ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра общей и теоретической физики

Е.К. Башкиров

ЗАДАЧИ ПО МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Самара
Издательство «Самарский университет»
2009

УДК 531.2
ББК 22.31
Б33

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. А.В. Горохов

Башкиров £.К.
Б33 **Задачи по молекулярной физике:** учебное пособие / Е.К. Башкиров; Федеральное агентство по образованию. - Самара: Изд-во «Самарский университет», 2009. - 120 с.

В пособии представлен комплект задач и индивидуальных заданий, выполнение которых необходимо для получения зачета и допуска к экзамену по курсу «Термодинамика и молекулярная физика». Задачи классифицированы в соответствии со стандартом специальности «010701 Физика» и разделены на два блока различного уровня сложности. В каждом разделе приведены примеры решения типовых задач. Детальное изложение методики решения, подробный анализ изучаемых физических законов и явлений должны помочь студентам при самостоятельном освоении изучаемого материала.

Предназначено для студентов первого курса физических факультетов классических университетов.

УДК 531.2
ББК 22.31

© Башкиров Е.К., 2009
© Самарский государственный университет, 2009
© Оформление. Издательство «Самарский университет», 2009

СОДЕРЖАНИЕ

1. Законы идеального газа

- Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона)

$$V = vRT,$$

где $v = m/M$ - число молей идеального газа, m - его масса и М - молярная масса.

- Барометрическая формула:

$$p = p_0 \exp(-m_0 gh/kT) = p_0 ex{:}p(-Mgh/RT),$$

где ро ~ давление на высоте $h - 0$, m_0 — масса молекулы.

Задача 1.1. Определить массу воздуха, заключенного в пространстве между оконными рамами площадью $S = 3м^2$ при нормальном атмосферном давлении, если температура воздуха между стеклами меняется линейно от £i = — *10℃* у наружного стекла до *t%* = +20°С у внутреннего. Расстояние между стеклами *I* — 0,25 м.

Решение

Направим ось *x* системы координат перпендикулярно поверхности стекол (рис. 1). Начало отсчета выберем на наружном стекле.

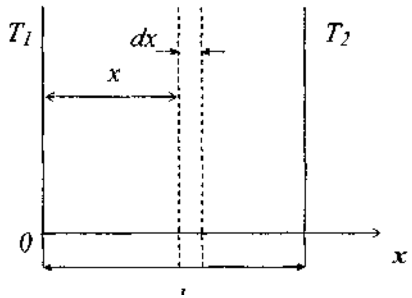


Рис. 1

Разобьем объем газа на бесконечно тонкие слои толщиной *dx,* внутри которых газ находится в состоянии термодинамического равновесия. Каждый слой, находящийся на расстоянии *x* от начала отсчета, характеризуется температурой *T(x),* зависящей от положения слоя. Так как температура линейно меняется с расстоянием *x,* то

$$T(x) = a + bx,$$

где коэффициенты a и b можно найти из условий

$$T_1 = T(0) = a, \quad T_2 = T(l) = a + bl.$$

Тогда

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x.$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона найдем массу газа в слое толщиной dx:

$$dm = \frac{MpdV}{RT(x)} = \frac{MpSdx}{RT(x)},$$

где M – молярная масса воздуха. Интегрируя последнее выражение, найдем полную массу воздуха между рамами

$$m = \frac{MpS}{R} \int_0^l \frac{dx}{T_1 + bx} = \frac{MpS}{bR} \ln \frac{T_1 + b\,l}{T_1}. \tag{1}$$

Подставляя в (1) явный вид коэффициента b, окончательно получаем

$$m = \frac{MpSl}{R(T_2 - T_1)} \ln \frac{T_2}{T_1} = 0,61 \text{ кг}.$$

Задача 1.2. Найти максимально возможную температуру одного моля идеального газа, совершающего процесс $p = p_0 - \alpha V^2$, где p_0, α – положительные постоянные.

Решение

Определим вначале зависимость $T = T(V)$, а затем из условия $dT/dV = 0$ определим $T_{\text{макс}}$. Используя уравнение процесса в газе и уравнение состояния одного моля газа $pV = RT$, получаем

$$T = \frac{1}{R}(p_0 V - \alpha V^3). \tag{2}$$

Тогда из условия

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{R}(p_0 - 3\alpha V^2) = 0$$

находим, что максимуму температуры T соответствует объем $V_{\text{макс}} = \sqrt{p_0/3\alpha}$. Подстановка этого выражения в (2) дает

$$T_{\text{макс}} = \frac{2p_0}{3R}\sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}.$$

Задача 1.3. Высокий цилиндрический сосуд с азотом находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно *д*. Температура азота меняется по высоте так, что его плотность всюду одинакова. Найти градиент температуры dT/dh.

Решение

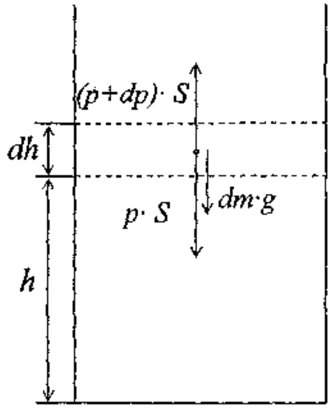


Рис. 2

Рассмотрим бесконечно тонкий слой газа толщиной dh, расположенный на высоте h от основания цилиндра (рис. 2). Пусть p и $p + dp$ - давления газа на нижнее и верхнее основания слоя.

Масса слоя $dm = pSdh$, *где* p - плотность газа и S - площадь основания цилиндра. Из условия равновесия слоя (в проекциях на вертикальную ось) получаем $pSdhg + (p+dp)S = pS$, откуда

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g. \qquad (3)$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона для газа в слое имеем

$$pdV = (dm/M)RT \quad \text{или} \quad p = (\rho/M)RT.$$

Из последнего соотношения получаем

$$dp = (\rho/M)RdT. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), имеем

$$\frac{\rho R}{M}\frac{dT}{dT} = -\rho g,$$

откуда

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{Mg}{R} \simeq -34\ \text{К/км}.$$

Задачи для самостоятельного решения

[A][1]

1.4. Найти эффективную (среднюю) молярную массу сухого атмосферного воздуха, предполагая известным процентный состав воздуха по массе: азот-ni = 75,52 %, кислород *-n-2* = 23,15 %, аргон *-щ* = 1,28 %, углекислый газ - *щ* — 0,05 %.

Ответ: $M = (n_1+n_2+n_3+n_4)/[(n_1/M_1)+(n_2/M_2)+(n_3/M_3)+(n_4/M_4)] \simeq$ $\simeq 29$ г/моль.

1.5. Сосуд объемом *V* — *2* л содержит смесь водорода и гелия при температуре *t* = 20°C и давлении р = 2,0 атм. Масса смеси *m* = 5,0 г. Найти отношение массы водорода к массе гелия.

Ответ: $m_1/m_2 = (1 - a/M_2)/(a/M_1 - 1) = 0,5$, где $a = mRT/pV$.

1.6. Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, если наполняющий его гелий заменить водородом? Весом оболочки пренебречь.

Ответ: $F_{H_2}/F_{He} = 27/25$.

1.7. Газ в цилиндрическом сосуде разделен на две равные части подвижным поршнем, имеющим массу *m* и площадь сечения *S.* При горизонтальном доложении цилиндра давление газа в каждой половине сосуда равно Ро. Определить давление *p* газа над поршнем при вертикальном положении цилиндра. Температуру газа считать постоянной.

Ответ: $p = (1/2)\left[p_0 - (mg/S) + \sqrt{p_0^2 + (mg/S)^2}\right]$.

1.8. Два одинаковых баллона соединены трубкой с клапаном, пропускающим газ из одного баллона в другой при разности давлений Ар > 1,10 атм. Сначала в одном баллоне был вакуум, а в другом - идеальный газ при температуре *ti* = 27°C и давлении *p* = 1, 00 атм. Затем оба баллона нагрели до температуры ^ = Ю7°С. Найти давление газа в баллоне, где был вакуум.

Ответ: $p = (p_1T_2/T_1 - \Delta p)/2 = 10$ кПа.

[1] *Задачи для самостоятельного решения разделены на две группы: А, Б в порядкс возрастания трудности*

1.9. Сосуд объемом $V = 100$ л разделен полупроницаемой перегородкой на две равные части. В начальный момент времени в одной половине сосуда находился водород, масса которого $m_1 = 2$ г, а во второй – 1 моль азота. Определите давление, установившееся по обе стороны перегородки, если она может пропускать только водород. Температура в обеих половинах одинакова и постоянна: $t = 127^0$ C

Ответ: $p_1 = m_1RT/(M_1V) \approx 33$ кПа, $p_2 = (m_1/M_1 + 2)RT/V \simeq 0,1$ МПа.

1.10. Найти максимально возможную температуру идеального газа в процессе $p = p_0e^{-\alpha V}$, где α и p_0 – положительные постоянные.

Ответ: $T_{\text{макс}} = p_0/e\alpha R$.

1.11. Определить наименьшее возможное давление идеального газа в процессе, происходящим по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, где T_0 и α – положительные постоянные, V – объем одного моля газа. Изобразить примерный график процесса в переменных p, V.

Ответ: $p_{\text{мин}} = 2R\sqrt{\alpha T_0}$.

[Б]

1.12. В вертикальном цилиндре под невесомым поршнем находится газ. Поршень удерживается сверху упругой пружиной. Во сколько раз нужно увеличить температуру газа, чтобы объем газа увеличился в 1.5 раза? Если газ из-под поршня полностью откачать, то поршень находится в равновесии у дна цилиндра. Атмосферным давлением пренебречь.

Ответ: $T/T_0 = 2.25$.

1.13. Поршневым воздушным насосом откачивают сосуд объемом V. За один ход поршня насос захватывает объем ΔV. Через сколько ходов поршня давление в сосуде уменьшится в η раз. Процесс считать изотермическим.

Ответ: $n = \ln\eta / \ln(1 + \Delta V/V)$.

1.14. Нижний конец узкой вертикальной трубки длины $2L$ (в мм) запаян, а верхний открыт в атмосферу. В нижней половине трубки находится газ при температуре T_0, а верхняя ее половина заполнена ртутью. До какой минимальной температуры надо нагреть газ в трубке, чтобы он вытеснил . всю ртуть? Внешнее давление в миллиметрах ртутного столба равно L.

Ответ: $T = (9/8)T_0$.

1.15. Допустим, что давление p и плотность p воздуха связаны соотношением p/p^n = const независимо от высоты *(n* - постоянная). Найти соответствующий градиент температуры.

Ответ: *dT/dh* = *-Mд{n* - 1)/(пД).

1.16. Идеальный газ с молярной массой M находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно *д.* Найти давление газа как функцию высоты *h,* если при $h = 0$ давление ро. [a] температура изменяется с высотой как: а) Т = То(1 — *ah),* б) T = То(1 + *ah),* где *а* - положительная постоянная.

Ответ: а)р = p_0*{1 - ah)*^{n}*,h* < 1/а; б) $p = p_0(1 + ah)^n$, $n = Mg/\{aRT_0)$.

2. Первое начало термодинамики

- Первое начало термодинамики для квазистатических процессов в дифференциальной форме:

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где *6* = *pdV* - элементарная работа, совершаемая газом.

- Первое начало термодинамики для квазистатических процессов в интегральной форме:

$$Q = \Delta U + A,$$

где $A = \int^2 pdV$ - работа, совершаемая газом.

- Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = \nu C_V T = \frac{m}{M}\frac{R}{\gamma - 1}T,$$

где 7 = C_p/Cv — показатель адиабаты газа, C_p, *Су* — молярные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно.

- Уравнение адиабатического процесса в переменных р и *V:*

$$pV^\gamma = \text{const}.$$

- **Уравнение политропического процесса в переменных p и V:**

$$\boldsymbol{pV^n = \mathrm{const},}$$

где $n = (C - C_p)/(C - C_V)$ – показатель политропы, C – молярная теплоемкость газа при политропическом процессе ($C = \mathrm{const}$).

- **Связь молярной теплоемкости и показателя политропы для политропического процесса:**

$$\boldsymbol{C = \frac{R}{\gamma - 1} - \frac{R}{n - 1} = \frac{(n - \gamma)R}{(n - 1)(\gamma - 1)}.}$$

Задача 2.1. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p смеси неона и азота. Массовые доли газов соответственно равны $\alpha_1 = 0,8$ и $\alpha_2 = 0,2$.

Решение

Удельная теплоемкость смеси при постоянном объеме равна

$$c_V = \frac{C_V}{m},$$

где m - масса системы и C_V - ее теплоемкость, которую можно представить как

$$C_V = \nu_1 (C_V)_{1,\,\text{мол}} + \nu_2 (C_V)_{2,\,\text{мол}} = \frac{m_1}{M_1}(C_V)_{1,\,\text{мол}} + \frac{m_2}{M_2}(C_V)_{2,\,\text{мол}},$$

где $(C_V)_{i,\,\text{мол}}$ и M_i - молярные теплоемкости и молярные массы компонент смеси ($i = 1, 2$). Выражая массы компонент смеси через массовые доли, используя соотношения

$$\alpha_1 = m_1/m, \qquad \alpha_2 = m_2/m,$$

находим для удельной теплоемкости смеси

$$c_V = \frac{\alpha_1}{M_1}(C_V)_{\text{мол}_1} + \frac{\alpha_2}{M_2}(C_V)_{\text{мол}_2} = \frac{\alpha_1}{M_1}\frac{R}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{M_2}\frac{R}{\gamma_2 - 1}. \qquad (5)$$

Подставляя в формулу (5) исходные и табличные числовые данные для компонент, находим $c_V = 788$ Дж/(кг $\cdot$ К).

Аналогично для удельной теплоемкости смести при постоянном давлении получаем выражение вида

$$c_p = \frac{\alpha_1}{M_1}(C_p)_{\text{мол}_1} + \frac{\alpha_2}{M_2}(C_p)_{\text{мол}_2} = \frac{\alpha_1}{M_1}\frac{R\gamma_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{M_2}\frac{R\gamma_2}{\gamma_2 - 1} = 1038 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Задача 2.2. Азот массой 200 г нагревают от 100 до 200 °C. Найти количество поглощенной газом теплоты и изменение его внутренней энергии в случаях: а) процесс происходит при постоянном объеме, б) при постоянном давлении.

Решение

При постоянном объеме газ, нагреваясь, не совершает работы. Согласно первому началу термодинамики количество поглощенной газом теплоты равно изменению его внутренней энергии, т.е.

$$Q_1 = \Delta U_1 = \nu C_V \Delta T = \frac{m}{M}\frac{R}{\gamma - 1}\Delta T.$$

Подставив данные задачи в это уравнение, найдем Qi = 1,5- 10^4 Дж. Для процесса, протекающего при постоянном давлении,

$$\Delta U_2 = \Delta U_1 = 1,5 \cdot 10^4 \text{ Дж}'$$

и

$$Q_2 = \nu C_p \Delta T = \frac{m}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}\Delta T = 2,1 \cdot 10^4 \text{Дж}.$$

Задача 2.3. Компрессор, предназначенный для сжатия воздуха, использовался для сжатия гелия. При этом компрессор перегрелся. Объясните эффект, полагая процесс сжатия газов адиабатическим и начальные давления воздуха и гелия одинаковыми.

Решение

Воспользуемся уравнением адиабатического процесса для газов в переменных *p, V* и T, *V:*

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma, \qquad TV^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1},$$

где Vo,po,To *uV,p,T-* начальные и конечные значения параметров системы соответственно. Показатель адиабаты для гелия γ_{He} больше показателя адиабаты для воздуха 7воз- Поэтому

$$p_{He} > p_{\text{воз}}, \qquad T_{He} > T_{\text{воз}}.$$

Задача 2.4. Некоторое количество азота нужно сжать от давления $p_1 = 10^5$ Па до давления $p_2 = 2 \cdot 10^5$ Па. При каком сжатии будет затрачена меньшая работа – при адиабатическом или изотермическом?

Решение

Учитывая уравнение состояния газа

$$pV = \nu RT$$

получаем выражение для работы внешних сил при изотермическом сжатии в виде

$$A_1 = -\int\limits_{V_1}^{V_2} pdV = -\nu RT \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1},$$

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа, T – его температура и ν – число молей газа.

Для вычисления работы внешних сил при адиабатическом процессе воспользуемся уравнением адиабатического процесса в переменных p, V (уравнение Пуассона):

$$pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma,$$

откуда $p = p_1 (V_1/V)^\gamma$. Тогда работа внешних сил

$$A_2 = -\int\limits_{V_1}^{V_2} pdV = -p_1 V_1^\gamma \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right].$$

С учетом соотношения

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

формулу для работы при адиабатическом процессе можно представить в виде

$$A_2 = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right].$$

Тогда отношение работ есть

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{(\gamma - 1) \ln \frac{p_2}{p_1}}.$$

Для азота 7 = 1,4. Подставляя числовые данные задачи, получаем *A^/Ax* = — 1,08. Таким образом, работа при изотермическом сжатии меньше, чем при адиабатическом.

Задача 2.5. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону *p — yi.* Какова молярная теплоемкость газа в этом процессе?

Решение

Уравнение Менделеева-Клапейрона для одного моля идеального газа:

$$p = \frac{RT}{V}. \qquad (6)$$

Сравнивая (6) с заданным законом расширения газа, получим

$$\frac{\alpha}{V} = RT \qquad \text{или} \qquad V = \frac{\alpha}{RT}. \qquad (7)$$

Из (7) видно, что при расширении температура газа понижается. Используя определение молярной теплоемкости

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

и явный вид первого начала термодинамики для одного моля идеального газа

$$\delta Q = dU + \delta A = C_V dT + pdV,$$

получаем

$$C = C_V + p\frac{dV}{dT}. \qquad (8)$$

Здесь CV - молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Дифференцируя (7), получаем

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{\alpha}{RT^2}.$$

Подставляя это выражение в (8), окончательно имеем для молярной теплоемкости:

$$C = C_V - p\frac{\alpha}{RT^2} = C_V - \frac{RT}{V}\frac{\alpha}{RT^2} = C_V - \frac{\alpha}{VT} = C_V - R.$$

Полученная величина теплоемкости положительна, следовательно охлаждение газа будет сопровождаться отдачей теплоты, а нагревание - поглощением теплоты.

Задача 2.6. При политропическом процессе давление определенной массы азота уменьшается в 4 раза, а объем увеличивается в 2 раза. В исходном состоянии температура, давление и объем азота соответственно равны To,po и Vo. Определить: а) количество теплоты, отдаваемое азотом в окружающую среду; б)изменение внутренней энергии газа.

Решение

Изменение состояния газа происходит по уравнению политропы PV^n — — const, в котором неизвестен показатель политропы *n*. Определим показатель политропы, исходя из условий задачи:

$$p_0V_0^n = p_1V_1^n = (1/4)p_0(2V_0)^n,$$

откуда получаем:

$$2^n = 4.$$

Следовательно, $n = 2$, и уравнение изучаемого политропического процесса

$$pV^2 = \text{const}.$$

Так как рассматриваемый процесс является политропическим, то молярная теплоемкость есть

$$C = C_V\frac{n-\gamma}{n-1},$$

где $\gamma = C_p/C_V$ и $n = 2$ в нашем случае.

Найдем сначала изменение внутренней энергии в данном процессе:

$$\Delta U = \nu C_V(T_2 - T_1) = \nu\frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_0).$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона, записанного для начального состояния, $P_0V_0 = \nu RT_0$, откуда определим число молей газа

$$\nu = \frac{P_0V_0}{RT_0}.$$

Выразим температуру газа T_1 из уравнения Менделеева-Клапейрона для конечного состояния, используя данные задачи:

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R} = \frac{p_0V_0}{2\nu R} = \frac{1}{2}\,T_0.$$

Тогда
$$\Delta U = \frac{P_0V_0}{RT_0}\frac{R}{\gamma - 1}\left(-\frac{1}{2}T_0\right) = -\frac{P_0V_0}{2(\gamma - 1)}.$$
Количество теплоты, которое отдает азот в окружающую среду,
$$Q = \nu C\Delta T = \nu(C_V - R)\Delta T = -(3/4)\, p_0V_0.$$

Задача 2.7. Найти для идеального газа с показателем адиабаты 7 уравнение такого процесса, при котором молярная теплоемкость газа меняется с температурой по закону $C = a/T$, где a = const.

Решение

Процесс с газом не является политропным. Поэтому найдем уравнение процесса, воспользовавшись первым началом термодинамики в дифференциальной форме
$$\delta Q = dU + pdV.$$
Учитывая $\delta Q = \nu CdT = \nu\alpha dT/T$, $dU = \nu C_V dT$, а также уравнение Менделеева-Клапейрона $p = \nu RT/V$, где ν - число молей, $C_V = R/(\gamma - 1)$ - молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, получаем
$$\nu\frac{\alpha}{T}dT = \nu C_V dT + \nu RT\frac{dV}{V}.$$
Разделим левую и правую часть последнего уравнения на RT и проинтегрируем. В результате получаем
$$-\frac{\alpha}{RT} = \frac{1}{\gamma - 1}\ln T + \ln V + \text{const},$$
откуда находим искомое уравнение процесса:
$$VT^{1/(\gamma-1)}e^{\alpha/(RT)} = \text{const},$$

Задача 2.8. В цилиндре, закрытом с обоих концов и наполненном воздухом, находится поршень, разделяющий пространство в цилиндре на две равные половины. Давление воздуха в обеих половинах сосуда равно ро = 1атм. Поршень отклоняется от положения равновесия на небольшое расстояние и начинает колебаться, причем процесс в газе можно считать адиабатным, Масса поршня равна $m_0 = 2$ кг, длина цилиндра $l = 1$ м, площадь поршня $S = 100$ см^2. Определить период малых колебаний поршня. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь.

Решение

При смещении поршня из положения равновесия возникает равнодействующая сил давления газа, действующих на поршень, которая стремится вернуть поршень в положение равновесия. Проекция этой силы на горизонтальную ось x, перпендикулярную поверхности поршня и направленную по смещению поршня

$$F_X = -(p_1 - p_2)S.$$

Здесь p_1, p_2 - давления газа в двух неравных половинках цилиндра после смещения поршня на расстояние x относительно положения равновесия.

Запишем уравнение движения поршня в проекциях на ось x:

$$m_0\ddot{x} = F_X.$$

Воспользуемся уравнениями адиабатического процесса для воздуха в двух половинках цилиндра

$$p_1V_1^\gamma = p_1(V_0 - \Delta V)^\gamma = p_0V_0^\gamma, \tag{9}$$

$$p_2V_2^\gamma = p_1(V_0 + \Delta V)^\gamma = p_0V_0^\gamma, \tag{10}$$

где $V_0 = Sl/2$ - начальный объем каждой из половинок цилиндра, $\Delta V =$ $= S \cdot x$ - изменение объема для каждой половинки.

Из уравнений (9) и (10) получаем

$$p_1 = p_0\frac{1}{(1 - \Delta V/V_0)^\gamma}, \tag{11}$$

$$p_2 = p_0\frac{1}{(1 + \Delta V/V_0)^\gamma}. \tag{12}$$

Для малых отклонений системы от положения равновесия, когда $\Delta V/V_0 \ll 1$, имеем соотношения

$$\frac{1}{(1 \pm \Delta V/V_0)^\gamma} \approx (1 \mp \gamma\Delta V/V_0).$$

Разность давлений, используя соотношения (11) и (12), можно записать как

$$p_1 - p_2 = 2\gamma p_0 \Delta V/V_0 = 4\gamma p_0 x/l.$$

В результате уравнение движения для поршня принимает вид

$$m_0 \ddot{x} = -4\gamma p_0 S x/l,$$

откуда период колебаний поршня

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 l}{4\gamma p_0 S}} = 0,1\ \text{с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

[A]

2.9. Вычислить показатель адиабаты γ для газовой смеси, состоящей из 2 молей кислорода и 3 молей углекислого газа.

Ответ: 1,33.

2.10. Степень диссоциации α (отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к исходному числу молекул) газообразного водорода равна 0.6. Найти удельную теплоемкость c_V такого частично диссоциировавшего водорода.

Ответ: 11,6 кДж/(кг·К).

2.11. Определить степень диссоциации α газообразного хлора, если показатель адиабаты γ такого частично диссоциировавшего газа равен 1,55.

Ответ: 0,517.

2.12. Баллон с кислородом емкостью $V = 20,0$ л при давлении $p_1 = 100$ атм и температуре $t_1 = 7^0$C нагревается до температуры $t_2 = 27^0$C. Какое количество теплоты при этом поглощает газ?

Ответ: $Q = 5$ кДж.

2.13. В сосуде емкостью $V = 10$ л находится кислород под давлением $p_0 = 1$ атм. Стенки сосуда могут выдержать давление до P_1 =10 атм. Какое максимальное количество теплоты можно сообщить газу?

Ответ: $Q = \frac{V}{\gamma-1}(P_1 - P_0) = 2,27 \cdot 10^4$ Дж.

2.14. При нагревании 1 кг неизвестного газа на 1 К при постоянном давлении требуется 912 Дж, а при нагревании при постоянном объеме требуется 649 Дж. Что это за газ?

Ответ: кислород.

2.15. 1 $м^3$ водорода при 0° С находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легко скользящим невесомым поршнем. Атмосферное давление равно 0,96 -10^5 Па. Определить, какое количество теплоты потребуется для нагревания водорода до 300° С.

Ответ: Q = 2,7 -10^5 Дж.

2.16. Какую работу надо совершить, чтобы, медленно сжимая при помощи поршня газ в цилиндре с хорошо проводящими тепло стенками, увеличить его давление в два раза? Начальное давление газа p\ = 760 мм рт. ст. (атмосферное), начальный объем V\ = 5,0 л. Во время сжатия давление и температура окружающего воздуха остаются постоянными. Весом поршня и трением пренебречь. Сколько тепла выделяется при сжатии газа?

Ответ: A = 100 Дж, Q = - 350 Дж.

2.17. При изотермическом сжатии газа массой $m = 2$ кг, находящегося при температуре $t_1 = 27^0$С под давлением $p_1 = 5 \cdot 10^5$ Па, давление газа увеличивается в 3 раза. Работа сжатия $A = 1,4 \cdot 10^3$ кДж. Какой газ подвергался изотермическому сжатию и каков его первоначальный удельный объем?

Ответ: гелий, $v = V/m = 1,2 м^3/кг$.

2.18. Три моля идеального газа, находившегося при температуре То = = *273K,* изотермически расширили в n = 5 раз и затем изохорически нагрели так, что его давление стало равно первоначальному. За весь процесс газу сообщили Q = 80 кДж тепла. Найти γ для этого газа.

Ответ: $\gamma = 1 + (n - 1)/(Q\nu RT_0 - \ln n) = 1,4$.

2.19. Один моль кислорода, находившийся при температуре T_0 = 290 К адиабатически сжали так, что его давление возросло в n = 10 раз. Найти температуру газа после сжатия. Определить работу, которая была совершена над газом.

Ответ: $T = T_0\eta^{1-1/\gamma} \simeq 560$ К; $A' = RT_0(\eta^{1-1/\gamma} - 1)/(\gamma - 1) \simeq 5,6$ кДж.

2.20. Найти в координатах (V, T) уравнение адиабаты для идеального газа в области температур, в которой теплоемкость газа меняется по закону $C_V = = C_{V_0} + \alpha T^2$, где α – некоторая постоянная.

Ответ: $VT^{C_{V_0}/R}\exp(\alpha T^2/2R) = \mathrm{const}$.

2.21. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону: а)$V = \alpha/p^2$, б) $p = \alpha V$, где α - константа. Какова молярная теплоемкость газа в этих процессах?

Ответ: а) $C = C_V + 2R$, б) $C = C_V + R/2$.

2.22. Первоначальный объем газа равен Vo. Идеальный газ расширяется по закону $p = \beta V$ до объема αV_0 (α, β - некоторые положительные константы). Найти теплоту, поглощенную газом в этом процессе.

Ответ: $Q = (1/2)\beta V_0^2(\alpha^2 - 1)(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$.

2.23. Один моль идеального газа с показателем адиабаты 7 совершает процесс, при котором его давление *p гхТ^а,* где *а* - постоянная. Найти:

а) работу, которую произведет газ, если его температура испытает приращение ДТ; б) молярную теплоемкость газа в это процессе?

Ответ: $A = (1 - \alpha)R\Delta T$, $C = C_V + (1 - \alpha)R$.

[Б1

2.24. Газ массой *m* кг, находящийся под давлением p_1 при температуре $T\backslash$, изотермически расширяется так, что $p_1/p_2 = 4$. Затем,сжимаясь адиабатически и изобарически газ возвращается в первоначальное состояние. Определить работу, совершенную в этом цикле.

Ответ:

$$A = \frac{m}{M}RT_1\left\{\ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{1}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{p_1}{p_2}]^{(\gamma-1)/\gamma}\right] + 1 - \frac{p_1}{p_2}^{(\gamma-1)/\gamma}\right\}.$$

2.25. В теплоизолированном сосуде при температуре 800 К находится 1 моль углекислого газа (COт) и один моль водорода (H_2). Происходит химическая реакция: $CO_2 + H_2 = CO + H_2O + 40.1$ кДж/моль. Во сколько раз возрастет давление в сосуде после окончания реакции?

Ответ: в 2 раза.

2.26. Два моля азота, находившиеся при нормальных условиях (T_0 = = 273 K), сначала изотермически перевели в некоторое состояние, а затем квазистатически и адиабатически - в конечное состояние с объемом вп = 4 раза большим начального. Определить работу, совершенную газом, если в изотермическом процессе ему было сообщено Q = 11,3 кДж теплоты.

Ответ:

$$A = Q + \nu\frac{R}{\gamma - 1}T_0\left[\frac{\exp[Q(\gamma-1)/\nu RT_0]}{n^{\gamma-1}} - 1\right].$$

2.27. В некотором диапазоне параметров политропа вещества, подчиняющегося уравнению состояния идеального газа, описывается уравнением $pT^{(C-R)/R}\exp(-\alpha T^2/R) = \mathrm{const}$. Как ведет себя при этом теплоемкость Су?

Ответ: $C_V = 2\alpha T^2$.

2.28. Идеальный газ сжимается под поршнем в цилиндре так, что уходящее в окружающую среду тепло равно изменению внутренней энергии газа. Определить работу, затраченную на сжатие одного моля газа, при изменении объема в два раза. Чему равна теплоемкость в этом процессе? Начальная температура газа Го.

Ответ: $A = 2C_VT_02^{(\gamma-1)/2}$, $C = -C_V$.

2.29. Найдите теплоемкость системы, состоящей из перекрытого поршнем сосуда с одноатомным газом (параметры газа pojM), То) (рис. 3). Поршень удерживается пружиной. Слева от поршня вакуум. Если газ откачать, то поршень соприкасается с правой стенкой сосуда, а пружина при этом не деформирована. Теплоемкостями сосуда, поршня и пружины пренебречь.

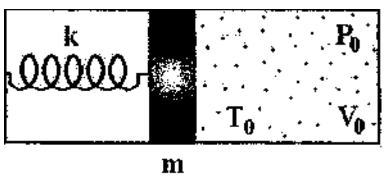


Рис. 3

Ответ: $C = 2P_0V_0/T_0$.

2.30. Найти уравнение процесса (в переменных *T,V),* при котором молярная теплоемкость идеального газа изменяется по закону:

а) $C = C_V + \alpha T$, б) $C = C_V + \beta V$, в) $C = C_V + \gamma p$.

Здесь α, β, γ – постоянные.

Ответ: а) $V \exp(-\alpha T/R) = \mathrm{const}$, б) $T \exp(R/\beta V) = \mathrm{const}$, в)$V - \gamma T = \mathrm{const}$.

2.31. Идеальный газ с показателем адиабаты 7 находится в большом баллоне с объемом *VQ.* В крышку баллона вставлена стеклянная трубка с площадью поперечного сечения *S.* В трубке находится стальной шарик массы *m,* плотно прилегающий к трубке (рис. 4). Трение между трубкой и шариком отсутствует. В положении равновесия давление газа в баллоне немного превосходит атмосферное давление, равное ро- Разность сил давления газа изнутри и атмосферного воздуха снаружи равна весу шарика. При выводе из положения равновесия шар начинает совершать гармонические колебания. Считая процесс, происходящий с газом при колебаниях шарика, адиабатным, найти период колебаний шарика.

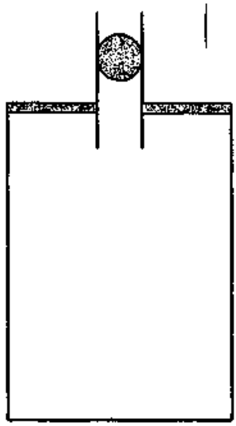


Рис. 4

Ответ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mV_0}{\gamma S^2 (p_0 + mg/S)}}.$$

2.31. В вертикальном цилиндре под невесомым поршнем находится один моль некоторого идеального газа при температуре T. Пространство над поршнем сообщается с атмосферой. Какую работу A' необходимо совершить, чтобы медленно поднимая поршень, изотермически увеличить объем газа под ним в n раз? Трения нет.

Ответ: $A' = RT(n - 1 - \ln n)$.

2.32. Гелий вытекает адиабатически через малое отверстие из замкнутого сосуда в вакуум. Постоянное давление газа в сосуде поддерживается перемещением поршня. При этом температура T газа в сосуде не меняется, а его температура вне сосуда из-за адиабатического расширения снижается практически до О К. Оцените, пользуясь законом сохранения энергии, скорость газовой струи в вакууме.

Ответ: $v = \sqrt{5RT/M}$.

3. Второе начало термодинамики. Тепловые двигатели

- **КПД тепловой машины:**
  $\eta = A/Q_1 = 1 + Q_2/Q_1$,
  где Q_1 – количество тепла, получаемое за цикл рабочим телом ($Q_1 > 0$),
  Q_2 – количества тепла, отдаваемое рабочим телом за цикл ($Q_2 < 0$).

- **КПД цикла Карно:**

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1,$$

  где T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника.

- **Неравенство Клаузиуса:**

$$\int \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

  где δQ – элементарная теплота, полученная телом.

Задача 3.1. Тепловая машина совершает работу $A = 2 \cdot 10^3$ Дж при затрате количества теплоты Qi $= 4 \cdot 10^3$ Дж. Известно, что КПД такой машины составляет 3/4 максимально возможного КПД *$(r)_{max}$*. Определите температуру нагревателя машины T\, если температура холодильника $T_2 =$
$= 273$ K.

Решение

Согласно условию задачи, КПД тепловой машины

$$\eta = (3/4)\eta_{max} = (3/4)\,\frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

По определению,

$$\eta = A/Q_1.$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{(3/4)Q_1 T_1}{(3/4)Q_1 - A} = 819\,\text{K}.$$

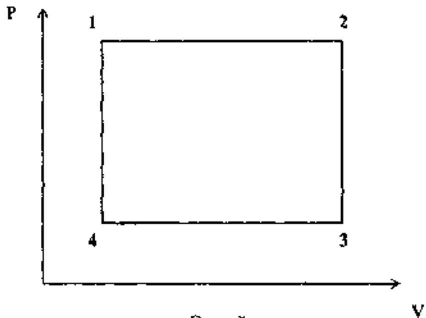


Рис. 5

Задача 3.2. Найти КПД цикла Отто, состоящего из двух изохор и двух адиабат (рис. 5), если температуры в состояниях 2 и 4 соответственно равны T_2 и T_4, а объем в состоянии 2 в $n = 2$ раз больше объема в состоянии 1. Рабочим телом является азот.

Решение

Для вычисления КПД цикла воспользуемся формулой $\eta = A/Q_1$. Работа газа за цикл

$$A = \oint pdV = \int\limits_{(1)}^{(2)} pdV + \int\limits_{(2)}^{(3)} pdV + \int\limits_{(3)}^{(4)} pdV + \int\limits_{(4)}^{(1)} pdV =$$

$$= \int\limits_{(1)}^{(2)} pdV + \int\limits_{(4)}^{(1)} pdV = (p_1 - p_3)(V_2 - V_1).$$

Учитывая уравнения Менделеева-Клапейрона для состояний $1 \div 4$

$$p_i V_i = \nu R T_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

и соотношения $p_2 = p_1$, $p_4 = p_3$, $V_3 = V_2$, $V_4 = V_1$, $V_2/V_1 = n$, для работы за цикл получаем

$$A = (p_1 - p_3)(V_2 - V_1) =$$

$$= p_1 V_2 + p_3 V_1 - p_3 V_2 - p_1 V_1 = p_2 V_2 + p_4 V_4 - n p_4 V_4 - p_2 V_2 / n =$$

$$= \nu \frac{n-1}{n} R T_2 - \nu (n-1) R T_4 = \nu \frac{n-1}{n} R (T_2 - n T_4).$$

Тепло сообщается рабочему телу на участках $1 \to 2$ и $4 \to 1$. Тогда

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{41},$$

где

$$Q_{12} = \nu C_p(T_2 - T_1) = \nu \frac{R\gamma}{\gamma - 1}(T_2 - T_2/n) = \nu \frac{R\gamma}{\gamma - 1} T_2 \frac{n-1}{n},$$

$$Q_{41} = \nu C_V(T_1 - T_4) = \nu \frac{R}{\gamma - 1}(T_2/n - T_4) =$$

$$= \nu \frac{R}{n(\gamma - 1)} \left\{T_2[\gamma(n-1) + 1] - nT_4\right\}.$$

Тогда КПД рассматриваемого цикла

$$\eta = \frac{(n-1)(\gamma-1)(T_2 - nT_4)}{T_2[\gamma(n-1)+1] - nT_4}.$$

КПД цикла при $n = 2$ равен

$$\eta = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

и не зависит от температур T_2 и T_4.

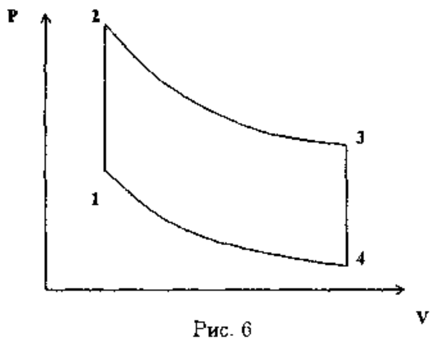


Рис. 6

Задача 3.3. Найти КПД цикла, состоящего из двух изохор и двух адиабат (рис. 6), если в пределах цикла объем идеального газа изменяется в $n = 5$ раз. Рабочим веществом является кислород.

Решение

Для вычисления КПД цикла воспользуемся формулой

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Для рассматриваемого процесса газ получает тепло на участке $1 \to 4$. В изохорическом процессе газ не совершает работы, поэтому

$$Q_1 = Q_{12} = \nu C_V(T_2 - T_1).$$

На изохорическом участке $3 \to 4$ газ отдает тепло, поэтому

$$Q_2 = Q_{34} = \nu C_V(T_4 - T_3).$$

Тогда для КПД получаем

$$\eta = 1 + \frac{T_4 - T_3}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1}.$$

Чтобы найти соотношения между температурами газа, воспользуемся уравнениями адиабатических процессов $2 \to 3$ и $4 \to 1$ в переменных T, V:

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$$

$$T_4 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

Откуда $T_4 = T_1 (V_1/V_4)^{\gamma-1} = T_1 n^{1-\gamma}$ и $T_3 = T_2 (V_2/V_3)^{\gamma-1} = T_2 n^{1-\gamma}$.

Тогда для КПД окончательно получаем

$$\eta = 1 - n^{1-\gamma} = 0,47.$$

Задача 3.4. Определить КПД цикла с идеальным газом, представленным на рис. 7, если $T_1/T_3 = n$.

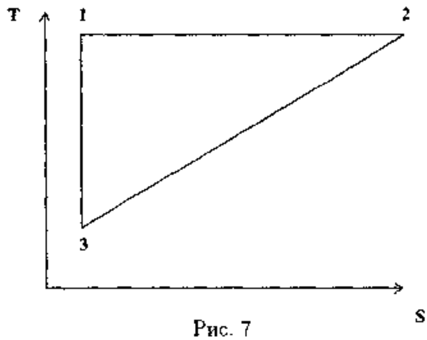


Рис. 7

Решение

Используя второе начало термодинамики, найдем теплоту, получаемую газом на каждом участке цикла:

$$Q_1 = Q_{12} = \int\limits_{(1)}^{(2)} T dS = T_1 (S_2 - S_1) > 0,$$

где мы учли, что $T_1 = T_2$;

$$Q_2 = Q_{23} = \int\limits_{(2)}^{(3)} T dS = \frac{1}{2}(T_1 + T_3)(S_3 - S_2) = -\frac{1}{2}(T_1 + T_3)(S_2 - S_1) > 0,$$

где мы учли, что $S_3 = S_1$;

$$Q_{31} = \int\limits_{(3)}^{(1)} T dS = 0.$$

Тогда КПД цикла есть

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_{23}}{Q_{12}} =$$
$$= 1 - \frac{T_1 + T_3}{2T_1} = \frac{n-1}{2n}.$$

Задача 3.5. Вычислить холодильный коэффициент *e* и отопительный коэффициент $е_{от}$ для тепловой машины, работающей по обратному циклу Карно с температурами нагревателя и холодильника *T* и Тг соответственно.

Решение

Поскольку цикл Карно обратим, его можно провести в обратном направлении. В результате мы получим уже не тепловую машину, а идеальную холодильную машину. Для одного прямого цикла рабочее тело получает от нагревателя с температурой T_1 количество теплоты $Q_1 = |Q_1| > 0$; отдает холодильнику с температурой T_2 количество теплоты $Q_2 = -|Q_2| < 0$; совершает при этом положительную работу $A = |A| = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|$. КПД прямого цикла Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{|A|}{|Q_1|} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

В обратном цикле за счет совершения работы внешними телами *A'* > О (работа самого рабочего тела при этом отрицательна *A* — —*A'* < 0), рабочее тело передает нагревателю более высокой температуры количество теплоты *Qx* < О, а количество теплоты *Qi* > 0 получает от холодильника. Причем, более нагретому телу передается большее количество теплоты, нежели забирается от холодильника. Теплота передается от холодного тела к горячему, поэтому машина и называется холодильной. Такой процесс не противоречит второму началу термодинамики, так как процесс теплопередачи идет не самопроизвольно, а за счет совершения работы внешними телами.

Используя формулы для КПД прямого цикла Карно, количество теплоты, переданное рабочим телом нагревателю за цикл в обратном процессе, можно представить как

$$Q_1 = -|Q_1| = -\frac{|A|}{\eta} = -\frac{A'}{\eta}.$$

C учетом первого начала термодинамики для обратного цикла: $A' = -A = -(Q_1 + Q_2)$, количество теплоты, полученное от холодильника за цикл, можно представить в виде

$$Q_2 = \frac{1-\eta}{\eta} A' > 0.$$

Эффективность холодильной машины определяется отношением $\varepsilon = Q_2/A'$, так как ее назначение - отнимать как можно большее количество теплоты от охлаждаемой системы при совершении как можно меньшей работы. Эта величина называется *холодильным коэффициентом* и может быть представлена для идеальной холодильной машины как

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{A'} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Холодильный коэффициент может быть больше единицы. Для реальных холодильников он больше трех.

Холодильная машина может быть также использована в качестве теплового насоса. Насос дополнительно передает тепло от тела с меньшей температурой к телу с большей температурой. При использовании теплового насоса практический интерес представляет количество теплоты Q_1, получаемое нагреваемым телом, а не количество теплоты Q_2, забираемое от холодного тела. Поэтому характеристикой теплового насоса является так называемый *отопительный коэффициент*: $\varepsilon = |Q_1|/A'$.

Для идеальной машины имеем

$$\varepsilon = \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

Так как $T_1 > T_2$, то отопительный коэффициент всегда больше единицы.

Задача 3.6. Здание с температурой T нагревается с помощью идеального теплового насоса, имеющего постоянную мощность W. В качестве источника тепла используется окружающий воздух с температурой T_0. Мощность потерь тепла из здания описывается законом Ньютона $q_{пот} = a(T - T_0)$, где a - известная константа. Найти равновесную температуру здания T_p.

Решение

Согласно решению предыдущей задачи, для мощности теплового потока в здание $q = d|Q_1|/dt$ от идеального теплового насоса получаем

$$q = W\varepsilon = \frac{T}{T - T_0}W = \frac{W}{1 - T_0/T}.$$

В состоянии равновесия $T_{\text{p}} = T$ и $q = q_{\text{пот}}$. Тогда

$$T_{\text{p}} = T_0 + (W/\alpha)\left[1 + (1 + 4\alpha T_0/W)^{1/2}\right].$$

Задача 3.7. Какую максимальную работу может произвести тепловая машина, если в качестве нагревателя используется кусок железа массой m = 0,1 кг с начальной температурой $T_1 = 1000$ K, а в качестве холодильника - вода океана с температурой $T_0 = 300$ K.

Решение

Из теоремы Карно следует, что при фиксированном количестве теплоты, отобранной от нагревателя, работа, совершенная рабочим телом за цикл, будет максимальной для обратимого цикла Карно и при этом не будет зависеть от выбора рабочего тела. Поэтому для совершения максимальной работы представим процесс функционирования нашей тепловой машины в виде большой совокупности элементарных циклов Карно с произвольным рабочим телом. За каждый элементарный цикл рабочее тело совершает работу

$$\delta A_{max} = \eta\delta Q = \frac{T - T_0}{T}\delta Q.$$

Здесь $\delta Q = -cmdT$ - количество теплоты, полученное за элементарный цикл от куска железа, где T и $dT < 0$ - температура куска железа в начале элементарного цикла и ее изменение за цикл соответственно, с - удельная теплоемкость железа. Минус в формуле выбран для согласования знаков элементарной теплоты $5Q$ (положительная величина) и изменения температуры железа dT (отрицательная величина). Тогда

$$A_{max} = \int \delta A_{max} = -cm\int\limits_{T_1}^{T_0}\left(1 - \frac{T_0}{T}\right)dT = cm\left[T_1 - T_0 - T_0\ln\frac{T_0}{T_1}\right].$$

Задачи для самостоятельного решения

[А]

3.8. Идеальный газ совершает цикл Карно. Работа газа при изотермическом расширении равна 5 Дж. Определить работу газа при изотермическом сжатии, если КПД цикла равен 0,2.

Ответ: 4 Дж.

3.9. У тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, температура нагревателя в n ~ 5 раз больше температуры холодильника. За один цикл тепловая машина производит работу A= 200 Дж. Найти работу газа при изотермическом расширении A_1 и сжатии A_2.

Ответ: $A_1 = 250$ Дж, $A_2 = 50$ Дж.

3.10. Наименьший объем газа, совершающего цикл Карно, равен 153 л. Определить наибольший объем, если объем в конце изотермического расширения и объем газа в конце изотермического сжатия равны соответственно 600 и 189 л.

Ответ: 740 л.

3.11. Три моля азота совершают цикл Карно. Температура нагревателя 200 К. Найти КПД цикла, если при адиабатическом сжатии внешние силы совершают работу A = 100 Дж.

Ответ: $\eta = A(\gamma - 1)/(\nu T_1)$.

3.12. Найти КПД цикла Джоуля, состоящего из двух изобар и двух адиабат, если в пределах цикла давление идеального газа изменяется в n = 5 раз. Рабочим телом цикла является азот.

Ответ: $\eta = 1 - n^{-(\gamma-1)/\gamma} = 0,37$.

3.13. Найти КПД цикла, состоящего из:

а) изохоры, адиабаты и изотермы;

б) изобары адиабаты и изотермы,

причем изотермический процесс происходит при минимальной температуре Цикла, а температура идеального газа в пределах цикла изменяется в п = 5 раз. Рабочим телом цикла является аргон.

Ответ: В обоих случаях $\eta = 1 - \ln n/(n-1) = 0,6$.

3.14. Решить предыдущую задачу для случая, когда изотермический процесс происходит при максимальной температуре цикла.

Ответ: В обоих случаях $\eta = 1 - (n-1)/n \ln n = 0,5$.

3.15. *Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает цикл, состоящий* из адиабаты, изобары и изохоры. Найти КПД такого цикла, если при адиабатическом процессе объем газа увеличивается в n раз.

Ответ: $\eta = 1 - \gamma(n-1)\ln n/(n^\gamma - 1)$.

3.16. КПД тепловой машины работающей по прямому циклу Карно равен 0,25. Чему будет равен холодильный коэффициент машины ε, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении?

Ответ: $\varepsilon = 3$.

[Б]

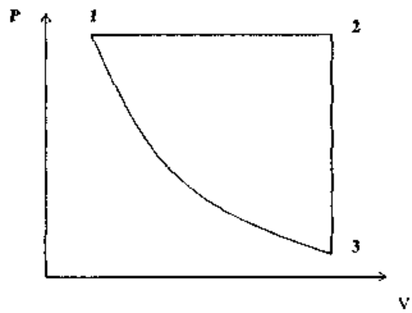


Рис. 8

3.17. Найти КПД цикла для идеального газа с показателем адиабаты γ, представленного на *рис. 8*: а) 3 → 1 – изотермический переход и заданы температуры T_1, T_2; б) 3 → 1 – адиабатический переход и заданы температуры T_1, T_2 и T_3.

Ответ:
а)$\eta = \frac{\gamma-1}{\gamma}\left[1 - \frac{T_1\ln(T_2/T_1)}{T_2-T_1}\right]$;
б)$\eta = \frac{1}{\gamma}\left[\gamma - 1 - \frac{T_1-T_3}{T_2-T_1}\right]$.

3.18. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермы, политропы и адиабаты, причем изотермический процесс происходит при максимальной температуре цикла. Найти КПД такого цикла, если температура газа в его пределах изменяется в n раз.

Ответ: В обоих случаях $\eta = 1 - (n-1)/n \ln n$.

3.19. Двухтактным тепловым двигателем в течение первого такта при температуре T_1 поглощается количество теплоты Q_1; рабочим телом производится работа A_1 и отдается холодильнику количество теплоты Q_2 при температуре T_2. За второй такт поглощается тепло, отданное в первом такте, производится работа A_2 и удаляется некоторое количество теплоты при температуре холодильника T_3. Докажите, что КПД двухтактного двигателя равен: $\eta = (T_1 - T_3)/T_1$

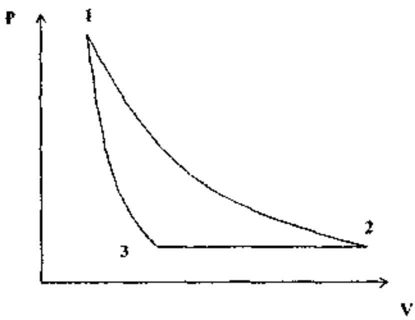


Рис. 9

3.20. Найти КПД цикла для идеального газа с показателем адиабаты γ, представленного на *рис. 9: 1 → 2 – изотермический* переход, 3 → 1 – адиабатический переход. Заданы температуры T_1, T_3 и давления p_1, p_2.

Ответ:

$$\eta = 1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) \frac{1 - T_3/T_1}{\ln(p_1/p_2)}.$$

3.21. Найти КПД цикла для идеального газа с показателем адиабаты γ, представленного на рис. 10: 2 → 3 и 4 → 1 – изотермические переходы. Заданы T_1, T_2, $V_3/V_2 = 2$, $p_1/p_4 = 4$.

Ответ:

$$\eta = 1 - \frac{T_2 - T_1 + (\gamma - 1)2T_1 \ln 2}{T_2 - T_1 + (\gamma - 1)T_2 \ln 2}.$$

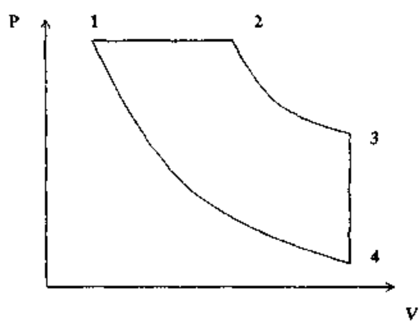


Рис. 10

3.22. Идеальная холодильная машина используется для замораживания *воды при 0^0 С. В качестве нагревателя используется окружающий воздух с* температурой 20^0 С. Какова минимальная работа, необходимая для замерзания 3 кг воды.

Ответ: $A = 7,3 \cdot 10^4$ Дж.

3.23. С помощью электрической плитки мощностью 1 кВт в комнате поддерживается температура 17 ^{0}C при температуре наружного воздуха -23^{0}C. Какая мощность потребовалась бы для поддержания в комнате той же температуры с помощью идеальной тепловой машины?

Ответ: $N = 138$ Вт.

3.24. Какую минимальную работу нужно затратить для того, чтобы заморозить 1 кг воды, находящейся при температуре окружающей среды 300 К?

Ответ: $A_{\text{мин}} = 46$ кДж.

4. Вычисление энтропии

- Второе начало термодинамики для обратимых процессов в дифференциальной форме:

$$dS = \delta Q/T,$$

где dS – приращение энтропии системы.

- Второе начало термодинамики для необратимых процессов в дифференциальной форме:

$$dS > \delta Q/T.$$

- Основное уравнение термодинамики для обратимых процессов:

$$TdS = dU + pdV.$$

Задача 4.1. Найти изменение энтропии при нагревании льда массой $m = 1$ кг от температуры $t_1 = -20^0$ C до температуры $t_1 = 0^0$ C и последующим превращением льда в воду, а затем нагревании воды до температуры $t_3 = 100^0$ C и последующим превращением воды в пар той же температуры.

Решение

Найдем вначале отдельно изменение энтропии ΔS_1 при нагревании льда, ΔS_2 при превращении воды в лед, ΔS_3 при нагревании воды и ΔS_4 при превращении воды в пар. Будем считать, что система обратимым образом переходит из некоторого равновесного начального состояния 1 в конечное состояние 2. Тогда изменение энтропии выражается общей формулой

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T}. \qquad (13)$$

При бесконечно малом изменении dT температуры нагреваемого тела затрачивается количество теплоты $\delta Q = cmdT$, где m – масса тела и c – его удельная теплоемкость.

Приращения энтропии при нагревании льда и воды можно представить в виде:

$$\Delta S_1 = \int\limits_{(T_2)}^{(T_1)} \frac{c_л m dT}{T} = c_л m \ln\frac{T_2}{T_1},$$

$$\Delta S_3 = \int\limits_{(T_3)}^{(T_2)} \frac{c_в m dT}{T} = c_в m \ln\frac{T_3}{T_2}.$$

При вычислении изменения энтропии во время превращения льда в воду и воды в пар по формуле (13) постоянная температура T может быть вынесена за знак интеграла. Тогда

$$\Delta S_2 = \frac{1}{T_2}\int \delta Q = \frac{m\lambda}{T_2},$$

$$\Delta S_4 = \frac{1}{T_3}\int \delta Q = \frac{mL}{T_3},$$

где λ – удельная теплота плавления льда при температуре T_2 и L – удельная теплота парообразования воды при температуре T_3.

Окончательно для приращения энтропии получаем

$$\Delta S = m\left[c_л \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + c_в \ln\frac{T_3}{T_2} + \frac{L}{T_3}\right] = 8,5 \cdot 10^3 \text{ Дж/К}.$$

Задача 4.2. Азот массой 200 г нагревают от температуры 200 К до температуры 400 К. Найти изменение энтропии газа, если известно, что начальное и конечное давление газа одинаковы.

Решение

Получим общие формулы, определяющие приращение энтропии идеального газа в различных переменных. Воспользуемся для этого основным уравнением термодинамики для обратимых процессов

$$TdS = dU + pdV,$$

откуда приращение энтропии при переходе идеального газа из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2 есть

$$\Delta S = \int_{(1)}^{(2)} \frac{dU}{T} + \int_{(1)}^{(2)} \frac{pdV}{T}.$$

Используя явный вид калорического

$$U = \nu C_V T$$

и термического уравнений (уравнения Менделеева-Клапейрона)

$$p = \nu RT/V$$

для идеального газа, приращение энтропии можно представить в виде

$$\Delta S = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\nu C_V dT}{T} + \int_{(1)}^{(2)} \frac{\nu R dV}{V},$$

или

$$\Delta S = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (14)$$

Используя термическое уравнение идеального газа и соотношение Майера для молярных теплоемкостей $C_p = C_V + R$, формулу для приращения энтропии можно также переписать как

$$\Delta S = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \nu R \ln \frac{p_2}{p_1} \qquad (15)$$

и

$$\Delta S = \nu C_p \ln \frac{V_2}{V_1} + \nu C_V \ln \frac{p_2}{p_1}. \qquad (16)$$

Из формулы (15) получаем для приращения энтропии

$$\Delta S = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1},$$

где M – молярная масса азота и γ – его показатель адиабаты. Подставляя числовые значения, получаем $\Delta S = 144$ Дж/К.

Задача 4.3. Два тела с одинаковыми теплоемкостями C и температурами T_1 и T_2 образуют изолированную систему. Какова будет конечная температура этой системы, если предоставить ей возможность перейти в равновесное состояние обратимым образом? Какую максимальную работу при этом можно получить, если использовать тела в качестве нагревателя и холодильника для идеальной тепловой машины?

Решение

Поскольку процессы, протекающие в системе, обратимы, из второго начала термодинамики для обратимых процессов имеем

$$\Delta S = C \ln \frac{T_К}{T_1} + C \ln \frac{T_К}{T_2} = 0,$$

откуда

$$T_К = \sqrt{T_1 T_2},$$

где $T_К$ – конечная температура системы.

Заметим, что в случае свободной релаксации системы к положению равновесия, из уравнения теплового баланса легко получить конечную температуру системы в виде

$$T'_К = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)\,.$$

При этом всегда выполняется неравенство $T_К \le T'_К$.

Так как энергия системы тел сохраняется, то для максимальной работы, которую можно получить, имеем

$$A_{max} = C(T_1 + T_2 - 2T_К),$$

Задача 4.4. Два баллона емкостью $V_1 = 1$ л и $V_2 = 2$ л соединены трубкой с краном. Первый заполнен азотом под давлением $p_1 = 1$ атм, второй – кислородом под давлением $p_2 = 3$ атм. Найти изменение энтропии системы, если открыть кран. Вся система в целом теплоизолирована. Начальные температуры газов одинаковы и равны $T = 300$ К. Как изменится результат, если и во втором сосуде вместо кислорода будет находиться азот под давлением $p_2 = 3$ атм?

Решение

Поскольку вся система в целом не совершает работы и теплоизолирована, то в. соответствие с первым началом термодинамики внутренняя энергия всей системы останется неизменной. В результате получаем

$$U_1 + U_2 = U_1' + U_2'$$

или

$$\nu_1 \frac{R}{\gamma_1 - 1} T + \nu_2 \frac{R}{\gamma_2 - 1} T = \nu_1 \frac{R}{\gamma_1 - 1} T_{\text{к}} + \nu_2 \frac{R}{\gamma_2 - 1} T_{\text{к}},$$

где ν_1, ν_2 и γ_1, γ_2 – число молей и показатели адиабаты для азота и кислорода соответственно, $T_{\text{к}}$ – конечная температура смеси. Из последнего соотношения следует, что температура смеси будет равна начальной температуре газов, т.е. $T_{\text{к}} = T$.

Смешение газов будет протекать необратимым образом. Поскольку вся система в целом теплоизолирована, энтропия системы будет возрастать. При этом изменение энтропии системы будет равно сумме изменений энтропии ее частей. Для вычисления изменения энтропии мы можем воспользоваться двумя способами.

а) Поскольку нам известно выражение для энтропии идеального газа в равновесном состоянии и параметры каждого из газов в конечном состоянии: температура $T_{\text{к}} = T$ и объем $V_1 + V_2$, то в соответствии с формулой (14), изменение энтропии

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \nu_1 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + \nu_2 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}.$$

Число молей каждого газа можно найти из уравнения состояния в исходном равновесном состоянии

$$\nu_1 = \frac{p_1 V_1}{RT}, \quad \nu_2 = \frac{p_2 V_2}{RT}.$$

Тогда окончательно изменение энтропии есть

$$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{RT} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + \frac{p_2 V_2}{RT} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} = 0,14 \text{ Дж/К}. \tag{17}$$

б) Вычислим изменение энтропии для некоторого обратимого процесса, который приводит к тому же самому конечному состоянию смеси газов. Поскольку энтропия есть функция состояния системы, то ее приращение для необратимого и необратимого процессов будет одинаково.

Представим себе цилиндрический сосуд, разделенный на две части, объемы которых равны V_1 и V_2. В левой части сосуда находится азот, в правой - кислород. Газы отделены друг от друга двумя полупроницаемыми перегородками *N и O* (рис. 11). Перегородка *N* проницаема для азота и непроницаема для кислорода. Т.е. для кислорода эта перегородка аналогична обыкновенному поршню. Перегородка *O* проницаема для кислорода и непроницаема для азота. В такой системе обратимое смешение газов можно провести следующим образом.

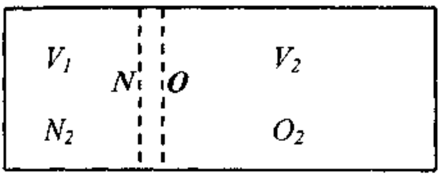


Рис. 11

При очень медленном перемещении одной из перегородок, например перегородки *N,* влево вплоть до противоположной стенки, кислород будет расширяться до объема $V_1 + V_2$, причем сила давления на перегородку *N* со стороны кислорода должна все время уравновешиваться некоторой внешней силой *F.* При расширении кислород будет совершать работу против силы *F;* чтобы процесс был изотермическим, газ извне должен получать тепло. При изотермическом процессе $\delta Q = \delta A = pdV$, поэтому изменение энтропии с учетом уравнения состояния кислорода $p = \nu_2 RT/V$ есть

$$\Delta S_2 = \int_{V_2}^{V_1+V_2} \frac{pdV}{T} = \nu_2 R \int_{V_2}^{V_1+V_2} \frac{dV}{V} = \frac{p_2 V_2}{T} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}.$$

При перемещении перегородки O вправо произойдет расширение азота до объема $(V_1 + V_2)$, и изменение энтропии будет равно

$$\Delta S_1 = \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{pdV}{T} = \nu_1 R \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{dV}{V} = \frac{p_1 V_1}{T} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}.$$

Суммируя выражения для ΔS_1 и ΔS_2, получаем для приращения энтропии системы газов выражение (17).

В случае, когда и в правой части находится азот, необходимо рассмотреть процесс, в результате которого газ придет в то же конечное состояние, какое установится после открывания крана. Конечные значения параметров р, V и T азота будут такими же, как и у смеси в предыдущих условиях. Однако изменение энтропии будет иным, так как молекулы газа, находящегося в обоих сосудах, теперь принципиально неразличимы. В этом случае невозможно осуществить перегородку, которая была бы более проницаема для молекул газа одного сосуда, чем для молекул газа другого сосуда.

Для осуществления обратимого процесса представим, что сосуды разделены обыкновенным поршнем, который будет перемещаться до тех пор, пока давление с обеих сторон не станет одинаковым. Для того, чтобы процесс был квазистатическим, поршень должен двигаться бесконечно медленно. Это возможно при условии, если кроме силы давления газов, на поршень будет действовать внешняя сила, величина которой определится произведением разности давлений на площадь поршня. При таком процессе газ, который был вначале под большим давлением, будет изотермически расширяться до некоторого объема V_2', и энтропия его будет возрастать. Газ в первом сосуде будет изотермически сжиматься до объема V_1', энтропия его будет уменьшаться. Суммарное изменение энтропии равно

$$\Delta S = \frac{p_1V_1}{RT}\ln\frac{V_1'}{V_1} + \frac{p_2V_2}{RT}\ln\frac{V_2'}{V_2}.$$

Для вычисления ΔS отношение объемов заменим обратным отношением давлений, а конечное давление p определим из следующих условий:

$$p_1V_1 = pV_1';$$

$$p_2V_2 = pV_2';$$

$$V_1' + V_2' = V_1 + V_2.$$

Отсюда получим

$$\frac{V_1'}{V_1} = \frac{p_1}{p} = \frac{p_1(V_2+V_1)}{p_1V_1+p_2V_2},$$
$$\frac{V_2'}{V_2} = \frac{p_2}{p} = \frac{p_2(V_2+V_1)}{p_1V_1+p_2V_2}.$$

При расчете имеем $\Delta S = 2,6 \cdot 10^{-2}$ Дж/К. Различие в результатах со случаем различных газов можно объяснить тем, что процессу смешения различных газов может предшествовать процесс выравнивания давления с помощью поршня, как это было сделано в случае одинаковых газов. Удаление поршня после выравнивания давлений в случае одинаковых газов не влечет за собой никаких процессов. В случае различных газов удаление поршня приведет систему в неравновесное состояние: в одной части объема находится азот, в другой – кислород. Начнется необратимый процесс смешения двух различных газов.

Задача 4.6. Тело с постоянной удельной теплоемкостью c_V, поддерживаемое при постоянном объеме, в первом случае приводится в контакт с термостатом температуры $T_{\text{тер}}$. Начальная температура системы T_0. Найти изменение энтропии системы "тело + термостат". Во-втором случае та же система, имеющая температуру T_0, последовательно приводится в контакт с N термостатами, имеющими температуры: $T_0+\Delta T$, $T_0+2\Delta T, \dots,$ $T_{\text{тер}} - \Delta T, T_{\text{тер}}$. Покажите, что в пределе при $N \to \infty, \Delta T \to 0, N\Delta T =$ $= T_{\text{тер}} - T_0 = \text{const}$ приращение энтропии системы "тело + термостаты" равно нулю. Пояснить различия между результатами первого и второго процессов с точки зрения второго начала термодинамики.

Решение

В первом случае изменение энтропии системы

$$\Delta S_1 = \int\limits_{T_0}^{T_{\text{тер}}} \frac{mc_V dT}{T} = mc_V \ln\left(\frac{T_{\text{тер}}}{T_0}\right).$$

При этом изменение энтропии термостатата

$$\Delta S_2 = -\frac{|Q|}{T_{\text{тер}}} = mc_V \frac{T_0 - T_{\text{тер}}}{T_{\text{тер}}}.$$

Общее изменение энтропии всей системы

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc_V\left[\ln\left(\frac{T_{\text{тер}}}{T_0}\right) + \frac{T_0 - T_{\text{тер}}}{T_{\text{тер}}}\right].$$

Во втором случае

$$\Delta S = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta T \to 0}} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta S_n,$$

где

$$\Delta S_n = mc_V \left[\ln \frac{T_0 + (n+1)\Delta T}{T_0 + n\Delta T} - \frac{\Delta T}{T_0 + (n+1)\Delta T}\right]$$

– изменение энтропии при $(n+1)$-контакте. Таким образом

$$\Delta S = mc_V \left[\ln\left(\frac{T_{\text{тер}}}{T_0}\right) - \int\limits_{T_0}^{T_{\text{тер}}} \frac{dT}{T}\right] = 0.$$

В первом случае $\Delta S > 0$ поскольку процесс релаксации тела является необратимым. Во-втором случае $\Delta S = 0$, так как процесс является обратимым.

Задачи для самостоятельного решения

[A]

4.7. Воду массой $m = 1,00$ кг нагрели от температуры $t_1 = 10^0$C до $t_2 = 100^0$C, при которой вся она превратилась в пар. Найти приращение энтропии системы.

Ответ: $\Delta S = m\{c\ln T_2/T_1 + L/T_2\} = 7,2$ кДж$/K$.

4.8. Смешали воду массой $m_1 = 5$кг при температуре $T_1 = 280$ K с водой массой $m_2 = 8$кг при температуре $T_2 = 350$ K. Найти изменение энтропии системы.

Ответ: $\Delta S = \{m_1 \ln T/T_1 + m_2 \ln T/T_1\} = 0,3$кДж$/K$,
где $T = (m_1T_1 + m_2T_2)/(m_1 + m_2) = 323$ K – равновесная температура смеси.

4.9. Кусок меди массы $m_1 = 90$ г при температуре $t_1 = 90^0$ C положили в калориметр, в котором находился лед массы $m_1 = 50$ г при температуре -3^0 C. Найти приращение энтропии куска меди к моменту установления теплового равновесия.

Ответ: $\Delta S = mc\ln T_2/T_1 = -10$Дж$/K$, где $T_2 = 273$ K (при данных условиях лед растает частично).

4.10. В результате изохорического нагревания водорода массой т = 1г давление р газа увеличилось в два раза. Определить изменение энтропии газа.

Ответ: $\Delta S = 7,2$ Дж/К.

4.11- Водород массой m = 100 г был нагрет изобарически так, что его объем увеличился в n = 3 раза, затем водород был изохорически охлажден так, что давление его уменьшилось в n = 3 раза. Найти изменение энтропии системы в ходе указанных процессов.

Ответ: $\Delta S = (m/M)(C_p - C_V)\ln n = 457$ Дж/K.

4.12. Процесс расширения трех молей гелия происходит так, что давление газа увеличивается прямо пропорционально его объему. Найти приращение энтропии газа при увеличении его объема в n — 5 раз.

Ответ: $\Delta S = \nu R(\gamma + 1)\ln \alpha/(\gamma - 1) = 160$ Дж/К.

4.13. При очень низких температурах теплоемкость кристаллов $C = \alpha T^3$, где a - постоянная. Найти энтропию кристалла как функцию температуры в этой области.

Ответ: $S = \alpha T^3/3$. ·

4.14. Один моль идеального газа с известным значением теплоемкости Cy совершает процесс, при котором его энтропия S зависит от температуры как S = aT, где a - постоянная. Температура газа изменилась от T_1 до T_2. Найти:

а) молярную теплоемкость газа как функцию Т;

б) количество теплоты, сообщенной газу;

в) работу, которую совершил газ.

Ответ: а)$C = \alpha/T$; б)$Q = \alpha \ln(T_1/T_2)$; в)$A = \alpha \ln(T_1/T_2) + C_V(T_1 - T_2)$.

[B]

4.15. Некоторое количество воды, находящееся первоначально при температуре $T\backslash$, приведено в контакт с термостатом с температурой $T_2 > T_1$. В результате вода переходит в состояние теплового равновесия с термостатом.

Найти изменение энтропии всей системы, считая что теплоемкость воды в указанном процессе остается постоянной и равной C.

Ответ: $\Delta S = C\left[\ln(T_2/T_1) - (T_2 - T_1)/T_2\right]$.

4.16. В некотором процессе температура вещества зависит от его энтропии по зкону $T \propto S^n$, где n – пос а я . Найти теплоемкость вещества как фуню цию S.

Ответ: $C = S/n$.

4.17. Один конец длинного металлического стерженя (длиной L, площадью поперечного сечения S, плотностью ρ и удельной теплоемкостью при постоянном давлении C_p) находится в контакте с термостатом с температурой T_1, а другой - с термостатом с температурой T_2. (Стержень удаляют от термостатов, адиабатически изолируют и сохраняют при постоянном давлении. Найти изменение энтропии стержня.

Ответ:

$$\Delta S = C_p\left(1 + \ln T + \frac{T_2}{T_1 - T_2}\ln T_2 - \frac{T_1}{T_1 - T_2}\ln T_1\right),$$

где $C_p = c_p\,\rho\,L\,S, \quad T = (T_1 + T_2)/2.$

4.18. Две колбы объемами V_1 и V_2 наполнены одинаковым идеальным газом, находящимся при одинаковом давлении p, но при различных температурах T_1 и T_2. Число молей газа ν в обеих колбах одинаково. Определить изменение энтропии после того, как колбы соединили и система пришла в равновесие.

Ответ:

$$\Delta S = 2\nu C_p \ln\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}.$$

4.19. Имеются два идентичных термодинамических тела, энтропия которых зависит от числа частиц N, объема V и внутренней энергии U как $S = \alpha(NVU)^{1/3}$, где α – постоянная величина. Первоначально тела имеют различные температуры T_1 и T_2. Тела используются для совершения работы. В результате они приходят в термодинамическое равновесие с температурой $T_к$. В каких пределах может лежать конечная температура? Какая температура соответствует максимальной совершенной работе? Какова эта максимальная работа?

Ответ: $T_{min} \le T_к \le T_{max}$.
Здесь $T_{max} = \left[(T_1^{3/2} + T_2^{3/2})/2\right]^{2/3}$, $T_{min} = \left[(T_1^{1/2} + T_2^{1/2})/2\right]^2$,
$A_{max} = (2\lambda/3)\left[T_1^{3/2} + T_2^{3/2} - \left(T_1^{1/2} + T_2^{1/2}\right)^3/4\right]$, где $\lambda = \sqrt{\alpha NV/12}$.

5. Распределения молекул по скоростям

- **Средние значения непрерывной случайной величины x и произвольной функции случайной величины $f(x)$:**

$$\langle x\rangle = \int_a^b x\varphi(x)dx, \qquad \langle f(x)\rangle = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x)$ – функция распределения случайной величины x, удовлетворяющая условию нормировки $\int_a^b \varphi(x)dx = 1$.

- **Функции распределения молекул по скоростям:**

$$\varphi(v_x) = (m_0/2\pi kT)^{1/2}\exp(-m_0v_x^2/2kT),$$

$$f(\vec{v}) = f(v_x, v_y, v_z) = (m_0/2\pi kT)^{3/2}\exp(-m_0v^2/2kT),$$

$$F(v) = 4\pi(m_0/2\pi kT)^{3/2}v^2\exp(-m_0v_x^2/2kT),$$

где m_0 – масса молекулы.

- **Наиболее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости молекул:**

$$v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad \langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}, \quad v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

- **Средняя энергия молекулы идеального газа:**

$$\langle \varepsilon\rangle = (i/2)kT,$$

где $i = n_{пост} + n_{вр} + 2n_{кол}$ – эффективное число степеней свободы молекулы.

Задача 5.1. Найти относительное число молекул азота при температуре $T = 300$К, проекции скоростей которых на ось x лежат в интервале 300 ± 0.5 м/с.

Решение

Относительное число молекул, проекции скоростей которых на ось x лежат в интервале от v_{x1} до v_{x2}, можно найти путем интегрирования функции распределения молекул идеального газа по проекции скорости v_x в указанных пределах:

$$\frac{\Delta N}{N} = \int\limits_{v_{x1}}^{v_{x2}} \varphi(v_x) dv_x,$$

где

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp(-m_0 v_x^2/kT)$$

- функция распределения молекул по проекции скорости.

Поскольку указанный в задаче интервал скоростей весьма мал, то подынтегральная функция изменяется незначительно. Согласно теореме о среднем ее можно вынести за знак интеграла, и искомое относительное число молекул приближенно представить в виде

$$\frac{\Delta N}{N} \simeq \varphi(v_x)\delta v_x = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp(-m_0 v_x^2/kT)\delta v_x =$$

$$= \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{1/2} \exp(-M v_x^2/RT)\delta v_x,$$

где $v_x = (v_{x1} + v_{x2})/2$ и $\delta = v_{x2} - v_{x1}$, M - молярная масса газа. Учитывая, что в рассматриваемой нами задаче $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и $v_x = 300$ м/с, $\delta v_x = 1$ м/с, получаем для искомого относительного числа молекул $(\Delta N/N)100\% = 0{,}05\%$.

Задача 5.2. Найти относительное число молекул, модуль скорости которых больше среднего значения модуля скорости $\langle v \rangle$.

Решение

Искомое относительное число молекул можно представить, используя распределение Максвелла по модулю скорости, в виде

$$\frac{N_1}{N} = \int\limits_{\langle v \rangle}^{\infty} F(v) dv = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_{\langle v \rangle}^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) v^2 dv =$$

$$= \frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\langle v \rangle}^{\infty} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv,$$

где $\alpha = m_0/(2\pi kT)$, N – полное число молекул газа и $F(v)dv$ – распределение Максвелла по модулю скорости. Представим последний интеграл в виде

$$\int\limits_{\langle v \rangle}^{\infty} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv = \int\limits_{0}^{\infty} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv - \int\limits_{0}^{\langle v \rangle} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv.$$

Первый интеграл справа может быть вычислен из условия нормировки:

$$\int\limits_{0}^{\infty} F(v) dv = \frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv = 1.$$

Второй интеграл преобразуем, используя замену переменной: $x = \sqrt{\alpha} v$. В этом случае имеем

$$\int\limits_{0}^{\langle v \rangle} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv = \alpha^{-3/2} \int\limits_{0}^{\sqrt{\alpha}\langle v \rangle} \exp(-x^2) x^2 dx = \alpha^{-3/2} \int\limits_{0}^{\sqrt{4/\pi}} \exp(-x^2) x^2 dx,$$

где мы учли, что $\sqrt{\alpha \langle v \rangle} = \sqrt{4/\pi}$. Последний интеграл, путем интегрирования по частям, может быть сведен к интегралу ошибок

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{z} \exp(-x^2) dx.$$

Действительно,

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\sqrt{4/\pi}} \exp(-x^2) x^2 dx = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} x \exp(-x^2) \Big|_0^{\sqrt{4/\pi}} + \Phi(\sqrt{4/\pi}).$$

Окончательно имеем для искомого относительного числа молекул

$$\frac{N_1}{N} = 1 + (4/\pi) \exp(-4/\pi) - \Phi(\sqrt{4/\pi}).$$

Проводя численные расчеты, получаем, что относительное число молекул, модуль скорости которых больше среднего модуля скорости, составляет $N_1/N = 0.47$.

Задача 5.3. Зная функцию распределения Максвелла $F(v)$ молекул идеального газа по модулю скорости, определить среднее значение квадрата модуля скорости $\langle v^2 \rangle$.

Решение

Среднее значение квадрата модуля скорости молекул можно определить по общему правилу вычисления среднего:

$$\langle v^2 \rangle = \int\limits_0^\infty v^2 F(v) dv,$$

где функция распределения Максвелла $F(v)$ молекул идеального газа по модулю скорости имеет вид

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right).$$

Учитывая явный вид функции распределения Максвелла, формулу для среднего перепишем как

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_0^\infty v^4 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) dv.$$

Оставшийся интеграл легко вычислить, проводя интегрирование по частям

$$\int\limits_0^\infty x^2 \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}\alpha^{-5/2},$$

положив $\alpha = m/2kT$. В результате получаем

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{3}{8}\sqrt{\pi} \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{-5/2}.$$

После упрощений и сокращений найдем

$$\langle v^2 \rangle = 3kT/m_0.$$

Задача 5.4. Идеальный одноатомный газ состоит из молекул массой m_0 и находится при температуре T. Найти с помощью функции $F(v)$ функцию распределения молекул по кинетическим энергиям $F(\varepsilon)$. Вычислить наиболее вероятную кинетическую энергию молекул идеального газа.

Решение

Для решения поставленной задачи воспользуемся соотношением

$$F(v)dv = F(\varepsilon)d\varepsilon,$$

где $\epsilon = m_0v^2/2$ - кинетическая энергия молекулы газа.

Тогда

$$F(\varepsilon) = F(v)\frac{dv}{d\varepsilon} = F(v)\frac{1}{\sqrt{2m_0\varepsilon}}.$$

Учитывая явный вид функции распределения Максвелла $F(v)$, находим

$$F(\varepsilon) = 2\pi\,(\pi kT)^{-3/2}\exp(-\varepsilon/kT)\sqrt{\varepsilon}.$$

Наиболее вероятную кинетическую энергию $\varepsilon_{\text{вер}}$ молекул газа найдем из условия: $dF(\varepsilon)/d\varepsilon = 0$, откуда

$$\varepsilon_{\text{вер}} = kT/2.$$

Из последнего соотношения следует, что $\varepsilon_{\text{вер}} \neq \varepsilon(v_{\text{вер}})$.

Задача 5.5. Вычислить число *v* молекул идеального газа, падающих ежесекундно на единичную площадку стенки сосуда. Температура газа Т, концентрация молекул *n* и масса каждой молекулы то. Газ находится в состоянии равновесия.

Решение

Направим ось x системы координат перпендикулярно единичной площадке стенки сосуда. Тогда произведение $dn(v_x)v_x$ – это число молекул в цилиндре длиной v_x с единичной площадью сечения, имеющих проекции скоростей молекул в интервале $(v_x, v_x + dv_x)$. Данное число молекул равно ежесекундному числу ударов $d\nu$ о единичную площадку:

$$d\nu = dn(v_x)v_x. \tag{18}$$

Величину $dn(v_x)$ можно выразить через функцию распределения $\varphi(v_x)$ молекул по проекциям скоростей v_x

$$dn(v_x) = n\varphi(v_x)dv_x,$$

где $n = N/V$ – концентрация молекул газа в сосуде и

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}\right).$$

Интегрирование (18) по всем возможным значениям переменной v_x дает искомый результат:

$$\nu = \int v_x dn(v_x) = n \int\limits_0^\infty \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}\right) v_x^2 dv_x, \qquad (19)$$

где интегрирование ведется только по положительным значениям v_x, так как молекулы с $v_x < 0$ движутся от площадки. Вводя новую переменную $\eta = m_0 v_x^2/2kT$, перепишем выражение (19) в виде

$$\nu = n\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} \frac{kT}{m_0} \int\limits_0^\infty e^{-\eta} d\eta = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m_0}}.$$

Учитывая формулу для среднего значения модуля скорости $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m_0}$, последнее выражение можно представить как

$$\nu = \frac{1}{4} n \langle v \rangle.$$

Задача 5.6. Найти число атомов в молекуле газа, у которого при "замораживании" колебательных степеней свободы постоянная адиабаты γ увеличивается в $\eta = 1,20$ раз.

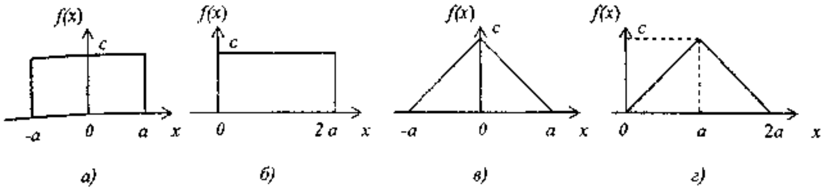
Решение

Исходим из условия

$$\eta = \gamma_з/\gamma,$$

где $\gamma_з$ – постоянная адиабаты после "замораживания" колебательных степеней свободы. Дальнейшее решение зависит от того, какие молекулы – линейные или нелинейные – имеет газ. Пусть число атомов в молекуле равно N. Для линейных молекул число колебательных степеней свободы $n_{\text{кол}} = 3N-5$ и эффективное число степеней свободы $i = 5 + n_{\text{кол}} = 6N - 5$, а после "замораживания" $i_з = 5$. Тогда

$$\eta = \frac{\gamma_з}{\gamma} = \frac{(i_з + 2)i}{(i+2)i_з} = \frac{7}{5}\frac{(6N-5)}{(6N-3)}.$$



Подставляя значение η, находим

$$N = \frac{(15/7)\eta - 5}{(30/7)\eta - 6} = 2,84.$$

Это невозможно, так как число атомов в молекуле должно быть целым числом, значит расчет надо вести, считая, что молекулы нелинейные.

Поступая аналогично предыдущему случаю, получим для нелинейных молекул

$$\eta = \frac{4(N-1)}{3N-2},$$

откуда

$$N = \frac{2\eta - 4}{3\eta - 4} = 4.$$

Таким образом, мы имеем дело с нелинейными молекулами, состоящими из четырех атомов.

Задачи для самостоятельного решения

[A]

5.7. На рис. **11** приведены графики четырех различных функций распределения вероятностей значений некоторой случайной величины x. Для каждого из графиков найти значение величины с, при которой функция оказывается нормированной. Вычислить средние значения $\langle x\rangle$ и $\langle x^2\rangle$. Для случая а) вычислить также величину $\langle |x|\rangle$.

Ответ: а) $c = 1/2a$, $\langle x\rangle = 0, \langle x^2\rangle = a^2/3$, $\langle |x|\rangle = a/2$; б) $c = 1/2a$, $\langle x\rangle = a, \langle x^2\rangle = 4a^2/3$; в) $c = 1/a$, $\langle x\rangle = 0, \langle x^2\rangle = a^2/6$; г) $c = 1/a$, $\langle x\rangle = a, \langle x^2\rangle = 7a^2/6$.

5.8. Используя функцию распределения молекул по модулю скорости, найти функцию, выражающую распределение молекул по относительным скоростям $u(u = v/v_в)$.

Ответ: $F(u) = (4/\sqrt{\pi})\exp(-u^2)u^2$.

5.9. Какова вероятность W того, что данная молекула идеального газа имеет модуль скорости, отличный от $1/2v_в$ не более, чем на 1%.

Ответ: $W = 4,39 \cdot 10^{-3}$.

5.10. Какая часть молекул имеет модуль скорости, лежащий между $v_в/2$ и $2v_в$?

Ответ: $\Delta N/N = 0,87$.

5.11. Температура гелия (молярная масса $M = 4$ г/моль), распределение молекул которого по скоростям можно считать максвелловским, изменилась от $T_1 = 200$ К до $T_2 = 400$ К. При этом число молекул, скорости которых лежат в узком интервале скоростей от v до $v + \Delta v$, осталось прежним. Определить скорость v этих молекул.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{3RT_1T_2\ln(T_2/T_1)}{M(T_2-T_1)}} \simeq 1300$м/с.

5.12. При какой температуре функция распределения по скоростям для молекул водорода будет совпадать с функцией распределения по скоростям для молекул азота при комнатной температуре?

Ответ: $T = 21$ К.

5.13. Найти температуру газообразного азота, при которой скоростям молекул $v_1 = 300$м/с и $v_2 = 600$м/с соответствуют одинаковые значения функции распределения $F(v)$.

Ответ: $T = m_0(v_2^2 - v_1^2)/4k\ln(v_2/v_1) = 330$ К.

5.14. При изменении температуры идеального газа максимум функции распределения $F(v)$ уменьшился в η раз. Как и во сколько раз изменилась температура газа?

Ответ: Увеличилась в η^2 раз.

5.15. Определить скорость v молекул азота, при которой значение функции $F(v)$ для температуры T_0 будет таким же, как и для температуры, в η раз большей.

Ответ: $v = \sqrt{(3kT_0/m_0)\eta \ln \eta/(\eta - 1)}$.

5.16. Найти среднюю проекцию скорости $\langle v_x \rangle$ и $\langle |v_x| \rangle$ молекул идеального газа, если масса каждой молекулы m, а температура газа T.

Ответ: $\langle v_x \rangle = 0, \quad \langle |v_x| \rangle = \sqrt{2kT/\pi m_0}$.

5.17. Определить среднее значение квадрата проекции скорости молекул идеального газа.

Ответ: $\langle v_x^2 \rangle = kT/m_0$.

5.18. Определить с помощью функции $\varphi(v_x)$ давление газа на стенку, если температура газа T и концентрация молекул n.

Ответ: $p = nkT$.

5.19. Найти среднее значение обратной скорости $\langle 1/v \rangle$ молекул идеального газа при температуре T.

Ответ: $\langle 1/v \rangle = \sqrt{2m_0/\pi kT}$.

5.20. Пусть идеальный газ нагрет до температуры, при которой у молекул возбуждены все степени свободы (поступательные, вращательные и колебательные). Найти молярную теплоемкость такого газа при постоянном объеме, а также показатель адиабаты γ, если газ состоит из N-атомных молекул:

а) линейных; б) нелинейных.

Ответ: а) $C_V = (3N - 5/2)R$; $\gamma = (6N - 3)/(6N - 5)$;
б) $C_V = (3N - 1)R$; $\gamma = (N - 2/3)/(N - 1)$.

5.21. Найти число степеней свободы молекул идеального газа, молярная теплоемкость которого:

а) при постоянном давлении $C_p = 29$ Дж/(моль·К);

б) в процессе $pT = \text{const}$ равна $C = 29$ Дж/(моль·К).

Ответ: $i = 2(C_p/R - 1) = 5$; б) $i = 2(C/R - 2) = 3$.

[Б]

5.22. Во сколько раз изменится давление газа, если k-я часть молекул начнет поглощаться при ударе о стенку?

Ответ: уменьшится в $1 - (k/2)$ раз.

5.23. Определить вероятность того, что кинетическая энергия молекулы газа не превышает заданного значения ε.

Ответ: $W = \Phi\left(\sqrt{\varepsilon/kT}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\varepsilon/kT}\exp\left(-\varepsilon/kT\right)$,
где $\Phi(x) = (2/\sqrt{\pi})\int\limits_0^x \exp(-z^2)dz$ – функция Лапласа.

5.24. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon_{\text{п}}\rangle$ молекул идеального газа, вылетающих в вакуум из небольшого отверстия.

Ответ: $\langle\varepsilon_{\text{п}}\rangle = 2kT > (3/2)kT = \langle\varepsilon\rangle$, где $\langle\varepsilon\rangle$ – средняя кинетическая энергия молекул в объеме газа.

5.25. Определить среднее значение модуля относительной скорости двух частиц равновесного одноатомного идеального газа.

Ответ: $\langle v_{\text{отн}}\rangle = \sqrt{2}\langle v\rangle$, где $\langle v\rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_0)}$.

6. Распределение Больцмана

- **Распределение Больцмана:**

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{-U(\vec{r})/kT},$$

где U – потенциальная энергия молекул во внешнем поле.

Задача 6.1. Определить массу воздуха в цилиндре с основанием $S = 1$ м^2 и высотой $H = 1$ км. Считать, что воздух вблизи поверхности земли находится при нормальных условиях.

Решение

Разобъем мысленно объем газа на физически бесконечно малые объемчики с площадью основания S и высотой dh. Число молекул воздуха, содержащееся в каждом таком объемчике, расположенном на высоте h,

$$dN = n(h)dV.$$

Здесь $dV = Sdh$; $n(h)$ – концентрация молекул воздуха на высоте h, определяемая распределением Больцмана

$$n(h) = n_0 e^{-m_0 gh/kT},$$

где m_0 – масса одной молекулы воздуха. Концентрацию молекул воздуха n_0 мы можем связать с давлением p_0 на поверхности земли с помощью соотношения

$$p_0 = n_0 kT.$$

В результате имеем

$$dN = \frac{p_0 S}{kT}\, e^{-m_0 gh/kT} dh. \qquad (20)$$

Проинтегрировав выражение (20) по h в пределах от 0 до H, найдем полное число молекул воздуха в данном цилиндре:

$$N = \int_0^H \frac{p_0 S}{kT}\, e^{-m_0 gh/kT} dh = \frac{p_0 S}{m_0 g}\left(1 - e^{-m_0 gH/kT}\right). \qquad (21)$$

Умножив (21) на массу одной молекулы, получим искомую массу:

$$m = m_0 N = \frac{p_0 S}{g}\left(1 - e^{-m_0 gH/kT}\right) = \frac{p_0 S}{g}\left(1 - e^{-MgH/RT}\right), \qquad (22)$$

где M – молярная масса воздуха. Подставляя числовые значения входящих в формулу (22) параметров, получаем $m = 1200$ кг.

Задача 6.2. При опытном определении числа Авогадро по методу Перрена было найдено, что при увеличении высоты наблюдаемого слоя жидкости на величину $\Delta h = 13$ мкм концентрация частичек краски гуммигута уменьшается вдвое. Определить по этим данным число Авогадро, если средний радиус частичек гуммигута был $r = 2,58 \cdot 10^{-7}$ м, температура жидкости в опыте была равна 290 К, плотность гуммигута $\rho = 1200$ кг/м^3, плотность жидкости (слабый спиртовой раствор) $\rho_1 = 900$ кг/м^3.

Решение

Мелкие частички, взвешенные в жидкости или газе, ведут себя подобно молекулам идеального газа, поэтому изменение их концентрации с высотой описывается распределением Больцмана

$$n = n_0 e^{-U/kT},$$

где n - концентрация частиц на высоте h; U- потенциальная энергия частиц на высоте h в поле результирующей потенциальной силы, действующей на частицы (равнодействующая силы тяжести и выталкивающей силы); n_0 – концентрация на высоте $h = 0$, принимаемой за начало отсчета потенциальной энергии.

Потенциальная энергия одной частички на высоте h может быть записана как

$$U = (\rho - \rho_1)Vgh,$$

где V – объем одной частички. Тогда отношение концентраций частичек для двух высот слоя жидкости есть

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp[(\rho - \rho_1)Vg(h_2 - h_1)/kT] =$$

$$= \exp[(\rho - \rho_1)V\Delta h/kT] = \exp[(\rho - \rho_1)V\Delta h N_A/RT].$$

Откуда получаем для числа Авогадро

$$N_A = \frac{RT}{(\rho - \rho_1)V\Delta h} \ln\frac{n_1}{n_2}.$$

Рассматривая каждую частичку гуммигута как правильный шар радиуса r, имеем

$$N_A = \frac{3RT}{4\pi r^3(\rho - \rho_1)V\Delta h} \ln\frac{n_1}{n_2}. \qquad (23)$$

Подставляя в (23) числовые значения, находим $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Задача 6.3. Идеальный газ, имеющий температуру T, находится в цилиндрическом сосуде высотой Я и радиуса *R.* Газ вращается вместе с цилиндрическим сосудом вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти давление газа на боковую стенку цилиндра, если общее число молекул в цилиндре *N.*

Решение

Идеальный газ находится в состоянии равновесия в неинерциальной системе отсчета, жестко связанной с цилиндрическим сосудом. В данной системе отсчета на молекулы идеального газа действуют силы инерции $m_0\omega^2 r$, направленные от оси цилиндра. Здесь г - расстояние от оси цилиндра до молекулы. Следовательно, можно считать, что газ находится в эффективном потенциальном поле $U = -m_0\omega^2 r^2$, поэтому распределение Больцмана имеет вид

$$f(\vec{r}) = Ce^{m_0\omega^2 r^2/kT},$$

где C – константа нормировки. Тогда функция распределения Больцмана по одной переменной r может быть найдена из соотношения

$$F(r)dr = f(\vec{r})dV,$$

где $dV = 2\pi H r dr$ – объем цилиндрического слоя высотой H и толщиной dr. Тогда

$$F(r) = f(\vec{r})2\pi H r dr = Ce^{m_0\omega^2 r^2/kT} 2\pi H r dr.$$

Нормировочную константу C найдем из условия

$$N = \int_0^R dN,$$

где N – общее число молекул в сосуде, dN – число молекул в цилиндрическом слое газа высотой H и толщиной dr, находящемся на расстоянии r от оси цилиндра. Имеем

$$N = C2\pi H \int_0^R e^{m_0\omega^2 r^2/kT} r dr = C\frac{2\pi H kT}{m_0\omega^2}\left[e^{m_0\omega^2 R^2/kT} - 1\right],$$

откуда

$$C = \frac{m_0\omega^2}{2\pi H kT}\left[e^{m_0\omega^2 R^2/kT} - 1\right]^{-1}.$$

Тогда для распределения концентрации частиц по радиусу цилиндра получаем

$$n(r) = \frac{dN}{dV} = \frac{N}{V}\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}\frac{\exp(m_0\omega^2 r^2/kT)}{\exp(m_0\omega^2 R^2/kT) - 1},$$

где учтено, что объем цилиндра $V = \pi R^2 l$. Давление на боковую стенку

$$p_{\text{бок}} = p(R) = n(R)kT = \frac{N}{V}\frac{m\omega^2 R^2}{2}\frac{\exp(m_0\omega^2 r^2/kT)}{\exp(m_0\omega^2 R^2/kT) - 1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

[A]

6.4. Какая дополнительная сила действует на обшивку самолета (в расчете на 1 $м^2$ плоской поверхности) за счет перепада давлений в салоне и снаружи самолета, если давление воздуха в салоне такое же, как и на поверхности Земли $p_0 = 10^5$ Па, высота полета 10 км, температура атмосферы $t = -23^0$C и не зависит от высоты?

Ответ: $0{,}75 \cdot 10^5$ Н.

6.5. На какой высоте h над поверхностью Земли атмосферное давление вдвое меньше, чем на ее поверхности? Считать, что температура воздуха T равна 290 К.

Ответ: 5,88 км.

6.6. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление $p = 80$ кПа, благодаря чему летчик считает высоту h полета неизменной. Однако температура воздуха изменилась на $\Delta T = 1$ К. Какую *ошибку* Δh в определении высоты допустил летчик? Считать, что температура не зависит от высоты и что у поверхности Земли давление $p_0 = 100$ кПа.

Ответ: $\Delta h = 6{,}5$ м.

6.7. Пусть η_0 – отношение концентрации молекул водорода к концентрации молекул азота вблизи поверхности Земли, а η – то же отношение на высоте $h = 3000$ м. Найти отношение η_0/η при $T = 280$ К, полагая, что температура и ускорение свободного падения не зависят от высоты.

Ответ: $\eta/\eta_0 = \exp[(M_2 - M_1)gh/RT] = 1,39$.

6.8. В длинном вертикальном сосуде находится газ, состоящий из двух сортов молекул с массами m_1 и m_2, причем $m_2 > m_1$. Концентрации этих молекул у дна сосуда равны соответственно n_1 и n_2, причем $n_2 > n_1$. Считая, что по всей высоте поддерживается одна и та же температура T и ускорение свободного падения равно g, найти высоту h, на которой концентрации этих сортов молекул одинаковы.

Ответ: $h = kT\ln(n_2/n_1)/(m_2 - m_1)g$.

^

6.9. В очень высоком вертикальном цилиндрическом сосуде находится углекислый газ при некоторой температуре Т. Считая поле тяжести однородным, найти, как изменится давление газа на дно сосуда, если температуру газа увеличить в η раз.

Ответ: не изменится.

6.10. Азот находится в очень высоком сосуде в однородном поле тяжести при температуре Т. Температуру у в е л и 'в η раз.Ι а какой высоте h концентрация молекул осталась прежней?

Ответ: $h = (RT/Mg)\eta \ln \eta/(\eta - 1)$.

6.11. Газ находится в очень высоком цилиндрическом сосуде при температуре Т. Считая поле тяжести однородным, найти среднее значение потенциальной энергии молекул газа.

Ответ: $\langle U \rangle = kT$.

[Б]

6.12. Закрытую с торцов горизонтальную трубку длиной I = 1 м перемещают с ускорением *а,* направленным вдоль ее оси. Внутри трубки находится аргон при T = 330 К. При каком значении *а* концентрации аргона вблизи торцов трубки будут отличаться друг от друга на $\eta = 1\%$.

Ответ: $a = \eta RT/Ml = 70g$.

6.13. Горизонтально расположенную трубку с закрытыми торцами вращают с угловой скоростью *u/* вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее торцов. В трубке находится углекислый газ при Т = 300 К. Длина трубки I = 1 м. Найти ω, при которой отношение концентраций молекул у противоположных торцов трубки $\eta = 2$.

Ответ: $\omega = \sqrt{(2RT/Ml^2)\ln\eta} = 280$ рад.

6.14. Закрытая с одного конца трубка длиной $l = 1$ м вращается вокруг перпендикулярной ей вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью w = 62,8 рад. Давление окружающего воздуха

$p_0 = 1,00 \cdot 10^5$ Па, температура $t = 20°C$. Найти давление p воздуха в трубе вблизи закрытого конца.

Ответ: $p = p_0 \exp(\omega^2 l^2/2RT) = 1,02 \cdot 10^5$ Па.

6.15. Идеальный газ занимает бесконечный конический сосуд, помещенный в однородное иоле тяжести, вершиной вниз с вертикальной осью и углом при вершине $2a$. Найти распределение концентрации газа по высоте. Полное число частиц равно N, масса одной молекулы газа m и температура газа равна T.

Ответ: $n(x) = (N/2\pi \operatorname{tg}^2 \alpha)\,(m_0 g/kT)^3 \exp[-(m_0 g x/kT)]$.

7. Флуктуации. Броуновское движение. Статистический смысл энтропии

- **Дисперсия случайной величины x:**

$$D_x = \langle \Delta x^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.$$

- **Среднеквадратичное отклонение случайной величины**

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}.$$

- **Относительная флуктуация случайной величины:**

$$\delta_x = \sigma_x / \langle x \rangle.$$

- **Биномиальное распределение:**

$$p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^n q^{n-m},$$

где $C_n^m = N!/(m!(n-m)!)$ - число сочетаний, p - вероятность того, что событие произошло и q – вероятность того, что событие не произошло.

- **Формула Эйнштейна для среднеквадратичного смещения одномерной сферической броуновской частицы:**

$$\langle \Delta x \rangle^{1/2} = \sqrt{2Dt}, \quad \text{где } D = \frac{kT}{\gamma} = \frac{kT}{6\pi\eta a}.$$

Здесь η – коэффициент вязкости среды, a – радиус сферической броуновской частицы.

- **Формула Больцмана для энтропии равновесного состояния макроскопической системы:**
$$S = k \ln \Omega,$$
где Ω – статистический вес состояния.

Задача 7.1. Величины f и g называются статистически независимыми, если для них выполняется соотношение $\langle \Delta f \Delta g \rangle = 0$. Показать, что для статистически независимых величин $\langle fg \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle$.

Решение

Представим случайные величины f и g как $f = \langle f \rangle + \Delta f$, $g = \langle g \rangle + \Delta g$. Тогда произведение случайных величин есть

$$fg = \langle f \rangle \langle g \rangle + \langle f \rangle \Delta g + \langle g \rangle \Delta f + \Delta f \Delta g.$$

Усредняя последнее соотношение и принимая во внимание, что $\langle \Delta f \rangle = \langle \Delta g \rangle = 0$, находим

$$\langle fg \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle + \langle \Delta f \Delta g \rangle.$$

Тогда для статистически независимых величин действительно имеем

$$\langle fg \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle.$$

Задача 7.2. В закрытом сосуде объемом V в отсутствие силовых полей находятся N молекул идеального газа. Определить среднее число молекул и его флуктуации в объеме v, являющемся малой частью объема V.

Решение

Разобьем объем V на $z = V/v$ равных объемов $v_j = v$. Тогда полное число молекул в системе можно представить в виде суммы чисел молекул в каждом из таких малых объемов, т.е.

$$N = \sum_j n_j,$$

где n_j – число молекул в j-м объеме. Так как величины всех малых объемов одинаковы и в отсутствие внешних полей распределение молекул по объему является однородным, то средние числа молекул в них $\langle n_j \rangle$ одинаковы.

Поэтому $N = z\langle n\rangle$, т.е. $\langle n\rangle = Np$, где $p = v/V$ – вероятность нахождения молекулы в объеме v.

Введем теперь случайные величины f_i следующим образом:

$f_i = 1$, если i-я молекула находится в объеме v;

$f_i = 0$, если i-я молекула находится в оставшемся объеме $(N - v)$.

Тогда число молекул n в объеме v можно представить в виде

$$n = \sum_i^N f_i,$$

где суммирование ведется по всем N молекулам объема V. Функции f_i удовлетворяют условию

$$f_i = f_i^2 = f_i^3 = \cdots$$

Далее очевидно, что

$$\langle f_i\rangle = \langle f_i^2\rangle = \langle f_i^3\rangle = \cdots = p.$$

Тогда для дисперсии случайной величины f_i мы можем получить следующее соотношение:

$$\langle \Delta f_i^2\rangle = \langle f_i^2\rangle - \langle f_i\rangle^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Так как в случае идеального газа величины $f_1, f_2, f_3, \cdots$ статистически независимы, то для дисперсии числа частиц в объеме v получаем

$$D_n = \langle \Delta n^2\rangle = Np(1-p) = (1-p)\langle n\rangle.$$

Соответственно, для среднеквадратичного отклонения и относительной флуктуации имеем

$$\sigma_n = \sqrt{D_n} = \sqrt{(1-p)\langle n\rangle},$$

$$\delta = \frac{\sigma_n}{\langle n\rangle} = \sqrt{\frac{1-p}{\langle n\rangle}}.$$

Задача 7.3. По нити, натянутой в трубке с высоким вакуумом, идет электрический ток. При этом происходит эмиссия электронов. Вероятность испускания электронов нитью в течение некоторого малого промежутка времени δt равна p. Определить: средний заряд $\langle Q\rangle$, испущенный нитью за время t, дисперсию заряда D_Q за это же время, отношение дисперсии тока D_I к среднему току $\langle I\rangle$, среднеквадратичное отклонение тока.

Решение

Средний заряд $\langle Q\rangle$, испущенный нитью, зависит от заряда электрона е и среднего числа электронов, покинувших нить за время *t:*

$$\langle Q\rangle = e\langle n\rangle.$$

С хорошим приближением можно считать, что испускание одного электрона никак не влияет на вероятность испускания других электронов, т.е. что испускание электронов - события статистически независимые. Вероятность испускания одного электрона за малый интервал времени Δt очень мала *(p* <C 1). Вероятность испускания одновременно двух электронов тем более мала: она равна p^2. Следовательно, этими событиями можно пренебречь. Тогда вероятность испускания электрона в *n* случаях из *N* независимых испытаний описывается биноминальным законом распределения:

$$P_n = C_N^n p^n q^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n},$$

где p – вероятность испускания электрона, а $q = 1-p$ – вероятность неиспускания электрона. Полное число независимых событий (испускание электрона или неиспускание электрона) равно числу интервалов Δt, т.е. $N = t/\Delta t$. Так как для биноминального распределения $\langle n\rangle = Np$, то среднее число электронов, покинувших нить, определится формулой

$$\langle n\rangle = Np = p\frac{t}{\Delta t}$$

и, следовательно, средний заряд

$$\langle Q\rangle = ep\frac{t}{\Delta t}.$$

Дисперсия заряда

$$D_Q = \langle \Delta Q^2\rangle = \langle Q^2\rangle - \langle Q\rangle^2 = e^2(\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2).$$

Для вычисления дисперсии в случае биноминального распределения удобно использовать дифференциальную формулу вида

$$\langle n^k\rangle = \underbrace{p\frac{\partial}{\partial p}(p\frac{\partial}{\partial p}}(\cdots(p+q)^n),$$

где производная по p вычисляется k раз. В частности, при $k = 1$ и $k = 2$ имеем из последней формулы соответственно

$$\langle n \rangle = Np,$$

$$\langle n^2 \rangle = Npq + N^2p^2.$$

Используя последнюю формулу для дисперсии заряда, получаем

$$D_Q = e^2Npq.$$

Так как $p \ll 1$, то можно принять $q = 1$. Поэтому

$$D_Q = \langle \Delta Q^2 \rangle = e^2Np = e^2\frac{t}{\Delta t}p.$$

Используя определение тока и формулу для среднего заряда, получаем для значения среднего тока

$$\langle I \rangle = \frac{\langle Q \rangle}{t} = \frac{eNp}{t} = \frac{eN}{\Delta t}.$$

Соответственно для дисперсии тока имеем

$$D_I = \langle \Delta I^2 \rangle = \frac{1}{t}(\langle \Delta Q^2 \rangle = \langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2) = \frac{e^2p}{t\Delta t},$$

а для отношения дисперсии тока к среднему току

$$\frac{D_I}{\langle I \rangle} = \frac{e}{t}.$$

Среднеквадратичное отклонение тока есть

$$\sigma_I = \sqrt{D_I} = \sqrt{\frac{eI}{t}}.$$

Задача 7.4. В одномерном кристалле с постоянной решетки a (расстояние между соседними узлами) каждые τ секунд атом перескакивает в соседний узел. При этом вероятности перескока направо и налево равны p и q соответственно. Найти: а) среднее значение координаты атома $\langle x \rangle$ в момент времени $t = N\tau$, где $N \gg 1$; б) среднеквадратичное отклонение координаты атома $\sigma_x = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}$ в момент времени t.

Решение

Выберем положительное направление оси x слева-направо. Пусть также в начальный момент времени атом находится в начале координат. Тогда имеем для средней координаты атома

$$\langle x \rangle = \sum_0^N \frac{N!}{n!(N-n)!}(2n-N)ap^n q^{N-n} =$$

$$= 2ap\frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_0^N \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n}\right) - Na =$$

$$= 2ap\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N - Na = Na(p-q).$$

Аналогично для среднего значения квадрата координаты атома получаем

$$\langle x^2 \rangle = \sum_0^N \frac{N!}{n!(N-n)!}(2n-N)^2 a^2 p^n q^{N-n} =$$

$$= 4a^2p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}(p+q)^N - 4(N-1)a^2p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N + N^2a^2 =$$

$$= Na^2[(N-1)(p-q)^2 + 1].$$

В результате среднеквадратичное отклонение координаты дается выражением

$$\sigma_x = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle} = \sqrt{(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)} = 2a\sqrt{Npq}.$$

Задача 7.5. Вычислить для сферической броуновской частицы массой $m = 10^{-11}$ г в воде при комнатной температуре 25^{0}С: а) среднюю длину траектории за 1 с; б) среднее смещение за это же время. Плотность вещества частицы $\rho = 2$ г/см^3, коэффициент вязкости воды $\eta = 1$ мПа·с .

Решение

а) Двигаясь вдоль траектории со средней скоростью $\langle v \rangle$, броуновская частица за время t пройдет расстояние $s = \langle v \rangle t$. Так как она находится в тепловом равновесии со средой (водой), то для ее скорости справедливо распределение Максвелла, и при $T = 298$ К средняя скорость равна

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 0,11 \text{ см/с}.$$

Следовательно, за 1 с средняя длина траектории частицы (пройденный путь) $S = 0,11$ см.

б) За это же время среднеквадратичное смещение броуновской частицы в воде

$\langle \Delta r^2 \rangle^{1/2} = (\langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle + \langle \Delta z^2 \rangle)^{1/2}$ можно найти по формуле Эйнштейна:

$$\langle \Delta r^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{kTt}{\pi\eta a}} = \sqrt{\left(\frac{4\pi\rho}{3m}\right)^{1/3} \frac{kTt}{\pi\eta}} = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

При записи последнего соотношения мы учли, что для сферической броуновской частицы $m = (4\pi/3)\rho a^3$.

Таким образом, смещение броуновской частицы оказалось на два с лишним порядка короче длины траектории.

Задача 7.6. На упругой нити с модулем кручения $\gamma_{\text{кр}} = 10^{-15}$ Н·м подвешено зеркальце. Вследствие беспорядочных ударов молекул оно совершает колебания (вращательное броуновское движение). Определить дисперсию и среднеквадратичное отклонение амплитуды колебаний. Температура воздуха 20^0С.

Решение

Уравнение движения нити есть

$$I\ddot{\varphi} = -\gamma_{\text{кр}}\varphi,$$

где I – момент инерции зеркальца относительно оси кручения. Из закона сохранения энергии

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{\text{кр}}\varphi^2 = \text{const}.$$

Следовательно имеем

$$\frac{1}{2}I\langle\dot{\varphi}^2\rangle + \frac{1}{2}\gamma_{\text{кр}}\langle\varphi^2\rangle = \frac{1}{2}kT,$$

где использована теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы. Тогда,

$$\langle\varphi^2\rangle = kT/\gamma_{\text{кр}}.$$

Учитывая, что $\langle\varphi\rangle = 0$, окончательно для дисперсии и среднеквадратичного отклонения амплитуды колебаний имеем

$$D_\varphi = \langle\varphi^2\rangle - \langle\varphi\rangle^2 = kT/\gamma_{\text{кр}} = 4 \cdot 10^{-6}$$

и

$$\sigma_\varphi = \sqrt{D_\varphi} = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Задача 7.7. Теплоизолированный сосуд объемом V разделен перегородкой на две части с объемами $V_1 = (2/3)V$ и $V_2 = (1/3)V$. В большей части находится один моль идеального газа; в меньшей – создан высокий вакуум. Определите изменение энтропии при удалении перегородки.

Решение

Удаление перегородки не изменяет энергии газа в теплоизолированном сосуде, но увеличивает доступный каждой молекуле объем в V/V_1 раз. Число доступных молекуле состояний пропорционально объему сосуда, поэтому число доступных одной молекуле состояний возрастает в V/V_1 раз. Так как в сосуде N молекул, то число доступных всем молекулам состояний увеличится в $(V/V_1)^N$ раз. Таким образом конечное число доступных состояний $\Omega_к$ связано с начальным числом доступных состояний Ω_0 соотношением

$$\Omega_к = \left(\frac{V}{V_1}\right)^N \Omega_0.$$

Энтропия системы связана с числом доступных состояний формулой Больцмана:

$$S = k \ln \Omega.$$

Изменение энтропии в рассматриваемом процессе равно:

$$\Delta S = S_к - S_0 = k \ln \frac{\Omega_к}{\Omega_0} = kN \ln \frac{V}{V_1}.$$

Для одного моля газа $N = N_A$ и поэтому $kN_A = R$. В результате имеем, что $\Delta S = R \ln(3/2) = 3,3$ Дж/К.

Задача 7.8. Один моль одноатомного идеального газа находится в сосуде при температуре $T_0 = 300$ К. Как и во сколько раз изменится статистический вес этой системы, если ее нагреть изохорически на $\Delta T = 1,0$ К?

Решение

Из формулы Больцмана имеем

$$\Delta S = k \ln \frac{\Omega}{\Omega_0}.$$

Изменение энтропии одного моля газа при изохорическом процессе

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = C_V \ln \frac{T}{T_0} = \frac{3}{2} R \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right).$$

Из сопоставления двух выражений для приращения энтропии получаем

$$\ln \frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{3}{2} N_A \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) \simeq \frac{3}{2} N_A \frac{\Delta T}{T_0} = 3 \cdot 10^{21}.$$

Здесь учтено, что $\Delta T/T_0 \ll 1$. Из последней формулы получаем:

$$\Omega/\Omega_0 = e^{3 \cdot 10^{21}} = 10^{1{,}3 \cdot 10^{21}}.$$

Задача 7.9. Имеется одномерный идеальный кристалл, содержащий N узлов. Атомы могут находиться в узлах кристалла, а также в межузельных позициях. Пусть ε – энергия, необходимая для перехода атома из узла в межузельную позицию. Пусть в положении равновесия n атомов из общего количества N находятся в межузельных позициях. Найти энтропию кристалла. Получить асимптотическую формулу для энтропии в случае, когда $n \gg 1$.

Решение

Имеются всего C_n^N способов выбора n атомов из общего количества N и C_n^N способов размещения их по N межузельным позициям, так что общее число микросостояний кристалла $\Omega = (C_n^N)^2$. Следовательно энтропия кристалла

$$S = k \ln \Omega = 2k \ln C_n^N = 2k \ln \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Когда $n \gg 1$ и $(N - n) \gg 1$, мы имеем по формуле Стирлинга

$$\ln n! = n \ln n - n,$$

так что

$$S = 2k[N \ln N - n \ln -(N-n)\ln(N-n)].$$

Замечание: Число атомов n, находящихся в межузельных позициях, может быть легко рассчитано с использованием формул квантовой статистической физики и равно

$$n = \frac{N}{e^{\epsilon/2kT}+1},$$

где T – равновесная температура кристалла.

Задачи для самостоятельного решения

[A]

7.10. Определить величину объема V в идеальном газе, в котором средняя квадратичная флуктуация числа частиц составляет $\alpha = 10^{-6}$ от среднего числа частиц в том же объеме. Определить также среднее число частиц в таком объеме. Газ находится в стандартных условиях.

Ответ: $V = 1/(N\alpha^2) = 3,7 \cdot 10^{-8}\text{см}^3$, $\langle n\rangle = 1/\alpha^2 = 10^{12}$, где N – число молекул в единице объема ($N = 2,7 \cdot 10^{19}\text{см}^{-3}$).

7.11. Идеальный газ находится в сосуде достаточно большого объема при температуре $t = 270^0$C и давлении $p = 1$ атм. Оценить среднеквадратичное отклонение σ_m числа молекул от среднего значения $\langle m\rangle$ в малом объеме $V =$

$= 1$ см^3, а также относительную флуктуацию числа молекул газа в этом объеме, т.е. отношение среднеквадратичного отклонения числа молекул от среднего значения к среднему значению $\sigma_m/\langle m\rangle$.

Ответ: $\sigma_m = (pV/kT)^{1/2} \approx 5 \cdot 10^9$, $\sigma_m/\langle m\rangle = (pV/kT)^{-1/2} \approx 2 \cdot 10^{-10}$.

7.12. В идеальном газе выделен объем V, содержащий N частиц. Давление газа p и температура T постоянны. Какова относительная флуктуация плотности в этом объеме?

Ответ: $\sqrt{\langle\rho^2\rangle/\langle\rho\rangle^2} = \sqrt{(kT/V)^2 (N/p^2)} = 1/\sqrt{N}$.

7.13. Идеальный газ находится при нормальных условиях. Найти диаметр сферы, в объеме которой относительная флуктуация числа молекул $\alpha = 1,0 \cdot 10^{-3}$. Каково среднее число молекул внутри такой сферы?

Ответ: $d = (6/\pi n_0 \eta^2)^{1/3} = 0,4$ мкм, где n_0 – число Лошмидта; $\langle n \rangle = 1/\eta^2 = 1,0 \cdot 10^6$.

7.14. Определить среднеквадратичное горизонтальное перемещение зерен краски гуммигута в воде при температуре 20^{0}С за 1 мин, если известно, что радиус зерен $a = 0,5$ мкм, а коэффициент вязкости воды $\eta = 0,01$ дин·с/см^2.

Ответ: $\sqrt{\langle \rho^2 \rangle} = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle} = \sqrt{2kT\tau/3\pi\eta a} \approx 10$ мкм.

7.15. Согласно Эйнштейну и Смолуховскому, число Авогадро можно определить, наблюдая броуновское движение зерен краски гуммигута и измеряя среднеквадратичное перемещение их в некотором фиксированном направлении. Чему равно это число, если среднеквадратичное перемещение за 5 мин зерен гуммигута радиуса $a = 0,385$ мкм в глицерине при температуре 20^{0}С равно 1,5 мкм? Вязкость глицерина $\eta = 1,49$ дин·с/см^2.

Ответ: $N = RT\tau/(3\pi a\eta \langle \Delta x^2 \rangle) \approx 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

7.16. Найти статистический вес наиболее вероятного распределения $N = 10$ одинаковых молекул по двум одинаковым половинкам сосуда. Определить вероятность такого распределения.

Ответ: $\Omega_{\text{вер}} = N!/[(N!)^2] = 252, \quad P_{N/2} = \Omega_{\text{вер}}/2^N = 24,6\%$.

7.17. N молекул идеального газа находятся в некотором сосуде. Разделим мысленно сосуд на две половины A и B. Найти вероятность того, что в половине A сосуда окажется n молекул. Рассмотреть случаи $N = 5$ и $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Ответ: $P_n = N!/[n!(N-n)2^N]$; 1/32, 5/32, 10/32, 10/32, 5/32, 1/32 соответственно.

7.18. В сосуде объемом V_0 находится N молекул идеального газа. Найти вероятность того, что в некоторой выделенной части этого сосуда, имеющего объем V, окажется n молекул. Рассмотреть, в частности, случай $V = V_0/2$.

Ответ: $P_n = N!/[n!(N-n)!]\, p^n\, (1-p)^{(N-n)}, \quad$ где $p = V/V_0$.

7.19. Некоторая термодинамическая система перешла из состояния 1 в состояние 2. Статистический вес второго состояния превосходит статистический вес первого состояния в $\eta = 2$ раза. Чему равно приращение энтропии системы?

Ответ: $\Delta S = 0,96 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

7.20. Статистический вес некоторой массы газа равен Ω_1. Определите статистический вес Ω_2 состояния в η раз большей массы того же газа. Температура и давление газа в обоих случаях одинаковы.

Ответ: $\Omega_2 = \Omega_1^{\eta}$.

7.21. Определить, во сколько раз увеличивается статистический вес Ω моля воды при переходе ее из жидкого в газообразное состояние при температуре 100^0C.

Ответ: В $10^{3,42 \cdot 10^{24}}$ раз.

[Б]

7.22. *N атомов гелия находятся при комнатной температуре в кубическом сосуде объемом 1,0 см^3. Найти:*

а) вероятность того, что все атомы соберутся в одной половинке сосуда;

б) примерное числовое значение N, при котором это событие можно ожидать на протяжение $t \approx 10^{10}$ лет (возраст Вселенной).

Ответ: а) $P = 1/2^N$; б) $N = \ln(t/\tau)/\ln 2 \approx 80$, где $\tau \sim 10$ мкс – среднее время пролета атомом гелия расстояния порядка размера сосуда.

7.23. Вакуумный фотоэлемент имеет в режиме насыщения чувствительность к свету $K = 0,12$ А/Вт. Какова относительная флуктуация числа электронов α, выбиваемых при падении на фотоэлемент светового потока мощностью $P = 1,3 \cdot 10^{-11}$ Вт? Время регистрации $\tau = 10^{-3}$ с.

Ответ: $\alpha \approx 0,01$.

7.24. Последовательный RLC-контур находится в равновесии с окружающими телами, имеющими температуру T. Найти среднеквадратичное отклонение тока в катушке индуктивности.

Ответ: $\sigma_I = \sqrt{kT/L}$.

7.25. В микроскоп рассматривают тонкий слой крови. Оценить, какое время потребуется, чтобы заметить броуновское смещение эритроцитов, плавающих в плазме крови, если минимальное расстояние, которое можно зафиксировать составляет $l = 10^{-6}$ м. Вязкость крови $\eta = 4,5 \cdot 10^{-3}$ Па·с, эритроцит считать шариком радиуса $a = 3$ мкм. Температура $t = 27^0C$.

Ответ: $\tau_{\min} = 3l^2\pi\eta a/(2kT) \approx 15$ сек.

7.26. На невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 3$ см подвешен маленький шарик массой $m = 0,03$ г так, что получившийся маятник может совершать колебания в одной вертикальной плоскости. Рассматривая маятник как броуновскую частицу, имеющую одну степень свободы и находящуюся в воздухе при комнатной температуре $T = 270$ К, оценить среднеквадратичное угловое флуктуационное отклонение маятника.

Ответ: $\sqrt{\langle\varphi^2\rangle} = \sqrt{kT/mgl}$.

7.27. Найти предельно малую массу, измеряемую пружинными весами при однократном измерении. Жесткость пружины β.

Ответ: $m = kT/(g\sqrt{\langle\Delta x^2\rangle}) = \sqrt{\beta kT}/g$.

7.28. Макроскопическая система поглощает 10^{-20} Дж энергии. При этом число доступных состояний системы увеличивается на 10%. Какова была начальная температура системы?

Ответ: $T = 725$ К.

7.29. Макросистема, энтропия которой равна 10 Дж/К, состоит из трех частей. Энтропия одной из них 6 Дж/К. Найти статистический вес Ω каждой из двух оставшихся, если их макросостояния одинаковы.

Ответ: $\Omega = 10^{6,3 \cdot 10^{22}}$.

7.30. Какое количество тепла необходимо сообщить макроскопической системе, чтобы при $T = 350$ К изотермически увеличить ее статистический вес в $\eta = 10^9$ раз?

Ответ: $Q = kT\ln\eta = 1,0 \cdot 10^{-19}$ Дж.

8. Реальные газы

- **Уравнение Ван-дер-Ваальса для реального газа:**

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT.$$

- **Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса:**

$$U = \nu C_V T - \frac{\nu^2 a}{V^2},$$

где C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

- **Соотношение между постоянными Ван-дер-Ваальса и параметрами критического состояния вещества:**

$$V_{M\text{кр}} = 3b, \quad p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}, \quad T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb}.$$

Задача 8.1. Один моль кислорода, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса, изотермически расширяется от объема V_1 до объема V_2. Определить совершенную газом работу и количество теплоты, сообщенное газу.

Решение

Работа расширения одного моля газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, определяется выражением:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V - b} dV - \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} dV =$$

$$= RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right).$$

Количество теплоты, переданное газу, определяется первым началом термодинамики $Q = \Delta U + A$. Изменение внутренней энергии при изотермическом расширении

$$\Delta U = -a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right),$$

следовательно,

$$Q = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}.$$

Задача 8.2. Найти приращение энтропии ν молей газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, при изотермическом расширении от объема V_1 до объема V_2. Считать величину молярной теплоемкости газа при постоянном объеме постоянной.

Решение

Для определения изменения энтропии воспользуемся основным уравнением термодинамики в дифференциальной форме:

$$TdS = dU + pdV.$$

Учитывая, что калорическое и термическое уравнения рассматриваемого газа имеют вид

$$U = \nu C_V T - \frac{a\nu^2}{V},$$

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2},$$

из основного уравнения термодинамики получаем

$$dS = \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V - b}.$$

Поскольку процесс изотермический ($dT = 0$), интегрируя полученное выражение, находим

$$\Delta S = \nu R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V - b} = \nu R \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}.$$

Задача 8.3. Углекислый газ, содержащий количество вещества $\nu =$ $= 1$ моль, находится в критическом состоянии. При изобарическом нагревании газа его объем V увеличивается в $k = 2$ раз. Определить изменение ΔT температуры газа, если его критическая температура $T_{\text{кр}} = 304$ К.

Решение

Для решения задачи удобно воспользоваться уравнением Ван-дер-Ваальса в приведенном виде. Введем безразмерные параметры:

$$\pi = p/p_{\text{кр}}, \quad \omega = V_M/V_{M\text{кр}}, \quad \tau = T/T_{\text{кр}}.$$

Используя явные выражения критических параметров через постоянные Ван-дер-Ваальса найдем:

$$p = \frac{a}{27b^2}\pi, \quad V_M = 3b\omega, \quad T = \frac{8a}{27bR}\tau.$$

Полученные величины подставим в обычное уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\left[\frac{a}{27b^2}\pi + \frac{a}{(3b\omega)}^2\right][3b\omega - b] = R\frac{8a}{27bR}\tau.$$

После сокращений получим

$$(\pi + 3/\omega^2)(3\omega - 1) = 8\tau. \tag{24}$$

Это и есть уравнение Ван-дер-Ваальса в приведенной форме. Оно не содержит никаких параметров, характеризущих индивидуальные свойства газа, и поэтому является универсальным.

Теперь ответим на вопрос задачи. По условию давление газа остается постоянным ($p = p_{\text{кр}}$), поэтому $\pi = 1$; молярный объем увеличился в два раза ($V_M = 2V_{M\text{кр}}$), следовательно $\omega = 2$. Теперь выразим из уравнения (24) приведенную температуру

$$\tau = (1/8)(\pi + 3/\omega^2)(3\omega - 1).$$

Подставив сюда значения π и ω и произведя вычисления, найдем

$$\tau = 35/32.$$

Тогда изменение температуры

$$\Delta T = T - T_{\text{кр}} = \tau T_{\text{кр}} - T_{\text{кр}} = 28\,\text{К}.$$

Задача 8.4. Получить уравнение адиабаты для газа Ван-дер-Ваальса, если заданы a, b и C_V.

Решение

Первое начало термодинамики для адиабатического квазистатического процесса в газе запишется так:

$$\delta Q = dU + pdV = 0.$$

Рассматривая внутреннюю энергию U как функцию переменных T и V, имеем:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV.$$

Тогда, учитывая уравнение Ван-дер-Ваальса

$$(p + a/V^2)(V - b) = RT,$$

первое начало для адиабатического процесса можно записать в виде

$$C_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \right] = 0. \tag{25}$$

Так как для моля газа Ван-дер-Ваальса

$$U = C_V T - a/V,$$

то уравнение (25) можно переписать в виде

$$C_V dT + (RT/(V - b)dV = 0. \tag{26}$$

Из (26)

$$\int \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \int \frac{dV}{V - b},$$

или

$$\ln T = -(R/C_V) \ln(V - b) + \text{const},$$

откуда уравнение адиабаты газа Ван-дер-Ваальса в переменных T и V:

$$T(V - b)^{(R/C_V)} = \text{const}.$$

В переменных p и V уравнение адиабаты можно записать как

$$(p + a/V^2)(V - b)^{(C_V + R)/C_V} = \text{const}.$$

ч

Задача 8.5. Для демонстрации критического состояния вещества изготавливают запаянную стеклянную ампулу, содержащую такое количество жидкости, для которого объем ампулы является критическим. В процессе нагревания ампулы жидкость пройдет через последовательность состояний, включающую и критическое.

Вычислить, какое количество эфира должно быть в ампуле объемом $V = 28,5$ см^3, чтобы наблюдать критическое состояние. Для эфира $T_{кр} = 467$ К, $p_{кр} = 3,59 \cdot 10^6$ Па, $M = 74$ кг/кмоль.

Решение

Критический объем для произвольной массы газа

$$V_{кр} = \nu V_{Mкр} = \frac{m}{M} 3b.$$

По условию задачи $V_{кр} = V$. Тогда для необходимой массы жидкости получаем

$$m = MV/3b.$$

Из формул

$$T_{кр} = 8a/27Rb, \quad p_{кр} = a/27b^2$$

определим b:

$$b = T_{кр}R/8p_{кр}.$$

В результате окончательно получаем массу жидкости:

$$m = 8Mp_{кр}V/3T_{кр}R = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Задача 8.6.. Получить формулу для дифференциального коэффициента Джоуля-Томсона газа Ван-дер-Ваальса, пренебрегая квадратами и высшими степенями ван-дер-ваальсовых постоянных a и b. Найти температуру инверсии для газа Ван-дер-Ваальса.

Решение

Дифференциальный коэффициент Джоуля-Томсона для дроссельного эффекта вводится при бесконечно малых перепадах давлений. Он является количественной характеристикой эффекта-Джоуля-Томсона и определяется формулой:

$$\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V}{C_p}.$$

Здесь H – энтальпия, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\alpha$, где α – коэффициент объемного расширения газа.

Для идеального газа $\mu = 0$ и изменения температуры не происходит. Найдем μ для газа Ван-дер-Ваальса. Для этого перепишем уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа в виде

$$pV + a/V - ab/V^2 - pb = RT, \tag{27}$$

которое после дифференцирования по T при $p = \text{const}$ имеет вид

$$(p - a/V^2 + 2ab/V^2)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = R.$$

Подставив p из (27), получим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{RV^3(V-b)}{RTV^3 - 2a(V-b)^2},$$

откуда

$$\mu = \frac{1}{C_p}\,\frac{(2a/RT)(1-b/V)^2 - b}{1-(2a/RTV)(1-b/V)}.$$

Пренебрежем квадратами и высшими степенями поправок a и b, что возможно при не очень больших давлениях (до $10^7 \div 2\cdot 10^7$ Па), так как в этом случае $b \ll V$ и $2a/RTV \ll 1$. Окончательно получим

$$\mu = \frac{2a/RT - b}{C_p}.$$

Температуру инверсии найдем из условия $\mu = 0$. Отсюда $T_i = 2a/Rb$. При температурах $T < T_i$ газ при дросселировании будет охлаждаться, при $T > T_i$ – нагреваться. Критическая температура для газа равна $T_\text{к} = 8a/27Rb$. Сравнивая выражения для температуры инверсии и критической температуры, находим, что

$$T_i = 6,75T_\text{к}.$$

Это соотношение, полученное с использованием достаточно грубых приближений, вполне удовлетворительно подтверждается на опыте. В частности, для гелия $T_\text{к} = 5,3$ К. Тогда температура инверсии гелия $T_i = 35,8$ К.

Задачи для самостоятельного решения

[А]

8.7. Какому давлению необходимо подвергнуть углекислый газ при $T = 300$ К, чтобы его плотность оказалась равной $\rho = 500$ г/л. Расчет провести как для идеального газа, так и для газа Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $p_{ид} = \rho RT/M = 280$ атм; $p = \rho RT/M(M - \rho b) - a\rho^2/M^2 = 80$ атм.

8.8. Криптон, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находится при температуре $T = 300$ К. Определить относительную погрешность $\varepsilon = \Delta p/p$, которая будет допущена при вычислении давления, если вместо уравнения Ван-дер-Ваальса использовать уравнение Менделеева-Клапейрона. Вычисление выполнить для двух значений объема: а) $V = 2$ л, б) $V = 0,2$ л.

Ответ: а) 0,0264; б) 0,272.

8.9. Один моль некоторого газа находится в сосуде объемом $V = 0,250$ л. При $T_1 = 300$ К давление газа $p_1 = 90$ атм, а при $T_2 = 350$ К давление $p_1 = 110$ атм. Найти постоянные Ван-дер-Ваальса для этого газа.

Ответ: $a = V^2(T_1p_2 - T_2p_1)/(T_2 - T_1) = 0,19$ Па $\cdot$ м^6/моль^2; $b = V - R(T_2 - T_1)/(p_2 - p_1) = 0,042$ л/моль.

8.10. Найти, во сколько раз давление газа больше его критического давления, если известно, что его объем и температура вдвое больше критических значений этих величин.

Ответ: $p/p_{кр} \simeq 2,5$.

8.11. Найти удельный объем бензола (C_6H_6) в критическом состоянии, если критическая температура $T_{кр} = 562$ К и критическое давление $p_{кр} = 73$ атм.

Ответ: $v_{кр} = 3RT_{кр}/8Mp_{кр}$.

8.12. Вычислить критическую плотность: а) воды, б) углекислого газа.

Ответ: а) $\rho_{кр} = 200$ кг/м^3, б) $\rho_{кр} = 340$ кг/м^3.

8.13. Найти температуру инверсии для азота и водорода.

Ответ: $t_{N_2} = 600^0$C, $t_{H_2} = 57^0$C.

8.14. Какую часть объема сосуда должен занимать жидкий эфир при комнатной температуре, чтобы при критической температуре он оказался в критическом состоянии? Для эфира $T_{\text{кр}} = 467$ K, $p_{\text{кр}} = 35,5$ атм, $M = 74$ г/моль.

Ответ: $\eta = 8Mp_{\text{кр}}/3\rho RT_{\text{кр}} = 0,25$, где ρ – плотность эфира при комнатной температуре.

8.15. Один моль азота расширяется в пустоту от начального объема $V_1 = 1,0 \cdot 10^{-3}\text{м}^3$ до конечного объема $V_2 = 1,0 \cdot 10^{-2}\text{м}^3$. Найти понижение температуры газа в этом процессе, считая, что равновесные состояния газа описываются уравнением Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $\Delta = T_2 - T_1 = a/C_V(1/V_1 - 1/V_2) = 0,25$ K.

[Б]

8.16. Определить для газа Ван-дер-Ваальса разность молярных теплоемкостей.

Ответ: $C_p - C_V = R/[1 - 2a(V-b)^2/RTV^2]$.

8.17. Найти уравнение политропы для газа Ван-дер-Ваальса, теплоемкость которого не зависит от температуры, а теплоемкость политропического процесса равна C.

Ответ: $(p + a/V^2)(V-b)^{(R+C_V-C)/(C_V-C)} = \text{const}$.

8.18. Два моля кислорода, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, адиабатически расширились в пустоту от объема V_1 до объема V_2. Заданы критические параметры кислорода $T_{\text{кр}}$ и $V_{\text{кр}}$. Определить, какое количество теплоты нужно подвести к газу, чтобы после расширения газ вернулся к начальной температуре, оставаясь в объеме V_2.

Ответ: $Q = (9/8)\nu^2 RV_{\text{кр}}T_{\text{кр}}(1/V_1 - 1/V_2)$.

8.19. Адиабатное расширение воздуха дросселированием производят при температуре $T = 27^0$C и перепаде давлений $\Delta p = 1$ атм; постоянные Ван-дер-Ваальса $a = 1,39$ атм л^2/моль^2, $b = 0,039$ л/моль и $C_p = 7$ кал/моль $\cdot$ K. Определить понижение температуры воздуха при его дросселировании.

Ответ: $\Delta T = -0,25$ K.

9. Поверхностные явления в жидкостях

- **Добавочное давление в жидкости под искривленной поверхностью (формула Лапласа):**

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, R_1, R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений искривленной поверхности жидкости.

- **Модуль силы поверхностного натяжения:**

$$F_{пов} = \sigma l,$$

где l – длина контура, ограничивающего поверхность жидкости.

- **Приращение свободной энергии поверхностного слоя жидкости:**

$$dF = \sigma dS,$$

где dS – приращение площади поверхностного слоя жидкости.

Задача 9.1. В дне стеклянного сосуда со ртутью имеется малое круглое отверстие радиуса r. При какой толщине слоя h ртути она не будет вытекать через это отверстие?

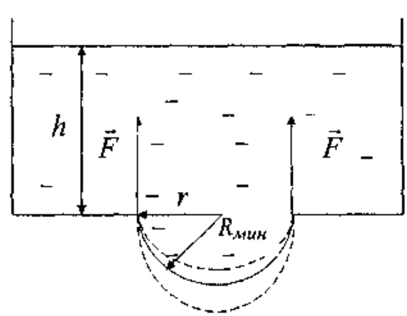


Рис. 12

Решение

Максимальная толщина слоя, при которой ртуть не вытекает, возможна при условии, что радиус кривизны мениска минимален. Из рис. 12 видно, что это соответствует условию $R = R_{мин} = r$. В этом случае силы поверхностного натяжения направлены вертикально вверх, и соответствующая результирующая сила будет максимальной. Таким образом

$$h \le 2\sigma/(\rho g r),$$

где ρ – плотность ртути.

Задача 9.2. Вертикально расположенная капиллярная трубка длиной l с запаянным верхним концом приведена в соприкосновение своим нижним концом с поверхностью воды (рис. 13). На какую высоту поднимется вода в трубке, если ее радиус $r = 2,0 \cdot 10^{-4}$ м? Атмосферное давление $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$ Па. Считать, что вода полностью смачивает трубку.

Решение

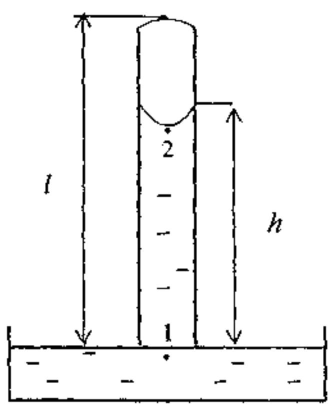


Рис. 13

Рассмотрим столбик ртути, находящийся в равновесии в капилляре, после, того как он уже поднялся под действием сил поверхностного натяжения. Согласно условию равновесия разность давлений у его концов равна гидростатическому давлению, производимому столбиком жидкости высотой h на его основание, т.е.

$$p_1 - p_2 = \rho g h, \tag{24}$$

где p_1 и p_2 – давление внизу и вверху столба соответственно.

Найдем величины p_1 и p_2. Давление внизу столба (точка 1 на рис. 13) равно давлению в воде у ее открытой поверхности, т.е. атмосферному давлению:

$$p_1 = p_0, \tag{25}$$

так как в противном случае жидкость у нижнего края трубки не была бы в равновесии.

Поскольку столб воды ограничен сверху изогнутой поверхностью, давление p_2 вверху (точка 2) отличается от давления $p_в$ в трубке на величину Δp, определяемую формулой Лапласа $\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, т.е.

$$p_2 = p_в + \Delta p, \tag{26}$$

Так как данный мениск вогнутый, то $\Delta p < 0$. При расчете Δp учтем, что мениск в узком капилляре имеет форму полусферы и, следовательно, $R_1 = R_2 = r$. Поэтому

$$\Delta p = -2\sigma/r. \tag{27}$$

Поскольку смачивание полное ($\theta = 0$), то радиус мениска $R = r/\cos\theta = r$.

Давление воздуха в трубке можно выразить через данные величины p_0, l, а также высоту столба h при помощи закона Бойля-Мариотта. Воздушный столб высотой $l-h$ при давлении $p_в$ имел при атмосферном давлении p_0 высоту l. Поскольку объем столба пропорционален его длине, то можно записать:

$$p_в(l-h) = p_0 l \quad \text{или} \quad p_в = p_0 l/(l-h). \tag{28}$$

Подставим в (24) значения p_1 и p_2 из (25) и (26), учитывая соотношения (27) и (28):

$$p_0 - \left(p_0\frac{l}{l-h} - \frac{2\sigma}{r}\right) = \rho g h.$$

Решив квадратное уравнение относительно h и подставив числовые значения для известных параметров, находим корни:

$h_1 = 11$ м, $\qquad h_2 = 0,014$ м.

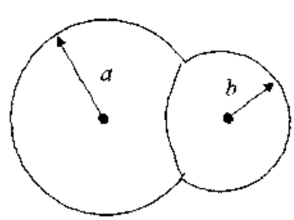


Рис. 14

Поскольку должно выполняться очевидное неравенство $h < l$, то ответом на поставленный вопрос является второе значение.

Задача 9.3. На мыльном пузыре радиуса a "сидит" пузырь радиуса b. Имея ввиду, что $b < a$, найти радиус R кривизны пленки, их разделяющей (рис. 14). Каковы углы между пленками в месте их соприкосновения?

Решение

Избыточные давления воздуха в обоих пузырях:

$$\Delta p_a = \frac{4\sigma}{a}, \quad \Delta p_b = \frac{4\sigma}{b}.$$

При записи формул мы учли, что каждая пленка имеет два поверхностных слоя. Давление воздуха внутри пузыря радиуса a вместе с давлением, создаваемым разделяющей пузыри пленкой, должно уравновесить давление внутри меньшего пузыря радиусом b. Следовательно

$$\frac{4\sigma}{a} + \frac{4\sigma}{R} = \frac{4\sigma}{b},$$

откуда

$$R = ab/(a - b).$$

Силы поверхностного натяжения в любой точке поверхности соприкосновения пузырей уравновешивают друг друга и равны между собой. А это возможно только в том случае, когда углы между векторами сил равны 120°.

Задача 9.4. Капля ртути массой m = 1,36 г введена между горизонтальными параллельными пластинами. Какую силу нужно приложить для того, чтобы расплющить каплю до толщины d = 0,11 мм? Весом пластин пренебречь. Краевой угол $\vartheta = 135^0$.

Решение

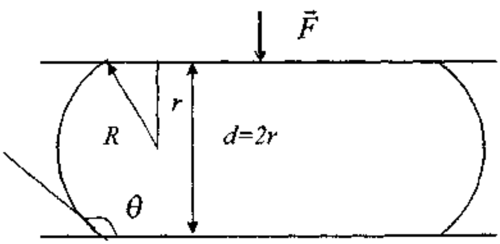


Рис. 15

Сплюснутая капля имеет вид тонкого диска с выпуклой боковой поверхностью. Возникающее вследствие кривизны поверхности давление определяется формулой Лапласа

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где $R_1 \to \infty$ – средний радиус кривизны поверхности ртути в плоскости, паралелльной стеклянным пластинам (рис. 15),

$$R_2 = r/|\cos\theta| = d/2|\cos\theta| \ (\cos\theta \ < 0)$$

– радиус кривизны ртути в плоскости, перпендикулярной стеклянным пластинам. Так как данный мениск выпуклый, то избыточное давление, создаваемое искривленной поверхностью, $\Delta p > 0$. Тогда

$$\Delta p = 2\sigma|\cos\theta|/d.$$

Дополнительное давление уравновешивается внешним давлением, создаваемым действием искомой силы F:

$$\Delta p = F/S,$$

где S – площадь соприкосновения капли ртути со стеклом. Пренебрегая выпуклостью боковой поверхности диска, можно принять, что

$$S = m/(\rho d),$$

где ρ – плотность ртути.

Тогда для силы F получаем

$$F = \sigma\left(\sqrt{\frac{\pi\rho d}{m}} + \frac{2}{d}\right)\frac{m}{\rho d} \simeq 10\,\text{Н}.$$

Задача 9.5. Вертикальный капилляр привели в соприкосновение с поверхностью воды. Какое количество тепла выделится при поднятии воды по капилляру? Смачивание считать полным, поверхностное натяжение равно ст.

Решение

Так как в конечном состоянии жидкости ее кинетическая энергия равна нулю, то работа, совершаемая силами поверхностного натяжния при поднятии жидкости, идет на сообщение ей потенциальной и внутренней энергии:

$$A = \Delta E_{\text{п}} + \Delta U.$$

Изменение внутренней энергии равно количеству теплоты, выделяющейся при поднятии воды в капилляре, т.е. $Q = \Delta U$.

Выражение для работы сил поверхностного натяжения при полном смачивании есть

$$A = F_{\text{пов}} h.$$

Здесь $F_{\text{пов}} = \sigma 2\pi r$; $h = 4\sigma/(\rho g r)$, где r – радиус капилляра, h – высота столба жидкости в капилляре. Тогда

$$A = 4\pi\sigma^2/(\rho g).$$

Приращение потенциальной энергии жидкости

$$\Delta E_{\text{п}} = mgh/2 = 2\pi\sigma^2/(\rho g),$$

где $m = \rho V = \rho\pi r^2 h$. В результате всех подстановок получаем

$$Q = A - \Delta E_{\text{п}} = 2\pi\sigma^2/(\rho g).$$

Задача 9.6. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь радиусом $R = 5$ см? Коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma = 0,04$ Н/м. Процесс выдувания считать изотермическим.

Решение

Искомая работа состоит из двух частей: $A = A_1 + A_2$. Первая часть A_1 – работа, затрачиваемая на создание двух сферических поверхностей, ограничивающих мыльный пузырь. Для изотермического процесса эта работа равна изменению свободной энергии двух поверхностных слоев мыльной воды:

$$A_1 = \Delta F = 2\sigma 4\pi R^2.$$

Вторая часть A_2 – работа, затрачиваемая на сжатие воздуха в пузыре, может быть вычислена по формуле

$$A_2 = -\int\limits_{V_1=V_0}^{V_2=V_{\text{К}}} p dV.$$

Для изотермического процесса по закону Бойля-Мариотта для сжимаемой массы воздуха имеем

$$p_0V_0 = p_кV_к = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{R}\right)V_к, \quad V_к = \frac{4\pi}{3}R^3$$

или

$$V_0 = \frac{p_кV_к}{p_0}, \quad p_к = p_0 + \frac{4\sigma}{R}.$$

Для промежуточных состояний воздуха $pV = p_0V_0$, тогда работа

$$A_2 = -p_0V_0\ln\frac{V_к}{V_0} = pV_к\ln\frac{V_к}{p_0} = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{R}\right)\frac{4\pi}{3}R^3\ln\left(1 + \frac{4\sigma}{Rp_0}\right). \qquad (29)$$

Учитывая, что $\xi = 4\sigma/Rp_0 \ll 1$, раскладываем натуральный логарифм в ряд и ограничиваемся учетом слагаемых первого порядка малости по параметру ξ. Тогда

$$\ln\left(1 + \frac{4\sigma}{Rp_0}\right) \simeq \frac{4\sigma}{Rp_0}.$$

Оставляя в выражении (29) только слагаемые первого порядка по малому параметру ξ, получаем окончательный ответ для полной работы

$$A = 8\pi R^2\sigma(1 + 2/3) = (40/3)\pi R^2\sigma \simeq 4{,}2\cdot 10^{-3}\text{Дж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

[A]

9.7. Найти капиллярное давление:

а) в капельках ртути диаметром $d = 1{,}5$ мкм;

б) внутри мыльного пузырька диаметром $d = 3{,}0$ мм, если поверхностное натяжение мыльной воды $\sigma = 45$ мН/м.

Ответ: а) $\Delta p = 4\sigma/d = 13$ атм; б) $\Delta p = 8\sigma/d = 1{,}2\cdot 10^{-3}$ атм.

9.8. На дне пруда выделился пузырек газа диаметром $d = 4{,}0$ мкм. При подъеме пузырька к поверхности воды его диаметр увеличился в $n = 1{,}1$ раза. Найти глубину пруда в данном месте. Атмосферное давление нормальное, процесс расширения газа считать изотермическим.

Ответ: $h = [p_0(n^3 - 1) + 4\sigma(n^2 - 1)/d]/(\rho g) = 5$ м.

9.9. Мыльная вода вытекает из капилляра по каплям. В момент отрыва капли диаметр ее шейки равен 1 мм. Масса капли 0,0125 г. Определите коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды.

Ответ: $\sigma = mg/(\pi d) = 3,9 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

9.10. Большая и тонкая пластина не тонет, если ее осторожно положить на поверхность воды. Определите максимальную массу единицы ее площади. Пластина водой не смачивается.

Ответ: $m = 0,55$ г/см^2.

9.11. Смачиваемый водой кубик массой $m = 0,02$ кг плавает на поверхности воды. Ребро кубика имеет длину $a = 0,03$ м. На каком расстоянии x от поверхности воды находится нижняя грань кубика?

Ответ: $x = (mg + 4\sigma a)/(\rho g a^2) \simeq 0,023$ м.

9.12. Длинную стеклянную капиллярную трубку, радиус канала которой $r = 1$ мм, закрыли снизу и наполнили водой. Трубку поставили вертикально и открыли ее нижний конец, при этом часть воды вылилась. Какова высота столба оставшейся в капилляре воды? Смачивание считать полным.

Ответ: $h = 4\sigma/(\rho g r)$.

9.13. Чтобы стряхнуть ртуть в медицинском термометре, нужно ускорение $a \sim 10g$. Оценить радиус перетяжки в капилляре термометра. Длина столбика ртути выше перетяжки $h \sim 5$ см, плотность ртути $\rho = 13600$ кг/м^3, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0,49$ Н/м.

Ответ: $r \sim 2\sigma/\rho a h \simeq 1,5 \cdot 10^{-3}$ см.

9.14. Найти разность уровней ртути в двух сообщающихся капиллярах, диаметры которых $d_1 = 0,5$ мм и $d_2 = 1,0$ мм. Краевой угол $\theta = 138^0$.

Ответ: $\Delta h = 4\sigma|\cos\theta|(d_2 - d_1)/(\rho g d_2 d_1) = 11$ мм.

[Б]

9.15. Вертикальный стеклянный капилляр длины $l = 110$ мм с диаметром внутреннего канала $d = 20$ мкм опустили в воду. Верхний конец капилляра запаян. Наружное давление воздуха нормальное. Какая длина x капилляра должна быть погружена в воду, чтобы уровень воды в капилляре совпадал с поверхностью воды в нем?

Ответ: $x = l/(1 + p_0 d/4/\sigma) = 1,4$ см.

9.16. Стеклянный стержень диаметром $d_1 = 1,5$ мм вставили симметрично в стеклянный капилляр с диаметром внутреннего канала $d_2 = 2,0$ мм. Затем всю систему установили вертикально и привели в соприкосновение с поверхностью воды. На какую высоту поднимется вода в таком капилляре?

Ответ: $h = 4\sigma/[\rho g(d_2 - d_1)] = 6$ см.

9.17. На какую высоту h поднимется вода между двумя вертикальными стеклянными пластинками, частично погруженными в воду, если расстояние между ними $d = 0,5$ мм? Смачивание считать полным.

Ответ: $h = 2\sigma/(\rho g d) \simeq 3$ см.

9.18. Капля воды массой $m = 0,01$ г введена между двумя параллельными стеклянными пластинами, полностью смачиваемыми водой. Как велика сила притяжения между пластинами, если они находятся на расстоянии $d = 10^{-4}$ см друг от друга?

Ответ: $F = 2\sigma m/(\rho d^2) \approx 1,46 \cdot 10^3$ Н.

9.19. С какой силой F притягиваются две вертикальные и параллельные стеклянные пластинки, частично погруженные в воду так, что расстояние между ними равно $d = 0,1$ мм? Ширина пластинок $l = 15$ см. Смачивание считать полным. Высота пластинок такова, что поднявшаяся вода не доходит до их верхних краев.

Ответ: $F = 2\sigma l/(\rho g d^2) \approx 10$ Н.

9.20. Маленькая капля жира радиуса r плавает на поверхности жидкости, поверхностное натяжение которой равно σ (рис. 16). Поверхностное натяжение жира на границе воздух-жир σ_1, а на границе жир-жидкость σ_2. Определите толщину капли.

Рис. 16

Ответ:

$$h = r\sqrt{\frac{(\sigma + \sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)}\frac{\sigma}{\sigma^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2}}.$$

9.21. Найти свободную энергию поверхностного слоя капли ртути диаметром $d = 1,4$ мм.

Ответ: $F = \pi\sigma d^2 = 3$ мкДж.

9.22. Найти приращение свободной энергии поверхностного слоя при изотермическом слиянии двух одинаковых капель ртути, каждая диаметром $d = 1,5$ мм.

Ответ: $\Delta F = 2\pi\sigma d^2(2^{-2/3} - 1) = -1,5$ мкДж.

9.23. Мыльная пленка имеет толщину $h = 10^{-3}$ и температуру $T = 300$ К. Вычислить уменьшение температуры этой пленки, если ее растянуть адиабатически настолько, что площадь пленки удвоится. Поверхностное натяжение мыльного раствора убывает на 0,15 дин/см при повышении температуры на 1^0С.

Ответ: $\Delta T = (2T/c_v h)d\sigma/dT \approx -0,02$ К.

9.24. На каком расстоянии от крана радиус струи воды уменьшится в полтора раза. Скорость выходящей из крана воды равна 0,3 м/с, начальный радиус струи 2 мм.

Ответ: $h \simeq 2$ см.

10. Твердые тела

- **Период кристаллической решетки кубической системы:**

$$a = \left(\frac{nM}{m\rho N_A}\right)^{1/3},$$

где m – число одинаковых атомов в формуле химического соединения, n – число одинаковых атомов в элементарной ячейке, ρ – плотность кристалла, M – молярная масса кристалла.

- **Расстояние d между атомами в кубической решетке:**

гранецентрированной $\quad d = a/\sqrt{2}, \qquad$ **объемноцентрированной,** $\quad d = (a/2)\sqrt{3}.$

- **Индексы узлов – $[[mnp]]$ (отрицательный индекс обозначается как $\overline{m}$), индексы направлений – $[mnp]$ и индексы плоскости (индексы Миллера) – (hkl).**

- **Межплоскостное расстояние для простой кубической решетки:**

$$d = a/\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}.$$

- **Закон Дюлонга-Пти для молярной теплоемкости C_V кристаллов:**

$$C_V = 3R.$$

- **Молярная колебательная теплоемкость кристалла при $T \ll \Theta$:**

$$C_V = \frac{12}{5}\pi^4 \mathrm{R} \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3,$$

где $\Theta = \hbar\omega_{max}/k$ – температура Дебая и ω_{max} – максимальная частота упругих колебаний в кристалле.

Задача 10.1. Определить период решетки a и расстояние d между ближайшими соседними атомами кристалла кальция (решетка гранецентрированной кубической сингонии). Плотность кальция $\rho = 1550$ кг/м^3.

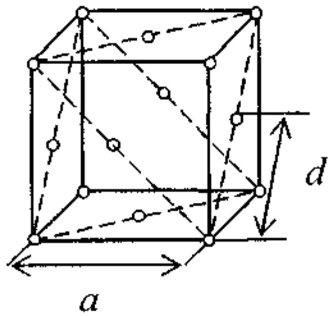


Рис. 17

Решение

Период кристаллической решетки связан с объемом элементарной ячейки соотношением $V = a^3$ (рис. 17).

С другой стороны, объем элементарной ячейки равен отношению молярного объема к числу элементарных ячеек в одном моле кристалла: $V = V_M/N_M$. приравняв правые части двух выражений для V найдем

$$a^3 = V_M/N_M.$$

Молярный объем кальция $V_M = M/\rho$, где ρ – плотность кальция. Число элементарных ячеек в одном моле $N_M = N_A/n$, где n – число атомов, приходящихся на одну ячейку. Отсюда

$$a = \sqrt[3]{nM/(\rho N_A)}. \tag{30}$$

Вычислим теперь параметр n. Для гранецентрированной кубической решетки в элементарной ячейке имеются два типа узлов: находящихся в вершинах куба и находящихся на гранях куба в точке пересечения диагоналей. Узлов первого типа- В ячейке 8 и каждый из них принадлежит 8 различным элеметарным ячейкам. Узлов второго типа 6 и каждый из них принадлежит 2 соседним ячейкам. В результате общее число узлов, приходящихся на одну элементарную ячейку в гранецентрированной решетке:

$$n = (1/8) \cdot 8 + (1/2) \cdot 6 = 4.$$

Подставляя в (30) значения параметров для кальция, находим a = 556 пм. Соответственно расстояние между ближайшими соседними атомами $d = a/\sqrt{2} =$
$= 394$ пм.

Задача 10.2. Написать индексы направлений прямой, проходящей через узлы [[100]] и [[001]] в кубической примитивной ячейке.

Решение

Запишем в общем виде уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве, с индексами узлов $[[m_1, n_1, p_1]]$ и $[[m_2, n_2, p_2]]$:

$$\frac{x - m_1}{m_2 - m_1} = \frac{y - n_1}{n_2 - n_1} = \frac{z - p_1}{p_2 - p_1}. \quad (31)$$

Величины, стоящие в знаменателе, пропорциональны направляющим косинусам прямой. Но так как эти величины целочисленны, то они и будут являться индексами направлений. Подставляя в (31) значения индексов узлов, получаем

$$m_2 - m_1 = -1, \quad n_2 - n_1 = 0, \quad p_2 - p_1 = 1.$$

Таким образом, искомые индексы направления [101].

Задача 10.3. Написать индексы Миллера для плоскости, содержащей узлы с индексами [[200]], [[101]] и [[001]]. Решетка кубическая примитивная.

Решение

Индексы Миллера равны наименьшим целочисленным коэффициентам при переменных в уравнении плоскости. Поэтому решение задачи по определению индексов Миллера сводится, по существу, к отысканию уравнения плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки с координатами $[[m_1, n_1, p_1]]$, $[[m_2, n_2, p_2]]$, $[[m_3, n_3, p_3]]$ дается определителем третьего порядка

$$\begin{vmatrix} x-m_1 & y-n_1 & z-p_1 \\ m_2-m_1 & n_2-n_1 & p_2-p_1 \\ m_3-m_1 & n_3-n_1 & p_3-p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В рассматриваемом случае определитель принимает вид

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$x + 2y + 2z = 2.$$

В результате, находим индексы Миллера искомой плоскости (1 2 2).

Задача 10.4. Одинаковые массы свинца ^{207}Pb и кремния ^{28}Si охлаждают с помощью жидкого гелия от температуры $T_1 = 20$ K до $T_2 = 4{,}2$ K. Температура кипения гелия равна при нормальном давлении 4,2 K. Оценить отношение масс жидкого гелия, необходимых для охлаждения свинца и кремния, если известно, что дебаевские температуры равны $\Theta_{\text{св}} = 95$ K и $\Theta_{\text{кр}} = 645$ K.

Решение

Так как начальная температура много меньше температур Дебая обоих веществ, то для теплоемкости справедливо низкотемпературное приближение. Теплоемкость вещества массой m равна $(m/M)C_V$. Тогда модуль теплоты, отбираемой при охлаждении у тела, равен

$$Q = \int_{T_2}^{T_1} \frac{m}{M} C_V dT = \frac{12m}{5M}\pi^4 R \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 dT =$$

$$= \frac{3\pi^4 Rm}{5M\Theta^3}(T_1^4 - T_2^4) \approx \frac{3\pi^4 Rm}{5M\Theta^3} T_1^4.$$

Учитывая, что масса испарившегося гелия пропорциональна величине отбираемой у тела теплоты, а массы веществ одинаковы, получаем для отношения масс испарившегося гелия

$$\frac{m_{\text{св}}}{m_{\text{кр}}} = \frac{M_{\text{кр}}}{M_{\text{св}}} \left(\frac{\Theta_{\text{кр}}}{\Theta_{\text{св}}}\right)^3 \approx 42.$$

Задачи для самостоятельного решения

[A]

10.5. Сколько узлов приходится на одну элементарную ячейку объемоцентрированной решетки кубической сингонии.

Ответ: $n = 2$.

10.6. Найти плотность ρ кристалла стронция, если известно, что решетка гранецентрированная кубической сингонии, а расстояние d между ближайшими соседними атомами равно 0,43 нм.

Ответ: $\rho = 2600$ кг/м^3.

10.7. Альфа-железо имеет кубическую объемоцентрированную структуру ($a = 28,6$ нм), гамма-железо – кубическую гранецентрированную решетку ($a = 35,6$ нм). Как изменится плотность железа при переходе его из α– в γ-модификацию.

Ответ: Увеличится на 4%.

10.8. Написать индексы Миллера для плоскостей, содержащих узлы с кристаллографическими индексами:

а) $[[111]], [[1\bar{1}2]], [[\bar{1}01]]$, б) $[[1\bar{1}1]], [[010]], [[\bar{1}\bar{1}1]]$.

Ответ: а) $(1\bar{1}4)$; б) (012).

10.9. Зная период решетки, определить межплоскостные расстояния d_{100}, d_{110} и d_{111} для кубической решетки: а) простой; б) объемноцентрированной; в) гранецентрированной.

Ответ: а) a, $a/\sqrt{2}$, $a/\sqrt{3}$; б) $a/2$, $a/\sqrt{3}$, $a/\sqrt{12}$; в) $a/2$, $a/\sqrt{8}$, $a/\sqrt{3}$.

10.10. Определить параметр a примитивной кубической решетки, если межплоскостное расстояние d для системы плоскостей, заданных индексами Миллера (212), при ренгеноструктурном измерении оказалось равным 0,12 нм.

Ответ: 0,36 нм.

10.11. Вычислить удельную теплоемкость c_V кристаллов меди по классической теории теплоемкости.

Ответ: $c_V = 390$ Дж/(кг K).

10.12. Удельные теплоемкости свинца и алюминия при постоянном объеме и температуре 20^0C составляют соответственно 126 и 896 Дж/(кг·K). Вычислить молярные теплоемкости для этих металлов и сравнить с теплоемостью, полученной по закону Дюлонга-Пти.

Ответ: молярная теплоемкость твердого тела по закону Дюлонга-Пти $C_V = 3R = 24,96$ кДж/(кмоль·K); $C_{V\text{св}} = 26,1$ кДж/(кмоль·K), $C_{V\text{ал}} =$ $= 24,17$ кДж/(кмоль·K)

10.13. При нагревании серебра массой $m = 10$ г от $T_1 = 10$ K до $T_2 = 20$ K было подведено $Q = 0,71$ Дж теплоты. Определить характеристическую температуру Дебая серебра.

Ответ: $\Theta = 212$ K.

10.14. Вычислить максимальную частоту упругих колебаний в кристалле серебра, если известно, что при $T = 20$ K его молярная теплоемкость $C =$ $= 1,7$ Дж/(моль·R).

Ответ: $\omega_{max} = 2,75 \cdot 10^{13}\ c^{-1}$.

11. Фазовые переходы

- Уравнение Клапейрона-Клаузиуса:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(v_2 - v_1)},$$

где q_{12} – удельная теплота, поглощаемая при переходе $1 \to 2$, v_1 и v_2 – удельные объемы фазы 1 и фазы 2.

Задача 11.1. Вычислить теплоту парообразования L ртути, если при давлении 10^5 Па она кипит при температуре 630,3 К. Использовать значение $(dp/dT)_{(\text{ж-п})} = 1,84 \cdot 10^3$ Па/К.

Решение

Воспользуемся для кривой равновесия жидкой (ж) и газообразной (п) фаз ртути уравнением Клапейрона-Клаузиуса

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{(\text{ж-п})} = \frac{L}{T(v_{\text{п}} - v_{\text{ж}})}.$$

Условия, при которых находятся пары ртути, далеки от критических, поэтому мы можем воспользоваться приближением

$$v_{\text{п}} - v_{\text{ж}} \simeq v_{\text{п}},$$

и удельный объем в парообразной ртути представить с использованием уравнения Менделеева-Клапейрона как

$$v_{\text{п}} = \frac{RT}{Mp}.$$

Тогда уравнение Клапейрона-Клаузиуса упростится:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{(\text{ж-п})} \simeq \frac{L}{Tv_{\text{п}}} = \frac{MLp}{RT},$$

откуда

$$L = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{(\text{ж-п})} \frac{RT^2}{Mp}.$$

Подстановка исходных данных дает $L \simeq 2,26 \cdot 10^8$ Дж/кг.

Задача 11.2. Найти понижение температуры плавления льда вблизи 0^0С при повышении давления на $\Delta p = 1$ атм, если удельный объем льда на $\Delta v = 9,1 \cdot 10^{-5}$м^3/кг больше удельного объема воды.

Решение

Запишем приближенно уравнение Клапейрона-Клаузиуса для конечных изменений величин вблизи точки p_0, T_0 на кривой равновесия лед-вода ($p_0 = 1$ атм, $T_0 = 273$ К) в виде

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} \simeq -\frac{\lambda}{T_0 \Delta v}.$$

Здесь λ – удельная теплота плавления льда; знак минус в уравнении учитывает тот факт, что удельный объем воды меньше удельного объема льда, т.е.
$v_ж - v_л = -\Delta v$. Тогда

$$\Delta T = -\frac{T_0 \Delta v}{\lambda} \Delta p \simeq 7,5\,\text{мК}.$$

Задача 11.3. Найти значение прироста температуры кипения воды при повышении давления ее насыщенных паров на $\Delta p = 1$ атм $= 10^5$ Па. Вблизи точки кипения при нормальных условиях удельный объем пара $v_п =$ $= 1,6$ м^3/кг, теплота парообразования воды $L = 2,23 \cdot 10^7$ Дж/кг. Оценить изменение температуры кипения в горных условиях.

Решение

При нормальных условиях удельный объем воды $v_ж = 10^{-3}$ м^3/кг$\ll v_п =$ $= 1,65$ м^3/кг удельного объема пара, поэтому $\Delta v \simeq v_п$ и уравнение Клапейрона-Клаузиуса упрощается:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} \simeq \frac{L}{T v_п},$$

откуда

$$\Delta T \simeq \frac{T v_п}{L} \Delta p = 27\,\text{К}.$$

Для определения изменения температуры кипения с высотой воспользуемся барометрической формулой

$$p = p_0 \exp\left(-Mgh/RT\right) \simeq p_0 \left(1 - Mgh/RT\right),$$

откуда

$$\Delta p \simeq -p_0 \left(Mgh/RT\right).$$

Принимая молярную массу воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $g = 10$ м/с^2, $T \simeq 300$ К, $R = 8,31$ Дж/(моль·К), окончательно имеем

$$\Delta p \simeq -0,11\, p_0 h,$$

где h измеряется в километрах. Для подсчета изменения температуры кипения с высотой воспользуемся результатами первой половины задачи. Тогда

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} \simeq -3\ \text{К/км}.$$

Задача 11.4. Группа исследователей обнаружила "новое вещество", фазовая диаграмма которого представлена на рис. 18. Показать, что поведение такого "нового вещества" противоречит законам термодинамики.

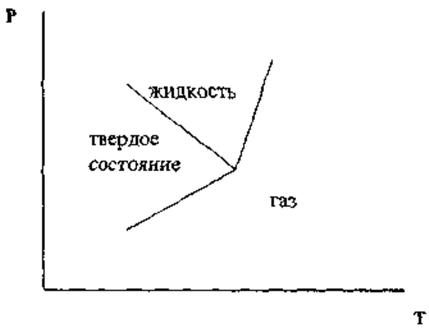


Рис. 18

Решение

Из фазовой диаграммы видно, что вблизи тройной точки для кривых равновесия жидкость-пар (парообразование) и твердое тело-пар (сублимация) имеет место соотношение

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{пар}} > \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{субл}}. \tag{32}$$

Согласно уравнению Клапейрона-Клаузиуса вблизи тройной точки

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{пар}} = \frac{q_{\text{пар}}}{T_{\text{тр}}\Delta v} \approx \frac{q_{\text{пар}}}{T_{\text{тр}}\, v_{\text{газ}}} = \frac{(s_{\text{газ}} - s_{\text{жидк}})}{v_{\text{газ}}},$$

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{субл}} = \frac{q_{\text{суб}}}{T_{\text{тр}}\Delta v} \approx \frac{q_{\text{субл}}}{T_{\text{тр}}\, v_{\text{газ}}} = \frac{(s_{\text{газ}} - s_{\text{тв}})}{v_{\text{газ}}},$$

Тогда из условия (32) следует, что $s_{\text{тв}} > s_{\text{жидк}}$, т.е. удельная энтропия твердой фазы "нового вещества" больше удельной энтропии жидкой фазы.

Это условие противоречит второму началу термодинамики, так как при переходе из твердого состояния в жидкое любое вещество поглощает теплоту, что должно приводить к увеличению его энтропии.

Задача 11.5. Теплоизолирующий сосуд наполнен газообразным гелием при температуре T_0=10 K (выше критической точки). Газ может очень медленно вытекать через капиллярную трубку до тех пор, пока давление в колбе не станет равным $p_1 = 1$ атм, а температура $T_1 = 4{,}2$ K (температура кипения гелия при нормальном давлении). Предполагая, что газ идеальный, найти начальное давление p_0 газа в колбе, если в конце процесса колба оказывается полностью заполненной жидким гелием. Удельная теплота испарения для гелия при температуре 4,2 K равна 84 Дж/моль, а теплоемкость при постоянном объеме для гелия равна: $C_V = 12,6$ Дж/моль K.

Решение

Поскольку гелий, остающийся в сосуде, теплоизолирован, то его энтропия в процессе не изменяется. Изменение энтропии газообразного гелия, остающегося в в сосуде, в процессе охлаждения определяется выражением

$$TdS = \nu C_V dT + pdV,$$

где ν – число молей гелия, оставшихся в сосуде в конце процесса. Тогда полное приращение энтропии газообразного гелия в процессе охлаждения с учетом уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$\Delta S_{\text{охл}} = \nu(C_V + R)\ln\frac{T_1}{T_0} - \nu R\ln\frac{p_1}{p_0}.$$

Изменение энтропии в процессе конденсации (ожижении) равно $\Delta S_{\text{ож}} = -q\nu/T_1$. Однако $\Delta S = \Delta S_{\text{охл}} + \Delta S_{\text{ож}} = 0$ в силу сделанного выше утверждения. Таким образом

$$p_0 = p_1\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{(C_V+R)/R} e^{q/RT_1} = 100 \text{ атм}.$$

Задача 11.6. Считая известной удельную теплоту парообразования воды $L_0 = 2,26\cdot 10^6$ Дж/кг при давлении 1 атм и температуре $T = 373$ K, вычислить ее значение L для температуры, на 10^0C большей.

Решение

Сначала найдем изменение удельной теплоты парообразования для воды вдоль кривой равновесия жидкость-пар. Для этого представим удельную теплоту парообразования как

$$L = T(S_2 - S_1),$$

где T – температура парообразования на кривой равновесия, S_2 – удельная энтропия газообразной фазы, S_1 – удельная энтропия жидкой фазы. Тогда производная удельной теплоты парообразования по температуре

$$\frac{dL}{dT} = \frac{L}{T} + T\left(\frac{dS_2}{dT} - \frac{dS_1}{dT}\right).$$

Представим энтропию каждой фазы в виде функции переменных T и p. Тогда дифференциал этой функции

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T}dT + \frac{\partial S}{\partial p}dp = \frac{c_p}{T}dT - \alpha v dp,$$

где

$$c_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$

– удельная теплоемкость вещества;

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

– объемный коэффициент расширения и v – удельный объем фазы. Тогда

$$\frac{dL}{dT} = \frac{L}{T} + (c_{p_2} - c_{p_1}) - (\alpha_2 v_2 - \alpha_1 v_1)\, T\frac{dp}{dT}.$$

Используя уравнение Клапейрона-Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(v_2 - v_2)},$$

получаем

$$\frac{dL}{dT} = \frac{L}{T} + (c_{p2} - c_{p1}) - (\alpha_2 v_2 - \alpha_1 v_1)\,\frac{L}{v_2 - v_1}.$$

Учитывая, что удельный объем вещества в паробразной фазе намного больше, чем в жидкой, т.е. $v_2 \gg v_1$, имеем

$$\frac{dL}{dT} \approx \frac{L}{T} + (c_{p2} - c_{p1}) - \alpha_2 L.$$

Для газов $\alpha_2 = 1/T$. Тогда

$$\Delta L = (c_{p2} - c_{p1})\,\Delta T.$$

Полагая $c_{p1} = 4190$ Дж/(кг·К), $c_{p2} = C_{V\text{мол}}/M = 3R/M = 635$ Дж/(кг·К), $\Delta T = 10$ К, в результате получаем

$$L = L_0 + \Delta L = 2,26 \cdot 10^5 - 0,04 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг} = 2,22 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}.$$

Задачи для самостоятельного решения

[A]

11.7. Насыщенный водяной пар находится при температуре $t = 100^0C$ в цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем. При медленном вдвигании поршня небольшая часть пара массой $\Delta m = 0,70$ г сконденсировалась. Какая работа была совершена над газом? Пар считать идеальным газом, объемом жидкости пренебречь.

Ответ: $A = \Delta m RT/M = 1,2$Дж.

11.8. Пространство в цилиндре под поршнем, имеющее объем $V_0 = 5,0$ л, занимает один насыщенный водяной пар, температура которого $t = 100^0C$. Найти массу жидкой фазы, образовавшейся в результате изотермического уменьшения объема под поршнем до $V_0 = 1,6$ л. Насыщенный пар считать идеальным газом.

Ответ: $m_{\text{ж}} = Mp_0(V_0 - V)/RT = 2,0$ г, где p_0 – нормальное давление.

11.9. В закрытом сосуде с объемом $V = 5$ л находится 1 кг воды при температуре 100^0С. Пространство над водой занято насыщенным водяным паром (воздух выкачан). Найти увеличение массы насыщенного пара Δm при повышении температуры на $\Delta T = 1$ К. Пар считать идеальным газом.

Ответ: $\Delta m \simeq MVp/RT^2(LM/RT - 1) \simeq 0,075$ г.

11.10. Вода массой $m = 1$кг, кипящая при нормальном атмосферном давлении, целиком превратилась в насыщенный пар. Найти приращение энтропии и внутренней энергии этой системы, считая насыщенный пар идеальным газом.

Ответ: $\Delta S = mL/T = 6,0$ кДж/К, $\quad \Delta U = m(L - RT/M) = 2,1$ МДж.

11.11. Вода массой $m = 20$ г находится при температуре $t = 0^0$C в теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем, площадь которого $S = 440\,\text{см}^2$. Внешнее давление равно нормальному атмосферному. На какую высоту поднимется поршень, если воде сообщить количество теплоты $Q = 20,0$Дж.

Ответ: $h = (Q - mc\Delta T)RT/LpSM = 20$см, где c – удельная теплоемкость воды, $\Delta T = 100$ K, L – удельная теплота парообразования воды, T – ее температура кипения.

11.12. Давление насыщенного аммиака при температуре 273 K равно $5{,}50 \cdot 10^5$ Па, а при температуре 283 K равно $6{,}06 \cdot 10^5$ Па. Определите по этим данным удельную теплоту парообразования аммиака при температуре 273 K.

Ответ: $L \simeq 1,47 \cdot 10^6$ Дж/кг.

11.13. Нафталин плавится при $80{,}1^0$ C, его теплота плавления $\lambda =$
$= 1,91 \cdot 10^4$ Дж/моль, а увеличение объема при плавлении равно
$18{,}7 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль. Найти изменение температуры точки плавления с давлением.

Ответ: $(dT/dp) = 3,36 \cdot 10^{-7}$ K/Па.

11.14. Найти изменение температуры ΔT плавления льда при повышении давления на $\Delta p = 1\text{атм} = 10^5$ Па. Удельный объем воды при 0^0C $v_ж = 1\,\text{c}^3/\text{г}$, удельный объем льда $v_л = 1,091\,\text{c}^3/\text{г}$, удельная теплота плавления льда $\lambda =$
$= 3,34 \cdot 10^5$ Дж/K.

Ответ: $\Delta T = \Delta p T(v_ж - v_л)/\lambda = -0,0075$K.

11.15. Найти давление насыщенного водяного пара при температуре $t =$
$= 101^0$C. Считать пар идеальным газом.

Ответ: $p \simeq p_0 \left(1 + \frac{LM\Delta T}{RT^2}\right) = 1,04$ атм.

[Б]

11.16. Определить изменение энтропии системы, состоящей из воды и насыщенного пара при переходе ее в насыщенный пар. Начальная масса пара

m_1, конечная m_2. Считать постоянными удельную теплоемкость пара c_p и удельную теплоту парообразования L. Пар рассматривать как идеальный газ.

Ответ: $\Delta S = L(m_2/T_2 - m_1/T_1) + m_2 c_p \ln(T_2/T_1)$.

11.17. Найти удельную теплоту испарения бензола вблизи его тройной точки, если известно, что при этих условиях его удельная теплота плавления $\lambda = 30,2$кал/г, температура тройной точки $T = 279$ К, равновесное давление пара в тройной точке $p = 36$ мм.рт.ст. и для кривой возгонки в той же точке $(dp/dT)_{\text{возг}} = 2,43$ мм.рт.ст./К. Считать бензол идеальным газом.

Ответ:

$$L = \frac{RT^2}{Mp}\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{возг}} - \lambda \simeq 103 \text{ кал/К}.$$

11.18. Вблизи тройной точки давление насыщенного пара двуокиси углерода зависит от температуры T как $\lg p = a - bT$, где a и b – постоянные. Если p измеряется в атмосферах, то для процесса сублимации $a = 6{,}78$ и $b = 1310$ К. Найти:

а) температуру и давление в тройной точке;

б) значения удельных теплот сублимации, испарения и плавления вблизи тройной точки.

Ответ: $a)216K$, $5,1$атм; б) $0,78$ кДж/г, $0,57$ кДж/г, $0,21$ кДж/г.

11.19. Температура кипения жидкого гелия-4 (^{4}He) равна $T_0 = 4,2$ К при нормальном давлении p_0. Однако, при давлении $p = 1$ мм.рт.ст. он кипит при $T = 1.2$ К. Оценить среднюю теплоту парообразования гелия-4 в этом температурном интервале.

Ответ:

$$L \approx R\ln\frac{p}{p_0}/\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) = 93 \text{ Дж/моль}.$$

11.20. Кривая плавления гелия-3 (^{3}He) проходит через точку $T_1 = 0,12$ К, $p_1 = 32$ атм. Найти уравнение кривой плавления гелия-3 в переменных T, p в интервале между этими температурами. При каком давлении p_2 будут находиться в равновесии твердая и жидкая фазы гелия-3 при температуре $T_2 = 0,42$ К? Молярная энтропия жидкого гелия-3 в рассматриваемой области температур и давлений определяется выражением $S_ж = R(T/T_0)$, где $T_0 = 0,46$ К. Молярная энтропия твердого гелия-3 не зависит от температуры и равна $S_{тв} = R\ln 2$. Разность молярных объемом жидкого и твердого гелия-3 считать постоянной и равной $\Delta V_M = V_{M,ж} - V_{M,тв} = 1,25 см^3$. Найти также величину и знак молярной теплоты плавления λ для температур T_1 и T_2.

Ответ:
$$p = p_1 + \frac{R}{2T_0}\frac{(T^2 - T_1^2) - 2\ln 2 \cdot T_0(T - T_1)}{V_{M,ж} - V_{M,тв}}, \quad p_2 = 29 \text{ атм},$$

$$\lambda = RT\left(T/T_0 - \ln 2\right), \quad \lambda_1 = -0,43 \text{ Дж/моль}, \quad \lambda_2 = 0,18 \text{ Дж/моль}.$$

11.21. Во сколько раз увеличится скорость испарения твердого вещества в вакуум при увеличении его температуры в k раз, если давление насыщенных паров при этом увеличивается в m раз?

Ответ: в $m/k^{1/2}$ раз.

12. Явления переноса

- **Средняя длина свободного пробега молекулы газа:**

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где d – эффективный диаметр молекулы, n – концентрация молекул.

- **Закон Фика для плотности потока массы в стационарном одномерном процессе диффузии:**

$$j = \frac{dm}{dSdt} = -D\frac{d\rho}{dx},$$

где D – коэффициент диффузии, $(d\rho/dx)$ – градиент плотности.

- **Закон Фурье для плотности потока тепла в стационарном одномерном процессе теплопроводности:**

$$j_Q = \frac{dQ}{dSdt} = -\kappa\frac{dT}{dx},$$

где κ – коэффициент теплопроводности, (dT/dx) – градиент температуры.

- **Закон Ньютона для силы внутреннего трения между двумя слоями площадью dS, движущимися с разными скоростями:**

$$dF = -\eta\frac{dv}{dx}dS,$$

где η – коэффициент внутреннего трения (вязкость), (dv/dx) – градиент скорости в направлении, перпендикулярном движению слоев.

- **Коэффициент диффузии D, вязкость η и теплопроводность κ газов:**

$$D = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle, \qquad \eta = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle\rho, \qquad \kappa = \frac{1}{3}c_V\lambda\langle v\rangle,$$

где ρ – плотность газа, c_V - его удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Задача 12.1. Коэффициент внутреннего трения азота при температуре $T = 273$ К равен $\eta = 1,68 \cdot 10^{-4}$ г/см $\cdot$ с. Определить среднюю длину свободного пробега молекул азота при нормальном давлении.

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул связана с коэффициентом внутреннего трения следующим соотношением:

$$\eta = (1/3)\langle v\rangle\lambda\rho,$$

где $\langle v\rangle = \sqrt{8RT}\pi M$ – средняя скорость молекул; $\lambda = 1/(\sqrt{2}\pi d^2 n)$ – средняя длина свободного пробега молекул; ρ – плотность газа при данных условиях. Из уравнения Менделеева-Клапейрона определим плотность азота:

$$\rho = Mp/RT.$$

Тогда для средней длины свободного пробега молекул получим

$$\lambda = \frac{3\eta}{\langle v\rangle\rho} = \frac{3\eta}{p}\sqrt{\frac{\pi RT}{8M}};$$

после подстановки числовых значений

$$\lambda = 7,5 \cdot 10^{-6}\ \text{см}.$$

Задача 12.2. Коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях $D = 1,31\ \text{см}^2/\text{с}$. Определить величину коэффициента внутреннего трения водорода при этих же условиях.

Решение

Из сравнения выражений для коэффициента диффузии

$$D = (1/3)\lambda\langle v\rangle$$

и коэффициента внутреннего трения

$$\eta = (1/3)\lambda\langle v\rangle\rho$$

следует, что

$$\eta = D\rho,$$

где плотность водорода

$$\rho = m_0 n = (M/N_A)n,$$

$n = p/kT = pN_A/RT$ – концентрация газа при заданных условиях; m_0 – масса одной молекулы. В результате получаем, что

$$\eta = D(M/N_A)n = D(Mp/RT) = 1{,}74 \cdot 10^{-4}\ \text{г/см} \cdot \text{с}.$$

Задача 12.3. Пространство между двумя очень длинными коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) заполнено однородным теплопроводящим веществом, коэффициент теплопроводности которого равен κ и не зависит от температуры. Внешний цилиндр R_2 поддерживается при температуре T_2, а внутренний – при температуре T_1 ($T_1 > T_2$).

Считая, что конвекция газа отсутствует и что длина свободного пробега молекул газа меньше расстояния между цилиндрами, найти:

а) закон распределения температур в пространстве между цилиндрами;

б) поток тепла $q_{\text{ед}}$, приходящийся на единицу длины цилиндров.

Решение

Так как температуры цилиндров поддерживаются постоянными внешними источниками, то в пространстве между ними установится стационарное распределение температур. Выделим мысленно цилиндр радиуса r, коаксиальный с данными, все точки которого имеют одинаковую температуру $T(r)$.

Поток тепла, проходящий через него, в силу закона Фурье для теплопроводности, равен:

$$q = \frac{\delta Q}{dt} = \kappa\frac{dT}{dr}S = \kappa\frac{dT}{dr}2\pi r^2 L, \tag{34}$$

где S – площадь поверхности цилиндра, L – его длина.

В стационарном случае поток тепла q не может зависеть от радиуса цилиндра r, т.е. $q = \mathrm{const}$. Учитывая это, проинтегрируем уравнение (34), разделяя переменные:

$$\frac{2\pi\kappa L}{q}\int\limits_{T_1}^{T_2} dT = \int\limits_{R_1}^{r}\frac{dr}{r},$$

$$\frac{2\pi\kappa L}{q}(T - T_1) = \ln\frac{r}{R_1}. \tag{35}$$

При $r = R_2, T = T_2$. Тогда из (35) получаем

$$q = \frac{2\pi\kappa L(T_2 - T_1)}{\ln(R_2/R_1)}. \tag{36}$$

Поток тепла на единицу длины цилиндров

$$q_{\text{ед}} = \frac{2\pi\kappa(T_2 - T_1)}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Закон распределения температур между цилиндрами найдем, подставив (36) в (35):

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Задача 12.4. Пространство между двумя большими горизонтальными пластинами заполнено гелием, диаметр атомов которого равен d. Расстояние между пластинами h. Нижняя пластина поддерживается при температуре T_1, верхняя – при T_2, причем $T_2 > T_1$. Давление газа нормальное. Найти плотность потока тепла.

Решение

Ясно, что поток тепла направлен вниз. Направим ось x системы координат вертикально вниз. Тогда плотность потока дается формулой

$$j_Q = -\kappa\frac{dT}{dx}. \tag{37}$$

Коэффициент теплопроводности κ для гелия равен

$$\kappa = \frac{1}{3}(c_v)_{\text{уд}}\rho\langle v\rangle = \alpha\sqrt{T}, \tag{38}$$

где

$$\alpha = (R/\pi)^{3/2}/d^2 N_A M^{1/3}.$$

Подстановка (38) в (37) приводит к уравнению

$$j_Q dx = -\alpha\sqrt{T}dT.$$

Проинтегрировав это выражение, получим:

$$j_Q = \frac{2\alpha}{3h}(T_2^{3/2} - T_1^{3/2}).$$

Задача 12.5. Горизонтально расположенный диск радиусом $R = 0,1$ м подвешен на тонкой упругой нити над таким же диском, укрепленным на вертикальной оси. Коэффициент кручения нити (отношение приложенного вращательного момента к углу закручивания) $\chi = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Н·м/рад. Расстояние между дисками $h = 0,1$ м. Если нижний диск привести во вращение с угловой скоростью $\omega = 40$ рад/с, верхний диск повернется на угол $\varphi = 70^0$. Определить коэффициент вязкости воздуха. Закон изменения скорости слоев воздуха между дисками считать линейным.

Решение

При вращении нижнего диска прилегающий к нему слой воздуха вовлекается во вращательное движение. Вблизи поверхности диска воздух приобретает такую же линейную скорость, как и точки на поверхности диска. Вследствие внутреннего трения слой воздуха, прилегающий к нижнему диску, будет увлекать соседний слой, соседний слой – следующий и т.д. Слой воздуха, прилегающий к верхнему диску, будет вызывать его вращение.

Выделим на верхнем диске кольцо площадью $dS = 2\pi r dr$. Тогда модуль момента силы, действующий на это кольцо со стороны прилегающего к нему воздушного слоя,

$$dM = F_r dS r.$$

Здесь F_r – модуль силы вязкого трения, действующей на единичную площадку верхнего диска:

$$F_r = -\eta \frac{dv}{dz},$$

где η – коэффициент вязкости воздуха, dv/dz – градиент скорости $v(z)$ слоев воздуха вдоль вертикальной оси z. Согласно условию задачи

$$v(z) = v_0 - kz,$$

где $v_r = \omega r$ – скорость точек нижнего диска на расстоянии r от оси, k – неизвестный коэффициент. Поскольку верхний диск после поворота покоится, то $v(h) = 0$, т.е. $\omega r - kh = 0$, и $k = \omega r/h$. Тогда градиент скорости

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{\omega r}{h}.$$

В результате модуль момента сил, действующих на выделенное кольцо верхнего диска, можно представить в виде

$$dM = \frac{2\pi\eta\omega r^3}{h} dr.$$

Следовательно, модуль момента сил вязкого трения, действующих со стороны воздуха на весь верхний диск

$$M = \int\limits_0^R \frac{2\pi\eta\omega r^3}{h} dr = \frac{\pi\omega\eta}{2h} R^4.$$

Согласно условию задачи модуль момента упругой силы, действующей на диск со стороны нити, $M_{\text{упр}} = \chi\varphi$. Так как верхний диск покоится, то $M = M_{\text{упр}}$, т.е.

$$\frac{\pi\omega\eta}{2h} R^4 = \chi\varphi.$$

Из этого уравнения находим коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{2h\chi\varphi}{\pi\omega R^4} = 3 \cdot 10^{-5}\ \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Задача 12.6. Сосуд, разделенный на две равные части перегородкой с малым отверстием диаметра D, содержит гелий. В левой части сосуда (часть I) температура гелия посредством теплообмена через стенки сосуда поддерживается равной $T_{\text{I}} = 150$ К, а в правой части (часть II)- $T_2 =$

300 К. Как размер отверстия влияет на физические процессы, в результате которых система переходит в стационарное состояние? Найти отношение средних длин свободного пробега гелия λ_1/λ_2 в левой и правой частях сосуда в равновесии при условии: а) $D \ll \lambda_1, \lambda_2$, б) $D \gg \lambda_1, \lambda_2$.

Решение

Если диаметр отверстия много больше средней длины свободного пробега обоих газов, мы имеем дело с регулярным потоком молекул, при котором давление одинаково в обеих частях сосуда. Если размер отверстия много меньше средних длин свободного пробега, в отверстии столкновения между молекулами отсутствуют и молекулы приходят в равновесие вдали от отверстия.

а) В случае $D \ll \lambda_1, \lambda_2$ мы имеем дело с двумя независимыми потоками молекул из части I в часть II и наоборот. Как было показано в задаче 5.5, число молекул N_1 и N_2, проходящих через отверстие за единицу времени из I в II и из II в I, есть соответственно

$$N_1 = \frac{1}{4} n_1 \langle v_1 \rangle S,$$

$$N_2 = \frac{1}{4} n_2 \langle v_2 \rangle S,$$

где $S = \pi D^2/4$ – площадь отверстия. В равновесии $N_1 = N_2$, так что

$$n_1 \langle v_1 \rangle = n_2 \langle v_2 \rangle.$$

Средняя длина свободного пробега молекул идеального газа

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Тогда для отношения средних длин свободного пробега гелия в левой и правой частях сосуда получаем

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_2} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \approx 0.7.$$

б) В случае, когда $D \gg \lambda_1, \lambda_2$, давления гелия в обеих частях сосуда одинаковы, поэтому

$$p_1 = p_2$$

или

$$n_1 kT_1 = n_2 kT_2,$$

откуда для отношения средних длин свободного пробега получаем

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{T_1}{T_2} = 0.5.$$

Задача 12.7. За 1 ч из плохо откачанного дьюаровского сосуда испаряется $m = 0,014$ кг жидкого воздуха. Определить теплоту парообразования жидкого воздуха при следующих данных: растояние между стенками сосуда $l = 1$ см, поверхность стенок $S = 3 \cdot 10^{-2}$ м^2, температура наружных стенок $t_2 = 17^0C$, температура жидкого воздуха $t_1 = -180^0$С, эффективный диаметр молекул воздуха $d = 2,5 \cdot 10^{-8}$ см. При температуре обеих стенок $t_2 = 17^0$С (т.е. когда сосуд пустой) давление воздуха $p_0 = 0,11$ Н/м^2.

Решение

Сравним длину свободного пробега λ, рассчитанную по обычной формуле, с расстоянием между стенками l:

$$\lambda = kT/(\sqrt{2}\pi d^2 p \simeq 0,136 \text{ м} \gg l.$$

Это означает, что воздух между стенками дьюаровского сосуда откачан до высокого вакуума. Различают вакуум: низкий $\lambda < l$, средний $\lambda \sim l$, высокий $\lambda \gg l$.

В области высокого вакуума практически отсутствуют столкновения между молекулами и перенос энергии происходит непосредственно от стенки к стенке за счет соударений молекул только со стенками сосуда. Таким образом длина свободного пробега определяется расстоянием между стенками l. Механизм переноса тепла в области вакуума отличен от такового в обычном (плотном) газе, т.е. от явления теплопроводиости, поэтому закон Фурье становится неприменим. В рассматриваемом случае передачу тела можно представить как движение двух встречных потоков молекул в пространстве между стенками: поток молекул со средней скоростью и энергией, соответствующими температуре T_1, и встречный поток со средней скоростью и средней переносимой энергией, соответствующими температуре T_2.

Рассчитаем энергию ΔE, теряемую молекулами воздуха за Δt секунд в результате ударов о холодную стенку как

$$\Delta E = \langle\nu\rangle\omega\Delta t,$$

где

$$\omega = (5/2)k(T_2 - T_1)$$

– энергия, отдаваемая одной молекулой холодной стенке при ударе;

$$\langle\nu\rangle = (1/3)N(1/\tau)$$

– число ударов, испытываемых стенкой за 1 с, τ – время между двумя последовательными ударами молекул о холодную стенку. Здесь берется множитель $(1/3)N$, так как считается, что все направления движения молекул равноправны, т.е. от стенки к стенке движется 1/3 общего числа молекул.

Зная средние квадратичные скорости молекул при температурах T_1 и T_2 соответственно как

$$v_{\text{кв}1} = 3RT_1/M, \quad v_{\text{кв}2} = 3RT_2/M$$

и зная расстояние l между стенками сосуда, найдем τ:

$$\tau = \frac{l}{v_{\text{кв}1}} + \frac{l}{v_{\text{кв}2}} = \frac{l(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})}{\sqrt{3RT_1T_2/M}}.$$

Рассчитаем полное число молекул газа N, используя уравнение Менделеева-Клапейрона при начальных условиях:

$$N = p_o Sl/kT_2.$$

Теперь мы можем записать энергию ΔE в виде

$$\Delta E = (5/2)k(T_2 - T_1)(N/3)(\Delta/\tau) = (5/6)p_0 S(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})\sqrt{\frac{3RT_1}{M}\frac{T_1}{T_2}}\Delta t.$$

Эту энергию передадут молекулы при ударе о холодную стенку жидкому воздуху. Т.е. энергия, теряемая молекулами газа за Δt в результате ударов о холодную стенку сосуда Дьюара, будет равна количеству тепла, которое получит жидкий воздух (через стенки сосуда Дьюара):

$$\Delta E = \Delta Q.$$

С другой стороны $\Delta Q = mL$, где L – теплота парообразования жидкого воздуха. Тогда

$$L = \frac{\Delta Q}{m} = \frac{\Delta E}{m} = \frac{5}{6}\frac{p_0 S}{m}(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})\sqrt{\frac{3RT_1}{M\,T_2}}\Delta t \simeq 210\,\text{кДж/кг}.$$

Задачи для самостоятельного решения

[A]

12.8. Коэфициент теплопроводности азота при температуре $T = 273$ К равен $\kappa = 3,1 \cdot 10^{-5}$ кал/(см·с·К). Определить диаметр эффективного сечения молекул при этих условиях.

Ответ: $d = \sqrt{\frac{\rho c_V \langle v\rangle}{3\sqrt{2}\pi\kappa n}} = \sqrt{\frac{5}{3}\sqrt{\frac{RT}{\pi^3 M}}\frac{R}{N_A\kappa}} \simeq 3,8 \cdot 10^{-10}$ м.

12.9. Коэфициент теплопроводности воздуха при температуре $T = 273$ К и нормальном давлении равен $\kappa_1 = 5,2 \cdot 10^{-5}$ кал/(см·с·К). Определить величину параметра κ_2 при температуре $t = 313$ К и том же давлении.

Ответ: $\kappa_2 = \kappa_1\sqrt{T_2/T_1} = 5,6 \cdot 10^{-5}$ кал/(см·с·К).

12.10. Сколько столкновений $\langle\nu\rangle$ испытывает за одну секунду молекула неона при температуре 600 К и давлении $1,33 \cdot 10^2$ Па, если ее эффективный диаметр $d = 2,04 \cdot 10^{-10}$ м.

Ответ: $\langle\nu\rangle \simeq 2,2 \cdot 10^6\ \text{с}^{-1}$.

12.11. При нормальных условиях средняя длина свободного пробега молекул азота равна $6 \cdot 10^{-8}$ м. Температура данной массы газа повысилась до $t_1 = 300^0$ С. Процесс перехода газа из нормального состояния в состояние с температурой t_1 происходил: а) изохорически; б) изобарически; в) адиабатически. Какова длина свободного пробега молекул в конечном состоянии?

Ответ: а) $6,0 \cdot 10^{-8}$ м; б) $12,6 \cdot 10^{-8}$ м; в) $1,0 \cdot 10^{-8}$ м.

12.12. В результате некоторого процесса вязкость идеального газа увеличилсь в $\alpha = 2$ раза, а коэффициент диффузии – в $\beta = 4$ раз. Как и во сколько раз изменилось давление газа?

Ответ: Увеличилось в α^3/β раз.

12.13. Азот находится при нормальных условиях. При какой частоте колебаний длина звуковой волны в нем будет равна средней длине свободного пробега молекул данного газа?

Ответ: $\nu = \pi d^2 p_0 N_A \sqrt{2\gamma/MRT_0} = 5,5$ ГГц.

12.14. Катер на подводных крыльях, общая площадь поверхности которых $S = 50$ м^2, движется с постоянной скоростью $v = 50$ км/ч. Считая, что сила вязкого трения крыльев о воду составляет около 1% полной силы сопротивления, действующей на катер, и принимая полезную мощность двигателя $N = 100$ кВт, оценить толщину d слоя воды, увлекаемого при движении катера. Коэффициент вязкого трения воды $\eta = 0,01$ пуаз.

Ответ: $d = \eta S v^2/(0.01N) \simeq 0,125$ м, где $dv/dx \simeq v/d$.

[Б]

12.15. Вода в пруду находится при $t_1 = 0^0$C, температура воздуха $t_2 = -10^0$C. Какой слой льда образуется за сутки, если плотность льда $\rho = 900$ кг/м^3, температура его поверхности совпадает с температурой воздуха. Теплота плавления льда $3,34 \cdot 10^5$ Дж/кг, коэффициент теплопроводности льда $0,021$ Дж/см $\cdot$ с $\cdot$ К.

Ответ: $\Delta h = 11,2$ см.

12.16. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами одинаковой высоты $L = 20$ см заполнено водородом. Диаметр внутреннего цилиндра $D_1 = 8$ см, диаметр внешнего цилиндра $D_2 = 8,2$ см. Внешний цилиндр вращается, совершая $n = 5$ об/с. Для того, чтобы внутренний цилиндр оставался неподвижным, к нему нужно приложить момент сил $M = 2,22 \cdot 10^{-5}$Н $\cdot$ м. Пренебрегая краевыми эффектами, найти зависимость $v(r)$ скорости слоя газа в пространстве между цилиндрами от расстояния до оси цилинда и определить коэффициент внутреннего трения водорода.

Ответ:
$$v(r) = \frac{Mr}{4\pi L\eta}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2}\right), \quad \eta = \frac{M}{8\pi^2 Ln}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) \simeq 8,5 \cdot 10^{-5} \text{ пуаз.}$$

12.17. Стержень длиной l с теплоизолирующей боковой поверхностью состоит из материала, теплопроводность которого меняется с температурой по закону $\kappa = \alpha/T$, где α – постоянная. Торцы стержня поддерживаются при температурах T_1 и T_2. Найти зависимость $T(x)$, где x – расстояние от торца с температурой T_1.

Ответ: $T = T_1(T_2/T_1)^{x/l}$.

12.18. Идеальный газ с молярной массой M находится в тонкостенном сосуде объемом V, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре T. В момент $t = 0$ в стенке сосуда открыли малое отверстие площадью S, и газ начал вытекать в вакуум. Найти концентрацию n газа как функцию времени t, если в начальный момент времени $n(0) = n_0$.

Ответ: $n(t) = n_0 e^{-t/\tau}$, где $\tau = 4V/S\langle v\rangle, \quad \langle v\rangle = \sqrt{8RT}\pi M$.

12.19. Сосуд с газом разделен на две одинаковые половины 1 и 2 тонкой теплоизолирующей перегородкой с двумя отверстиями. Диаметр одного из них мал, а другого очень велик (оба – по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул). В половине 2 газ поддерживается при температуре в η раз большей, чем в половине 1. Как и во сколько раз изменится концентрация молекул в половине 2, если закрыть только большое отверстие.

Ответ: Увеличиличится в $(1+\eta)/(1+\sqrt{\eta})$ раз.

12.20. Пространство между двумя большими параллельными пластинами заполнено гелием. Расстояние между пластинами $L = 50$ мм. Одна пластина поддерживается при температуре $t_1 = 20^0$С, другая – при температуре $t_2 = 40^0$С. Вычислить плотность потока тепла j_Q. Расчеты провести для случаев, когда давление в газе: а) $p = 10^5$ Па; б) $p = 6,65 \cdot 10^{-3}$ Па.

$$\text{Ответ: а)} j_Q = \frac{ik}{3\pi d^2 L}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}(T_2 - T_1) = 20\text{Вт/м}^2;$$

$$\text{б)} j_Q = \frac{i}{3}\sqrt{\frac{R}{2\pi M}}\frac{p}{\sqrt{T}}(T_2 - T_1) = 0,14\text{Вт/м}^2, \quad T = (T_1 + T_2)/2.$$

Библиографический список

1. **Сивухин, Д.В.** Общий курс физики. Том 2. Термодинамика и Молекулярная физика // Д.В. Сивухин. - М.: Наука, 1986. - 552 с.

2. Матвеев Ач.Н. Молекулярная физика / А.Н. Матвеев. - М.: МГУ, 1982. - 192 с.

3. **Иродов, И.Е.** Задачи по общей физике / Е.М. Иродов. - М.: Бином, **1998.** - 448 с.

4. **Кассандрова, О.Н.** Методика решения задач по молекулярной физике / О.Н. Кассандрова, А.Н. Матвеев, В.В. Попов. - М.: МГУ, 1982. - 192 с.

5. **Жукарев, А.С.** Задачи повышенной сложности в курсе общей физики / А.С. Жукарев, А.Н. Матвеев, В.К. Петерсон. - М.: МГУ, 1985. - 200 с.

6. Сборник задач по общему курсу физики. Часть 1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика / **Под ред. В.А. Овчинкина.** - М.: Изд-во МФТИ, 1998. - 414 с.

7. **Белонучкин, В.Е.** Задачи по общей физике / В.Б. Белонучкин [и др.]. - М.: Физматлит, 2001. - 334 с.

8. **Чертов, А.Г.** Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. - М.: Высшая школа, 1981. - 496 с.

9. **Базаров, И.П.** Задачи по термодинамике и статистической физике / И.П. Базаров, Э.В. Геворкян, П.Н. Николаев. - М.: Высшая школа, 1997. - 352 с.

10. **Горбунова, О.И.** Задачник - практикум по общей физике. Термодинамика и молекулярная физика / О.И. Горбунова, А.М. Зайцева, С.Н. Красников. - М.: Просвещение, 1977. - 120 с.

Приложения

1. Таблица производных

Функция	Производная	Функция	Производная
x^n	$n\ x^{n-1}$	$\mathrm{tg}\,x$	$1/\cos^2 x$
e^x	e^x	$\mathrm{ctg}\,x$	$-1/\sin^2 x$
a^n	$a^n \ln a$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\ln x$	$1/x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{arctg}\,x$	$1/(1+x^2)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{arcctg}\,x$	$-1/(1+x^2)$

2. Таблица интегралов

$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq 1$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln x$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int \mathrm{tg}\,x dx = -\ln\cos x$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2}-1)$

$\int_0^\infty x^n \exp(-x)dx = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \sqrt{\pi}/2, & n=1/2 \\ 1, & n=1 \\ 2, & n=2 \end{cases}$	$\int_0^\infty x^n \exp(-x^2)dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}/2, & n=0 \\ 1/2, & n=1 \\ \sqrt{\pi}/4, & n=2 \\ 1/2, & n=2 \end{cases}$

3. Плотности веществ

Твердое вещество	ρ, г/см^3	Жидкость	ρ, г/см^3
Алмаз	3,5	Бензол	0,88
Алюминий	2,7	Вода	1,00
Вольфрам	19,1	Глицерин	1,26
Графит	1,6	Керосин	0,80
Железо(сталь)	7,8	Ртуть	13,6
Золото	19,3	Спирт	0,79
Лед	0,916	Эфир	0,72
Медь	8,9	Газ (при нормальных условиях)	ρ, кг/м^3
Молибден	10,2		
Никель	8,9		
Олово	7,4	Азот	1,25
Платина	21,5	Водород	0,09
Свинец	11,3	Воздух	1,293
Серебро	10,5	Кислород	1,43
Титан	4,5	Углекислый газ	1,98
Фарфор	2,3	Хлор	3,21

4. Постоянные газов

Газ (относительная молекулярная масса)	$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$	Теплопроводность, к мВт/м·К	Вязкость ή, мкПа·с	Диаметр молекулы d, нм	Постоянные Ван-дер-Ваальса	
					a, $\frac{\text{Па·м}^6}{\text{моль}^2}$	B, $10^{-6} \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{моль}^2}$
He(4)	1,67	141,5	18,9	0,20	–	–
Ar(40)	1,67	16,2	22,1	0,35	0,132	32
H_2(2)	1,41	168,4	8,4	0,27	0,024	27
N_2(28)	1,40	24,3	16,7	0,37	0,137	39
O_2(32)	1,40	24,4	19,2	0,35	0,137	32
CO_2(44)	1,30	23,2	14,0	0,40	0,367	43
H_2O(18)	1,32	15,8	9,0	0,30	0,554	30
Воздух	1,40	24,1	17,2	0,35	–	–

П р и м е ч а н и е. Значения γ, к и ή – при нормальных условиях

5. Тепловые постоянные твердых тел

Вещество	Удельная теплоемкость c, Дж/(г·К)	Дебаевская температура θ, К	Температура плавления, °С	Удельная теплота плавления λ, Дж/г
Алюминий	0,90	374	660	321
Железо	0,46	467	1535	270
Лед	2,09	–	0	333
Медь	0,39	329	1083	175
Свинец	0,13	89	328	25
Серебро	0,23	210	960	88

Примечание. Значения удельных теплоемкостей соответствуют нормальным условиям

6. Постоянные жидкостей

Жидкость	Вязкость $\acute{\eta}$, мПа·с	Поверхностное натяжение σ, мН/м	Удельная теплоемкость c, Дж/(г·К)	Удельная теплота плавления L, Дж/г
Вода	10	73	4,18	2250
Глицерин	1500	66	2,42	–
Ртуть	16	470	0,14	284
Спирт	12	24	2,42	853

Примечание. Приведенные значения величин соответствуют:
$\acute{\eta}$, σ – комнатной температуре (20 °С),
c – нормальным условиям,
L – нормальному атмосферному давлению.

7. Давление насыщенных паров воды

°C	Давление, кПа	°C	Давление, кПа	°C	Давление, кПа
0	0,61	25	3,15	60	19,9
5	0,87	30	4,23	70	31,0
10	1,22	35	5,60	80	47,3
15	1,70	40	7,35	90	70,0
20	2,33	50	12,3	100	101,3

Учебное издание

Башкиров Евгений Константинович

ЗАДАЧИ ПО МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

Учебное пособие

ъ

Публикуется в авторской редакции

Компьютерная верстка, макет Е.К. Башкирова

Подписано в печать 11.02.09. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 6,98. Гарнитура «Times New Roman». Тираж 100 экз. Заказ *Na/£2G*
Изд-во «Самарский университет», 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
Тел. 8 (846) 334-54-23
Отпечатано на УОП СамГУ