.7. 1) Параболический цилиндр $y'^2=\frac{4}{3}x'$; $p=\frac{2}{3}$, $O'=(2,1,-1)$, $\overline{e}'_1=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, $\overline{e}'_2=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$, $\overline{e}'_3=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$;
2) эллиптический цилиндр $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=1$; $O'=(0,1,0)$, $\overline{e}'_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\overline{e}'_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$, $\overline{e}'_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$;
3) эллиптический параболоид $\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{2/3}=2z$; $O'=(2,2,1)$, $\overline{e}'_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\overline{e}'_2=(\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},-\frac{4}{3\sqrt{2}})$, $\overline{e}'_3=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$;
4) гиперболический параболоид $x'^2-y'^2=2z$; $O'=(0,0,1)$, $\overline{e}'_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\overline{e}'_2=(\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},-\frac{4}{3\sqrt{2}})$, $\overline{e}'_3=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$;
5) эллиптический параболоид $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=2z$, $O'=(1,2,3)$, $\overline{e}'_1=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $\overline{e}'_2=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, $\overline{e}'_3=(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$;
6) эллипсоид $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}+\frac{z'^2}{2/3}=1$, $O'=(1,2,-1)$, $\overline{e}'_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, $\overline{e}'_2=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$, $\overline{e}'_3=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$;
7) двуполостный гиперболоид $\frac{x'^2}{4/5}+\frac{y'^2}{4/15}-\frac{z'^2}{4/25}=-1$, $O'=(0,2,-\frac{2}{5})$, $\overline{e}'_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\overline{e}'_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\overline{e}'_3=(0,0,1)$;
8) эллиптический параболоид $\frac{x'^2}{\frac{5\sqrt{2}}{4}}+\frac{y'^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2z'$; $O'=(-\frac{1}{40},-\frac{19}{40},\frac{1}{2})$, $\overline{e}'_1=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$, $\overline{e}'_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\overline{e}'_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$;
9) однополостный гиперболоид $\frac{x'^2}{1/3}+\frac{y'^2}{1/6}+\frac{z'^2}{1/2}=1$, $O'=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, $\overline{e}'_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\overline{e}'_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$, $\overline{e}'_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$;
10) гиперболический цилиндр $x'^2-y'^2=\frac{1}{3}$, $O'=(-1,0,0)$, $\overline{e}'_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$; $\overline{e}'_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\overline{e}'_3=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$,
11) эллиптический цилиндр $\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{4/3}=1$, $O'=(-2,-2,0)$, $\overline{e}'_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$; $\overline{e}'_2=(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\overline{e}'_3=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$,

13.1 1)Поворот вокруг точки $(\frac{1}{2}(1-2\sqrt{3}),\frac{1}{2}(\sqrt{3}+2))$ на угол $\frac{\pi}{3}$ против часовой стрелки.
2) Скользящая симметрия вдоль прямой $x+3y+15=0$ с вектором пере-

носа $(9,-3)$.
3)Поворот вокруг точки $(\frac{1}{2}(-2+3\sqrt{3}), \frac{1}{2}(2\sqrt{3}+3))$ на угол $\frac{\pi}{3}$ по часовой стрелке.
2) Скользящая симметрия вдоль прямой $x-\frac{1}{2}=\sqrt{3}(y-1)$ с вектором переноса $\overline{a}=c\overline{v}$, где $\overline{v}=(\sqrt{3},1)$ и $c=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}$.
13.2 1) $x'=-y+5$, $y'=-x+5$; 2) $x'=-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+\frac{8}{5}$, $y'=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{4}{5}$.
13.3. 1) Винтовое движение. Произведение вращение на угол $\arccos\frac{2}{3}$ и переноса вдоль оси вращения $\frac{x-10}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{0}$ на вектор $\overline{a}=(3,6,0)$. Поворот осуществляется против часовой стрелки (с позиции наблюдателя, стоящего вдоль вектора $\overline{a}$). 2) Поворотная симметрия. Произведение отражения относительно плоскости, проходящей через точку $M=(\frac{10}{3},-\frac{2}{3},\frac{5}{3})$ и перпендикулярной вектору $\overline{a}=(1,1,-7)$, и поворота на угол $\arccos\frac{7}{10}$ вокруг оси, проходящей через точку M с направляющим вектором $\overline{a}$, против часовой стрелки.
3) Скользящая симметрия. Произведение симметрии относительно плоскости $x+2y+3z-7=0$ и переноса на вектор $(6,12,-10)$.
4) Винтовое движение. Произведение вращение на угол π и переноса вдоль оси вращения $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-14}{3}$ на вектор $\overline{a}=(-1,-2,-3)$.
5) Поворотная симметрия. Произведение отражения относительно плоскости, проходящей через точку $M=(9,-3,\frac{3}{2})$ и перпендикулярной вектору $\overline{a}=(2,2,1)$, и поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси, проходящей через точку M с направляющим вектором $\overline{a}$, против часовой стрелки.
6) Скользящая симметрия. Произведение симметрии относительно плоскости $2x-y-5z+15=0$ и переноса на вектор $(4,3,1)$.
7) Скользящая симметрия. Произведение симметрии относительно плоскости $2x-4y-5=0$ и переноса на вектор $(0,0,3)$.
8) Винтовое движение. Произведение вращение на угол $\frac{2\pi}{3}$ и переноса вдоль оси вращения $\frac{x-\frac{2}{3}}{1}=\frac{y-\frac{1}{3}}{1}=\frac{z}{1}$ на вектор $\overline{a}=\frac{1}{3}(1,1,1)$. Поворот осуществляется против часовой стрелки (с позиции наблюдателя, стоящего вдоль вектора $\overline{a}$).
9) Поворотная симметрия. Произведение отражения относительно плоскости, проходящей через точку $M=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ и перпендикулярной вектору $\overline{a}=(1,-1,1)$, и поворота на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси, проходящей через точку M с направляющим вектором $\overline{a}$, против часовой стрелки.

13.4. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$. **13.5**. $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

14.1 1) $x_1 = -1+3t$, $x_2 = t$, $x_3 = 3+t$, $x_4 = -2+7t$; 2) $x_1 = -2+3t_1+2t_2$, $x_2 = 1+2t_1$, $x_3 = 1-6t_1$, $x_4 = 1+t_1+3t_2$; 3) $2x_1-32x_2-10x_3-9x_4+21 = 0$. **14.2**. $2x_1+3x_2-4x_3+x_4+3 = 0$. **14.3**. $x_1 = -1+3t$, $x_2 = 3+t$, $x_3 = 4+7t$, $x_4 = -t$. **14.4**. 1) $x_1+2x_2+3x_3-x_4+6 = 0$, $x_1+x_2+x_3+x_4-2x_5+5 = 0$; 2) $x_1-x_3+x_4 = 0$, $5x_1+x_2+4x_3-4x_5-8 = 0$. **14.5**. 1) $5x_1-x_2+7x_3-9 = 0$, $x_3 - x_4 - 3 = 0$; 2) $x_1 - 2x_2 - 12x_3 + 1 = 0$, $x_2 - x_3 + x_4 + 5 = 0$. **14.6**. 1) Параллельны; 2) имеют единственную общую точку $(1, 2, 1, 0)$; 3) скрещиваются; 4) прямая принадлежит плоскости. **14.7**. 1) $(12, -28, -24, -3)$; 2) $(-5, 4, 8, -1)$. **14.8**. 1) $(1, 1, 2, -1)$; 2) $(7, 2, 2, 1)$. **14.9**. 1) $(-3, -7, -1, -5)$, 2) $(5, -1, 5, -5)$. **14.10**. 1) $(1, -3, 0, -2)$, 2) $(1, 1, 1, -1)$. **14.11**. 1) $x_1 = 1 + t$, $x_2 = -3 - t$, $x_3 = -2 - t$, $x_4 = 4 + t$; 2)$x_1 = 1 + t$, $x_2 = -3 + t$, $x_3 = -1 + t$, $x_4 = 3 - t$. **14.12**. 1) 3; 2) $2\sqrt{3}$. **14.13**. 1) 5., 2) 2. **14.14**. 1) $\sqrt{3}$, 2) $\sqrt{5}$. **14.15**. 1)$\arccos\frac{\sqrt{7}}{3}$ 2)$\frac{\pi}{4}$. **14.16**. $\sqrt{6}$

15.1. 21 **15.2**. 1) 1, 2) 4. **15.3**. 0 **15.3**. a) $< e^1 >$, b) $< e_4 >$. **15.5**. 1) 2, 2) 1, 3) 2. **15.6**. 1) e_3, 2) $5e_3 + 5e_4$. **15.7**. 1) $(2e^1 - e^3) \otimes (2e_1 + 2e_2)$; 2) $2e^1 \otimes e_3$. **15.8**. 0. **15.9**. 1) 4, 2) -9, 3) 3. **15.10**. 1) -3, 2) -7, 3) 1. **15.11**. 1) Три жордановы клетки порядка 2 с числами 1,2,3 по диагонали; 2) две жордановы клетки порядка 2 с числом 2 по диагонали; 3) нильпотентная жорданова клетка порядка 6. **15.13**. 1) $18e_2 \wedge e_3 - 7e_3 \wedge e_1$; 2) $2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$; 3) $12e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$; 4) $-9e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$. **15.14**. 1)$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. **15.15**. 1) две жордановы клетки порядков 5 и 1 с числом 1 на диагонали; 2) жорданова клетка порядка 3 с числом 6 по диагонали и три клетки порядка 1 с числами 4,6,9 по диагонали. **15.16**. 1) $c^{12} = -5$, $c^{13} = -5$, $c^{23} = -10$;
2) $c^{12} = -7$, $c^{13} = -3$, $c^{14} = -10$, $c^{23} = -17$, $c^{24} = -1$, $c^{34} = 23$; 3) $c^{123} = 1$, $c^{124} = -2$, $c^{134} = -5$, $c^{234} = -11$; 4) $c^{123} = 1$, $c^{124} = 1$, $c^{134} = 1$, $c^{234} = -1$; 5) $c^{12} = -3$, $c^{13} = -1$, $c^{14} = 3$, $c^{23} = 1$, $c^{24} = 0$, $c^{34} = 1$. **15.17**. 1) -3; 2) -5; 3) -9; 4) -8; 5) 0; 6) 13. **15.18**. 1) 17; 2) 3; 3)-4; 4) 5; 5) -6. **15.19**. 1) $3xyz$; 2) $y(3x - y)$. **15.20**. 1) $[v_1, v_2] = v_1$, $[v_1, v_3] = 2v_2$, $[v_2, v_3] = v_3$; 2) $[w_1, w_2] = -w_2$, $[w_1, w_3] = w_3$, $[w_2, w_3] = -w_1$.

Оглавление