МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Кафедра дифференциальных уравнений и теории управления

Н. В. Воропаева, В. А. Соболев, Е. А. Щепакина

АНАЛИЗ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 01.03.01 "Математика" и специальности 01.05.01 "Фундаментальные математика и механика"

Самара
Издательство "Самарский университет"
2014

УДК 517.9
ББК 22.161.6
В 75

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. И. В. Асташова,
д-р физ.-мат. наук, проф. И. А. Блатов

Воропаева, Н. В.
В 75 **Анализ и декомпозиция дискретных динамических систем**: учеб. пособие / Н. В. Воропаева, В. А. Соболев, Е. А. Щепакина. — Самара : Изд-во «Самарский университет», 2014. — 88 с.
ISBN 978-5-86465-639-6

В учебном пособии излагаются основные положения общей теории теории уравнений и систем с дискретным временем. Базовые понятия иллюстрируются примерами.

Наряду с широко известными результатами приводятся оригинальные результаты авторов. Особое внимание уделяется анализу дискретных нелинейных систем, содержащих быстрые и медленные переменные. Предлагается метод декомпозиции, сочетающий в себе элементы качественных и асимптотических методов анализа. Использование этого метода позволило решить важную для приложений задачу понижения размерности.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 01.03.01 "Математика" и специальности 01.05.01 "Фундаментальные математика и механика", может быть полезно аспирантам и специалистам в области математического моделирования, прикладной математики и механики.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-86465-639-6

Оглавление

Введение **5**

1 Дискретные уравнения **7**
1.1 Уравнения первого порядка 7
1.1.1 Нелинейные уравнения первого порядка 7
1.1.2 Линейные уравнения первого порядка 8
1.2 Линейные дискретные уравнения высших порядков 10
1.2.1 Общие свойства решений 10
1.2.2 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами 14
1.2.3 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида 21
1.3 Задачи 27

2 Дискретные системы **29**
2.1 Общие свойства линейных однородных систем 29
2.2 Построение фундаментальной матрицы для линейной системы с постоянными коэффициентами 34
2.3 Алгоритм решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами 37
2.4 Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами и неоднородностью специального вида 44
2.5 Устойчивость решений 48
2.5.1 Основные определения 48
2.5.2 Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами 49
2.6 Задачи 53

3 Декомпозиция дискретных динамических систем **55**
3.1 Инвариантное многообразие медленных движений 55
3.2 Инвариантное многообразие быстрых движений 62
3.3 Расщепляющее преобразование 69
3.4 Устойчивость. Принцип сведения 70
3.5 Декомпозиция линейных систем 73
3.6 Линейно–квадратичная задача оптимального управления . 75
3.6.1 Декомпозиция матричного дискретного уравнения Риккати 75
3.6.2 Расщепление краевой задачи принципа максимума . 78

Литература **87**

Введение

Настоящее учебное пособие посвящено изучению динамических систем с дискретным временем. Такого сорта системы возникают при построении математических моделей реальных процессов, характерной особенностью которых является то, что анализируемая величина измеряется через некоторые, чаще всего постоянные, промежутки времени. Так, например, многие биологические, экономические, социальные системы являются дискретными по своей природе.

Компьютерное моделирование непрерывных динамических систем требует построения дискретных алгоритмов. Для этого обыкновенные дифференциальные уравнения аппроксимируются соответствующими дискретными уравнениями (производится квантование системы). При этом актуальной является не только разработка и обоснование численных методов анализа, но и изучение качественных аспектов динамики таких систем. Формальный перенос результатов теории дифференциальных уравнений на дискретный случай не всегда является корректным. Известно, например, что решения нелинейных дискретных уравнений уже первого порядка могут демонстрировать сложное поведение, которое не характерно для решений дифференциальных уравнений невысоких порядков.

Дискретные уравнения часто называют разностными, поскольку эти уравнения возникают при построении математических моделей динамических систем с использованием аппарата теории конечных разностей. Иногда используется термин "рекуррентные уравнения".

Учебное пособие состоит из трех глав. Первые две главы посвящены изложению базовых понятий, основных фактов общей теории линейных дискретных уравнений и систем, способов их решения. При этом прослеживается аналогия с теорией линейных дифференциальных уравнений и систем. Алгоритмы решения иллюстрируются примерами. В качестве дополнительной литературы по данному разделу могут быть рекомендованы работы [1–5]. Материал этих глав может быть использован при подготовке бакалавров.

Третья глава настоящего учебного пособия посвящена исследованию дискретных систем, содержащих разнотемповые переменные. В последнее время в связи с новыми прикладными задачами повысился интерес к таким системам. Им посвящено множество публикаций (см. например обзоры [6–8]). При этом широкий спектр задач сочетается со сравнительно небольшим арсеналом применяемых средств анализа. Абсолютное большинство статей и монографий по указанной тематике имеют в своей основе тот или иной метод построения асимптотических разложений решений начальных и краевых задач. В то же время во многих случаях необходимо следить за поведением системы в целом, а не отдельных траекторий, решать задачи качественного исследования.

В учебном пособии подробно излагается метод декомпозиции нелинейных дискретных разнотемповых систем. В основе предлагаемого алгоритма декомпозиции лежит геометрический подход, базирующийся на свойствах инвариантных многообразий медленных и быстрых движений. Расщепляющее преобразование строится в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. В качестве приложения рассмотрена линейно–квадратичная задача оптимального управления для системы с быстрыми и медленными переменными. Рассмотрены два подхода к решению задачи. В первом случае производится декомпозиция дискретного матричного уравнения Риккати. Во втором случае производится декомпозиция краевой задачи принципа максимума на краевую задачу для медленных переменных и две начальных задачи для быстрых переменных.

Материал третьей главы может быть использован при подготовке магистров по направлению "Математика" и специалистов по специальности "Фундаментальные математика и механика". Он также может быть полезен аспирантам и специалистам в области математического моделирования, прикладной математики и механики.

Глава 1

Дискретные уравнения

1.1 Уравнения первого порядка

1.1.1 Нелинейные уравнения первого порядка

Рассмотрим нелинейное дискретное уравнение первого порядка

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $t = 0, 1, \ldots$ — дискретно изменяющаяся независимая переменная, $x(t)$ — неизвестная скалярная функция (последовательность).

Проиллюстрировать решение уравнения (1.1) можно при помощи фазовой диаграммы (лестница Ламерея).

В плоскости переменных $x(t)$ и $x(t+1)$ изображается график функции $x(t+1) = f(x(t))$ и прямая $x(t+1) = x(t)$.

Точкам пересечения изображенных графиков соответствуют положения равновесия уравнения (1.1).

Начиная с произвольного $x(0) = x_0$ можно найти $x(1) = f(x_0)$ проведя сначала вертикальную прямую до пересечения с графиком функции $f(x(t))$, затем горизонтальную прямую до пересечения с прямой $x(t+1) = x(t)$, и, наконец, опустив перпендикуляр на горизонтальную ось. Выбирая теперь $x(1)$ за начальную точку, можно продолжить процесс.

В зависимости от конкретного вида функции $f(x)$ и от начального условия x_0 решение $x(t)$ уравнения (1.1) может демонстрировать различное поведение: монотонное приближение или удаление от положения равновесия; колебательные движения около положения равновесия с убывающей или растущей амплитудой; периодические колебания; хаотическое поведение.

1.1.2 Линейные уравнения первого порядка

Рассмотрим простейшее дискретное уравнение первого порядка

$$x(t+1) = a(t)x(t) + b(t), \tag{1.2}$$

где $t = 0, 1, \ldots$ — дискретно изменяющаяся независимая переменная, $a(t) \neq 0$, $b(t)$ — заданные числовые последовательности, $x(t)$ — неизвестная скалярная функция.

Уравнение (1.2) называется линейным неоднородным уравнением.

Рассмотрим сначала соответствующее линейное однородное уравнение

$$x(t+1) = a(t)x(t) \tag{1.3}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Решение уравнения (1.3) можно получить с помощью последовательных подстановок.

$$x(t_0+1) = a(t_0)x(t_0), \quad x(t_0+2) = a(t_0+1)x(t_0+1) = a(t_0+1)a(t_0)x(t_0), \ldots$$

Общее решение, очевидно, имеет вид

$$x(t) = x(t_0)\prod_{j=t_0}^{t-1} a(j), \quad t = t_0 + 1,\, t_0 + 2, \ldots \tag{1.4}$$

Без ограничения общности будем полагать далее, что $t_0 = 0$.

Перепишем (1.4) в виде $x(t) = C\prod\limits_{j=0}^{t-1} a(j) = Cy(t), \quad t = 1, 2, \ldots,$ где C — произвольная постоянная.

Для построения общего решения линейного неоднородного уравнения воспользуемся методом вариации произвольной постоянной. Будем искать решение уравнения (1.2) в виде

$$x(t) = C(t)\prod_{j=0}^{t-1} a(j) = C(t)y(t), \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{1.5}$$

где $C(t)$ — неизвестная функция.

Подставляя (1.5) в уравнение (1.2) и учитывая (1.3), для $C(t)$ получим уравнение

$$C(t+1)y(t+1) = a(t)C(t)y(t) + b(t)$$

или

$$C(t+1) = C(t) + \frac{b(t)}{y(t+1)},$$

решение которого имеет вид

$$C(t) = C(0) + \sum_{j=0}^{t-1} \frac{b(j)}{y(j+1)}. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в формулу (1.5), получим выражение для общего решения уравнения (1.2)

$$x(t) = (D + \sum_{j=0}^{t-1} \frac{b(j)}{y(j+1)}) \prod_{j=0}^{t-1} a(j), \tag{1.7}$$

где D — произвольная постоянная.

Если для уравнения (1.2) задано начальное условие $x(0) = x_0$, то константа D будет равна x_0.

В частном случае, когда $a(t) \equiv a$ формула (1.7) примет вид

$$x(t) = Da^t + \sum_{j=0}^{t-1} a^{t-j-1} b(j).$$

Если к тому же предположить, что $b(t) \equiv b$, решение примет вид

$$x(t) = Da^t + b\frac{(a^t - 1)}{(a-1)}, \ a \neq 1. \tag{1.8}$$

1.2 Линейные дискретные уравнения высших порядков

1.2.1 Общие свойства решений

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение n-го порядка

$$y(t+n)+a_1(t)y(t+n-1)+\ldots+a_{n-1}(t)y(t+1)+a_n(t)y(t)=f(t), \qquad (1.9)$$

где $t \in Z, \quad a_n(t) \neq 0$. Уравнение (1.9) представляет собой рекуррентное соотношение, позволяющее определять значение неизвестной функции $y(t)$ в произвольной точке $t \in Z$ по значениям этой функции в n подряд стоящих предыдущих или последующих точках. Таким образом, любое решение уравнения (1.9) однозначно определяется начальными условиями

$$y(t_0)=y_0,\ y(t_0+1)=y_1,\ \ldots,\ y(t_0+n-1)=y_{n-1} \qquad (1.10)$$

в силу теоремы существования и единственности решения начальной задачи (см., например, [5, с. 11]).

Уравнение

$$y(t+n)+a_1(t)y(t+n-1)+\ldots+a_{n-1}(t)y(t+1)+a_n(t)y(t)=0 \quad (1.11)$$

называется линейным однородным.

Перепишем уравнение (1.9) в виде $Ly(t)=f(t)$, где оператор L, действующий в пространстве функций, заданных на множестве целых неотрицательных чисел, имеет вид

$$Ly(t)=y(t+n)+a_1(t)y(t+n-1)+\ldots+a_{n-1}(t)y(t+1)+a_n(t)y(t).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что L является линейным оператором.

Рассмотрим функции $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ дискретного аргумента t.

Определение 1 *Функции $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация этих функций тождественно равная нулю. То есть существуют константы $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$, среди которых хотя бы одна отлична от нуля, что $\alpha_1\varphi_1(t)+\alpha_2\varphi_2(t)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(t)=0$ для любого $t \in Z$.*

Определение 2 *Функции $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ называются линейно независимыми, если из условия $\alpha_1\varphi_1(t)+\alpha_2\varphi_2(t)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(t)\equiv 0$ для $t \in Z$ следует, что $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$.*

Введем в рассмотрение определитель Казорати

$$C(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1(t+1) & \varphi_2(t+1) & \dots & \varphi_n(t+1) \\ & & \dots & \\ \varphi_1(t+n-1) & \varphi_2(t+n-1) & \dots & \varphi_n(t+n-1) \end{vmatrix}.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1 *Если функции $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ линейно зависимы, то определитель Казорати тождественно равен нулю.*

Доказательство. По определению, для линейно зависимых функций существует нетривиальная линейная комбинация этих функций тождественно равная нулю

$$\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + \ldots + \varphi_n(t) \equiv 0.$$

Заменяя в этом тождестве t на $t+1$, на $t+2$ и т.д., получим

$$\begin{aligned} &\alpha_1\varphi_1(t+1) + \alpha_2\varphi_2(t+1) + \ldots + \varphi_n(t+1) \equiv 0, \\ &\alpha_1\varphi_1(t+2) + \alpha_2\varphi_2(t+2) + \ldots + \varphi_n(t+2) \equiv 0, \\ &\dots \\ &\alpha_1\varphi_1(t+n-1) + \alpha_2\varphi_2(t+n-1) + \ldots + \varphi_n(t+n-1) \equiv 0. \end{aligned}$$

Следовательно, столбцы матрицы $C(t)$ линейно зависимы, а значит, определитель Казорати тождественно равен нулю.

Замечание 1 *Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.*

В качестве иллюстрации рассмотрим линейно независимые функции

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \varphi_2(t) = \begin{cases} t, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что определитель Казорати для этих функций тождественно равен нулю.

Теорема 2 *Если $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ — линейно независимые решения линейного однородного уравнения (1.11), то $C(t) \neq 0$ для любого t.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ — линейно независимые решения линейного однородного уравнения

(1.11), но существует такое значение $t = t_0$, что $C(t_0) = 0$. Следовательно, столбцы матрицы $c(t_0)$ линейно зависимы, а значит найдется такой нетривиальный набор констант $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что выполняются равенства

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\varphi_1(t_0) + \alpha_2\varphi_2(t_0) + \ldots + \varphi_n(t_0) = 0,\\
&\alpha_1\varphi_1(t_0+1) + \alpha_2\varphi_2(t_0+1) + \ldots + \varphi_n(t_0+1) = 0,\\
&\ldots\\
&\alpha_1\varphi_1(t_0+n-1) + \alpha_2\varphi_2(t_0+n-1) + \ldots + \varphi_n(t_0+n-1) = 0.
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$z(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + \ldots + \varphi_n(t).$$

Она будет решением линейного однородного уравнения (1.11), как линейная комбинация решений. По построению,

$$z(t_0) = 0,\ z(t_0+1) = 0,\ \ldots, z(t_0+n-1) = 0,$$

следовательно, $z(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям. С другой стороны, уравнение (1.11) имеет тривиальное решение $y(t) \equiv 0$. В силу единственности решения начальной задачи для уравнения (1.11), получаем $z(t) \equiv 0$, что противоречит линейной независимости функций $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$.

Определение 3 *Фундаментальной системой решений линейного однородного уравнения (1.11) называется любая линейно независимая система $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t) \ldots \varphi_n(t)$ его решений.*

Теорема 3 *Множество решений линейного однородного уравнения (1.11) образует n–мерное линейное векторное пространство.*

Доказательство. Линейность множества решений линейного однородного уравнения (1.11) очевидным образом следует из линейности оператора L.

Докажем теперь существование базиса в этом пространстве, состоящего из n решений.

Заметим,что у любого линейного однородного уравнения вида (1.11) существует фундаментальная система решений. Для построения такой системы решений можно взять произвольную невырожденную матрицу $A = \{a_{i,j}\}$ размерности $n \times n$ и обозначить через $\varphi_j(t)$ — решение уравнения (1.11), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_j(t_0) = a_{1,j},\ \varphi_j(t_0+1) = a_{2,j}, \ldots, \varphi_j(t_0+n-1) = a_{n,j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Определитель Казорати для этих решений, вычисленный в точке t_0, очевидно, совпадает с определителем матрицы A, который отличен от нуля. Следовательно $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.11).

Докажем, что фундаментальная система решений образует базис в пространстве решений. Для этого рассмотрим произвольное решение $z(t)$ уравнения (1.11) с начальными условиями

$$z(t_0) = \beta_1,\ z(t_0+1) = \beta_2, \ldots, z(t_0+n-1) = \beta_n.$$

Докажем, что $z(t)$ может быть представлено в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений. Для этого рассмотрим линейную неоднородную алгебраическую систему

$$\begin{aligned}
&C_1\varphi_1(t_0) + C_2\varphi_2(t_0) + \ldots + C_n\varphi_n(t_0) = \beta_1,\\
&C_1\varphi_1(t_0+1) + C_2\varphi_2(t_0+1) + \ldots + C_n\varphi_n(t_0+1) = \beta_2,\\
&\ldots\\
&C_1\varphi_1(t_0+n-1) + C_2\varphi_2(t_0+n-1) + \ldots + C_n\varphi_n(t_0+n-1) = \beta_n,
\end{aligned}$$

Определитель этой системы $C(t_0)$ отличен от нуля по предположению. Обозначим через $C_1^*, \ldots, C_n^*$ решение этой системы и введем в рассмотрение функцию

$$x(t) = C_1^*\varphi_1(t) + C_2^*\varphi_2(t) + \ldots + C_n^*\varphi_n(t).$$

Она будет решением линейного однородного уравнения (1.11) как линейная комбинация решений. По построению,

$$x(t_0) = \beta_1,\ x(t_0+1) = \beta_2,\ \ldots, x(t_0+n-1) = \beta_n.$$

Следовательно, $x(t)$ удовлетворяет тем же самым начальным условиям, что и $z(t)$. В силу единственности решений начальной задачи для уравнения (1.11), получаем $z(t) \equiv x(t) = C_1^*\varphi_1(t) + C_2^*\varphi_2(t) + \ldots + C_n^*\varphi_n(t)$.

Таким образом, общее решение уравнения (1.11) имеет вид

$$y(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \ldots + C_n\varphi_n(t), \tag{1.12}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — фундаментальная система решений этого уравнения.

Утверждение 1 *(Принцип суперпозиции) Пусть правая часть $f(t)$ уравнения (1.9) представима в виде $f(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j f_j(t)$. Обозначим через $x_j(t)$ — решение уравнения $Lx(t) = f_j(t)$, $j = \overline{1,m}$. Тогда функция $x(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j x_j(t)$ будет решением уравнения (1.9).*

Доказательство. Пользуясь линейностью оператора L, получим

$$Lx(t) = L(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j(t)) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j L x_j(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j(t) = f(t),$$

что и доказывает утверждение.

Утверждение 2 *Разность двух любых решений линейного неоднородного уравнения (1.9) является решением соответствующего линейного однородного уравнения (1.11).*

Данное утверждение является очевидным следствием предыдущего.

Утверждение 3 *Общее решение линейного неоднородного уравнения (1.9) имеет вид*

$$y(t) = C_1\varphi_1(t) + \ldots + C_n\varphi_n(t) + \widehat{y}(t), \tag{1.13}$$

где первые n слагаемых составляют общее решение соответствующего линейного однородного уравнения (1.11), а $\widehat{y}(t)$ — частное решение линейного неоднородного уравнения (1.9).

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция $y(t)$, задаваемая формулой (1.13) при любых значениях $C_1, C_2, \ldots, C_n$ является решением линейного неоднородного уравнения (1.9).

Пусть $\psi(t)$ — произвольное решение линейного неоднородного уравнения (1.9). Введем в рассмотрение функцию $z(t) = \psi(t) - \widehat{y}(t)$. Из утверждения 2 следует, что $z(t)$ — решение соответствующего линейного однородного уравнения (1.11), а значит, в силу (1.12), оно представимо в виде линейной комбинации $z(t) = C_1\varphi_1(t) + \ldots + C_n\varphi_n(t)$.

Следовательно, справедливо представление $z(t) = C_1\varphi_1(t) + \ldots + C_n\varphi_n(t) + \widehat{y}(t)$, что и доказывает утверждение.

1.2.2 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y(t+n) + a_1 y(t+n-1) + \ldots + a_{n-1} y(t+1) + a_n y(t) = 0, \quad a_n \neq 0. \tag{1.14}$$

Будем искать решение уравнения (1.14) в виде

$$y(t) = \lambda^t, \quad \lambda \neq 0. \tag{1.15}$$

Подставляя (1.15) в уравнение (1.14), получаем уравнение $\lambda^t P(\lambda) = 0$, где

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Для того, чтобы (1.14) имело решение вида (1.15) необходимо и достаточно, чтобы λ было корнем характеристического уравнения

$$P(\lambda) = 0. \tag{1.16}$$

Рассмотрим сначала случай, когда уравнение (1.16) имеет n различных простых корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \quad \lambda_i \neq \lambda_j$. Тогда уравнение (1.15) будет иметь n решений вида $\varphi_1(t) = \lambda_1^t, \ldots, \ \varphi_n(t) = \lambda_n^t$.

Докажем, что эти решения линейно независимы. Для этого рассмотрим определитель Казорати

$$C(t) = C[\varphi_1(t), \ldots, \ \varphi_n(t)] = \begin{vmatrix} \lambda_1^t & \ldots & \lambda_n^t \\ \lambda_1^{t+1} & \ldots & \lambda_n^{t+1} \\ & \ldots & \\ \lambda_1^{t+n-1} & \ldots & \lambda_n^{t+n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_1^t \ldots \lambda_n^t \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ & \ldots & \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \lambda_1^t \ldots \lambda_n^t W \neq 0.$$

Здесь $W = \prod\limits_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i)$ — определитель Вандермонда, который отличен от нуля в силу условия $\lambda_i \neq \lambda_j$. Следовательно, $\varphi_1(t), \ldots, \ \varphi_n(t)$ линейно независимы. Они составляют фундаментальную систему решений уравнения (1.14).

Пример 1 Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y(t+2) + 4y(t+1) + 3y(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

Оно имеет простые корни $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -3$.

Фундаментальная система решений состоит из решений

$$\varphi_1(t) = (-1)^t, \quad \varphi_2(t) = (-3)^t,$$

а общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$y(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) = C_1(-1)^t + C_2(-3)^t,$$

где $C_1, \ C_2$ — произвольные постоянные.

Пусть теперь у характеристического уравнения (1.16) имеется корень λ кратности k. Будем искать решение уравнения (1.14) в виде

$$y(t) = \psi(t)\lambda^t \tag{1.17}$$

Подставим представление (1.17) в уравнение (1.14), заменив $y(t+m)$ его представлением через конечные разности

$$y(t+m) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \triangle^{(j)} y(t),$$

где C_m^j — биномиальные коэффициенты $C_m^j = \frac{m!}{j!(m-j)!}$,

$$\triangle^{(0)} y(t) = y(t), \quad \triangle^{(1)} y(t) = y(t+1) - y(t),$$

$$\triangle^{(2)} y(t) = \triangle^{(1)} y(t+1) - \triangle^{(1)} y(t),$$

$$\triangle^{(j)} y(t) = \triangle^{(j-1)} y(t+1) - \triangle^{(j-1)} y(t),$$

и сгруппируем члены, содержащие $\triangle^{(j)}\psi(t)$.

Множитель при $\triangle^{(0)}\psi(t)$ будет равен $P(\lambda)$, множитель при $\triangle^{(1)}\psi(t)$ равен

$$\lambda a_{n-1} + \lambda^2 2a_{n-2} + \ldots + \lambda^s s a_{n-s} + \ldots + \lambda^n n = \lambda P'(\lambda),$$

множитель при $\triangle^{(2)}\psi(t)$ равен

$$\lambda^2 a_{n-2} + \lambda^3 \frac{3\cdot 2}{2!} a_{n-3} + \ldots + \lambda^s \frac{s(s-1)}{2!} a_{n-s} + ... + \lambda^n \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{\lambda^2}{2!} P''(\lambda),$$

множитель при $\triangle^{(s)}\psi(t)$ равен $\frac{\lambda^s}{s!}P^{(s)}(\lambda)$.

Таким образом, получаем уравнение для $\psi(t)$

$$P(\lambda)\psi(t) + \lambda P'(\lambda)\triangle^{(1)}\psi(t) + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!}P^{(n)}(\lambda)\triangle^{(n)}\psi(t) = 0. \tag{1.18}$$

Так как λ — корень характеристического уравнения кратности k, имеют место равенства

$$P(\lambda) = 0,\ P'(\lambda) = 0, \ldots,\ P^{(k-1)}(\lambda) = 0.$$

Следовательно, уравнение (1.18) примет вид

$$\frac{\lambda^k}{k!}P^{(k)}(\lambda)\triangle^{(k)}\psi(t) + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!}P^{(n)}(\lambda)\triangle^{(n)}\psi(t) = 0. \tag{1.19}$$

Будем искать $\psi(t)$ среди многочленов $Q_l(t)$. Подберем степень многочлена l так, чтобы уравнение (1.19) обратилось в тождество. Для этого вычислим конечные разности

$$\triangle^{(1)}\psi(t) = \widetilde{Q}_{l-1}(t), \quad \triangle^{(2)}\psi(t) = \widetilde{Q}_{l-2}(t), \dots, \triangle^{(k)}\psi(t) = \widetilde{Q}_{l-k}(t),$$

где $\widetilde{Q}_l(t)$ — многочлены соответствующих степеней. Отсюда при $l \le k-1$ получаем $\triangle^{(j)}Q_l(t) = 0$, при $j \ge k$.

Таким образом, мы доказали, что если λ — корень характеристического уравнения (1.16) кратности k, то уравнение (1.14) имеет решения вида

$$\varphi_1(t) = \lambda^t, \quad \varphi_2(t) = t\lambda^t, \dots, \varphi_k(t) = t^{k-1}\lambda^t.$$

Пусть уравнение (1.16) имеет p различных корней $\lambda_1 \ne \dots \ne \lambda_p$ кратностей $k_1, \dots, k_p, \quad k_1 + \dots + k_p = n$. Рассмотрим систему решений уравнения (1.14)

$$\lambda_1^t,\ t\lambda_1^t, \dots,\ t^{k_1-1}\lambda_1^t, \dots \lambda_p^t,\ t\lambda_p^t, \dots,\ t^{k_p-1}\lambda_p^t, \tag{1.20}$$

в которой каждому корню характеристического уравнения (1.16) соответствует ровно столько решений, какова его кратность. Докажем, что система функций (1.20) линейно независима.

Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что функции (1.20) линейно зависимы, т.е. существует нетривиальная линейная комбинация функций (1.20), тождественно равная нулю. Запишем ее в виде

$$Q_{m_1}(t)\lambda_1^t + \dots + Q_{m_p}(t)\lambda_p^t = 0, \tag{1.21}$$

где $Q_{m_j}(t)$ — многочлен степени m_j, причем $m_j \le k_j - 1$. Не нарушая общности, будем считать, что старший коэффициент многочлена $Q_{m_1}(t)$ отличен от нуля. Перепишем (1.21) в виде

$$Q_{m_1}(t)(\lambda_1/\lambda_p)^t + \dots + Q_{m_{p-1}}(t)(\lambda_{p-1}/\lambda_p)^t + Q_{m_p}(t) = 0. \tag{1.22}$$

Применим к последнему равенству оператор $\triangle^{(m_p+1)}$. Учитывая, что

$$\triangle^{(1)}Q_l(t) = R_{l-1}(t), \quad \triangle^{(1)}(\lambda^t Q_l(t)) = \lambda^t R_l(t), \quad \lambda \ne 1,$$

получим

$$R_{m_1}(t)(\lambda_1/\lambda_p)^t + \dots + R_{m_{p-1}}(t)(\lambda_{p-1}/\lambda_p)^t = 0. \tag{1.23}$$

Из этого тождества имеем

$$R_{m_1}(t)(\lambda_1/\lambda_{p-1})^t + \dots + R_{m_{p-2}}(t)(\lambda_{p-2}/\lambda_{p-1})^t + R_{m_{p-1}}(t) = 0. \tag{1.24}$$

Применяя к последнему равенству оператор $\triangle^{(m_{p-1}+1)}$, получим

$$S_{m_1}(t)(\lambda_1/\lambda_{p-1})^t + \ldots + S_{m_{p-2}}(t)(\lambda_{p-2}/\lambda_{p-1})^t = 0. \qquad (1.25)$$

Продолжая описанный процесс, получим тождество

$$T_{m_1}(t)\lambda_1^t = 0, \qquad (1.26)$$

которое невозможно в силу того, что что старший коэффициент многочлена $T_{m_1}(t)$ отличен от нуля. Полученное противоречие доказывает линейную независимость системы функций (1.20). Следовательно, система (1.20) образует фундаментальную систему решений уравнения (1.14).

Пример 2 Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y(t+2) + 2y(t+1) + y(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Оно имеет корень $\lambda = -1$, кратности $k = 2$.

Фундаментальная система решений состоит из решений

$$\varphi_1(t) = (-1)^t, \quad \varphi_2(t) = t(-1)^t,$$

а общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$y(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) = C_1(-1)^t + C_2 t(-1)^t,$$

где $C_1,\ C_2$ — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь случай комплексных корней характеристического уравнения. Предположим, что коэффициенты уравнения (1.14) вещественные постоянные.

Утверждение 4 *Комплекснозначная функция $y(t) = u(t) + iv(t)$, где $u(t),\ v(t)$ — вещественнозначные функции, является решением линейного однородного уравнения (1.14) тогда и только тогда, когда $u(t)$ и $v(t)$ являются решениями этого уравнения.*

Доказательство.

(Достаточность) Пусть $u(t),\ v(t)$ — решения уравнения (1.14). Тогда $y(t)$ будет решением уравнения (1.14) как линейная комбинация решений.

(Необходимость) Пусть $y(t) = u(t) + iv(t)$ — решение уравнения (1.14). Подставим $y(t)$ в уравнение (1.14) и выделим вещественную и мнимую части. В силу вещественности коэффициентов рассматриваемого уравнения имеем

$$Re(Ly(t)) = Lu(t) = 0, \quad Im(Ly(t)) = Lv(t) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 5 *Пусть характеристическое уравнение (1.16) имеет корень $\lambda = \alpha + i\beta$. Тогда $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ также будет корнем характеристического уравнения. При этом кратности комплексно сопряженных корней совпадают.*

Доказательство. Подставим $\overline{\lambda}$ в характеристическое уравнение (1.16). Ввиду вещественности коэффициентов имеем $P(\overline{\lambda}) = \overline{P(\lambda)} = 0$, что и требовалось доказать.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ простой характеристического уравнения кратности $k = 1$. В силу утверждения 5, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ — тоже корень кратности $k = 1$.

Корню λ в фундаментальной системе решений будет соответствовать одно решение $\varphi(t) = \lambda^t$, а корню $\overline{\lambda}$ будет соответствовать решение $\overline{\varphi}(t) = \overline{\lambda}^t$.

Вместо пары решений $\varphi(t),\ \overline{\varphi}(t)$ включим фундаментальную систему решений функции $u(t) = Re(\varphi(t)),\ v(t) = Im(\varphi(t))$. В силу утверждения 4, эти функции также будут решениями уравнения (1.14).

Представим число λ в тригонометрической форме

$$\lambda = \rho(\cos\ \psi + i \sin\ \psi).$$

Тогда $\varphi(t) = \lambda^t = \rho^t(\cos\ t\psi + i \sin\ t\psi)$. Функции $u(t),\ v(t)$ примут вид

$$u(t) = \rho^t \cos\ t\psi, \quad v(t) = \rho^t \sin\ t\psi.$$

Рассмотрим теперь случай кратной пары корней характеристического уравнения. Если характеристическое уравнение (1.16) имеет корень $\lambda = \alpha + i\beta$ кратности k, то $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ — тоже корень кратности k.

В силу (1.20) корню λ соответствуют решения

$$\varphi_1(t), \ldots,\ \varphi_k(t), \quad \varphi_j(t) = t^{j-1}\lambda^t,\ j = 1, \ldots, k,$$

а корню $\overline{\lambda}$ соответствуют решения $\overline{\varphi}_1(t), \ldots,\ \overline{\varphi}_k(t)$.

Вместо пар решений $\varphi_j(t),\ \overline{\varphi}_j(t),\ j = 1, \ldots, k$ включим фундаментальную систему решений функции

$$u_j(t) = Re(\varphi_j(t)) = t^{j-1}\rho^t \cos\ t\psi, \quad v_j(t) = Im(\varphi_j(t)) = t^{j-1}\rho^t\ \sin\ t\psi.$$

В силу утверждения 4, эти функции также будут решениями уравнения (1.14).

Пусть

$$\varphi_1(t),\ \overline{\varphi}_1(t), \varphi_2(t),\ \overline{\varphi}_2(t), \dots,\ \varphi_s(t),\ \overline{\varphi}_s(t),\ \varphi_{2s+1}(t),\ ...,\ \varphi_n(t) \qquad (1.27)$$

фундаментальная система решений уравнение (1.14). Заменим пары комплексно сопряженных решений $\varphi_j(t),\ \overline{\varphi}_j(t)$ соответствующими парами вещественных решений $u_j(t),\ v_j(t)$. Получаем систему функций

$$u_1(t),\ v_1(t), \dots,\ u_s(t),\ v_s(t),\ \varphi_{2s+1}(t), \dots,\ \varphi_n(t). \qquad (1.28)$$

Утверждение 6 *Система функций (1.28) линейно независима.*

Доказательство. Составим линейную комбинацию системы (1.28) и приравняем ее тождественно нулю

$$\mu_1 u_1(t) + \nu_1 v_1(t) + \ldots + \mu_s u_s(t) + \nu_s v_s(t) + c_{2s+1}\varphi_{2s+1}(t) + c_n\varphi_n(t) \equiv 0. \quad (1.29)$$

Учитывая, что

$$u_j(t) = Re\ \varphi_j(t) = \frac{\varphi_j(t) + \overline{\varphi}_j(t)}{2}, \quad v_j(t) = Im\ \varphi_j(t) = \frac{\varphi_j(t) - \overline{\varphi}_j(t)}{2i},$$

перепишем линейную комбинацию (1.29) в виде

$$\left(\frac{\mu_1}{2} + \frac{\nu_1}{2i}\right)\varphi_1(t) + \left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{\nu_1}{2i}\right)\overline{\varphi}_1(t) + ... + c_n\varphi_n(t) \equiv 0.$$

Получили линейную комбинацию линейно независимой системы (1.27), тождественно равную нулю. Следовательно, все коэффициенты равны нулю, то есть

$$\frac{\mu_j}{2} + \frac{\nu_j}{2i} = 0, \quad \frac{\mu_j}{2} - \frac{\nu_j}{2i} = 0, \quad c_l = 0$$

для $j = 1, \dots, s,\ l = 2s+1, \dots, n$. Отсюда следует $\mu_j = 0,\ \nu_j = 0,\ c_l = 0$, то есть функции (1.28) линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.14).

Пример 3 Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y(t+2) + 4y(t+1) + 6y(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0.$$

Оно имеет пару комплексно сопряженных корней $\lambda = -2 + i\sqrt{2}$, $\bar{\lambda} = -2 - i\sqrt{2}$.

Так как $\lambda = \sqrt{6}\Big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\Big)$, то $\rho = \sqrt{6},\ \psi = 3\pi/4$.

Фундаментальная система решений состоит из решений

$$\varphi_1(t) = 6^{t/2}\cos\frac{3t\pi}{4}, \quad \varphi_2(t) = 6^{t/2}\sin\frac{3t\pi}{4},$$

а общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$y(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) = C_1 6^{t/2}\cos\frac{3t\pi}{4} + C_2 6^{t/2}\sin\frac{3t\pi}{4}.$$

1.2.3 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим уравнение

$$y(t+n) + a_1 y(t+n-1) + \ldots + a_n y(t) = f(t). \tag{1.30}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид (1.13) В случае, когда правая часть уравнения (1.30) имеет специальный вид квазиполинома, частное решение линейного неоднородного уравнения также может быть найдено в виде квазиполинома.

Теорема 4 *Пусть в уравнении (1.30)*

$$f(t) = P_l(t)\gamma^t, \tag{1.31}$$

где $P_l(t)$ — многочлен степени l, а $\gamma = const$.

Если γ не является корнем характеристического уравнения (1.16), то уравнение (1.30) имеет частное решение вида

$$\widehat{y}(t) = Q_l(t)\gamma^t, \tag{1.32}$$

где $Q_l(t)$ — многочлен степени l.

Если же γ является корнем кратности k характеристического уравнения (1.16), то уравнение (1.30) имеет частное решение вида

$$\widehat{y}(t) = t^k Q_l(t)\gamma^t, \tag{1.33}$$

где $Q_l(t)$ — многочлен степени l.

Доказательство. Пусть γ не является корнем характеристического уравнения (1.16), т.е. $P(\gamma) = \gamma^n + a_1\gamma^{n-1} + \ldots + a_n \neq 0$. Ищем решение уравнения (1.30) вида (1.32). Подставив (1.32) в (1.30), получаем

$$\gamma^{t+n}Q_l(t+n) + a_1\gamma^{t+n-1}Q_l(t+n-1) + \ldots + a_n\gamma^t Q_l(t) = P_l(t)\gamma^t. \tag{1.34}$$

Представим многочлены $P_l(t),\ Q_l(t)$ в виде

$$P_l(t) = p_0t^l + p_1t^{l-1} + \ldots + p_l, \quad Q_l(t) = q_0t^l + q_1t^{l-1} + \ldots + q_l.$$

Известно, что $p_0 \neq 0$. Докажем, что $q_0 \neq 0$.

В самом деле, если подставить выражения для $P_l(t)$ и $Q_l(j)$ при всех $j = \overline{t,\ t+n}$ в равенство (1.34), сократить на γ^t и приравнять коэффициенты при t^l, то получим равенство $P(\gamma)q_0 = p_0$. Так как $P(\gamma) \neq 0$, то отсюда следует, что $q_0 \neq 0$.

Второе утверждение теоремы докажем для случая $k = 1$.

Итак, пусть γ — простой корень характеристического уравнения (1.16). Докажем, что существует частное решение уравнения (1.30) вида (1.33), где $k = 1$.

Достаточно установить, что старший коэффициент многочлена $Q_l(t)$ отличен от нуля. Подставив выражение (1.33) в уравнение (1.30), получим равенство

$$(t+n)\gamma^{t+n}Q_l(t+n)+a_1(t+n-1)\gamma^{t+n-1}Q_l(t+n-1)+\ldots+a_nt\gamma^tQ_l(t) = P_l(t)\gamma^t.$$

Сократим левую и правую части на γ^t, разложим по формуле бинома Ньютона каждую степень многочленов $Q_l(j)$ при всех $j = \overline{t,\ t+n}$ и рассмотрим коэффициенты левой части равенства при t^{l+1} и t^l.

Коэффициент при t^{l+1} равен $P(\gamma)q_0$, а коэффициент при t^l равен $P(\gamma)q_1 + \gamma(l+1)P'(\gamma)q_0$. Из равенства многочленов следует, что

$$P(\gamma)q_0 = 0, \quad P(\gamma)q_1 + \gamma(l+1)P'(\gamma)q_0 = p_0.$$

Из условия, что $P(\gamma) = 0$ и $P'(\gamma) \neq 0$, получаем $q_0 = \frac{p_0}{\gamma(l+1)P'(\gamma)} \neq 0$. Это значит, что у уравнения (1.30), действительно, существует решение указанного вида.

Теорема доказана.

Замечание 2 *На практике указанный в данной теореме многочлен $Q_l(t)$ находят методом неопределенных коэффициентов.*

Теорема 5 *Пусть в уравнении (1.30)*

$$f(t) = (P_{l_1}(t)\cos\theta t + P_{l_2}(t)\sin\theta t)r^t, \tag{1.35}$$

где $P_{l_1}(t), P_{l_2}(t)$ — многочлены с вещественными коэффициентами степеней $l_1,\ l_2$ соответственно, $r \neq 0$. Пусть $\gamma = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $l = \max\{l_1,\ l_2\}$.

Если γ не является корнем характеристического уравнения (1.16), то уравнение (1.30) имеет частное решение вида

$$\widehat{y}(t) = (Q_l(t)\cos\theta t + R_l(t)\sin\theta t)r^t, \tag{1.36}$$

где $Q_l(t), R_l$ — многочлены степени l.

Если же γ является корнем кратности k характеристического уравнения (1.16), то уравнение (1.30) имеет частное решение вида

$$\widehat{y}(t) = t^k(Q_l(t)\cos\theta t + R_l(t)\sin\theta t)r^t, \tag{1.37}$$

где $Q_l(t), R_l(t)$ — многочлены степени l.

Доказательство. Перепишем правую часть уравнения в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= r^t(P_{l_1}(t)\frac{e^{i\theta t}+e^{-i\theta t}}{2} + P_{l_2}(t)\frac{e^{i\theta t}-e^{-i\theta t}}{2i}) = \\ &= \gamma^t P_l(t) + (\bar{\gamma})^t\overline{P_l(t)} = f_1(t) + f_2(t), \end{aligned}$$

где $P_l(t) = \frac{1}{2}P_{l_1}(t) - \frac{i}{2}P_{l_2}(t)$.

Согласно принципу суперпозиции, частное решение уравнения (1.30) может быть найдено в виде $\widehat{y}(t) = \widehat{y}_1(t)+\widehat{y}_2(t)$, где $\widehat{y}_1(t)$ — частное решение уравнения $Ly = f_1(t)$, $\quad \widehat{y}_2(t)$ — частное решение уравнения $Ly = f_2(t)$.

Заметим, что функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ имеют вид, рассмотренный в теореме 4. Следовательно, $\widehat{y}_1(t)$, $\widehat{y}_2(t)$ могут быть найдены в виде

$$\widehat{y}_1(t) = t^kU_l(t)\gamma^t, \quad \widehat{y}_2(t) = t^kV_l(t)\gamma^t.$$

Так как $f_2(t) = \overline{f}_1(t)$, а коэффициенты уравнения (1.30) вещественные, то уравнение $Ly = f_2(t)$ имеет частное решение $\widehat{y}_2(t) = \overline{\widehat{y}_1(t)}$. Тогда

$$\widehat{y}(t) = \widehat{y}_1(t) + \overline{\widehat{y}_1(t)} = 2Re(t^k\gamma^tU_l(t)) = t^k(Q_l(t)\cos\theta t + R_l(t)\sin\theta t)r^t,$$

что и доказывает теорему.

Замечание 3 *На практике указанные в данной теореме многочлены $Q_l(t), R_l(t)$ находят методом неопределенных коэффициентов.*

Пример 4 Рассмотрим уравнение (1.2), в котором $a(t) \equiv a \neq 0; 1$, $b(t) \equiv b$ как линейное неоднородное уравнение с правой частью специального вида.

Характеристическое уравнение соответствующего линейного однородного уравнения имеет вид $\lambda - a = 0$. Оно имеет простой корень $\lambda_1 = a$.

Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1{}^t$.

Правая часть уравнения имеет вид $f(t) = b$, где $P_l(t) = b,\ l = 0,$ $\gamma = 1 \neq \lambda_1$. Будем искать частное решение линейного неоднородного уравнения в виде $\widehat{x}(t) = Q_0(t) = G$. Подставляя $\widehat{x}(t)$ в линейное неоднородное уравнение, получим $G = aG + b$. Отсюда $G = \frac{b}{(1-a)}$, то есть

$$\widehat{x}(t) = \frac{b}{(1-a)},$$

а общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$x(t) = Ca^t + \frac{b}{(1-a)},$$

где C — произвольная постоянная. Нетрудно проверить, что полученное решение совпадает с (1.8).

Пример 5 Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y(t+2) + 4y(t+1) + 3y(t) = 8.$$

Характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного уравнения имеет вид

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

Оно имеет простые корни $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3$. Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения уравнения имеет вид

$$y(t) = C_1(-1)^t + C_2(-3)^t,$$

где $C_1,\ C_2$ — произвольные постоянные.

Правая часть уравнения имеет вид $f(t) = P_l(t)\gamma^t$, где $P_l(t) = 8,$ $l = 0,\ \gamma = 1$.

Будем искать частное решение линейного неоднородного уравнения в виде $\widehat{y}(t) = Q_0(t) = A$. Подставляя $\widehat{y}(t)$ в линейное неоднородное уравнение, получим

$$A + 4A + 3A = 8.$$

Отсюда $A = 1$, т. е. $\widehat{y}(t) = 1$, а общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$y(t) = C_1(-1)^t + C_2(-3)^t + 1,$$

где $C_1,\ C_2$ — произвольные постоянные.

Пример 6 Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y(t+2)+2y(t+1)+y(t)=a^t.$$

Характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного уравнения имеет вид

$$\lambda^2+2\lambda+1=0.$$

Оно имеет корень $\lambda=-1$ кратности $k=2$.

Общее решение соответствующего линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y(t)=C_1(-1)^t+C_2t(-1)^t+\widehat{y}(t).$$

Правая часть уравнения имеет вид $f(t) = P_l(t)\gamma^t$, где $P_l(t) = 1$, $l=0,\ \gamma=a$.

Если $a\neq-1$, будем искать частное решение линейного неоднородного уравнения в виде $\widehat{y}(t)=Aa^t$.

Подставляя $\widehat{y}(t)$ в линейное неоднородное уравнение, получим

$$Aa^{t+2}+4Aa^{t+1}+3Aa^t=a^t.$$

Отсюда $A=1/(a^2+4a+3)$, то есть

$$\widehat{y}(t)=\frac{a^t}{a^2+4a+3}.$$

Если $a=-1$, будем искать частное решение линейного неоднородного уравнения в виде $\widehat{y}(t)=At^2(-1)^t$.

Подставляя $\widehat{y}(t)$ в линейное неоднородное уравнение, получим

$$A(t+2)^2(-1)^{t+2}+4A(t+1)^2(-1)^{t+1}+3At^2(-1)^t=(-1)^t,$$

Отсюда $A=1/2$, то есть

$$\widehat{y}(t)=\frac{t^2(-1)^t}{2},$$

а общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$y(t)=C_1(-1)^t+C_2t(-1)^t+\widehat{y}(t).$$

Пример 7 Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y(t+2)+y(t+1)-6y(t)=100\sin\frac{t\pi}{2}.$$

Характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного уравнения имеет вид

$$\lambda^2+\lambda-6=0.$$

Его корнями являются $\lambda_1=-3,\ \lambda_2=2$.

Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения имеет вид

$$y(t)=C_1(-3)^t+C_2(2)^t.$$

Правая часть исходного уравнения имеет вид

$$f(t)=(P_{l_1}(t)\cos\theta t+P_{l_2}(t)\sin\theta t)r^t$$

где $P_{l_1}(t)=0,\ l_1=0,\ P_{l_2}(t)=100,\ l_2=0,\ r=1,\ \theta=\frac{\pi}{2},\ l=0,\ \gamma=i\neq\lambda$.

Будем искать частное решение линейного неоднородного уравнения в виде

$$\widehat{y}(t)=A\cos\frac{t\pi}{2}+B\sin\frac{t\pi}{2}.$$

Подставляя $\widehat{y}(t)$ в линейное неоднородное уравнение, получим

$$A\cos\frac{(t+2)\pi}{2}+B\sin\frac{(t+2)\pi}{2}+A\cos\frac{(t+1)\pi}{2}+B\sin\frac{(t+1)\pi}{2}-$$
$$-6A\cos\frac{t\pi}{2}-6B\sin\frac{t\pi}{2}=100\sin\frac{t\pi}{2},$$

или

$$(7A-B)\cos\frac{t\pi}{2}+(A+7B-100)\sin\frac{t\pi}{2}=0.$$

Последнее равенство справедливо только в случае, когда $A=-2$, $B=-14$. То есть частное решение имеет вид

$$\widehat{y}(t)=-2\cos\frac{t\pi}{2}-14\sin\frac{t\pi}{2},$$

а общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$y(t)=C_1(-3)^t+C_2(2)^t-2\cos\frac{t\pi}{2}-14\sin\frac{t\pi}{2}.$$

1.3 Задачи

Решить дискретные уравнения первого порядка (1–8)

1. $x(t+1) = \frac{t+2}{t+1}x(t) + \frac{2}{t+3}$.

2. $x(t+1) = 2^t x(t) + 2^{\frac{t^2+3t}{2}}$.

3. $x(t+1) = (\frac{t+2}{t+1})^3 x(t) + 2\frac{(t+2)^2}{t+3}$.

4. $x(t+1) = (t+2)x(t) + (t+2)!$

5. $x(t+1) = -2x(t) + 3t^2 + 2t - 2$.

6. $x(t+1) = x(t) + 4t + 1$.

7. $x(t+1) = 5x(t) + 9 \cdot 2^t$.

8. $x(t+1) = x(t) + 2\cos t$.

Решить линейные однородные уравнения (9–15)

9. $x(t+2) + 3x(t+1) + 2x(t) = 0$.

10. $x(t+2) - x(t+1) - 2x(t) = 0$.

11. $x(t+2) - 2x(t+1) + 2x(t) = 0$.

12. $x(t+3) + 3x(t+2) - x(t+1) - 3x(t) = 0$.

13. $x(t+3) - 8x(t) = 0$.

14. $x(t+6) - 64x(t) = 0$.

15. $x(t+3) + 3x(t+2) + 3x(t+1) + x(t) = 0$.

Решить линейные неоднородные уравнения (16–20)

16. $x(t+2) - 2x(t+1) + 2x(t) = 2t - 1.$

17. $x(t+2) - 4x(t+1) + 4x(t) = (t-1)(-2)^t.$

18. $x(t+2) + 4x(t) = \cos(t+1).$

19. $x(t+2) - 9x(t) = (t+1)3^t - t^3.$

20. $x(t+3) + x(t+2) + x(t+2) + x(t) = \sin(t) + t(-1)^t.$

Глава 2

Дискретные системы

2.1 Общие свойства линейных однородных систем

Рассмотрим линейную однородную дискретную систему с переменной матрицей

$$x(t+1) = A(t)x(t), \tag{2.1}$$

где $t = 0, 1, \ldots$ — дискретно изменяющаяся независимая переменная, $x \in R^n$ — неизвестная векторная функция дискретного аргумента (последовательность), $A(t)$ — матрица размерности $n \times n$, $\det A(t) \neq 0$. Очевидно, что система (2.1) имеет тривиальное решение $x(t) \equiv 0$.

Зададим начальное условие для системы (2.1) в виде

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.2}$$

Очевидно, что решение задачи Коши (2.1), (2.2) существует и единственно для любого t.

Имеет место

Теорема 6 *Множество решений линейной однородной системы (2.1) представляет собой n–мерное линейное векторное пространство.*

Доказательство.

Пусть $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные решения системы (2.1). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $x(t) = \varphi(t) + \psi(t)$ также будет решением системы (2.1). Далее, если $\varphi(t)$ — решение системы (1), а μ — произвольная постоянная, то $x(t) = \mu\varphi(t)$ также будет решением системы (2.1). Таким образом, доказана линейность пространства решений.

Докажем теперь n–мерность, т. е. докажем, что в этом пространстве существует базис, состоящий из n решений.

Возьмём произвольную матрицу $B = (b_{ij})$, $\det B \neq 0$. Обозначим через $\varphi_j(t)$ решение задачи Коши для системы (2.1) с начальным условием

$$x(t_0) = b_j. \tag{2.3}$$

где b_j - j–й столбец матрицы B. В качестве матрицы B можно взять, например, единичную матрицу. Докажем, что $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ линейно независимы.

Допустим противное. Пусть существует константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, среди которых хотя бы одна отлична от нуля, такие, что

$$\alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t) \equiv 0.$$

Положим $t = t_0$. Тогда из условий (2.3) получаем $\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = 0$. Это означает линейную зависимость столбцов матрицы B, что противоречит условию ее невырожденности.

Пусть теперь $\psi(t)$ — произвольное решение системы (2.1). Докажем, что существуют константы $c_1, \ldots, c_n$ такие, что $\psi(t) = c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t)$. Пусть $\psi(t_0) = d$. Разложим вектор d по базису $b_1, \ldots, b_n$, т. е. представим в виде $d = c_1^* b_1 + \ldots + c_n^* b_n$.

Рассмотрим теперь векторную функцию $z(t) = c_1^*\varphi_1(t) + \ldots + c_n^*\varphi_n(t)$. Эта функция будет решением системы (2.1), как линейная комбинация решений. Вычислим $z(t_0)$

$$z(t_0) = c_1^*\varphi_1(t_0) + \ldots + c_n^*\varphi_n(t_0) = c_1^* b_1 + \ldots + c_n^* b_n = d.$$

В силу теоремы о существовании и единственности решения начальной задачи, имеем $\psi(t) \equiv z(t) = c_1^*\varphi_1(t) + \ldots + c_n^*\varphi_n(t)$, т. е. произвольное решение системы (2.1) линейно выражается через линейно независимую систему решений $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$.
Теорема доказана.

Определение 4 *Будем называть фундаментальной системой решений линейной однородной системы (2.1) систему n линейно независимых решений $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$.*

Из доказательства теоремы 6 следует существование фундаментальной системы решений для системы (2.1).

Таким образом, общее решение системы (2.1) представимо в виде

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + \ldots + C_n\varphi_n(t),$$

где $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — фундаментальная система решений, $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Определение 5 *Матрицу* $\Phi(t) = [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)]$, *столбцы которой составляют фундаментальную систему решений линейной однородной системы (2.1), будем называть фундаментальной матрицей для (2.1).*

Общее решение системы (2.1) может быть представлено в виде

$$x(t) = \Phi(t)C, \tag{2.4}$$

где C — вектор, координатами которого являются произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$.

Теорема 7 *(критерий фундаментальности матрицы) Матрица* $\Phi(t)$, *удовлетворяющая матричному уравнению*

$$X(t+1) = A(t)X(t), \tag{2.5}$$

будет фундаментальной для системы (2.1) тогда и только тогда, когда $\det \Phi(t) \neq 0$ *для любого* t.

Доказательство. Заметим, что матрица $\Phi(t)$ будет являться является решением матричного уравнения (2.5) тогда и только тогда, когда каждый её столбец является решением системы (2.1).

(Достаточность) Пусть определитель $\Phi(t)$ отличен от нуля для любого t. Докажем, что $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — линейно независимы. Допустим противное, т. е. существует нетривиальная линейная комбинация векторных функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, тождественно равная нулю

$$\alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t) \equiv 0.$$

Это означает линейную зависимость столбцов матрицы $\Phi(t)$, что противоречит условию $\det \Phi(t) \neq 0$.

(Необходимость) Пусть $\Phi(t)$ фундаментальная матрица системы (2.1). Докажем, что $\det \Phi(t) \neq 0$ для любого t.

Предположим противное. Пусть существует t_0, такое, что $\det \Phi(t_0) = 0$. Отсюда следует, что столбцы матрицы $\Phi(t_0)$ линейно зависимы, т. е. существуют константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, среди которых хотя бы одна отлична от нуля, такие что

$$\alpha_1\varphi_1(t_0) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t_0) = 0.$$

Введём в рассмотрение векторную функцию

$$\psi(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t).$$

Эта функция будет решением системы (2.1), как линейная комбинация решений.

Положим $t = t_0$. В силу выбора $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, имеем

$$\psi(t_0) = \alpha_1\varphi_1(t_0) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t_0) = 0,$$

т. е. $\psi(t_0)$ удовлетворяет нулевому начальному условию. Но у системы (2.1) есть тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, которое также удовлетворяет нулевому начальному условию. В силу единственности решения начальной задачи, имеем $\psi(t) \equiv 0$. Значит, система функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ линейно зависима. Получили противоречие.
Теорема доказана.

Изучим свойства фундаментальной матрицы.

Утверждение 7 *Пусть* $\Phi(t)$ *— фундаментальная матрица системы (2.1),* $c \neq 0$ *— скаляр. Тогда матрица* $\Psi(t) = c\Phi(t)$ *также будет фундаментальной матрицей системы (2.1).*

Доказательство. Проверим, что $\Psi(t)$ удовлетворяет уравнению (2.5). Имеем

$$\Psi(t+1) = c\Phi(t+1) = cA(t)\Phi(t) = A(t)c\Phi(t) = A(t)\Psi(t).$$

Далее, $\det\psi(t) = c^n \det\Phi(t) \neq 0$. Из теоремы 7 следует требуемое утверждение.

Утверждение 8 *Пусть* $\Phi(t)$ *— фундаментальная матрица системы (2.1),* C *— постоянная невырожденная матрица. Тогда матрица* $\Psi(t) = \Phi(t)C$ *также будет фундаментальной матрицей системы (2.1).*

Доказательство. Проверим, что $\Psi(t)$ удовлетворяет уравнению (2.5). Имеем

$$\Psi(t+1) = \Phi(t+1)C = A(t)\Phi(t)C = A(t)\Psi(t).$$

Далее $\det\Psi(t) = \det\Phi(t)\det C \neq 0$. Из теоремы 7 следует требуемое утверждение.

Заметим, что матрица $\Psi(t) = C\Phi(t)$, вообще говоря, не будет фундаментальной матрицей системы (2.1).

Утверждение 9 *Пусть* $\Phi(t), \Psi(t)$ *— фундаментальные матрицы системы (2.1). Существует такая постоянная невырожденная матрица* C*, что* $\Psi(t) = \Phi(t)C$*.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $D(t)$, удовлетворяющую условию $\Psi(t) = \Phi(t)D(t)$. Значит,

$$D(t) = \Phi^{-1}(t)\Psi(t).$$

Докажем, что D, на самом деле, не зависит от t, то есть, что $D(t+1) = D(t)$ для любого t. Рассмотрим соотношение

$$\Psi(t+1) = \Phi(t+1)D(t+1).$$

С одной стороны имеем

$$\Psi(t+1) = A(t)\Psi(t) = A(t)\Phi(t)D(t).$$

С другой стороны

$$\Psi(t+1) = \Phi(t+1)D(t+1) = A(t)\Psi(t)D(t+1).$$

Отсюда следует, что

$$A(t)\Phi(t)[D(t+1) - D(t)] = 0.$$

Так как $A(t)$, $\Phi(t)$ – невырожденные матрицы, отсюда следует, что $D(t+1) \equiv D(t)$ для любого t, т. е. $D(t)$ — постоянная матрица. Обозначим $C = D(t)$. Очевидно, что $\det C \neq 0$.

2.2 Построение фундаментальной матрицы для линейной системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему вида

$$x(t+1) = Ax(t), \tag{2.6}$$

где A — постоянная невырожденная матрица.

Рассмотрим матрицу $\Phi(t) = A^t$. Очевидно, что эта матрица будет фундаментальной для системы (2.6). Это непосредственно следует из критерия фундаментальности.

Для построения матрицы A^t представим матрицу A в виде $A = PJP^{-1}$, где J — жорданова форма матрицы A, P — невырожденная матрица перехода. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $A^t = PJ^tP^{-1}$.

Вычислим матрицу J^t. J — блочно-диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят клетки Жордана

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & J_m \end{bmatrix},$$

где J_0 — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят клетки Жордана первого порядка, $J_i,\ i = \overline{1,m}$ — клетки Жордана размерности $n_i \times n_i$.

$$J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_s \end{bmatrix},$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_{s+i} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{s+i} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{s+i} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$J^t = \begin{bmatrix} J_0^t & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & J_m^t \end{bmatrix},$$

$$J_0^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_s^t \end{bmatrix}.$$

Представим матрицы $J_i, i = \overline{1, m}$ в виде $J_i = (\lambda_{s+1} E + Z_i)$, где

$$Z_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что $Z_i^{n_i} = 0$. Вычислим матрицу J_i^t

$$J_i^t = (\lambda_{s+1} E + Z_i)^t = \lambda_{s+i}^t E + t\lambda_{s+i}^{t-1} Z_i + C_t^2 \lambda_{s+i}^{t-2} Z_i^2 + \ldots + C_t^{n_i-1} \lambda_{s+i}^{t+1-n_i} Z_i^{n_i-1},$$

где C_n^m — биномиальные коэффициенты.

Таким образом, имеем

$$J_i^t = \begin{bmatrix} \lambda_{s+i}^t & t\lambda_{s+i}^{t-1} & \dots & \dots & C_t^{n_i-1} \lambda_{s+i}^{t+1-n_1} \\ 0 & \lambda_{s+i}^t & t\lambda_{s+i}^{t-1} & \dots & \dots \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{s+i}^t & t\lambda_{s+i}^{t-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_{s+i}^t \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $p_1, ..., p_n$ столбцы матрицы P, т. е. представим матрицу P в виде $P = [p_1, ..., p_n]$.

Из соотношения $AP = PJ$, учитывая структуру матрицы J, имеем

$Ap_1 = \lambda_1 p_1,$

$\dots$

$Ap_s = \lambda_s p_s$

$Ap_{s+1} = \lambda_{s+1} p_{s+1}$

$Ap_{s+2} = \lambda_{s+1} p_{s+2} + p_{s+1}$

$\dots$

$Ap_{s+n_1} = \lambda_{s+1} p_{s+n_1} + p_{s+n_1-1}$

$\dots$

Таким образом, столбцами матрицы перехода P являются собственные и присоединенные векторы матрицы A.

Для того чтобы избежать обращения матрицы P при вычислении фундаментальной матрицы A^t, рассмотрим матрицу $\Phi(t) = A^t P$, которая также является фундаментальной.

Обозначим через $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ столбцы матрицы $\Phi(t)$.
Из соотношения $\Phi(t) = A^t P = PJ^t$ имеем

$\varphi_1(t) = \lambda_1^t p_1,$

$\ldots$

$\varphi_s(t) = \lambda_s^t p_s,$

$\varphi_{s+1}(t) = \lambda_{s+1}^t p_{s+1},$

$\varphi_{s+2}(t) = t\lambda_{s+1}^{t-1} p_{s+1} + \lambda_{s+1}^t p_{s+2},$

$\varphi_{s+3}(t) = C_t^2 \lambda_{s+1}^{t-2} p_{s+1} + t\lambda_{s+1}^{t-1} p_{s+2} + \lambda_{s+1}^t p_{s+3},$

$\varphi_{s+n_1}(t) = C_t^{n_1-1} \lambda_{s+1}^{t+1-n_1} p_{s+1} + \ldots + \lambda_{s+1}^t p_{s+n_1},$

$\ldots$

Исходя из вышесказанного, можно описать алгоритм построения фундаментальной матрицы системы (2.6).

2.3 Алгоритм решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему (2.6). Составим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{2.7}$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — различные корни характеристического уравнения, $k_1, \ldots, k_m$ - их кратности, $k_1 + \ldots + k_m = n$.

Заметим, что каждому корню характеристического уравнения в фундаментальной системе решений соответствует ровно столько решений, какова его кратность.

Пусть λ – корень характеристического уравнения кратности k. Рассмотрим подробно случаи $k = 1, 2, 3$.

I. Случай $k = 1$

Из векторного уравнения

$$(A - \lambda E)p = 0$$

находим собственный вектор p. Данному корню λ в фундаментальной системе решений соответствует одно решение

$$\varphi_1(t) = \lambda^t p.$$

Для кратных корней характеристического уравнения определяющую роль при построении решений играет величина

$$l = n - \operatorname{rank}(A - \lambda E), \quad 1 \le l \le k, \tag{2.8}$$

равная числу линейно независимых собственных векторов, соответствующее данному λ (число клеток Жордана, соответствующих рассматриваемому λ).

II. Случай $k = 2$

1) $l = 1$

Из векторного уравнения

$$(A - \lambda E)p = 0$$

находим собственный вектор p, а из уравнения

$$(A - \lambda E)q = p$$

находим присоединенный вектор q.

Данному корню λ в фундаментальной системе решений соответствуют два решения

$$\varphi_1(t) = \lambda^t p, \quad \varphi_2(t) = t\lambda^{t-1}p + \lambda^t q.$$

2) $\quad l = 2$

Из векторного уравнения

$$(A - \lambda E)p = 0$$

находим два линейно независимых собственных вектора p_1 и p_2.

Решения, соответствующие данному корню λ в фундаментальной системе решений, имеют вид

$$\varphi_1(t) = \lambda^t p_1 \quad \varphi_2(t) = \lambda^t p_2.$$

III. Случай $\quad k = 3$

1) $\quad l = 1$

Из векторного уравнения

$$(A - \lambda E)p = 0$$

находим собственный вектор p, а из уравнений

$$(A - \lambda E)q = p, \quad (A - \lambda E)r = q$$

находим присоединенные векторы $q,\ r$.

Решения, соответствующие данному корню λ в фундаментальной системе решений имеют вид

$$\varphi_1(t) = \lambda^t p, \quad \varphi_2(t) = t\lambda^{t-1}p + \lambda^t q, \quad \varphi_3(t) = (\frac{t(t-1)}{2})\lambda^{t-2}p + t\lambda^{t-1}q + \lambda^t r.$$

2) $\quad l = 2$

Из векторного уравнения

$$(A - \lambda E)p = 0$$

находим два линейно независимых собственных вектора p_1 и p_2, а из уравнения

$$(A - \lambda E)q = p$$

находим присоединенный вектор q. Здесь в качестве собственного вектора p выбираем такую линейную комбинацию $p = \mu p_1 + \nu p_2$, чтобы уравнение для определения присоединенного вектора имело решение.

В случае $n = 3,\ k = 3,\ l = 2,\ \operatorname{rank}(A - \lambda E) = 1$ в качестве собственного вектора p можно выбрать столбец матрицы $(A - \lambda E)$.

Решения, соответствующие данному корню λ в фундаментальной системе решений, имеют вид

$$\varphi_1(t) = \lambda^t p_1, \quad \varphi_2(t) = \lambda^t p, \quad \varphi_3(t) = t\lambda^{t-1} p + \lambda^t q,$$

где p и p_1 линейно независимы.

3) $\quad l = 3$

Из векторного уравнения

$$(A - \lambda E)p = 0$$

находим три линейно независимых собственных вектора p_1, p_2, p_3.

Решения, соответствующие данному корню λ в фундаментальной системе решений, имеют вид

$$\varphi_1(t) = \lambda^t p_1, \quad \varphi_2(t) = \lambda^t p_2, \quad \varphi_2(t) = \lambda^t p_3.$$

Пример 8 Решить систему

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0.$$

Оно имеет два простых корня $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$. Собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует собственный вектор $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, а собственному значению $\lambda_2 = 3$ соответствует собственный вектор $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Фундаментальная система решений имеет вид

$$\varphi_1(t) = \lambda_1^t p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_2(t) = \lambda_2^t p_2 = 3^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы примет вид

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t).$$

Пример 9 Решить систему $x(t+1) = Ax(t)$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Оно имеет корень $\lambda = 2$ кратности $k = 2$. Матрица $A - \lambda E$ имеет вид $A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. По формуле (2.8) получаем $l = 1$.

Из векторного уравнения $(A - \lambda E)p = 0$ находим собственный вектор $p = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, а из уравнения $(A - \lambda E)q = p$ находим присоединенный вектор $q = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Данному корню $\lambda = 2$ в фундаментальной системе решений соответствуют два решения

$$\varphi_1(t) = \lambda^t p = 2^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_2(t) = t\lambda^{t-1}p + \lambda^t q = t2^{t-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2^t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы примет вид

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t).$$

Предположим теперь, что в системе (2.6) матрица A — вещественная, а характеристическое уравнение (2.7) имеет комплексные корни.

Докажем вспомогательные утверждения.

Утверждение 10 *Комплекснозначная векторная функция $x(t) = u(t) + iv(t)$, где $u(t)$ и $v(t)$ — вещественнозначные векторные функции, будет решением системы (2.6) тогда и только тогда, когда $u(t)$ и $v(t)$ будут решениями этой системы.*

Другими словами, комплекснозначная векторная функция будет решением линейной однородной системы с вещественными коэффициентами тогда и только тогда, когда её вещественная и мнимая части будут решениями этой системы.

Доказательство. Если $u(t)$ и $v(t)$ — решения системы (2.6), то $x(t)$ будет решением, как линейная комбинация решений.

Пусть теперь $x(t)$ — решение системы (2.6). Подставим $x(t)$ в систему (2.6) и приравняем вещественную и мнимую части. С одной стороны

$$x(t+1) = u(t+1) + iu(t+1),$$

с другой

$$x(t+1) = Ax(t) = A(u(t) + iv(t)) = Au(t) + iAv(t).$$

В силу вещественности матрицы A, выделяя вещественную и мнимую части, получаем $u(t+1) = Au(t), \quad v(t+1) = Av(t)$.
Утверждение доказано.

Утверждение 11 *Если матрица A вещественная, $\lambda = \alpha + i\beta$ — корень характеристического уравнения (2.7), то $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ также будет корнем этого уравнения.*

Доказательство. Обозначим через $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ характеристический многочлен матрицы A. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ — корень характеристического уравнения, т. е. $P(\alpha + i\beta) = 0$. Вычислим $P(\bar{\lambda})$. В силу вещественности матрицы A, имеем $P(\bar{\lambda}) = \overline{P(\lambda)} = 0$, что и доказывает утверждение.

Вернемся к построению фундаментальной системы решений для системы (2.6). Комплексно сопряженной паре корней λ, $\bar{\lambda}$ характеристического уравнения (2.7) в фундаментальной системе решений соответствуют решения вида $\varphi_j(t)$, $\overline{\varphi_j(t)}$, где $\varphi_j(t) = \lambda^t T^{(j)}(t)$, $T^{(j)}(t)$— векторный многочлен с комплексными коэффициентами.

Согласно утверждению 10, векторные функции

$$u_j(t) = Re(\varphi_j(t)), \quad v_j(t) = Im(\varphi_j(t))$$

являются решениями системы (2.6). Включим их в фундаментальную систему решений вместо $\varphi_j(t)$, $\overline{\varphi_j(t)}$. Докажем, что полученная система решений также будет линейно независимой. Имеет место

Утверждение 12 *Пусть*

$$\varphi_1(t),\, \overline{\varphi_1}(t), \ldots, \varphi_s(t),\, \overline{\varphi_s}(t),\, \varphi_{2s+1}(t), \ldots, \varphi_n(t) \tag{2.9}$$

фундаментальная система решений для системы (2.6), тогда система

$$u_1(t),\, v_1(t), \ldots, u_s(t),\, v_s(t), \varphi_{2s+1}(t), \ldots, \varphi_n(t) \tag{2.10}$$

где $u_j(t) = Re(\varphi_j(t))$, $v_j(t) = Im(\varphi_j(t))$, также будет фундаментальной системой решений.

Доказательство. Система решений (2.9) линейно независима. Докажем, что система решений (2.10) также линейно независима.

Допустим противное. Пусть существуют нетривиальный набор констант $\mu_1,\ \nu_1, \ldots \mu_s,\ \nu_s,\ c_{2l+1}, \ldots c_n$ таких, что

$$\mu_1 u_1(t) + \nu_1 v_1(t) + \ldots + \mu_s u_s(t) + \nu_s v_s(t) + c_{2s+1}\varphi_{2s+1}(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0. \tag{2.11}$$

Представим $u_j(t),\ v_j(t)$ в виде

$$u_j(t) = Re(\varphi_j(t)) = \frac{\varphi_j(t) + \overline{\varphi_j(t)}}{2}, \quad v_j(t) = Im\varphi_j(t) = \frac{\varphi_j(t) - \overline{\varphi_j(t)}}{2i}$$

и подставим в тождество (2.11). Получим тождественно равную нулю линейную комбинацию фундаментальной системы решений (2.9)

$$(\frac{\mu_1}{2} + \frac{\nu_1}{2i})\varphi_1(t) + (\frac{\mu_1}{2} - \frac{\nu_1}{2i})\overline{\varphi_1}(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0.$$

Это возможно только при условии равенства нулю всех коэффициентов линейной комбинации

$$(\frac{\mu_j}{2} + \frac{\nu_j}{2i}) = 0, \quad (\frac{\mu_j}{2} - \frac{\nu_j}{2i}) = 0,\ j = \overline{1,s}, \quad c_m = 0,\ m = \overline{2s+1,n}.$$

Отсюда следует $\mu_j = 0,\ \nu_j = 0,\ j = \overline{1,s},\quad c_m = 0,\ m = \overline{2s+1,n}$, что противоречит предположению о нетривиальности линейной комбинации (2.11).

Утверждение доказано.

Пример 10 Решить систему

$$x(t+1) = Ax(t),$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет пару простых комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$.

Рассмотрим корень $\lambda_1 = 1 + i = \sqrt{2}\Big(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\Big)$.

Собственный вектор, соответствующий данному собственному значению имеет вид $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Выпишем комплексное решение системы, соответствующее рассматриваемому корню характеристического уравнения.

$$\varphi(t) = \lambda_1^t p_1 = (1+i)^t p_1 = 2^{(t/2)}\Big(\cos(\frac{\pi}{4})t + i\sin(\frac{\pi}{4})t\Big)\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Выделим вещественную и мнимую части комплексного решения $\varphi(t)$, которые и составят фундаментальную систему решений

$$u(t) = Re(\varphi(t)) = 2^{(t/2)}\begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4})t \\ -\sin(\frac{\pi}{4})t \end{bmatrix}$$

$$v(t) = Im(\varphi(t)) = 2^{(t/2)}\begin{bmatrix} \sin(\frac{\pi}{4})t \\ \cos(\frac{\pi}{4})t \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы примет вид

$$x = C_1 u(t) + C_2 v(t).$$

2.4 Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами и неоднородностью специального вида

Рассмотрим сначала линейную неоднородную дискретную систему с переменной матрицей

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f(t), \tag{2.12}$$

где $x \in R^n$, $A(t)$ — матрица размерности $n \times n$, $\det A(t) \neq 0$. Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 13 *(Принцип суперпозиции) Пусть $f(t)$ в системе (2.12) представима в виде $f(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j(t)$. Обозначим через $\psi_j(t)$ решение системы*

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f_j(t),\ j = \overline{1,m}.$$

Тогда векторная функция $\psi(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \psi_j(t)$ будет решением системы (2.12).

Утверждение 14 *Разность двух произвольных решений системы (2.12) является решением соответствующей линейной однородной системы (2.1).*

Доказательство приведенных утверждений производится непосредственной подстановкой.

Утверждение 15 *Пусть $\psi(t)$ — некоторое частное решение линейной неоднородной системы (2.12). Произвольное решение $\xi(t)$ системы (2.12) может быть представлено в виде*

$$\xi(t) = \Phi(t)C + \psi(t),$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица линейной однородной системы (2.1), C — постоянный вектор.

Другими словами, общее решение линейной неоднородной системы (2.12) представимо в виде суммы общего решения соответствующей линейной однородной системы (2.1) и некоторого частного решения системы (2.12).

Доказательство Введем в рассмотрение векторную функцию $z(t) = \xi(t) - \psi(t)$. Согласно утверждению 14, функция $z(t)$ будет решением линейной однородной системы (2.1) и, следовательно, может быть представлена в виде $z(t) = \Phi(t)C$. Отсюда вытекает требуемое соотношение для решения $\xi(t)$.

Рассмотрим теперь линейную неоднородную систему с постоянными вещественными коэффициентами

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t), \tag{2.13}$$

Для линейных неоднородных дискретных систем, как и в случае дифференциальных систем, разработан метод вариации произвольных постоянных, который с вычислительной точки зрения достаточно громоздок.

Рассмотрим случай, когда $f(t)$ в системе (2.12) имеет специальный вид векторного квазиполинома. В этом случае частное решение также может быть найдено в специальном виде.

Пусть

$$f(t) = \gamma^t P_m(t), \tag{2.14}$$

где $P_m(t)$ — векторный многочлен переменной t степени m. Если γ не совпадает с корнями характеристического уравнения соответствующей линейной однородной системы, частное решение системы (2.12) ищется в виде

$$\psi(t) = \gamma^t Q_m(t),$$

где $Q_m(t)$ — векторный многочлен переменной t степени m с неопределенными коэффициентами.

Если γ совпадает с корнем λ характеристического уравнения кратности k, частное решение системы (2.12) ищется в виде

$$\psi(t) = \gamma^t Q_{m+s}(t),$$

где $Q_{m+s}(t)$ — векторный многочлен переменной t степени $m+s$ с неопределенными коэффициентами, s — наивысший порядок клетки Жордана, соответствующей $\lambda = \gamma$.

Пример 11 Решить систему

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2(1+(-1)^t) \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для данной системы имеет вид

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ кратности $k = 1$.

Матрица $A - \lambda_1 E$ имеет вид $A + E = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Из векторного уравнения $(A - \lambda_1 E)p = 0$ находим собственный вектор $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Данному корню в фундаментальной системе решений соответствует одно решение $\varphi_1(t) = \lambda_1^t p_1 = (-1)^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Матрица $A - \lambda_2 E$ имеет вид $A + 3E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Из векторного уравнения

$(A - \lambda_2 E)p = 0$ находим собственный вектор $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Данному корню в фундаментальной системе решений соответствует одно решение $\varphi_2(t) = \lambda_2^t p_2 = (-3)^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Общее решение линейной однородной системы примет вид

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t).$$

Найдем теперь частное решение линейной неоднородной системы. Правая часть $f(t) = \begin{bmatrix} 2(1 + (-1)^t) \\ 4 \end{bmatrix}$ представима в виде суммы вида (2.14)

$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \quad f_1(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{bmatrix} 2(-1)^t \\ 0 \end{bmatrix}$.

При отыскании частного решения воспользуемся принципом суперпозиции.

Для правой части $f_1(t)$ $m = 0$, $\gamma = 1$. Так как $\gamma = 1$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, будем искать частное решение в виде $\psi_1(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Для определения коэффициентов a, b подставим $\psi_1(t)$ в соответствующую систему. Имеем

$$a = -2a + b + 2,$$
$$b = a - 2b + 4.$$

Откуда $a = 5$, $b = 3$. Частное решение $\psi_1(t)$ имеет вид $\psi_1(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Для $f_2(t)$ $m = 0$, $\gamma = -1$. Так как $\gamma = -1$ совпадает с простым корнем характеристического уравнения, получаем $s = 1$.

Будем искать частное решение в виде $\psi_2(t) = \begin{bmatrix} (ct + d)(-1)^t \\ (gt + h)(-1)^t \end{bmatrix}$.

Подставляя $\psi_2(t)$ в соответствующую систему, после сокращения на $(-1)^t$, для определения коэффициентов $c,\ d,\ g,\ h$ получим

$$\begin{aligned} -c(t+1)-d &= -2(ct+d)+gt+h+2 \\ -g(t+1)-h &= ct+d-2(gt+h). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$$c=g, \quad d-h=c+2, \quad d-h=-g.$$

Заметим, что полученная алгебраическая система имеет бесконечное множество решений.

Отсюда, полагая, например, $h=0$, получим $c=-1,\ g=-1,\ d=1$. Частное решение $\psi_2(t)$ примет вид

$$\psi_2(t)=\begin{bmatrix} (-t+1)(-1)^t \\ (-t)(-1)^t \end{bmatrix}.$$

Общее решение рассматриваемой системы, согласно принципу суперпозиции, принимает вид

$$x(t)=C_1(-1)^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+C_2(-3)^t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (-t+1)(-1)^t \\ (-t)(-1)^t \end{bmatrix}.$$

Пусть теперь неоднородность $f(t)$ в системе (2.12) имеет вид

$$f(t)=r^t(P_{m_1}(t)\cos\mu t+P_{m_2}(t)\sin\mu t), \tag{2.15}$$

где $P_{m_1}(t),\ P_{m_2}(t)$ — векторные многочлены переменной t степеней $m_1,\ m_2$ соответственно. Пусть $\gamma=r(\cos\mu+i\sin\mu), \quad m=\max\{m_1,m_2\}$.

Если γ не совпадает с корнями характеристического уравнения соответствующей линейной однородной системы, частное решение системы (2.12) ищется в виде $\psi(t)=r^t(U_m(t)\cos\mu t+V_m(t)\sin\mu t)$, где $U_m(t),\ V_m(t)$ — векторные многочлены переменной t степени m с неопределенными коэффициентами.

Если γ совпадает с корнем λ характеристического уравнения кратности k, частное решение системы (2.12) ищется в виде

$$\psi(t)=r^t(U_{m+s}(t)\cos\mu t+V_{m+s}(t)\sin\mu t)),$$

где $U_{m+s}(t),\ V_{m+s}(t)$ — векторные многочлены переменной t степени $m+s$ с неопределенными коэффициентами, где s — наивысший порядок клетки Жордана, соответствующей $\lambda=\gamma$.

2.5 Устойчивость решений

2.5.1 Основные определения

Рассмотрим систему

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \quad x \in R^n. \tag{2.16}$$

Предположим, система (2.16) имеет решение $x(t) \equiv 0$, то есть $f(t,0) \equiv 0$. Будем предполагать также, что все решения системы (2.16) продолжимы вправо по t до $+\infty$. Обозначим через $x(t, t_0, x_0)$ — решение системы (2.16), удовлетворяющее условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Определение 6 *Решение $x(t) \equiv 0$ системы (2.16) называется устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0,\ t_0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из условия $\|x_0\| < \delta$, следует, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для любого $t \geq t_0$.*

Определение 7 *Решение $x(t) \equiv 0$ системы (2.16) называется притягивающим, если для любого t_0 существует $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ такое, что из условия $\|x_0\| < \Delta$, следует, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0$.*

Определение 8 *Решение $x(t) \equiv 0$ системы (2.16) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и обладает свойством притяжения.*

Определение 9 *Решение $x(t) \equiv 0$ системы (2.16) называется неустойчивым, если существуют такие $\varepsilon > 0,\ t_0$, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\|x_0\| < \delta$, что $\|x(t^*, t_0, x_0)\| \geq \varepsilon$ для некоторого $t^* > t_0$.*

Замечание 4 *Задача об устойчивости произвольного решения $\varphi(t)$ системы (2.16) может быть сведена к задаче об устойчивости тривиального решения (другой системы) при помощи замены переменных $y(t) = x(t) - \varphi(t)$.*

Замечание 5 *Для линейных неоднородных систем задача об устойчивости произвольного решения $\varphi(t)$ при произвольной неоднородности эквивалентна задаче об устойчивости тривиального решения соответствующей линейной однородной системы. Поэтому в случае линейных систем можно говорить об устойчивости или неустойчивости системы в целом.*

2.5.2 Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную однородную систему (2.6) с постоянными коэффициентами. Используя формулу (2.4) для общего решения линейной однородной системы, структуру и свойства фундаментальной матрицы линейной системы с постоянными коэффициентами, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 8 *(об устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами)*

1. Система (2.6) устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A по модулю не превосходят единицы, причем собственные значения, модуль которых равен единице являются простыми или полупростыми (в жордановой форме матрицы A им соответствуют только клетки первого порядка).

2. Если все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы, то система (2.6) асимптотически устойчива.

3. Если хотя бы одно собственное значение матрицы A по модулю больше единицы, то система (2.6) неустойчива.

Таким образом, задача об устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами свелась к задаче об устойчивости дискретных полиномов.

Одно из достаточных условий асимптотической устойчивости системы (2.6) дает теорема Шура.

Пусть характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{2.17}$$

Рассмотрим определитель Δ_n следующего вида

$$\Delta_n = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \\
a_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & a_n & \ldots & a_2 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\
a_{n-1} & & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & a_n \\
\hline
a_n & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\
a_{n-1} & a_n & \ldots & 0 & & & & \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\
a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right| \equiv \left|\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_2' & A_1' \end{array}\right|$$

и определители Δ_i, в которых каждый из блоков состоит из i строк и столбцов блоков определителя Δ_n.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_n \\ a_n & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & 1 & 0 & a_n \\ \hline a_n & 0 & 1 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & 1 \end{array}\right|, \quad \text{и т. д.}$$

Теорема 9 *(Теорема Шура)*
Если все величины $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ положительны, то $|\lambda_i| < 1$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Известно, что функция вида $\lambda = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ отображает внутренность единичного круга на комплексной плоскости переменной λ в левую полуплоскость комплексной переменной ω. Корни многочлена(2.17), находящиеся внутри круга $|\lambda| < 1$ соответствуют корням преобразованного многочлена

$$Q(\omega) = (\omega - 1)^n P(\frac{\omega + 1}{\omega - 1}) = b_0\omega^n + b_1\omega^{n-1} + \ldots + b_n,$$

лежащим в левой полуплоскости. Тогда для получения условий устойчивости многочлена $P(\lambda)$ можно воспользоваться, например, критерием Рауса–Гурвица для многочлена $Q(\omega)$.

Теорема 10 *(Критерий Рауса–Гурвица)*
Необходимым и достаточным условием того, чтобы все корни многочлена $Q(\omega)$ имели отрицательные вещественные части, является положительность всех главных миноров матрицы

$$H = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \end{bmatrix}.$$

Дополнительным условием устойчивости многочлена $P(\lambda)$ является требование, чтобы степень многочлена $Q(\omega)$ совпадала со степенью многочлена $P(\lambda)$. Случай, когда степень $Q(\omega)$ меньше степени $P(\lambda)$ соответствует наличию у $P(\lambda)$ корней, модуль которых равен 1.

Пример 12 Рассмотрим линейную систему второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид

$$P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

где $b = -\mathrm{tr}A,\ c = \det A$.

Критерий Шура для рассматриваемого многочлена дает

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1 - c^2 > 0, \quad \Delta_2 = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & b \\ b & 1 & 0 & c \\ \hline c & 0 & 1 & b \\ b & c & 0 & 1 \end{array}\right| = (c^2-1)^2 - b^2(c-1)^2 > 0.$$

Положим теперь $\lambda = \frac{\omega+1}{\omega-1}$. Получим

$$\left(\frac{\omega+1}{\omega-1}\right)^2 + b\frac{\omega+1}{\omega-1} + c = \frac{(1+b+c)\omega^2 + 2(1-c)\omega + (1-b+c)}{(\omega-1)^2}.$$

Следовательно, $Q(\omega) = (1+b+c)\omega^2 + 2(1-c)\omega + (1-b+c)$. Степень многочлена $Q(\omega)$ будет меньше 2, если $1+b+c = 0$. Это соответствует наличию у многочлена $P(\lambda)$ корня $\lambda = 1$.

Все корни многочлена $P(\lambda)$ второй степени будут иметь отрицательные вещественные части в том и только том случае, когда все его коэффициенты имеют одинаковый знак. Рассмотрим две системы

$$(1+b+c) > 0, \quad (1-c) > 0, \quad (1-b+c) > 0$$

и

$$(1+b+c) < 0, \quad (1-c) < 0, \quad (1-b+c) < 0.$$

Очевидно, что вторая система не имеет решений, а первая может быть записана в форме

$$P(0) < 1, \quad P(-1) > 0, \quad P(1) > 0$$

и эквивалентна условию $|b| - 1 < c < 1$. Возвращаясь к исходным обозначениям, получим условия асимптотической устойчивости системы второго порядка в форме

$$|\mathrm{tr} A| - 1 < \det A < 1.$$

Пример 13 Рассмотрим многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{8}.$$

Многочлен $Q(\omega)$ примет вид

$$Q(\omega) = (\omega-1)^3 P(\frac{\omega+1}{\omega-1}) = \frac{1}{8}(5\omega^3 + 21\omega^2 + 23\omega + 15).$$

Выпишем матрицу Гурвица для многочлена $Q(\omega)$

$$H = \begin{bmatrix} 21 & 5 & 0 \\ 15 & 23 & 21 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

Все главные диагональные миноры этой матрицы положительны. Отсюда следует, что все корни многочлена $P(\lambda)$ лежат внутри круга $|\lambda| < 1$.

Рассмотрим автономную дискретную систему

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad f(0) = 0. \tag{2.18}$$

Представим систему (2.18) в виде

$$x(t+1) = Ax(t) + \varphi(x(t)), \tag{2.19}$$

где A — постоянная матрица, $\varphi(x) = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$.

Приведем без доказательства теорему об устойчивости по первому приближению для дискретных систем.

Теорема 11 *(об устойчивости по первому приближению)*

1. Если все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы, то нулевое решение системы (2.18) асимптотически устойчиво.

2. Если хотя бы одно собственное значение матрицы A по модулю больше единицы, то нулевое решение системы (2.18) неустойчиво.

В остальных случаях теорема не дает ответа на вопрос об устойчивости.

2.6 Задачи

Решить линейные однородные системы вида $x(t+1) = Ax(t)$, где

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. 2. $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$. 4. $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. 6. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

8. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$.

9. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

11. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Решить линейные неоднородные системы вида $x(t+1) = Ax(t) + f(t)$, где

12. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} t-1 \\ (-1)^t \end{bmatrix}$.

13. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} t^2+1 \\ 2^t \end{bmatrix}.$

14. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 2^t \\ (-3)^t \end{bmatrix}.$

15. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} t^2-2^t \\ 5t \end{bmatrix}.$

Исследовать тривиальное решение на устойчивость по первому приближению

16. $\begin{cases} x_1(t+1) = \dfrac{x_2(t)}{2-x_1(t)}, \\ x_2(t+1) = e^{x_1(t)} - e^{x_2(t)}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1(t+1) = \cos x_1(t) - \sin x_2(t) - 1, \\ x_2(t+1) = \frac{1}{2}(e^{x_1(t)} - \cos x_2(t)). \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{1}{2}(x_2^3(t) - \sin x_1(t)), \\ x_2(t+1) = -\frac{1}{2}\sin(x_1(t) + x_2(t)). \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{1}{4}\operatorname{tg}(2x_1(t) - x_2(t)), \\ x_2(t+1) = \frac{1}{2}(\sin(2x_1(t)) - \ln(1 + x_2(t)). \end{cases}$

Глава 3

Декомпозиция дискретных динамических систем

3.1 Инвариантное многообразие медленных движений

Рассматривается нелинейная разнотемповая дискретная система вида

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + \varepsilon f(x(k), y(k), \varepsilon), \\ y(k+1) &= Dy(k) + g_0(x(k)) + \varepsilon g(x(k), y(k), \varepsilon), \end{aligned} \qquad (3.1)$$

где $k = 0, 1, \ldots$ — дискретное время, $x(k) \in R^{n_1}$ — медленная переменная, $y(k) \in R^{n_2}$ — быстрая переменная, ε — положительный малый параметр, $g(x(k), 0, \varepsilon) = 0$. Предполагается, что собственные значения матрицы D лежат внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.

Ставится задача расщепления системы (3.1), то есть приведения ее к "блочно–треугольному" виду

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + \varepsilon F(v(k), \varepsilon), \\ z(k+1) &= Dz(k) + G(v(k), z(k), \varepsilon), \quad G(v(k), 0, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \qquad (3.2)$$

с независимой медленной подсистемой.

Расщепляющее преобразование ищется в виде

$$x(k) = v(k) + \varepsilon H(v(k), z(k), \varepsilon), \quad y(k) = z(k) + h(x(k), \varepsilon), \qquad (3.3)$$

где функция $h(x(k), \varepsilon)$ описывает инвариантное многообразие медленных движений системы (3.1), а $H(v(k), z(k), \varepsilon)$ — инвариантное многообразие быстрых движений расширенной вспомогательной системы.

При доказательстве теорем используются следующие утверждения [4].

Лемма 1 *(Дискретный аналог неравенства Гронуолла). Пусть* $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ *и* $\{q_k\}$ *— числовые последовательности, определенные для всех*

$k \in N_0$, где N_0– множество целых неотрицательных чисел, и при этом $b_k \geq 0$ и $q_k \geq 0$. Если последовательность $\{x_k\}$ удовлетворяет неравенству

$$x_k \leq a_k + q_k \sum_{l=0}^{k-1} b_l x_l, \qquad k \in N_0, \tag{3.4}$$

то справедливо неравенство

$$x_k \leq a_k + q_k \sum_{l=0}^{k-1} b_l a_l \prod_{i=l+1}^{k-1} (1 + b_i q_i), \qquad k \in N_0. \tag{3.5}$$

Лемма 2 *Пусть $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ и $\{q_k\}$ — последовательности, определенные для всех $k \in N_0$, и при этом $b_k \geq 0$ и $q_k \geq 0$. Если последовательность $\{x_k\}$ удовлетворяет неравенству*

$$x_k \leq a_k + q_k \sum_{l=k+1}^{m} b_l x_l, \qquad k \in N_0, \tag{3.6}$$

то справедливо неравенство

$$x_k \leq a_k + q_k \sum_{l=k+1}^{m} b_l a_l \prod_{i=k+1}^{l-1} (1 + b_i q_i), \qquad k \in N_0. \tag{3.7}$$

Лемма 2 является очевидным следствием леммы 1.

Для систем вида (3.1) справедлива

Теорема 12 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. В области

$$\Omega = \{x \in R^{n_1},\ \|y - h^{(0)}(x)\| \leq \rho_0,\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\},$$

где $h^{(0)}(x) = (E - D)^{-1} g_0(x)$, E — единичная матрица размерности $(n_2 \times n_2)$, функции $h^{(0)}$, f, g_0, g имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем переменным;

2. $\|D\| \leq d < 1$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Найдется такое ε_1, $(0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0)$, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ у системы (3.1) существует инвариантное многообразие медленных движений вида

$$y(k) = h(x(k), \varepsilon), \tag{3.8}$$

где функция $h(x,\varepsilon)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\|h(x,\varepsilon)\| \le M, \tag{3.9}$$

$$\|h(x_1,\varepsilon) - h(x_2,\varepsilon)\| \le L\|x_1 - x_2\|; \tag{3.10}$$

2. Функция $h(x,\varepsilon)$ *может быть найдена с любой степенью точности в виде асимптотического разложения*

$$h(x,\varepsilon) = \sum_{j\ge 0} \varepsilon^j h^{(j)}(x) \tag{3.11}$$

из уравнения

$$\begin{aligned} &h(x + \varepsilon f(x, h(x,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon) = \\ &= Dh(x,\varepsilon) + g_0(x) + \varepsilon g(x, h(x,\varepsilon),\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Доказательство. При помощи замены переменных

$$y(k) = t(k) + h^{(0)}(x(k)), \quad x(k) = s(k), \tag{3.13}$$

приведем систему (3.1) к виду

$$\begin{aligned} s(k+1) &= s(k) + \varepsilon S(s(k), t(k), \varepsilon), \\ t(k+1) &= Dt(k) + T(s(k), t(k), \varepsilon). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Очевидно, что при сделанных предположениях, функции S и T для любых $s, s_1, s_2 \in R^{n_1}$, $t, t_1, t_2 \in R^{n_2}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\|S(s,t,\varepsilon)\| \le \gamma, \quad \|T(s,t,\varepsilon)\| \le \varepsilon\gamma, \qquad \gamma > 0, \\ &\|S(s_1,t_1,\varepsilon) - S(s_2,t_2,\varepsilon)\| \le \gamma(\|s_1 - s_2\| + \|t_1 - t_2\|), \\ &\|T(s_1,t_1,\varepsilon) - T(s_2,t_2,\varepsilon)\| \le \varepsilon\gamma(\|s_1 - s_2\| + \|t_1 - t_2\|). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Изучим инвариантные многообразия медленных движений системы (3.88), описываемые уравнениями вида

$$t(k) = p(s(k),\varepsilon). \tag{3.16}$$

Будем предполагать, что функция $p(s,\varepsilon)$ определена в области $\Omega_1 = \{(s,\varepsilon)|\, s \in R^{n_1},\, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0\}$, непрерывна в этой области и удовлетворяет условиям

$$\|p(s,\varepsilon)\| \le M, \tag{3.17}$$

$$\|p(s_1,\varepsilon) - p(s_2,\varepsilon)\| \le L\|s_1 - s_2\|. \tag{3.18}$$

Введем в рассмотрение метрическое пространство $\Sigma(M, L)$ ограниченных и непрерывных в Ω_1 функций $t = p(s, \varepsilon)$, принимающих значения в R^{n_2} и удовлетворяющих условиям (3.18), (3.17), с метрикой

$$\mu(p, \bar{p}) = \sup_s \|p(s, \varepsilon) - \bar{p}(s, \varepsilon)\|.$$

Нетрудно доказать, что рассматриваемое метрическое пространство является полным.

Если траектория $(s(k), t(k))$ лежит на инвариантном многообразии (3.16), то функции $s(k)$ и $t(k) = p(s(k), \varepsilon)$ должны удовлетворять системе (3.88). При этом первое уравнение системы принимает вид

$$s(k+1) = s(k) + \varepsilon S(s(k), p(s(k), \varepsilon), \varepsilon). \tag{3.19}$$

Обозначим через $s(k) = \varphi(k) = \Phi(k, m, s_0, \varepsilon|p)$ решение уравнения (3.19), удовлетворяющее начальному условию $\Phi(m, m, s_0, \varepsilon|p) = s_0$. Функция $t(k) = p(\varphi(k), \varepsilon)$ является ограниченным на всей оси решением уравнения

$$t(k+1) = Dt(k) + T(\varphi(k), t(k), \varepsilon) \tag{3.20}$$

и поэтому имеет вид

$$t(m) = \sum_{l=-\infty}^{m-1} D^{m-l-1} T(\varphi(l), t(l), \varepsilon). \tag{3.21}$$

Положим $s_0 = s(m)$, т. е. $\varphi(k) = \Phi(k, m, s(m), \varepsilon|p)$. Тогда для $p(s(m), \varepsilon)$ из (3.21) получим уравнение

$$p(s(m), \varepsilon) = \sum_{l=-\infty}^{m-1} D^{m-l-1} T(\varphi(l), p(\varphi(l), \varepsilon), \varepsilon). \tag{3.22}$$

С другой стороны, если уравнение (3.22) имеет решение, удовлетворяющее (3.17), (3.18), то это решение определяет инвариантное многообразие системы (3.88) класса $\Sigma(M, L)$. Действительно, для любой точки (s_0, t_0), лежащей на поверхности $t = p(s, \varepsilon)$, т. е. удовлетворяющей соотношению $t_0 = p(s_0, \varepsilon)$, уравнение (3.19) имеет решение $s(k) = \Phi(k, k_0, s_0, \varepsilon|p)$. Из уравнения (3.22) и очевидного соотношения $\Phi(k, m, \Phi(m, k_0, s_0, \varepsilon|p), \varepsilon|p) = \Phi(k, k_0, s_0, \varepsilon|p)$ следует, что $t(k) = p(\Phi(k, k_0, s_0, \varepsilon|p), \varepsilon)$ является решением уравнения (3.20). Таким образом, уравнение (3.22) можно рассматривать как операторное уравнение для отыскания функции p.

Для произвольных $p,\ \bar p \in \Sigma(M,L)$ рассмотрим уравнение (3.19) и установим при всех $k \le m$ справедливость оценок

$$\|\Phi(k,m,s(m),\varepsilon|p)) - \Phi(k,m,\bar s(m),\varepsilon|p))\| \le \frac{(1+\varepsilon q)^{m-k-1}}{1-\varepsilon\gamma(1+L)}\|s(m)-\bar s(m)\|, \tag{3.23}$$

$$\|\Phi(k,m,s(m),\varepsilon|p)) - \Phi(k,m,s(m),\varepsilon|\bar p))\| \le \frac{((1+\varepsilon q)^{m-k}-1)}{1+L}\mu(p,\bar p), \tag{3.24}$$

где $q = \gamma(1+L)/(1-\varepsilon\gamma(1+L))$.

Заметим, что функции

$$\varphi(k) = \Phi(k,m,s(m),\varepsilon|p), \quad \bar\varphi(k) = \Phi(k,m,s(m),\varepsilon|\bar p),$$

$$\widetilde\varphi(k) = \Phi(k,m,\bar s(m),\varepsilon|p)$$

при $k \le m$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
\varphi(k) &= s(m) - \varepsilon\sum_{l=k}^{m-1} S(\varphi(l),p(\varphi(l),\varepsilon),\varepsilon),\\
\bar\varphi(k) &= s(m) - \varepsilon\sum_{l=k}^{m-1} S(\bar\varphi(l),p(\bar\varphi(l),\varepsilon),\varepsilon),\\
\widetilde\varphi(k) &= \bar s(m) - \varepsilon\sum_{l=k}^{m-1} S(\widetilde\varphi(l),p(\widetilde\varphi(l),\varepsilon),\varepsilon).
\end{aligned}$$

Используя неравенства (3.15) и (3.18), получаем

$$\begin{aligned}
\|\varphi(k)-\bar\varphi(k)\| &\le \frac{\varepsilon\gamma}{1-\varepsilon\gamma(1+L)}\sum_{l=k+1}^{m-1}[(1+L)\|\varphi(l)-\bar\varphi(l)\| + \mu(p,\bar p)],\\
\|\varphi(k)-\widetilde\varphi(k)\| &\le \frac{1}{1-\varepsilon\gamma(1+L)}[\|s(m)-\bar s(m)\| +\\
&+ \varepsilon\gamma(1+L)\sum_{l=k+1}^{m-1}\|\varphi(l)-\widetilde\varphi(l)\|].
\end{aligned}$$

Применяя лемму 2, получаем требуемые оценки (3.23), (3.24).

Введем в рассмотрение отображение

$$\mathfrak{T}(p)(s(m),\varepsilon) = \sum_{l=-\infty}^{m-1} D^{m-l-1}T(\varphi(l),p(\varphi(l),\varepsilon),\varepsilon). \tag{3.25}$$

Используя оценки (3.15), (3.18), (3.23), (3.24), получим

$$\|\mathfrak{T}(p)(s(m),\varepsilon)\| \le \varepsilon\gamma \sum_{l=-\infty}^{m-1} d^{m-l-1} = \frac{\varepsilon\gamma}{1-d},$$

$$\|\mathfrak{T}(p)(s(m),\varepsilon) - \mathfrak{T}(p)(\bar{s}(m),\varepsilon)\| \le$$

$$\le \sum_{l=-\infty}^{m-1} d^{m-l-1}\varepsilon\gamma(1+L)\|\varphi(l)-\widetilde{\varphi}(l)\| \le$$

$$\le \varepsilon q\|s(m)-\bar{s}(m)\| \sum_{l=-\infty}^{m-1} d^{m-l-1}(1+\varepsilon q)^{m-l-1} = \frac{\varepsilon q\|s(m)-\bar{s}(m)\|}{(1-d_1)},$$

$$\|\mathfrak{T}(p)(s(m),\varepsilon) - \mathfrak{T}(\bar{p})(s(m),\varepsilon)\| \le$$

$$\le \sum_{l=-\infty}^{m-1} d^{m-l-1}\varepsilon\gamma(\|\varphi(l)-\bar{\varphi}(l)\|(1+L) +$$

$$+\mu(p,\bar{p})) \le \varepsilon\gamma\mu(p,\bar{p}) \sum_{l=-\infty}^{m-1} d^{m-l-1}(1+\varepsilon q)^{m-l} = \frac{\varepsilon\gamma(1+\varepsilon q)}{(1-d_1)}\mu(p,\bar{p}),$$

где $d_1 = d(1+\varepsilon q) < 1$.

При определении множества $\Sigma(M,L)$ будем считать, что $M = \varepsilon M_0$, $L = \varepsilon L_0$. При этом M_0 и L_0 выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$d_1 < 1,\ \frac{\gamma}{1-d} \le M_0,\ \frac{q}{(1-d_1)} \le L_0, \quad \frac{\varepsilon\gamma(1+\varepsilon q)}{(1-d_1)} < 1.$$

Это можно сделать при достаточно малых значениях ε, $(0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$.

Выполнение указанных неравенств означает, что оператор $\mathfrak{T}(p)$ переводит полное метрическое пространство $\Sigma(\varepsilon M_0, \varepsilon L_0)$ в себя и является сжимающим. Следовательно, он имеет в $\Sigma(\varepsilon M_0, \varepsilon L_0)$ единственную неподвижную точку. Это означает, что система уравнений (3.88) имеет инвариантное многообразие

$$t(k) = p^*(s(k),\varepsilon).$$

Заметим, что система (3.88) была получена из системы (3.1) заменой (3.87). Следовательно, система (3.1) имеет инвариантное многообразие медленных движений вида

$$y(k) = h(x(k),\varepsilon) = h_0(x(k)) + p^*(x(k),\varepsilon).$$

Для доказательства гладкости инвариантного многообразия (3.8) достаточно рассмотреть оператор $\mathfrak{T}(p)$ на соответствующем подмножестве пространства $\Sigma(K, M)$.

Для доказательства асимптотического характера разложения (3.11) достаточно показать, что "остаток" разложения описывает инвариантное многообразие соответствующей вспомогательной системы. В системе (3.1) производится замена переменных

$$y(k) = \tau(k) + \sum_{j=0}^{l} \varepsilon^j h^{(j)}(x(k)), \quad x(k) = s(k)$$

и для полученной системы, повторяя приведенные выше рассуждения, устанавливается существование инвариантного многообразия вида $\tau(k) = \widetilde{p}(s(k), \varepsilon)$, где функция $\widetilde{p}(s(k), \varepsilon)$ принадлежит классу $\Sigma(\varepsilon^{l+1}\widetilde{M}, \varepsilon^{l+1}\widetilde{L})$. Теорема доказана.

Разлагая векторные и матричные функции в ряды по степеням малого параметра ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в уравнении (3.12), получим линейные алгебраические уравнения для определения $h^{(i)}(x(k))$.

При ε^0 имеем:

$$h^{(0)}(x(k)) = -(D - E)^{-1} g_0(x(k)).$$

Для коэффициентов $h^{(i)}(x(k))$, $(i \geq 1)$ получаем рекуррентные формулы вида

$$h^{(i)}(x(k)) = -(D - E)^{-1} \widetilde{G}(x(k), h^{(0)}, h^{(1)}, \ldots h^{(i-1)}).$$

Движение по инвариантному многообразию (3.8) описывается системой

$$v(k+1) = v(k) + \varepsilon F(v(k), \varepsilon), \tag{3.26}$$

где $F(v(k), \varepsilon) = f(v(k), h(v(k), \varepsilon), \varepsilon)$.

3.2 Инвариантное многообразие быстрых движений

В окрестности инвариантного многообразия (3.8) системы (3.1) введем переменные: $v(k)$ — решение уравнения (3.26), $w(k) = x(k) - v(k)$, $z(k) = y(k) - h(x(k), \varepsilon)$, и рассмотрим расширенную вспомогательную систему

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + \varepsilon F(v(k), \varepsilon), \\ w(k+1) &= w(k) + \varepsilon W(v(k), w(k), z(k), \varepsilon), \\ z(k+1) &= Dz(k) + Z(v(k), w(k), z(k), \varepsilon), \end{aligned} \tag{3.27}$$

где

$$\begin{aligned} &W(v, w, z, \varepsilon) = f(v + w, z + h(v + w, \varepsilon), \varepsilon) - f(v, h(v, \varepsilon), \varepsilon), \\ &Z(v, w, z, \varepsilon) = \varepsilon[g(v + w, z + h(v + w, \varepsilon), \varepsilon) - g(v + w, h(v + w, \varepsilon), \varepsilon)] - \\ &-[h(v + w + \varepsilon f(v + w, z + h(v + w, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) - \\ &-h(v + w + \varepsilon f(v + w, h(v + w, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Имеет место

Теорема 13 *Пусть выполнены условия теоремы 12. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. Найдутся такие ε_2, ρ_2 $(0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1,\ 0 < \rho_2 \le \rho_0)$, что при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$, $\|z(k)\| \le \rho_2$ у системы (3.27) существует инвариантное многообразие быстрых движений вида

$$w(k) = \varepsilon H(v(k), z(k), \varepsilon), \tag{3.28}$$

где функция $H(v, z, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам

$$\|H(v, z, \varepsilon)\| \le a\|z\|, \tag{3.29}$$

$$\|H(v_1, z_1, \varepsilon) - H(v_1, z_1, \varepsilon)\| \le b(\|\widetilde{z}\|\|v_1 - v_2\| + \|z_1 - z_2\|), \tag{3.30}$$

$\|\widetilde{z}\| = max\{\|z_1\|, \| \ z_2\|\}$;

2. Функция $H(v, z)$ может быть найдена в виде асимптотического разложения

$$H(v, z, \varepsilon) = \sum_{j \ge 0} \varepsilon^j H^{(j)}(v, z) \tag{3.31}$$

из уравнения

$$\begin{gathered} H(v, z, \varepsilon) + W(v, \varepsilon H(v, z, \varepsilon), z, \varepsilon) = \\ = H(v + \varepsilon F(v, \varepsilon), Dz + Z(v, \varepsilon H(v, z, \varepsilon), z, \varepsilon), \varepsilon). \end{gathered} \tag{3.32}$$

Доказательство. Пользуясь дифференциальными свойствами функций f, g_0, g, h, нетрудно доказать, что для функций F , Z и W справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
&\|F(v,\varepsilon)\| \le c, \quad \|Z(v,w,z,\varepsilon)\| \le \varepsilon c\|z\|,\\
&\|W(v,w,z,\varepsilon)\| \le c(\|z\| + \|w\|),\\
&\|F(v,\varepsilon) - F(\bar v,\varepsilon)\| \le c\|v-\bar v\|,\\
&\|Z(v,w,z,\varepsilon) - Z(\bar v,\bar w,\bar z,\varepsilon)\| \le \varepsilon c[\|\widetilde z\|(\|v-\bar v\| + \|w-\bar w\|) + \|z-\bar z\|],\\
&\|W(v,w,z,\varepsilon) - W(\bar v,\bar w,\bar z,\varepsilon)\| \le c[(\|\widetilde z\| + \|\widetilde w\|)\|v-\bar v\| +\\
&\|w-\bar w\| + \|z-\bar z\|],
\end{aligned} \tag{3.33}$$

при $v \in R^{n_1}$, $\|\widetilde z\| \le \rho_1 \le \rho_0$, $\|\widetilde w\| \le \rho_1$, где $\|\widetilde z\| = max\{\|z\|, \|\bar z\|\}$, $\|\widetilde w\| = max\{\|w\|, \|\bar w\|\}$.

Пусть

$$\Omega_2 = \{(v,z,\varepsilon)|\, v \in R^{n_1},\, \|z\| \le \rho_2 \le \rho_1,\, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_2 \le \varepsilon_1\}.$$

Введем в рассмотрение класс $\Lambda(a,b)$ функций H, действующих из Ω_2 в R^{n_1} и удовлетворяющих неравенствам (3.29), (3.30). Класс $\Lambda(a,b)$ является полным метрическим пространством с метрикой

$$\sigma(H,\bar H) = \sup_{v,z}\left[\frac{\|H(v,z,\varepsilon) - \bar H(v,z,\varepsilon)\|}{\|z\|}\right],$$

где точная верхняя грань вычисляется по Ω_2 при $z \ne 0$ и фиксированном ε. Функция H является решением уравнения

$$H(v(m),z(m),\varepsilon) = -\sum_{l=m}^{\infty} W(v(l),\varepsilon H(v(l),z(l),\varepsilon),z(l),\varepsilon), \tag{3.34}$$

где $v(k)$ – решение уравнения (3.26), удовлетворяющее начальному условию $v(m) = v$, а $z(k)$ – решение начальной задачи

$$z(k+1) = Dz(k) + Z(v(k),\varepsilon H(v(k),z(k),\varepsilon),z(k),\varepsilon), \quad z(m) = z. \tag{3.35}$$

Сходимость ряда обеспечивается оценкой

$$\|z(k)\| \le \|z(m)\|d_2^{k-m}, \quad d_2 = d + \varepsilon c \tag{3.36}$$

для решений этой начальной задачи при всех $k \ge m$. Чтобы убедиться в справедливости этой оценки, перепишем уравнение для $z(k)$ в форме

$$z(k) = D^{k-m}z(m) + \sum_{l=m}^{k-1} D^{k-l-1}Z(v(l),\varepsilon H(v(l),z(l),\varepsilon),z(l),\varepsilon). \tag{3.37}$$

Отсюда, с учетом первого неравенства в (3.33), при $k \geq m$ следует оценка

$$\|z(k)\| \leq d^{k-m}\|z(m)\| + \varepsilon c \sum_{l=m}^{k-1} d^{k-l-1}\|z(l)\|.$$

Используя лемму 1, получаем неравенство (3.36).

Введем в рассмотрение оператор

$$\mathfrak{S}(H)(v(m), z(m), \varepsilon) = -\sum_{l=m}^{\infty} W(v(l), \varepsilon H(v(l), z(l), \varepsilon), z(l), \varepsilon).$$

Используя оценки (3.29), (3.33), (3.36), получаем

$$\|\mathfrak{S}(H)(v(m), z(m), \varepsilon)\| \leq c(1+\varepsilon a) \sum_{l=m}^{\infty} \|z(m)\| d_2^{l-m}. \tag{3.38}$$

Пусть $\bar{z}(k)$ — решение уравнения (3.35), удовлетворяющее начальному условию $\bar{z}(m) = \bar{z}$. Используя представление вида (3.37) для $\bar{z}(k)$ и оценки (3.33), при $k \geq m$ имеем

$$\|z(k) - \bar{z}(k)\| \leq d^{k-m}\|z(m) - \bar{z}(m)\| + \varepsilon c(1+\varepsilon b\rho_2) \sum_{l=m}^{k-1} d^{k-l-1}\|z(l) - \bar{z}(l)\|.$$

Используя лемму 1, получаем

$$\|z(k) - \bar{z}(k)\| \leq d_3^{k-m}\|z(m) - \bar{z}(m)\|, \quad d_3 = d + \varepsilon c(1+\varepsilon b\rho_2).$$

Далее имеем

$$\|\mathfrak{S}(H)(v(m), z(m), \varepsilon) - \mathfrak{S}(H)(v(m), \bar{z}(m), \varepsilon)\| \leq$$
$$\leq c(1+\varepsilon b) \sum_{l=m}^{\infty} \|z(m) - \bar{z}(m)\| d_3^{l-m}. \tag{3.39}$$

Пусть теперь $v(k)$ и $\bar{v}(k)$ — решения уравнения (3.26), удовлетворяющие начальным условиям $v(m) = v$, $\bar{v}(m) = \bar{v}$, $z(k)$ — решение задачи (3.35), а $\hat{z}(k)$ — решение аналогичной задачи для функции $\bar{v}(k)$ вместо $v(k)$. Для разности $v(k)$ и $\bar{v}(k)$ при $k \geq m$ имеем оценку

$$\|v(k) - \bar{v}(k)\| \leq \|v(m) - \bar{v}(m)\|(1+\varepsilon c)^{k-m}, \tag{3.40}$$

которая следует из соотношений $v(k) = v(m) + \varepsilon \sum\limits_{l=m}^{k-1} F(v(l), \varepsilon)$, $\bar{v}(k) = \bar{v}(m) + \varepsilon \sum\limits_{l=m}^{k-1} F(\bar{v}(l), \varepsilon)$, неравенств (3.33) и леммы 1.

Используя для $z(k)$ и $\hat{z}(k)$ представления типа (3.37) и оценки (3.30), (3.33), (3.40), получаем

$$\|z(k)-\hat{z}(k)\| \le \| \sum_{l=m}^{k-1} D^{k-l-1}[Z(v(l),\varepsilon H(v(l),z(l),\varepsilon),z(l),\varepsilon) -$$
$$-Z(\bar{v}(l),\varepsilon H(\bar{v}(l),\hat{z}(l),\varepsilon),\hat{z}(l),\varepsilon)]\| \le$$
$$\le \sum_{l=m}^{k-1} d^{k-l-1}\varepsilon c(1+\varepsilon b\|\widetilde{z}(l)\|)(\|\widetilde{z}(l)\|\|v(l)-\bar{v}(l)\|+\|z(l)-\hat{z}(l)\|) \le$$
$$\le \varepsilon c(1+\varepsilon b\rho_2)\|z\|\|v-\bar{v}\| \sum_{l=m}^{k-1} d^{k-l-1} d_2^{l-m}(1+\varepsilon c)^{l-m} +$$
$$+\varepsilon c(1+\varepsilon b\rho_2)\sum_{l=m}^{k-1} d^{k-l-1}\|z(l)-\hat{z}(l)\|) \le$$
$$\le (1+\varepsilon b\rho_2)\|z\|\|v-\bar{v}\|d_4^{k-m} + \varepsilon c(1+\varepsilon b\rho_2)\sum_{l=m}^{k-1} d^{k-l-1}\|z(l)-\hat{z}(l)\|),$$

где $d_4 = d_2(1+\varepsilon c)$. Используя лемму 1, получаем

$$\|z(k)-\hat{z}(k)\| \le (1+\varepsilon b\rho_2)\|z\|\|v-\bar{v}\|d_5^{k-m}, \quad d_5 = d_4+\varepsilon c(1+\varepsilon b\rho_2). \quad (3.41)$$

Оценим по норме разность значений $\mathfrak{S}(H)(v,z,\tau,\varepsilon)$ и $\mathfrak{S}(H)(\bar{v},z,\tau,\varepsilon)$, используя неравенства (3.29), (3.30), (3.33) и (3.41). Имеем

$$\|\mathfrak{S}(H)(v(m),z(m),\varepsilon) - \mathfrak{S}(H)(\bar{v}(m),\hat{z}(m),\varepsilon)\| \le$$
$$\le \sum_{l=m}^{\infty} \|W(v(l),\varepsilon H(v(l),z(l),\varepsilon),z(l),\varepsilon) -$$
$$-W(\bar{v}(l),\varepsilon H(\bar{v}(l),\hat{z}(l),\varepsilon),\hat{z}(l),\varepsilon)\| \le$$
$$\le c\sum_{l=m}^{\infty}(1+\varepsilon a+\varepsilon b)\|\widetilde{z}(l)\|\|v(l)-\bar{v}(l)\| + (1+\varepsilon b)\|z(l)-\hat{z}(l)\| \le$$
$$\le c\sum_{l=m}^{\infty}[(1+\varepsilon a+\varepsilon b)d_4^{l-m} + (1+\varepsilon b)(1+\varepsilon b\rho_2)d_5^{l-m}]\|z\|\|v-\bar{v}\| \le$$
$$\le c[\frac{(1+\varepsilon a+\varepsilon b)+(1+\varepsilon b)(1+\varepsilon b\rho_2)}{1-d_5}]\|z\|\|v-\bar{v}\|. \quad (3.42)$$

Пусть теперь $H_1, H_2 \in \Lambda(a,b)$, $z_1(k)$ является решением задачи вида (3.35) при $H = H_1$, а $z_2(k)$ — при $H = H_2$. Как и ранее, используем для

$z_1(k)$ и $z_2(k)$ представления типа (3.37). Из оценок (3.30), (3.33) и (3.36) имеем

$$\|z_1(k) - z_2(k)\| \leq \| \sum_{l=m}^{k-1} D^{k-l-1}(Z(v(l), \varepsilon H_1(v(l), z_1(l), \varepsilon), z_1(l), \varepsilon) -$$

$$-Z(v(l), \varepsilon H_2(v(l), z_2(l), \varepsilon), z_2(l), \varepsilon))\| \leq$$

$$\leq \sum_{l=m}^{k-1} d^{k-l-1} \varepsilon c[\varepsilon \|\widetilde{z}(l)\|(\|H_1(v(l), z_1(l), \varepsilon) - H_2(v(l), z_1(l), \varepsilon)\| +$$

$$+\|H_2(v(l), z_1(l), \varepsilon) - H_2(v(l), z_2(l), \varepsilon)\|) + \|z_1(l) - z_2(l)\|] \leq$$

$$\leq \sum_{l=m}^{k-1} d^{k-l-1} \varepsilon c[(1 + \varepsilon b \rho_2)\|z_1(l) - z_2(l)\| + \varepsilon \|\widetilde{z}(l)\|^2 \sigma(H_1, H_2)] \leq$$

$$\leq \varepsilon c(1 + \varepsilon b \rho_2) \sum_{l=m}^{k-1} d^{k-l-1} \|z_1(l) - z_2(l)\| +$$

$$+\varepsilon^2 c \rho_2 \sigma(H_1, H_2)\|z\| \sum_{l=m}^{k-1} d^{k-l-1} d_2^{l-m} \leq$$

$$\leq \varepsilon c(1 + \varepsilon b \rho_2) \sum_{l=m}^{k-1} d^{k-l-1} \|z_1(l) - z_2(l)\| + \varepsilon \rho_2 d_2^{k-m} \|z\| \sigma(H_1, H_2).$$

Используя лемму 1, получаем

$$\|z_1(k) - z_2(k)\| \leq \varepsilon \rho_2 \sigma(H_1, H_2)\|z\| d_5^{k-m}. \tag{3.43}$$

Следовательно

$$\|\mathfrak{S}(H_1)(v(m), z_1(m), \varepsilon) - \mathfrak{S}(H_2)(v(m), z_2(m), \varepsilon)\| \leq$$

$$\leq \sum_{l=m}^{\infty} \|W(v(l), \varepsilon H_1(v(l), z_1(l), \varepsilon), z(l), \varepsilon) -$$

$$-W(v(l), \varepsilon H_2(v(l), z_2(l), \varepsilon), z_2(l), \varepsilon)\| \leq c \sum_{l=m}^{\infty} [(1 + \varepsilon b)\|z_1(l) - z_2(l)\| +$$

$$+\varepsilon \|H_1(v(l), z_1(l), \varepsilon) - H_2(v(l), z_1(l), \varepsilon)\| \leq$$

$$\leq c \sum_{l=m}^{\infty} [(1 + \varepsilon b)\varepsilon \rho_2 \sigma(H_1, H_2)\|z\| d_5^{l-m} + \varepsilon \|z\| d_2^{l-m} \sigma(H_1, H_2) \leq$$

$$\leq \varepsilon c \frac{\rho_2(1 + \varepsilon b) + 1}{1 - d_5} \sigma(H_1, H_2)\|z\|.$$

Отсюда получаем

$$\sigma(\mathfrak{S}(H_1), \mathfrak{S}(H_2)) \leq \varepsilon c \frac{\rho_2(1+\varepsilon b)+1}{1-d_5} \sigma(H_1, H_2).$$

Ясно, что при достаточно малых значениях ρ_2 и ε_2 существуют такие числа a и b, не зависящие от ε, при которых одновременно выполняются неравенства

$$d_j < 1, \quad j = 2, \ldots, 5, \quad \frac{c(1+\varepsilon a)}{1-d_2} \leq a, \quad \frac{c(1+\varepsilon b)}{1-d_2} \leq b,$$
$$c[\frac{(1+\varepsilon a+\varepsilon b)+(1+\varepsilon b)(1+\varepsilon b \rho_2)}{1-d_5}] \leq b, \quad \varepsilon c \frac{\rho_2(1+\varepsilon b)+1}{1-d_5} < 1.$$

Отсюда, учитывая (3.38), (3.39), (3.42), можно заключить, что

$$\begin{aligned}
&|\mathfrak{S}(H)(v(m), z(m), \varepsilon)\| \leq a\|z(m)\|, \\
&\|\mathfrak{S}(H)(v(m), z(m), \varepsilon) - \mathfrak{S}(H)(v(m), \bar{z}(m), \varepsilon)\| \leq b\|z(m) - \bar{z}(m)\|, \\
&\|\mathfrak{S}(H)(v(m), z(m), \varepsilon) - \mathfrak{S}(H)(\bar{v}(m), \hat{z}(m), \varepsilon)\| \leq \\
&\leq b\|z(m)\|\|v(m) - \bar{v}(m)\|.
\end{aligned}$$

Следовательно, оператор $\mathfrak{S}(H)(v(m), z(m), \varepsilon)$ переводит полное метрическое пространство $\Lambda(a, b)$ в себя и является сжимающим, что и доказывает существование и единственность инвариантного многообразия (3.28) системы (3.27) класса $\Lambda(a, b)$.

Для доказательства гладкости инвариантного многообразия (3.28) достаточно рассмотреть оператор $\mathfrak{S}(H)$ на соответствующем подмножестве пространства $\Lambda(a, b)$.

Для доказательства асимптотического характера разложения (3.31) достаточно показать, что "остаток" разложения описывает инвариантное многообразие соответствующей вспомогательной системы.

В системе (3.27) производится замена переменных

$$w(k) = \chi(k) + \varepsilon \sum_{i=0}^{l} \varepsilon^i H_i(v(k), z(k))$$

и для полученной системы, повторяя приведенные выше рассуждения, устанавливается существование инвариантного многообразия вида $\chi(k) = \varepsilon \widetilde{H}(v(k), z(k), \varepsilon)$, где функция $\widetilde{H}(v(k), z(k))$ принадлежит классу $\Lambda(\varepsilon^{l+1}\widetilde{a}, \varepsilon^{l+1}\widetilde{b})$.

Теорема доказана.

Разлагая входящие в уравнение (3.32) векторные и матричные функции в ряды по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$H^{(0)}(v(k), Dz(k)) - H^{(0)}(v(k), z(k)) = W(v(k), 0, z(k), 0),$$

$$\begin{aligned} &H^{(i)}(v(k), Dz(k)) - H^{(i)}(v(k), z(k)) = \widetilde{W}^{(i)}(v(k), z(k)) = \\ &= \widetilde{W}^{(i)}(v(k), z(k), H^{(0)}, H^{(1)}, \ldots, H^{(i-1)}),\ (i \geq 1). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Представим функции $H^{(i)}$, $\widetilde{W}^{(i)}$ при достаточно малых $z(k)$ в виде асимптотических разложений

$$H^{(i)}(v(k), z(k)) = \sum_{j\geq 1} H^{(i,j)}(v(k), z(k)), \tag{3.45}$$

$$\widetilde{W}^{(i)}(v(k), z(k)) = \sum_{j\geq 1} \widetilde{W}^{(i,j)}(v(k), z(k)). \tag{3.46}$$

Здесь $H^{(i,j)}$, $\widetilde{W}^{(i,j)}$ представляют собой векторные функции, компонентами которых являются формы j–го порядка координат вектора $z(k)$. Из соотношений (3.44) для определения коэффициентов форм $H^{(i,j)}$ получим линейные алгебраические системы.

Для отыскания линейных по координатам вектора $z(k)$ членов в представлении (3.45) для функций $H^{(i)}$ введем обозначения $H^{(i,1)} = P^{(i)}z(k)$, $\widetilde{W}^{(i,1)} = Q^{(i)}z(k)$, $P^{(i)} = P^{(i)}(v(k))$, $Q^{(i)} = Q^{(i)}(v(k))$.

Тогда из соотношений (3.44) получим $P^{(i)} = Q^{(i)}(D - E)^{-1}$.

Для определения квадратичных членов обозначим через $H_l^{(i,2)}$, $\widetilde{W}_l^{(i,2)}$ соответствующие координаты векторов $H^{(i,2)}$, $\widetilde{W}^{(i,2)}$ и представим их в виде $H_l^{(i,2)} = z'(k)R_l^{(i)}z(k)$, $\widetilde{W}_l^{(i,2)} = z'(k)S_l^{(i)}z(k)$, где $R_l^{(i)} = R_l^{(i)}(v(k))$, $S^{(i)} = S_l^{(i)}(v(k))$ — симметрические матрицы. Из соотношений (3.44) получим уравнения

$$D'R_l^{(i)}D - R_l^{(i)} = S_l^{(i)}$$

относительно матриц $R_l^{(i)}$.

Движение по инвариантному многообразию (3.28) описывается системой (3.2), где $G(v(k), z(k), \varepsilon) = Z(v(k), \varepsilon H(v(k), z(k), \varepsilon), z(k), \varepsilon)$.

3.3 Расщепляющее преобразование

Имеет место

Теорема 14 *Пусть выполнены условия теорем 12, 13. Тогда при* $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$, $\|y(k) - h(x(k), \varepsilon)\| \le \rho_2$ *замена переменных (3.3) приводит систему (3.1) к "блочно–треугольному" виду (3.2).*

Доказательство. Пусть $(x(k),\, y(k))$ — решение системы (3.1) с начальным условием $x(k_0) = x_0,\;\; y(k_0) = y_0$.

Покажем, что существует такое решение $(v(k), z(k))$ системы (3.2) с начальным условием $v(k_0) = v_0$, $z(k_0) = z_0$, что $x(k)$, $y(k)$, $v(k)$ и $z(k)$ связаны соотношениями (3.3).

Достаточно показать, что соотношение (3.3) имеет место при $k = k_0$. Подставив $k = k_0$ в (3.3), получим

$$x_0 = v_0 + \varepsilon H(v_0, z_0, \varepsilon), \quad y_0 = z_0 + h(x_0, \varepsilon)$$

и, следовательно, $z_0 = y_0 - h(x_0, \varepsilon)$. Для v_0 получается уравнение

$$V(v_0) = v_0, \quad V(v_0) = x_0 - \varepsilon H(v_0, z_0, \varepsilon). \tag{3.47}$$

Из неравенства (3.30) нетрудно получить, что для любых $x_0 \in R^{n_1}$ и фиксированных z_0, таких что $\|z_0\| = \|y_0 - h(x_0, \varepsilon)\| \le \rho_2$, V является сжимающим отображением R^{n_1} в себя и, следовательно, уравнение (3.47) имеет единственное решение.
Теорема доказана.

Если для системы (3.1) заданы начальные значения $(x_0,\, y_0)$, то из соотношений (3.3) получаем выражение для начального условия z_0

$$z_0 = y_0 - h(x_0, \varepsilon)$$

и уравнение относительно v_0

$$x_0 = v_0 + \varepsilon H(v_0, z_0, \varepsilon).$$

Заметим, что v_0 легко находится в виде разложения по степеням малого параметра: $v_0 = v_{00} + \varepsilon v_{01} + \varepsilon^2 v_{02} + \dots$.

Так, например, $v_{00} = x_0$, $v_{01} = -H(x_0, z_{00}, 0)$, где $z_{00} = y_0 - h(x_0, 0)$.

Замена переменных (3.3) позволяет производить расщепление не только начальных, но во многих случаях и краевых условий.

3.4 Устойчивость. Принцип сведения

Имеет место

Теорема 15 *Пусть выполнены условия теорем 12, 13. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. (Устойчивость) Траектория любого решения системы (3.1), начинающаяся вблизи инвариантного многообразия медленных движений (3.8), при $k \to +\infty$ неограниченно приближается к некоторой траектории, лежащей на этом многообразии.

2. (Принцип сведения) Решение $x(k) = \bar{v}(k)$, $y(k) = h(\bar{v}(k), \varepsilon)$ системы (3.1), траектория которого лежит на инвариантном многообразии медленных движений (3.8), устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) тогда и только тогда, когда устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) решение $v(k) = \bar{v}(k)$ системы (3.26), описывающей движение по инвариантному многообразию (3.8).

Доказательство. Исследуем поведение решений системы (3.1), начинающихся вблизи инвариантного многообразия (3.8). Пусть $(x(k), y(k))$ — решение системы (3.1) с начальными условиями $x(k_0) = x_0$, $y(k_0) = y_0$, причем $\|y_0 - h(x_0, \varepsilon)\| \le \rho_2$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$. Из представления (3.3), используя неравенства (3.10), (3.29), (3.36), при $k \ge k_0$ получаем

$$\begin{aligned}
&\|x(k) - v(k)\| \le \varepsilon \|H(x(k), z(k), \varepsilon)\| \le \varepsilon a \|y_0 - h(x_0, \varepsilon)\| d_2^{k-k_0}, \\
&\|y(k) - h(v(k), \varepsilon)\| \le \|z(k)\| + \|h(x(k), \varepsilon) - h(v(k), \varepsilon)\| \le \\
&\le (1 + \varepsilon a L)\|z(k)\| \le (1 + \varepsilon a L)\|y_0 - h(x_0, \varepsilon)\| d_2^{k-k_0}.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Отсюда следует, что траектория $(x(k), y(k))$ любого решения системы (3.1), начинающаяся вблизи инвариантного многообразия (3.8), неограниченно приближается при $k \to +\infty$ к некоторой траектории $(v(k), h(v(k), \varepsilon))$, лежащей на этом многообразии. В этом смысле мы будем говорить об устойчивости инвариантного многообразия медленных движений.

Используя представление (3.3) докажем, что для инвариантного многообразия медленных движений (3.8) справедлив принцип сведения.

Пусть $x(k) = \bar{v}(k)$, $\bar{v}(k_0) = \bar{v}_0$, $y(k) = \bar{\theta}(k) = h(\bar{v}(k), \varepsilon)$ — некоторое решение системы (3.1), траектория которого лежит на инвариантном многообразии медленных движений. Предположим, что решение $x(k) = \bar{v}(k)$ системы (3.26) устойчиво. Это означает, что для произвольного $\eta > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что любое решение $x(k) = \chi(k)$, $\chi(k_0) = \chi_0$

этой системы для всех $k \geq k_0$ удовлетворяет неравенству $\|\chi(k) - \bar{v}(k)\| < \eta$, если только $\|\chi_0 - \bar{v}_0\| < \delta$.

Необходимо показать, что решение $(\bar{v}(k), \bar{\theta}(k))$ системы (3.1) устойчиво, т. е. для любого $\eta_1 > 0$ можно указать такое $\delta_1 > 0$, что как только $\|x_0 - \bar{v}_0\| < \delta_1$ и $\|y_0 - h(\bar{v}_0, \varepsilon)\| < \delta_1$, то для всех $k \geq k_0$ будет иметь место оценка

$$\|x(k) - \bar{v}(k)\| + \|y(k) - \bar{\theta}(k)\| < \eta_1,$$

где $(x(k),\ y(k))$ — решение системы (3.1) с начальными условиями $x(k_0) = x_0, \quad y(k_0) = y_0$.

Выберем $0 < \delta_1 \leq \rho_2$. Тогда для решения $(x(k),\, y(k))$ системы (3.1) справедливы представление (3.3) и оценки (3.10), (3.29), (3.36), (3.48), а следовательно имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
&\|x(k) - \bar{v}(k)\| + \|y(k) - \bar{\theta}(k)\| \leq \|x(k) - v(k)\| + \|v(k) - \bar{v}(k)\| + \\
&+\|y(k) - h(x(k), \varepsilon)\| + \|h(x(k), \varepsilon) - h(v(k), \varepsilon)\| + \\
&+\|h(v(k), \varepsilon) - h(\bar{v}(k), \varepsilon)\| \leq (1 + \varepsilon a(1 + L))\|z(k)\| + \\
&+(1 + L)\|v(k) - \bar{v}(k)\| \leq (1 + \varepsilon a(1 + L))\|y_0 - h(x_0, \varepsilon)\| d_2^{k-k_0} + \\
&+(1 + L)\|v(k) - \bar{v}(k)\|.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Будем считать, что $\delta_1 < \delta/(1 + \varepsilon a(1 + L))$. Тогда из представления (3.3) и оценок (3.10), (3.29), (3.48) имеем

$$\begin{aligned}
&\|v(k_0) - \bar{v}(k_0)\| \leq \|x_0 - v_0\| + \|x_0 - \bar{v}_0\| \leq \varepsilon a\|y_0 - h(x_0, \varepsilon)\| + \\
&+\|x_0 - \bar{v}_0\| \leq \varepsilon a(\|y_0 - h(\bar{v}_0, \varepsilon)\| + \|h(\bar{v}_0, \varepsilon) - h(x_0, \varepsilon)\|) + \\
&+\|x_0 - \bar{v}_0\| \leq (1 + \varepsilon a(1 + L))\delta_1 < \delta.
\end{aligned}$$

Тогда, по предположению, для всех $k \geq k_0$ имеем $\|v(k) - \bar{v}(k)\| < \eta$. Из неравенства (3.49) получаем

$$\|x(k) - \bar{v}(k)\| + \|y(k) - \bar{\theta}(k)\| \leq (1 + \varepsilon a(1 + L))(1 + L)\delta_1 + (1 + L)\eta.$$

Очевидно, что для любого $\eta_1 > 0$ можно подобрать $\delta_1 > 0$ и $\eta > 0$ такие, что

$$(1 + \varepsilon a(1 + L))(1 + L)\delta_1 + (1 + L)\eta < \eta_1.$$

Это и означает, что решение $(\bar{v}(k), \bar{\theta}(k))$ системы (3.3) устойчиво.

С другой стороны, из устойчивости решения $(\bar{v}(k),\, \bar{\theta}(k))$ системы (3.1) очевидным образом вытекает устойчивость решения $v(k) = \bar{v}(k)$ уравнения (3.26), описывающего движение по инвариантному многообразию (3.8).

Если решение $v(k) = \bar{v}(k)$ системы (3.26) асимптотически устойчиво, то $\|v(k) - \bar{v}(k)\| \to 0$ при $k \to +\infty$. Из представления (3.3) и оценок (3.48) следует, что $\|x(k) - v(k)\| \to 0$, $\|y(k) - h(v(k), \varepsilon)\| \to 0$ при $k \to +\infty$.

Тогда из оценки (3.49) получаем $\|x(k) - \bar{v}(k)\| \to 0$ и $\|y(k) - h(\bar{v}(k), \varepsilon)\| \to 0$ при $k \to +\infty$, то есть решение $(\bar{v}(k), \bar{\theta}(k))$ системы (3.1) асимптотически устойчиво. Обратное утверждение очевидно.

Случай, когда решение $\bar{v}(k)$ системы (3.26) неустойчиво, очевиден, так как эта система описывает поведение решений системы (3.1) на инвариантном многообразии (3.8).
Теорема доказана.

Принцип сведения позволяет во многих случаях сводить анализ исходной системы с быстрыми и медленными переменными (3.1) к анализу системы меньшей размерности (3.26), описывающей движение на инвариантном многообразии медленных движений, то есть, фактически, понижать порядок рассматриваемой модели.

Пример 14 Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения системы

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + \varepsilon y(k), \\ y(k+1) &= \varepsilon(x(k)^2 + y(k)). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Матрица линейной части имеет собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \varepsilon$, поэтому делать вывод об устойчивости нулевого решения по первому приближению нельзя.

Расщепляющее преобразование

$$\begin{aligned} x(k) &= v(k) - \varepsilon(1+\varepsilon)z(k) + o(\varepsilon^2), \\ y(k) &= z(k) + (1+\varepsilon)\varepsilon x^2(k) + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.51}$$

приводит исходную систему к виду

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + \varepsilon^2 v(k)^2 + o(\varepsilon^2), \\ z(k+1) &= \varepsilon z(k) - 2\varepsilon^2 z(k)v(k) + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{3.52}$$

где первое уравнение независимо.

Очевидно, что нулевое решение медленной подсистемы неустойчиво, а значит, в силу принципа сведения, неустойчивым является решение исходной системы.

3.5 Декомпозиция линейных систем

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + \varepsilon A_{11}(\varepsilon)x(k) + \varepsilon A_{12}(\varepsilon)y(k), \\ y(k+1) &= A_{21}(\varepsilon)x(k) + A_{22}(\varepsilon)y(k), \end{aligned} \tag{3.53}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x(k) \in R^m, \quad y(k) \in R^n, \quad A_{ij}(\varepsilon),$ — матричные функции соответствующих размерностей. Предполагается, что матрицы A_{ij}, непрерывны и ограничены вместе с достаточным количеством производных по ε при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и, следовательно, имеют место асимптотические разложения

$$A_{ij} = A_{ij}^{(0)} + \varepsilon A_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 A_{ij}^{(2)} + \ldots \ .$$

Пусть собственные значения матрицы $A_{22}^{(0)}$ лежат внутри единичного круга.

Повторяя рассуждения, можно показать, что при сделанных предположениях существует линейное преобразование

$$x(k) = v(k) + \varepsilon H(\varepsilon)z(k), \ \ y(k) = z(k) + L(\varepsilon)x(k), \tag{3.54}$$

приводящее систему (3.53) к блочно–диагональному виду

$$\begin{aligned} v(k+1) &= (E_m + \varepsilon D_1(\varepsilon))v(k), \\ z(k+1) &= D_2(\varepsilon)z(k), \end{aligned} \tag{3.55}$$

где $D_1(\varepsilon) = A_{11}(\varepsilon) + A_{12}(\varepsilon)L(\varepsilon), \quad D_2(\varepsilon) = A_{22}(\varepsilon) - \varepsilon L(\varepsilon)A_{12}(\varepsilon)$.

Матрицы $L(\varepsilon),\ H(\varepsilon)$ являются решениями уравнений

$$A_{22}(\varepsilon)L(\varepsilon) + A_{12}(\varepsilon) = L(\varepsilon)(E_m + \varepsilon(A_{11}(\varepsilon) + A_{12}(\varepsilon)L(\varepsilon))),$$

$$\begin{gathered} (E_m + \varepsilon(A_{11}(\varepsilon) + A_{12}(\varepsilon)L(\varepsilon)))H(\varepsilon) + A_{12}(\varepsilon) = \\ = H(\varepsilon)(A_{22}(\varepsilon) - \varepsilon L(\varepsilon)A_{12}(\varepsilon)) \end{gathered}$$

и представимы в виде асимптотических разложений с ограниченными коэффициентами

$$H(\varepsilon) = H^{(0)} + \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)} + \ldots, \ \ L(\varepsilon) = L^{(0)} + \varepsilon L^{(1)} + \varepsilon^2 L^{(2)} + \ldots \ .$$

Коэффициенты $L^{(i)}$, $H^{(i)}$ задаются следующими соотношениями

$$L^{(0)} \ \ = \ \ -(A_{22}^{(0)} - E_m)^{-1} A_{12}^{(0)},$$

$$
\begin{aligned}
L^{(1)} &= -(A_{22}^{(0)} - E_m)^{-1}[A_{12}^{(1)} + A_{22}^{(1)}L^{(0)} - L^{(0)}(A_{11}^{(0)} + A_{12}^{(0)}L^{(0)})],\\
L^{(i)} &= -(A_{22}^{(0)} - E_m)^{-1}[A_{12}^{(i)} + \sum_{j=0}^{i-1}(A_{22}^{(i-j)}L^{(j)} - L^{(j)}A_{11}^{(i-j-1)}) -\\
&- \sum_{j=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{i-j-1} L^{(i)}A_{12}^{(j)}L^{(i-j-l-1)}],\\
H^{(0)} &= A_{12}^{(0)}(A_{22}^{(0)} - E_m)^{-1},\\
H^{(i)} &= [A_{12}^{(i)} + \sum_{j=0}^{i-1}(A_{11}^{(i-j-1)}H^{(j)} - H^{(j)}A_{22}^{(i-j)}) -\\
&- \sum_{j=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{i-j-1}(A_{12}^{(j)}L^{(i-j-l-1)}H^{(l)} - H^{(l)}L^{(i-j-l-1)}A_{12}^{(j)})](A_{22}^{(0)} - E_m)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Применение расщепляющего преобразования (3.54) оказывается эффективным при решении широкого круга задач устойчивости, оптимального управления, а также начальных и краевых задач.

3.6 Линейно–квадратичная задача оптимального управления

В качестве приложения рассмотрим задачу о линейно–квадратичном регуляторе состояния для дискретной системы управления с двумя масштабами времени

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (E+\varepsilon A_{11})x(k)+\varepsilon A_{12}y(k)+\varepsilon B_1 u(k), \\ y(k+1) &= A_{21}x(k)+A_{22}y(k)+\varepsilon B_2 u(k). \end{aligned} \qquad (3.56)$$

где $x(k) \in R^{n_1},\ y(k) \in R^{n_2},\ u \in R^r, x(0),\ y(0)$ фиксированы. Предполагается, что собственные значения матрицы A_{22} лежат внутри круга радиуса $\alpha,\ \alpha < 1$.

Пусть минимизируемый функционал имеет вид

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (z^T(k)Dz(k) + u'(k)Ru(k)), \qquad (3.57)$$

где $z(k) = (x(k)', y(k)')'$, D — вещественная неотрицательно определенная симметрическая матрица размерности $(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)$, R — вещественная положительно определенная симметрическая матрица размерности $(r \times r)$.

3.6.1 Декомпозиция матричного дискретного уравнения Риккати

Оптимальное управление в рассматриваемой задаче имеет вид

$$u(k) = -[B'P(k+1)B+R]^{-1}B'P(k+1)Az(k),$$

где симметрическая матрица $P(k)$ размерности (n_1+n_2)x(n_1+n_2) — решение дискретного матричного уравнения Риккати

$$P(k) = A'P(k+1)[E+SP(k+1)]^{-1}A + D,$$

удовлетворяющее условию $P(N) = 0$. Здесь

$$A = \begin{bmatrix} E+\varepsilon A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \varepsilon B_1 \\ \varepsilon B_2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2' & D_3 \end{bmatrix}, \quad S = BR^{-1}B' = \varepsilon^2 \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2' & S_3 \end{bmatrix}.$$

Пусть
$$P(k)=\left[\begin{array}{cc} P_1(k)/\varepsilon & P_2(k) \\ P_2'(k) & P_3(k) \end{array}\right].$$
Для блоков матрицы P_k получаем систему

$$\begin{aligned}
P_1(k) &= P_1(k+1)+\varepsilon(A_{11}'P_1(k+1)+P_1(k+1)A_{11}- \\
&- P_1(k+1)S_1P_1(k+1)+P_2(k+1)A_{21} \\
&+ A_{21}'P_2'(k+1)+A_{21}'P_3(k+1)A_{21}+D_1)+O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2(k) &= P_1(k+1)A_{12}+P_2(k+1)A_{22}+A_{21}'P_3(k+1)A_{22}+ \\
&+ D_2+\varepsilon(-P_1(k+1)(S_1P_1(k+1)A_{12}+ \\
&+ (S_1P_2(k+1)+S_2P_3(k+1))A_{22})+A_{21}'P_2'(k+1)A_{12}+ \\
&+ A_{11}'P_1(k+1)A_{12}+A_{11}'P_2(k+1)A_{22})+O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3(k) &= A_{22}'P_3(k+1)A_{22}+D_3+\varepsilon(A_{12}'P_1(k+1)A_{12}+ \\
&+ A_{12}'P_2(k+1)A_{22}+A_{22}'P_2'(k+1)A_{12})+O(\varepsilon^2), \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

Если заменить k на $N-k$, то система (3.58) примет вид (3.1). Произведем декомпозицию этой системы.

На первом этапе построим инвариантное многообразие медленных движений вида
$$P_2(k)=h_2(P_1(k),\varepsilon), \quad P_3(k)=h_3(P_1(k),\varepsilon).$$
Пусть $h_i(P_1(k),\varepsilon)=h_i^{(0)}(P_1(k))+\varepsilon h_i^{(1)}(P_1(k))+...=h_i^{(0)}(k)+\varepsilon h_i^{(1)}(k)+\dots.$

Подставляя это разложение в уравнение для инвариантного многообразия медленных движений и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим линейные уравнения для коэффициентов $h_i^{(j)}$. В частности,

$$h_3^{(0)}(k)-A_{22}'h_3^{(0)}(k)A_{22}=D_3,$$

$$h_2^{(0)}(k)=(D_2+P_{1,k}A_2+A_{21}'h_3^{(0)}(k)A_{22})(E-A_{22})^{-1},$$

$$\begin{aligned}
&h_3^{(1)}(k)-A_{22}'h_3^{(1)}(k)A_{22}=A_{12}'P_{1,k}A_{12}+ \\
&+A_{12}'h_2^{(0)}(k)A_{22}+A_{22}'h_2^{(0)'}(k)A_{12},
\end{aligned}$$

$$h_2^{(1)}(k)=(A_{21}'h_3^{(1)}(k)A_{22}-P_{1,k}S_1P_{1,k}A_{12}-$$

$$
\begin{aligned}
&+P_1(k)(S_1h_2^{(0)}(k)+S_2h_3^{(0)})(k)A_{22}+A'_{21}h_2^{(0)'}(k)A_{12}+\\
&+A'_{11}P_1(k)A_{12}+A'_{11}h_2^{(0)}(k)A_{22}-(D_1+A'_{11}P_1(k)+\\
&+P_1(k)A_{11}-P_1(k)S_1P_1(k)+h_2^{(0)}(k)A_{21}+A'_{21}h_2^{(0)'}(k)+\\
&+A'_{21}h_3^{(0)}(k)A_{21})A_{12}(E-A_{22})^{-1})(E-A_{22})^{-1}.
\end{aligned}
$$

В силу предположения о собственных значениях матрицы A_{22} любое из этих уравнений имеет единственное решение.

Выписывая вспомогательную систему вида (3.27), построим инвариантное многообразие быстрых движений

$$
w=\varepsilon H(v(k),z_1(k),z_2(k)),\varepsilon)=\varepsilon(H^{(0)}(k)+\varepsilon H^{(1)}(k)+\ldots).
$$

Таким образом, расщепляющее преобразование вида

$$
\begin{aligned}
P_1(k)&=v(k)+\varepsilon H^{(0)}(k)+O(\varepsilon^2),\\
P_2(k)&=z_{2,k}+h_2^{(0)}(k)+\varepsilon h_2^{(1)}(k)+O(\varepsilon^2),\\
P_3(k)&=z_{3,k}+h_3^{(0)}(k)+\varepsilon h_3^{(1)}(k)+O(\varepsilon^2).
\end{aligned}
$$

приводит систему (3.58) к "блочно–треугольному" виду

$$
\begin{aligned}
v(k) &= v(k+1)+\varepsilon(D_1+A'_{11}v(k+1)+v(k+1)A_{11}-\\
&- v(k+1)S_1v(k+1)+h_2^{(0)}(v(k+1))A_{21}+\\
&+ A'_{21}h_2^{(0)'}(v(k+1))+A'_{21}h_3^{(0)}(v(k+1))A_{21})+O(\epsilon^2),\\
z_2(k) &= z_2(k+1)A_{22}+A'_{21}z_3(k+1)A_{22}+\\
&+ \varepsilon(-v(k+1)(S_1z_2(k+1)+S_2z_3(k+1))A_{22}+\\
&+ A'_{21}z_2(k+1)'A_{12}+A'_{11}z_2(k+1)A_{22}-\\
&- (z_2(k+1)A_{21}+A'_{21}z_2(k+1)'+\\
&+ A'_{21}z_3(k+1)A_{21})A_{12}(E-A_{22})^{-1})+O(\varepsilon^2),\\
z_3(k) &= A'_{22}z_3(k+1)A_{22}+\varepsilon(A'_{12}z_2(k+1)A_{22}+\\
&+ A'_{22}z_2(k+1)'A_{12})+O(\varepsilon^2).
\end{aligned}
$$

Пример 15 Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$
J=\sum_{k=0}^{N-1}(x^2(k)+y^2(k)+u^2(k))
$$

на траекториях системы

$$
x(k+1) \;=\; x(k)+\varepsilon y(k)+\varepsilon u(k),\quad y(k+1)=x(k)+\frac{y(k)}{2}+\varepsilon u(k),
$$

где $x(k),\ y(k),\ u(k)$ — скаляры, $x(0),\ y(0)$ фиксированы.

Система (3.58) примет вид

$$
\begin{aligned}
P_1(k) &= P_1(k+1) + \varepsilon(-P_1(k+1)^2 + 2P_2(k+1) + \\
&+ P_3(k+1) + 1) + O(\varepsilon^2), \\
P_2(k) &= P_1(k+1) + \frac{1}{2}P_2(k+1) + \frac{1}{2}P_3(k+1) - \varepsilon(P_1(k+1)^2) + \\
&+ P_1(k+1)(P_2(k+1) + \frac{1}{2}P_3(k+1)) - P_2(k+1)) + O(\varepsilon^2), \\
P_3(k) &= \frac{1}{4}P_3(k+1) + 1 + \varepsilon(P_1(k+1) + P_2(k+1)) + O(\varepsilon^2). \qquad (3.59)
\end{aligned}
$$

Расщепляющее преобразование

$$
\begin{aligned}
P_1(k) &= v(k) - 4\varepsilon(z_1(k) + z_2(k)) + O(\varepsilon^2), \\
P_2(k) &= z_2(k) + 2P_1(k) + \frac{4}{3} - \varepsilon(\frac{32P_1(k)}{3} + \frac{140}{9}) + O(\varepsilon^2), \\
P_3(k) &= z_3(k) + \frac{4}{3} + \varepsilon(4P_1(k) + \frac{16}{9}) + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

приводит ее к виду

$$
\begin{aligned}
v(k) &= v_(k+1) + \varepsilon(3v^2(k+1) + 4v(k+1) + 1) + O(\varepsilon^2), \\
z_2(k) &= \frac{z_2(k+1)}{2} + \frac{z_3(k+1)}{2} - \varepsilon(v(k+1)(z_2(k+1) + \frac{z_3(k+1)}{2}) + \\
&+ 3z_2(k+1) + 2z_3(k+1)) + O(\varepsilon^2), \\
z_3(k) &= \frac{z_3(k+1)}{4} + \varepsilon z_2(k+1) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}
$$

где первое уравнение независимо. Начальные условия $v(N), z_2(N), z_3(N)$ принимают следующую форму

$$
\begin{aligned}
&v(N) = -\frac{32}{3} + O(\varepsilon^2), \quad z_2(N) = -\frac{4}{3} + \frac{140}{9}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\
&z_3(N) = -\frac{4}{3} - \frac{16}{9}\varepsilon + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}
$$

3.6.2 Расщепление краевой задачи принципа максимума

Оптимальное управление в линейно–квадратичной задаче (3.56), (3.57) будет иметь вид

$$
u(k) = -\varepsilon R^{-1}(B_1'\bar{p}(k+1) + B_2'q(k+1)),
$$

где $\bar{p}(k)$, $q(k)$ — сопряженные переменные. Введя обозначение $\bar{p}(k) = p(k)/\varepsilon$, запишем краевую задачу принципа максимума в следующем виде

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ p(k) \\ y(k+1) \\ q(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E+\varepsilon A_{11} & -\varepsilon S_{11} & \varepsilon A_{12} & -\varepsilon^2 S_{12} \\ \varepsilon D_{11} & E+\varepsilon A'_{11} & \varepsilon D_{12} & \varepsilon A'_{21} \\ A_{21} & -\varepsilon S'_{12} & A_{22} & -\varepsilon^2 S_{22} \\ D'_{12} & A'_{12} & D_{22} & A'_{22} \end{pmatrix} \times \tag{3.60}$$

$$\times \begin{pmatrix} x(k) \\ p(k+1) \\ y(k) \\ q(k+1) \end{pmatrix}, \tag{3.61}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad p(N) = 0, \quad q(N) = 0. \tag{3.62}$$

Здесь $S_{11} = B_1 R^{-1} B'_1, \quad S_{12} = B_1 R^{-1} B'_2, \quad S_{22} = B_2 R^{-1} B'_2$. Переменные $x(k)$, $p(k)$ являются медленными, переменные $y(k)$, $q(k)$ — быстрыми.

У системы (3.61) существует инвариантное многообразие медленных движений вида

$$\begin{pmatrix} y(k) \\ q(k) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x(k) \\ p(k) \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad L_{ij} = L_{ij}(\varepsilon). \tag{3.63}$$

Чтобы получить уравнения для матричных функций L_{ij} подставим сначала соотношение (3.63) в первые два уравнения системы (3.61) и перепишем их в виде

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ p(k) \end{pmatrix} = (E+\varepsilon N) \begin{pmatrix} x(k) \\ p(k+1) \end{pmatrix}, \tag{3.64}$$

где

$$E+\varepsilon N = (E+\varepsilon Q)^{-1} \begin{pmatrix} E+\varepsilon(A_{11}+A_{12}L_{11}) & -\varepsilon(S_{11}+S_{12}L_{22}) \\ \varepsilon(D_{11}+D_{12}L_{11}) & E+\varepsilon(A'_{11}+A'_{21}L_{22}) \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \varepsilon S_{12}L_{21} & -A_{12}L_{12} \\ -A'_{21}L_{21} & D_{12}L_{12} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}.$$

Подставим теперь соотношение (3.63) во вторые два уравнения системы (3.61) и, с учетом (3.64), получим уравнения относительно блоков матрицы L

$$-L_{11}(E+\varepsilon N_{11}) + A_{21} + A_{22}(L_{11} +$$
$$+\varepsilon L_{12}N_{21}) - \varepsilon^2 S_{22}L_{21}(E+\varepsilon N_{11}) = 0,$$

$$-\varepsilon L_{11}N_{12} - L_{12} - \varepsilon S'_{12} + A_{22}L_{12}(E+\varepsilon N_{22}) -$$
$$-\varepsilon^2 S_{22}(\varepsilon L_{21}N_{12} + L_{22}) = 0,$$

$$-L_{21} - \varepsilon L_{22}N_{21} + D'_{12} + D_{22}(L_{11} +$$
$$+\varepsilon L_{12}N_{21}) + A'_{22}(L_{21}(E+\varepsilon N_{11}) = 0.$$

$$-L_{22}(E+\varepsilon N_{22}) + D_{22}L_{12}(E+\varepsilon N_{22}) +$$
$$+A'_{12} + A'_{22}(\varepsilon L_{21}N_{12} + L_{22}) = 0. \tag{3.65}$$

Матрицы $L_{ij}(\varepsilon)$ могут быть найдены в виде асимптотических разложений

$$L_{ij}(\varepsilon) = L_{ij}^{(0)} + \varepsilon L_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 L_{ij}^{(2)} + ... \tag{3.66}$$

Подставляя выражение (3.66) в уравнения (3.65), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. При ε^0 получим

$$-L_{11}^{(0)} + A_{21} + A_{22}L_{11}^{(0)} = 0, \quad -L_{12}^{(0)} + A_{22}L_{12}^{(0)} = 0,$$
$$-L_{21}^{(0)} + D'_{12} + D_{22}L_{11}^{(0)} + A'_{22}L_{21}^{(0)} = 0,$$
$$-L_{22}^{(0)} + A'_{12} + D_{22}L_{12}^{(0)} + A'_{22}L_{22}^{(0)} = 0,$$

откуда

$$L_{11}^{(0)} = (E - A_{22})^{-1}A_{21}, \quad L_{21}^{(0)} = (E - A'_{22})^{-1}(D'_{12} + D_{22}L_{11}^{(0)}),$$

$$L_{12}^{(0)} = 0, \quad L_{22}^{(0)} = (E - A'_{22})^{-1}A'_{12}.$$

При ε^1 будем иметь

$$L_{11}^{(1)} = (E - A_{22})^{-1}(-L_{11}^{(0)}N_{11}^{(0)} + A_{22}L_{12}^{(0)}N_{21}^{(0)},$$

$$L_{12}^{(1)} = (E - A_{22})^{-1}(-L_{11}^{(01)}N_{12}^{(0)} - S'_{22} + A_{22}L_{12}^{(0)}N_{22}^{(0)}),$$
$$L_{21}^{(1)} = (E - A'_{22})^{-1}(-L_{22}^{(0)}N_{21}^{(0)} + D_{22}(L_{11}^{(1)} + L_{12}^{(0)}N_{21}^{(0)}) + A'_{22}L_{21}^{(0)}N_{11}^{(0)},$$
$$L_{22}^{(1)} = (E - A'_{22})^{-1}(-L_{22}^{(0)}N_{22}^{(0)} + D_{22}(L_{12}^{(1)} + L_{12}^{(0)}N_{22}^{(0)}) + A'_{22}L_{21}^{(0)}N_{12}^{(0)},$$

где

$$N_{11}^{(0)} = A_{11} + A_{12}L_{11}^{(0)}, \quad N_{12}^{(0)} = -S_{11} + A_{12}L_{12}^{(0)},$$
$$N_{21}^{(0)} = D_{11} + D_{12}L_{11}^{(0)} + A'_{21}L_{21}^{(0)}, \quad N_{22}^{(0)} = A'_{11} + D_{12}L_{12}^{(0)} + A'_{21}L_{22}^{(0)}.$$

Аналогичным образом можно получить выражения для $L_{ij}^{(k)}$ при $k > 2$.

Система, описывающая движение на инвариантном многообразии медленных движений, имеет вид

$$\begin{pmatrix} v_x(k+1) \\ v_p(k) \end{pmatrix} = (E+\varepsilon N) \begin{pmatrix} v_x(k) \\ v_p(k+1) \end{pmatrix}.$$

В окрестности инвариантного многообразия (3.63) введем вспомогательные переменные $v_x,\ v_p,\ w_x,\ w_p,\ z_y,\ z_q,$ где

$$w_x(k) = x(k) - v_x(k), \quad w_p(k) = p(k) - w_y(k),$$

$$\begin{pmatrix} z_y(k) \\ z_q(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(k) \\ q(k) \end{pmatrix} - L \begin{pmatrix} x(k) \\ p(k) \end{pmatrix}$$

и рассмотрим расширенную вспомогательную систему

$$\begin{pmatrix} v_x(k+1) \\ v_p(k) \end{pmatrix} = (E+\varepsilon N) \begin{pmatrix} v_x(k) \\ v_p(k+1) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} w_x(k+1) \\ w_p(k) \end{pmatrix} = (E+\varepsilon N) \begin{pmatrix} w_x(k) \\ w_p(k+1) \end{pmatrix} + +\varepsilon K \begin{pmatrix} z_y(k) \\ z_q(k+1) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} z_y(k+1) \\ z_q(k) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} z_y(k) \\ z_q(k+1) \end{pmatrix}, \tag{3.67}$$

где

$$K = (E+\varepsilon Q)^{-1} \begin{pmatrix} A_{12} & -\varepsilon S_{12} \\ D_{12} & A'_{21} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & \varepsilon^2 C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

$$C_{11} = -\varepsilon L_{11}K_{11} + A_{22}(E+\varepsilon L_{12}K_{21}) - \varepsilon^3 S_{22}L_{21}K_{11},$$

$$\varepsilon^2 C_{12} = -L_{21}L_{11}K_{12} + \varepsilon A_{22}L_{12}K_{22} - \varepsilon^2(E+\varepsilon L_{21}K_{12}),$$

$$C_{21} = \varepsilon A'_{22}L_{21}K_{11} - \varepsilon L_{22}K_{21} + D_{22}(E+\varepsilon L_{12}K_{11}),$$

$$C_{22} = A'_{22}(E+\varepsilon L_{21}K_{12}) - \varepsilon L_{22}K_{22} + \varepsilon D_{22}L_{12}K_{22}.$$

Данная система имеет инвариантное многообразие быстрых движений вида

$$\begin{pmatrix} w_x(k) \\ w_p(k) \end{pmatrix} = \varepsilon H \begin{pmatrix} z_y(k+1) \\ z_q(k) \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix},\ H_{ij} = H_{ij}(\varepsilon).$$

где матрицы H_{ij} являются решениями уравнений

$$-H_{11}C_{11} + (E+\varepsilon N_{11})(H_{11} + H_{12}C_{21}) +$$
$$+\varepsilon N_{12}H_{21}C_{11} + K_{11} = 0,$$

$$-H_{12}-\varepsilon^2 H_{11}C_{12}+(E+\varepsilon N_{11})H_{12}C_{22}+$$
$$+\varepsilon N_{12}(\varepsilon^2 H_{21}C_{12}+H_{22})+K_{12}=0,$$

$$-H_{21}-H_{22}C_{21}+\varepsilon N_{21}(H_{11}+H_{12}C_{21})+$$
$$+(E+\varepsilon N_{22})H_{21}C_{11}+K_{21}=0,$$

$$-H_{22}C_{22}+\varepsilon N_{21}H_{12}C_{22}+$$
$$+(E+\varepsilon N_{22})(H_{21}C_{12}+H_{22})+K_{22}=0 \tag{3.68}$$

и могут быть найдены в виде асимптотических разложений

$$H_{ij}(\varepsilon)=\varepsilon H_{ij}^{(1)}+\varepsilon^2 H_{ij}^{(2)}+\dots . \tag{3.69}$$

Подставляя соотношение (3.69) в уравнения (3.68) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, с учетом вида матриц N, C, K, получим при ε^0

$$-H_{11}^{(0)}A_{22}+H_{11}^{(0)}+H_{12}^{(0)}D_{22}+A_{12}=0,$$
$$-H_{12}^{(0)}+H_{12}^{(0)}A'_{22}=0,$$
$$-H_{21}^{(0)}-H_{22}^{(0)}D_{22}+H_{21}^{(0)}A_{22}+D_{12}=0,$$
$$-H_{22}^{(0)}A'_{22}+H_{22}^{(0)}+A'_{21}=0.$$

Отсюда имеем

$$H_{11}^{(0)}=-A_{12}(E-A_{22})^{-1},\quad H_{22}^{(0)}=-A'_{21}(E-A'_{22})^{-1},$$
$$H_{12}^{(0)}=0,\quad H_{21}^{(0)}=(D_{12}-H_{22}^{(0)}D_{22})(E-A_{22})^{-1}.$$

Аналогичным образом можно получить выражения для $H_{ij}^{(k)}$ при $k>0$.

Система, описывающая движение на инвариантном многообразии быстрых движений, имеет вид

$$\begin{pmatrix} v_x(k+1)\\ v_p(k)\\ z_y(k+1)\\ z_q(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(E+\varepsilon N_{11}) & \varepsilon N_{12} & 0 & 0\\ \varepsilon N_{21} & (E+\varepsilon N_{22}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & C_{11} & \varepsilon^2 C_{12}\\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} v_x(k)\\ v_p(k+1)\\ z_y(k)\\ z_q(k+1)\end{pmatrix}. \tag{3.70}$$

Таким образом, при помощи замены переменных

$$\begin{pmatrix} y(k) \\ q(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ p(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_y(k) \\ z_q(k) \end{pmatrix}, \tag{3.71}$$

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ p(k) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_y(k) \\ z_q(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x(k) \\ v_p(k) \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

мы привели систему (3.61) к виду (3.70), разделив медленные и быстрые переменные.

Рассмотрим быструю подсистему системы (3.70)

$$\begin{pmatrix} z_y(k+1) \\ z_q(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \varepsilon^2 C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_y(k) \\ z_q(k+1) \end{pmatrix}. \tag{3.73}$$

При $\varepsilon = 0$ собственные значения матрицы данной системы разбиваются на два множества: одно лежит внутри единичного круга, другое — вне его. Это дает возможность привести систему к блочно–диагональному виду.

Произведем в системе (3.73) замену переменных

$$\begin{pmatrix} z_y(k) \\ z_q(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \varepsilon^2 G \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} \tag{3.74}$$

и запишем уравнение для переменной z_2 в виде

$$z_2(k) = P(C_{21} z_1(k) + C_{22} z_2(k+1)), \tag{3.75}$$
$$P = P(\varepsilon) = (E - \varepsilon^2 C_{21} G)^{-1}.$$

Потребуем, чтобы уравнение для переменной z_1 не содержало z_2. Для этого матрица $G = G(\varepsilon)$ должна удовлетворять уравнению

$$C_{11} G (E - \varepsilon^2 C_{21} G)^{-1} C_{22} - G = 0. \tag{3.76}$$

Тогда уравнение для переменной z_1 примет вид

$$z_1(k+1) = C_{11}(E + \varepsilon^2 G P C_{21}) z_1(k). \tag{3.77}$$

Произведем теперь в системе (3.75), (3.77) замену переменных

$$\begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3(k) \\ z_4(k) \end{pmatrix}. \tag{3.78}$$

Потребуем, чтобы уравнение для переменной z_4 не содержало z_3. Для этого матрица $F = F(\varepsilon)$ должна удовлетворять уравнению

$$F = P(C_{21} + C_{22} F C_{11}(E + \varepsilon^2 G C_{21})). \tag{3.79}$$

Тогда уравнение для переменной z_4 примет вид

$$z_4(k) = PC_{22}z_4(k+1).$$

Будем искать матрицы $G(\varepsilon),\ F(\varepsilon)$ в виде асимптотических разложений

$$G(\varepsilon) = G_0 + \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + \ldots, \quad F(\varepsilon) = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \ldots.$$

Из (3.76), (3.79), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения относительно матриц $F_i,\ G_i$. В частности,

$$G_0 - A_{22}G_0A'_{22} = C_{12}(0), \quad F_0 - A'_{22}F_0A_{22} = C_{21}(0), \quad F_1 = 0.$$

Таким образом, при помощи преобразований (3.74), (3.78) мы привели систему (3.73) к блочно–диагональному виду

$$\begin{pmatrix} z_3(k+1) \\ z_4(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(E + \varepsilon^2 GPC_{21}) & 0 \\ 0 & PC_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3(k) \\ z_4(k+1) \end{pmatrix}. \qquad (3.80)$$

При малых значениях ε собственные значения матрицы $C_{11}(E + \varepsilon^2 GPC_{21})$ лежат внутри единичного круга, а собственные значения матрицы PC_{22} — вне его.

Итоговое преобразование системы (3.61) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ p(k) \\ y(k) \\ q(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & \varepsilon W_{11} & \varepsilon W_{12} \\ 0 & E & \varepsilon W_{21} & \varepsilon W_{22} \\ L_{11} & L_{12} & V_{11} & V_{12} \\ L_{21} & L_{22} & V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x(k) \\ v_p(k) \\ z_3(k) \\ z_4(k) \end{pmatrix}, \qquad (3.81)$$

где

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \varepsilon^2 G \\ F & E + \varepsilon^2 FG \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \right) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} E & \varepsilon^2 G \\ F & E + \varepsilon^2 FG \end{pmatrix}.$$

Подставим это преобразование в краевые условия (3.62). Используя свойства матриц, входящих в систему (3.80), легко заметить, что при достаточно малых значениях ε существует $0 < \beta < 1$ такое, что

$$z_3(N) = O(\beta^N), \quad z_4(0) = O(\beta^N). \qquad (3.82)$$

Выражения для $x(0),\ y(0)$, с учетом соотношений (3.82), примут вид

$$x_0 = v_x(0) + \varepsilon W_{11} z_3(0) + O(\beta^N). \qquad (3.83)$$

$$y_0 = L_{11}v_x(0) + L_{12}v_p(0) + V_{11}z_3(0) + O(\beta^N). \qquad (3.84)$$

Из соотношения (3.84) имеем

$$z_3(0) = V_{11}^{-1}(y_0 - L_{11}v_x(0) - L_{12}v_p(0))O(\beta^N).$$

Из уравнений (3.83), (3.84) получим

$$(1 - \varepsilon W_{11}V_{11}^{-1}L_{11})v_x(0) - \varepsilon W_{11}V_{11}^{-1}L_{12}v_p(0) = x_0 - \varepsilon W_{11}V_{11}^{-1}y_0 + O(\beta^N).$$

Выражения для $p(N)$, $q(N)$, с учетом соотношений (3.82), примут вид

$$p(N) = v_p(N) + \varepsilon W_{22}z_4(N) + O(\beta^N) = 0. \qquad (3.85)$$

$$q(N) = L_{21}v_x(N) + L_{22}v_p(N) + V_{22}z_4(N) + O(\beta^N) = 0. \qquad (3.86)$$

Из соотношения (3.86) имеем

$$z_4(N) = -V_{22}^{-1}(L_{21}v_x(N) + L_{22}v_p(N)) + O(\beta^N).$$

Из уравнений (3.85), (3.86) получим

$$(1 - \varepsilon W_{22}V_{22}^{-1}L_{22})v_p(N) - \varepsilon W_{22}V_{22}^{-1}L_{21}v_x(N) = O(\beta^N).$$

В результате, пренебрегая слагаемыми порядка $O(\beta^N)$, мы получили краевую задачу для медленных переменных

$$\begin{pmatrix} v_x(k+1) \\ v_p(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + \varepsilon N_{11} & \varepsilon N_{12} \\ \varepsilon N_{21} & E + \varepsilon N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x(k) \\ v_p(k+1) \end{pmatrix},$$

$$(1 - \varepsilon W_{11}V_{11}^{-1}L_{11})v_x(0) - \varepsilon W_{11}V_{11}^{-1}L_{12}v_p(0) = x_0 - \varepsilon W_{11}V_{11}^{-1}y_0,$$
$$(1 - \varepsilon W_{22}V_{22}^{-1}L_{22})v_p(N) - \varepsilon W_{22}V_{22}^{-1}L_{21}v_x(N) = 0$$

и две начальных задачи для быстрых переменных

$$z_3(k+1) = \varepsilon C_{11}(E + \varepsilon^2 C_{11}GPC_{21})z_3(k),$$
$$z_3(0) = V_{11}^{-1}(y_0 - L_{11}v_x(0) - L_{12}v_p(0)),$$

$$z_4(k) = \varepsilon PC_{22}z_4(k+1), \quad z_4(N) = -V_{22}^{-1}(L_{21}v_x(N) + L_{22}v_p(N)).$$

Пример 16 В качестве приложения рассмотрим задачу минимизации функционала
$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (x(k)^2 + y(k)^2 + u(k)^2)$$
на траекториях системы
$$x(k+1) = (1+\varepsilon)x(k) + \varepsilon y(k) + \varepsilon u(k), \quad y(k+1) = x(k),$$
где $x(k),\ y(k),\ u(k)$ — скаляры, $x(0),\ y(0)$ фиксированы.

Оптимальное управление в данной задаче будет иметь вид $u(k) = -p(k+1)$, где $x(k),\ y(k),\ p(k),\ q(k)$ — решение краевой задачи принципа максимума

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ p(k) \\ y(k+1) \\ q(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1+\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ p(k+1) \\ y(k) \\ q(k+1) \end{pmatrix}, \tag{3.87}$$
$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad p(N) = 0, \quad q(N) = 0. \tag{3.88}$$

При помощи линейного преобразования

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ p(k) \\ y(k) \\ q(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\varepsilon \\ 1-2\varepsilon & \varepsilon & 1-\varepsilon & 0 \\ 1-4\varepsilon & 1-\varepsilon & 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x(k) \\ v_p(k) \\ z_3(k) \\ z_4(k) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \tag{3.89}$$

краевая задача (3.87), (3.88) сводится к краевой задаче для медленных переменных
$$\begin{pmatrix} v_x(k+1) \\ f_p(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\varepsilon & -\varepsilon \\ 2\varepsilon & 1+2\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x(k) \\ v_p(k+1) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2),$$
$$(1-\varepsilon)v_x(0) = x_0 + \varepsilon y_0 + O(\varepsilon^2), \quad (1+\varepsilon)v_p(N) + v_x(N) = O(\varepsilon^2)$$
и двум начальным задачам для быстрых переменных
$$z_3(k+1) = -\varepsilon z_3(k) + O(\varepsilon^2),$$
$$z_3(0) = y_0 - (1+\varepsilon)(1-2\varepsilon)v_x(0) - \varepsilon v_p(0) + O(\varepsilon^2),$$

$$z_4(k) = \varepsilon^2 z_4(k+1) + O(\varepsilon^2),$$
$$z_4(N) = -(1+\varepsilon)((1-4\varepsilon)v_x(N) + (1-\varepsilon)v_p(N)) + O(\varepsilon^2).$$

Литература

[1] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1969.

[2] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

[3] Tu P.N.V. Dynamical Systems. An Introduction with Applications in Economics and Biology. Springer-Verlag, 1994.

[4] Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем. М.– Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006.

[5] Романко В.К. Разностные уравнения. М.: Бином, 2006.

[6] Naidu D.S. Singular Perturbations and Time Scales in Control Theory and Applications: an Overview // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms. 2002. Vol. 9. P. 233–278.

[7] Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // АиТ. 2006. № 1. С. 3–51.

[8] Gajic Z., Lim M. Optimal Control of Singularly Perturbed Linear Systems and Applications: High-Accuracy Techniques. Marcel Dekker, Inc. New York, 2000.

[9] Воропаева Н.В., Соболев В.А. Декомпозиция многотемповых систем. Самара: СМС, 2000. 290 с.

[10] Воропаева Н.В. Декомпозиция задач оптимального управления и оценивания для дискретных систем с быстрыми и медленными переменными // АиТ. 2008. № 6. С. 15–25.

Учебное издание

Воропаева Наталия Владимировна,
Соболев Владимир Андреевич,
Щепакина Елена Анатольевна

АНАЛИЗ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции
Титульное редактирование Т. И. Кузнецовой
Компьютерная верстка, макет Н. В. Воропаевой

Подписано в печать 13.11.2014.
Гарнитура Times New Roman. Формат $60 \times 84/16$.
Typeset by LaTeX. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 5,1. Уч.-изд. л. 5,5 . Тираж 100 экз. Заказ № 2559.
Издательство «Самарский университет»,
443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.
Отпечатано на УОП СамГУ