МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра уравнений математической физики

Л. С. Пулькина

ПРАКТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Самара
Издательство "Самарский университет"
2015

УДК 517.95
ББК 22.161.6
П 88

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. О.А. Репин,
д-р физ.-мат. наук, проф. О.П. Филатов

Пулькина, Л. С.
П 88 Практическое решение уравнений с частными производными: учебное пособие / Л.С. Пулькина. — Самара : Изд-во «Самарский университет», 2015. — 52 с.

В учебном пособии излагаются основные методы решения начально-краевых задач для уравнений с частными производными второго порядка. Особое внимание уделено методу Даламбера и методу разделения переменных. Приводятся примеры с подробными объяснениями, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения. Текст сопровождается ссылками на учебники, а также на справочники и научную литературу.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 01.03.01 «Математика» и специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика».

УДК 517.95
ББК 22.161.6

1. Классификация уравнений с частными производными

Пусть Петя и Коля - произвольные студенты третьего курса мехмата. Петя и Коля начали изучать курс уравнений в частных производных и поняли, что если не взяться за книги, то могут возникнуть проблемы.

Оказалось, что учебников по уравнениям с частными производными много, правда, некоторые из них скрываются под названием "Уравнения математической физики". Мальчики решили, что будут читать разные книги, а потом их обсуждать. Петя начал с [1], а Коля с [2]. Петя прочитал введение и главу I, а Коля — введение, параграф 1 главы I и начал читать параграф 4 главы II. Они поняли вот что:

уравнение с частными производными — это соотношение, в которое неизвестная функция $u(x)$, где $x = (x_1, ...x_n)$, входит вместе со своими частными производными

$$F(x, u, Du, D^1u, ..., D^\alpha u) = 0, \tag{1}$$

где обозначено

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial {x_1}^{\alpha_1} ... \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

α— мультииндекс, целочисленные $\alpha_i \geq 0,\ |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$;

уравнение (1) называется уравнением порядка m, если оно содержит хотя бы одну производную порядка m и не содержит производных более высокого порядка;

уравнение (1) называется линейным, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех ее производных, входящих в уравнение;

уравнение (1) называется квазилинейным, если оно линейно относительно всех старших производных от неизвестной функции;

многие физические процессы при математическом моделировании приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка;

можно выделить некоторые классы уравнений второго порядка: уравнения могут быть эллиптическими, гиперболическими и параболическими в некоторой фиксированной точке. Об этом написано в [1].

Обсудив прочитанное, они пришли к выводу, что не все поняли:

Как классифицировать уравнения более высокого порядка?

Существуют ли уравнения, не принадлежащие ни к одному из выделенных классов?

Зачем приводить к каноническому виду?

Как найти решение?

— Ничего страшного, что пока не поняли — сказал Петя, — будем искать.
—Пожалуй, нужно почитать еще какие-нибудь книги — предложил Коля.
—Возьмем одну толстую [2] и одну тонкую [3].

—А пока у нас нет этих книг, давай попробуем сами решить какое-нибудь уравнение, самое простое на вид.

В поисках такого уравнения мальчики снова открыли книжки и нашли примеры уравнений с частными производными. —А у некоторых даже есть имена! — воскликнул Коля.

1. $\Delta u \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$ — уравнение Лапласа;
2. $-\Delta u = \lambda u$ — уравнение Гельмгольца;
3. $u_t - \sum\limits_{i=1}^{n} (b_i u)_{x_i}$ — уравнение Лиувилля;
4. $u_t - \Delta u = 0$ — уравнение теплопроводности;
5. $u_{tt} - \Delta u = 0$ — волновое уравнение;
6. $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$ — уравнение колебаний стержня;
7. $u_t + u_{xxx} = 0$ — уравнение Эйри;
8. $u_t + uu_x - u_{xx} = 0$ — уравнение Бюргерса;
9. $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ — уравнение Кортевега-де Фриса;
10. $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ — уравнение Трикоми.

После некоторых раздумий было решено рассмотреть частный случай уравнения 3, положив $n = 1$, $b = const$. Для придания ему симметрии записали его так:

$$au_t + bu_x = 0. \tag{2}$$

И тут возник вопрос: а почему аргументы неизвестной функции обозначаются по-разному в уравнениях 1—10? В 1 и 2 — только x, с уравнением 10 все понятно, там только две независимых переменных, можно их обозначить разными буквами, чтобы избежать индексов. А в 3—9 кроме x есть еще и t. Что это значит? Пока не понятно.

Итак, попробуем решить уравнение (2). Но как? Это уравнение первого порядка, линейное, однородное, но с частными производными. Мы не умеем их решать!

— Будем руководствоваться принципом: "если не знаешь, что делать, делай, что умеешь".

— Давай попробуем найти ассоциации с чем-то знакомым. Если на время забыть, что мы пытаемся найти $u(x,t)$ как решение уравнения (2), то можно представить левую часть (2) как скалярное произведение двух векторов: (a, b) и (u_t, u_x). Раз скалярное произведение равно нулю, то эти векторы ортогональны. Если $u(x,t)$ — решение уравнения (2), то вектор $(a, b, 0)$ лежит в касательной плоскости к графику решения, т.е. к интегральной поверхности, и в точке (x, t, u) $dx : dt : du = b : a : 0$, откуда

$$\frac{dx}{b} = \frac{dt}{a} = \frac{du}{0}.$$

—Вспомнил! Было!— воскликнул Петя.— В курсе ОДУ, но совсем немного. Что делать дальше, можно прочитать в задачнике А.Ф. Филиппова [4], § 20. Но мы и сами сможем: из полученных равенств имеем

$adx = bdt,\ du = 0$, откуда $u = const$ на любой кривой $ax - bt = const$. (Прямой в нашем случае, т.к. a,b — числа). Значит, решением уравнения $au_t + bu_x = 0$ является любая функция $u(x,t) = f(ax - bt)$. — Ну не совсем любая, производные она должна иметь, иначе мы не сможем ее подставить в уравнение, а ведь мы именно так понимаем решение: подставить в уравнение и получить верное равенство.

Рассмотрим теперь уравнение 5. Это уравнение — второго порядка. Посмотрим, нельзя ли найти его решение. Оператор уравнения 5 можно факторизовать.

— а что это означает, *факторизовать*? —спросил Петя.

— да это просто "разложить на множители". А термин — от слова *factor* — множитель, а *factorize* — "разложить на множители"по английски.

— Вот что получим:

$$(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x})u = 0. \tag{3}$$

Обозначим

$$v = (\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x})u.$$

Тогда из (3)

$$v_t + av_x = 0, \tag{4}$$

и мы свели задачу к предыдущей! Решение последнего уравнения мы уже знаем: $v(x,t) = f_1(x - at)$.

— А зачем индекс у f?

— На всякий случай, ведь решение нашего уравнения еще не найдено, вдруг пригодится.

— Да, действительно, из (3) теперь получим

$$u_t - au_x = f_1(x - at).$$

Решая это уравнение методом, который мы вспомнили (см. [4]), приходим к системе

$$\frac{dt}{1} = -\frac{dx}{a} = \frac{du}{f_1(x - at)}$$

и находим ее первые интегралы

$$x + at = const,\ u - \int\limits_0^t f_1(x - a\tau)d\tau = const.$$

Следовательно, общее решение уравнения (4) можно написать в неявном виде

$$F(x+at, u-\int\limits_0^t f_1(x-a\tau)d\tau)=0,$$

где F — произвольная функция. Так как u входит только в один из первых интегралов, то общее решение можно написать в явном виде:

$$u(x,t)-\int\limits_0^t f_1(x-a\tau)d\tau=g(x+at),$$

где g — произвольная функция.Обозначив $\int\limits_0^t f_1(x-a\tau)d\tau=f(x-at)$, получим общее решение

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at).$$

волнового уравнения

$$u_{tt}-a^2u_{xx}. \tag{5}$$

Заметим, что функции f,g образующие решение волнового уравнения, появились в результате решения уравнений с частными производными первого порядка, и поэтому мы знаем, что они постоянны вдоль $x-at=const$ и $x+at=const$ соответственно. Наверное, это не просто так, а что-нибудь означает.

— Давай проведем эксперимент и посмотрим на реакцию уравнения. Например, перейдем к другим переменным, положив

$$\xi=x-at, \eta=x+at,$$

и посмотрим, что из этого получится.

Мальчики нашли производные (если забыли, см. [5], т.I, глава V, § 3.)

$$\begin{array}{l} u_x=u_\xi+u_\eta, \\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}, \\ u_t=-au_\xi+au_\eta, \\ u_{tt}=a^2u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+a^2u_{\eta\eta} \end{array} \tag{6}$$

и, подставив их в уравнение (5), получили

$$u_{\xi\eta}=0. \tag{7}$$

— Какое простое получилось уравнение! А если его записать в виде $(u_\xi)_\eta=0$, то $u_\xi=f_1(\xi)$.

— Почему?
— Раз производная по η равна нулю, то это означает, что функция u_ξ не зависит от η. Остается только переменная ξ.
У нас получилось простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение. Решив его, получим

$$u(\xi,\eta) = \int f_1(\xi)d\xi + g(\eta),$$

а если обозначить $\int f_1(\xi)d\xi = f(\xi)$, то

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Вернувшись к прежним переменным, будем иметь

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at),$$

т.е. в точности то же, что мы получили другим способом.

Итак, мы увидели, что уравнения с частными производными не такие страшные, как нам показалось: мы даже решили два уравнения. Правда, решений слишком много, и нам нужно выяснить, можно ли выделить единственное решение, обладающее конкретными свойствами. Заодно мы поняли, что прямые $x-at=c$, $x+at=c$ играют важную роль при исследовании волнового уравнения $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$. А есть ли аналоги для других уравнений? Нужно почитать книги.

На следующее утро мальчики открыли учебник [1] и стали читать § 1 главы I: "Классификация дифференциальных уравнений с частными производными". Петя — п. 1, а Коля — п.2.

Обсудив прочитанное, они решили, что классификация уравнений второго порядка им становится понятнее, если начать с общего случая линейного уравнения (см. п.2), и Коля стал рассказывать.
—Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x). \tag{8}$$

Первая сумма содержит все производные второго порядка и называется **главной частью** уравнения (8). Сопоставим уравнению (8) квадратичную форму.
— А зачем? — спросил Петя.
—Вот увидишь, как можно использовать известные факты линейной алгебры, которые мы знаем с первого курса. Продолжаю. Зафиксируем точку x^0, найдем значения коэффициентов при старших производных в этой точке, обозначим их $a_{ij}^0 = a_{ij}(x^0)$. Квадратичная форма

$$Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 p_i p_j \tag{9}$$

называется **характеристической квадратичной формой**.

Будем теперь делать сразу два дела: в уравнении (8) перейдем к новым переменным с помощью невырожденной замены

$$\xi_k = \xi_k(x), \quad k = 1, ..., n, \tag{10}$$

а квадратичную форму (9) приведем к каноническому виду в выбранной точке x^0.

— Но зачем мы делаем замену? И какую? И почему невырожденную?

— Замену делаем для того, чтобы посмотреть, что получится. Как опыт в химии или физике: налить, смешать, посмотреть, что получилось, а затем, если не взорвалось, думать, что это означает и как это можно объяснить. А вот какую — зависит от того, что мы хотим получить. Сейчас мы хотим выделить классы уравнений, обладающие некоторыми общими свойствами, и научиться отличать один от другого. Забегая вперед, могу сказать, что это окажется важным для разработки методов исследования разрешимости задач для уравнений с частными производными и для изучения качественных свойств решений. Как найти подходящую замену? Заграница, ой, квадратичная форма нам поможет! А невырожденную — для того, чтобы после перехода к новым переменным не менялся порядок уравнения.

Петя нашел производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Подставив найденные производные в уравнение (8), получили

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k \frac{\partial u}{\partial \xi_k} + \bar{c}u = \bar{f}(\xi). \tag{11}$$

Уравнение (11) имеет такой же вид, как и (8), но коэффициенты другие. Они выражаются через коэффициенты уравнения (8) и производные новых переменных:

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}, \tag{12}$$

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_{ik} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j},$$

где обозначено $\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$.

А в это время Коля преобразовал квадратичную форму (9). Положив

$$p_i = \sum_{k}^{n} \alpha_{ik} q_k, \tag{13}$$

он получил новое выражение для квадратичной формы:

$$Q = \sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}^0_{kl} q_k q_l, \tag{14}$$

коэффициенты которой имеют вид

$$\bar{a}^0_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a^0_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}. \tag{15}$$

Таким образом, коэффициенты главной части уравнения (8) в результате преобразования (10) изменяются так же, как и коэффициенты характеристической формы после преобразования (13). Преобразования (10) и (13) связаны соотношением

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

С одной стороны, мы не выбрали преобразование (10), поэтому матрицу преобразования (13) не знаем. Но с другой стороны, если мы *сначала* найдем матрицу преобразования (13) из каких-то соображений, то найдем и преобразование (10).

— Ну, давай соображать — сказал Коля,— что мы знаем про квадратичные формы и что нам может быть полезно?

— Знаю! — воскликнул Петя.

— Квадратичную форму можно привести к каноническому виду (т.е. к сумме квадратов), а коэффициенты квадратичной формы в каноническом виде либо ± 1, либо 0.

— А еще по закону инерции число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов инвариантно относительно линейного невырожденного преобразования.

— Но тогда все сказанное справедливо и для коэффициентов главной части уравнения в некоторой фиксированной точке. Вот почему нам нужна была характеристическая квадратичная форма!

Определение

Уравнение (8) в точке x^0 называется уравнением

эллиптического типа, если все n коэффициентов $\bar{a}^0_{kl}$ отличны от нуля и одного знака;

гиперболического типа, если все n коэффициентов $\bar{a}^0_{kl}$ отличны от нуля и один из них противоположен по знаку остальным;

параболического типа, если хотя бы один из коэффициентов $\bar{a}^0_{kl}$ равен нулю.

(*Замечание.* При $n > 2$ можно выделить и другие типы уравнений [1]).

Для определения типа уравнения и приведения его к каноническому виду полезна

Инструкция.

1. Выделить главную часть уравнения.

2. Записать характеристическую квадратичную форму.

3. Привести характеристическую квадратичную форму к каноническому виду. Количество отличных от нуля коэффициентов и их знаки в фиксированной точке позволят определить тип уравнения. При этом будет найдено преобразование, приводящее форму к сумме квадратов. Обозначим матрицу этого преобразования $P = (\alpha_{ik})$,

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} q_k.$$

4. Выбрать новые переменные ξ_k так, чтобы в точке x^0 выполнялось равенство

$$\left.\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right|_{x=x^0} = \alpha_{ik}$$

Для это можно положить

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} x_i.$$

5. Найти производные и подставить в уравнение.

Пример.

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} - 4u_{yz} + 8u_{zz} + u_x - u_y = 0.$$

Главная часть:

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} - 4u_{yz} + 8u_{zz}.$$

Коэффициенты постоянны, поэтому точку не нужно фиксировать. Запишем характеристическую квадратичную форму

$$Q = p_1^2 + 2p_1p_2 - 3p_2^2 - 4p_2p_3 + 8p_3^2.$$

Приведем квадратичную форму к каноническому виду, выделяя полные квадраты.

$$Q = (p_1 + p_2)^2 - (2p_2 + p_3)^2 + 9p_3^2.$$

Положим

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 + p_2, \\ q_2 &= 2p_2 + p_3, \\ q_3 &= 3p_3. \end{aligned}$$

Тогда канонический вид квадратичной формы

$$Q = q_1^2 - q_2^2 + q_3^2,$$

и мы видим, что все три коэффициента отличны от нуля, но один отличается знаком от двух других. Значит, это уравнение — гиперболическое. Теперь будем приводить его к каноническому виду. Прежде всего заметим, что по инструкции *старые* переменные выражаются через новые, см. (13). А у нас — наоборот. Поэтому сначала сделаем обратное преобразование:

$$\begin{aligned} &p_1 = q_1 - \tfrac{1}{2}q_2 + \tfrac{1}{6}q_3, \\ &p_2 = \tfrac{1}{2}q_2 - \tfrac{1}{6}q_3, \\ &p_3 = \tfrac{1}{3}q_3. \end{aligned}$$

Запишем матрицу этого преобразования

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Теперь в силу пункта 4 инструкции найдем матрицу преобразования переменных

$$A = P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

и запишем преобразование

$$\begin{aligned} &\xi = x, \\ &\eta = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y, \\ &\zeta = \tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{6}y + \tfrac{1}{3}z. \end{aligned}$$

Находим производные

$$\begin{aligned} &u_x = u_\xi - \tfrac{1}{2}u_\eta + \tfrac{1}{6}u_\zeta, \\ &u_{xx} = u_{\xi\xi} + \tfrac{1}{4}u_{\eta\eta} + \tfrac{1}{36}u_{\zeta\zeta} - u_{\xi\eta} + \tfrac{1}{3}u_{\xi\zeta} - \tfrac{1}{6}u_{\eta\zeta}, \\ &u_y = \tfrac{1}{2}u_\eta - \tfrac{1}{6}u_\zeta, \\ &u_{yy} = \tfrac{1}{4}u_{\eta\eta} + \tfrac{1}{36}u_{\zeta\zeta} - \tfrac{1}{6}u_{\eta\zeta}, \\ &u_z = \tfrac{1}{9}u_{\zeta\zeta}, \\ &u_{xy} = \tfrac{1}{2}u_{\xi\eta} - \tfrac{1}{6}u_{\xi\zeta} - \tfrac{1}{4}u_{\eta\eta} + \tfrac{1}{6}u_{\eta\zeta} - \tfrac{1}{36}u_{\zeta\zeta}, \\ &u_{yz} = \tfrac{1}{6}u_{\eta\zeta} - \tfrac{1}{18}u_{\zeta\zeta} \end{aligned}$$

и подставляем их в уравнение. Готово!

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - u_\eta = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

Определить тип уравнения и привести к каноническому виду.

1. $u_{xx} + 4u_{xy} + 6u_{yy} - 4u_{yz} + 11u_{zz} - 7u_y + u_z = 0$.
2. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} - 4u_x + 5u_z = 0$.
3. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$.
4. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$.
5. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0$.
6. $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0$.
7. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0$.
8. $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0$.
9. $u_{xy} + u_{yz} + u_{xz} - 3x^2u_x + y\sin u + xe^{-y} = 0$.
10. $xu_{xx} + yu_{yy} - u = 0$.

2. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка на плоскости

Теперь рассмотрим частный случай, $n = 2$. Все определения, а также инструкция по определению типа уравнения и приведения его к каноническому виду справедливы, но в этом простом случае можно увидеть некоторые детали, полезные для дальнейших исследований уравнений с частными производными.

Пусть $n = 2$. Уравнение (8) можно записать так:

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + f(x,y,u,u_x,u_y) = 0. \qquad (16)$$

Это квазилинейное уравнение, но мы видели, что для классификации уравнения нужна только главная часть уравнения, а она по-прежнему линейна.

Для определения типа уравнения (16) можно, конечно, пользоваться определением и инструкцией, но удобнее — критерием, который сейчас получим. Действительно, определение 1 можно сформулировать так:

в точке x^0 уравнение (8) называется эллиптическим, если матрица характеристической формы положительно определена, гиперболическим, если она знакопеременна, параболическим — если вырождена.

В случае $n = 2$ матрица характеристической квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

и критерием перечисленных выше свойств матрицы в случае $n = 2$ является знак выражения $AC - B^2$ в фиксированной точке.

Теперь можно сформулировать **критерий**:

Уравнение (16) в точке (x_0, y_0) *является*
эллиптическим, если $B^2 - AC < 0$,
гиперболическим, если $B^2 - AC > 0$,
параболическим, если $B^2 - AC = 0$.

Приведем уравнение (16) к каноническому виду, но попробуем не придерживаться инструкции. Сделаем преобразование переменных, положив

$$\xi = \varphi(x, y), \ \eta = \psi(x, y),$$

причем так, чтобы это преобразование было невырожденным. Для этого должно выполняться условие

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y \neq 0.$$

Найдем производные

$$\begin{array}{l} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_y = u_{xi}\xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \end{array}$$

и подставим их в уравнение (16). Получим

$$\bar{A}u_{\xi\xi} + 2\bar{B}u_{\xi\eta} + \bar{C}u_{\eta\eta} + \bar{f}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \tag{17}$$

где новые коэффициенты имеют вид:

$$\begin{array}{l} \bar{A} = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2, \\ \bar{B} = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y, \\ \bar{C} = A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2. \end{array}$$

— Посмотри — сказал Петя, — выражения для коэффициентов $\bar{A}$ и $\bar{C}$ очень похожи и выглядят, как уравнения с частными производными первого порядка,
— если их приравнять нулю, добавил Коля. И они решили приравнять их нулю и посмотреть, что из этого получится:
если ξ — решение уравнения $A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$, то $\bar{A} = 0$,
а если η — решение уравнения $A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$, то $\bar{C} = 0$.

Можно ли найти такие функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ чтобы эти равенства выполнялись? Рассмотрим уравнение

$$A\Phi_x^2 + 2B\Phi_x\Phi_y + C\Phi_y^2 = 0. \tag{18}$$

Это нелинейное уравнение, но методы решения нелинейных уравнений первого порядка разработаны, например, метод Лагранжа-Шарпи [?]. Но мы поступим проще. Исследуем три возможных случая: $B^2 - AC > 0,\ B^2 - AC = 0,\ B^2 - AC < 0$.

1.Пусть в окрестности точки (x_0, y_0) $B^2 - AC > 0$. В силу критерия уравнение (16) является гиперболическим. Кроме того, будем считать, что $A^2 + B^2 \neq 0$, т.е. эти коэффициенты не обращаются в нуль одновременно. Запишем уравнение (18) в виде произведения, иначе говоря, факторизуем:

$$[A\Phi_x + (B + \sqrt{B^2 - AC})\Phi_y][A\Phi_x + (B - \sqrt{B^2 - AC})\Phi_y] = 0.$$

— А как ты догадался?
— Я представил себе левую часть уравнения (18) как квадратный трехчлен, нашел корни и разложил его на множители. Вот смотри:

$$At^2 + 2Bt + C = 0,\ t = \frac{\Phi_x}{\Phi_y},$$

нахожу корни, раскладываю на множители, и, возвращаясь к $t = \frac{\Phi_x}{\Phi_y}$, получим

$$[A\Phi_x + (B + \sqrt{B^2 - AC})\Phi_y][A\Phi_x + (B - \sqrt{B^2 - AC})\Phi_y] = 0.$$

Таким образом, в результате факторизации уравнение (18) распадается на два:

$$A\Phi_x + (B + \sqrt{B^2 - AC})\Phi_y = 0, \quad A\Phi_x + (B - \sqrt{B^2 - AC})\Phi_y = 0,$$

и они линейны. Составим соответствующие им системы

$$\frac{dx}{A} = \frac{dx}{B + \sqrt{B^2 - AC}}; \quad \frac{dx}{A} = \frac{dx}{B - \sqrt{B^2 - AC}},$$

которые можно записать так:

$$Ady - (B + \sqrt{B^2 - AC})dx = 0, \quad Ady - (B - \sqrt{B^2 - AC})dx = 0,$$

а стало быть, и так:

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0. \tag{19}$$

Справедливо следующее утверждение:

Если $\Phi = \phi(x, y)$ является частным решением уравнения (18), то соотношение $\phi(x, y) = c$ представляет собой общий интеграл уравнения (19);

если $\phi(x, y) = c$ — общий интеграл уравнения (19), то функция $\Phi = \phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (18).

Это утверждение доказано в [1], глава I, § 1.

Пусть $\varphi(x, y) = c$, $\psi(x, y) = c$ — интегралы уравнения (19).

Определение 2. Кривые

$$\varphi(x, y) = c, \quad \psi(x, y) = c$$

называются *характеристиками* уравнения (16).

Кстати, оба уравнения, (18) и (19), называются *характеристическими*, или уравнениями характеристик.

— А помнишь,— сказал Петя, — нам уже встречались некоторые кривые, когда мы рассматривали уравнение колебаний?

— Да, и, хотя они были прямыми, но оказались интересными объектами. Нужно еще раз обратиться к уравнению колебаний и рассмотреть его, используя полученную информацию. Составим для него характеристическое уравнение:

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0.$$

Решение найти легко:

$$(dx - adt)(dx + adt) = 0 \ \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm a \ \Rightarrow x - at = c, \ x + at = c.$$

Оказывается, те замечательные прямые, которые у нас появились при решении уравнения колебаний, суть не что иное, как характеристики!

Но вернемся к уравнению (16). Если за новые переменные взять решения уравнения характеристик (18), то, как мы уже заметили, $\bar{A} = \bar{C} = 0$ и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{20}$$

— А есть ли гарантия, что $\bar{B} \neq 0$?

—Да, есть: в случае $B^2 - AC > 0$ уравнение имеет два линейно независимых решения, поэтому условие $\xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y \neq 0$ выполнено, а непосредственными вычислениями нетрудно получить равенство

$$\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} = (B^2 - AC)(\xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y)^2.$$

Если в качестве ξ, η мы берем решения уравнения (18), то $\bar{A} = \bar{C} = 0$ и в этом случае

$$\bar{B}^2 = (B^2 - AC)(\xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y)^2 > 0.$$

Соотношение (20) — *канонический вид уравнения гиперболического типа* в случае $n = 2$.

Гиперболическое уравнение имеет два различных семейства действительных характеристик.

2. Пусть теперь $B^2 - AC = 0$, т.е. уравнение (16) — параболическое. Разумеется, мы предполагаем, что в рассматриваемой области коэффициенты уравнения (16) не обращаются в нуль одновременно. Тогда хотя бы один из коэффициентов A, B отличен от нуля. Пусть $A \neq 0$. Рассмотрим уравнение характеристик, которое в рассматриваемом случае запишется так:

$$(A\Phi_x + B\Phi_y)^2 = 0.$$

Нетрудно видеть, что если функция $\Phi = \varphi(x, y)$ — решение уравнения $A\Phi_x + B\Phi_y = 0$, то эта же функция является решением уравнения $B\Phi_x + C\Phi_y = 0$.

Параболическое уравнение имеет одно семейство действительных характеристик.

— В качестве одной из новых переменных мы возьмем решение уравнения характеристик. А где мы возьмем вторую?

— Можно взять любую функцию, лишь бы якобиан получившегося преобразования был отличен от нуля. Поэтому мы выберем ее как можно проще. Пусть

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) \\ \eta &= \psi(x, y). \end{aligned}$$

Тогда очевидно $\bar{A} = 0$, а

$$\bar{B} = (A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial y})\frac{\partial\psi}{\partial x} + (B\frac{\partial\varphi}{\partial x} + C\frac{\partial\varphi}{\partial y})\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

Наконец, найдем

$$\bar{C} = \frac{1}{A}(A\frac{\partial\psi}{\partial x} + B\frac{\partial\psi}{\partial y}) \neq 0,$$

и мы получаем *канонический вид уравнения параболического типа:*

$$u_{\eta\eta} = F_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Замечание. В качестве второй переменной, если $A \neq 0$, можно было взять $\psi(x, y) = x$.

3. Пусть в рассматриваемой точке $B^2 - AC < 0$, т.е. уравнение (16) — эллиптическое. Если коэффициенты A, B, C аналитичны в окрестности точки (x_0, y_0), то уравнение (18) имеет в окрестности этой точки аналитическое решение

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y).$$

Положим

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y).$$

Разделяя в тождестве

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0$$

действительную и мнимую части, получим

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0,$$

откуда следует, что $\bar{A}=\bar{C},\ \bar{B}=0$, и мы получаем канонический вид эллиптического уравнения:

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=F_3(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Рассмотрим несколько примеров.

1. $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0.$

Определим тип этого уравнения. $B^2-AC=1+3=4>0$, — уравнение гиперболическое. Запишем его характеристическое уравнение в форме (19):

$$dy^2-2dxdy-3dy^2=0.$$

Решим это уравнение сначала как квадратное относительно $\frac{dy}{dx}$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}-3=0\ \Rightarrow\frac{dy}{dx}=-1,\ \frac{dy}{dx}=3.$$

Теперь решим полученные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка:

$$x+y=c,\ 3x-y=c.$$

Найденные интегралы — характеристики уравнения, которое мы сейчас рассматриваем.

Положим

$$\begin{aligned}\xi&=x+y,\\ \eta&=3x-y\end{aligned}$$

и найдем производные. Коля быстро их нашел:

$$\begin{aligned}&u_x=u_\xi+3u_\eta,\\&u_{xx}=u_{\xi\xi}+6u_{\xi\eta}+9u_{\eta\eta},\\&u_y=u_\xi-u_\eta,\\&u_{yy}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta},\\&u_{xy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}-3u_{\eta\eta}.\end{aligned}$$

— Как это у тебя так быстро получается?—спросил Петя.
—Я все время пользуюсь одной формулой: $u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$.
—Тогда $u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$?
—Ну конечно! И вторые производные находим по тем же правилам. Вспоминай матанализ!

Теперь подставим найденные производные в исходное уравнение и получим

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

2. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 5u_y - 3u = 0$.

Определим тип этого уравнения. $B^2 - AC = 1 - 1 = 0$ — уравнение параболическое. Запишем характеристическое уравнение

$$dy^2 + 2dxdy + dx^2 = 0.$$

Решая его, получим его общий интеграл $x + y = c$. Положим

$$\begin{aligned} &\xi = x + y, \\ &\eta = x \end{aligned}$$

и найдем производные.

$$\begin{aligned} &u_x = u_\xi + u_\eta, \\ &u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ &u_y = u_\xi, \\ &u_{yy} = u_{\xi\xi}, \\ &u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi}. \end{aligned}$$

Подставив в уравнение, получим его канонические вид:

$$u_{\eta\eta} - 3u_\xi + 2u_\eta - 3u = 0.$$

3. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} = 0$.

Определим тип этого уравнения. $B^2 - AC = 4 - 5 = -1$ — уравнение эллиптическое. Запишем характеристическое уравнение

$$dy^2 - 4dxdy + 5dx^2 = 0$$

и найдем его интегралы.

$$y = (2 \pm i)x + c \Rightarrow y - 2x \pm ix = c.$$

Положим

$$\begin{aligned} &\xi = 2x - y, \\ &\eta = x, \end{aligned}$$

найдем производные, подставим их в уравнение и получим канонический вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$$

Производные находятся так же, как и в двух предыдущих примерах.

Рассмотрим следующий пример.

4. $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0.$

—Обрати внимание, здесь коэффициенты — функции, а не числа, как в трех предыдущих примерах. Определим тип этого уравнения. $B^2 - AC = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0$ — уравнение гиперболическое, причем, несмотря на то, что коэффициетны не постоянны, оно гиперболическое на всей плоскости.

—А может быть иначе?

—Да, но об этом чуть позже.

Запишем характеристическое уравнение

$$dy^2 + 2\cos x dx dy - (3 + \sin^2 x)dx^2 = 0$$

и найдем его интегралы

$$\frac{dy}{dx} = -cosx \pm 2 \ \Rightarrow y = -\sin x \pm 2x + c.$$

Положим

$$\xi = 2x + \sin x + y,$$
$$\eta = 2x - \sin x - y.$$

Найдем производные. Нужно быть внимательными, так как замена в этом случае получилась нелинейной.

$$u_x = u_\xi(2 + \cos x) + u_\eta(2 - \cos x),$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi}(2 + \cos x)^2 + 2u_{\xi\eta}(2 + \cos x)(2 - \cos x) + u_{\eta\eta}(2 - \cos x)^2 -$$
$$-u_\xi \sin x + u_\eta \sin x,$$
$$u_y = u_\xi - u_\eta,$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi}(2 + \cos x) - u_{\xi\eta}(2 + \cos x) + u_{\eta\xi}(2 - \cos x) - u_{\eta\eta}(2 - \cos x).$$

Подставим в уравнение и получим

$$16u_{\xi\eta} + (\sin x + y)u_\xi - (\sin x + y)u_\eta = 0.$$

Теперь выразим коэффициенты этого уравнения через новые переменные, используя замену переменных, откуда $\sin x + y = \frac{\xi - \eta}{2}$, и получим канонический вид

$$u_{\xi\eta} + \frac{\xi - \eta}{32}(u_\xi - u_\eta) = 0.$$

5. Рассмотрим теперь такое уравнение

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Это уравнение нам уже встречалось в качестве примера на с. 2, это уравнение Трикоми. Определим тип этого уравнения. $B^2 - AC = -y$, пэтому его тип определяется знаком y : если $y > 0$, то уравнение эллиптическое, $y < 0$ —гиперболическое, а при $y = 0$ оно, как говорят, параболически вырождается. Исследования, проведенные итальянским математиком Ф. Трикоми в начале прошлого века [6] положили начало целому направлению в теории уравнений с частными производными — теории уравнений смешанного типа. О том, как развивалась эта теория и кто внес значительный вклад в ее развитие, можно прочитать в [7], [8] (гл. IV). Назовем здесь лишь некоторые имена: Мария Чибрарио, Кэтлин Моравец, Ф.И. Франкль, А.В. Бицадзе. Уравнения смешанного типа нашли многочисленные применения — например, в задачах, связанных с трансзвуковой газовой динамикой.

Задачи для самостоятельного решения

Определить тип уравнения и привести к каноническому виду в области, где его тип сохраняется:

1. $u_{xx} - 6u_{xy} - 7u_{yy} + 3u_x - 5u_y = 0.$
2. $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0.$
3. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 8u_x + 9u_y + 15u = 0.$
4. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$
5. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0.$
6. $\operatorname{tg}^2 x u_{xx} - 2y \operatorname{tg} x u_{xy} + y^2u_{yy} + \operatorname{tg}^3 x u_x = 0.$
7. $yu_{xx} - u_{yy} = 0.$
8. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0.$
9. $u_{xx} - yu_{yy} = 0.$
10. $e^yu_{xy} - u_{yy} + u_y = 0.$

3. Задача Коши для гиперболических уравнений

Продолжим изучать уравнения на плоскости. Мы увидели, что уравнения второго порядка можно привести к каноническому виду в некоторой области, где уравнение сохраняет свой тип. Главная часть уравнения в каноническом виде одинакова для всех уравнений одного типа. Заметим, что иногда канонический вид уравнения такой простой, что можно найти его общее решение. Рассмотрим несколько примеров.

1. $u_{xy} = 0 \ \Rightarrow u(x,y) = f(x) + g(y)$. (Мы получили этот результат выше).

2. $u_{xy} + a(y)u_x = 0$.

Представим это уравнение, учитывая полученый ранее опыт, следующим образом: $\frac{\partial}{\partial x}(u_y + a(y)u) = 0$, откуда $u_y + a(y)u = g_1(y)$, где $g_1(y)$ — произвольная функция. Решим это уравнение. Решение однородного уравнения имеет вид $u(x,y) = C(x)e^{-\int a(y)dy}$. Применив метод вариации произвольной постоянной (хотя в нашем случае — это функция, зависящая от одной переменной), получим решение неодородного уравнения:

$$u(x,y) = (f(x) + g(y))e^{-\int a(y)dy}.$$

Это и есть общее решение.
—Я не совсем понял, как мы нашли его.
—Ищем решение в виде $u(x,y) = C(x,y)e^{-\int a(y)dy}$, где $C(x,y)$ неизвестна. Подставив в уравнение, получим $C_y(x,y) = g_1(y)e^{\int a(y)dy}$. Интегрируем: $C(x,y) = \int g_1(y)e^{\int a(y)dy}dy + f(x)$, обозначаем: $\int g_1(y)e^{\int a(y)dy}dy = g(y)$, и получаем после подстановки в функцию $u(x,y) = C(x,y)e^{-\int a(y)dy}$ общее решение уравнения.
—Теперь понятно. Тогда совершенно аналогично можно получить общее решение уравнения

$$u_{xy} + b(x)u_y = 0 \ \Rightarrow u(x,y) = (f(x) + g(y))e^{-\int b(x)dx}.$$

Немного подумав, мальчики нашли общее решение еще одного уравнения:

$$u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0 \ \Rightarrow u(x,y) = (f(x) + g(y))e^{-ay-bx}.$$

Из полученных формул видно, что рассмотренные уравнения имеют бесчисленое множество решений. Это справедливо и для других уравнений, общие решения которых мы не нашли. Кстати, найти общее решение уравнения с частными производными удается очень редко.

Для того чтобы выделить конкретное решение, нужно знать дополнительные условия. Для уравнений с частными производными возможны различные формы дополнительных условий.

Рассмотрим задачу о колебании бесконечной струны.
—А разве такое возможно?

—В жизни — нет, но мы так говорим, когда струна настолько длинная, что то, что происходит на ее концах, не оказывает заметного влияния на процесс колебания того ее участка, который мы можем наблюдать. Этот процесс описывается уравнением колебаний

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{21}$$

Пусть в начальный момент струна имеет конфигурацию, заданную функцией $\varphi(x)$, а начальная скорость задается функцией $\psi(x)$. Решение уравнения (21) — это отклонение от положения равновесия, которое совпадает с осью Ox, в любой точке (x, t). Тогда равенства

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{22}$$

определяют *начальные условия.*

Общее решение уравнения (21) найдено:

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at). \tag{23}$$

Попробуем выразить функции f и g через заданные функции φ и ψ. Допустим, что решение задачи (21)—(22) существует. Тогда, положив в (23) $t = 0$, получим

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x).$$

Найдем производную по t от общего решения (23):

$$u_t(x,t) = af'(x - at) - ag'(x + at),$$

где штрих означает производную по промежуточному аргументу, и положим $t = 0$:

$$u_t(x,0) = af'(x) - ag'(x) = \psi(x).$$

Нам нужно найти функции f, g из полученных равенств. Однако во втором из них участвуют производные, а не сами функции. Интегрируя второе равенство, приходим к системе

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi) d\xi + C, \end{cases}$$

решив которую, получим:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \tfrac{1}{2a} \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi) d\xi + \tfrac{C}{2},$$

$$g(x) = \tfrac{1}{2}\varphi(x) - \tfrac{1}{2a} \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi) d\xi - \tfrac{C}{2}.$$

Подставим найденные функции в общее решение. При этом нужно быть внимательными к аргументам! Получим формулу решения задачи Коши, она называется *формулой Даламбера*:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi. \qquad (24)$$

—Ура, мы получили единственное решение задачи Коши!
—Нет, этого мы не можем пока утверждать.
—Почему, вот формула.
—Да, но эта формула получена в предположении, что решение существует. Но нетрудно убедиться, что формула (24) действительно решение уравнения (21), если $\varphi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$. Для этого нужно просто подставить ее в уравнение (21). В единственности решения можно убедиться и без формулы решения задачи. Доказательство единственности решения задачи Коши для уравнения (21) можно прочитать в [3], глава III, § 3. Там же доказана и устойчивость решения. Об устойчивости решения можно также прочитать в [1], глава II, § 2. В этом параграфе дано определение задачи, поставленной корректно, и еще много интересного. А мы рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти решение задачи Коши в области $\{(x,y) : -\infty < x < \infty,\ y > 0\}$:

$$\begin{array}{l} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 3x^2, \quad u_y(x,0) = 0. \end{array}$$

Это уравнение — гиперболическое, так как $B^2 - AC = 1 + 3 = 4 > 0$ всюду. Найдем характеристики:

$$dy^2 - 2dxdy - 3dx^2 = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -1, \quad \frac{dy}{dx} = 3, \quad x + y = c, \quad 3x - y = c.$$

Приведем уравнение к каноническому виду, для чего перейдем к новым переменным $\xi = x + y$, $\eta = 3x - y$. Вычисления приведены выше, в разделе *Приведение к каноническому виду уравнений с частными производными на плоскости*, поэтому сразу запишем канонический вид:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Общее решение этого уравнения тоже уже найдено:

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным, получим:

$$u(x,y) = f(x+y) + g(3x-y).$$

Применим начальные условия.

$$f(x) + g(3x) = 3x^2,$$
$$f'(x) - g'(3x) = 0.$$

После интегрирования второго из этих уравнений, приходим к системе

$$f(x) + g(3x) = 3x^2,$$
$$f(x) - \tfrac{1}{3}g(3x) = C,$$

решив которую, найдем функции

$$f(x) = \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{C}{4},$$
$$g(3x) = \tfrac{9}{4}x^2 - \tfrac{C}{4}$$

и подставим их в общее решение. Все очень просто, но нужно быть внимательным при подстановке. Чтобы не сделать ошибку, обозначим аргумент $3x = t \to x = \frac{t}{3}$. Тогда $g(t) = \frac{1}{4}t^2$ и мы получим, полагая $t = 3x - y$,

$$u(x, y) = \frac{3}{4}(x + y)^2 + \frac{1}{4}(3x - y)^2 = 3x^2 + y^2.$$

Пример 2. (Этот пример потруднее). Найти решение задачи Коши в области $\{(x, y) : -\infty < y < \infty,\ x > 0\}$:

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} = 0,\ x > 0,$$
$$u(x, 1) = 0, \quad u_y(x, 1) = x^{\frac{7}{4}}.$$

Найдем характеристики уравнения. Запишем уравнение характеристик

$$x^2dy^2 + 2xydxdy - 3y^2dx^2 = 0$$

и найдем сначала корни квадратного трехчлена

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -3\frac{y}{x},$$

а затем, решив эти уравнения, характеристики

$$\frac{y}{x} = c, \quad yx^3 = c.$$

Положим $\xi = yx^3,\ \eta = \frac{y}{x}$ и найдем производные.

$$u_x = 3u_\xi x^2y - u_\eta x^{-2}y,$$
$$u_{xx} = 9u_{\xi\xi}x^4y^2 - 6u_{\xi\eta}y^2 + u_{\eta\eta}x^{-4}y^2 + 6u_\xi xy + 2u_\eta x^{-3}y,$$
$$u_y = u_\xi x^3 + u_\eta x^{-1},$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi}x^6 + 2u_{\xi\eta}x^2 + u_{\eta\eta}x^{-2},$$
$$u_{xy} = 3u_{\xi\xi}x^5y + 2u_{\xi\eta}xy - u_{\eta\eta}x^{-3}y + 3u_\xi x^2 - u_\eta x^{-2}.$$

Подставим найденные производные в уравнение, аккуратно подсчитывая коэффициенты, и получим после деления на коэффициент при смешанной производной $u_{\xi\eta} - \frac{1}{4x^3y}u_\eta = 0$. Так как $x^3y = \xi$, то канонический вид получен:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{4\xi}u_\eta = 0.$$

Как хорошо, что мы умеем находить общее решение такого уравнения (см. пример $u_{xy} + a(x)u_y = 0$). Если заметить, что в нашем последнем примере $a = -\frac{1}{4\xi}$, то легко получить общее решение:

$$u(\xi, \eta) = (f(\xi) + g(\eta))\, e^{\frac{1}{4}\int\frac{d\xi}{\xi}} = (f(\xi) + g(\eta))\, \xi^{\frac{1}{4}}.$$

Вернемся к старым переменным:

$$u(x, y) = \big(f(x^3y) + g(x^{-1}y)\big)\, x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}.$$

Теперь будем находить функции f, g. Для удобства найдем сначала производную от общего решения.

$$u_y(x, y) = \left(x^3f'(x^3y) + \frac{1}{x}g'(\frac{y}{x})\right) x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\left(f(x^3y) + g(\frac{y}{x})\right) x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}.$$

Применив начальные условия, получим два равенства

$$\begin{aligned} &f(x^3) + g(\tfrac{1}{x}) = 0,\\ &\big(x^3f'(x^3) + \tfrac{1}{x}g'(\tfrac{1}{x})\big)\, x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{7}{4}}. \end{aligned}$$

—Как же мы будем интегрировать второе равенство?
—Да, здесь не так просто...
—Вот если бы было не $x^3f'(x^3)$, а $\frac{1}{3}x^2f'(x^3)$, и не $\frac{1}{x}g'(\frac{1}{x})$, а $-\frac{1}{x^2}g'(\frac{1}{x})$, то мы бы смогли.
—Смотри, если мы вынесем x за скобки, то так и получится! Ура! А то, что степень у x за скобками теперь будет другая, это совсем не страшно, все равно перенесем в правую часть.
—Ну, тогда за дело.

Вот что получилось: сначала вынесли за скобки x

$$\left(x^2f'(x^3) + \frac{1}{x^2}g'(\frac{1}{x})\right) x^{\frac{7}{4}} = x^{\frac{7}{4}}.$$

Потом, сократив на $x^{\frac{7}{4}}$, проинтегрировали

$$\int x^2f'(x^3)dx = \frac{1}{3}f(x^3), \quad \int \frac{1}{x^2}g'(\frac{1}{x})dx = -g(\frac{1}{x})$$

и пришли к системе

$$\begin{cases} f(x^3) + g(\frac{1}{x}) = 0, \\ \frac{1}{3} f(x^3) - g(\frac{1}{x}) = x + C, \end{cases}$$

откуда нашли

$$f(x^3) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}C, \ g(\frac{1}{x}) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}C.$$

Подставив найденные функции в общее решение, получили решение задачи Коши:

$$u(x, y) = \frac{3}{4} x^{\frac{7}{4}} (y^{\frac{7}{12}} - y^{-\frac{3}{4}}).$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи Коши:

1. $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0, \ \ u(x, 0) = x, \ u_y(x, 0) = 0, \ |x| < \infty, \ y > 0.$

2. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \ \ u(x, 0) = 0, \ u_y(x, 0) = x + \cos x, \ |x| < \infty, \ y > 0.$

3. $xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} = 0, \ |y| < \infty, \ x > 0,$
$u(x, \frac{1}{x}) = x^3, \ \ u_x(x, \frac{1}{x}) = 2x^2.$

4. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0, \ \ u(1, y) = y, \ u_x(1, y) = y, \ y < 0.$

5. $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0,$
$u|_{y=\sin x} = x + \cos x, \ u_y|_{y=\sin x} = \sin x.$

6. Доказать, что решение задачи Коши
$u_{xy} = 0, \ \infty < x, y < \infty, \ u|_{y=0} = u_0(x), \ u_y|_{y=0} = u_1(x)$
существует только тогда, когда $u_0 \in C^2(R^1), \ u_1(x) \equiv const$. Показать, что решение не единственно и все решения этой задачи можно представить в виде $u(x, y) = u_0(x) + f(y) - f(0) + e[u_1(0) - f'(0)]$, где произвольная функция из класса $C^2(R^1)$.

7.Доказать, что задача Коши

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \ \ u|_{y=0} = u_0(x), \ u_y|_{y=0} = u_1(x),$$

где $u_0(x), u_1(x)$ заданы на интервале $(-1, 1)$ и $u_0 \in C^2(0, 1), \ u_1 \in C^1(0, 1)$, имеет единственное решение в квадрате $\{|x - y| < 1, \ |x + y| < 1)\}$.

Задачи 6 и 7 немного труднее предыдущих. Будет полезно воспользоваться учебниками, например, [1] или [2].

4. Колебания ограниченной струны

Решая задачу Коши, мы предполагали, что струна ОЧЕНЬ длинная, поэтому то, что происходит на ее концах, оказывает такое малое влияние на процесс колебания, что им можно пренебречь. Но если струна имеет конечные размеры, то режим на ее концах придется учитывать. Возникающие при математическом моделировании условия называются *граничными.*

Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной l : $0 \leq x \leq l$. Отклонение струны от положения равновесия, совпадающего с осью x, мы обозначили $u(x,t)$.

1. Пусть известен закон движения концов струны:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \mu_1(t), \\ u(l,t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \tag{25}$$

2. Пусть известны силы, $\tilde{\nu}_i(t)$, приложенные к концам струны. В силу закона Гука натяжение $T(x,t) = k(x,t)u_x(x,t)$, где $k(x)$—модуль Юнга. Обозначим $\nu_1(t) = \frac{1}{k(0)}\tilde{\nu}_1(t), \quad \nu_2(t) = \frac{1}{k(l)}\tilde{\nu}_2(t)$. Тогда на концах струны

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \nu_1(t), \\ u_x(l,t) &= \nu_2(t), \end{aligned} \tag{26}$$

3. Пусть концы закреплены упруго, с помощью, например, пружинок. Тогда упругая сила закрепления вызывает на конце натяжение, стремящееся вернуть сместившийся конец в прежнее положение. Эта сила согласно закону Гука пропорциональна смещению, и поэтому на концах струны в этом случае

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= h[u(0,t) - \theta(t)], \\ u_x(l,t) &= -h[u(l,t) - \theta(t)], \end{aligned} \tag{27}$$

$h = \frac{\alpha}{k}$, α—коэффициент жесткости закрепления, $\theta(t)$—смещение конца струны от начального положения, если таковое имеет место. (Заметим, что могут быть и различные коэффициенты h_i для левого и правого концов. Мы их взяли равными для простоты.)

Рассмотрим важный во всех отношения случай, когда условия 1—3 однородны. Будем говорить, что если $\mu_i(t) = 0$, то концы *жестко закреплены*:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \tag{28}$$

если $\nu_i(t) = 0$, то концы *свободны*:

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \tag{29}$$

если $\theta(t) = 0$, то концы *упруго закреплены*:

$$u_x(0,t) - hu(0,t), \quad u_x(l,t) + hu(l,t). \tag{30}$$

—Коля, ты хорошо все объяснил, но неужели больше нет никаких вариантов закрепления?
—Хороший вопрос—сказал Коля. — Я просто не успел сказать, что вариантов множество, но нет смысла их все перечислять. Да и мало ли что может произойти на концах струны. Но зная физические законы и учитывая ограничения, в рамках которых построена модель колебаний струны, можно их вывести. Некоторые интересные ситуации описаны в [1] с. 45-46, а также в Приложениях к главе II (с. 148-188). Замечу также, что условия, которые мы записали, можно комбинировать. Например, левый конец жестко закреплен, а правый свободен. Тогда граничные условия имеют вид:

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0.$$

—Давай уточним постановку задачи для ограниченной струны—сказал Петя.
—Кстати, задачи, в которых заданы и начальные, и граничные условия называют *смешанными* или *начально-краевыми* задачами.
— Нам по-прежнему нужно найти отклонение струны от положения равновесия, и по-прежнему заданы начальные условия, но теперь появились еще и граничные. Можно ли использовать формулу Даламбера, приспособив ее к новой ситуации, в которой нужно учесть граничные условия?
— Думаю, нет—сказал Коля, — и вот почему.
— В задаче Коши функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ заданы в $(-\infty, \infty)$, а в смешанной задачи они заданы в $[0, l]$. Рассмотрим формулу Даламбера (24) и положим в ней $x = \frac{l}{2}$. Тогда при $t = \frac{l}{a}$ аргумент функции $\varphi(x - at)$ будет равен $-\frac{l}{2}$, а функция $\varphi(x)$ нам известна только в $[0, l]$. Значит, нужно придумать, как приспособить эту формулу в новых условиях.

—Вспомнил!—воскликнул Петя. Об этом написано в [9]. Для того, чтобы воспользоваться формулой Даламбера, нужно заданные начальные условия, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, продолжить на всю ось.
—Ну, ее еще нужно найти, а у нас на столе учебник А.Н.Тихонова и А.А. Самарского. В ней описан другой метод решения начально-краевых задач — *метод разделения переменных.*

5. Метод разделения переменных, или метод Фурье.

Изложим этот метод на примере задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах.

5.1. Свободные колебания струны.

Найти в области $Q = (0, l) \times (0, \infty)$ решение уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{31}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in[0,l] \tag{32}$$

и граничным условиям

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0. \tag{33}$$

Под решением будем понимать функцию $u(x,t)\in C(\bar{Q})\cap C^2(Q)$ и удовлетворяющую (31)—(33).

Будем искать *частные решения* задачи в виде

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{34}$$

Подставим (34) в уравнение (31)и попытаемся найти функции $X(x), T(t)$ так, чтобы их произведение удовлетворяло (31):

$$X(x)T''(t)-a^2X''(x)T(t)=0.$$

Заметим, что, хотя уравнение (31) и однородное, нуль в качестве решения задачи нас никак не устраивает, так как заведомо не будет удовлетворять начальным условиям (32). Поэтому мы смело можем разделить обе части полученного равенства на $X(x)T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{35}$$

Внимательно посмотрев на это равенство, мы видим, что в левой его части стоит функция, зависящая только от t, (так как a постоянная), а в правой — функция только от x. Чтобы функция (34) была решением уравнения (31), равенство (35) должно выполняться тождественно, т.е. для всех $0<x<l,\ t>0$. Это возможно только тогда, когда обе функции равны постоянной:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=k, \tag{36}$$

и мы приходим к двум уравнениям

$$T''(t)-ka^2T(t)=0, \tag{37}$$

$$X''(x)-kX(x)=0. \tag{38}$$

Если функции $T(t),\ X(x)$ являются решениями уравнений (37) и (38) соответственно, то $u(x,t)=X(x)T(t)$ удовлетворяет уравнению (31). Это очень хорошо, но недостаточно для решения поставленной задачи, так как пока нет никакой информации о выполнении или невыполнении граничных и начальных условий. Начнем с попытки удовлетворить граничным условиям. Из (34) при $x = 0, x = l$ получаем $X(0)T(t) = 0,\ X(l)T(t) = 0$. Так как мы ищем нетривиальное решение, то не можем допустить, чтобы $T(t) \equiv 0$, поэтому $X(0) = 0,\ X(l) = 0$.

Таким образом, для того, чтобы решение задачи (31)—(33) удовлетворяло граничным условиям (33), функция $X(x)$ должна удовлетворять не только уравнению (38), но и однородным граничным условиям, полученным выше. Другими словами, функцию $X(x)$ нужно искать как решение задачи Штурма-Лиувилля:

Найти нетривиальные решения однородной задачи

$$\begin{aligned} X''(x) - kX(x) &= 0, \\ X(0) = X(l) &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Значения параметра k, при которых существует нетривиальное решение задачи (39), называются *собственными значениями*, а соответствующие им решения —*собственными функциями* задачи. Скорее всего, нетривиальные решения существуют не для всех k. Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр k положителен, равен нулю и отрицателен.

1. $k > 0$. Общее решение уравнения (38) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}.$$

Применив граничные условия, получим

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad X(l) = C_1 e^{l\sqrt{k}} + C_2 e^{-l\sqrt{k}} = 0,$$

откуда

$$C_1 = -C_2, \quad C_1(e^{l\sqrt{k}} - e^{-l\sqrt{k}}) = 0.$$

Так как k действительное положительное число, то $C_1 = C_2 = 0$, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

2. $k = 0$. Общее решение уравнения (38) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

и после применения граничных условий получаем $X(x) \equiv 0$.

У нас осталась последняя надежда.

3. $k < 0$. Для удобства обозначим $-k = \lambda^2$. Уравнение (38) запишется в виде

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Легко видеть, что в этом случае корни характеристического уравнения $\mu^2 + \lambda^2$ комплексные: $\mu = \pm\lambda i$, и общее решение может быть записано так:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Применим граничные условия. Из условия $X(0) = 0$ следует $C_1 = 0$. Из второго условия $X(l) = 0$ следует $C_2 \sin \lambda l = 0$. Если $C_2 = 0$, то мы опять получим тривиальное решение. Но у нас есть еще одна возвожность удовлетворить второму граничному условию:

$$\sin \lambda l = 0,$$

откуда $\lambda l = \pi n$, а значит, при $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ все-таки существуют нетривиальные решения $X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$.

Итак, мы нашли собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (39):

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \qquad X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}. \tag{40}$$

Собственные функции определяются с точностью до произвольного множителя, который можный положить равным единице.

При найденных значениях параметра легко находим общее решение уравнения (37):

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l}.$$

Мы искали частные решения, и мы их нашли:

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = (A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l}) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Каждая из этих функций удовлетворяет уравнению (31) и граничным условиям (33).

Воникает два вопроса: не слишком ли много решений и как удовлетворить начальным условиям. Оказывается, можно найти ответ сразу на оба вопроса.

Будем теперь искать решение задачи (31)—(33) в виде ряда, членами которого являются найденные частные решения:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l}) \sin \frac{\pi n x}{l}. \tag{41}$$

Раз у нас появился ряд, то непременно возникает вопрос о его сходимости. Вопрос о сходимости ряда мы обсудим позже, а сейчас постараемся найти счетное множество его коэффициентов, располагая лишь двумя начальными условиями. Положим в (41) $t = 0$. Тогда из первого начального условия

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \tag{42}$$

Продифференцируем ряд (41) по t, а затем положим $t = 0$. В силу второго начального условия

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{l} \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{43}$$

—Что-то знакомое—сказал Коля.

—Да это же ряды Фурье!—воскликнул Петя.

Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то коэффициенты находятся по формулам

$$\begin{aligned} A_n &= \tfrac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\tfrac{\pi n}{l}x\,dx, \\ B_n &= \tfrac{2}{\pi n a}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\tfrac{\pi n}{l}x\,dx. \end{aligned} \tag{44}$$

Итак, если ряд (41) равномерно сходится, а также равномерно сходятся ряды, полученные формальным дифференцированием по t и по x дважды, то в силу обобщенного принципа суперпозиции [1] сумма этого ряда и будет искомым решением задачи (31)—(33).

Подробное исследование сходимости ряда (41) и рядов из вторых производных можно найти в [1] (с. 97 — 101), но некоторые утверждения и рассуждения здесь приведем.

Итак, нам нужно исследовать сходимость рядов:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin\frac{\pi n a t}{l})\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$u_t(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n(-A_n \sin\frac{\pi n a t}{l} + B_n \cos\frac{\pi n a t}{l})\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$u_{xx}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -(\frac{\pi}{l})^2\sum_{n=1}^{\infty} n^2(A_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin\frac{\pi n a t}{l})\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$u_{tt}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -(\frac{\pi}{l})^2\sum_{n=1}^{\infty} n^2(A_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin\frac{\pi n a t}{l})\sin\frac{\pi n x}{l},$$

которые с точностью до множителей мажорируются соответственно числовыми рядами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|A_n| + |B_n|), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2(|A_n| + |B_n|).$$

Так как
$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{1}{\pi a n}\psi_n,$$
где $\varphi_n, \quad \psi_n$ — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x), \ \psi(x)$:
$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx, \quad \psi_n = \frac{2}{\pi n a}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,$$
то задача сводится к доказательству сходимости рядов
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k|\varphi_n|, \quad k = 0, 1, 2,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k|\psi_n|, \quad k = -1, 0, 1.$$
Используя известные свойства тригонометрических рядов Фурье ([2], с.122-123. [9], т.II, глава VI), получаем условия на входные данные, обоспечивающие сходимость рядов:

$\varphi(x)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно, имеет третью кусочно-непрерывную производную и
$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0;$$
$\psi(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет кусочно непрерывную производную второго порядка и
$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

5.2. Вынужденные колебания струны.

Вынужденные колебания описываются неоднородным уравнением
$$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x, t). \tag{45}$$
Пусть начальные и граничные условия те же, что и в задаче (31)—(33). Так как в правой части стоит произвольная функция, относительно которой пока будем предполагать только, что она достаточно гладкая, то вряд ли мы сможем разделить переменные, как при решении задачи для однородного уравнения. А если даже и сможем, то не получим после разделения переменных задачу Штурма-Лиувилля, так как уравнение относительно $X(x)$ будет неоднородным. Но тогда мы и не найдем собственные функции, а именно они дали нам возможность искать решение задачи в виде ряда *по собственным функциям* и найти его, пользуясь свойством ортогональности собственных функций и полнотой их системы.

Будем искать решение задачи (45), (32), (33) как сумму двух функций $u = u^0 + v$, каждая из которых является решением начально- краевой задачи:

Задача H. Найти решение однородного уравнения

$$u^0_{tt} - a^2 u^0_{xx} = 0,$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u^0(x,0) = \varphi(x), \quad u^0_t(x,0) = \psi(x)$$

и граничным условиям

$$u^0(0,t) = 0, \quad u^0(l,t) = 0.$$

Задача NH. Найти решение неоднородного уравнения

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t),$$

удовлетворяющее нулевым начальным данным

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0$$

и граничным условиям

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0.$$

—Логично,—сказал Коля, но почему ты их так обозначил?
—H от $Homogeneous$—однородный, NH от $Nonhomogeneous$—неоднородный. Задачу H мы только что решили. Поэтому сразу перейдем к задаче NH и будем искать ее решение в виде *ряда по собственным функциям однородной задачи:*

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) X_n(x). \tag{46}$$

В нашем случае

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

— А почему не написать эти собственные функции в формуле (46)?
— На всякий случай. Ведь в другой задаче могут быть *другие* собственные функции.

Подставим (46) в уравнение (45), чтобы найти функции $V_n(t)$. После элементарных преобразований получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} [V_n''(t) + \omega^2 V_n(t)] \sin\frac{\pi n x}{l} = f(x,t),$$

где обозначено $\omega = \frac{a\pi n}{l}$. В левой части — ряд по синусам, его коэффициенты — выражения в квадратных скобках. Если мы их найдем, то потом нужно будет решить очень много дифференциальных уравнений. Кстати, для того, чтобы функция $v(x,t)$ удовлетворяла нулевым начальным условиям, достаточно, чтобы $V_n(0) = 0, \;\; V_n'(0) = 0$. (Выполнение нулевых граничных условий гарантируют собственные функции).

Итак, сейчас мы должны получить дифференциальные уравнения.
— Если бы в правой части тоже был ряд, то мы приравняли бы коэффициенты рядов...
—Так давай создадим в правой части ряд, разложив функию $f(x,t)$ в ряд Фурье по синусам!

И мальчики принялись раскладывать функцию в ряд. Вот что у них после этого получилось:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[V_n''(t) + \omega^2 V_n(t)] \sin\frac{\pi n x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где $f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$ — коэффициенты Фурье функции $f(x,t)$. Приравняв теперь коэффициенты, пришли, учитывая условия в нуле, к задаче Коши для каждого n :

$$\begin{array}{l} V_n''(t) + \omega^2 V_n(t) = f_n(t), \\ V(0) = 0, \quad V_n'(0) = 0. \end{array} \tag{47}$$

— Такие задачи мы решали на втором курсе! Решение для каждого n дается формулой

$$V_n(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi n a(t-\tau)}{l}d\tau.$$

(Эта формула может быть получена методом вариации произвольных постоянных, который излагается во многих учебниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям.)

Найдя $V_n(t)$, мы нашли и $v(x,t)$. Решение задачи NH представляется формулой

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n \cos\frac{\pi a n t}{l} + \frac{l}{\pi a n}\psi_n \sin\frac{\pi a n t}{l})\sin\frac{\pi n x}{l} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi a n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi n a(t-\tau)}{l}d\tau. \tag{48}$$

5.3. Неоднородные граничные условия

Мы рассмотрели задачу с однородными граничными условиями и научились ее решать, даже если уравнение неоднородно. А что делать, если граничные условия неоднородны? Упростим сначала задачу, рассмотрев однородное уравнение:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,$$
$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x).$$

Ищем частные решения в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Разделив переменные в уравнении, получим два обыкновенных дифференциальных уравнений, одно из которых

$$X''(x) - kX(x) = 0.$$

В случае однородных граничных условий мы смогли получить *однородные* граничные условия $X(0) = 0$, $X(l) = 0$, что привело к задаче Штурма-Лиувилля, нашли собственные функции $X_n(x)$, а затем и решение поставленной задачи в виде ряда *по собственным функциям.*

—Что же получится в случае неоднородных граничных условий?

—Пока не знаю. А вот что *не получится* — так это задача Штурма-Лиувилля. Действительно, попробуем найти граничные условия так, как это делали в случае однородной задачи:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = X(l)T(t) = \mu_2(t).$$

Понятно, что никаких разумных граничных условий для $X(x)$ мы не найдем, тем более однородных.

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$, положив $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, где функция $w(x,t)$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и искомое решение $u(x,t)$:

$$w(0,t) = \mu_1(t), \quad w(l,t) = \mu_2(t).$$

— А уравнению эта функция должна удовлетворять?

—Этого не требуется, но если случайно так получится, не страшно.

—А как найти эту функцию?

—Придумать. Но можно вывести правила построения, вот например в случае первой начально-краевой задачи

$$w(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

—Понятно, теперь мы получили задачу относительно новой неизвестной функции с однородными граничными условиями:

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = a^2 w_{xx} - w_{tt},$$

$$v(0,t)=0, \quad v(l,t)=0,$$
$$v(x,0)=\varphi(x)-w(x,0), \quad v_t(x,0)=\psi(x)-w_t(x,0).$$

Не страшно, что уравнение теперь неоднородное, в предыдущем параграфе приведен метод решения. Теперь можно описать схему решения первой начально- краевой задачи с неоднородными граничными условиями для уравнения колебаний струны, в том числе, для неоднородного уравнения.

1. Сводим граничные условия к однородным, вводя новую неизвестную функцию

$$v(x,t)=u(x,t)-w(x,t), \quad w(0,t)=\mu_1(t), \quad w(l,t)=\mu_2(t).$$

Приходим к задаче относительно $v(x,t)$:

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=f(x,t)+a^2w_{xx}-w_{tt},$$
$$v(0,t)=0, \quad v(l,t)=0,$$
$$v(x,0)=\varphi(x)-w(x,0), \quad v_t(x,0)=\psi(x)-w_t(x,0).$$

2. Решаем эту задачу так, как описано выше, т.е. ищем решение в виде суммы

$$v(x,t)=v^0(x,t)+v^1(x,t),$$

где $v^0(x,t)$ и $v^1(x,t)$ суть решения задач:

$$v^0_{tt}-a^2v^0_{xx}=0,$$
$$v^0(0,t)=0, \quad v^0(l,t)=0,$$
$$v^0(x,0)=\varphi(x)-w(x,0), \quad v^0_t(x,0)=\psi(x)-w_t(x,0).$$
$$v^1_{tt}-a^2v^1_{xx}=f(x,t)+a^2w_{xx}-w_{tt},$$
$$v^1(0,t)=0, \quad v^1(l,t)=0,$$
$$v^1(x,0)=0, \quad v^1_t(x,0)=0.$$

3. Получаем решение исходной задачи:

$$u(x,t)=v^0(x,t)+v^1(x,t)+w(x,t).$$

Итак, первую начально-краевую задачу для уравнения колебаний струны можно решить, следуя полученному рецепту. Неизбежно возникают вопросы, как быть в других ситуациях:
граничные условия другие;
уравнение другое.
—Я думаю, — сказал Петя, — нужно применить метод "мисс Марпл".
—???

—метод аналогий. Посмотреть внимательно, что изменилось, и постараться применить уже известные методы в новой ситуации. При этом внимательно следить за возможностью их применения и модифицировать их, если это необходимо.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u,$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x.$$

Прежде всего выясним, чем эта задача отличается от модельной. Легко видеть, чтоб в этой задаче другое уравнение и другие граничные условия. Попытаемся решить эту задачу по уже известной схеме. Ищем частные решения $u(x,t) = X(x)T(t)$. После подстановки в уравнение и деления на $X(x)T(t)$ получаем два уравнения:

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad T''(t) + 2T'(t) + (1-k)T = 0.$$

Из граничных условий $X'(0) = 0$, $X(\pi) = 0$ и мы приходим к задаче Штурма-Лиувилля

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(\pi) = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что при $k \geq 0$ нетривиальных решений нет. Рассмотрим $k < 0$. Обозначив, как и выше, $-k = \lambda^2$, получим общее решение

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x,$$

применив к которому краевые условия $X'(0) = 0$, $X(\pi) = 0$, получим собственные значения $\lambda_n = \frac{2n+1}{2}$ и собственные функции $X_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x$. Теперь решим второе из уравнений, полученных в результате разделения переменных.

$$T''(t) + 2T'(t) + (1+\lambda^2)T = 0.$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 + 2\mu + (1+\lambda^2) = 0$ имеет комплексные корни $\mu = -1 \pm \lambda i$, поэтому его решением будут функции

$$T_n(t) = e^{-t}(A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t).$$

Частные решения построены, и мы приступаем к поиску решения, которое будет удовлетворять и начальным условиям. Ищем его в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t}(A_n \cos \frac{2n+1}{2} t + B_n \sin \frac{2n+1}{2} t) \cos \frac{2n+1}{2} x.$$

Применим начальные условия. Из первого следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{2n+1}{2} x = 0 \Rightarrow A_n = 0.$$

Из второго:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{2n+1}{2} = x.$$

Найдем коэффициенты ψ_n разложения функции x в ряд фурье по $\cos \frac{2n+1}{2} x$:

$$\psi_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \cos \frac{2n+1}{2} x dx.$$

Вычислив интеграл, получим

$$\psi_n = \frac{4}{2n+1} \left((-1)^n - \frac{2}{\pi(2n+1)} \right).$$

Приравняв коэффициенты рядов $B_n \frac{2n+1}{2} = \psi_n$, получим

$$B_n = \frac{8}{(2n+1)^2} \left((-1)^n - \frac{2}{\pi(2n+1)} \right)$$

и решение задачи дается формулой

$$u(x,t) = 8e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left[(-1)^n - \frac{2}{\pi(2n+1)} \right] \sin \frac{2n+1}{2} t \cos \frac{2n+1}{2} x.$$

Пример 2.

$$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1-4t) + \cos 3x,$$

$$u_x(0,t) = t, \quad u(\pi/2, t) = \frac{\pi t}{2}, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x.$$

Так как граничные условия этой задачи неоднородны, сведем их к однородным. Немного подумав, положим $w(x,t) = xt$ и введем новую неизвестную функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - w(x,t).$$

Подставив $u = v + w$ в уравнение, приходим к задаче:

$$v_{tt} + 2v_t = v_{xx} + 8v + \cos 3x,$$

$$v_x(0,t)=0,\ v(\pi/2,t)=0,\ v(x,0)=0,\ v_t(x,0)=0.$$

Теперь граничные условия однородны, и мы решаем задачу по схеме, предложенной для решения задач для неоднородныго уравнения, т.е. ищем решение в виде $v(x,t)=v^0(x,t)+v^1(x,t)$, где

$$v^0_{tt}+2v^0_t=v_{xx}+8v^0,$$

$$v^0_x(0,t)=0,\ v^0(\pi/2,t)=0,\ v^0(x,0)=0,\ v^0_t(x,0)=0.$$

Разделив переменные и воспользовавшись опытом решения предыдущей задачи, получаем собственные числа и собственные функции:

$$\lambda_n=1+2n,\quad X_n(x)=\cos(1+2n)x.$$

Так как начальные условия однородны, то $v^0(x,t)=0$, и мы переходим к нахождению $v^1(x,t)$, которая должна быть решением задачи

$$v^1_{tt}+2v^1_t=v^1_{xx}+8v^1+\cos 3x,$$

$$v^1_x(0,t)=0,\ v^1(\pi/2,t)=0,\ v^1(x,0)=0,\ v^1_t(x,0)=0.$$

—Но это же задача относительно $v(x,t)$, зачем мы ее искали в виде суммы?
—Нам нужны собственные функции, поэтому мы рассмотрели задачу относительно $v^0(x,t)$. А задачи совпали только потому, что в задаче относительно $v(x,t)$ начальные условия нулевые. Однако индекс можно теперь опустить.

Следуя схеме, будем искать функцию $v(x,t)$ в виде

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(t)\cos(1+2n)x.$$

Подставив в уравнение, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(V_n''(t)+2V_n'(t)+[(1+2n)^2-8]V_n(t)\right)\cos(1+2n)x=\cos 3x.$$

—Теперь нужно разложить $\cos 3x$ в ряд Фурье?
—Можно, но лень...
—Лень — двигатель прогресса! Если немного подумать, прежде чем вычислять интегралы, то можно заметить, что в правой части равенства стоит одна из собственных функций, эти функции ортогональны, поэтому только один коэффициент будет отличен от нуля: при $n=1$. Так как функции $V_n(t)$ должны удовлетворять условиям $V_n(0)=0,\quad V_n'(0)=0$, то все $V_n(t)$, кроме $V_1(t)$, равны нулю как решения однородной задачи Коши, а $V_1(t)$ найдем как решение задачи

$$V_1''(t)+2V_1'(t)+V_1(t)=1,$$

$$V_1(0) = 0,\ V_1'(0) = 0.$$

Получим:

$$V_1(t) = 1 - (1+t)e^{-t},$$

тогда

$$v(x,t) = [1 - (1+t)e^{-t}]\cos 3x$$

и решение задачи получим в виде суммы:

$$u(x,t) = [1 - (1+t)e^{-t}]\cos 3x + xt.$$

5.4. Задача о колебании мембраны.

В отличие от струны мембрана имеет два измерения, поэтому уравнение ее малых колебаний описывается уравнением

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}). \tag{49}$$

Во многих приборах используются круглые мембраны, закрепленные по краю, и мы начнем как раз с этого случая. Будем считать, что центр мембраны совпадает с началом координат, а радиус ее равен l. Таким образом, область, в которой нам предстоит найти решение задачи, представляет собой полубесконечный цилиндр $Q = \Omega \times (0, \infty)$, где Ω — круг $x^2 + y^2 < l^2$, а граница области изменения пространственных координат — окружность $x^2 + y^2 = l^2$. В случае круговых областей часто бывает полезно перейти к полярным координатам, что мы и сделаем, положив

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Проделав элементарные преобразования, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right).$$

Сначала рассмотрим *радиальные* колебания. Будем считать, что начальные смещения и начальные скорости не зависят от угла φ. В этом случае при любом t искомое решение не зависит от переменной φ ([10], глава XI, § 8, с. 361), и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{50}$$

а область $Q = (0, l) \times (0, \infty)$. Итак, нужно найти решение уравнения (50), удовлетворяющее граничному условию $u(l,t) = 0$ и начальным данным

$$u(r,0) = \phi(r), \quad u_t(r,0) = \psi(r).$$

Задача похожа на те, которые мы решили, но есть и отличия. Мы пока не знаем, какое влияние они имеют на процесс решения, поэтому поставим эксперимент: попробуем и здесь применить метод разделения переменных. Будем искать решение в виде $u(r,t) = R(r)T(t)$. Действуя так же, как и выше, приходим к двум уравнениям

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0,$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R' + \lambda^2 R = 0. \tag{51}$$

—А почему мы рассматриваем сразу тот случай, когда $k < 0$, если проводить аналогию с задачами о колебании струны?
—Мы обязательно рассмотрим и два других случая.

И мальчики продолжили решать задачу. Однако, внимательно посмотрев на уравнение (51), они задумались:

это линейное уравнение второго порядка, но коэффициенты его уже не постоянные! Как найти его общее решение?
—Кажется, на втором курсе мы такое уравнение не встречали. Что делать?
—Давай полистаем книги. Начнем с Э.Камке [11], там много всяких уравнений.

Мальчики открыли главу II, "Линейные уравнения второго порядка и через некоторое время увидели на с. 449 очень похожее на (51) уравнение

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{52}$$

Действительно, если обе части уравнения (51) умножить на r^2, то оно становится частным случаем (52) для $\nu = 0$. Ну не совсем. Мы получим вот такое уравнение:

$$r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0.$$

Множитель λ^2 в последнем слагаемом немного портит картину. Сделаем замену, положив $\lambda r = x$. Тогда

$$R_r = \frac{1}{\lambda}R_x,\ R_{rr} = \frac{1}{\lambda^2}R_{xx},$$

и после подстановки в уравнение получим

$$x^2 R'' + xR' + x^2 R = 0.$$

Мы уже провели серьезное расследование, но все еще не знаем, как это уравнение решить. Просто настоящий детектив. Думаю, нам нужен Шерлок Холмс.
—Нет, нам нужен Ватсон!
—Почему?

—Да, именно Г.Н. Ватсон и его книга "Теория бесселевых функций"[12], ведь это *уравнение Бесселя*! Но можно ограничиться тем, что изложено в книгах [2] (глава XIII), [1] (Дополнение II, часть I.).

Мальчики открыли книгу [2], прочитали и смогли написать общее решение уравнения (51):

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r). \tag{53}$$

Полученное решение содержит два неизвестных коэффициента и неизвестный параметр. В краевых задачах для струны у нас было два граничных условия, и мы смогли определить параметр и один из коэффициентов. Сейчас у нас только одно граничное условие!

Мальчики опять стали читать учебник [2] и обратили внимание на то, что функция $Y_0(x)$ неограниченно возрастает при $x \to 0$. Параметр $\lambda \neq 0$, однако $r = 0$ принадлежит области, в которой ищется решение. Уточним, что мы понимаем под решением задачи о малых колебаниях мембраны. Будем искать ограниченное решение из класса $C^2(Q) \cap C(\bar{\Omega} \times (0, \infty))$. Присутствие в формуле решения функции $Y_0(\lambda r)$ не позволит нам получить ограниченное решение. Чтобы устранить это препятствие, положим $C_2 = 0$. Таким образом, требование ограниченности решения сыграло роль граничного условия.

Применим теперь настоящее граничное условие, в результате чего получим

$$J_0(\lambda l) = 0. \tag{54}$$

В отличие от уравнения $\sin \lambda l = 0$, к которому мы пришли при решении первой начально-краевой задачи для уравнения струны, мы не можем *выписать* корни уравнения (54), однако нам достаточно иметь информацию о существовании, количестве и качестве корней этого уравнения. Эта информация может быть найдена в книге [2] (глава XIII), и с ее помощью мы получаем *собственные числа* и *собственные функции* нашей задачи:

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}, \quad R(r) = J_0(\frac{\mu_n}{l} r), \tag{55}$$

где μ_n — корни функции Бесселя $J_0(x)$.

Приведем здесь без доказательств (см.[2]) некоторые сведения о функциях Бесселя.

Частными решениями уравнения (52) являюется функции $J_\nu(x), \ J_{-\nu}(x)$— функции Бесселя первого рода порядка ν и $-\nu$ соответственно.

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}.$$

Если ν не равно целому числу, то $J_\nu(x), \quad J_{-\nu}(x)$ линейно независимы, и общее решение уравнения (52) имеет вид

$$u(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Если $\nu = n$, то $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы, поэтому необходимо найти второе частное решение, линейно независимое от $J_n(x)$. Такое решение найдено, называется функцией Бесселя второго рода и имеет вид

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.$$

Легко видеть, что при $\nu = n$ правая часть этого выражения — неопределенность вида $\frac{0}{0}$. После раскрытия неопределенности получим длинную формулу (см.[2], с. 159, ф.18), которую здесь приведем для случая $n = 0$:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}J_0(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{2k}}{(k!)^2}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

Все корни функции $J_\nu(x)$ при $\nu > -1$ вещественны, симметрично расположены на оси Ox относительно точки $x = 0$ и не имеют конечных предельных точек.

Функции Бесселя обладают важным свойством ортогональности:

$$\int_0^l xJ_\nu(\frac{\mu_i x}{l})J_\nu(\frac{\mu_j x}{l})dx = \begin{cases} \frac{l^2}{2}[J'_\nu(\mu_i)]^2 = \frac{l^2}{2}J^2_{\nu+1}(\mu_i), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{56}$$

Справедливы рекуррентные соотношения:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x),$$

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x),$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x).$$

Представление

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_\nu(\mu_k\frac{x}{l}),$$

где коэффициенты a_k определяются по формулам

$$A_k = \frac{2}{l^2 J^2_{\nu+1}(\mu_k)}\int_0^l xf(x)J_\nu(\mu_k\frac{x}{l})dx, \tag{57}$$

называется разложением функции в ряд Фурье-Бесселя.

Справедлива следующая теорема ([1], с. 681):

Всякая дважды дифференцируемая функция $f(x)$, ограниченная при $x = 0$ и обращающаяся в нуль при $x = l$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_\nu(\frac{\mu_k}{l}x),$$

коэффициенты которого определяются по формулам (57).

Теперь можем вернуться к решению задачи о колебании круглой мембраны. Будем искать решение в виде ряда из частных решений, т.е. в виде

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\frac{a\mu_n}{l}t + B_n \sin\frac{a\mu_n}{l}t)J_0(\frac{\mu_n}{l}r).$$

Из начальных условий найдем коэффициенты этого ряда.

Положив $t = 0$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\frac{\mu_n}{l}r) = \phi(r),$$

откуда в силу формулы (57)

$$A_n = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_n)} \int\limits_0^l r\phi(r)J_0(\mu_n\frac{r}{l})dr.$$

Из второго начального условия после необходимых действий (найдем производную, положим $t = 0$) получим

$$B_n = \frac{2}{a\mu_n l J_1^2(\mu_n)} \int\limits_0^l r\psi(r)J_0(\mu_n\frac{r}{l})dr.$$

Теперь можно выписать решение задачи. Оно имеет очень громоздкий вид, поэтому мы его выписывать не будем, а рассмотрим частный случай начальных условий.

Пусть начальное отклонение мембраны имеет форму параболоида вращения, а начальная скорость равна нулю, т.е.

$$u(r,0) = h(1 - \frac{r^2}{l^2}), \quad u_t(r,0) = 0.$$

Понятно, что в этом случае все $B_n = 0$, а коэффициенты A_n найдем, вычислив интеграл

$$\int\limits_0^l r(1 - \frac{r^2}{l^2})J_0(\frac{\mu_n}{l}r)dr.$$

—Но как вычислить этот интеграл?
—Да, таких интегралов мы не встречали на занятиях по матанализу. Но есть замечательная книга, большая и толстая, "Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений"[13], там мы и посмотрим.
—Ооо, какая книга! Огромная очень! А вдруг мы найдем то, что нам нужно, в какой-нибудь книге поменьше?

И они нашли, в [2], на с. 176 такие формулы:

$$\int_0^x \xi J_0(\xi)d\xi = xJ_1(x),$$

$$\int_0^x \xi^3 J_0(\xi)d\xi = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x)J_1(x).$$

Запишем теперь интеграл, который нам нужно вычислить, в виде суммы двух

$$\int_0^l r(1-\frac{r^2}{l^2})J_0(\frac{\mu_n}{l}r)dr = \int_0^l rJ_0(\frac{\mu_n}{l}r)dr - \frac{1}{l^2}\int_0^l r^3 J_0(\frac{\mu_n}{l}r)dr,$$

и сделаем замену переменной, положив $\frac{\mu_n}{l}r = \xi$. тогда получим

$$\int_0^l rJ_0(\frac{\mu_n}{l}r)dr = \frac{l^2}{\mu_n^2}\int_0^{\mu_n} \xi J_0(\xi)d\xi = \frac{l^2}{\mu_n}J_1(\mu_n),$$

$$\frac{1}{l^2}\int_0^l r^3 J_0(\frac{\mu_n}{l}r)dr = \frac{l^2}{\mu_n^4}\int_0^{\mu_n} \xi^3 J_0(\xi)d\xi = \frac{l^2(\mu_n^3 - 4\mu_n)}{\mu_n^4}J_1(\mu_n).$$

Окончательно получим

$$A_n = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_m)}\int_0^l hr(1-\frac{r^2}{l^2})J_0(\frac{\mu_n}{l}r)dr = \frac{8h}{\mu_n^3}J_1(\mu_n),$$

и решение задачи в этом частном случае имеет вид:

$$u(r,t) = 8h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}J_0(\frac{\mu_n}{l}r)\cos\frac{a\mu_n}{l}t.$$

Да, такие задачи решать не очень просто. Нужно привлекать самый разнообразный математический аппарат. Но теперь стало понятнее, для чего мы решали задачи по матанализу, алгебре, аналитической геометрии и обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить задачу о колебании струны $0 < x < l$ при произвольных начальных данных в следующих случаях:

a). Один конец ($x = 0$) жестко закреплен, а другой ($x = l$) свободен.

b). Оба конца свободны.

c). Один конец ($x = l$) закреплен упруго, а другой ($x = 0$) свободен.

2. Решить задачу о колебании струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если начальные скорости равны нулю, а начальное отклонение имеет форму:

a) $u(x, 0) = 3\sin\frac{5\pi x}{l}$,

b) параболы, осью симметрии которой служит прямая $x = \frac{l}{2}$, а вершиной — точка $(\frac{l}{2}, 4)$.

3. $u_{tt} = u_{xx} + 7, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, \; u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$

4.$u_{tt} = u_{xx} + \cos t, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \; u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$

5. $u_{tt} - u_{xx} = 0, \; u(0, t) = t + 1, \; u(1, t) = t^3 + 2,$
$u(x, 0) = x + 1, \; u_t(x, 0) = 0.$

6. $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x, \; u_x(0, t) = 2t, \; u(\frac{\pi}{2}, t) = \pi t,$
$u(x, 0) = \cos x, \; u_t(x, 0) = 2x.$

7. $u_{tt} - u_{xx} - 2u_t = 4t(\sin x - x), \; u(0, t) = 3, \; u_x(\frac{\pi}{2}, t) = t^2 + t,$
$u(x, 0) = 3, \; u_t(x, 0) = x + \sin x.$

8. $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t, \; u(0, t) = 0, \; u(\pi, t) = \pi t,$
$u(x, 0) = e^{-x}\sin x, \quad u_t(x, 0) = x.$

В задачах 9, 10 найти ограниченное решение:

9. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + (t^2 + 1)J_0(\mu_8 x), \; u(1, t) = 0,$
$u(x, 0) = 0, \; u_t(x, 0) = 0, \; \mu_8 > 0$ — корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

10.$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9u}{x^2}, \quad u(1, t) = 0,$
$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = J_3(\mu_1 x), \; \mu_1 > 0$ — корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 2004.

[2] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. *Уравнения в частных производных математической физики* М.: Высшая школа, 1970.

[3] Бицадзе А.В. *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 1976.

[4] Филиппов А.Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*, М.: Наука, 1985.

[5] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления* М.-Л.: Физматгиз, 1956.

[6] Трикоми Ф. *О линейных уравнениях смешанного типа* М.-Л.: Гостехиздат, 1947.

[7] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа* М.: Наука, 1970.

[8] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*, М.: Наука, 1981.

[9] Смирнов В.И. *Курс высшей математики* М.: Наука, 1974.

[10] Толстов Г.П. *Ряды Фурье* М.-Л.: Изд-во технико-теоретической литературы. 1951.

[11] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* М.: Наука, 1965.

[12] Ватсон Г.Н. *Теория бесселевых функций. Ч.I.* М.: Изд-во иностранной литературы. 1949.

[13] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* М., из-во физ.-мат. литературы. 1963.

Содержание

1. Классификация уравнений с частными производными 3
2. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка на плоскости 14
3. Задача Коши для гиперболический уравнений 24
4. Колебания ограниченной струны 31
5. Метод разделения переменных, или метод Фурье
   5.1. Свободные колебания струны 33
   5.2. Вынужденные колебания струны 39
   5.3. Неоднородные граничные условия 42
   5.4. Задача о колебании мембраны 49

Список литературы 57

Учебное издание

Пулькина Людмила Степановна

ПРАКТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции
Титульное редактирование Т. И. Кузнецовой
Компьютерная верстка, макет Л. С. Пулькиной

Подписано в печать 11.11.2015.
Гарнитура Times New Roman. Формат $60 \times 84/16$.
Typeset by LaTeX. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 2,8. Уч.-изд. л. 3,0 . Тираж 100 экз. Заказ № 2681.
Издательство «Самарский университет»,
443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
Отпечатано на УОП СамГУ