ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Кафедра общей и теоретической физики

А.П. Мартыненко

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МЕХАНИКЕ И МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве практикума

Самара
Издательство «Самарский университет»
2007

УДК 531.(07)
ББК 22.31
М П

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Салеев

Мартыненко А.П.
МП **Задачи по теоретической механике и механике сплошных** сред: практикум / А.П. Мартыненко; Федер. агентство по образованию. - Самара: Изд-во «Самарский университет», 2007. -136 с.

Предлагаемый практикум содержит более 250 задач по теоретической механике и механике сплошных сред и практически охватывает все разделы. Главное внимание уделено изучению методов аналитической механики и их использованию при решении конкретных физических задач.

Предназначен для студентов и аспирантов физического факультета университета.

УДК 531.(07)
ББК 22.31

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс « Теоретическая механика и механика сплошных сред» занимает важное место в учебных планах физических факультетов университетов. Во-первых, с него начинается изучение « теоретической физики >. После курса теоретической механики студенты начинают знакомиться с другими разделами теоретической физики: классическая электродинамика, квантовая механика, статистическая физика, квантовая электродинамика, специальными курсами, которые опираются на знание основ теоретической физики. Во-вторых, в рамках этого курса формулируются и изучаются такие методы аналитической механики, которые необходимы для успешного усвоения других разделов теоретической физики.

Необходимо отметить, что курс теоретической механики и механики сплошных сред, который входит в программу классических университетов, существенно отличается от аналогичного курса в других университетах (бывших технических институтах). Он нацелен прежде всего на изучение различных методов описания движения механических систем: метод Ньютона, метод Лагранжа I рода, метод Лагранжа II рода, метод канонических уравнений Гамильтона, метод Рауса, метод Гамильтона-Якоби, метод канонических преобразований, метод фазовых портретов, метод переменных дейтвие-угол, вариационных методов механики.

Цель дисциплины

Курс « Теоретическая механика и механика сплошных сред» нацелен на получение базовых знаний по одному из основных разделов классической физики механике. В рамках данного курса студенты должны изучить методы теоретической механики и механики сплошных сред, динамики конечномерных голономных механических систем с идеальными связями, научиться использовать различные методы для решения конкретных физических задач на соответствующем специальности уровне. Отметим, что хорошие знания по этому предмету необходимы студентам старших курсов для успешного изучения других разделов физики.

Задачи дисциплины

1. Раскрыть роль фундаментальных принципов и методов теоретической механики;

2. Научить использовать современный математический аппарат для решения конкретных задач динамики;

3. Рассмотреть основные проблемы теоретической механики и механики сплошных сред

4. Сформировать у студентов знания и навыки, позволяющие самостоятельно решать прикладные задачи.

Важнейшая роль в достижении поставленных задач отводится семинарским занятиям. В данном пособии собраны около 250 задач по основным разделам курса. Каждое семинарское занятие содержит несколько разобранных задач, с которыми необходимо ознакомиться перед началом самостоятелной работы (аудиторные и домашние задачи). В течение года запланированы 4 контрольных работы по пройденному материалу. Контроль за решением задач предусматривает также отчет студентов по домашним задачам на каждом семинарском занятии.

2. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Семинар 1. Кинематика, материальной точки

Литература

1. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. - М.: МГУ, 1991.-336 с.
2. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. М.: Физматлит, 2001.-262 с.
3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.
4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.
5. Павленко, Ю.Г. Задачи по теоретической механике / -М.: Физматлит, 2003.-535 с.

Скорость и ускорение материальной точки в цилиндрической системе координат определяется следующими выражениями:

$$V = 1{>}_r\Pi r + У ф П ф + V_z X l_z,\ V_r = Г,\ Ю ф = г ф,\ v_z = z, \quad (1)$$

$$w = Wriir + Ш ф П ф + w_z ii_z,\ w_T — r\text{-}\ г ф^2,\ У) ф = г ф + 2 г ф,\ w_z = z,$$

где $г,ф,г$ - цилиндрические координаты.

Скорость и ускорение материальной точки в сферической системе координат имеют вид:

$$v = v_r Hr + У ф П ф + v_e ne,\ v_r = r,\ ь_ф = г \sin в ф,\ V0 = г в, \quad (2)$$

$$w = w_r n_r + Ш ф П ф + г и в щ,\ w_r = r\text{-}r \sin^2 в ф^2 - г в^2,$$

$$ю_ф = г \sin в ф + 2 \sin в г ф + IT \cos в ф в,\ и{>}в = г в + 2 г в - г \sin 9 \cos в ф^2,$$

где $т,в,ф$ - сферические координаты.

При естественном способе задания движения материальной точки ее скорость и ускорение определяются следующими выражениями:

$$y = V_T I L r,\ {}^V r = \frac{da}{-17'}\ W = W_т + W_n,\ W_r = \frac{(Per}{-\ ^\wedge J^n r},\ W_{„} = \frac{v^2}{—\Pi}, \quad (3)$$

где a длина дуги траектории. Векторы n,-, п лежат в соприкасающейся плоскости траектории. Третий орт пь естественного трехгранника ортогонален плоскости, в которой лежат первые два орта. Формулы для ускорения выражают теорему Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное.

Задача

Используя теорему Гюйгенса найти радиус кривизны эллипса в произвольной его точке, по которому движется материальная точка:

$$a? \quad Б^2$$

Решение

Представим закон движения материальной точки в параметрическом виде:

$$x = acost, \ \ y — bsint.$$

Радиус кривизны траектории выражается в терминах нормального ускорения материальной точки. Выразим его через полное ускорение w^2 = jjr + w^2. Следовательно, радиус кривизны

$$\frac{V^2}{л\^/w^2 \ — \ W^2}$$

Используя известный закон движения материальной точки, мы можем выразить ускорение точки, тангенциальное ускорение и скорость через переменную времени t:

$$v = \backslash Jx^2 + y^2 = y\ a^2 \sin^2 1 + b^2 \cos^2 1,$$

$$w \quad л/x^2 + y^2 = \text{v o}^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 1,$$

$$wl = \text{I} - \text{I} \backslash^2 \sim \backslash dt) \quad ' \quad \frac{(a^2-b^2)sm^2tcos^2t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 1}$$

В результате получаем следующее выражение для радиуса кривизны как функцию времени:

$$P = \frac{(\text{a}^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 tf^2}{ab}.$$

Задача

Пусть материальная точка движется равномерно по поверхности сферы радиуса а. Точка начинает движение на экваторе, направление ее скорости v образует с меридианами сферы постоянный угол *а.* Найти уравнение траектории точки (локсодромы), а также момент времени т, в который точка достигает полюса сферы.

Решение

Положение точки на сфере определяется двумя углами *ф, в* сферической системы координат. Компотенты скорости имеют при этом вид:

$$Уф = авт.9ф\backslash у\$ = ав.$$

Без ограничения общности примем, что движение точки начинается на оси *OX* (то есть при *t* = 0, *ф* = О, *в* = 7г/2), угол *в* во время движения уменьшается от 7г/2 до нуля, а угол *ф* > 0.

Так как направление скорости v пересекает меридиан *ф* = *const* под углом *а,* то *ctga* = *—ь$/уф,* что приводит к дифференциальному уравнению:

$$\frac{—}{аф} = —ctgasma.$$

Протнтегрировав это уравнение с учетом упомянутых выше начальных условий, получим уравнение локсодромы в виде:

$$tg- = e-^{Л9аф}.$$

Так как при *в* = 0 *ф* = со, то локсодрома делает около полюса бесчисленное множество витков. Однако общая длина дуги локсодромы конечна. Найдем ее:

$$ds - ayJdiP + \sin^2 вЦ^2 = -adBy/l + tfa - -\frac{айв}{\cos a}$$

Так как вся дуга *I* локсодромы соответствует изменению *в* от тт/2 до О, то *I* = *ira/2cosa*. Поскольку движение точки равномерное, то время движения г будет равно *-rra/2v* cos *а*.

Аудиторные задачи

1. Точка движется по эллипсу ^ + £ = 1 с ускорением, параллельным оси *OY.* Найти ускорение как функцию *у,* если г(0) = (0, *b),* v(0) = $(v_0$,0).

2. Точка движется по эллипсу ^ + |г = 1 так, что угловая скорость радиуса-вектора, проведенного из центра эллипса к точке, постоянна и равна *u).* Определить скорость точки, если в начальный момент времени **i(0) = *a*.**

3. Электрон в постоянном магнитном поле движется по винтовой линии в соответствии с уравнениями:

$$x = acostJt, \quad y = asinwt, \quad z = bt.$$

Найти траекторию, скорость и ускорение иатериальной точки.

4. Движение точки в плоскости задается в полярной системе координат компонентами скорости v_r — 1/г^2 и *Ьф* — *1/аг, а* -константа. Найти уравнение траектории точки г = *г(ф),* а также радиальную w_T и трансверсальную <*Шф* компоненты ее ускорения, если в начальный момент времени г(0) = го, *ф(0) = фо*-

5. При движении точки со скоростью v(t) ее цилиндрические координаты меняются во времени по линейному закону. Найти компоненты кривизны траектории.

6. Нить перекинута через вертикальную стенку и прикреплена к частице. Найти ее скорость, если нить тянуть со скоростью *и.* Угол между нитью и горизонтальной прямой равен *a(t).*

Домашние задачи

1. Точка движется по эллипсу с полуосями *а,Ьс* постоянной по величине скоростью *vo*- Определить ускорение и скорость точки как функцию координат.

2. Точка движется в плоскости с постоянной радиальной скоростью v_r = с > 0 и радиальным ускорением w_r = $-a^2/г^3$, а-константа. Найти

уравнение траектории точки, если в начальный момент времени t = О заданы г(0) = го и $(0) = *фо*-

3. Точка движется в плоскости так, что ее секторная скорость $a_г = кр^2/2,$ а угол между ускорением и радиусом-вектором точки постоянен и равен 45°. Найти закон движения и уравнение траектории точки, если /9(0) = 0, *ф(0)* = 0, р'(0) = p'_0.

4. Точка движется в плоскости. Ее тангенциальное и нормальное ускорения соответственно равны постоянным *а, Ь.* Найти уравнение траектории в полярных координатах.

5. Расстояние между двумя движущимися частицами постоянно, то есть $|г_2$ - $г_х|$ = *С.* Показать, что $гг'_х$ = $гг'_2$, где г(£) = Г2(*) — $г_х$(t).

6. Частица движется по эллипсу в плоскости *XOY.* Проекция секторной скорости a_z постоянна. Найти закон движения точки *x(t), y(t).*

7. Концы стержня длины *I* скользят по двум направляющим, образующим прямой угол, причем координата точки *В,* находящейся на оси *ОХ,* меняется по закону *хв = ut.* Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки *С* середины стержня.

3. УРАВНЕНИЯ НЬЮТОНА

3.1. Семинар 2. Интегрирование уравнений движения

Литература

1. Ольховский,И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И.Ольховский. - М.: МГУ, 1978.-574 с.
2. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. М.: МГУ, 1991.-336 с.
3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.
4. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. М.: Физматлит, 2001.-262 с.
5. Гольдстейн,Г. Классическая механика/ Г. Гольдстейн.-М.: Физматлит, 1975.-415 с.

Пусть материальная тока движется в потенциальном поле $U(r) = U(x)$. Тогда система уравнений движения точки имеет вид:

$$mx = \frac{\text{Огт}}{ax}, \quad my = 0, \quad m'z = 0. \qquad (4)$$

В этом случае имеем равномерное движение по осям y, z. Чтобы проинтегрировать первое уравнение, умножим его на x:

$$\overset{...}{mxx} + \text{я}\frac{.dU}{ox} = \frac{d}{at}\left(m\overset{.0}{x} + U(x)\right) = 0. \qquad (5)$$

Следовательно, существует интеграл движения (.Ео-энергия одномерного движения материальной точки массы m):

$$E \ \hat{} \ \hat{} + Uix). \qquad (6)$$

Разделяя переменные в последнем уравнении, получим закон движения точки в виде:

$$t = / \ J \ \ y/\pm[E\text{-}Щ_x)] + const. \qquad (7)$$

Финитное движение материальной точки в потенциальном поле *U(x)* является нелинейным колебанием с периодом Т = *2n/ш,* который имеет вид:

$$T = 2\ \Gamma \qquad {}^{dX} \qquad E = U\{xi), \qquad (8)$$

где zi,2 - точки поворота траектории (точки, в которых E = i7(x)).

Задача

Частица движется в потенциальном поле {/(ж) = $-U_0 exp(x/a)$. Найти зависимость x(£). Начальные условия: x(0) = 0, x(0) $-v_0 >$ ^/2U_0/*m*.

Решение

Запишем закон сохранения энергии материальной точки:

$$-mx^2 - Щ \exp (x/a) = E.$$

Полагая здесь t = О, выразим значение энергии точки E через начальные условия:

$$\# = 2^{mw} о - \hat{} о-$$

Предположим, что $E > 0$. Вычислим интеграл:

dx П^Г *VE^UWE*

/ д/(2/т)(Е + $C/_0$exp(x/a)) V 2£^{у} *y/E~=U - y/Ë*

где С константа интегрирования. Пусть Т время, за которое частица уходит на бесконечность. Тогда из последнего равенства получим:

Гm. *л/E +* u_0 + \№

V 2S *y/E + Uo - VE*

Зависимость координаты x от времени определится следующим выражением:

x(t) = *ahx* ^-вЛ$^{-2}$[(Г - *)-л/12т] .
Co *a*

Пусть i? = 0. Тогда из закона сохранения энергии получим:

$$x(t) = t{>}o\exp(x/2a).$$

Разделяя переменные и интегрируя последнее выражение, находим:

$$e \bullet \& = - \frac{\quad}{2a} + B.$$

Константу интегрирования В находим из начальных условий, полагая в последнем равенстве $t = 0$: $B = 1$. Тогда закон движения точки имеет вид:

$$s(i) = -2a\ln(1-\hat{}\,i).$$

В этом случае частица достигнет бесконечности за время:

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{(\text{Ъ}n}{U_0}}.$$

Задача

Проинтегрировать уравнение движения материальной точки x = fc-sin -, если заданы следующие начальные условия: *x(0) — mma, x(0)* = 2\/fca, *к, a* > 0.

Решение

Чтобы проинтегрировать данное уравнение, умножим обе части на *x*. После этого видим, что и левую, и правую часть полученного уравнения можно представить в виде полной производной по времени от некоторой функции:

$$\frac{d}{dt}\frac{x^2}{2} = -\frac{d}{dt}\kappa a\cos\frac{x}{a}.$$

После первого интегрирования получим:

$$\frac{x^2}{2} + \kappa a\cos\frac{x}{a} = \text{Єi}.$$

Первую константу интегрирования *C* можно зафиксировать, используя начальные условия в виде: *C* = *ка*. Выразим отсюда £(*), разделим переменные *x* и *t* и проведем второе интегрирование:

x = 2Vkasm^~ 2a', / -r— =- ./ sin^ = 2\fkat + C_2, где C_i - вторая константа интегрирования. Ее также можно зафиксировать из начальных условий. Полагая $t = 0$ в данном уравнении, получим закон движения в виде:

$$\pm\ x(t) \qquad .\ [\kappa\ .$$

Аудиторные задачи

v 1. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -Ax^4$, если ее энергия равна нулю.

2. Заряд е < 0 в начальный момент времени покоился на расстоянии h от бесконечной проводящей плоскости. Определить время, за которое заряд достигнет плоскости.

3. Тело движется в однородном поле тяжести Земли. Сила сопротивления среды пропорциональна квадрату скорости. В начальный момент времени тело находилось на высоте H, а его скорость равнялась нулю. Найти зависимость скорости от времени, скорости от высоты и высоты от времени.

4. Частица движется в поле $U(x) = -U_0 ch^{-2} kx$. Найти зависимость $x(t)$ и период движения точки с энергией $E = -E_0 < 0$.

5. Парашютист массы та прыгает с самолета, летящего горизонтально на высоте H со скоростью v. По какой траектории движется парашютист при затяжном прыжке (до момента раскрытия парашюта), если сила сопротивления воздуха $F = -\beta v$, где v скорость парашютиста, а изменение ускорения свободного падения с высотой не учитывается. Из полученного уравнения предельным переходом $\beta \to 0$ найти уравнение траектории в отсутствии сил сопротивления.

Домашние задачи

~ 1. Частица массы та движется под действием силы $F = (-m\lambda^2 x, -m\lambda^2 y, 0)$ и силы сопротивления $F^d = (-2m\lambda x, -2m\lambda y, 0)$, где Л   постоянный коэффициент. Найти уравнение траектории, если *(Q) = <*, 2/(0) = 0, г(0) = 0, x(0) = 0, у(0) = Аа, г(0) = 0.

2. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = A(exp(-2ax)$ - 2exp(—аж)) (потенциал Морза).

'3. Над поверхностью Земли действует постоянное по времени электрическое поле, вектор напряженности которого направлен вертикально вверх, а $E = E_0(1 + z/zo)^2$. До какой высоты Я поднимется точка массы m и заряда e, если она подброшена вверх на высоте ZQ С начальной скоростью VQ.

4. Потенциальная энергия частицы $U(x) = —ax^2/2 + \x^3/3\$. Начальные условия £(0) = 0, ж(0) = Л, Л = 3<т/А. Найти решение уравнения движения $x(t)$.

5. Точка массы m падает вертикально (изменение ускорения свободного падения с высотой не учитывается) без начальной скорости в среде, сила сопротивления которой $F = —av — (3v^2$, где $a, /3$ -положительные постоянные величины. Найти предельное при t —> сю значение скорости в этом случае.

6. Потенциальная энергия частицы

$$\text{ВД} = \frac{ax^2}{—} + \text{"}\frac{\text{Аж}^4}{4\text{-}}$$

Начальные условия имеют вид: $x(0)$ = 0, $x(0)$ = хг = $y/2a/X$. Найти решение уравнения движения $x(t)$.

7. Частица движется в поле потенциального барьера $U(x)$ = $Uoexp(-\x\/a)$ с полной энергией E > U_0. Найти разность между временем движения от xi = -со до x_2 = оо в поле барьера и временем свободного движения с той же энергией.

8. Частица движется в поле $U(x)$ = -$UQCOSX/1$. Найти $x(t)$, если a;(0) = 0, i(0) = $y/4U_0/m$.

3.2. Семинар 3. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле

Литература

1. Ольховский,И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И.Ольховский. - М.: МГУ, 1978.-574 с.
2. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. М.: МГУ, 1991.-336 с.
3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.
4. Коткин,Г.Л. Сборник задач по классической механике / Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо.-М.: Физматлит, 1977.-319 с.
5. Ольховский, И.И. Задачи по теоретической механике для физиков /И.И.Ольховский, Ю.Г.Павленко, Л.С.Кузьменков; М.: МГУ, 1977.- 420 с.

На заряд *q,* движущийся в электромагнитном поле, задаваемом потенциалами А, *ф,* действует сила Лоренца:

F = gE + % x H] , (9)

E = _V ^ - I ^ , H = roiA,
c dt

так что уравнение движения Ньютона имеет вид:

mr = F = gE + - [r x H] .
c

Умножая скалярно обе части этого уравнения на г, получим закон изменения кинетической энергии в виде:

Правая часть - мощность силы, с которой действует на заряд электрическое поле. Если электрическое поле не зависит от времени, то Е = —*Чф* и последнее выражение приводит к интегралу энергии:

-rax¹ + еф(г) = E₀. (11)

Задача

Электрон движется в однородном магнитном поле Н = #$_0$п$_г$ и радиальном электрическом поле с потенциалом *ф* = *-$fc(x^2 + y^2)*. В начальный момент времени х(0) = a cos a, *у(0)* = a sin a, г(0) = 0, v_0 = 0. Найти закон движения электрона, если (^) ^{2} > **%$* (зяряд электрона е = -$e_0$).

Решение

Запишем уравнение движения электрона в электромагнитном поле:

$$mr = -eoE - \frac{}{c}[v \times H].$$

Спроектируем данное векторное уравнение движения на оси декартовой системы координат:

X — wqx + *Cly* — 0,

у - *u%y* - *Qx* = 0,

5 = 0,

где введены следующие обозначения *u^2 = eoUo/mR^2, Q = eoHo/mc*. Третье уравнение можно проинтегрировать независимо от первых двух: *z(t)* = *C* + *C$*- Константы интегрирования *C* = Сг = 0 в соответствии с начальными условиями. Первые два уравнения образуют систему. Для ее решения удобно ввести комплексную функцию £(£) = *x(t)+iy(t)*. Умножая второе уравнение на г и складывая с первым уравнением получим:

Перепишем начальные условия в терминах функции £: £(0) = *aё"**, £(0) = 0. Дифференциальное уравнение для функции £ представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение А^2 - u_0 — *iCIX* — 0 имеет два корня:

Под знаком квадратного корня стоит положительная величина, как следует из условия задачи. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$£(t) = Cie^{iwit} + C_2e\hat{}.$$

Используя начальные условия, найдем значения постоянных интегрирования $Ci\$$.

$$Oi = \frac{}{} ae , \quad Cr = \frac{}{} ae .$$

Таким образом, решение задачи имеет вид:

$$x — Re£ = \frac{U>1 - Ш2}{Ш\ - U>2} [—o)2 cos\hat{} i + a) + ш\ cos(u>2* + a)],$$

$$y = 1m£ = \frac{}{W\ - U>2} [-u\% \sin(o>it + a) + u>i sm(u>-\}t + a)].$$

Задача

Электрон движется в однородном постоянном магнитном поле. Найти решение уравнений движения в цилиндрических координатах.

Решение

Наравим магнитное поле по оси $0Z$. Магнитная составляющая силы Лоренца направлена в плоскости XOY, поэтому по оси $0Z$ имеем равномерное движение. Проекция момента силы на ось OZ также равна нулю, а полная энергия системы постоянна. Таким образом мы можем записать три интеграла движения в цилиндрических координатах:

$$p_z = mi, \quad M_z = mp^2ф - \hat{}p^2H, \quad E = \hat{}(p^2 + p^2ф^2 + z^2).$$

Равномерное движение по оси $0Z$ представим в виде: $z(t) = z_0t + ZQ$. Исключая $ф$ из системы двух других уравнений, получим:

$$m \; *-£-5Ь(*^+ 5>*)1$$

Введем следующие обозначения:

г.2

1m *eoH* *тш* *тс*

Тогда уравнение движения для p^2 можно представить в виде:

$$P^2 \overset{2}{=} \text{^№}p^2\text{-}(P^2\text{-}R^2\text{+}rm$$

Границы движения | R — го| < p < R + r_0 по координате p, получаемые из условия p^2 > 0, определяют в плоскости XOY кольцо, внутри которого расположена траектория электрона. После интегрирования последнего уравнения получим:

$$p^2\{t) = R^2 + rl + 2Rr_0 \cos cu(t - \mathrm{to})\text{-}$$

Из исходной системы уравнений движения тогда находим закон движения дня координаты ϕ и траекторию движения:

$$\text{</.(*)} = \sim u\{t - to) + arctg^l\text{-^^-}tg\text{^}(t - t_0),$$

$$\phi\text{-}\phi_0 = [\ \text{^} f \text{ ' ^ } Z \text{ ^ ' } i \text{ , ^ } R^2 = P^2 + rl - 2\mathrm{pr_o}\cos(0 - \phi_0).$$

Очевидно R является радиусом окружности, а го расстояние между началом координат и центром окружности. Если M_z > 0, то R > *го* -окружность охватывает начало координат; если M_z < 0, то R < *TQ* окружность не охватывает начала координат.

Задача

Обобщить теорему вириала сил для частиц, движущихся в магнитном поле.

Решение

Умножим обе части уравнения движения частицы

$$mi = \mathrm{F} + \frac{-}{\mathrm{c}}[\mathrm{г} \times \mathrm{H}]$$

скалярно на r и, учитывая следующее равенство

$$\mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\,\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2,$$

перепишем полученное соотношение в виде:

$$\frac{m_a}{2}\frac{d^2 r_a^2}{dt^2} - m_a\dot{\mathbf{r}}_a^2 = \mathbf{r}_a\mathbf{F}_a - \frac{e_a}{c}\mathbf{H}[\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{r}}_a].$$

Усредняя это выражение по времени, и считая, что система зарядов движется в ограниченной области пространства, получим:

$$2\langle T\rangle = -\sum_{a=1}\langle \mathbf{r}_a\mathbf{F}_a\rangle - \sum_{a=1}\frac{e_a}{m_a c}\langle \mathbf{M}_a\mathbf{H}\rangle,$$

где T кинетическая энергия системы зарядов, M_j - момент импульса частицы.

Аудиторные задачи

1. Заряд e движется в поле $\mathbf{E} = E_0 \sin \frac{\pi x}{a}\mathbf{n}_x$ электрического ондулятора. В начальный момент времени $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{n}_z$. Найти закон движения заряда.

2. Электрон движется в магнитном поле с напряженностью $\mathbf{H} = H_0 \cos ay \cdot \mathbf{n}_z$. Найти закон движения и траекторию электрона, если $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{n}_y$.

3. Заряд e движется в однородном магнитном поле напряженности H. Найти зависимость скорости и кинетической энергии заряда от времени, если учесть действие на заряд силы лучистого трения $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$ и если $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.

4. Заряд движется в однородном магнитном поле. Доказать, что для момента импульса M заряда имеет место интеграл движения $\mathbf{MH} + \frac{e}{2c}[\mathbf{rH}]^2 = C$.

5. Заряд e движется в поле магнитного монополя $\mathbf{H} = g\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Найти интеграл движения, следующий из закона изменения момента импульса заряда.

Домашние задачи

1. Электронно-лучевая трубка помещена в однородное магнитное поле, напряженность H которого перпендикулярна плоскости экрана. Электроны влетают в электронно-лучевую трубку из электронной пушки с составляющей скорости *u* вдоль оси трубки и составляющей скорости *vo* перпендикулярно оси. При какой длине *L* трубки все электроны фокусируются в одной точке экрана?

2. Найти траекторию и закон движения заряженной частицы в магнитном поле H = *дг/г*^{3} (поле магнитного монополя). Примечание: подобный вид имеет магнитное поле тонкого длинного соленоида вне его в точках, удаленных от его торцов на расстояние, большое по сравнению с диаметром соленоида, но малое по сравнению с его длиной.

3. Электрон (е = —во) движется в поле квадрупольной линзы, потенциал которого *ф* = -*$(x*^{2} — г^2), и в однородном постоянном магнитном поле H = *Щn*$_г$. Определить закон движения электрона, если *(^~г)* > ^j^ -

4. Найти закон движения заряда в магнитном поле H = (0,0, До cos „)• Начальные условия в декартовых координатах имеют вид г(0) = O, v(0) = (0, *u>a,* 0), *ш = eHo/mc.*

5. Найти амплитуду колебаний свободного электрона при действии на него излучения радиостанции мощностью *P* = 100 кВт, находящейся на расстоянии г = 10 км. Длина волны Л = 500 м.

6. Над поверхностью Земли действует однородное магнитное поле, вектор напряженности H которого горизонтален. Найти уравнения движения частицы массы *m* и заряда е под действием магнитного поля и однородного поля тяжести. В начальный момент времени г(0) = $г_0$, v(0) = vo- Провести анализ решения при H —> 0.

7. В условии предыдущей задачи частица начинает двигаться на высоте *h* от Земли со скоростью v_0, направленной вертикально вниз. При каких значениях *h* частица не упадет на Землю.

3.3. Семинар 4. Движение в центрально-симметричном поле

Литература

1. Ольховский,И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И.Ольховский. - М.: МГУ, 1978.-574 с.

2. Ландау, Л.Д. Механика / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц; М.:Наука, 1988 - 215 с.

3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / АЛ. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.

4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.

5. Ольховский, И.И. Задачи по теоретической механике для физиков /И.И.Ольховский, Ю.Г.Павленко, Л.С.Кузьменков; М.: МГУ, 1977.- 420 с.

Основные закономерности движения материальной точки в произвольном центрально-симметричном поле:

1. Полная энергия точки *EQ* И момент количества движения M_0 сохраняют свое постоянное значение.

2. Движение материальной точки происходит в плоскости, перпендикулярной моменту количества движения.

3. Радиус-вектор материальной точки заметает равные площади за равные промежутки времени.

4. Траектория движения материальной точки симметрична относительно апсид (так называются прямые, проходящие через центр силы и точки поворота).

Траектория движения и закон движения материальной точки массы *m* в произвольном центрально-симметричном поле *U(r)* определяются следующими интегралами:

$$ч_{[2m(£_0-£/(r))-\wedge]^{1/2}} + C, \qquad (12)$$

$$-1_{Ji\,(E_0 - U(r)) - £,}^{\;dr} + C, \qquad (13)$$

где *EQ, MO* интегралы движения энергии и момента количества движения материальной точки.

Под задачей двух тел понимают задачу о движении двух взаимодействующих материальных точек в отсутствие внешних сил. В системе центра масс задача двух тел сводится к эквивалентной задаче о движении /и-точки (воображаемой точки с массой /i = *m\mil{m* + тг) и относительным радиус-вектором г = гг — ri) в центрально-симметричном поле с неподвижным центром. Относительно инерциальной системы отсчета центр масс точек движется равномерно и прямолинейно, а обе точки относительно системы центра масс совершают движение в плоскости, проходящей через центр масс и сохраняющей свою ориентацию относительно инерциальной системы отсчета; траектории обеих точек относительно системы центра масс подобны.

Задача

Потенциальная энергия частицы $U = пш^2г^2/2$. Найти зависимость координат от времени и уравнение траектории.

Решение

Траектория лежит в плоскости, перпендикулярной вектору момента импульса. Выбирая ось *OZ* параллельно вектору Мо, запишем два интеграла движения точки:

$$mг^2ф = M_0, \quad —(г^2 + г^2ф^2) + \frac{1}{}\text{-}mш^2г^2 = E_0.$$

Исключая *ф*, получим уравнение:

$$о \quad 2, \quad , „ \quad гг \quad , . \quad Mn \quad mш^{2}г^{2}$$

$$m$$

Из условия $г^2 > 0$ находим границы области движения по координате г:

$$Ь<г<a, \quad a,b = Uy/c^2 + 2<\%\pm y]c\backslash - 2c|J, \quad ci = yj\frac{2E}{m\omega^2}, \quad c_2 = \sqrt{ГйсГ}$$

Найдем уравнение траектории. Пусть $г(0) = г_0$, $v(0) = v_0$. Тогда из исходных уравнений движения получаем:

$$_2 \frac{Г \_\_\_\_\_\_ dr \_\_\_\_\_\_\_\_ .}{Jb \quad г^2л/с(- <4/г^2 - г^2}$$

где ϕ_m определяется условием: $г(\phi_m) = Ь$. Используя подстановку: $u — 1/г$, находим:

$$г^2 \quad \frac{24}{4 + y/4-44™*2\{Ф-Фm)}$$

Мы получили уравнение эллипса с полуосями *а,Ь*. Действительно, используя определение *с\,С2,а, Ь,* представим полученное решение в виде:

$$\hat{г}^2 = \frac{aЧ^2}{a^2 \cos^2(<£ - \phi_m) + Ъ^2 \sin^2(<£ - \phi_m)}$$

Аналогично, интегрируя уравнение для $г^2$, найдем:

$$г^2 = \frac{1}{2} {}^{C}1 - \backslash J4 - {}^{4c}2^{C0S} M* - *m)$$

где t_m -ближайший к $t = 0$ момент времени прохождения частицей точки $г = Ь$. Это соотношение также удобно представить в виде:

$$г^2 = Ъ^2 \cos^2 w(t - t_m) + a^2 \sin^2 o>(£ - t_m).$$

Подставляя его в первый интеграл движения, получим зависимость угла ϕ от времени:

$$\phi(г) = arctg \backslash -rtgw(t - i_m)j + \phi„$$

Задача

Потенциальная энергия частицы

[i+©]

Найти уравнение траектории, если полная энергия равна нулю.

Решение

Поскольку сохраняется вектор момента импульса M_0, то траектория лежит в плоскости $гM_0 = 0$. Совместим ось *OZ* с вектором M_0 и выберем начальные условия так, чтобы $z\{t) = 0$. Тогда интегралы движения принимают вид:

$$mг^2\phi = M_0, \quad \hat{}\{г^2 + г^2\phi^2) + u(г) = E_0.$$

Пусть даны следующие начальные условия: г(0) = r_0, v(0) = v_0. Поскольку энергия системы равна нулю и сохраняется, начальные положения и скорость должны быть связаны условием:

IV - $U_\circ$ 2о И » Г п

Исключая *ф* из уравнений движения получим:

г _ --^//(г), tf„, = —₂ - 2•

Из условия $г^2 > 0$ найдем границы области движения частицы:

'max,min — oiA 2fc -*V 1 4fc j, K — M_0 / cy/ШЛо"

Точки поворота траектории существуют при условии: 0 < M_0 < *c-s/mUo/2.* Если Мо = 0, то возможно падение частицы на силовой центр. Найдем уравнение траектории. Пусть *г(ф₀)* = го, *г(ф_m)* = r_{min}. Тогда траектория движения определяется интегралом:

Ф≡L M_0 „ , /dr / y~m^U eff = + Ф„

Преобразуя интеграл к виду:

г2

~ l_{min} y/1 - 4fc² - k²(c~W - cr-i)2 + 0 т '

находим

c² = г² + ^Vl-4A:²cos(0 - $ф_m$). к

ЭТО соотношение можно представить как уравнение окружности

a² = г² + Б² + 2r6cos(^ - $ф_m$), Ь = ^\/\ - 4к², a = \/<? + Ъ² = ±

Период движения частицы:

T = 2» Г / , dr = тг- $m^2c^4U_0$

Задача

Показать, что траектория частицы в поле $U(r)$ — $-ae^{-T}l^{D}jr$ при условии $rm^{\wedge}/D$ < 1 представляет собой медленно прецессирующий эллипс, и найти угловую скорость его прецессии.

Решение

В области г «С D поле $U(r)$ мало отличается от кулоновского $Uo(r) = -a/г$. Поэтому траектория финитного движения близка к эллипсу, параметр p и эксцентриситет е которого, определяемые постоянными E, M сохраняются, а ориентация изменяется.

При изменении г от r_{min} до TV^ и снова до r_{min} полярный угол ϕ меняется на величину

Разложим исходный потенциал $U(r)$ в ряд по степеням малого отношения r/D <С 1, сохраняя первый неисчезающий член, дающий вклад в частоту смещения перигелия:

_.. ч *a a от*

Как мы увидим ниже, необходимо сохранить второй член разложения. Нулевой член разложения дает угол поворота $2n$ (траектория замкнутая). Первый член разложения определяет следующий вклад:

∂ (^{2m} Г—IL—-M\ = — (—- 2 * А = п

"ШУМ J_0 (1 + ecos^z/^/ $dM\MD^P$ (1 - e W '

Второй член разложения потенциальной энергии приводит к следующей поправке:

$\underline{\partial}$ ($2m$ Г a $\underline{p^3}$, Л = _ $\underline{aMmг}$

6<t>2 = $dM\backslash{\sim}MJo$ $21>^2$ (1 + e cos $\phi)^3$ Ф) ~ $D*Jbn\&l*'$

Имея ввиду, что период движения точки по эллипсу T_0 — $-кафn[(2Ep^2$, получим, что частота смещения перигелия равна $ft = 2M/mD^2$.

1. Найти зависимость от координат потенциала центрального поля, в котором материальная точка может двигаться по гиперболической спирали г = *const/ф.*

2. Точка массы *m,* находящейся на расстоянии *г* от центра поля U = кх^3/3, сообщена скорость vo, составляющая угол ±7г/2 с направлением на центр поля. При каком значении *VQ* материальная точка будет двигаться по окружности.

3. Полная энергия материальной точки, движущейся в потенциальном поле

равна нулю. Найти траекторию движения точки.

4. При каких значениях момента импульса *М* возможно финитное движение частицы в поле U(г) = — Vexp(—$к^2г^2$)

5. Найти высоту искусственного спутника Земли, если он все время находится над одной и той же точкой экватора.

6. Найти скорость прецессии орбиты в поле *U(r) = —a/r*$^{1+e}$*,* где *е* <С 1.

Домашние задачи

1. Материальная точка движется в центральном поле *U(г) = —а/г*^{6} Ее полная энергия равна нулю. Найти траекторию движения точки и построить график траектории.

2. Найти траекторию движения материальной точки и смещение ее перигелия в поле *U(г) = -а/г* - /3/г^2.

3. При каких значениях момента импульса *М* возможно финитное движение частицы в поле *U(r) = —аехр(—кг)/г*

4. Материальная точка движется в центральном поле под действием силы $F = —am/г^5$. При каком начальном импульсе траектория представляет собой окружность г = *2Rcosф!* Показать, что в случае F_r *ф* $—am/г^5$ такая траектория точки невозможна.

5. Из бесконечности по направлению к звезде летит метеорит, имеющий на бесконечности скорость Voo > 0 и прицельное расстояние *р* > 0. Может ли метеорит стать спутником звезды?

6. Показать, что если известно уравнение траектории *г = г(ф)* точки в поле центральной силы, то можно найти проекцию силы на направление радиуса $f_r(r)$ и квадрат скорости точки при помощи следующих соотношений (формул Вине):

$$, \ , \ , \quad mc^2 \quad \frac{d^2(1/r)}{ёф^2} + \frac{1}{г} \qquad v^2 = c^2 \quad \mathbf{fd(l/r)\backslash^2 \ V \ ц \ ) \quad \frac{1}{г^2}}$$

где с = $г^2ф$ - удвоенная секторная скорость.

3.4. Семинар 5. Движение в кулоновском центральном поле. Коррекция траектории движения

Литература

1. Ольховский,И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И.Ольховский. М.: МГУ, 1978.-574 с.
2. Ландау, Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц; М.:Наука, 1988.-215 с.
3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.
4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.
5. Павленко,Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко.- М.: Физматлит, 2003.-534 с.

Траектория движения материальной точки массы m в кулоновском поле $U(г) = \pm s$ (a < 0) (гравитационный потенциал такого вида возникает при взаимодействии двух материальных точек с массами mi, тог; такой же потенциал определяет силу кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов) имеет вид:

$$г = (\pm 1 + c \cos \phi)' \qquad (14$$

где параметр и эксцентриситет орбиты определяются в терминах полной энергии и момента количества движения следующими выражениями:

$$p = \frac{M1}{ma} \qquad б2 = 1 + \frac{\hat{} M}{ma^1} \qquad (15)$$

Данная траектория представляет собой гиперболу при $e > 1$, $EQ > 0$; параболу при е = 1, $Eo = 0$; эллипс при е < 1, $U\hat{}f_n < E_0 < 0$; окружность при е = 0,1?о = $U\hat{}i_n$- Если Мо = 0, то траектория - прямая линия.

В случае финитного движения траекторией движения точки является эллипс с полуосями а, *Ь:*

$$p \quad a \quad , \_ \quad y \quad \underline{Mp} \quad . \quad .$$

Период обращения точки по эллипсу связан с его большой полуосью a (3 закон Кеплера):

$$Г^2 = \frac{}{ee} a^3. \qquad (17)$$

Задача

При выведении спутника на круговую орбиту на высоте h = 300 км его расстояние от Земли отклонилось от расчетного на Дг = 3 км. Найти параметр и эксцентриситет орбиты.

Решение

Скорость спутника равна расчетной скорости на круговой орбите данного радиуса:

$$W\hat{}-v\hat{} \qquad r_0 = R + K$$

где Д-радиус Земли, ^-ускорение свободного падения, j- гравитационная постоянная, M масса Земли. Чтобы найти новые параметры орбиты, необходимо знать полную энергию и момент количества движения точки на новой орбите. Они равны соответственно:

$$E = \frac{mgR^2}{г_0} \frac{г\backslash — 2го}{Ъ-_x}$$

$$M = mR. /\frac{—г_ь}{го} \quad Г1 = г_0 + Аг.$$

Таким образом, эксцентриситет и параметр эллипса равны:

$$€ = 1 + \frac{(n-2r_0)nV^{/2}}{'_0} \quad \frac{Аг}{го'}$$

$$p = \frac{\wedge}{го} = г\text{-}о(1 + \frac{—}{Го})^2 » R + h + 2Аг.$$

Численные значения эксцентриситета и параметра орбиты составляют соответственно: е = 0.00045, p = 6684 км.

Задача

Космический аппарат движется по эллиптической траектории. Расстояние от поверхности Земли до перигея и апогея соответственно hp = 170 км, h_a = 400 км. Определить приращение скорости в перигее, в апогее, необходимое для перехода на орбиту приземления.

Решение

Запишем законы сохранения момента импульса и энергии через величины скорости в апогее и перигее v_a, v_p, а также через расстояния $г_a = R + K$, $г_p = R + h_p$:

$$r_a v_a = r_p v_p, \quad \frac{mv\backslash}{—} - \frac{mgR?}{\wedge} - - \frac{}{}_2 mtf - \frac{mgR?}{T_V}.$$

Выпазим отсюда скорости аппарата в перигее и апогее:

$$v* = \backslash l\frac{2gfi^2 \quad r_v}{Тd+Г_pГ_a}\text{-}, \wedge v_p — \quad / \frac{2gR? \quad г_a}{Уг_a + ГрГ_p}$$

Учитывая, что Лр, h_a «; R, приближенно получим:

Пусть торможение происходит в апогее при выходе на орбиту приземления. Тогда $h'_a = h_a$, $h'_p = 0$. Следовательно:

При торможении в перигее /г,, = /i$_p$, /ij, = 0, тогда:

^-VSB(i-^)-ViB(i + ^) - ^ .

Таким образом, выгоднее тормозить в апогее. Численные значения равны: Д%=-53 м/с, Av_p=-*I2i* м/с.

Задача

Найти решение задачи Кеплера в сферической системе координат.

Решение

Используя выражения для ускорения материальной точки в сферической системе координат, запишем систему скалярных уравнений движения в виде *(U(r) = —а/г):*

$$mn(г - гв^2 - гф^2 \sin^2 в) - —2 >$$

$$\frac{}{гаг}(тгЧ) - тгф^2 \sin в \cos 9 = 0,$$

$$\frac{}{г \sin в\, at} m - гтг^2 \sin^2 вф = 0.$$

Заметим, что в сферических координатах:

$$M = тг^2(вn_ф - <\#\sin 0ne).$$

Орты сферической системы координат:

$$пв = (\cos в \cos ф, \cos в \sin ф, - \sin в), щ = (-\sin<£,\cos<£,0).$$

Из последнего уравнения движения сразу находим интеграл движения:

$$M_z — mm^2 \sin^2 вф.$$

Следствием уравнений движения является сохранение полной энергии материальной точки:

$$E\hat{}\sim\{г^2_2 \quad + \quad m^2в^2 \quad + \quad m^2{}_5m^2вф^2)\text{--}_г.$$

Найдем еще один интеграл движения. Для этого подставим *ф* во второе уравнение из интеграла M_z и умножим обе части на $mr^2 6$. В результате получим:

$$M^2 = (mгЧ)^2 + \frac{4^*\sim}{\sin^2 0'}$$

где *M* - величина момента количества движения. Исключая далее *в, ф* из выражения для энергии, находим:

$$,_2 \quad \frac{2}{m} \; / \backslash \quad \frac{M^2}{2mг^2} \quad \mathbf{f)}$$

Из этого соотношения непосредственно находим общие интегралы, задающие траекторию и закон движения материальной точки (они представлены во введении к данному семинару).

Задача

Доказать, что при движении материальной точки в кулоновском потенциальном поле 17(г) = *—а/г* сохраняется вектор Лапласа (вектор эксцентриситета):

$$e = \frac{-}{a} [г \times M_0 - \frac{-}{г}.$$

Решение

Для доказательства запишем уравнение движения точки в поле:

$$mm = —a^{\,г}$$

Умножим его векторно на вектор M_0 и вынесем производную по времени за знак векторного произведения:

$$|[*xMo] = -£[r(rf)-fr^2].$$

Учитывая, что гг = *rf,* упростим последнее выражение:

$$-[rxM_0] = a--.$$

Следовательно, вектор Лапласа является дополнительным интегралом движения материальной точки вместе с энергией и моментом количества движения в кулоновском потенциальном поле. Поскольку $eM_0 = 0$, вектор Лапласа лежит в плоскости орбиты. Квадрат вектора равен:

$$ma^г$$

Следовательно, модуль вектора совпадает с эксцентриситетом орбиты. Умножим скалярно е на вектор г:

$$ег = \frac{M_0^2}{ma} г = p - г.$$

Обозначая через *ф* угол между векторами е и г, получим уравнение траектории:

$$г = \frac{P}{1 + e\cos ф}.$$

Таким образом, вектор эксцентриситета параллелен оси симметрии траектории частицы.

Аудиторные задачи

1. В момент выведения спутника на круговую орбиту на высоте *h* — 300 км направление скорости спутника отклонилось от расчетного на угол *6* = 1° в сторону Земли. Найти параметр и эксцентриситет орбиты, а также отклонения в апогее и перигее от круговой орбиты.

2. Спутник Земли переведен с круговой орбиты радиуса *г* на круговую орбиту радиуса *г%.* Как при этом изменяется кинетическая, потенциальная и полная энергия спутника.

3. Искусственный спутник Земли движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом ео и параметром p_0. В некоторый момент спутнику сообщается касательный импульс Aq = Amv, где v -скорость спутника в этот момент. Найти параметры новой орбиты спутника, если в момент приложения импульса спутник находился на расстоянии *H* от поверхности Земли, а угол между вектором скорости и радиусом-вектором был равен /?.

4. Космический аппарат движется в поле тяготения Земли. В начальный момент времени г(0) = r_0, v(0) = v_0. Определить ориентацию большой оси относительно векторов го, vo.

5. Вычислить массу Земли, используя параметры советского искусственного спутника « Космос-380>. Период обращения спутника (относительно звезд) T = 102.2 мин, расстояние до поверхности Земли в перигее 210 км, в апогее 1548 км. Землю считать шаром с радиусом 6371 км.

Домашние задачи

1. В момент выведения спутника на круговую орбиту на высоте *h* = 300 км величина скорости отклонилась от расчетной на Дг;. Найти эксцентриситет, параметр орбиты, а также отклонения в перигее, апогее от круговой орбиты.

2. Искусственный спутник Земли был выведен на орбиту с максимальным удалением от поверхности Земли /w^ = 1300 км и минимальным h_{min} = 292 км. Через некоторое время период обращения спутника уменьшился на Д* = 3 мин. Какая часть начальной полной энергии спутника была израсходована к этому моменту на работу против сил трения? Радиус Земли *R* = 6370 км.

3. Спутник движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом е. Найти отношение максимального и минимального значений угловой скорости радиус-вектора спутника.

4. Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите. В точке пересечения эллипса с его малой осью включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля, чтобы он перешел на параболическую орбиту.

5. Как изменилась бы продолжительность земного года, если бы масса Земли увеличилась и сделалась равной массе Солнца, а расстояние между ними осталось бы без изменения.

6. Космический аппарат движется в поле тяготения Земли. В начальный момент времени г(0) = го, v(0) = VQ. Определить ориентацию большой полуоси эллипса.

7. Со спутника, движущегося вокруг Земли по круговой орбите радиуса *Ro,* выстреливают по направлению к центру Земли контейнер. Какую минимальную начальную скорость в направлении к центру Земли v_m*in* нужно сообщить контейнеру, чтобы он, перейдя на эллиптическую орбиту, коснулся Земли? Радиус Земли *R*. Торможением в атмосфере пренебречь.

8. Две гравитирующие массы тгц, тг совершают финитное движение. Показать, что минимальное и максимальное расстояния между ними являются корнями квадратного уравнения:

Eox + ^*m**m*%*x* ————— M_0 = O,

где *EQ* и Мо - энергия и кинетический момент системы.

4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

4.1. Семинар 6. Уравнения Лагранжа 1 рода. Принцип виртуальных перемещений

Литература

1. ОльховскийДИ. Курс теоретической механики для физиков / И.И.Ольховский. - М.: МГУ, 1978.-574 с.

2. Ландау, Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц; М.:Наука, 1988.-215 с.

3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.

4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.

5. Павленко,Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко.- М.: Физматлит, 2003.-534 с.

Виртуальными перемещениями называются воображаемые бесконечно малые перемещения системы из одного ее положения в данный момент времени в другое положение, допускаемое связями в тот же момент времени.

Связи называются идеальными, если сумма элементарных работ их реакций Ri, на всех виртуальных перемещениях системы равна нулю:

$$\overset{N}{\underset{1=1}{]}}\text{ГК«5Г;} = 0. \qquad (18)$$

Система уравнений Лагранжа с реакциями связей для системы N материальных точек, на которые наложены $к$ идеальных голономных связей, имеет вид:

$$m_i T_i = F_i + \overset{\kappa}{\underset{a=l}{'52}} x_a V_i fa, \quad i = l,2,\ldots,N, \qquad (19)$$

$$fa(rx, r_2, \ldots, T_N, t) = 0, \quad a = 1,2,\ldots, \kappa.$$

Принцип виртуальных перемещений:

Для того, чтобы система N материальных точек с А; идеальными удерживающими связями находилась в состоянии равновесия необходимо и достаточно, чтобы виртуальная работа активных сил на любом виртуальном перемещении системы равнялась нулю:

$$6A = '52^{F}i^{\bullet Sr}i = ^{0}- \quad (^{2}\circ)$$

Задача

Точка движется в однородном поле тяжести по гладкой неподвижной параболе, расположенной в вертикальной плоскости (ось параболы горизонтальна). Известно начальное положение материальной точки на параболе (хо, *уо)* в декартовых координатах, а ее начальная скорость равна нулю. На какой высоте точка оторвется от параболы.

Решение

Движение точки до соскальзывания происходит в соответствии с уравнением связи: $/ = y^{2} — ax = 0$. Запишем уравнения Лагранжа с реакциями связей:

$$my = —mд + 2Xy, \; mx = —aX.$$

Если в начальный момент времени точка была на высоте *уо,* то из закона сохранении энергии для квадрата скорости точки получим:

$$x^{2} + y^{2} = 2д(y_{0}-y).$$

Учитывая уравнение связи, можно исключить отсюда *х:*

$$y^{,2} \;\hat{}\; \frac{2aд\{y_{0}-y)}{Ay^{2} + a^{2}},$$

Выражая далее x из уравнения связи после его двукратного дифференцирования, получим:

$$2y^{2} + 2yy = ax.$$

Система уравнений Лагранжа тогда сводится к уравнению

$$. j_x \quad /2A \quad \backslash \quad a^2$$
$$Ьi \quad +У[\sim y-9) = -\cancel{2m}'$$

Подставляя сюда y^2 как функцию y, получим множитель Лагранжа в виде:

$$A = \frac{2m}{4y^2 + a^2} \left[\frac{2б^2(y \sim yo)}{4y» + a^2} + 5 у \right.$$

В точке отрыва от параболы реакция связи обращается в нуль. Поэтому высота отрыва y_c является действительным положительным корнем уравнения

$$V + 3a^2y - 2a?y_0 = 0.$$

Задача

Однородная цепочка длины *I* перекинута через верхнюю горизонтальную грань неподвижной призмы, сечение которой является трапецией с острыми углами *a,/3* при горизонтальном нижнем основании. Каково положение равновесия цепочки на призме с гладкими гранями, если *a* длина ее верхней грани.

Решение

Для решения задачи воспользуемся принципом виртуальных перемещений. Всю цепочку можно представить в виде суммы трех материальных точек, расположенных на левой, правой гранях призмы и на ее основании. Пусть на левой грани призмы находится часть цепочки длины *x,* а *8x* виртуальное перемещение цепочки по граням призмы. Виртуальная работа силы тяжести на перемещении левой части цепочки равна *pдx* sin *aбx,* а правой части *(I — a — x)pд* sin */3ёx,* где *p* -линейная плотность цепочки (виртуальная работа силы тяжести на перемещении цепочки по верхней грани равна нулю, так как сила тяжести перпендикулярна виртуальному перемещению). Следовательно, для данной системы принцип виртуальных перемещений можно представить в виде:

$$—pдx \sin aбx + (I — a — x)pд \sin (36x = 0.$$

Отсюда находим длину левого конца цепочки в положении равновесия для заданных углов *a, (3:*

$$x = \frac{(/-ft.sin/3}{shm + sin/?'}$$

Аудиторные задачи

1. Материальная точка движется в однородном поле тяжести по гладкой неподвижной плоскости, образующей угол а с горизонтом. Найти закон движения точки и реакцию плоскости.

2. Точка движется по гладкому неподвижному эллипсоиду с полуосями о, *Ь,* с под действием силы F = - кг с центром в центре эллипсоида. Найти реакцию связи как функцию положения и скорости.

3. Точка движется в однородном поле тяжести по гладкой сфере радиуса *а*. Найти реакцию сферы как функцию координат и скорости. На какой высоте материальная точка оторвется от поверхности сферы, если она соскальзывает с полюса с нулевой скоростью.

.^4. Материальная точка массы m находится на поверхности гладкого конуса $x^2/4 + y^2 - z^2 = 0$с вертикальной осью. Точка отталкивается от вершины конуса с силой, пропорциональной расстоянию от вершины конуса с коэффициентом пропорциональности *к*. Найти положения равновесия материальной точки.

5. Выяснить, какие из следующих дифференциальных связей являются голономными (интегрируемыми). Для интегрируемых связей найти соответствующее конечное уравнение.

а) $xz + (y^2 - x^2 - z)x + \{z - y^2 - xy)y = O$,

b) $y - zx = O$,

c) $x\{x^2 + y^2 + z^2) + 2\{xx + yy' + zz) = 0$.

- 6. Материальная точка находится в поле тяжести на поверхности, определяемой уравнением:

$$a)z = Ax^2 + 1xy + y^2, \quad b)z = 4ж^2 - 2xy + 2y^2.$$

Найти положения равновесия материальной точки на каждой поверхности. Ось *OZ* направлена вверх.

Домашние задачи

1. Точка движется в однородном поле тяжести по гладкому круговому конусу, ось симметрии которого расположена вертикально. Найти траекторию точки и реакцию связи.

2. Точка движется в однородном поле тяжести по гладкому цилиндру радиуса *R,* ось которого образует угол а с вертикалью. Найти реакцию связи как функцию положения точки (в цилиндрических и декартовых координатах).

-- 3. Материальные точки *m/2,m,m* попарно взаимодействуют между собой с силами отталкивания, пропорциональными произведению масс и расстояниям друг от друга. Все три точки находятся на гладкой горизонтальной окружности радиуса *а.* Найти положения равновесия системы.

4. На гладкую неподвижную кривую

x = a(cos0 + <£sin0), *y* = o(sin^> — *фсоиф), (ф* > 0)

(эвольвента окружности) нанизано небольшое колечко массы *m.* Вычислить реакцию связи как функцию положения на кривой, считая ось *OY* направленной вертикально вверх.

5. Шарик движется в однородном поле тяжести по гладкой кривой *y = y(x),* лежащей в вертикальной плоскости. В начальный момент времени *x(0) = a, v(Q)* = 0. Через какой промежуток времени г шарик будет находиться в точке с координатой *Ь.*

6. Материальная точка может двигаться без трения по поверхности *f(x,y,z)* = 0 под действием силы F - *(-kx,-ky,-kz).* Какой должна быть функция /(x, *y, z)* для того, чтобы каждая точка поверхности могла быть положением равновесия?

7. Шарик может скользить без трения по проволоке, изогнутой в форме плоской кривой 2-го порядка ax^2 + *Ьxy* + cy^2 + *ax* + *Py* + *p* = 0, *Aac* -

Ь ф 0. Найти положение равновесия шарика, если ось *OY* направлена вертикально вверх.

4.2. Семинар 7. Уравнения Лагранжа 2 рода

Литература

1. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. М.: МГУ, 1991.-336 с.
2. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. - М.: Физматлит, 2001.-262 с.
3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.
4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.
5. Айзерман,М.А. Классическая механика / М.А. Айзерман.-М.: Наука, 2006.-378 с.
6. Павленко,Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко.- М.: Физматлит, 2003.-534 с.

Наименьшее число независимых величин *s,* которое надо знать, чтобы полностью определить положение всех точек голономной системы, называется числом степеней свободы.

Любой набор из *s* величин, независимых одна от другой и полностью определяющих положение системы, называется системой обобщенных координат, сами эти величины обобщенными координатами, а их производные по времени - обобщенными скоростями.

Функцией Лагранжа называется функция обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени равная разности кинетической энергии и обобщенной потенциальной энергии системы:

$$L(q_h\, q_h\, t) = T\{q_u\, q_h\, t) - U\{q_{iy}\, \mathrm{ft}, t). \qquad (21)$$

Переменные, через которые выражается функция Лагранжа называются переменными Лагранжа.

Система дифференциальных уравнений Лагранжа 2 рода в независимых обобщенных координатах ft для механической системы с s степенями свободы, движущейся под действием обобщенно-потенциальных и диссипативных сил, имеет вид:

d (dL\ ∂Ь ,

dt{M)~d^r^Qt <в1.2,•••••' w

где Qf = X)Q=I ^ад£ ' обобщенная диссипативная сила.

Функция Лагранжа является неоднородной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей. Уравнения Лагранжа образуют систему из s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с s неизвестными функциями ф от независимого переменного t.

Для того, чтобы выписать уравнения Лагранжа II рода для некоторой конкретной системы, нужно провести следующие операции:

1. Установить число степеней свободы и выбрать систему независимых обобщенных координат q_j ($j = 1,2,..., s$).

2. Построить кинетическую энергию системы, обобщенный потенциал как функции обобщенных координат,. обобщенных скоростей и времени. Для этого часто оказывается удобным выразить декартовы координаты точек и их производные по времени через переменные Лагранжа.

3. Построить обобщенные силы как функции обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени.

4. Провести указанные в уравнениях Лагранжа частное и полное дифференцирование и записать систему уравнений движения.

Задача

Упругая нить длины $2a$ в ненапряженном состоянии перекинута через два горизонтальных параллельных стержня, расположенных на одном уровне на расстоянии a друг от друга. Концы нити прикреплены к шарику массы m, совершающему колебания по вертикали. Найти лагранжиан шарика, считая, что нить подчинена закону Гука.

Решение

Поскольку шарик совершает вертикальное движение, он имеет одну степень свободы $s = 1$. Выберем в качестве независимой обобщенной координаты угол *в*, который образуют упругие нити, прикрепленные к шарику, с вертикалью. Тогда:

Полная длина нити в произвольный момент времени $I = a + a/втв$. Функция Лагранжа тогда имеет вид:

$$L = B\ 8ri?e\text{-}TVS?"^1 j \quad \frac{maЧ^2}{} \quad ко?\,(\ \backslash \quad \backslash^2 \quad +m9\ \frac{a}{2}Ct96\text{-}$$

Используя данную функцию Лагранжа, можно провести линеаризацию лагранжевых уравнений движения в окрестности положения устойчивого равновесия и найти частоту колебаний (см. более подробное обсуждение в разделе «Линейные колебания»). Пусть в положении равновесия нить образует равносторонний треугольник. Положение равновесия определяется условием:

$$\underline{dU}\ \_\quad \underline{mga} \quad {}_2/\quad 1 \quad \underline{\backslash \cos 0}$$

$в = 7г/6$, $k = mg/a\sqrt{3}$. Далее, найдем:

$$СГ\,(тг/6) = (U/VS)mga, \quad ш^2 = (7/2у/3)(д/а).$$

Задача

Брусок массы M, соединенный с неподвижными стенками одинаковыми пружинами жесткости $к$, может скользить без трения вдоль горизонтальной направляющей. К центру бруска на растяжимой нити жесткости $к$ и длины ^ в недеформированном состоянии подвешен груз массы m. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

Решение

Механическая система состоит из двух материальных точек. Одна точка (брусок) совершает одномерное движение, а вторая точка (груз) двумерное движение в плоскости. Следовательно, число степеней свободы в данной системе равно $s = 3$. Введем систему координат, направив ось OX по направлению движения бруска. Ее начало поместим в центр между стенками, к которым прикреплены пружины. Ось OY направим вертикально вниз. В качестве трех независимых обобщенных координат выберем: координату $qi = X$ бруска, координаты $qi = 1, дз = Ф$ груза, где

I -текущая длина нити, *ф* -угол отклонения нити от вертикали. Выразим декартовы координаты груза через независимые обобщенные координаты:

$$x = X + I\sin\phi,\ y = I\cos\phi.$$

Чтобы записать выражение кинетической энергии системы, продифференцируем эти формулы по времени:

$$x = X + 1втф + 1ф\cos ф,\ \ y = Zcos<^> — Z(^sin</>.$$

Тогда кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий материальных точек:

$$m \quad \Gamma X + / \sin 0 + Z\phi \cos 0 \overset{i2}{J} + (Zcos</> — Z0\sin 0)^2 \quad + ¥ * \bullet$$

Потенциальная энергия системы связана с упругими силами, возникающими при растяжении и сжатии пружин и гравитационной силой, действующей на груз. Гравитационный потенциал бруска остается постоянным при его движении. Имея ввиду справедливость закона Гука, запишем потенциальную энергию в виде:

$$U(X,\ 1,ф)\ =\ -mgl\cos ф\ +\ 2\hat{}X^2.$$

Функция Лагранжа равна разности кинетической и потенциальной энергий системы:

$$Ь(X,1,ф;XXФ)\ =\ \hat{}\ \hat{}\ X\ *\ +\ \hat{}(1*\ +\ 1^2ф^2\ +\ 2X1втф+$$

$$+2X1ф\cos ф) + mgl\cos ф.$$

Имеем систему трех дифференциальных уравнений движения Лагранжа второго порядка:

$$\frac{}{dt}\ \backslash\{m + M)X + m(1\sin ф + 1ф\cos Ф)\} = 0,$$

$$U + X\sin\hat{}j\ -\ (1ф^2 + Xфcosф + дcosф)\ =\ O,$$

$$\frac{d}{dt}\backslash 1^2ф\ +\ XI\cos ф\backslash\ \ -\ (XI\cos ф\text{-}X1ф\backslash mф\text{-}д1\sin ф)\ =\ 0.$$

Аудиторные задачи

1. Точка массы т, которая может передвигаться по гладкой •Горизонтальной прямой, соединена пружиной с неподвижной точкой, находящейся на расстоянии h от прямой. Найти функцию Лагранжа, предполагая, что пружина подчинена закону Гука, а жесткость пружины $к$ и ее длина в ненапряженном состоянии fo известны.

2. Точка массы m движется в силовом поле с потенциалом $U(x,y,z)$. Найти лагранжиан точки и составить ее уравнения движения в следующих системах координат:

а)цилиндрические координаты: $x = гсовф$, $\mathbf{y}$ — $г$ sin<^>, $z = z$.

Ь)сферические координаты: $x = г \sin в \cos ф$, $\mathbf{y} = г \sin в \sin ф$, $z = \mathbf{r} \cos в$.

с)параболические координаты: $x = y/Шсовф$, $\mathbf{y}$ = v ^ s m ^ , $z = (u - v)/2$.

3. Две равные точечные массы m, связанные пружиной жесткости $к$, могут двигаться без трения по неподвижному кольцу радиуса г, лежащему в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна IQ. Составить уравнения Лагранжа. Используя координаты $в\backslash$ = $\{ф\backslash$ + <fo)/2, #2 = (01 ⁻ ^>г)/2, найти закон движения в квадратурах.

4. Брусок массы М, соединенный с неподвижными стенками одинаковыми пружинами жесткости $к$, может скользить без трения вдоль горизонтальной направляющей. К центру бруска на нерастяжимой нити длины I подвешен груз массы т. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

5. Два заряда движутся в однородном электрическом поле. Записать функцию Лагранжа системы.

Домашние задачи

1. Две точки с массами mi, mi соединенные стержнем длины a пренебрежимо малой массы, перемещаются по гладким сторонам неподвижного прямого угла, расположенного в вертикальной плоскости

(стороны угла образуют угол 7г/4 с горизонтом). Найти лагранжиан системы.

2. К центру бруска массы *М,* который может скользить без трения по горизонтальным направляющим, на упругой нити жесткости *к* подвешен груз массы *т* (длина нити в ненапряженном состоянии равна *1о).* Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

3. Система состоит из п одинаковых материальных точек массы *т* каждая. Точки связаны одинаковыми пружинами жесткости *к* и могут скользить без трения по круговому кольцу, расположенному в горизонтальной плоскости. Найти функцию Лагранжа и составить уравнения движения.

4. Показать, что функция Лагранжа

$$L = \frac{\wedge}{2}(г^{2} + гЧ^{2} + г^{2}ф^{2}втв^{2}) - \frac{\wedge}{c}\cos 0,$$

описывает движение заряженной частицы в магнитном поле Н = *дг/г*³.

5. В горизонтально расположенной плоскости сделано маленькое отверстие, через которое продета нить длины *I.* На концах нити закреплены точки с массами *ту, rri2,* причем точка массы mi лежит на плоскости. Найти лагранжиан системы.

6. В следующей задаче движение системы определяется лагранжианом *L.* Найти уравнения движения системы, если

$$_{Ь}{}^{™}{}_{\{\pm}г+\underset{A}{у2} \; _{+} \; £)-_{m}д\{г \; + \; \pm \; \underset{X}{+} \; \underset{y}{Ь}.$$

4.3. Семинар 8. Уравнения Лагранжа 2 рода. Интегралы движения

Литература

1. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. М.: МГУ, 1991.-336 с.

2. Яковенко, Г.Н. Краткий курс аналитической динамики / Г.Н. Яковенко. -М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004.-237 с.

3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.

4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.

5. Павленко,Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко.- М.: Физматлит, 2003.-534 с.

Движение механической системы *N* материальных точек с *к* идеальными голономными связями определяется общим уравнением динамики или дифференциальным вариационным принципом Даламбера-Лагранжа:

N
JT^Fi-rrnwO •&•< = <). (23)
«=i

Истинное движение из всех кинематически возможных выделяется тем, что для него и только для него в данный момент времени сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Обобщенным импульсом, соответствующем обобщенной координате % называется следующая величина:

- & (24)

Обобщенной энергией называется функция обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, имеющая вид:

3 д г
Я(ф, *Яг, t)* = У) Ф-г- -£(«,*,*)• (25)
U dqi

Законы изменения обобщенных импульсов и обобщенной энергии можно представить в виде:

где *Qj* -обобщенная диссипативная сила:

$$?? = f>g. \quad (27)$$

Задача

Частица движется в северном полушарии в поле тяжести Земли. Найти решение лагранжевых уравнений движения частицы.

Решение

Расположим начало координат *K'* в точке *O* на широте *в*. Ось *OZ'* направим вертикально вверх, ось *OX'* по меридиану к полюсу. Начальные условия: г'(О) = 0, v'(0) = (0,0,г>о). Введем еще одну систему координат *K,* повернутую относительно исходной на угол (тг/2 — *в):*

$$x' = xsm.9 + zcosO, \quad z' = —xcosB + zsm6.$$

В системе *K* угловая скорость вращения Земли *П* = (О, О, *П),* ускорение свободного падения g = *(gcosd,*0, — *gsinO).* Лагранжиан, описывающий движение частицы в выбранной неинерциальной системе отсчета, равен:

$$L = j\,(v + [П \times г])^2 + mgr.$$

Преобразуем это выражение, имея ввиду проекции ускорения на оси системы *K,* а также [О х г] = *(—Cly, Их,* 0):

$$L = — [(\pm - Cly)^2 + \{y + Их)^2 + z^2] + mg\{xcosB - zsinO).$$

Составим уравнения Лагранжа:

$$x — 2Щ — £l^2x = \partial \cos в,$$

$$y + 20,x- £?y = 0,$$

$$г — —\partial \sin в.$$

Начальные условия в новых координатах (система *K)* имеют вид: г(0) - 0, v(0) = (-iJo cos *6,0,*v_0 sin *в).* Решение последнего уравнения системы

$$z = (-Z\frac{at^2}{} + v_0t)sm6.$$

Первые два уравнения можно переписать в эквивалентной форме, вводя комплексную переменную: (^ — x + iy:

Решение данного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

с = _ £ ^ + (А + Ш*)е--

где A, B - две постоянные интегрирования. Из начальных условий £(0) = 0, С(0) = —$u_o$cos0 находим: A — C, B — -vo cos $в$ + ШС, C — ∂ cos $0/fi^2$. Переходя к действительным переменным, получаем закон движения точки в системе отсчета K:

x = Re£, x = C(—1 + cos fit + fit cos fit) — v^t cos $в$ cos fit,

y = Im£, y = C{— sin fit + Of cos fit) + vot cos 0 sin fit.

Поскольку fi <С «0/5, то полученные решение можно разложить в ряд Тейлора:

x- (9—-$v_0 t$\cose, y= (-^- + ио*²) ficosfl.

В исходной системе координат K' решение имеет вид:

$x'(t)$ = 0, $y'\{t)$ =(-iL + voA fi cos $в$, $z\backslash t)$ = -^- + $v_0 t$.

Задача

Частица движется в аксиально-симметричном магнитном поле. Найти интегралы движения и уравнения движения.

Решение

В цилиндрических координатах $г,ф,г$ компоненты вектор-потенциала Д. = О, $A_ф$ = $A(r,z)$, A_z = 0. Лагранжиан частицы с зарядом е, движущийся в магнитном поле:

$$Ь = \frac{^}{2}(m^2 + г^2ф^2 + г^2) + \frac{-}{c}гфA(г,г).$$

Поскольку $dL/\partial\phi = O$, $dL/dt = O$, то сохраняется проекция обобщенного импульса $M_z = dL/\partial\phi$ и кинетическая энергия частицы,

$$M_z = m г^2 \phi + \frac{-}{c} г\ A,$$

$$\mathbf{T = |(г^2 + гУ + г^2).}$$

Два оставшихся уравнения Лагранжа

$$m г = m г \dot{\phi}^2 + \frac{e}{c} \phi \frac{;\partial(гA)}{or},$$

$$m\ddot{z} = \frac{e}{c} г\phi \frac{\partial A}{oz},$$

можно представить в форме, удобной для анализа траекторий. Подставляя в кинетическую энергию ϕ, получим этот интеграл движения в виде:

$$T = {}^{™}p + \hat{}\ + Ueff\{r{:}x)i \quad Ueff\{r\ \hat{}\ z) = \_L\ [_{M\ г} - \frac{£гл}{c}]'^{12}_{A}$$

T = $m;Уд/2$, v(0) = uo. Подставляя 0 в уравнения движения, получим:

$$m r = \frac{dU_{e}f}{or}, \quad m\ddot{z} = \frac{dUeff}{oz}.$$

Область движения частицы ограничена условиями: $T > U_eff(r,z)$, $\backslash M_Z - \backslash rA\backslash < mrv_0$.

Аудиторные задачи

1. Точка подвеса математического маятника колеблется в вертикальном направлении по закону $s(t)$. Получить лагранжиан и уравнения движения.

2. Два шарика, соединенные пружиной, подчиняющейся закону Гука, движутся по гладкой горизонтальной прямой. Найти лагранжиан системы и интегралы движения.

3. Точка подвеса математического маятника массы $m<i$ прикреплена к телу массы mj, находящемуся на гладкой горизонтальной прямой. Найти функцию Лагранжа системы, а также интегралы движения.

4. Точка движется по гладкой поверхности конуса с углом 2а при вершине. Ось конуса расположена вертикально. Найти функцию Лагранжа, интегралы движения и закон движения точки.

§. Записать функцию Лагранжа для заряда, движущегося в однородных, постоянных магнитном и электрическом полях.

6. Найти функцию Лагранжа и интегралы движения для электрона, движущегося в цилиндрическом магнетроне. Так называется прибор, представляющий собой два коаксиальных цилиндра с радиусами ri, г 2 *(г2* > ri) и потенциалами *фх, фч* соответственно. Цилиндры помещены в магнитное поле, напряженность которого H параллельна оси цилиндров.

Домашние задачи

1. Шарик массы m прикреплен к нерастяжимой нити, конец которой, в свою очередь, прикреплен к верхней точке неподвижного блока радиуса *a*. Предполагая, что при движении шарика в плоскости, перпендикулярной оси блока, нить остается натянутой, найти функцию Лагранжа и уравнения Лагранжа.

$. Длина математического маятника, колеблющегося в однородном поле тяжести, изменяется по закону *l(t)*. Найти функцию Лагранжа и уравнения движения маятника.

8. В цилиндрических и сферических координатах найти функцию Лагранжа и первые интегралы для сферического маятника, то есть для точки, движущейся по гладкой сфере радиуса *a* в однородном поле тяжести.

4. Написать функцию Лагранжа для заряда, налетающего на заземленную металлическую сферу радиуса i?.

f. Заряд движется в однородном магнитном поле. Найти функцию Лагранжа и интегралы движения в цилиндрических координатах.

6. Записать лагранжиан трех тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения в переменных Якоби R, г, г 13:

$$\Gamma! = R - \frac{}{M} - \frac{\Gamma—\Gamma13,}{mi3}$$

$$r_2 = R + \frac{v\sim}{M} r, \quad r_3 = R - -\frac{i7}{M}{}^{r} + \frac{{}^{Lr}}{тц} u-$$

где $M = mi + гп2 + гпз,$ $m\backslash z = mi + m_з,$ $г_г$,гг,$г_3$ радиусы векторы трех материальных точек с массами roj, тг, тз-

5. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

5.1. Семинар 9. Канонические уравнения Гамильтона

Литература

1. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. М.: МГУ, 1991.-336 с.

2. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. М.: Физматлит, 2001.-262 с.

3. Ландау, Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. -М.: Наука, 1988.-127 с.

4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.

5. Коткин,Г.Л. Сборник задач по классической механике / ГЛ. Коткин, В.Г Сербо.-М.: Физматлит, 1977.-319 с.

Обобщенные импульсы *pj* — *dL/dqj* являются неоднородными линейными формами обобщенных скоростей:

s

Pj = X} °#® + *ªi* ~ *ªi*> rfe*(%) ¥" 0, **(28)**

где *Oij, a,i* коэффициенты однородных форм Г®, *T^* кинетической энергии, *Uj* -коэффициенты однородной формы *U^* обобщенного потенциала.

Гамильтон предложил в качестве основных переменных, характеризующих состояние системы, взять величины £, ф (обобщенные координаты), *Pi* (обобщенные импульсы). Эти переменные называются переменными Гамильтона. Функцией Гамильтона называется преобразование Лежандра функции Лагранжа *L(qi,qi,t)* по обобщенным скоростям:

s

(* , *Pi,* *) = X) M - Д<7»> Ф> *)1«=?*(фЛ,*)- (29)

r=1

Канонические уравнения Гамильтона имеют вид:

*-£• * - £ + * <30)

Полная производная от функции Гамильтона по времени

$$\begin{matrix} dH & \partial H & A & . \\ \text{-ж} = \text{-ж} + E < я* \\ & & 8=1 & \end{matrix} \qquad (3D)$$

Из этого выражения следует, что если гамильтониан явно от времени не зависит, а диссипативные силы отсутствуют, то *H* = *Ho* = *const* (закон сохранения энергии). В этом случае система называется обобщенно-консервативной.

Задача

Записать гамильтониан и уравнения движения частицы с зарядом е в электромагнитном поле, задаваемом потенциалами A, *ф*.

Решение

При движении в электромагнитном поле на заряд *q* действует сила Лоренца, которая может быть задана в терминах обобщенного потенциала *U*(г, f, *t)* в виде:

r = ^ Ы - ^ = 9 E + 1 [у х н ^ = " (A r) + ^

Следовательно, функция Лагранжа заряда имеет вид:

L(r, м) = |r M (A r) - #

Найдем обобщенный импульс, соответствующей координате г:

p = -ггт = т г -|- -A.
от с

Выразим отсюда обобщенную скорость г через обобщенный импульс и построим гамильтониан:

f-i(p-jA),
га \ с /

Гамильтоновы уравнения движения (индекс *a* принимает значения 1,2,3):

$$x_a = [x_a, H\backslash = {}_7r- = -(p\text{-}lA) \quad =v_a,$$
$$OPa \quad T\Pi \ \backslash \quad C \quad /a$$

Дифференцируя уравнение движения, получим:

$$mx_a = \frac{Чp}{c}\text{-}fi_a pvp - q\text{-}\frac{\partial\phi}{\partial x_a} \frac{qdA_a}{c \ \ at}$$

Поскольку тензор напряженности электромагнитного поля

$$_{a0}\sim\frac{\_\ ЭA_0}{\partial x_a} \quad \frac{\partial A_a\_}{\partial xp} \text{-}^{€a\wedge n}m \quad {}^{Ьa}\sim \quad \frac{\_1\partial A«}{c \ \ at} \_ \frac{\partial\phi\_}{dxj}$$

получим следующее уравнение движения:

$$mr = qE + \frac{-}{c}[r \text{ x } \mathrm{H}].$$

Задача

Записать гамильтониан и уравнения движения свободной частицы в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью *dl(t)*.

Решение

Запишем лагранжиан частицы в неинерциальной системе отсчета:

$$\mathrm{L(x,x,t) = \hat{}(x + [f2xx])^2\text{-}[/(x).}$$

Определяя обобщенный импульс p = m(x+[Sl xx], получим гамильтониан:

$$Я(\mathrm{x,p,*}) \quad = \quad \pm.(_p\text{-}m[\Pi xx])^2\text{-}\hat{}[\Pi x_X\}Чu(x) \quad = \quad 1\hat{}\text{-}\Pi[\mathrm{xxp}] \ + \ У(\mathrm{x}).$$

Уравнения Гамильтона примут тогда вид:

$$x_a = [x_a, Я] = \frac{7)}{m}\text{-} - [\mathrm{O \ x \ x}]_a,$$

$$Pa = \backslash Pa, Я] = [\mathrm{p \ X \ \Pi}]_{„} - \overset{ЯTT}{\hat{}} - .$$

Аудиторные задачи

1. Определить функцию Гамильтона ангармонического осциллятора, функция Лагранжа которого имеет вид:

$$L \quad \overset{X}{} \quad \overset{U)\ X}{} \quad \overset{ч \quad л \quad /о}{} = \sim 2 \text{———} 5 \text{———}^{a\ x} \ ^{+} @^{xx} \quad \bullet$$

2. Составить канонические уравнения Гамильтона и найти закон движения частицы, функция Гамильтона которой имеет вид:

3. Найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения механической системы, лагранжиан которой имеет вид:

$$L = \overset{5}{-} q \backslash + \overset{1}{-} q \backslash + qm \cos(\mathrm{qi} - q_2) + 3 \cos \mathrm{qi} + \cos q_2.$$

4. Найти закон движения заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле H, решая канонические уравнения Гамильтона. ^ Векторный потенциал выбрать в виде: $A_y = Hx,\ A_x = A_z = 0.$

5. Найти лагранжиан механической системы, гамильтониан которой имеет следующий вид:

$$H = _{2\backslash} \backslash(p \backslash + \underset{sm'qij}{-7\hat{}-}) - acosq_1.$$

Домашние задачи

1. Найти гамильтониан материальной точки, движущейся в потенциальном поле $U(x,y,z)$, если за независимые обобщенные координаты выбраны сферические координаты.

2. Найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения линейной модели трехатоиной молекулы, которую можно представить в виде трех точечных масс mi, m_2, $m\%$, насаженных на гладкий горизонтальный стержень и соединенных пружинами жесткости $\kappa\backslash$,

3. Найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения механической системы, лагранжиан которой имеет вид:

L = ^(«i + ql) + 7Й1 + <?з)² + Т^ + Ял)² ~ 2{q\ + q\- qiq2) - -{c& + q\).

4. Заряженная частица, движущаяся с постоянной скоростью, сталкивается с неподвижным атомом водорода. Записать гамильтониан в системе отсчета, вращающейся с уловой скоростью радиуса-вектора частицы.

5. Найти лагранжиан механической системы, гамильтониан которой имеет следующий вид:

H = qipi - q-iPi + a{p\ + pi).

5.2. Семинар 10. Канонические уравнения Гамильтона. Уравнения Рауса. Скобка Пуассона

Литература

1. Ландау, Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. -М.: Наука, 1988.-127 с.
2. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. М.: Физматлит, 2001.-262 с.
3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.
4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.
5. Павленко,Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко.- М.: Физматлит, 2003.-534 с.

Скобка Пуассона функций *f(qi,Pi,t)*, *g(qi,Pi,t)* канонических переменных Гамильтона определена соотношением:

[/.^E(||-1|). **м**

Координата q_a называется циклической, если она не входит в функцию Лагранжа, то есть $dLjdq_Q$ — 0.

Всякая симметрия задачи, допускающая такой выбор обобщенных координат, чтобы некоторые из них q_a были циклическими, приводит к существованию интегралов движения $p_a = const$ и позволяет свести исследование движения в подходе Рауса к рассмотрению системы с меньшим числом обобщенных координат.

Функцией Рауса называется преобразование Лежандра функции Лагранжа $L(qi,qi,t)$ по переменным: <&+ь $qk+2,— , Qs'$

$$R\{Q\backslash>Q2, -,Qk;qhQ2, -,Qk;qk+bQk+2, -,Qs,Pk+i,Pk+2, -,Ps,t) = \quad (33)$$

$$= \sum_{a=k+\backslash}^{s} 9oPa\sim^{L}(9\hat{}4a,qi,q_a,t).$$

Система уравнений Рауса имеет вид:

$$) - \frac{dR}{—} = 0, \quad 1=1,2,\dots,*, \quad (34)$$

$$q_a = \frac{дя}{ора}, \quad p_a = -\frac{dR}{oq_a}, \quad a = k + 1,\dots,s.$$

Для того, чтобы некоторая функция $f\{qi,Pi,t)$ обобщенных координат, обобщенных импульсов и времени сохраняла постоянное значение необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$§£ + [/, \#] = 0. \quad (35)$$

Теорема Якоби-Пуассона:

Если функции $f\backslash(qi,Pi,t)$ и $fziquPiyt)$ являются интегралами движения, то их скобка Пуассона также будет интегралом движения.

Фундаментальные скобки Пуассона:

$$ЬI,qj] = о, \quad b>i,Pj\backslash = о, \quad [qupj] = Sij. \quad (36)$$

Задача

Получить гамильтониан, систему гамильтоновых уравнений движения математического маятника длины I.

Решение

Математический маятник представляет собой материальную точку массы m, прикрепленную с помощью невесомого стержня длины l к точке A и движущуюся в плоскости под действием гравитационного поля. Система имеет одну степень свободы. В качестве независимой обобщенной координаты выберем угол ϕ отклоения маятника от вертикали. Декартовы координаты точки равны: $x = l\sin\phi$, $y = l\cos\phi$. Направляя ось OY вниз по вертикали, запишем кинетическую, потенциальную энергию и функцию Лагранжа:

$$T = \frac{m}{2} l^2\dot{\phi}^2, \ U = -mgl\cos\phi, \ L = \frac{m}{2} l^2\dot{\phi}^2 + mgl\cos\phi.$$

Обобщенный импульс, соответствующий координате ϕ равен: $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi}$. Тогда гамильтониан математического маятника имеет вид:

$$H = (p_\phi\dot{\phi} - L)_{\dot{\phi}=p_\phi/ml^2} = \frac{p_\phi^2}{2ml^2} - mgl\cos\phi.$$

Канонические уравнения Гамильтона

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2}, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -mgl\sin\phi$$

дают следующее дифференциальное уравнение второго порядка для угла ϕ:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0.$$

Задача

Записать функцию Рауса и уравнения движения в форме Рауса для сферического маятника, выбрав в качестве обобщенных координат углы сферической системы координат ϕ, θ.

Решение

Сферический маятник имеет две степени свободы. Если за обобщенные координаты принять углы θ, ϕ, то для кинетической и потенциальной энергий будем иметь выражения:

$$T = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2), \quad U = mgl\cos\theta.$$

Так как функция Лагранжа

$$L = T-U = \hat{}\frac{ml^2}{}-(0^2 + \sin^2 \textit{вф}^2) - mgl\cos \textit{в}$$

не содержит ϕ, то эта обобщенная координата циклическая. Ей соответствует интеграл движения:

$$p\phi — \frac{—}{\partial\phi}- = ml \sin \textit{вф} = ml\, uioa,$$

где a - произвольная безразмерная постоянная, $ш = y/g/L$ Из последнего соотношения следует: $\phi = шoa/sin^2\,в$. Построим функцию Рауса $R = Pфф$-L:

$$R = -\frac{1}{2}-m\textit{гв}^{2} \; ,{}^{2A2} + \frac{lml^2uka^2}{2\ \sin^2 0}£—\text{h}\ mgl\cos 0.$$

Для такой функции Рауса имеем единственное дифференциальное уравнение:

$$\pm\frac{dR}{dt\,\partial в}\_\frac{dR}{\partial в}\_ \sim \quad '$$

Полученной системе, которая называется приведенной системой, отвечает кинетическая и потенциальная энергии:

$$T^* = \frac{l}{2}\text{-}ml4\backslash \quad U^* = \frac{}{2}\ \backslash\frac{\hat{}4\Phi\text{-}}{\sin^2 0} + mgl\cos в.$$

Приведенная система имеет интеграл энергии:

$$\text{-mJ}^2 0^2 + - \quad , \;{}_2^{\circ} \quad + mgl\cos 0 = \text{-mZ}^{2}\hat{}/?,$$

где $j3$ безразмерная постоянная. Из интеграла энергии получим следующий закон движения в квадратуре:

$$/ \quad \frac{J@\text{--}?L\text{-}2cos6}{\text{V}\ \hat{}\quad \sin\ в} \qquad \bullet\ w_0 t + 7\text{-}$$

Аудиторные задачи

1. Составить канонические уравнения движения системы, лагранжиан которой в сферических координатах имеет вид:

$$L= {}^{™}(r^* + г^2в^2 + m^2\phi^2 \sin 0^2) - oF(0)0,$$

где $a = const$, $F(6)$ -произвольная непрерывно-дифференцируемая функция.

2. Вычислить скобки Пуассона:

$$\backslash Mi,Xj], \quad [Mi,_{Pj}], \quad [Mi, Mj[,$$

где Xi,pi, $M\{$ - декартовы компоненты векторов.

3. Гамильтониан трехмерного анизотропного осциллятора в декартовых координатах имеет вид:

$$H=\pm\{_v l+pl+pl)+\backslash\{ax>+(3y>+tf).$$

Найти гамильтониан осциллятора в цилиндрических координатах.

4. Частица массы m движется в плоскости XOY под действием силы F = —/(г)г/г, г = $y/x^2 + y^2$. Составить уравнения движения в форме уравнений Рауса.

5. Используя скобки Пуассона, показать, что обобщенный импульс pi является интегралом движения, если гамильтониан $H(qi,q2, -,Qs]Pi,P2,---,Ps)$ инвариантен относительно преобразования Qi -* <& = Чг + uqi-

Домашние задачи

1. Найти функцию Гамильтона и составить канонические уравнения движения осциллятора с вязким трением, функция Лагранжа которого равна

$$\text{a)}\ L = -exp(f3t/m)[mx^2 + fax - (c - /3^2/2m)x^2\},$$

где P -коэффициент сопротивления,

$$b)\ L = -[(qi - q_2)^2 + aqft^2] - acosq_2,$$

где a - константа.

2. Вычислить скобки Пуассона:

$$[ap,br], \quad [aM,br], \quad [aM.ЬM],$$

где Xi, pi, Mi - декартовы компоненты векторов, a, b -постоянные векторы.

3. Составить уравнения движения спутника массы m в поле тяготения планеты массы M в форме уравнений Рауса.

4. Две точки с массами mi, m^ взаимодействуют по закону всемирного тяготения. Составить уравнения движения системы в форме уравнений Рауса. За обобщенные координаты принять координаты центра масс системы X,Y,Z, расстояние между точками *г* и углы *ф, ф* (широты и долготы), которые определяют направление прямой, соединяющей точки.

(5Л Используя скобки Пуассона, показать, что при движении частицы в поле U(г) сохраняется ее момент количества движения.

6. Материальная точка массы m может двигаться по гладкой сфере, расширяющейся по закону $R(t)$. Найти гамильтониан и составить канонические уравнения движения точки.

7. Показать, что движение консервативной системы с двумя степенями свободы и одной циклической координатой может быть найдено в квадратурах.

8. Функция *ф(я,р^)* является интегралом гамильтоновой системы с циклической координатой д*. Показать, что функции *дф/dqk*, *д²ф/дд1*, ... также будут интегралами этой системы.

6. МЕТОД КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

6.1. Семинар 11. Канонические преобразования

Литература

1. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. М.: Физматлит, 2001.-262 с.

2. Гольдстейн,Г. Классическая механика / Г.Гольдстейн.-М.: Физматлит, 1975.-415 с.

3. Айзерман, М.А. Классическая механика / М.А.Айзерман.-М.: Наука, 2006.-378 с.

4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.

5. Павленко,Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко.- М.: Физматлит, 2003.-534 с.

Неособенное преобразование обобщенных переменных

Qi = Qi(qi,Pi,t), Pi = Pi(qi,Pi,t), t = 1,2,...,e; *detM^Q,* (37)

где *М* -матрица Якоби преобразования переменных Гамильтона, называется каноническим, если оно переводит любую гамильтонову систему

$$\dot{*} = \frac{\partial H}{Щ'} \quad \dot{P_j} = \frac{\partial H}{\sim\sim 4} \quad \textbf{(38)}$$

в новую гамильтонову систему

$$^{Qj}\sim dPi' \quad ^{Pj}\sim \quad dQi \qquad (39)$$

Уравнения канонических преобразований, задаваемых производящими функциями *Fi(qi,Q$_u$t), F$_2$(qi,Pi,t), F$_3${pi,Qi,t), Ft(jn,Pi,t),* имеют следующий вид:

$$FifaQut), \ ft = \hat{}, \ \ P* = \sim Ш> \qquad (40)$$
$$\qquad oqi \qquad\qquad dQi$$

$$FMuPi,t), \ ft = \S. \quad \& = Щ> \qquad (41)$$

$$FsiPuQut), \quad _{qi} = - \ \hat{} \ , \quad Ъ = -\%£, \qquad (42)$$

$$dpi \qquad oQi$$

$$Ъ(_P uЪA \quad _{qi} = -\hat{}, \quad _{Qi} = \quad {}^9\wedge \qquad (43)$$

«Новый> и «старый» гамильтонианы связаны соотношением:

$$K\{Qi,Pi,t) = H(q_u pi,i) + 3F1 \ _{\backslash b=n(Qt,Pi,t), \ Pt=Pi(Qi,P_r,ty} \qquad (^{44})$$

Задача

Найти каноническое преобразование задаваемое производящей функцией: $Fi(q,Q,t) = \backslash mujq^{7,}ctgQ$. Записать уравнения движения в переменных Q, P для гармонического осциллятора с частотой $ш$.

Решение

Запишем уравнения канонического преобразования, которое определяется производящей функцией $F\backslash\backslash$

$$dq \qquad oQ \quad 2\sin\ Q$$

Удобно разрешить эти соотношения относительно старых переменных:

$$*2P \ \bullet \sin Q, \quad p = V2mwPcosQ.$$

Применим данное каноническое преобразование к задаче о линейном гармоническом осцилляторе $Я = p^2/2m + kq^2/2$. Запишем гамильтониан гармонического осциллятора в новых переменных:

$$K = OJPCOS^2 Q + \ "Иф\frac{}{2\ ггш} \sin^2 Q = шP.$$

Таким образом, в результате канонического преобразования новая координата Q стала циклической. Поэтому интегрирование новых уравнений движения становится тривиальным:

Решение уравнений движения:

$$P = \frac{г.}{—}^{E} = const, \qquad Q(t) = uit + <j).$$

Возвращаясь к старым переменным получим следующий закон движения гармонического осциллятора:

$$\frac{2E}{V\, mu^{z2}}$$

Задача

Дана система трех материальных точек, взаимодействующих друг с другом с помощью гравитационного поля. Показать, что производящая функция

$$\text{fi-0}_{+}\text{£*+S*)p.+<*-..>*+} \qquad Г2 - \frac{ГП1Г1 + тзгз}{m_{13}}$$

где $M = m\backslash + т_2 + гпз$, $m\backslash\$ = m\backslash + тз$, гх,Г2,гз радиусы векторы трех материальных точек с массами $mi, m_2, mз$, реализует каноническое преобразование к переменным Якоби: R, г, Г13:

$$ri = R - \frac{т_2}{M}rjr - \frac{т_3}{m\backslash з}r_{13},$$

$$r_2 = R + \frac{тц}{M}туг, \quad r_3 = R - \frac{т_2}{M}Г7 + \frac{гщ}{7П13}г13-$$

Найти гамильтониан в новых переменных.

Решение

Из основных уравнений канонического преобразования, задаваемого производящей функцией F_2 находим связь старых и новых координат:

$$Pi = \frac{ш1Т.}{M}ТТ^{P}o - \frac{miX>}{mi3}{}^{p}2 \sim {}^{p}ь \quad P2 = \frac{ш2}{M}17^{Po} + {}^{P2}, \quad P_3 = \frac{m3}{M}17^{Po} \sim \frac{ТОЗ}{тхз}\hat{}Г\sim^{P2+P1}$$

$$ri = \bar{Q}o - \frac{т_2}{M}77Q2 - \frac{т_3}{mi3}Qi, \quad r_2 = \bar{Q}o + \frac{ти}{M}nfFQa, \quad r_3 = Qo - \frac{т_2}{Az}rrQa + \frac{И}{mi3}Qi-$$

В новых переменных гамильтониан принимает вид:

$$\frac{P^2}{2M} \quad \frac{P^2}{2\hat{}13} \quad \frac{R?}{2/x}$$

$$\_ \quad \frac{Gmims}{IQil} \quad \frac{Gm_2mi}{lQ_2 + \hat{} Q i|} \quad \frac{Gm_2m_3}{I Q a - \hat{} r Q i l'}$$

где $fj.^{1} = m_x l + m_2{}^1, / \hat{} = m_1^1 + m_3{}^*$.

Аудиторные задачи

1. Найти каноническое преобразование задаваемое производящей функцией: $F(q,Q,t) = \backslash muj(t)q^l ctgQ$. Записать уравнения движения в переменных Q, P для гармонического осциллятора с частотой $u(t)$.

2. Найти призводящую функцию вида $\Phi(p, Q)$, приводящую к тому же каноническому преобразованию, что и производящая функция $F(q,P) = q^2 exp(P)$.

3. Показать, что преобразование

$$x = X \cos A \ H\frac{P}{тш} \sin A, \quad y = Y \cos A \ H\frac{P}{тш} \sin A,$$

$$p_y — —гnuЫn \ A + P_y \cos A, \quad p_x = —muiY \sin A + P_x \cos A,$$

является каноническим. Найти новую функцию Гамильтона $K(X,Y;P_x,P_y)$, если

$$H(x,y;p_x,{}_{Py}) = {}^{P}\hat{} + \hat{}f(x4y').$$

Описать движение двумерного осциллятора при $Y = P_y = 0$.

\ Используя преобразование предыдущей задачи, привести функцию Гамильтона изотропного гармонического осциллятора в магнитном поле, заданном векторным потенциалом А = (0,Яж,0), к сумме квадратов и найти закон его движения.

)5. Каков смысл канонического преобразования задаваемого, производящей функцией $<\&(q, P) = aqP$-

6. Систему с гамильтонианом

$$H=(p + q)^2 \exp[2(p + qf] + 2(p^2 - q^2) \exp[(p + q)^2) + 2\{p^2 + q^2)$$

подвергнуть преобразованию:

Q=p + q, P = 2p(exp[(p + *qf]* + 1) + *2q(exp[(p + qf* - 1).

Убедиться, что это преобразование является каноническим. Найти гамильтониан преобразованной системы.

7. Показать, что для системы с одной степенью свободы поворот в фазовом пространстве *(p, q)* является каноническим преобразованием.

Домашние задачи

1. Показать, что преобразование

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2),$$

$$p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 - Q_2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 + Q_2),$$

Py = ^*Pi-V^EcosQi* + P$_2$),

является каноническим. Найти уравнения Гамильтона частицы в магнитном поле, задаваемом векторным потенциалом А = (—*yH, ^xH,0)* в новых переменных. Здесь *u*> = —^.

• 2. Известна функция Гамильтона системы с двумя степенями свободы

H = *ЫI* + *P*\ + *Ч*\ + fe - <7i)^2 + *qtl*

Найти коэффициенты oi, a_2 производящей функции канонического преобразования

Ф$_а$ = *a*\\{q_x + *qz)^{2}ctgQi* + *a*\\{$_{qi}$ - q_2)^2*ctgQ$_2$,*

при котором гамильтониан приобретает вид *K* = *P*\ + *fbP$_2$*-

3. Найти каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$F2\{q,P,t) = qP + (bq — aP)t, \quad a,b \text{ — константы.}$$

Записать в новых переменных уравнения Гамильтона.

4. Введем переменные

$$a = \quad \bullet \quad (тшх + гр)e^{\{шЬ}, \quad a^* = \quad (тих \;-\; ip)e\sim^{iut}.$$

Найти скобку Пуассона [a, a*]. Выразить через *a, a** функцию гамильтона линейного гармонического осциллятора: #о = ^ + $^{m''x}_{2}$. Показать, что *Q* — о, Р = *га** -каконические переменные. Найти новую функцию Гамильтона.

5. Найти канонические преобразования, задаваемые следующими производящими функциями:

$$a)F(q,\ P) = q\backslash nP, \quad h)F_2\{q,\ P) = \mathrm{Ping}, \quad c)\mathrm{Fi}(_{9>}\ Q) - qQ.$$

6. Систему с гамильтонианом $H = pq^3/2t$ подвергнуть преобразованию

$$Q = \backslash + hi(tpq^3), \qquad P = p_ч\backslash 1+1ещ>\{\backslash/<?)).$$

Убедиться, что это преобразование является каноническим. Найти гамильтониан преобразованной системы.

7. Установить каноничность и найти производящую функцию следующего преобразования:

$$a)Q = -qctgp, \quad \mathrm{P} = 21\mathrm{ncosp},$$

$$b)Q = pq-\backslash \quad \mathrm{P} = \mathrm{g - V - 5 g^e)_>}$$

$$c)Q = pe^q, \quad P = q + e\text{-}^q + lnp.$$

7. МЕТОД ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

7.1. Семинар 12. Уравнение Гамильтона-Якоби

Литература

1. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. М.: Физматлит, 2001.-262 с.

2. Гольдстейн,Г. Классическая механика / Г. Гольдстейн. -М.: Физматлит, 1975.-415 с.

3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев. М.: Физматлит, 1990.-414 с.

4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.

4. Коткин,Г.Л. Сборник задач по классической механике / Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо.-М.: Физматлит, 1977.-319 с.

6. Полак, Л.С. Вариационные принципы механики / Л.С.Полак.-М.: Физматлит, 1960.-599 с.

Уравнением Гамильтона-Якоби называется следующее уравнение в частных производных:

/ dS dS dS \ dS n

я (*•*•"•*• ^ » ^ "-'a?'J + a =0- (45)

Полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби называется такое его решение *S(qi,oti,t)* которое зависит от s произвольных постоянных *a*\, аг,..., a_s и удовлетворяет условию:

/ d^2S у

\\$dq_k daj)_{kj=x}$

Зная полный интеграл *S(qi,oti,t)* уравнения Гамильтона-Якоби можно найти решение основной задачи механики в виде:

$$P i = \frac{dS(qi,\ at,\ t)}{\%}, \quad Q i = A = \frac{dS\{q_h a_u t)}{дсн}. \qquad (4?)$$

Интеграл

$$S = -\int_{t_в} Ldt \qquad (48)$$

называется действием по Гамильтону. Принцип Гамильтона Остроградского для голономной системы в случае существования потенциала сил: среди всех путей прямой путь выделяется тем, что для него действие по Гамильтону имеет стационарное значение, то есть первая вариация действия на прямом пути равна нулю: $SS = 0$.

Задача

Найти закон движения линейного гармонического осциллятора с помощью уравнения Гамильтона-Якоби.

Решение

Запишем гамильтониан линейного одномерного гармонического осциллятора:

Составим уравнение Гамильтона-Якоби, положив $p =$ *Щ:*

2m \dq) + *2* *dt*

Поскольку гамильтониан явно от времени не зависит, можно искать полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в виде суммы двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной *(t* или *q)*:

$$S(q,t,a) = W(q,a)+S_0(t,a).$$

Тогда, подставляя эту функцию в уравнение Гамильтона-Якоби, получим:

1 *(Ш_*^{2} *W_* *_dS_*
2m\dq) + 2 *dt* °'

где *a* постоянная разделения. В результате получаем систему двух уравнений:

1 *fdW*^{2} *kg*^{2} *—a*

dS
dt

Из нее находим функции W, S_0, а вместе с ними и полный интеграл:

$$S(q, t, a) — Vmk\ /\ у —— q^2 dq — at.$$

Интеграл по q можно вычислить аналитически, тогда получим окончательный вид полного интеграла:

$$S\{q, t, a) = Vmk- \mathrm{I}\ \frac{/—r\text{-}q\ /2a}{2\backslash k}\ ,\backslash^{1/2} \text{<p}\ J\ \ \mathrm{H}\frac{aymk}{к} arcSm—= \frac{q}{\hat{}}\ — at.$$

Чтобы найти закон движения линейного гармонического осциллятора, используем уравнение канонического преобразования, имеющее вид:

$$да$$

Вычисляя производную по a, получим:

$$p = —t+ J\frac{/га}{к}arc\dot{b}in\ \frac{о}{[\%й}$$

ут

Разрешая последнее соотношение относительно координаты q, получим следующее Решение

$$. .\quad 12a\ ,\quad .\quad .\quad /га$$

Константы а, $J3$ можно связать стандартным образом с начальными условиями.

Задача

Материальная точка массы га, брошенная под углом a к горизонту $(z = 0)$, движется в однородном поле тяжести. Найти действие по Гамильтону для прямого пути (парабола) и окольного пути (отрезок прямой), проходящих через начальную точку A и конечную точку B в моменты времени $t_0 = 0$ и $t\backslash$.

Решение

Действительной траекторией материальной точки (прямой путь) является парабола:

$$z - VQ \sin at -\frac{1}{}-gt^{2}, x = VQ \cos at.$$

Координата z обращается в нуль в момент времени $t\backslash = {}^{2\text{"poino}}$, когда парабола пересекает ось OX. Длина отрезка прямой вдоль оси OX равна OH = ——————. dTo один из возможных окольных путей системы. Так как в принципе Гамильтона-Остроградского время движения из начального положения системы О в конечное положение В одинаково, то в рассматриваемом окольном пути скорость v должна быть равна $vo \cos$ a. Для обоих движений потенциальная энергия равна $U = mgz$.

На прямом пути (парабола) лагранжиан системы равен:

$$1пр = T - U = \frac{1}{-}(x^2 + z^2) - mgz = \frac{1}{-}m(uj> - 4u_0 \sin agt + 2gH^2). \quad (49)$$

Найдем действие по Гамильтону для прямого пути:

$$S= f^{t_1} ’Lnp’dt = \frac{mvZsma}{—^c—} /I\ 1 - \frac{4}{-} - \sin^2 a \backslash J$$

На окольном пути (отрезок прямой) лагранжиан точки имеет вид:

$$Аж = x'п\hat{}o^{\cos 2a}-$$

Тогда действие точки на окольном пути равно:

$$5_{ок} = \frac{mvn \sin a.,}{\partial}(1 ’- \sin^2 a).$$

При любом угле a, в том числе и при достаточно малых a, когда прямой и окольный пути могут быть сколь угодно близкими, величина $S_{пр}$ меньше $5_{0К}$, то есть действие по Гамильтону на прямом пути меньше, чем на окольном.

Аудиторные задачи

1. Найти действие материальной точки, движущейся в отсутствие поля и проходящей через точки ri = *r(t\),* *m%* = г(*г).

2. Составить уравнение Гамильтона-Якоби для материальной точки, движущейся в однородном гравитационном поле. Найти полный интеграл этого уравнения, а также траекторию и закон движения точки.

3. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для тела, движущегося по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол *а* с горизонтом.

. 4. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для математического маятника и закон его движения в квадратуре.

5. Лагранжиан плоского осциллятора имеет вид:

Составить уравнение Гамильтона-Якоби осциллятора. Определить его полный интеграл и найти закон движения.

Домашние задачи

1. Найти действие одномерного гармонического осциллятора, проходящего через точки *x* = x(£i), *хч,* = x(^г)-

2. Найти действие для заряда, движущегося в однородном магнитном поле.

3. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для электрона, движущегося в постоянном однородном магнитном поле в декартовых координатах. Найти также закон движения и траекторию электрона.

4. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для электрона, движущегося в однородных, постоянных взаимно-перпендикулярных

электрическом и магнитном полях.

5. Составить уравнение Гамильтона-Якоби, найти его полный интеграл и найти закон движения в квадратурах для системы, заданной своим гамильтонианом:

$$H = \hat{}\{piq2 + 2\mathrm{pip}_2 + q\backslash)-$$

6. Составить уравнение Гамильтона-Якоби,определить его полный интеграл и закон движения для следующих систем, заданных своими лагранжианоми:

$$a)L = Zq\backslash + 2ql + ql-2q\backslash-3ql,$$

$$^{b})^{L} = 2\ (\hat{}\ 1\ ^{+}\ \hat{}\ +\ Яз)\ \sim \cos gi,$$

$$\mathbf{c)t = (S^{+}|-^{3}\wedge + /fe)'}$$

где $f\{q<i)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

$$^{d})^{L} = \overset{1}{2}\ («1\ +\ \hat{}\ ^{si}n\ й)\ -\ \overset{1}{2}(91\ +\ <i)-$$

7.2. Семинар 13. Уравнение Гамильтона-Якоби. Метод разделения переменных

Литература

1. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г.Павленко. М.: МГУ, 1991.-336 с.
2. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. - М.: Физматлит, 2001.-262 с.
3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев. М.: Физматлит, 1990.-414 с.
4. Коткин,Г.Л. Сборник задач по классической механике / Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо.-М.: Физматлит, 1977.-319 с.
5. Павленко, Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. -М.: Физматлит, 2003.-535 с.
6. Ольховский, И.И. Задачи по теоретической механике для физиков / И.И.Ольховский, Ю.Г. Павленко, Л.С. Кузьменков; М.: МГУ, 1977.- 420 с.

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби может быть найден при помощи метода разделения переменных, если гамильтониан механической системы имеет следующую структуру:

$$1.\ Я = H(f_1(q_1,_{P1}),f_2(q_2,p_2),...,f_s(q_s,p_3)). \qquad (50)$$

Полагаем

$$^{fi}\backslash^{qU}\boldsymbol{Hq\text{-})}^{=ai}\text{-} \qquad (51)$$

Разрешая полученные равенства относительно частных производных *dW/dqi*

$$\text{"я}\frac{dW}{} = 9г(д<,оц), \qquad (52)$$

находим полный интеграл в виде:

$$S = -H_0t + \hat{}2 \quad 9i\{Qh\,Oi)dqi. \qquad (53)$$

2. Я = *fs(fa-l,qs,Ps), fa-l = fs-l(fs-2,qs-l,Ps-l),* •-, /1 = /1(«1,P1)- (54)

Для нахождения полного игтеграла положим:

$$/\text{i}(\text{gi},\text{-д}\frac{dW}{\text{d?i}}) = <*i,\ h\{oii,qi,\text{д}\frac{dW}{<\%}) = <*2,\ ...,\ fs(a_s,q_s,\text{-я}\frac{dW}{C\&}) = \text{a}_\text{s} = Я_0. \qquad (55)$$

Разрешая полученные равенства относительно частных производных функции W по обобщенным координатам *dW/dqi* — #,(<&, *щ-i,* сц), находим полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в виде:

$$\boldsymbol{S = -a_st + \text{X]}\ \underset{\text{t=i}}{/}\ ^{\wedge i}(^{<}*^{i}>^{ai\,\prime a}i\text{-}i)^{d<}H\text{-}} \qquad (^{56})$$

Задача

Найти полный интеграл, траекторию и закон движения материальной точки массы *m* в произвольном центрально-симметричном поле в квадратурах с помощью уравнения Гамильтона-Якоби.

Решение

В центрально-симметричном поле материальная точка массы *т* движется в плоскости, перпендикулярной сохраняющемуся моменту количества движения. В качестве обобщенных координат выберем полярные координаты на плоскости движения: *(ду,* $д_2$*)* = *(г, ф)*. Имея ввиду, что скорость точки в полярных координатах v = (г, *гф),* запишем функцию Лагранжа:

$$Ь(г,ф,г,Ф) \;=\; \hat{}\{г^2 \;+\; г^2ф^2)-и(г).$$

Функция Гамильтона системы имеет вид:

$$Я(г,ф,p_г,Рф) \;=\; \hat{}\;\; ЬI + \hat{}\; J \;+\; U(r).$$

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби в виде:

$$\frac{1}{2m}\;\;\backslash дг) \quad {}^{2}\quad ,\quad г^2\;\; /ог.\backslash 2' \;\backslash дфу \quad + U(r) + at \quad о.$$

Поскольку система обобщенно-консервативная, координата *ф* циклическая, мы можем искать полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в виде:

$$З \;=\; -аг \;+\; а_фф \;+\; \backslash¥(г),$$

где *а, а.ф* константы. Очевидно, что *а* имеет смысл полной энергии материальной точки, а *асф* обобщенный импульс, соответствующей координате *ф.* Подставляя такую функцию в уравнение Гамильтона-Якоби, получим уравнение для определения неизвестной функции *W(r):*

$$\frac{1}{Ъп}\;\; \frac{/dWY}{\backslash дг)} \;+\; \bullet оа \;+\; U(r) \quad a.$$

Выражая отсюда частную производную *dW/dr* и интегрируя, получаем окончательный вид полного интеграла:

$$S \;=\; -at \;+ аф + \quad dr\backslash\;\; 2m(a\; -Щт) \quad a-. \;{,}2-$$

Тогда из уравнений канонического преобразования, которое определяется функцией *S* последовательно находим закон движения материальной точки

яс г л

_ „ OS f maг

аа J <j2m(a-U(r))-%

и траекторию движения материальной точки в поле *U(r)*

п я. dS л f a*dr

Константы а, а^, /3i, /% можно связать с начальными условиями.

Задача

Частица движется по поверхности параболоида вращения. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби.

Решение

Поместим начало координат в фокус параболоида вращения. Тогда уравнение параболоида $x^2 + y^2 = a^2 + 2az$, где а/2 -расстояние от фокуса до вершины. Введем параболические координаты:

Уравнение связи в параболических координатах принимает вид: 7? = а. Лагранжиан частицы имеет вид:

m, ,£2 m» ;o mд,*

L = jti + a)j + ^ a ф ~ 2 (^ " я)-

Найдем обобщенные импульсы:

dL m.. л1 c :

Pi = ^7 = лс(£ + a^> PФ = m&Ф-

В результате функция Гамильтона принимает вид:

m £ + a 2m£a I

Составим уравнение Гамильтона-Якоби, заменяя обобщенные импульсы на частные производные функции действия S по соответствующим обобщенным координатам:

2£ fdS\2 1 /dS\2 1 ., . dS
M£Ta)Щ) +^Га{дф) + 2 т ^ - а) + Ж==о -

Поскольку система обобщенно-консервативная, а координата ϕ цмклическая, можно искать полный интеграл этого уравнения в виде:

S=-Et + **M<t> + f(£),**

где для неизвестной функции /(£) получаем простое дифференциальное уравнение, решение которого имеет вид:

до 1«ш * М2 ! 2 и Х2

Аудиторные задачи

1. Составить уравнение Гамильтона-Якоби, найти его полный интеграл и найти закон движения в квадратурах для системы, заданной своим гамильтонианом:

***H* = \m+p\q\-2q\q2).**

2. Частица массы ***m*** движется в потенциальном поле *U(x,y,z)* = *—a/г + /3z, (a, /3* -константы) (суперпозиция центрального кулоновского и однородного полей). Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби.

3. Точка массы ***m*** движется по гладкой сфере радиуса *г* в однородном поле тяжести (сферический маятник). Составить уравнение Гамильтона-Якоби, найти его полный интеграл и получить закон движения точки в квадратурах.

4. Составить уравнение Гамильтона-Якоби, определить его полный интеграл и найти закон движения для системы, заданной своим лагранжианом:

5. В наивысшей точке гладкой сферы радиуса r проделано малое отверстие, через которое пропущена гибкая нерастяжимая нить. К концам нити присоединены две материальные точки с массами m, M. Первая точка остается во время движения на поверхности сферы, а вторая движется по вертикали. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для этой системы.

Домашние задачи

1. Составить уравнение Гамильтона-Якоби, найти его полный интеграл и найти закон движения в квадратурах для системы, заданной своим гамильтонианом:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{P^2}{\cos^{14} Q_i}$$

2. Материальная точка массы m движется в центральном поле с потенциалом $U(r) = -/J\text{-}i/r - p\text{ч}/r^2$- Составить уравнение Гамильтона-Якоби для этой точки, найти его полный интеграл и получить из него уравнение траектории точки.

3. Модель двухатомной молекулы может быть представлена в виде двух материальных точек одинаковой массы m, соединенных пружиной жесткости κ (в ненапряженном состоянии длина пружины равна IQ). Найти закон движения молекулы при помощи уравнения Гамильтона-Якоби. Использовать следующие обобщенные координаты: Xi, X_2, X_3 координаты центра масс молекулы, θ, ϕ -углы широты и долготы, определяющие положение оси молекулы в пространстве, r -расстояние между атомами.

4. Составить уравнение Гамильтона-Якоби, определить его полный интеграл и найти закон движения для системы, заданной своим лагранжианом:

5. Составить уравнение Гамильтона-Якоби, найти его полный интеграл и найти закон движения в квадратурах для системы, заданной своим

гамильтонианом:

U — «*?* J_ „2 , P2+P3

6. Материальная точка движется по вертикали в однородном поле тяжести. Непосредственным вычислением показать, что действие по Гамильтону на прямом пути $z = gt^2/2$ меньше действия на окольных путях вида $z = a_n t^n$ $(n > 1)$.

8. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

8.1. Семинар 14. Линейные одномерные колебания

Литература

1. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. - М.: МГУ, 1991.-336 с.

2. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. М.: Физматлит, 2001.-262 с.

3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.

4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.

5. Павленко, Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. -М.: Физматлит, 2003.-535 с.

Пусть механическая система имеет одну степень свободы. Тогда кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \backslash a_n Ш^2 - \tag{57}$$

Пусть на систему действуют стационарные потенциальные силы и диссипативные силы, пропорциональные первой степени скоростей точек. В этом случае потенциальная энергия системы и диссипативная функция Рэлея имеют вид:

$$U = U(q), \quad D = \backslash b_n \{q) q^2 - \tag{58}$$

Пусть у системы имеется положение устойчивого равновесия *(eq.),* в котором обобщенная сила равна нулю:

Потенциальная энергия имеет экстремум в положении равновесия. Предположим, что сц $= b\hat{\ } U/dq^2 > 0$ (положение устойчивого равновесия). Разложим в ряд по степеням отклонения £ $= q - q_{eq}$, £ кинетическую, потенциальную энергии и диссипативную функцию

Рэлея, удерживая члены второй степени по £,£. В результате получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$а ц | + Ьп4 + сц£ = 0, \qquad (60)$$

которое описывает движение системы в окрестности устойчивого положения равновесия. Вводя обозначения *2/л* = 6ц/оц, *и%* = *сц/ац,* получаем следующие решения этого уравнения:

1. Если $ш^2$ = *u>o — fj?* > 0, то получаем периодическое затухание вида *(и* частота колебания, *ц* - коэффициент затухания):

$$£(*) = ae\sim\hat{}cos(u>t + a). \qquad (61)$$

2. Если w^2 = WQ — $д^2$ < 0, то получаем апериодическое затухание (/^2 = /u ± у У - *u%):*

$$\hat{}г) = C1e\text{-}\hat{} + C_2e\text{-}\hat{}. \qquad (62)$$

Задача

Частица движется по винтовой линии. Найти частоту линейных колебаний в окрестности положения устойчивого равновесия.

Решение

Представим уравнение винтовой линии в параметрической форме:

$$x = a \cos q, \; y = a \sin q, \; z = bq.$$

Выбирая q в качестве обобщенной координаты найдем $v^2 = (a^2 + b^2)q^2$. Расположим далее ось OX горизонтально, а ось OZ под углом a к вертикали. Тогда потенциальная энергия равна:

$$U = — mgr = —mдa \sin a \sin q + mgbq \cos a.$$

Положение устойчивого равновесия определяется следующими условиями:

$$\cos q = \text{-}\overset{6}{c}iga, \; \sin g > 0, \; \text{-}\overset{\partial^2}{r}\text{-}j = тдо \sin a \sin g.$$

Предполагая, что $b|ctg\alpha| < a$, получим частоту линейных колебаний:

$$и? = д^{y}\ \frac{a?\sin^2 a - b^2\cos^2 a}{a^2 + b^2}\ .$$

Задача

Частица движется по окружности, вращающейся с постоянной угловой скоростью O, вокруг вертикальной оси, лежащей в плоскости окружности и проходящей через ее центр. Найти частоту линейных колебаний частицы в окрестности положения устойчивого равновесия.

Решение

Направим ось OZ' неинерциальной системы отсчета, связанной с окружностью, по оси вращения. Выберем в качестве обобщенной координаты полярный угол $в$. Запишем кинетическую и потенциальную энергию материальной точки в неинерциальной системе отчсета:

T = ™±$в^2$, $U' = U$- TOVV x r 1 - \ x r f = $тда\cos в$ - $\backslash ma^2Sl^2\sin^2 в,$

где a -радиус окружности, Q -угловая скорость вращения окружности. Положение равновесия определяется из условия ^ = 0 $в\backslash = 0$, $9\% = ж$, cos #з,4 = —g/aCt^2 Найдем вторые производные потенциала:

^tf'/дч 2o2 <?U'
(#l) = -$тда$ - ma^2® < O, -^ H ^г) = $тда$ - ma?®?, $П^2 < д/а$,

-^-(Oi) = -$тда$ - ma^2tf < 0, -^

$_{92}$-(0_{3A}) = $ma?П^2$ - m (£) , $П^2 > д/а$.
cPU'

Следовательно, частота линейных колебаний определяется соотношениями:

,,2_9 $_0$2 ,,2 _ $_0$2 / I V^2

Задача

Два пункта на поверхности Земли соединены гладким тоннелем, прорытым по хорде. Записать лагранжиан тела, движущегося в тоннеле, найти частоту колебаний и закон движения.

Решение

Предположим, что расстояние от центра Земли до тоннеля равно с. Пусть x - координата тела движущегося в тоннеле (начало системы отсчета поместим в центр Земли). Потенциальная энергия взаимодействия Земли (шара) с материальной точкой массы m (тело), которая находится на рассточнии г от центра шара, имеет вид:

$$U\{r) = -GJ \frac{mdM}{|г}$$

где s -координата массы шара dM. Этот интеграл можно вычислить в сферических координатах:

$$U(г) = -Gp \int_{Jo}^{pR} s^2 ds \int_{Jo}^{pre} sinOde \int_{Jo}^{г2л} вф \frac{m}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos в}}$$

$$(\qquad -G\hat{}, \qquad r>R$$

Из этой формулы получаем потенциальную энергию тела, находящегося в тоннеле:

где a - радиус Земли. Тогда лагранжиан тела равен $L = mx^2/2 - mдx^2/2a$. Период колебаний тела Т = 27гл/aд~ = 84 мин совпадает с периодом обращения спутника, движущегося с первой космической скоростью $v\backslash = y/jM/r$. Пусть тело падает в тоннель, прорытый на широте a с нулевой скоростью: $x(0) = a \cos a$, ж(0) = 0. Тогда:

$$x(t) = a \cos a \cos wt, \quad ш = \backslash [я -.$$

Аудиторные задачи

1. Найти частоту колебаний точки массы те, движущейся по гладкой горизонтальной прямой и прикрепленной к пружине, другой конец которой закреплен на расстоянии h от прямой. Жесткость пружины $к$, длина в ненапряженном состоянии IQ.

2. Найти частоту малых колебаний частицы в поле $U(x) = V \cos ax—Fx$.

3. Частица массы то, несущая заряд q, может двигаться в поле тяжести по вертикальной окружности радиуса R. В нижней части окружности закреплен заряд q. Найти положение равновесия и частоту малых колебаний частицы.

4. Бусинка массы m может двигаться по гладкой параболе $y = px^2$ с осью у, направленной вертикально вверх. Определить частоту колебаний бусинки.

5. Электрический заряд совершает линейные колебания с периодом T по неподвижному гладкому эллипсу с полуосями a, $Ъ$. Эллипс находится в однородном электрическом поле напряженности Е, причем большая полуось a параллельна направлению поля. Определить отношение заряда к массе.

6. Частица массы то движется в потенциальном поле Эккарта:

$$U\{x) = athkx \text{——гтг}^{-}! \; 26 > a.$$
$$ch^2kx$$

Найти частоту колебаний в окрестности дна потенциальной ямы.

Домашние задачи

1. Упругая пренебрежимой массы нить, длина которой в ненапряженном состоянии /о = 2а, перекинута через два гладких горизонтальных стержня, расположенных на одном уровне на расстоянии a. Оба конца скреплены с шариком массы то. Определить частоту вертикальных колебаний шарика, если в положении равновесия нить образует равносторонний треугольник.

2. Найти частоту малых колебаний частицы в поле $U(x) = V(a^2x^2 - \sin^2 ax$.

3. Найти свободные колебания материальной точки массы m в вертикальном направлении, если она соединена двумя одинаковыми пружинами жесткости $к$ с горизонтальными стенками, отстоящими от нее на расстояние / каждая. Длина пружин в ненапряженном состоянии равна I.

4. Шарик массы m может двигаться по гладкой пераболе $y — px^2$ с осью у, направленной вверх по вертикали. Шарик прикреплен к двум одинаковым пружинам жесткости $к$, навитым на параболу и жестко закрепленным другими концами на одинаковых расстояниях от вершины параболы равных a вдоль параболы. Длина каждой пружины в ненапряженном состоянии равна a. Найти частоту линейных колебаний шарика.

5. Шарик массы m с зарядом е подвешен на нити длины I. Точка подвеса закреплена на расстоянии $h > I$ от бесконечно протяженной проводящей плоскости. Пренебрегая силой тяжести, найти частоту линейных плоских колебаний заряда.

8.2. Семинар 15. Собственные и главные колебания системы

Литература

1. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. М.: МГУ, 1991.-336 с.
2. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. М.: Физматлит, 2001.-262 с.
3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.
4. Айзерман, М.А. Классическая механика / М.А. Айзерман.-М.: Наука, 2006.-378 с.
5. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; - М.:

Физматлит, 1996.-431 с.

6. Павленко, Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. -М.: Физматлит, 2003.-535 с.

7. Ольховский, И.И. Задачи по теоретической механике для физиков / И.И.Ольховский, Ю.Г. Павленко, Л.С. Кузьменков; М.: МГУ, 1977.- 420 с.

Рассмотрим малые колебания системы с s степенями свободы с идеальными голономными стационарными связями и потенциальными силами. Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$^{m} = \text{о} \overset{1}{} \sum_{j,k=l}^{s} {}^{a}МЯз)ЦЯк- \tag{63}$$

Разложим кинетическую энергию в положении устойчивого равновесия в ряд по степеням £- = qj — qj^1, £- = qj. С точностью до членов второго порядка получим:

$$m = \backslash \text{ E }^{a}di£k, \tag{64}$$

где a,jk значения матрицы коэффициентов в положении устойчивого равновесия. Предполагая, что потенциальная энергия U в положении устойчивого равновесия обладает изолированным минимумом, запишем ее разложение по степеням *fy.*

В результате система уравнений движения в окрестности положения устойчивого равновесия имеет вид:

$$\overset{з}{\text{X}} > \text{i} * £ + \wedge) = 0\,, \quad \text{j} = 1,2,\ldots,\text{s}. \tag{66}$$

Решения этих уравнений ищем в виде:

$$Ш = C_{к}e^{x}\backslash \quad к = 1,2,\ldots,s. \tag{67}$$

Из уравнений движения получим алгебраическую систему однородных уравнений для амплитуд $C_к$:

$$\overset{s}{\wedge}(\text{a} \wedge \text{A}^{2} + \text{c}_{\text{jfc}})\text{C}_{\text{fc}} = 0, \quad \text{j} = 1,2,\ldots, \text{a}. \tag{68}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если

$$Д(А) = det(a_{jk}X^2 + c_{jk}) = 0. \tag{69}$$

Это уравнение называется характеристическим. Оно представляет собой алгебраическое уравнение степени 2s относительно А и имеет *2s* корней. Если на систему действуют только потенциальные силы, то все собственные значения характеристического уравнения будут чисто мнимыми:

$$K — +ш_a, \quad \backslash\sim = -ш_a, \quad a = 1,2,..., s. \tag{70}$$

Тогда решение системы дифференциальных уравнений можно записать в виде:

$$\&(t) = Re\, J2^{s}\ [(C?)^{+}e*-* + (Cft-e-***]\ . \tag{71}$$

Значения амплитуд *(С^)^,* соответствующих X_a, определяются с помощью однородной системы. Их можно представить в виде:

$$C£ = C*A\%, \quad к =1,2,...,a, \tag{72}$$

где Д£ алгебраическое дополнение к элементу *к* столбца любой строки характеристического детерминанта, взятого при А = А,,. Учитывая, что Afc(w^a) = Afc(—iu_a), представим решение в виде:

$$\&(*) = X)^{s\,A} (\wedge * K\, cos(cj_a t + \&) =]\Gamma^{s} A_k\{iu_a)e_a(t). \tag{73}$$

Координаты $в_a$ называются главными или нормальными координатами. В главных координатах лагранжиан системы должен иметь вид:

$$L = X_{a=l} > , \ _{La} = ?fel-^{C}fel \tag{74}$$

где a_a, c_a -диагональные элементы симметричных матриц *ац, ы* после приведения их к каноническому виду.

Задача

Рассмотрим трехатомную молекулу как систему, состоящую из трех точек с массами mi, *mi, m\,* расположенных на одной прямой и соединенных между собой одинаковыми пружинами (длина пружины в ненапряженном состоянии и жесткость каждой равны соответственно а, *1о)*- Найти собственные частоты продольных колебаний молекулы и закон ее движения.

Решение

Рассмотрим колебания молекулы в системе центра масс. Направим декартову ось *ОХ* по оси молекулы. Пусть *xi, X2,* хз координаты атомов, которые связаны соотношением: $m\backslash x\backslash$ + *чщх^* + $mix_3 = 0$. Тогда кинетическая и потенциальная энергии молекулы будут равны соответственно:

$$u = 2K^{X2} \sim\sim {}^{XI} \sim {}^{a\wedge 2+} ({}^{X3} \sim {}^{x\%} \sim {}^{a})^{\wedge\prime}$$

Исключим координату *xi* из выражений для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{-}{2ГП2}(mi + m_2)(xi + X3) + \frac{}{ГП2} xix_3,$$

$$°\text{-}1 \quad \frac{ТП1 + ГП2}{m_2} \quad xi\ H\frac{^{та}1}{ГП2}x3 + a\ \Big) + \Big(\frac{^{m}i}{ГП2}xi - \backslash \frac{mi+m_2}{Ш2}x3 - a\Big\}$$

Положение равновесия в СЦМ определяется равенствами: $x^\wedge = -a$, $x_2^{eq} =$ О, $X3^? = a$. Введем в качестве новых переменных отклонения от положения равновесия: 6 = xi + ^{a}) £з = #2, 6 = ^{x}з — *о,*. Перепишем кинетическую и потенциальную энергию в новых переменных:

$$T = \frac{\wedge}{2ТП.2}(mi + таХЙ + \#) + \frac{\wedge}{т_2} 6\,6,$$

$$C/ = 2\sim 2\ [1({}^m i + {}^m 2)Ci + "Нб]^2 + [mi^\wedge i + (mi + m_2)6]^2]\ \cdot$$

Запишем систему лагранжевых уравнений движения, используя полученные функции:

$$L + {}^\wedge Ui + \frac{ТМ*}{mi + m_2}(6 + 4\&) = 0,$$

$$\frac{}{mi + m_2}(6 + Цвй) + 6 + {}^\wedge 0x6 = 0.$$

Составим систему уравнений для амплитуд и характеристическое уравнение для определения собственных частот колебаний:

(А² + и&)Ъ + - ~ (Л ² + «£)<* = О,
ТП\ +ТП2

^~<>? + o&W + <* + <С, . О,

Д(А) (Л2 + * ² - (^ Ь (Л , + ^ = ^

где введены следующие обозначения:

2 mf + (mi + m2)² 2 2(mi+m₂)
Н>1 ~ к————/————Г> ^02 = К ————————.
771х7722(7711+Шг) ГО1ГО2

Характеристическому уравнению удовлетворяют следующие значения:

Л2 2 ^* \ 2 2 ^ л
! 2 = —Ш\ =————, А, 4 = — Шо — —К—, Ш = 2ГО1 + ГП2.
Шх ' 7П17П2

Из уравнений для амплитуд получаем:

С(1,2) = - С(1,2) С(3,4) = С(и)

Каким образом, общее решение будет иметь вид:

£t = 6>i + 02, 6 = -01 + 02, 0i,2 = ai,2 cos(wi,2t + /?i,2).

Возвращаясь к исходным переменным, получим:

X\ = -О + 01 + 02) ^2 ———— #2> хз = а - 0i + 0₂.
7П2

Из этого решения следует, что продольные колебания трехатомной симметричной молекулы сводятся к наложению двух главных колебаний. Главное колебание 0i совершается с частотой *ш* и осуществляется, если в начальный момент времени отклонения и скорости двух крайних атомов одинаковы по величине и направлены в разные стороны, средний атом при этом все время находится в центре масс молекулы. Второе главное колебание 02 с частотой *ш%* асимметрично; для его осуществления нужно задать одинаковые начальные условия для крайних атомов; что касается атома 2, то его начальные отклонения и скорость должны относиться к отклонениям и скоростям крайних атомов как *2m\/m2-*

Задача

В качестве модели взаимодействующих нейтральных атомов рассмотрим два линейных диполя, расположенных на одной прямой на большом расстоянии друг от друга. Диполь образован протоном и электроном. Частота колебаний электрона изолированного диполя равна *щ*. Найти собственные частоты колебаний системы.

Решение

Пусть протоны расположены в точках (0,0,0), *(R,* 0,0). Положение электронов определяется координатами *xi,x£.* (xi,0,0), *(R* + x_2,0,0). Смещения l^i^l <C *R*- Потенциальная энергия системы

$$U = \frac{}{R} - \frac{}{R-xi} + \frac{}{R+x_2-xi} + \frac{}{R+x_2} + \frac{-mwtixi}{2} + x\{\}).$$

В окрестности положения равновесия $x\backslash = x\text{-}i$ — 0 имеем:

C/ — —m£1¹x\xъ + r i ^o R + a^), ^ = тЛ³"

Запишем уравнения Лагранжа:

$$\#1 + u{>}oXi - \Pi^2 X2 = 0, x{<}i + ш\backslash x2 - Cl^2 Xi = 0.$$

Характеристическое уравнение $[ш^2 - ш^2)^2 - \Pi^4$ определяет собственные частоты колебаний: c^fi = $w^2 \pm \Pi^2$. Общее решение уравнений движения

I = —= I J acos(wi* + a) + —p I } 6cos(a>2i + /3).

Аудиторные задачи

1. На гладкий горизонтально расположенный стержень длины 2Zo навиты две одинаковые пружины, концы которых закреплены, а два других конца прикреплены к шарику массы m (длина каждой пружины в ненапряженном состоянии *IQ,* а жесткость *к).* К шарику, в свою очередь, прикреплена нить длины *I* со вторым шариком массы *m* на конце. Найти общее решение и собственные частоты линейных плоских колебаний системы.

2. Найти нормальные колебания (горизонтальные) системы двух частиц частиц с массами mi, тг, соединенных пружинками жесткости *щ,* кг, /сз между собой и свертикальными стенками. Длина пружин в ненапряженном состоянии равна /о-

3. Два шарика с массами m могут скользить по двум гладким полупрямым, образующим угол 7г/3. Шарики связаны между собой, а также с вершиной угла пружинами жесткости *к.* Пружины, закрепленные концами в вершине угла, в ненапряженном состоянии имеют длину *IQ,* а пружина, соединяющая шарики длину *h.* Найти собственные частоты и закон движения системы в линейном приближении (действием силы тяжести можно пренебречь).

4. Найти нормальные колебания трех одинаковых частиц массы 7тг, расположенных на кольце радиуса *R* и соединенных одинаковыми пружинами жесткости *к,* навитыми на кольцо. Определить нормальные координаты, приводящие функцию Лагранжа к сумме квадратов.

5. Найти нормальные колебания системы, функция Лагранжа которой имеет вид:

$$L = -\{x^2 + y^2) - -\{ш\backslash x^2 + cujy^2) + axy.$$

6. Две частицы могут скользить по двум прямым, образующим угол 7г/3. Частицы связаны между собой и с вершиной угла пружинами. Пружины, закрепленные концами в вершине угла, имеют в ненапряженном состоянии длину *I,* а пружина соединяющая частицы длину *L.* Найти собственные частоты линейных колебаний.

Домашние задачи

1. В неподвижной точке закреплена нерастяжимая нить длины *I,* к которой подвешен шарик массы *т.* *К* этому шарику на такой же нити подвешен второй шарик массы *т.* Найти собственные частоты этой системы о общее решение для ее линейных плоских колебаний в однородном поле тяготения.

2. Точки подвеса двух математических маятников одинаковой массы m и одинаковой длины I находятся на одном уровне на расстоянии 1_0. Материальные точки маятников соединены пружиной жесткости $к$ длиной $1о$ в ненапряженном состоянии. Найти зависимость энергии каждого маятника от времени при условии $к/m < \partial/l$ (∂ -напряженность поля тяжести).

3. Найти свободные колебания (горизонтальные) системы двух частиц частиц с массами m, соединенных пружинками жесткости $к$, «i, $к$ между собой и свертикальными стенками. Длина пружин в ненапряженном состоянии равна IQ. В начальный момент времени одна из частиц имеет скорость v, скорость другой, а также отклонения обеих частиц от положения равновесия равны нулю.

4. Найти свободные колебания системы, рассмотренной в задаче No.A4, если в начальный момент времени одна из частиц отклонена из положения равновесия. Начальные скорости равны нулю.

5. Найти нормальные колебания системы, функция Лагранжа которой имеет вид:

$$L = -(\mathrm{mix}^2 + m_{,}f) - -(ж^2 + y^2) + pxy.$$

6. Два одинаковых груза массы т, связанных между собой и с неподвижными стенками пружинами жесткости $к$ каждая, совершают малые колебания по гладкой горизонтальной направляющей. Как изменится наименьшая частота главных колебаний системы, если один из грузов неподвижно закрепить? (эффект Рэлея).

7. Две одинаковые бусинки массы m каждая могут скользить по гладкому стержню АВ, расположенному вдоль оси OX. Третья бусинка массы $2m$ может скользить по гладкому стержню ОС перпендикулярному АВ. Горизонтальные бусинки соединены со стенками и с вертикальной бусинкой пружинами жесткости $к$. Система расположена в горизонтальной плоскости. В положении, когда пружины недеформированы, бусинки находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Найти малые колебания системы около устойчивого положения равновесия.

9. ДВИЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

9.1. Семинар 16. Кинематика и динамика, материальной точки относительно неинерциальных систем отсчета

Литература

1. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. М.: МГУ, 1991.-336 с.

2. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. М.: Физматлит, 2001.-262 с.

3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.

4. Пятницкий, Е.С Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М.Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; М.: Физматлит, 1996.-431 с.

5. Павленко, Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. -М.: Физматлит, 2003.-535 с.

Связь скоростей материальной точки относительно инерциальной системы отсчета *S* v и неинерциальной системы отсчета *S'* v' имеет вид:

$$v = V_0< + [w x r'] + v', \tag{75}$$

где *ш* угловая скорость системы *S'* относительно системы *S, ~Vo'* скорость начала отсчета системы *S'* относительно системы *S,* г' -радиус-вектор материальной точки относительно системы S".

Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета *S'* имеет вид:

$$m W = F + F^h + F^c, \tag{76}$$

$$F^h = -mW^h = -m (W_{№} + [J \text{ x } r'] + [ш \text{ x } [ш \text{ x } r']]), \tag{77}$$

$$F^c = - m W^c = -2m[ш \text{ x } v']. \tag{78}$$

Лагранжиан, соответствующий этому уравнению, равен

$$U = \frac{"\hat{}L}{2} + {}_{mv}'[w\ xг'] + \frac{\hat{}[шx\ rf}{£} - mWo'V' - U. \tag{79}$$

Задача

Записать лагранжиан свободной частицы во вращающейся системе отсчета. Найти закон движения точки.

Решение

Имея ввиду связь между скоростью точки в инерциальной системе отсчета и неинерциальной (вращающейся) системе отсчета v = v ' + [wxr'], получим искомый лагранжиан:

$$L \wedge r' + Mr'])^2$$

Уравнение Лагранжа равно:

f = *-2[ш* х г'] *-[их[шх* г']].

Пусть угловая скорость вращения направлена вдоль оси *OZ:* *ш* = (0,0,w). Тогда, проектируя векторное уравнение движения на оси декартовой системы координат, получим:

x' - *2wy'* - ш У = 0, *y'* + *2их'* - *и?у'* = 0, *$* = 0.

Для интегрирования первых двух уравнений введем комплексную переменную: *и* = *x'* + *iy'*. Для нее уравнение движения имеет вид:

й + *2гшй* — *ш*^{2}*и* = 0.

Это уравнение имеет следующее Решение *и* = *(А* + В<)е$^{-гш}$*. Пусть в инерциальной системе координат начальные условия имеют вид: г(0) = го, f (0) = 0. Тогда г'(0) = *-[w x* $г_0$] и *А* = *хо* + *гу*$_0$, *В* = 0. Следовательно, закон движения имеет вид:

x' = *XQ* cos *wt* + *yo* sin *cut,* *y*^{1} = — *XQ* sin *ui t* + *yo* cos *ait,*

В этом случае решение представляет собой, по существу, преобразование координат.

Задача

Найти решение задачи Кеплера в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью П.

Решение

Лагранжиан системы во вращающейся системе координат имеет вид:

Выберем сферические координаты и направим полярную ось по вектору П. Тогда лагранжиан примет вид:

$$L = \wedge(г^2 + mЧ^2 + г^2 \sin^2 вф^2) + mг^2 Щвm^2 в + \wedge r^2 Q^2 \sin^2 в + -.$$

Поскольку $ф$ циклическая координата, то проекция углового момента на ось OZ сохраняется:

$$M_z = mr^2 \sin^2 в(ф + П) = const.$$

Сохраняющаяся полная энергия имеет вид:

$$E = (г^2 + г^2 в^2 + г^2 \sin^2 вф^2) + \sim Y^2 Q^2 \sin^2 6 -^\circ = const.$$

Умножая уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} mг^2 в = mr^2 \sin в \cos в(ф + O)^2 = \frac{M?COS0}{mr^2 \sin^3 0} = \frac{M^2}{2mг}$$

на т Л , получим еще один интеграл движения:

3in²l

Подставляя $ф$, $в$ в интеграл энергии находим:

m \ 2mr' г /

Следовательно, решение задачи определяется формулами из семинара 4, после замены $E \to £ + M_z Cl$, $ф \to ф + Ш$.

Задача

Найти решение уравнений движения маятника Фуко в окрестности положения равновесия.

Решение

Для того чтобы получить лагранжиан маятника, необходимо в лагранжиане свободной частицы

$$L = — (x+[£1xг])^2+mдm = -mv^2-U, \quad U = -m\backslash[ftxr]--m[€lxr]^2-mgr$$

перейти к обобщенным координатам, обращающим уравнение голономных связей в тождество. Расположим начало координат в точке *O* на широте *ф* в северном полушарии Земли. Ось *OZ* направим вертикально вверх, ось *OX* - по меридиану к полюсу. Точка подвеса находится на расстоянии длины маятника *I* от поверхности Земли. Уравнение связи / = 0, / = $x^2+y^2+(z—l)^2—l^2$. Угловая скорость вращения Земли S1 = (O cos *ф,* O, *Q* sin *ф)*. Выберем в качестве обобщенных координат декартовы координаты x, *y* и разрешим • приближенно уравнение связи: $z = (x^2 + y^2)/21$ (с точностью до членов $x^2/1^2$, $y^2/1^2$)- С такой же точностью *[ft* x г]г = [г x г]П « *0,в\аф(xy - yx).* Пренебрегая вкладом центробежной энергии, получим

$$U = -\mathrm{fisin}0(\mathrm{xy} - yx) + \hat{} (x^2 + y^2).$$

Лагранжиан, описывающий движение маятника

$$L = \mathrm{y}\,(x^2 + y^2) + \Pi\sin ф\{xy - yx) - Щ\$-\{x^2 + y^2).$$

Уравнения движения Лагранжа

$$x — 2Г2 \sin фy + U{>}QX — 0, \mathrm{j}/ + 2\mathrm{fisin}0\mathrm{x} + u{>}ly = \mathrm{O},$$

u% = *∂/l.* Начальные условия: г(0) - (xo,0,0), v(0) = $(0,v_0,0)$. Вводя комплексную переменную *(* = x + *iy,* получим уравнение:

Начальные условия для комплексной координаты имеют вид: *((0)* = xo, ^(0) = *WQ*. Общее решение уравнения движения:

$$Ai_{i2} = fisin</>\pm y(fisin^{\wedge})^2 + wg « fisin0\pm w_o.$$

Из начальных условий находим $u_2,i = (x_0 \pm щ/щ)/2$. Переходя к действительным переменным, получим:

$$x = \frac{1}{2} (^{X\circ} \sim a\Gamma)^{cos}(^{a,\circ} + O \sin 0)t + (ж_0 + —) \cos(w_0 - ft \sin 0)i$$

$$y = \frac{1}{2} (^{a;}o-^{\wedge}-j\sin(wo + n\sin^{\wedge})t + f x_0 + —j \sin(w_o-ftsm0)£$$

Если «о=0, то маятник колеблется по закону:

$$x(t) — x_0 \cos(fi \sin ф£) \cos uat, y(t) — -x_0 \sin(ft \sin <j>t) \cos u>_0 t.$$

Плоскость качания вращается вокруг вертикали с угловой скоростью $Q \sin ф$.

Аудиторные задачи

1. Точка движется по окружности радиуса R с угловой скоростью Найти уравнение траектории точки в системе отсчета, которая поступательно движется со скоростью vo, лежащей в плоскости окружности (в начальный момент времени начала подвижной и неподвижной систем отсчета совпадают).

2. Найти связь между декартовыми координатами точки в системе S и системе S", повернутой относительно S на углы Эйлера *ф, в, ф.*

3. Точка подвеса математического маятника движется с постоянным ускорением а (лежащим в плоскости колебаний маятника) в горизонтальном направлении. Найти закон движения маятника.

4. Шарик движется в поле тяжести Земли по прямой, образующей угол a с вертикалью и вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси (проходящей через прямую). Найти величину скорости шарика как функцию положения.

5. Внутри гладкой прямой трубки, вращающейся вокруг горизонтальной оси (и перпендикулярной этой оси), движется шарик, прикрепленный к оси вращения с помощью пружины. Найти закон движения шарика относительно инерциальной системы отсчета.

6. Три точки одинаковой массы m жестко скреплены с прямым стержнем исчезающей массы и длины I: первая и третья на концах стержня, а вторая посередине. Все точки обладают одинаковым по величине электрическим зарядом: первая и третья - положительным, а вторая отрицательным. Эта « молекула» движется в неподвижной плоскости параллельной напряженности постоянного однородного электрического поля E. Найти уравнения движения «молекулы» в независимых координатах и реакции стержня.

Домашние задачи

1. **В** системе S закон движения материальной точки: $x = a\cos uit$, $y - z - 0$. Найти уравнение траектории в системе отсчета S'', вращающейся с угловой скоростью ui относительно S (начала обеих систем отсчета, а также плоскости XOY, $X'CYY$ совпадают).

2. Окружность радиуса a вращается с угловой скоростью $ш$ вокруг оси, проходящей через одну из ее точек и расположенную перпендикулярно ее плоскости. По окружности движется точка со скоростью $и$ относительно окружности. Найти величину скорости точки в лабораторной системе отчсета.

3. Горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью w. Найти закон движения точки в поле тяжести Земли в системе отсчета, связанной с плоскостью. Написать интегралы движения.

4. Окружность радиуса R вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью $и$. Из верхней точки окружности по ее гладкой хорде, составляющей угол $ф$ с осью вращения, движется материальная точка массы m (ее начальная скорость равна нулю). Найти

время движения точки.

5. Найти в квадратурах закон движения точки в поле тяжести Земли относительно системы отсчета, жестко связанной с Землей (в сферических координатах).

6. На экваторе на рельсах стоит пушка. Рельсы направлены с запада на восток, и пушка может двигаться по ним без трения. Пушка стреляет вертикально вверх. Какую скорость $\vec{v}_0$ будет иметь пушка после выстрела? Куда будет направлена эта скорость? Масса пушки M, масса снаряда *m,* длина ствола *l.* Считать, что снаряд движется в стволе с постоянным ускорением *a.*

10. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

10.1. Семинар 17. Уравнения движения твердого тела. Тензор инерции

Литература

1. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. - М.: МГУ, 1991.-336 с.

2. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. М.: Физматлит, 2001.-262 с.

3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика / А.П.Маркеев.- М.: Физматлит, 1990.-414 с.

4. Пятницкий, Е.С. Сборник задач по аналитической механике / Е.С.Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко; - М.: Физматлит, 1996.-431 с.

5. Павленко, Ю.Г. Задачи по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. -М.: Физматлит, 2003.-535 с.

6. Ольховский, И.И. Задачи по теоретической механике для физиков / И.И.Ольховский, Ю.Г. Павленко, Л.С. Кузьменков; М.: МГУ, 1977.- 420 с.

Для того, чтобы полностью охарактеризовать движение твердого тела относительно некоторой инерциальной системы отсчета *S,* достаточно знать закон движения системы S", жестко связанной с изучаемым твердым телом. Закон движения свободного твердого тела определяется шестью скалярными функциями: тремя проекциями радиуса-вектора *ro'(t),* задающими положение начала отсчета системы S", и тремя углами Эйлера *<f>(t), 9(t), ф(Ь),* задающими ориентацию *S'* относительно *S.*

Уравнениями движения свободного твердого тела являются законы изменения импульса P и кинетического момента M твердого тела

$$P = F^e, \quad M = L^e, \tag{80}$$

которые содержат в качестве неизвестных только функции гс, *ф, 0, Ф-*

Движение твердого тела с одной неподвижной точкой описывается динамическими уравнениями Эйлера:

$$Iiw_x> - w_{zl}Wy>(h - h) = £*, \tag{81}$$

$$/_2 oy - u_x>u>_z>(h -h) = C^e y>,$$

$$I_3 w_{z'} - w^w^г - J_2) = C\,.$$

Проекции угловой скорости вращения твердого тела на оси инерциальной системы отсчета 5 и неинерциальной системы отсчета *S*, жестко связанной с твердым телом определяются следующими выражениями (кинематические формулы Эйлера):

$$ш_x = Ocos<f> + ipsmesin<f>, \tag{82}$$

$$ш_y = в \sin ф — ф \sin в \cos ф,$$

$$u>_z = ф + ф \cos 9,$$

$$Wa? = ф \sin в \sin ф + в \cos ф, \tag{83}$$

$$Шу/ = фзтвсовф — ввтф,$$

$$U)_{z'} = фсовв + ф,$$

где *в,ф,ф*- углы Эйлера, *&в,ф,ф*- производные углов Эйлера по времени.

Задача

Две точки с массами mi, *mi* и зарядами ei, *e%* соединены стержнем исчезающей массы и длины *I.* Эта гантель движется в постоянном однородном электрическом поле, напряженности *E.* Начальные условия выбраны так, что движение молекулы происходит в неподвижной плоскости, параллельной напряженности поля. Найти уравнения движения молекулы <гантели> и реакции стержня на материальные точки как функции обобщенных координат и скорости.

Решение

Сориентируем инерциальную систему 5 так, чтобы ее ось *OX* была направлена вдоль напряженности электрического поля E, а плоскость *XOY* совпадала с плоскостью движения. Начало системы S", жестко связанной с молекулой, поместим в центр масс молекулы, ось *O X* направим по оси молекулы, а плоскость *X'O'Y'* совместим с плоскостью *XOY.*

Уравнения движения твердого тела имеют вид:

$$mr_m - F^e, \quad M' = L^e$$

Здесь r_m -радиус-вектор центра масс, а M -кинетический момент вращения молекулы относительно поступательно движущейся системы центра масс. Проектируя на координатные оси левую и правую части уравнения движения центра масс молекулы

$$(mi + m_2) f_m = ei E + e_2 E,$$

получим уравнения:

$$x_m = \frac{* \quad ^2}{mi + m_2} E, \quad y_m = 0.$$

Отсюда находим закон движения центра масс:

$$Xm = \frac{ei + e_2 \quad E_2}{УП\backslash + т_2 \; 2} ; 7Г^* + {}^{x}т0^* + {}^{x}"»0> \quad Уm = 2/т0^* + УmO-$$

Изменение ориентации молекулы определяется законом изменения кинетического момента вращения, равного

$$M = mifri \ x \ [ш \ x \ ri]] + m_2[r'_2 \ x \ [ш \ x \ г_2]] = ц(xy - yx)n_г,$$

где /и - приведенная масс двух точек, $x = I \cos ф, y = 1зmф, ф$- угол между осями O'X и *(УX'.* Последнее равенство можно записать в виде:

$$M = (il^2<j>n_z.$$

Момент внешних сил имеет вид:

$$L^e = fr'i \ x \ eiE] + Гг_2' \ x \ e_2E] = \frac{IE}{mi + m_2}(тиеr - m_2ei) \sin\hat{}n\hat{}.$$

Тогда из второго уравнения движения молекулы получим:

$$ф \, H\frac{E}{mym\hat{}l};(mie_2 - m_2ei) \sin 0 = 0.$$

Если начальная кинетическая энергия вращения достаточно мала, а $mie_2 > m_2ei$, то молекула будет совершать малые колебания около положения равновесия $ф^{еч} = 0$ (вектор г = r_2 — ri в положении равновесия молекулы направлен вдоль вектора E. Если же $m\backslash\&i < m_2ei$, то молекула будет колебаться около положения $ф^{щ} = 7Г$ (вектор г в положении равновесия направлен противоположно E). Если $mie_2 = гще\backslash$, то молекула будет равномерно вращаться с начальной угловой скоростью. Реакцию стержня Ri на точку 1 определим из уравнения ее двтжения:

$$miici = e\{E + \mathrm{Ri}.$$

Используем связь ускорений точки 1 в системах отсчета S , S':

$$\frac{61 + 62}{Ш1 + 7П2}\text{-}\mathbf{E} + \mathbf{fi}.$$

Следовательно, реакция стержня в точке 1 равна:

$$\pm t1 = \frac{}{ТПx + ГП2}\mathrm{Hi} + ТПxТ\text{-},.$$

Разлагая ускорение $г[$, которое равно — (m2/mi)r, по ортам цилиндрических координат, найдем

$$ГП\backslash + ГП2 \qquad ТП1 + \mathrm{T712}$$

Подставляя это ускорение в реакцию Ri и исключая ускорение $ф$, получим:

$$\mathrm{Ri} = (\mathrm{mi} + m,2)l \cdot E\cos ф + цф$$

Таким образом, реакция стержня связана не только с различием в действии внешнего поля на заряды 1, 2, но и с вращением тела относительно инерциальной системы отсчета.

Задача

Найти закон движения свободного симметрического волчка $h = h\ ф\ h$-

Решение

Момент внешних сил равен нулю $L^e = 0$, поэтому M = Mo = const. Направим его по оси OZ. Динамические уравнения Эйлера в этом случае имеют вид:

$$\frac{dwi}{at}г - \mathrm{H}\frac{I_3 - I}{I}ш_2ш3 = 0,$$

$$\frac{—}{at}\mathrm{H}\frac{}{I}LL>IU)_3 = 0,$$

Из последнего уравнения следует, что *ui3=^j_zl-covst.* Тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси *Z'.* Вводя обозначение *Q* = -*^j-wz = const,* перепишем первые два уравнения:

Умножим второе уравнение на i и сложим с первым уравнением:

—(UJI + iuj₂) — Q(iu>i — и>г) = *ъ£1(ш\ + iw₂).*

Решение этого уравнения имеет вид:

ш\ + iuji = Ae^lilt, uii = АсовШ, *u>₂ = Asintlt,*

где *A* = *\1ш% + шЪ* проекция угловой скорости вращения твердого тела *и* на плоскость, перпендикулярную оси симметрии. Проекция угловой скорости на плоскость *X'O'Y'* постоянна по модулю, но она вращается с угловой скоростью *Q* вокруг оси волчка. Проекция М на линию узлов равна нулю, поэтому:

M(— Mx'cosip — M^втф = Iw_xicosip — Iuiytsim/j = 19 = 0.

В последнем равенстве использовались кинематические формулы Эйлера. Таким образом, 0=const. Следовательно, угол наклона оси волчка не меняется, ось вочка прецессирует вокруг оси *OZ.* Покажем, что это так. Пусть ось *OX'* совпадает в данный момент времени с линией узлов. Кинетический момент вращения М направлен по оси *OZ'.* Поэтому *Mx>* = 0, *My/ = Мовтв, M_Z' = MQCOSO.* При *ф* — 0 имеем:

M_x> = 0 = Juv = *19,*

My' = 1ш_y1 = 1ф sin *9 = Mo* sin *9,*

M_Z' = hu_z> = 1з(ф cos *9 + ф) = Mo* cos *9.*

Следовательно: 0=0, *1ф = Mo, h(<i>cos9 + ф) — Mo* cos *в.* В результате получаем, что *9 = const, ф* = А4оА=const. *ф* определяет вращение оси *OZ'* вокруг оси *OZ,* то есть прецессию оси симметричного волчка, uv — *Mo* cos *9/h* -постоянная угловая скорость собственного вращения волчка вокруг оси *OZ'*

Чтобы найти изменение углов *ф, ф* со временем, запишем кинетическую энергию волчка:

$$T = \backslash h^{*}l + \backslash l(.<4, + <J_{y},) = \pm hJt, + \hat{}1\{в^{2} + ф^{2}\sin^{2} в) = const.$$

Так как $в = const$ и $ш_{2}> - const,$ то $0 = ф_{0} = \text{consi}$. Из выражения для uv ^*фсовв* + *ф* следует, что *ф* = ^о^const. Таким образом,

$$9 = в_{0} = const, ф(\{) = ф<\$ + ф_{0}, ф\{£) = \text{-00*} + Фо\text{-}$$

Аудиторные задачи

1. Плотность неоднородного тонкого стержня веса mg и длины *I* линейно зависит от расстояния до одного из его концов. Более легким концом стержень опирается на гладкий выступ высоты *h,* а более тяжелым на гладкую горизонтальную опору, причем нижний конец стержня удерживается нитью. Определить реакции опор и нити.

2. Стержень OA, вращающийся вокруг горизонтальной оси, соединен шарниром со стержнем AC. Конец стержня C связан шарниром с ползуном, движущимся по горизонтальным направляющим. К стержню OA приложен постоянный момент силы N, к ползуну приложена постоянная сила F. Массы каждого стержня то, длина *a,* масса ползуна *M.* Найти кинетическую и потенциальную энергию системы.

3. Симметричное заряженное тело с покоящимся центром масс и одинаковыми удельными зарядами его точек вращается в однородном постоянном магнитном поле напряженности H. Определить закон движения волчка, если в начальный момент времени угловая скорость вращения вокруг оси симметрии тела велика по сравнению с частотой Лармора.

4. Однородный стержень AB движется в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку A. Найти закон движения стержня и силы реакции, действующие со стороны оси.

5. В момент метания диска его плоскость занимает горизонтальное положение, а центр диска находится на высоте h над поверхностью Земли. Центру диска сообщена горизонтальная скорость Vo, а сам диск закручен с угловой скоростью шо, составляющей угол *ж*/4 с его плоскостью. Векторы vo и шо лежат в неподвижной вертикальной плоскости OYZ. Считая диск тонкой однородной пластинкой, найти его движение. Влиянием воздуха пренебречь.

Домашние задачи

1. Однородный стержень массы m длины I укреплен так, что может вращаться вокруг вертикальной и горизонтальной осей, проходящих через середину стержня. Написать уравнения Лагранжа, найти их решение и частоту колебаний стержня вокруг горизонтальной оси.

2. Взяв в качестве обобщенных координат твердого тела углы Эйлера *ф, в, ф,* показать, что обобщенные импульсы *рф, р$, рф* являются соответственно проекциями кинетического момента на ось Z, ось узлов и ось Z'.

3. Однородный стержень массы m длины I одним концом скользит по гладкой горизонтальной плоскости. Найти Лагранжиан стержня и интегралы движения.

4. Наклонная плоскость (клин) находится на горизонтальной гладкой поверхности. На наклонную плоскость помещают шар, который начинает двигаться без проскальзывания. Определить ускорение клина.

5. Гирокомпас представляет собой гироскоп с осью ротора, закрепленной на рамке, корорая может вращаться вокруг вертикальной оси. Гирокомпас установлен на широте Л, ось ротора направлена на север. Величина угловой скорости вращения Земли равна Q. Исследовать линейные колебания оси гирокомпаса в окрестности положения устойчивого равновесия.

11. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

11.1. Семинар 18. Движение идеальной и вязкой жидкости

Литература

1. Ольховский, И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И.Ольховский.- М.: МГУ, 1978.-574 с.

2. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский.- М.: Наука, 1987.-840 с.

3. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц; М.: Наука, 1986.-736 с.

4. Векштейн, Г.Е. Физика сплошных сред в задачах / Г.Е. Векштейн.-М.: РХД, 2002.-207 с.

Движение идеальной жидкости описывается уравнением сохранения массы жидкости (уравнение непрерывности):

^ + *div(pv) = 0,* (84)

уравнением движения (уравнение Эйлера)

g + (vV)v = --*Vp* (85)

и условием адиабатичности

f - 1 + TV.-O, (86)

где *p(r,t), p(r,t),* v(r, *i)* - плотность, давление и скорость жидкости, а *s(p,p)* энтропия единицы массы. В случае стационарного течения получаем уравнение Бернулли

W (д) = 0, (87)

т.е. постоянство величины (г»^{2}/2 + го) вдоль линий тока (го тепловая функция (энтальпия) единицы массы жидкости). При движении идеальной жидкости сохраняется циркуляция скорости вдоль любого замкнутого жидкого контура (теорема Кельвина):

j&vd\ = O. **(88)**

Уравнение движения эквивалентно закону сохранения импульса жидкости и может быть записано в дивергентном виде

где *lUk* = *pdik* + *pviUk*- тензор плотности потока импульса идеальной жидкости. Аналогичным образом закон сохранения энергии примет вид

где q = pv(u^2/2 + *w)* вектор плотности потока энергии, б - внутренняя энергия единицы массы жидкости.

Тензор плотности потока импульса П^ в вязкой жидкости можно представить в следующем виде:

$$Л^* = pdik + pviV_k + щ_к, \tag{91}$$

где дополнительный член 7Г^ определяет вязкий перенос импульса, связанный с неоднородностью скорости течения жидкости. Если характерный пространственный масштаб *L* изменения скорости течения жидкости или газа много больше длины свободного пробега молекул *I,* то в первом приближении по малому параметру *1/L* тензор *Щк* зависит только от первых производных вектора скорости по координатам. Тогда в изотропной среде наиболее общим видом для *Щк* является следующий:

Ък *fdvi* dv_k 2 *dvi* *ды* .

где *г],* £ коэффициенты вязкости, причем *г)* > О, £ > 0. Тогда уравнение движения вязкой жидкости имеет вид:

rav ^ + (W) v Vp + 7?ДУ + Ю о Vdiuv. (93)

В частном случае несжимаемой жидкости, когда *divv* — 0, получаем уравнение Навье-Стокса:

$$\frac{dv}{ot} + (vV)v = -\frac{1}{p}Vp = uAv, \tag{94}$$

где *v* = *ri/rho* - кинематическая вязкость среды.

Вывести уравнение эволюции вихря скорости *П = rotv* в идеальной жидкости. Показать, что завихренность остается «вмороженной» в жидкость при ее течении.

Решение

Уравнение Эйлера можно записать в виде

_· + (vV)v = --£—v«,

или

£-frx«,-v(.+ £)-

Взяв ротор от обеих частей этого равенства, получаем, что

— = *rot[v X ft].*

Так как *divQ* — О, перепишем это уравнение в виде:

= **(S7V)v - (vV)fi** - *ftdivv.*

Согласно уравнению непрерывности

dtvv = - -10/э— - 1.-*(vV)p,* (под чертой: *pot*, *p*)

так что последнее равенство можно преобразовать к виду:

(!—)?-i(?)-(H-

Рассмотрим теперь некоторый малый элемент длины *61,* который перемещается в пространстве вместе с образующими его частицами среды. Если v есть скорость среды на одном его конце, то скорость на другом есть v + *(61* • V)v, поэтому изменение *61* со временем описывается уравнением

*d6*_ = (^1.V)v,

которое совпадает с предыдущим уравнением для вектора *П/р.* Поэтому, если эти два вектора имеют одинаковое направление в начальный момент времени, то они будут оставаться параллельными друг другу, а отношение их длин также не будет изменяться со временем. Другими словами, если две близкие частицы среды находятся на одной линии векторного поля П в некоторый момент времени, они будут оставаться на одной и той же линии завихренности течения f2. Переходя теперь от двух близких частиц к частицам, находящимся на конечном расстоянии друг от друга, можно заключить, что каждая линия векторного поля *П* перемещается вместе со средой, т.е. вектор *il* «вморожен> в среду. Теперь нетрудно увидеть, что теорема Кельвина о сохранении циркуляции скорости в идеальной жидкости есть одно из следствий «вмороженности» вектора *C1.* Действительно, любой заданный «жидкий» контур при своем движении не пересекает линий ротора скорости, следовательно поток вектора *П* через поверхность, образуемую этим контуром, не меняется. Но, согласно теореме Стокса, поток вектора ft равен циркуляции вектора скорости вдоль контура.

Задача

Вычислить объемную мощность диссипации энергии в несжимаемой вязкой жидкости.

Решение

Так как в несжимаемой жидкости не производится работа сжатия (или разряжения) отдельных элементов среды, внутренняя энергия жидкости остается постоянной. Поэтому диссипация энергии полностью определяется изменением кинетической энергии жидкости. Для вычисления последней удобно записать уравнение Навье-Стокса в тензорных обозначениях:

$$\frac{дщ}{dt} \_ \_ \frac{dv£}{дхк} \_ \frac{\backslash\&P\_}{pdxi} \_ \frac{l\&Kik}{рдхк^b} \quad * \quad \_ \_ \left(\frac{дщ\_}{\backslash дхк} \quad \frac{ЭУЛ}{dxij} \right.$$

Тогда изменение кинетической энергии жидкости внутри некоторого объема *V* принимает вид:

$$\overset{*}{E}™ = \overset{Г}{J} y \hat{} \overset{dvi}{w} m \hat{} - \overset{Г}{J_v}{}^{Vi} \Big(\; ' \; \hat{} \overset{dvi}{-\partial x} - \overset{\partial p}{Г} - \overset{дщ}{\partial x} - \overset{Лйл/}{J}{}^{dV} -$$

Так как

а

$$, \quad dvi \quad 1 \quad dp. \quad 3 \quad f \quad /V \quad p \quad V$$

(здесь использовано условие divv = dvk/dx_k = 0), то изменение кинетической энергии можно записать в виде:

$$\text{\^{}юш} = / dS_k \backslash pv_k\, I — + - J + Vi\text{-}Kik + / itikg\text{-}\text{\^{}}\text{-}dV\text{-}$$

Интеграл по поверхности описывает изменение энергии жидкости внутри выделенного объема, связанное с потоком энергии через его поверхность. Поэтому искомая диссипация энергии определяется объемным интегралом, который можно переписать, используя симметрию тензора $щ_к$:

$$\Gamma_{J_v} я\text{-}._{lk} \frac{дщ}{dx_k} (jy = \frac{1}{2J_V} \Gamma_{гкж}. \backslash \left(\frac{dvi}{\partial x_к} \frac{дщ}{dxi} \right) \backslash л \backslash' = \frac{Ч}{2j_v} \Gamma \backslash \left(\frac{дщ}{dx_k} \frac{дщ}{\partial x_{\iota}} \right) \backslash dV.$$

Следовательно, мощность вязкой диссипации энергии в единице объема жидкости равна

$$n_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{дщ}{\backslash \partial x_к} \mid \text{\^{}}*У\, \frac{}{дц} \right),$$

Аудиторные задачи

1. Записать уравнение одномерной газодинамики идеальной (без диссипации) среды в лагранжевых координатах *x(xo,t), p(xo,t)* и *p(xo,t),* где *xo* - начальное положение элемента (в одномерном случае).

2. В однородной среде с плотностью ро и равным нулю давлением (пыль) в некоторый момент времени создается неоднородное в пространстве поле скорости *v{x) = VQSOX-KX/1.* Найти возникающее в результате движения распределение плотности пыли *p(x,t).*

3. В холодной плазме с бесконечно тяжелыми ионами и электронами, имеющими массу *m,* заряд (-е) и плотность По, в некоторый момент времени создается поле скоростей электронов *v(x) = vosimrx/l.* Определить критическое значение амплитуды скорости *vo,* при

превышении которого происходит «опрокидывание» электронного потока, то есть обращение в нуль производной $\partial x/\partial x_0$.

4. Плоское дно бесконечно глубокой вязкой жидкости приводится в движение со скоростью *v* = Docoswt. Найти среднюю мощность, необходимую для поддержания этих колебаний. Плотность жидкости *р,* кинематическая вязкость *и*.

5. Определить течение жидкости по трубе с колцевым сечением (внутренний и внешний радиусы трубы *R\, Ri)*.

Домашние задачи

1. Определить форму поверхности несжимаемой жидкости в поле тяжести в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.

2. Шар радиуса *R* движется в несжимаемой идеальной жидкости. Определить потенциальное течение жидкости вокруг шара.

3. Описать разлет покоящегося в начальный момент равномерно заряженного шарового скопления пыли.

4. Найти условие отсутствия опрокидывания в рассмотренном в предыдущей задаче шаровом облаке заряженной пыли, если в начальный момент распределение плотности в нем неоднородно и равно *ро(го)*.

5. Плоское дно бесконечно глубокой вязкой несжимаемой жидкости в некоторый момент *(t* = 0) мгновенно начинает двигаться в собственной плоскости с постоянной скоростью *щ*. Определить движение жидкости и силу сопротивления, испытываемую единицей площади дна. Плотность жидкости *р,* кинематическая вязкость *v*.

11.2. Семинар 19. Звуковые и ударные волны

Литература

1. Ольховский, И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И.Ольховский.- М.: МГУ, 1978.-574 с.

2. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский.- М.: Наука, 1987.-840 с.

3. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц; М.: Наука, 1986.-736 с.

4. Векштейн, Г.Е. Физика сплошных сред в задачах / Г.Е. Векштейн.-М.: РХД, 2002.-207 с.

В линейном (акустическом) приближении распространение звуковых волн в среде описывается волновым уравнением для потенциала скорости **0(v = -V0)**

^-<*$Аф = 0,* (95)

где скорость звука со определяется адиабатической сжимаемостью вещества

<-(©. (96)

Для бегущей волны, распространяющейся в направлении, задаваемом единичным вектором п, зависимость *ф* от координат и времени принимает вид:

^(г,*) = /(гп-сь<). (97)

В этом случае возмущения плотности и давления в среде *(5р,6р)* однозначно связаны со скоростью v = *vn*

5р = —, *5р = pvco, v* = -/'. (98)
со

При этом плотность энергии *Е,* поток энергии q и тензор плотности потока импульса П^, связанные с распространенем в среде такой волны, равны

$E = pv^2,$ q = со£n, $\Pi_{{к} = Етцп_к.$ (99)

Пусть стационарный однородный поток газа движется со скоростью *v* относительно неподвижной системы отсчета *S.* Если скорость г> превышает скорость звука в газе (относительно самого газа), то поток называется сверхзвуковым, если же *v* меньше со, то поток называется дозвуковым. Числом Маха называется отношение *M ~ V/CQ*.

Важной особенностью сверхзвукового потока является возможность возникновения ударной волны. Так называется волна значительного уплотнения среды, связанного с резким повышением давления и температуры. При этом практически скачкообразное изменение параметров происходит в очень узком слое среды и сопровождается потоком вещества через этот слой.

Задача

Определить движение, возникающее в идеальном (в смысле отсутствия диссипации) сжимаемом газе, если в начальный момент в нем заданы одномерные рапределения скорости $v_x(x) = u(x)$ и давления *p(x) =po + a(x)*. Считать, что *a(x), u(x)* обращаются в нуль при *x —>* ±оо и достаточно малы, так что применимо акустическое приближение.

Решение

Очевидно, что и дальнейшее движение газа будет одномерным, следовательно, линеаризованные уравнения непрерывности и движения запишутся в виде:

дёр *dv* _ *dv* _ *дбр*
~dt+P**dx**== ' P**~di~~~dx~'**

где *ёр* и *бр* - возмущения плотности и давления, связанные условием постоянства энтропии, $ёр = (др/др)_3 ёр = c\%ёр$, *со* -скорсть звука. Тогда для скорости газа *v(x, t)* получается волновое уравнение

*8*²*v* ₂*&v*
at² " °°*дх** ~ °-

Для нахождения его общего решения введем независимые переменные £ = *x — Cot, m) — x + Cot*. Нетрудно проверить, что в этих переменных волновое уравнение имеет вид: *d*²*v/d£dr}* = 0. Поэтому его общее решение имеет вид:

v(x, t) = f{x - cot) + g(x + cot).

Вид функций *f,g* определяется начальными условиями при t = О, когда *v(x,Q) = u(x),* а

$$dv. \qquad 1д6p(x,0) \qquad Ida$$
$$dt \qquad p \quad дx \qquad pdx'$$

Отсюда следует, что *f(x) + g(x) = u{x),*

$$Idg \qquad df\backslash \qquad Ida$$
$$\backslash dx \qquad dxj \qquad pdx'$$

Так как при *x* —> ±00 *v(x, t)* и *a(x)* обращаются в нуль, то *g(x) - f(x)* — -*a(x)/cop* и окончательно получаем:

^{v}(^{x}> *) = оt^{u}(^{x} ~ °о*) + ^{u}(^{x} + со*)] + о — К * - со*) - *a{x + cot)].*

Задача

Ударная волна с числом Маха *M* распространяется в идеальном газе, имеющем давление *p*\ и плотность *p*\. Найти давление и плотность газа за ударной волной, считая показатель адиабаты газа 7 постоянным.

Решение

Состояние газа до и после ударной волны (будем обозначать их индексами 1 и 2 соответственно) связаны законами сохранения: непрерывностью потоков вещества, импульса и энергии через границу разрыва. Это дает соотношения:

P\V = P2^2,

Pi + *Piv* = P2 + P2^2>
v^{2} *v*

Для идеального газа с постоянным 7 тепловая функция *w* — 7P/(7 ⁻ 1)P- Учитывая, что по определению числа Маха скорость ударной волны в невозмущенном газе *vi* = *Mc* (ci = (7Pi/Pi)$^{1/2}$) -скорость звука), и введя безразмерные неизвестные *x* = pr/pi и *y* = P2/P1, получим следующие уравнения:

$$1 {}_{+}{}_{1}M^{2} = y {}_{+}{}_{1}\frac{M^2}{—}, \qquad \frac{1}{—} + \frac{M^2}{—} = \frac{1}{—} \ \frac{y}{-} + \frac{M^2}{—},.$$

Исключая тривиальное решение, находим отсюда:

$$\frac{P2}{Pi} \_ \frac{(7+1)M^2}{2+(7-1)M^2}{}'$$

$$\frac{P2}{Pi} \_ \frac{27M^2 -7 + 1}{7 + 1}$$

Как видно из этой системы в пределе слабых ударных волн, когда (M — 1) < 1, *$p_2/pг$* « 1 + 4(M - 1)/($_7$ + 1), *ft/pi* « 1 + 4_7(M - 1)/($_7$ + 1). Отсюда следует, что для слабых ударных волн *бр/р* и *jSp/p,* то есть закон изменения этих величин близок к адиабатическому, а возрастание энтропии является величиной более высокого порядка малости по малому параметру (M — 1). В пределе сильных ударных волн, когда число Маха *M* » 1, получим:

$$\frac{P2}{Pi} и \frac{7+1}{7-1}{}' \quad \frac{£2}{Pi} \wedge \frac{27}{7+1} д/2$$

Так что в сильной ударной волне степень сжатия газа остается конечной, а рост давления происходит за счет сильного нагрева.

Аудиторные задачи

1. Монохроматическая звуковая волна, распространяющаяся в жидкости с плотностью *p* и скоростью звука *c*, отражается по нормали от границы раздела этой жидкости с другой жидкостью, имеющей плотность *pi* и скорость звука *сч,.* Найти среднюю (по времени) силу давления на единицу площади границы раздела жидкостей, если средняя плотность потока энергии в падающей звуковой волне равна *q*.

2. В прямой трубе длины *L,* закрытой с обоих концов и установленной вертикально в поле тяжести *д,* находится идеальный газ с температурой Т. Молекулярная масса газа *р,* показатель адиабаты *j.* Найти частоты собственных колебаний в отсутствии диссипации.

3. Найти декремент затухания звуковых волн в идеальном газе, обусловленного теплопроводностью газа. Молекулярная масса газа равна д, показатель адиабаты *у,* коэффициент теплопроводности *к.*

4. В идеальном газе с давлением *ро,* плотностью *ро* и показателем адиабаты *у* создано возмущение в виде неподвижного в начальный момент изменения плотности *6р(х),* равного

6р = p\smirx/l, *\x* < *L;* O, *\x* > *L.*

Определить момент возникновения разрыва (ударной волны) в газе, считая возмущение слабым *(pi* <С *ро)*-

5. Определить собственные частоты звуковых колебаний жидкости в сосуде, имеющем форму параллелепипеда.

Домашние задачи

1. Найти коэффициент затухания плоской звуковой волны, распространяющейся в вязкой жидкости в положительном направлении оси *X.*

2. Оценить декремент радиационного затухания малых радиальных колебаний пузырька газа радиусом *R* (показатель адиабаты газа 7); находящегося в идеальной жидкости с давлением *р* и плотностью *р.*

3. Определить полную интенсивность излучения звука шаром, совершающем поступательные малые (гармонические) колебания с частотой *ш,* причем длина волны сравнима по величине с радиусом шара *R.*

4. Сильная ударная волна с числом Маха *MQ* » 1 отражается от плоской абсолютно жесткой стенки. Определить число Маха Mi, отраженной ударной волны.

5. В начальный момент времени газ внутри сферического объема (радиуса *а)* сжат так, что *р'* = *const* = Д; вне этого объема *р'* = 0. Начальная скорость равна нулю во всем пространстве. Определить последующее движение газа.

Литература

1. Ольховский, И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И.Ольховский.- М.: МГУ, 1978.-574 с.

2. Ландау, Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц; М.: Наука, 1986.-246 с.

3. Векштейн, Г.Е. Физика сплошных сред в задачах / Г.Е. Векштейн.-М.: РХД, 2002.-207 с.

Малые деформации твердого тела описываются тензором деформаций

$$\hat{} = \mathbf{2fe}^{1\ f\,дщ} + \wedge^{duk\backslash} \mathrm{J}\,' \qquad \mathbf{(100)}$$

где и вектор смещения точки тела. Возникающие при деформации внутренние силы характеризуются тензором напряжений сг^, так что сила, действующая на некоторый объем

$$F_t = I(TikdSk, \qquad (101)$$

где вектор dS элемента площади направлен по нормали, внешней по отношению к охватываемому поверхностью объему. При этом объемная плотность внутренних сил

так что

$$^{v}i = [fidV. \qquad \mathbf{(103)}$$

Изотропная упругая сила характеризуется двумя упругими коэффициентами. Это могут быть модуль всестороннего сжатия K и модуль сдвига $ц$ $(K > 0,\ ц > 0)$, либо модуль растяжения (модуль Юнга) E и коэффициент Пуассона a, связанные с K и $ц$ такими соотношениями:

$$_{E} \quad ^{Ш}\!\!\gg \quad j \quad \underline{(^{3\,У}\,-\,^{2\,"})} \qquad (104)$$

(отсюда следует, что $E > 0$, а $-1 < a < 1/2$, но для всех реальных сред $a > 0$). В случае малых деформаций тензоры напряжений и деформаций пропорциональны друг другу (закон Гука). В изотропной среде эта связь выглядит так:

$$a_{ik} = KuuSik + 2fi(uik - -uuSik), \tag{105}$$

$$Щк = 9K^{ailSik} + 2\sim^{\wedge aik} \sim ч^{a11}\wedge' \tag{106}$$

или в терминах E и a:

$$<?ik = \mathrm{r}\frac{E}{1+a}(Щк + \frac{a}{l-2a}x\text{-}mSik), \tag{107}$$

$$Щк = \text{-}\hat{}[(1+a)a_{ik} - aaudik]. \tag{108}$$

Объемная плотность упругой энергии деформированного тела

$$F = \hat{}a_{ih}Uik, \tag{109}$$

и ее можно представить в виде:

$$F = ц\{щ_{к} - \frac{1}{}\mathrm{gtuAfc})^{2} + \mathrm{y}\frac{K}{}\text{Ы}^{2}, \tag{110}$$

$$\mathrm{F} - \frac{*}{2(1+,}\hat{}(^{4+}\mathrm{T}\hat{}4 \tag{111}$$

Уравнение равновесия деформированного тела можно записать в виде:

$$\mathrm{g} + \mathrm{P}* = 0, \tag{112}$$

где р -плотность, а g удельная плотность сторонних (не упругих) сил. Условие равновесия в терминах вектора смещения и имеет вид:

$$\mathrm{Au} = rh^{\wedge vdivu=} \text{-}^{p} * \wedge Чг\wedge\text{-} \tag{113}$$

Задача

Кубик из упругого материала с ребром I помещен в абсолютно жесткую полость. На его свободную грань действует давление p. Определить деформацию кубика.

Решение

Пусть давление p действует по оси Z. Вектор смещения и имеет в данном случае только одну отличную от нуля компоненту u_z, зависящую только от z: $u_z(z) = u(z)$. Соответственно этому в тензоре деформаций *Щк* единственная ненулевая компонента есть u_{zz} — $du(z)/dz$. Тогда их закона Гука для тензора напряжений «т^ получим:

$$a_{xx} \sim a_{yy} \sim \frac{Ea}{(l + o)(l-2a)} U_{zz} > \qquad a_{zz} \sim \frac{E\{\backslash - a)}{(l + a)(l-2a)} U_{zz} -$$

Уравнение равновесия *datk/dxk* — 0 означает в данном случае, что u_{zz} = *const.* Величина этой однородной деформации определяется из граничного условия на грани $z = I$, $<J_{zz}\backslash_z=i$ = —p. Тогда из предыдущих соотношений следует:

$$\underline{p(1+<г)(1-2(г)}$$

Задача

В абсолютно жесткий цилиндрический канал радиусом a вставлена пробка длиной L, так что на ее боковую поверхность действует давление p. Какую минимальную силу $F_m i_n$ необходимо приложить к торцу пробки для ее проталкивания по каналу, если коэффициент трения боковой поверхности пробки о канал равен $к$, причем fc< 1. Упругие константы материала пробки E и a заданы.

Решение

Нетривиальность задачи связана с тем, что материал пробки имеет отличный от нуля (и положительный) коэффициент Пуассона a. Если a = 0, то при проталкивании пробки она не стремится расшириться, так что давление пробки на боковую поверхность канала остается равным p. Поэтому в этом случае необходимая сила $F_m j_„$ = *2-каЬрк.* При сг > 0 продольные напряжения влияют на радиальные, что приводит к существенному увеличению $F_m i_„$ даже при $к$ -С 1.

Запишем условие равновесия пробки в цилиндрической системе координат. Для этого выделим объем пробки высоты dz, с площадью основания *rdddr.* Суммируя силы, действующие на все участки поверхности этого объема, получим следующие условия равновесия вдоль *гиг* (равновесие по *ф* выполняется в данном случае тождественно из-за аксиальной симметрии):

$$\underset{г\ or}{-«-}(rOVr) - \underset{T}{-221} + -\frac{\hat{}}{OZ} = O,$$

$$\frac{!JL(\quad)}{гдг} \quad \frac{®^{\alpha z}}{dz} = 0$$

В отсутствии продольной силы *F* отличны от нуля только компоненты 0>г и сг^ тензора напряжений, причем $a_{гг}$ = *аффф* = *—р* (первое равенство следует из радиального равновесия, а второе из граничного условия на боковой поверхности). При этом пробка однородно деформирована, так что, как это следует из закона Гука, и^ = *Щф = —р(1 — сг)/Е,* а u_{zz} = *2pa/E.* При проталкивании появляются также компоненты тензора напряжений a_{zz} и $a_{гm}$. Довольно очевидно (впрочем, в этом можно убедиться и непосредственной проверкой полученного ниже решения), что при *к* -С 1 величина a_{zr} будет мала по сравнению с остальными компонентами тензора напряжений. Поэтому в уравнении радиального равновесия можно пренебречь вкладом a_{zr}, так что как и раньше $a_{гг}$ = *схфф* (но теперь они уже зависят от *z).* Так как полость абсолютно жесткая, то радиальная деформация пробки не меняется: u_{rr} — — р(1 — *о)Е.* Но по закону Гука

$$Urr = p[(1 + o)a_{гm} - <y\{p_{T}г + Oфф)\} = p[(1 - cг)a_{„} - aa_{zz}].$$

Отсюда получаем связь между a_{mm} и a_{ZZi} a_{rr} — *—р* + crcr$_{2Z}$/(1 — *а).* Интегрируя теперь по г уравнение продольного равновесия, получим, что 0'zr = *—%da$_{zz}$/dz* (постоянная интегрирования определяется из условия ограниченности a_{zr} при г = 0). Используя теперь граничное условие *&zr(*^{a}*) — к(т*$_{гг}$ и выражая $a_{гг}$ через a_{zz} имеем

$$\frac{ada_{z}}{2\quad dz} =^{k}\{-p+rh^{\circ}**)$$

Решение этого уравнения с нужным граничным условием $cr_{zz}(0) = —F/тга^{2}$ следующее:

$$p(1\text{-}a) \qquad 1 \qquad \frac{E}{—m;e^{-}}$$

Рассмотрим теперь, как меняется o_{zz} вдоль пробки в зависимости от приложенной к ее торцу силы *F.* При не слишком больших значениях *F* абсолютная величина a_{zz} монотонно убывает внутри пробки от значения *F/жа* при z = 0 и обращается в нуль в некоторой точке при z = zo < *L* (при z > *zo* уравнение для a_{zz} уже не применимо, и здесь нужно считать *&zz* = 0). В этом случае пробка еще держит нагрузку. Критический момент наступает, когда го = *L.* При еще большей силы равновесия уже не будет и пробка придет в движение. Из этого условия, используя последнее соотношение для a_{zz}, получим:

$$„ \quad pna^2(1 - a) \quad r \quad \underline{2»*^.} \quad 1$$
$$F_{min} = -\overline{\qquad\qquad\qquad} e = P = 5T - 1 \quad .$$
$$a \qquad L \qquad J$$

Отсюда видно, что в случае длинной пробки *(L » a)* необходимая для ее проталкивания сила становится экспоненциально большой даже при *к* <С 1. Причиной является как раз отличие от нуля коэффициента Пуассона *а.* Если же *а* —> 0 то из последнего выражения получаем простой результат: F_m*i„(а —»* 0) = *2ттаЬрк.*

Аудиторные задачи

1. Определить деформацию длинного стержня (длины *I),* стоящего вертикально в поле тяжести.

2. Определить деформацию полой цилиндрической трубы (наружный и внутренний радиусы *Ri* и *Ri),* внутри которой действует давление *p.* Давление снаружи отсутствует.

3. В недеформированном состоянии тонкий стержень имеет поперечное сечение в форме прямоугольника с размерами *а* и *Ь.* Как изменится форма его поперечного сечения, если стержень изогнут в плоскости *(x, z)* с радиусом кривизны *R.*

4. Один конец тонкого круглого стержня длиной *I* и радиусом о (/ » а) заделан, а на другом помещен груз весом *р.* Какой вес p_{max} выдержит стержень, если его прочность на разрыв *(Тщ, = aE,* где *E*- модуль Юнга материала стержня, а *а* - численный коэффициент, причем *а* < *a/1* < 1.

Вес стержня пренебрежимо мал.

5. Определить частоты продольных собственных колебаний стержня длины *I,* один из концов которого закреплен, а второй свободен.

Домашние задачи

1. Определить деформацию полого шара (наружный и внутренний радиусы Дг и *Ri),* внутри которого действует давление *px* давление снаружи p2-

2. Определить деформацию цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси.

3. Упругий цилиндр радиуса *R* разрезали по плоскости, проходящей через его ось и образующую. Затем разрез разжали на угол *a (a* <C 27г), в образующуюся полость вставили клин из такого же, но ненапряженного материала и отпустили (модель поворотной дислокации). Найти поле напряжений в поворотной дислокации и ее энергию (на единицу длины).

4. Определить критическую сжимающую силу, при которой возникает изгибная неустойчивость тонкого стержня (задача Эйлера).

5. Определить частоты радиальных собственных колебаний упругого шара радиуса *R.*

12. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков, Изд. МГУ, М., 1978.

2. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. Изд. МГУ, М., 1991.

3. Маркеев А.П. Теоретическая механика, Наука, М., 1990.

4. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике, Физматлит, М., 2001.

5. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики, Бином. Лаборатория знаний, М., 2004.

6. Павленко Ю.Г. Задачи по теоретической механике. Изд. МГУ, М., 1988.

7. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики, Физматлит, М., 1997.

8. Зоммерфельд А. Механика, Издатинлит, М., 1947.

9. Ольховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. Изд. МГУ, М., 1977.

10. Коткин ГЛ., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Наука, М., 1977.

11. Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике, Физматлит, М., 1996.

12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, Наука, М., 1988.

13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, Наука, М., 1986.

14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа, Наука, М., 1987.

15. Гольдстейн Г. Классическая механика, Наука, М., 1975.

16. Медведев Б.В. Начала теоретической физики, Наука, М., 1977.

17. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания. Волны. Структуры. Физматлит, М., 2001.

18. Полак Л.С. Вариационные принципы механики, Физматлит, М., 1960.

19. Уиттекер Э. Аналитическая динамика, Изд. РХД, Москва-Ижевск, 1999.

20. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, т.7 Физика сплошных сред, Мир, М., 1977.

21. Либерман М., Лихтенберг А. Регулярная и стохастическая динамика, Мир, М., 1984.

22. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Наука, М., 1977.

23. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику, Наука, М., 1988.

24. Мун Ф. Хаотические колебания, Мир, М., 1990.

25. Айзерман М.А. Классическая механика, Наука, М., 2006.

26. Физическая энциклопедия, тт.1-5, Советская энциклопедия, М., 1988.

27. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику, Изд. РХД, Москва-Ижевск, 2004.

28. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики, Изд. МГУ, М., 1992.

29. Вейнберг С. Гравитация и космология, Изд. Мир, М., 1975.

30. Павленко Ю.Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и в квантовой механике, Изд. МГУ, М., 1985.

31. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия, Изд. Наука, М., 1979.

32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Изд. МГУ, М., 1999.

33. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация, тт.1-3, Изд. Мир, М., 1977.

34. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория упругости, Изд. Наука, М., 1987.

35. Векштейн Г.Е., Физика сплошных сред в задачах, Изд. РХД, Москва, 2002.

36. Кронин Дж., Гринберг Д., Телегди В., Теоретическая физика. Сборник задач с решениями, Изд. URSS, Москва, 2005.

13. ПРИЛОЖЕНИЯ

13.1. Справочные данные

Гравитационная постоянная G — 6.673(10) • Ю$^{-11}$ Н • м^2/кг^2.

Планковская масса m_P = (ftc/G)$^{1/2}$ = 2.1767(16) • 10~^{8} кг

Планковская длина *1p = H/mpc* = 1.6160(12) • Ю$^{-35}$ м

Планковское время *mp = lp/c* = 5.3906(40) • 10~^{44} с

Атомная единица массы 1а.е.м. = 1.66053873(13) • Ю$^{-27}$кг.

Элементарный заряд е = 1.602176462(63) • 10-^{19}Кл.

Масса электрона mn_e = 9.10938188(72) • Ю$^{-31}$ Кг.

Удельный заряд электрона ^ = 1.758820174(71) • 10^{и}Кл/кг.

Масса протона m_p = 1.67262158(13) • 10^{-27}кг

Масса нейтрона m_n = 1.67492716(13) • 10~^{27}кг

Скорость света с = 299792458 м/с

Постоянная Планка h = 6.62606876(52) • 10^{-34}Дж • с

Астрономическая единица (среднее расстояние от Земли до Солнца) 1 а.е.=149597870660(20) м

Световой год 1св.год = 0.9461 • 10^{16} м

Парсек (пк), 1 пк=3.0856775807(4) • 10^{16}м

Масса Солнца m_c = 1.9889(30) - 10^{30}кг

Средний экваториальный радиус Солнца 6.961 • 10^8 м

Гравитационный параметр Солнца *Gmc* — 1.32712 • $10^{и}$км^3/с^2

Масса Земли $m_з$ = 5.974(9) • Ю^кг

Средний экваториальный радиус Земли 6.378140 • 10^6 м

Гравитационный параметр Земли *Gm*^ = 3.9860 • 10^5 км^3/с^2

Большие полуоси и эксцентриситеты орбит планет:

Меркурий - 57.909 • 10^6 км, 0.205631; Венера - 108.209-10^6 км, 0.006773; Земля - 149.598 • 10^6 км, 0.016710; Марс - 227.937 • 10^6 км, 0.093412; Юпитер - 778.412-10^6 км, 0.048393; Сатурн - 1426.726-10^6 км, 0.054151; Уран - 2871.974 • 10^6 км, 0.047168; Нептун - 4498.257 • 10^6 км, 0.085856; Плутон- 5906.361 • 10^6 км, 0.248808.

Экваториальные радиусы и массы планет:

Меркурий - 2439 км, 0.330 • 10^{27} г; Венера - 6051 км, 4.87 • 10^{27} г; Земля - 6378 км, 5.97 • 10^{27} г; Марс - 3397 км, 0.642 • 10^{27} г; Юпитер - 71398 км, 1900 • 10^{27} г; Сатурн - 60330 км, 569 • 10^{27} г; Уран - 26220 км, 86.9 • 10^{27} г; Нептун - 24760 км, 102 • 10^{27} г; Плутон- 1178 км, 0.013 • 10^{27} г.

13.2. Векторные операции в цилиндрической и сферической системах координат

Векторные операции в цилиндрической системе координат

^ = (VA) = **i A** $_{M\,r\,)}$ + **I^** + ^

[rotA)$_r$ - $_{г\ \partial\ ф}$ $_{\partial\ г}$, *[ratAU* - $_{\partial г}$ $_{\partial\ г}$, *[rotA)$_z$* - $_{г\partial г}${*mA$_ф$)* ^ ^ .

\ePj_ &i

гдг \ дг J *г^2 дф^2 dz^2'*

Векторные операции в сферической системе координат

,, n , 5/ 15/ 1 9/

дг гдв гзшвдф

Л«А = (VA = -J5- г^2 Д. + ——-^(sinM*) + , '

r^{2}ar rsinflcw rsmtf *дф*

/ .ч ***г дАг*** **1 a , . .**

(roiA)e = —г-5-57——^ - (^{г} ^) -

у rsin0 *дф* *гдг*

f = ~ *1_д_* ($_2$*д£* 1 *д* (. *д£* _1___*&1*

г^{2}дг V *дг)* + *r^{2}sm6d9* \ *дв)* *г^{2}5m^{2}6дф^г*

Тождества векторного анализа

1. *div(fA)* = *fdivA* + *A* • V/,

2. *rot(fA)* = *frotA* - *[A* x V/],

3. *div[A* x B] = *BrotA* - ArotB,

4. *rot[A* x B] = *AdivB* - *BdivA* + (BV)A - (AV)B,

5. V(AB) = [A x *rotB]* + *[Bx rotA]* + (BV)A + (AV)B,

6. *дгай{фф) = фдгаЛф + tpgradcf),*

7. C • *grad(A* • B) = A • (C • V)B + B • (C • V)A.

8. (C - V)[A x B] = [A x (C • V)B] - [B x (C • V)A],

9. [[V x A] x B] = AdivB - (A • V)B - [A x *rotB]* - [B x *rotA],*

10. (V • A)B = (A • V)B + BdivA.

13.3. Примерный перечень вопросов к зачетам, экзамену по всему курсу

1. Перемещение, скорость, ускорение материальной точки. Законы Ньютона.

2. Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии материальной точки, системы материальных точек.

3. Одномерное движение. Пример колебаний плоского математического маятника.

4. Интегралы движения материальной точки в центрально-симметричном поле.

5. Вектор Лапласа.

6. Инфинитные траектории при движении материальной точки в кулоновском поле.

7. Финитные траектории при движении материальной точки в кулоновском поле.

8. Трактория и закон движения материальной точки в центрально-симметричном поле.

9. Точки поворота траектории.

10. Третий закон Кеплера.

11. Основные закономерности движения материальной точки в центрально-симметричном поле.

12. Условие падения частицы на центр.

13. Коррекция траектории движения космических аппаратов.

14. Задача двух тел. Понятие приведенной массы.

15. Система центра масс двух материальных точек.

16. Постановка задачи о рассеянии частиц.

17. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния.

18. Рассеяние частиц в кулоновском поле. Формула Резерфорда.

19. Классификация связей. Идеальные, голономные связи.

20. Действительное, возможное, виртуальное перемещение материальной точки.

21. Основная задача механики системы N материальных точек с к идеальными голономными связями.

22. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

23. Уравнения Лагранжа 1 рода (с реакциями связей).

24. Дифференциальный вариационный принцип Даламбера-Лагранжа (основное уравнение механики).

25. Понятие независимых обобщенных координат.

26. Уравнения Лагранжа 2 рода (в независимых обобщенных координатах).

27. Структура кинетической энергии в независимых обобщенных координатах.

28. Структура обобщенно-потенциальной энергии в независимых обобщенных координатах.

29. Сила Лоренца - пример обобщенно-потенциальной силы.

30. Структура диссипативной функции Рэлея в независимых обобщенных координатах.

31. Принцип виртуальных перемещений.

32. Функция Лагранжа. Система уравнений Лагранжа 2 рода для обобщенно-потенциальнЫх механических систем.

33. Понятие обобщенной силы.

34. Понятие обобщенного импульса, обобщенной энергии.

35. Законы изменения и сохранения обобщенного импульса и обобщенной энергии.

36. Структура обобщенного импульса, обобщенной энергии, функции Лагранжа в обобщенных координатах.

37. Функция Лагранжа линейного гармонического осциллятора.

38. Функция Лагранжа электрического зяряда в электромагнитном поле, задаваемом потенциалами A, ϕ.

39. Принцип наименьшего действия Гамильтона-Остроградского.

40. Принцип наименьшего действия Мопертюи-Лагранжа для обобщенно-консервативных систем.

41. Теорема Нетер. Однородность времени. Однородность и изотропность пространства.

42. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона.

43. Функция Гамильтона линейного гармонического осциллятора.

44. Функция Гамильтона электрического заряда в электромагнитном поле, задаваемом потенциалами A, ϕ.

45. Функция Рауса. Уравнения Рауса.

46. Метод Рауса для систем с циклическими координатами.

47. Фазовое пространство, фазовая траектория. Теорема Лиувилля.

48. Скобка Пуассона, свойства скобки Пуассона.

49. Теорема Якоби-Пуассона.

50. Фазовый портрет линейного гармонического осциллятора.

51. Фазовый портрет математического маятника.

52. Особые точки динамических систем.

53. Особые точки гамильтоновых систем. Сепаратриса.

54. Фазовый портрет осциллятора с затуханием.

55. Метод фазовых портретов в механике (решение задачи о движении материальной точки в кулоновском поле).

56. Метод каниночеких преобразований (КП).

57. Производящая функция канонического преобразования.

58. Метод КП в задаче о линейном гармоническом осцилляторе.

59. Интегральные инварианты Пуанкаре.

60. Скобка Лагранжа.

61. Теорема о связи скобок Лагранжа и Пуассона.

62. Фундаментальные скобки Пуассона.

63. Метод уравнения Гамильтона-Якоби.

64. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби.

65. Уравнение Гамильтона-Якоби для линейного гармонического осциллятора.

66. Уравнение Гамильтона-Якоби для материальной точки, движущейся в центрально-симметричном поле.

67. Физический смысл полного интеграла.

68. Метод разделения переменных для уравнения Гамильтона-Якоби.

69. Определение полного интеграла для обобщенно-консервативных систем, для систем с циклическими координатами.

70. Оптико-механическая аналогия Гамильтона.

71. Переменные действие-угол.

72. Адиабатический инвариант механической системы.

73. Углы Эйлера.

74. Теорема Эйлера о движении твердого тела с одной неподвижной точкой.

75. Кинематические формулы Эйлера.

76. Связь между скоростями материальной точки относительно двух произвольных систем отсчета.

77. Уравнения движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета.

78. Законы изменения импульса, кинетического момента и энергии твердого тела.

79. Кинетическая энергия вращения.

80. Тензор инерции.

81. Главные оси инерции.

82. Динамические уравнения Эйлера.

83. Положение равновесия механической системы.

84. Собственные одномерные колебания.

85. Положение устойчивого равновесия системы с s степенями свободы.

86. Система уравнений Лагранжа для механической системы с s степенями свободы в окрестности положения устойчивого равновесия.

87. Нормальные координаты и нормальные колебания.

88. Вынужденные колебания, резонанс.

89. Физически бесконечно малая частица. Тензоры деформаций и скоростей деформаций.

90. Закон сохранения массы и уравнение непрерывности.

91. Поверхностные и объемные силы, тензор напряжения.

92. Закон изменения импульса, закон изменения момента импульса и симметрия тензора напряжений.

93. Уравнение изменения кинетической энергии.

94. Фундаментальная система уравнений сплошной среды.

95. Идеальная жидкость. Уравнения движения идеальной жидкости, уравнение Эйлера.

96. Интегралы Бернулли и Коши. Сохранение циркуляции скорости. Потенциальное течение.

97. Потоки импульса и энергии.

98. Звуковые волны. Волновое уравнение.

99. Ударные волны.

100. Вязкая жидкость. Тензор напряжений и уравнения движения. Уравнение Навье-Стокса.

101. Тензоры деформаций и напряжений твердого тела.

102. Закон Гука для изотропного твердого тела.

103. Уравнения равновесия изотропных тел.