

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"Самарский государственный университет"

Кафедра математического моделирования в механике

Т.Е. Герасимова, П.Н. Ломаков, Л.В. Степанова

**ЧИСЛЕННАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ
ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В МЕХАНИКЕ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА:
ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве
учебного пособия

Самара
Издательство "Самарский университет"
2015

УДК 539.375
ББК 22.251
П37

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. СамГТУ В.П. Радченко
кап. физ.-мат. наук, доц. СГАУ А.А. Буханько

Герасимова, Т.Е.

П37 Численная обработка результатов оптоэлектронных измерений в механике деформируемого твердого тела: поляризационно-оптические методы: учебн.пособие/ Т.Е. Герасимова, П.Н. Ломаков, Л.В. Степанова. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2015. - 48 с.

Учебное пособие посвящено поляризационно-оптическим методам (методу фотоупругости) и его приложениям к механике разрушения. В пособии излагается подход, позволяющий определить многопараметрическое асимптотическое разложение поля напряжений в окрестности вершины трещины на основе экспериментальной информации, получаемой с помощью метода фотоупругости. Приводятся основы методы фотоупругости и методы численной обработки результатов оптоэлектронных измерений, а также результаты конечно-элементных расчетов для тел с угловыми вырезами. Предназначено для студентов (бакалавров и магистрантов), обучающихся по направлениям 01.04.03 "Механика и математическое моделирование", 01.03.02 "Прикладная математика и информатика", 01.03.01 "Математика" и специальности 01.05.01 "Фундаментальные математика и механика".

© Герасимова Т.Е., Ломаков П.Н., Степанова Л.В., 2015
© ФГБОУ ВПО "Самарский университет", 2015

Содержание

1. Введение	5
1.1. Экспериментальные методы в механике. Поляризационно-оптические методы.	5
2. Теория фотоупругости	6
2.1. Общие свойства электромагнитных волн.	6
2.2. Поляризация электромагнитных волн.	6
2.3. Виды поляризация электромагнитных волн.	6
3. Методы получения поляризованного света	7
3.1. Поляризация при отражении от диэлектрика. Закон Брюстера . . .	7
3.2. Явление двойного лучепреломления.	9
4. Поляризационно-оптический метод исследования механических напряжений (метод фотоупругости)	10
4.1. Трансмиссионная фотоупругость.	11
4.1.1 Физический принцип.	11
4.1.2 Оптико-механический закон.	11
4.1.3 Полосы в плоском полярископе.	12
4.1.4 Метод Джонса.	13
5. Экспериментальное определение поля напряжений у вершины остроуго выреза поляризационно-оптическими методами	17
5.1. Упругое решение в окрестности углового выреза.	18
5.2. Определение коэффициентов интенсивности напряжений методом фотоупругости.	19
5.3. Методика эксперимента.	29
6. Численная обработка результатов оптоэлектронных измерений в механике деформируемого твердого тела: поляризационно-оптические методы	29
6.1. Использование пакета Matlab. Image Processing Toolbox.	29
7. Конечно-элементный эксперимент. Моделирование деформирования образца с угловыми вырезами	30
7.1. Вычислительный эксперимент. Конечно-элементное решение задачи в пакете Simulia ABAQUS. Конечно-элементное решение задачи о растяжении образца с двумя симметричными угловыми вырезами.	30
7.2. Направления дальнейших исследований.	30

8. Цифровая обработка изображений	32
8.1. Изображения как функции двух переменных	32
8.2. Некоторые базовые соотношения и математические операции между пикселями. Окрестность пикселя.	33
8.2.1 Операции над окрестностью пикселя изображения.	34
8.3. Основные шаги обработки изображения.	35
8.4. Пространственная фильтрация.	36
9. "Умножение, утонение полос и кластеризация полос	36
9.1. Умножение полос.	37
9.2. Полуполосная фотоупругость.	38
10. Методы утонения полос	39
10.1. Алгоритмы, базирующиеся на рассмотрении картины полос как двоичного образа.	39
10.2. Алгоритмы, базирующиеся на изменении освещенности внутри интерференционной полосы.	40
11. Глобальная идентификация полос интерференционной картины	41
11.1. Определение краев интерференционных полос.	41
Список литературы	42

1. Введение

1.1. Экспериментальные методы в механике. Поляризационно-оптические методы

Аналитические или численные методы определения полей напряжений в твердых телах требуют формулировки краевых задач для уравнений в частных производных с необходимыми граничными условиями и последующего аналитического или численного решения этих краевых задач с применением тех или иных упрощений в зависимости от сложности задачи [1, 2, 3]. Получив решение задачи, можно проанализировать поля напряжений и перемещений, построить графики распределения компонент тензоров напряжений и деформаций, компонент вектора перемещений. С другой стороны, получить распределение напряжений можно экспериментальным путем. Один из наглядных подходов представляет метод фотоупругости.

Рассмотрим балку и приложим силы, как показано на рис. 1. Таким образом, исследуется балка на четырехточечный изгиб.

Для этой задачи имеется простое аналитическое решение, которое можно получить методами сопротивления материалов. Деформация центральной части балки, удаленной от точек приложения нагрузки, может быть описана с помощью обычного балочного приближения. Компоненты тензора напряжений определяются выражением

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} -M_z y / I_{zz} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Главные напряжения для полученного тензора напряжений имеют вид $\sigma_1 = \sigma_{xx}$, $\sigma_2 = 0$. Построим линии равных значений разности главных напряжений. Линии равных значений главных напряжений будут представлять собой совокупность горизонтальных линий.

Контур, изображенный на фотографии, в литературе по фотоупругости называются изохромами - это линии равных значений разности главных напряжений. В отличие от изохром, фотоупругость также позволяет построить изоклины, линии, касательные в каждой точке которых совпадают с направлениями главных напряжений.

Фотомеханика представляет собой совокупность экспериментальных техник, базирующихся на свойствах поляризованного света, проходящего через нагруженные или деформированные тела, нацеленных на определение и анализ перемещений в изучаемом образце для нахождения напряженно-деформированного состояния. Фотоупругость является разделом фотомеханики. Фотоупругость основана на использовании оптически чувствительных материалов и на свойстве двойного лучепреломления.

Остановимся на основных свойствах электромагнитных волн.

2. Теория фотоупругости

2.1. Общие свойства электромагнитных волн

Электромагнитная волна представляет собой распространяющиеся в пространстве переменные электрическое и магнитное поля, изменяющиеся с одинаковой частотой: $E = E_0 \sin \omega(t - x/V)$, $B = B_0 \sin \omega(t - x/V)$, где V – скорость распространения волны, $\omega = 2\pi/T$ – круговая частота волны. Характеристиками волны являются также следующие величины: линейная частота волны $\nu = 1/T$, период волны T и длина волны $\lambda = VT$ – расстояние, проходимое волной за один период колебания.

Теория электромагнитных волн была развита Максвеллом, и в ее основе лежат два экспериментально установленных факта:

1. Переменное электрическое поле создает в окружающем пространстве магнитное поле той же частоты.
2. Переменное магнитное поле создает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле той же частоты.

Электромагнитным волнам всех диапазонов присущи и общие свойства. Одним из них является поляризация волн.

2.2. Поляризация электромагнитных волн

В любой электромагнитной волне векторы напряженности электрического поля \vec{E} , индукции магнитного поля \vec{B} и вектор скорости волны \vec{v} образуют перпендикулярную тройку векторов: $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{v}$. Поскольку при распространении волны векторы \vec{B} и \vec{E} всегда взаимно перпендикулярны, то они изменяются в пространстве одинаковым образом, описывая одинаковые по форме кривые, но во взаимно перпендикулярных плоскостях. Поэтому достаточно знать, как изменится в пространстве один из этих векторов, а поведение другого будет аналогичным. Экспериментально установлено, что действие электромагнитной волны на глаз, фотоприемники и многие другие объекты оказывает электрический вектор E волны, который поэтому называют также световым вектором волны. Вид поляризации волны определяется видом той кривой, которую описывает вектор E волны за один период колебания в плоскости наблюдения. При этом свет должен распространяться к наблюдателю. Плоскость наблюдения это плоскость, перпендикулярная направлению распространению волны.

2.3. Виды поляризация электромагнитных волн

1. Линейная (плоская поляризация). В этом случае в процессе распространения волны вектор E колеблется в одной и той же плоскости в пространстве, называемой плоскостью поляризации волны. Проекция вектора E на плоскость

наблюдения будет иметь вид отрезка прямой линии, в связи с чем эту поляризацию называют линейной или же плоской. Отметим, что плоскость колебания магнитного вектора волны будет перпендикулярна плоскости колебаний вектора E (рис. 2).

2. Круговая (циркуляционная) поляризация. При такой поляризации вектор E волны за один период делает полный оборот вокруг направления распространения волны, при этом его длина остается постоянной. В плоскости наблюдения проекция вектора E описывает круг, что и определяет название такой поляризации. Если вектор вращается по часовой стрелке (волна должна распространяться к наблюдателю), то поляризация называется правой круговой, а если против часовой стрелки, то - левой круговой поляризацией.

3. Эллиптическая поляризация. При такой поляризации вектор E за один период волны делает полный оборот вокруг направления распространения волны, но длина вектора E при этом изменяется таким образом, что его конец описывает в плоскости наблюдения эллипс.

Эти виды полной поляризации света. Любую из них можно перевести в другую с помощью специальных поляризационных приборов. Свет, испускаемый обычными источниками света, - Солнцем, пламенем, электрической лампочкой - является неполяризованным светом и называется естественным светом. Естественный свет можно рассматривать как совокупность поляризованных волн со всеми возможными направлениями колебаний вектора E , причем амплитуда этих векторов одинакова во всех направлениях, так что концы их лежат на окружности. Этот свет полностью неполяризован и по своим поляризационным свойствам существенно отличается и от линейно-поляризованного и от циркуляционно-поляризованного света. Полностью поляризованный свет можно преобразовать с помощью специальных поляризационных приборов (компенсаторов и фазовых пластинок) из одной его формы в другую, например, линейно-поляризованный свет в свет с круговой или эллиптической поляризацией. Преобразовать полностью поляризованный свет в частично поляризованный или естественный свет таким прибором невозможно.

3. Методы получения поляризованного света

3.1. Поляризация при отражении от диэлектрика. Закон Брюстера

Хорошо известно, что при падении электромагнитной волны на границу раздела двух диэлектриков с коэффициентами преломления n_1 и n_2 возникают отраженная и преломленная волны, подчиняющиеся законам отражения и преломления. Поляризация этих волн в общем случае будет различной. Если падающий свет естественно поляризован, то отраженная и преломленная волны будут поляризованы частично. Степень их поляризации будет зависеть от угла падения a :

но мерс его увеличения степень поляризации отраженного света растет и при определенном угле падения, называемом углом Брюстера (или углом полной поляризации), отраженная волна будет полностью линейно поляризована. При этом ее электрический вектор будет перпендикулярен плоскости падения. Угол Брюстера находится из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{Br}} = n_2/n_1. \quad (2)$$

Преломленная волна будет поляризована частично, причем максимальная составляющая ее электрического вектора будет параллельна плоскости падения. Это означает, что при таком угле падения частично отражается свет только с такой линейной поляризацией. А если падающая волна линейно поляризована параллельно плоскости падения, то при падении под углом Брюстера она не отражается, а полностью проходит во вторую среду. Поэтому, чтобы полностью поляризовать прошедшую волну и получить максимально возможный выход линейно поляризованного света, используют стопку плоскопараллельных пластинок, где за счет многократного отражения одной поляризации на выходе получают практически линейно поляризованный свет. Среды, свойства которых одинаковы во всем направлениям, называются изотропными. Анизотропными называются среды, свойства которых не одинаковы в различных направлениях. Анизотропия характерна для кристаллов. Оптическая анизотропия кристаллов проявляется в том, что в разных направлениях в кристалле скорость света различна и, кроме того, даже в одном и том же направлении она различна для волн разной поляризации. Однако в кристаллах всегда есть одно или два направления, в которых скорость света одинакова для волн любой поляризации. Эти направления называют оптическими осями кристалла. Если в кристалле только одно такое направление, то кристалл называется одноосным, а если два - двуосным. В таких кристаллах, независимо от поляризации падающего на них света, всегда распространяются только две линейно поляризованные волны, плоскости поляризации которых взаимно перпендикулярны. Для одной из этих волн скорость распространения в одноосном кристалле одинакова во всех направлениях (как в изотропной среде) - такая волна называется обыкновенной и характеризуется постоянной скоростью распространения v_o и соответствующим показателем преломления $n_o = c/v_o$. Для другой волны скорость распространения v_e и показатель преломления $n_e = c/v_e$ будут различны в разных направлениях, - такая волна называется необыкновенной. Таким образом, независимо от поляризации волны, падающей на кристалл, в кристалле будут распространяться одновременно две линейно поляризованные волны - обыкновенная и необыкновенная, у которых плоскости колебаний светового вектора E будут взаимно перпендикулярны. У обыкновенной волны плоскость колебаний электрического вектора E всегда перпендикулярна главной плоскости кристалла, а у необыкновенной волны - параллельна. Главная плоскость кристалла - это плоскость, содержащая оптическую ось кристалла и световой луч, распространяющийся в нем.

3.2. Явление двойного лучепреломления

Из-за различия в показателях преломления обыкновенной и необыкновенной волн в кристаллах, как правило, возникают два преломленных луча, в полном соответствии с законом преломления света

$$\sin \beta_0 = \sin \alpha / n_0, \quad \sin \beta_e = \sin \alpha / n_e.$$

Это явление, называемое двулучепреломлением, широко используется для создания поляризационных призм, основная задача которых состоит в том, чтобы пропустить через кристалл только одну из линейно поляризованных волн и не пропустить другую. Примером такой призмы является призма Николя (ее называют поляризатором или поляроидной пластиной). Эта призма изготавливается из кристалла исландского шпата, имеющего наибольшую известную разность между показателями преломления обыкновенной и необыкновенной волн. Призма, вырезанная определенным образом из этого кристалла, распиливается по меньшей диагонали и затем склеивается по месту распила специальным оптическим клеем - канадским бальзамом. Показатель преломления канадского бальзама n_c занимает промежуточное положение между n_0 и n_e

$$n_0 > n_b > n_e. \quad (3)$$

Неполяризованный свет, падающий на призму, распадается при преломлении на два луча, которые падают на склейку под разными углами. Обыкновенный луч падает на склейку из более плотной среды на менее плотную ($n_c > n_0$). При таких условиях возможно полное внутреннее отражение света и геометрия призмы рассчитывается таким образом, чтобы обыкновенный луч полностью отразился от склейки. Затем он поглощается черной краской, нанесенной на нижнюю грань призмы. Необыкновенный луч, напротив, падает из менее плотной среды на более плотную ($n_e < n_b$) и практически полностью проходит через склейку. В результате через призму Николя проходит всегда только линейно поляризованный свет. Плоскость колебаний вектора E всегда параллельна плоскости, в которой лежит оптическая ось кристалла, поэтому при вращении призмы Николя вокруг падающего луча, плоскость колебаний вектора E прошедшей волны тоже будет поворачиваться вместе с призмой. Таким образом, призма Николя является поляризатором - устройством, которое независимо от поляризации падающего света пропускает только линейно поляризованные волны с определенной ориентацией плоскости колебания светового вектора. В поглощающих средах интенсивность уменьшается с пройденным расстоянием x по закону Бугера

$$I = I_0 e^{-kx}, \quad (4)$$

где I_0 - интенсивность падающего света, k - показатель поглощения среды. Это явление - зависимость показателя поглощения от поляризации волны называется дихроизмом поглощения.

4. Поляризационно-оптический метод исследования механических напряжений (метод фотоупругости)

При создании в изотропном образце механических напряжений он становится анизотропным. Поэтому явление двойного лучепреломления можно наблюдать в изотропных веществах, если их подвергнуть деформации. Это явление, получившее название искусственного двойного лучепреломления, лежит в основе оптического метода исследования распределения механических напряжений в деформированном твердом теле, который называется методом фотоупругости. Он нашел широкое применение в приложениях. Метод фотоупругости рассчитан на использовании модели из прозрачных материалов (оргстекло, эпоксидная и полиэфирная смолы). При просвечивании поляризованным монохроматическим светом нагруженной модели каждый ее элемент ведет себя подобно кристаллу с двойным лучепреломлением. Если поместить модель между поляризатором и анализатором, то можно создать условия, необходимые для интерференции когерентных обыкновенных и необыкновенных лучей, возникающих при двойном лучепреломлении. Поэтому при наблюдении через анализатор такой модели на ее поверхности видна система темных и светлых интерференционных полос. Темные полосы получили название изохром. По виду изохром можно судить о распределении механических напряжений в модели, так как каждая изохрома проходит через точки, которым соответствует одинаковое максимальное механическое (касательное) напряжение. Рассмотрим кристаллическую пластину толщины h . Пусть плоскополяризованный свет падает нормально на поверхность пластины, как показано на рис. 3. Пусть оси поляризации составляют угол θ и $\theta + \pi/2$ с горизонтальной осью. Поскольку падающий луч света ортогонален оптическим осям кристалла, два луча (обыкновенный и необыкновенный лучи) распространяются в одном и том же направлении, но с разными скоростями v_1 v_2 . Эти два луча обладают разностью фаз δ . Поскольку скорости распространения внутри кристалла для этих двух лучей различны, то для прохождения этих лучей сквозь пластину будет требоваться различное время h/v_1 и h/v_2 . Пусть частота световой волны будет равна f , тогда

$$\delta = 2\pi f (h/v_1 - h/v_2) = 2\pi hc (h/v_1 - h/v_2) / \lambda = 2\pi h(n_1 - n_2) / \lambda. \quad (5)$$

Если толщина пластины такова, что разность фаз составляет $\pi/2$, то известно, что такую пластину называют четверть волновой ($\lambda/4$). Если разность фаз равна π , то говорят о полуволновой пластине. Если разность фаз составляет 2π , то получают полноволновую пластину и падающая световая волна не изменяется. Обычно волновые пластины производят из слюды или кварца, и четвертьволновые пластины обычно имеют толщину, равную одному миллиметру. Необходимо отметить, что кристаллическая пластинка может быть названа четвертьволновой или полуволновой пластиной только для указанной длины волны. Волновые

пластины имеют две оси поляризации, одна из этих осей называется быстрой осью, тогда как другая - медленной осью,

4.1. Трансмиссионная фотоупругость

Проще всего понять явление фотоупругости с помощью трансмиссионной фотоупругости. В этом случае обычно используется плоскополяризованный свет или световая волна с круговой поляризацией для анализа поля напряжений в модели из оптически чувствительного материала. Поскольку необходим поляризованный свет, то основное оборудование, которое необходимо для опыта, это полярископ.

4.1.1 Физический принцип

Некоторые некристаллические прозрачные материалы (полимерные пластики), которые в нормальных условиях оптически изотропны, становятся оптически анизотропными под действием механических нагрузок. На этом основано свойство фотоупругости.

Фотоупругие модели ведут себя как кристаллы с различными характеристиками в различных точках модели под действием нагрузок. Когда световой луч падает на модель по нормали, то главные оси тензора напряжений ведут себя как оси поляризации. Обыкновенный и необыкновенный лучи со взаимно перпендикулярными осями распространяются в тех же направлениях, но с различными скоростями.

4.1.2 Оптико-механический закон

Рассмотрим модель из прозрачного материала, находящегося в условиях плоского напряженного или плоского деформированного состояния. Пусть напряженное состояние в каждой точке модели описывается главными напряжениями σ_1 и σ_2 . Экспериментально было установлено, что при любых заданных материале, температуре и длине волны света разность фаз пропорциональна разности главных напряжений. Кроме того, она пропорциональна толщине пластины. Эта зависимость обычно выражается в форме

$$\delta = 2\pi hC(\sigma_1 - \sigma_2)/\lambda. \quad (6)$$

В этой формуле C - экспериментально определяемый оптико-механический коэффициент (коэффициент зависит как от длины волны и температуры, так и от вида материала), λ - длина световой волны в вакууме. Уравнение (6) может быть записано в терминах порядка полосы $N = \delta/2\pi = hC(\sigma_1 - \sigma_2)/\lambda$, которое, в свою очередь, может переписано как

$$\sigma_1 - \sigma_2 = NF_\sigma/h, \quad F_\sigma = \lambda/C \quad (7)$$

где F_σ – оптическая постоянная материала, характеризуемая разностью главных напряжений, необходимой для изменения порядка полос на единицу в модели единичной толщины. Уравнение (7) называют оптико-механическим законом, поскольку он связывает механическую величину – разность главных напряжений и оптически измеренную величину. Обычно главные напряжения нумеруют таким образом, что $\sigma_1 > \sigma_2$. Поэтому правая часть (7) всегда положительна. С помощью (7) можно определить разность главных напряжений в каждой точке модели, если известны оптическая постоянная материала (F_σ) и порядок полос N .

4.1.3 Полосы в плоском полярископе

Одним из наиболее простых оптических устройств является плоский полярископ, изображенный на рис. 4. Рассмотрим монохроматический источник света. Пусть свет, падающий на круговой диск под действием сжимающей нагрузки, плоско поляризован. Когда свет проходит через нагруженную модель, положение осей поляризации от точки к точке в модели меняется в зависимости от величины разности главных напряжений и направления главных напряжений. Можно получить информацию о поле напряжений, если изучить положение осей поляризации в модели. Анализ осей поляризации можно осуществить, если установить поляризатор с направлением оси поляризации, равным нулю. Поскольку этот оптический инструмент позволяет анализировать выходящий из модели свет, его называют анализатором. С введением анализатора на экране появляются полосы. Контуры этих полос соответствуют тем точкам модели, в которых отсутствует проходящий через модель свет. Поскольку ось поляризации анализатора выставлена на нуль, то это оказывается возможным только тогда, когда выходящий свет из модели имеет вертикальную ось поляризации. Таким образом, для того чтобы дать физическую интерпретацию картине полос, необходимо идентифицировать условия, при которых падающий плоскополяризованный свет не искажается во время его прохождения через модель. Падающий свет не искажается при переходе через модель, когда сама модель ведет себя как полупрозрачная пластина. Это реализуется в том случае, если разность главных напряжений такова, что она вызывает разность хода, равную $2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Совокупность точек, формирующих картину полос и удовлетворяющих сформулированному выше условию, называется изохромами. Другая возможность, при которой падающий свет не искажается, соответствует совпадению оси поляризатора с одним из направлений главных напряжений. Такие геометрические места точек называются изоклинами (линиями с постоянным наклоном). Изоклины обычно нумеруются с помощью углов. Таким образом, в плоском полярископе имеются два семейства контуров – изохромы и изоклины.

4.1.4 Метод Джонса

При анализе оптических явлений, возникающих при прохождении света через полярископ, полагают, что электрический вектор света \vec{E} распадается на две ортогонально поляризованные компоненты \vec{E}_1 и \vec{E}_2 . Компоненты электрического вектора могут быть записаны в матричной форме

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 e^{i\omega t - \varphi_1} \\ E_2 e^{i\omega t - \varphi_2} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где E_1, E_2 - амплитуды ортогонально поляризованных компонент вдоль осей x_1 и x_2 . $\omega = 2\pi c/\lambda$ - круговая частота, c - скорость распространения света, φ_1, φ_2 - фазы компонент E_1 и E_2 . При прохождении через модель две компоненты получают разности фаз δ_1 и δ_2 . Относительная разность фаз равна $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$. Каждый оптический элемент на пути светового луча характеризуется двумя параметрами - его ориентацией - углом α между быстрой оптической осью с осью x_1 и относительной разностью фаз. С помощью этих двух параметров вектор Джонса падающего на оптический элемент луча может быть трансформирован для определения светового луча, оставляющего оптический элемент. Такая трансформация осуществляется с помощью трех этапов: входящая волна \vec{E}_{inc} раскладывается на две компоненты вдоль главных осей оптического элемента

$$\vec{E}' = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \vec{E}_{inc}. \quad (9)$$

На втором шаге вводится относительное изменение фаз (замедление вдоль медленной оси по отношению к быстрой оси) вдоль медленного главного направления

$$\vec{E}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta s} \end{pmatrix} \vec{E}', \quad (10)$$

где δs - относительная разность фаз между главными (быстрой и медленной) компонентами светового луча. Окончательно, главные компоненты имеют вид

$$\vec{E}_{out} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \vec{E}'' . \quad (11)$$

Комбинируя эти операции, соотношение между входящим вектором Джонса \vec{E}_{in} и выходящим из оптического элемента вектором Джонса \vec{E}_{out} определяется выражением

$$\vec{E}_{out} = J(\delta s, \alpha) \vec{E}_{in}, \quad (12)$$

где

$$J(\delta s, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + e^{-i\delta s} \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{-i\delta s}) \\ \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{-i\delta s}) & \sin^2 \alpha + e^{-i\delta s} \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (13)$$

матрица Джонса оптического элемента. Если луч света проходит через совокупность n оптических элементов с матрицей Джонса J_k , то выходящий электрический вектор будет определяться выражением

$$\vec{E}_{out} = J_n(\delta s_n, \alpha_n) J_{n-1}(\delta s_{n-1}, \alpha_{n-1}) \dots J_2(\delta s_2, \alpha_2) J_1(\delta s_1, \alpha_1) \vec{E}_{in}. \quad (14)$$

Приведем матрицы Джонса для наиболее употребительных оптических элементов: для линейного поляризатора, для четвертьволновой и для полуволновой пластин. Линейный поляризатор дает только одну плоскость поляризации, следовательно, относительная разность фаз может быть принята равной бесконечности. Пусть ориентация оптического элемента определяется углом α . Тогда матрица Джонса задается следующим образом

$$J(\infty, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Для четвертьволновой пластины $\delta s = \pi/2$. Пластина обычно размещается под углом $\alpha = \pm\pi/4$ по отношению к оси поляризации, следовательно, матрица Джонса равна

$$J_{\lambda/4}(\pi/2, \pm\pi/4) = \begin{pmatrix} (1-i)/2 & \pm(1+i)/2 \\ \pm(1+i)/2 & (1-i)/2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Брюстер (1814, 1815) обнаружил, что в некоторых материалах показатель преломления зависит от приложенной нагрузки к образцу. После снятия нагрузки показатель преломления возвращает свое исходное значение. На этом явлении базируется метод фотоупругости. Вызванное приложением нагрузки двойное лучепреломление, которое проявляется полимерами, и образует базис метода фотоупругости. Нагруженный образец становится фазовым замедлителем с пространственно меняющимся замедлением, обусловленным пространственным изменением поля напряжений. Главные быстрая и медленная оси совпадают с главными оптическими осями. Показатель преломления в точке образца зависит от напряженного состояния в этой точке. Двойное лучепреломление, вызванное приложением нагрузки к образцу, позволяет определить поле напряжений. Максвелл обнаружил зависимость показателя преломления от главных напряжений в следующей форме

$$n_1 - n_0 = c_1 \sigma_1 + c_2 (\sigma_2 + \sigma_3), \quad (17)$$

$$n_2 - n_0 = c_1 \sigma_2 + c_2 (\sigma_3 + \sigma_1), \quad (18)$$

$$n_3 - n_0 = c_1 \sigma_3 + c_2 (\sigma_1 + \sigma_2), \quad (19)$$

где n_0 - показатель преломления ненагруженного материала в его оптически изотропном состоянии; n_1, n_2, n_3 - главные показатели преломления для световых волн с колебаниями в плоскостях, параллельных главным напряжениям;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения, c_1, c_2 – оптико-механические постоянные материала, определяющие зависимость между двойным лучепреломлением и напряжениями. Вычитая уравнение (18) из (17) и исключая n_0 , получаем следующую зависимость между двойным лучепреломлением и напряжениями для материала в общем случае пространственного напряженного состояния:

$$n_1 - n_2 = (c_1 - c_2)(\sigma_1 - \sigma_2) = C(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (20)$$

где $C = c_1 - c_2$ – относительный оптико-механический коэффициент, определяющий зависимость между двойным лучепреломлением и напряжениями. По аналогии получаем

$$n_1 - n_3 = C(\sigma_1 - \sigma_3), \quad n_2 - n_3 = C(\sigma_2 - \sigma_3). \quad (21)$$

Если экспериментальный образец – пластина и напряжение, нормальное к ее поверхности (в направлении распространения света) равно нулю, то нагруженная модель ведет себя как фазовая пластина. Свет будет проходить через образец в виде двух отдельных компонент, поляризованных в главных плоскостях и для ортогональных луча получают разность хода выражается в форме

$$\delta = 2\pi h C(\sigma_1 - \sigma_2) / \lambda. \quad (22)$$

Поэтому воздействие нагруженного образца с двойным лучепреломлением на проходящий через него световой луч будет проявляться в виде относительного запаздывания одной компоненты светового луча относительно другой компоненты вдоль локальных главных направлений. Пусть $\beta(x_1, x_2)$ – угол, который составляет направление максимального главного напряжения с глобальной осью x_1 . Эффект нагруженного образца на проходящий через него поляризованный свет в точке x_1, x_2 может быть представлен с помощью матрицы Джонса

$$J_\beta(\delta s, \beta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \beta + e^{-i\delta s} \sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta (1 - e^{-i\delta s}) \\ \sin \beta \cos \beta (1 - e^{-i\delta s}) & \sin^2 \beta + e^{-i\delta s} \cos^2 \beta \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Для того чтобы выявить разность фаз в визуальной форме, нагруженный образец просвечивают световым лучем с круговой поляризацией. Оптическая схема с круговым поляризатором показана на рис. 5.

Падающий луч описывается вектором Джонса

$$\vec{E}_{in} = \begin{pmatrix} 0 \\ k e^{i\omega t} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Затем свет проходит через четвертьволновую пластину, которая вводит относительное замедление в одну четверть волны между двумя компонентами падающего луча. Быстрая ось четверть волновой пластины ориентирована под углом $\pi/4$ к глобальной оси x_1 . Матрица Джонса четвертьволновой пластины для $\delta s = \pi/2$ и $\alpha = \pi/4$ находится из уравнения (13) и имеет вид (16). Световой

луч, выходящий из четвертьволновой пластины, легко находится с помощью метода Джонса

$$\vec{E}^i = J_{\lambda/4}(\pi/2, \pi/4) \vec{E}_{in} = k e^{i\omega t} \begin{pmatrix} (1+i)/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Световой луч, проходящий через четвертьволновую пластину, обладает круговой поляризацией. Этот луч проходит через нагруженный образец и испытывает фазовое замедление. Световой луч, вышедший из образца, накапливает относительную разность фаз (22) и определяется выражением

$$\vec{E}'' = J_{\beta}(\delta s, \beta) J_{\lambda/4}(\pi/2, \pi/4) \vec{E}_{in}. \quad (26)$$

Световой луч, вышедший из образца, затем проходит снова через четвертьволновую пластину, ориентированную под углом $-\pi/4$ к глобальной оси координат x_1 и достигает второго поляризатора (анализатора). Ось второго поляризатора может совпадать с осью первого поляризатора x_1 (в этом случае говорят о полярископе темного поля) или вдоль оси x_2 (в этом случае говорят о полярископе светлого поля). Луч света, выходящий из анализатора, в полярископе темного поля может быть записан следующим образом

$$\vec{E}_{out} = J_{linear}(\infty, 0) J_{\lambda/4}(\pi/2, -\pi/4) J_{\beta}(\delta s, \beta) J_{\lambda/4}(\pi/2, \pi/4) \vec{E}_{in} \quad (27)$$

Подстановка соответствующих матриц Джонса в последнее выражение позволяет найти

$$\vec{E}_{out} = \frac{k e^{i\omega t}}{2} J_{linear}(\infty, 0) \begin{pmatrix} e^{-i2\beta} (1 - e^{-i\delta s}) \\ -i (1 + e^{-i\delta s}) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Поляризатор с линейно поляризованным вдоль оси x_1 светом пропускает свет только вдоль оси x_1 , поэтому у выходящего луча будет только одна компонента

$$\vec{E}_{out} = \frac{k e^{i\omega t}}{2} \begin{pmatrix} e^{-i2\beta} (1 - e^{-i\delta s}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Интенсивность светового луча – усредненное по времени (по промежутку времени, значительно превышающему период) значение \vec{E}_{out}^2 :

$$I(x_1, x_2) = \langle \vec{E}_{out}^2 \rangle = (k^2/2) \sin^2 [\delta(x_1, x_2)/2] \quad (30)$$

Поэтому пространственное изменение интенсивности светового луча зависит только от относительной разности фаз, вводимой нагруженным образцом. В данном оптическом устройстве ориентация главных направлений $\beta(x_1, x_2)$ не оказывает влияния на интенсивность света. Светлые полосы, соответствующие

максимальной интенсивности света, – это линии на плоскости x_1, x_2 , для которых

$$\sigma_1 - \sigma_2 = NF_\sigma/h, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (31)$$

где N – порядок полосы. Следовательно, размещая образец между скрещенными круговыми поляризаторами, мы получим линии постоянного значения касательного напряжения. Эти линии называются изохромами.

5. Экспериментальное определение поля напряжений у вершины острого выреза поляризационно-оптическими методами

V-образные вырезы и клиновидные области (входящие угловые вырезы) часто присутствуют в элементах конструкций инженерных сооружений. Угловой вырез можно рассматривать как острый, когда радиус закругления очень мал по сравнению с длиной его стороны. Трещину также можно рассматривать как частный случай острого выреза, когда радиус выреза равен нулю. Шестеренки, винты, болты и гайки представляют собой самые известные детали, содержащие острые или закругленные V-вырезы. V-образные вырезы также могут появляться в специальных структурах в результате анизотропного химического процесса травления, когда микроэлектромеханические структуры производятся из силикона. Как следствие, микроструктуры имеют острые углы, образованные кристаллографическими плоскостями.

Локальные высокие напряжения могут вызывать локальное повреждение вблизи острого выреза при действии статической или переменной нагрузок и, таким образом, существенно влияют на долговечность и живучесть всей конструкции. Поэтому тщательное определение полей напряжений вблизи острого выреза и способность предсказать условия хрупкого разрушения элемента конструкции представляет собой фундаментальную задачу, для решения которой применяются концепции линейной механики разрушения для исследования напряженно-деформированного состояния с помощью коэффициента интенсивности напряжений, характеризующего напряжения вокруг вершины углового выреза. Существующие в настоящее время исследования показывают [8, 9], что значительное влияние на оценки напряженно-деформированного состояния оказывают несингулярные слагаемые в полном решении Уильямса. Работы ряда ученых показывают, что высшие члены асимптотических разложений влияют на размеры и форму областей пластического течения у вершины трещины и могут рассматриваться как второй параметр разрушения наряду с коэффициентом интенсивности напряжений. Следовательно, аккуратное определение коэффициента интенсивности напряжений и коэффициентов высших слагаемых в асимптотических разложения компонент тензора напряжений представляет

собой одну из первоочередных задач современной механики разрушения. Большинство работ, посвященных изучению напряженно-деформированного состояния вблизи V-образных вырезов, основаны главным образом на теоретических и численных оценках полей напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины V-образного выреза. Очень мало работ содержит экспериментальные оценки механических полей в образцах с угловыми вырезами. Среди упомянутых экспериментальных работ можно выделить исследование Прассианакиса и Теокариса [4], в котором определен коэффициент интенсивности напряжений для упругих симметрично нагруженных пластин с боковыми угловыми выточками методом каустик. В [5] найдено сингулярное поле напряжений для образца с выточками на основе метода фотоупругости. Авторы нашли коэффициент интенсивности напряжений для клиновидной области с углом раствора, равным 90°, для случая смешанного нагружения тела с трещиной. Однако во всех этих работах эффекты, обусловленные влиянием высших слагаемых в асимптотических разложениях компонент тензора напряжений, не принимаются во внимание. Более того, самые последние исследования трещин показывают, что первые несингулярные слагаемые в асимптотических разложениях в полном решении Уильямса [6, 7, 8] ($n = 2$) (называемые T-напряжениями) играют существенную роль в оценке поля напряжений в окрестности вершины трещины. Методы фотоупругости широко используются для экспериментального определения полей напряжений в оптически чувствительных образцах. Метод фотоупругости применяется для нахождения поля напряжений в образцах с угловыми вырезами.

5.1. Упругое решение в окрестности углового выреза

Поле напряжений в окрестности вершины углового выреза (рис. 6) было найдено Уильямсом в его классических работах [25], [26]

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} Re \left\{ \frac{\lambda_n^I A_n}{r^{-a_n}} \left\{ \begin{array}{l} (2 + \lambda_n^I \cos 2\alpha + \cos 2\alpha \lambda_n^I) \cos a_n \theta - a_n \cos(a_n - 2)\theta \\ (2 - \lambda_n^I \cos 2\alpha - \cos 2\alpha \lambda_n^I) \cos a_n \theta + a_n \cos(a_n - 2)\theta \\ -(\lambda_n^I \cos 2\alpha + \cos 2\alpha \lambda_n^I) \sin a_n \theta + a_n \sin(a_n - 2)\theta \end{array} \right\} \right\} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} Re \left\{ \frac{\lambda_n^{II} B_n}{r^{-b_n}} \left\{ \begin{array}{l} -(2 + \lambda_n^{II} \cos 2\alpha - \cos 2\alpha \lambda_n^{II}) \sin b_n \theta + b_n \sin(b_n - 2)\theta \\ -(2 - \lambda_n^{II} \cos 2\alpha - \cos 2\alpha \lambda_n^{II}) \sin b_n \theta - b_n \sin(b_n - 2)\theta \\ -(\lambda_n^{II} \cos 2\alpha - \cos 2\alpha \lambda_n^{II}) \cos b_n \theta + b_n \cos(b_n^{II} - 3)\theta \end{array} \right\} \right\}. \quad (32)$$

Здесь приняты следующие обозначения: r, θ – полярные координаты с полюсом в вершине углового выреза, γ – раствор клина, $a_n = \lambda_n^I - 1$, $b_n = \lambda_n^{II} - 1$, $\alpha = (2\pi - \gamma)/2$, $\lambda_n^I, \lambda_n^{II}$ – собственные значения, определяемые из характеристических уравнений

$$\lambda_n^I \sin 2\alpha + \sin 2\lambda_n^I \alpha = 0, \quad \lambda_n^{II} \sin 2\alpha - \sin 2\lambda_n^{II} \alpha = 0. \quad (33)$$

Решение Уильямса содержит амплитудные коэффициенты A_n, B_n , отвечающие трещинам нормального отрыва и поперечного сдвига соответственно. Первые слагаемые в каждой из сумм ($n = 1$) сингулярны в окрестности вершины трещины или углового выреза, и их коэффициенты A_I и B_I связаны с коэффициентами интенсивности напряжений K_I^V, K_{II}^V , определяемыми равенствами

$$K_I^V = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_I}} \sigma_{yy}(\theta = 0) \right) = \sqrt{2\pi} \lambda_I^I (1 + \lambda_I^I - \lambda_I^I \cos 2\alpha - \cos 2\alpha \lambda_I^I) A_I,$$

$$K_{II}^V = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_{II}^I}} \sigma_{xy}(\theta = 0) \right) = \sqrt{2\pi} \lambda_{II}^I (-1 + \lambda_{II}^I - \lambda_{II}^I \cos 2\alpha - \cos 2\alpha \lambda_{II}^I) B_I.$$

В частном случае трещины $\alpha = \pi$ коэффициенты в сингулярных слагаемых связаны с хорошо известными коэффициентами интенсивности напряжений

$$K_I = \sqrt{2\pi} A_I, \quad K_{II} = \sqrt{2\pi} B_I, \quad T = 4A_I. \quad (34)$$

5.2. Определение коэффициентов интенсивности напряжений методом фотоупругости

Основываясь на концепциях классической фотоупругости, разность главных напряжений связана с порядком полосы N^f и оптической постоянной материала F_σ соотношением

$$2\tau_m = N^f F_\sigma / h, \quad (35)$$

где τ_m - максимальное касательное напряжение, h - толщина образца. С другой стороны, соотношение между максимальным касательным напряжением τ_m и компонентами тензора напряжений в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\tau_m^2 = ((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2)^2 + \sigma_{xy}^2. \quad (36)$$

Максимальное касательное напряжение в окрестности углового выреза может быть выражено с помощью N слагаемых, соответствующих трещине типа I, и M слагаемых, отвечающих трещине типа II в представлении (32). Подставляя усеченные разложения (32) (с N слагаемыми для трещины нормального отрыва и с M слагаемыми для трещины поперечного сдвига) в выражение (36), можно представить оптико-механический закон в форме

$$((N^f F_\sigma)/(2h))^2 = ((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2)^2 + \sigma_{xy}^2 = D^2 + Z^2, \quad (37)$$

где приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 D &= E \text{ Яе } (4 \text{ ц г } [(Af, \cos 2a + \cos 2a \text{Л}0 \cos_s (\text{Л}^{\wedge} - 1) 61 - (A^{\wedge} - 1) \cos(Ai - 3)0]) + \\
 &+ \frac{\text{£}}{\text{И}=\text{I}} \quad \text{I.I} \quad \text{te} \setminus \text{TW} \quad \{(-K^{\wedge} 2a + \cos 2a X_n^{\text{I}}) \text{sm}(X_n^{\text{I}} - 1) e + (X_i^{\text{I}} - 1) \text{sm}(X_n^{\text{I}} - 3) e\} \quad \text{J} \quad \wedge 35 \\
 Z &= E \text{ й е } \{ \wedge \quad [-(Af, \cos 2Q + \cos 2a A_n^{\text{I}}) \text{sm}(A^{\wedge} - 1) \& + (A_n^{\text{I}} - 1) \text{sm}(A_n^{\text{I}} - 3) e] \} + \\
 &+ \text{Y.Re} \setminus \text{-т-ТТГ} \quad \text{h}(Ai^{\text{I}} \cos 2a - \cos 2a Ai^{\text{I}}) \cos(Aj^{\text{I}} - 1) * + (A^{\text{I}} - 1) \cos(Ai^{\text{I}} - 3) \wedge
 \end{aligned}$$

В уравнениях (38) поле напряжений вблизи углового выреза описывается с помощью N слагаемых для деформирования, отвечающего нормальному отрыву, и посредством M слагаемых, соответствующих поперечному сдвигу. Коэффициенты асимптотических разложений в приведенных соотношениях могут быть как действительными, так и комплексными в зависимости от собственных значений λ_n^{I} и λ_n^{II} . Будем обозначать действительную и мнимую части коэффициентов асимптотических разложений через $Re(A_n)$ и $Im(A_n)$ ($Re(B_n)$ и $Im(B_n)$), соответственно). Следовательно, функции D и Z в уравнениях (38) могут быть представлены в более компактной форме

$$\begin{aligned}
 D &= \sum_{n=1}^N \{ Re[A_n] Re[f_n^{\text{I}}(r, \theta)] - Im[A_n] Im[f_n^{\text{I}}(r, \theta)] \} + \\
 &+ \sum_{n=1}^N \{ Re[B_n] Re[f_n^{\text{II}}(r, \theta)] - Im[B_n] Im[f_n^{\text{II}}(r, \theta)] \}, \\
 Z &= \sum_{n=1}^N \{ Re[A_n] Re[g_n^{\text{I}}(r, \theta)] - Im[A_n] Im[g_n^{\text{I}}(r, \theta)] \} + \\
 &+ \sum_{n=1}^N \{ Re[B_n] Re[g_n^{\text{II}}(r, \theta)] - Im[B_n] Im[g_n^{\text{II}}(r, \theta)] \},
 \end{aligned} \tag{39}$$

где f_n^{I} , f_n^{II} , g_n^{I} и g_n^{II} — известные функции координат r и θ . Очевидно, что уравнение (37) нелинейно относительно коэффициентов $A_1 \sim A_n$ и $B_1 \sim B_n$. Поэтому для определения коэффициентов разложений не могут быть использованы методы линейной алгебры. Для решения задачи определения коэффициентов асимптотических разложений был использован следующий подход. В ходе обработки экспериментальных данных выбиралось число точек, превышающее число неизвестных коэффициентов. Таким образом, рассматривалась переопределенная система уравнений, для решения которой применялся метод Ньютона-Рафсона. Введем в рассмотрение функцию S_k такую, что

$$S_k = D_k^2 + Z_k^2 - \left(N_k^f F_\sigma / (2h) \right)^2 = 0. \tag{40}$$

Здесь индекс k показывает, что значение S вычисляется в точке с координатами r_k, θ_k с порядком полосы N_k^f в окрестности углового выреза.

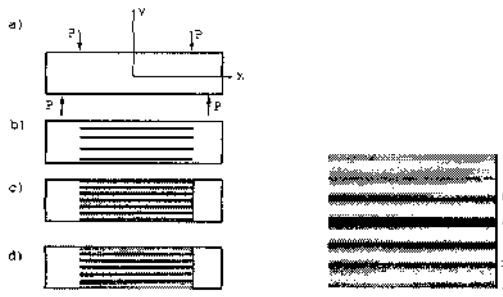


Рис. 1. а) Испытание балки на четырехточечный изгиб. б) Теоретическое представление разности главных напряжений. в) Эксперимент: монохроматический свет. г) Источник белого света

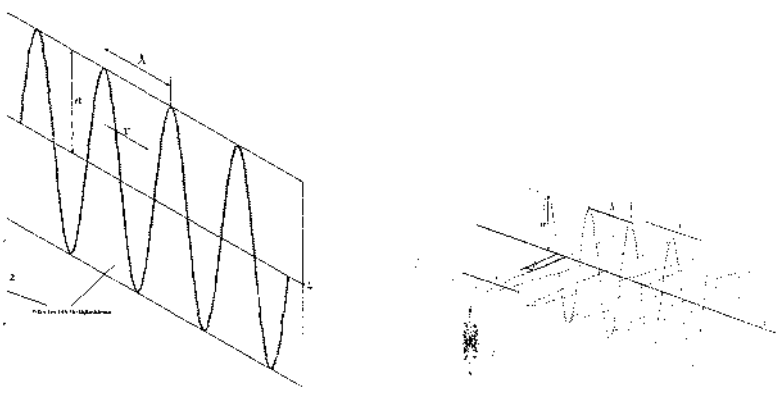


Рис. 2. Плоскополяризованный свет (слева) и эллиптически поляризованный свет (справа)

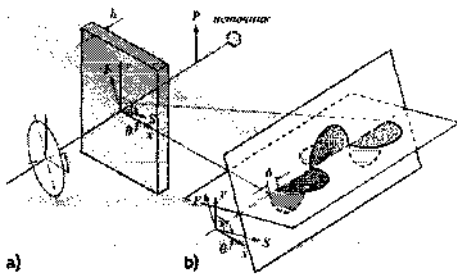


Рис. 3. Прохождение светового луча через нагруженную модель

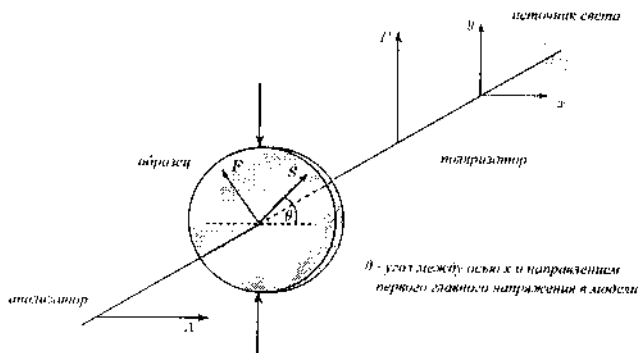


Рис. 4. Нагруженная фотоупругая модель в плоском полярископе

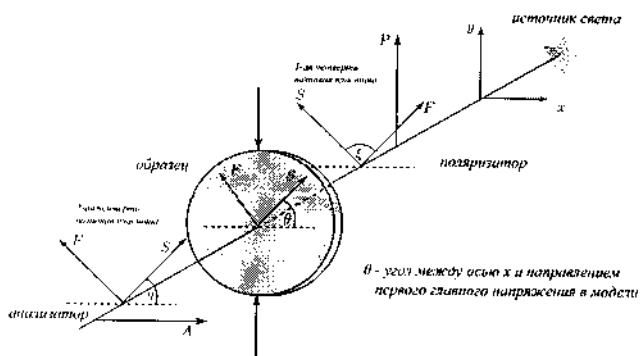


Рис. 5. Нагруженная фотоупругая модель в круговом полярископе

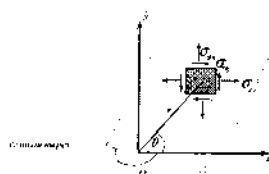


Рис. 6. Геометрия углового выреза и напряжения в декартовой системе координат

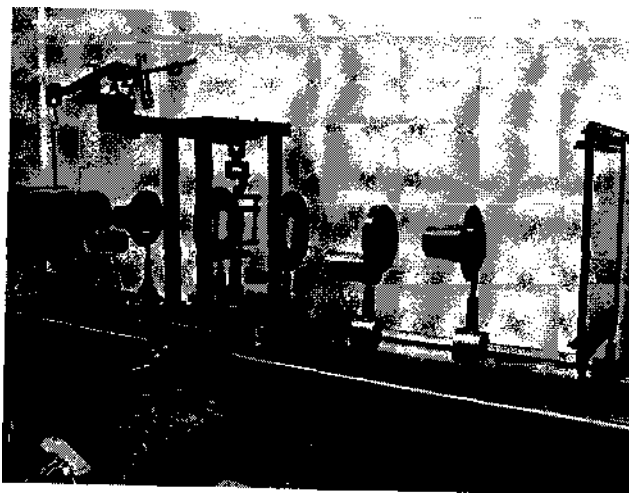


Рис. 7. Экспериментальная уста

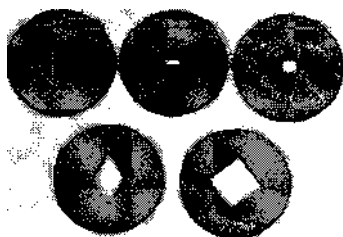


Рис. 8. Образцы с угловыми вырезами и трещинами

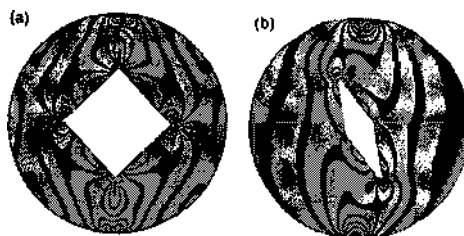


Рис. 9. Картина изохром от диаметрально сжатого бразильского диска для $a) \rightarrow - 90^\circ$. $b) \rightarrow - 30^\circ$



Рис. 10. Картина изохром от диаметрально сжатого бразильского диска вблизи его острого угла для ($\beta = 0$) *a)* $\gamma = 30^\circ$, *b)* $\gamma = 60^\circ$, *c)* $\gamma = 90^\circ$

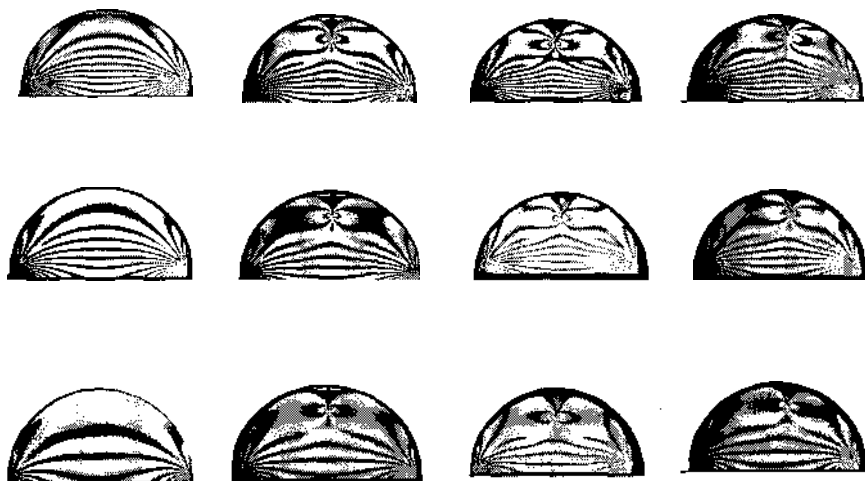


Рис. 11. Картины изохром в надрезанном полудиске

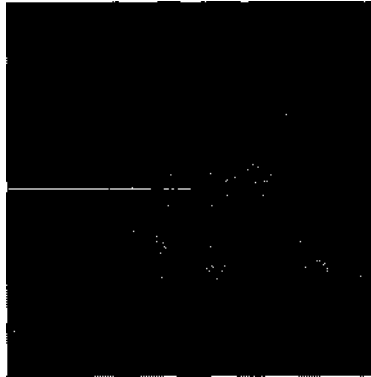


Рис. 12. Бразильский диск (слева). Теоретически реконструированный образ картины изохроматических полос у вершины трещины нормального отрыва (справа)

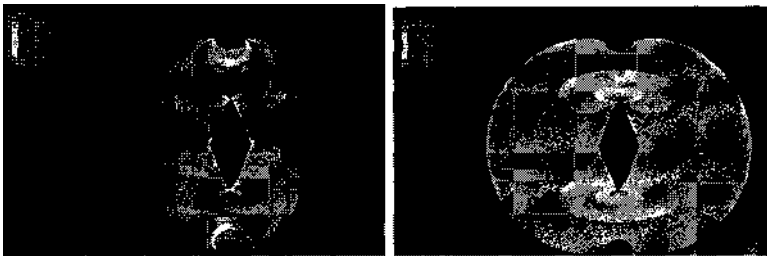


Рис. 13. Распределение интенсивности напряжений по Мизесу и компоненты σ_{11} в диаметрально сжимаемом образце с угловым вырезом для $\gamma = 30^\circ$, $\beta = 0^\circ$

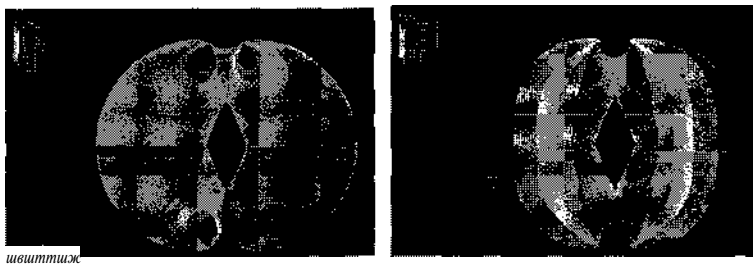


Рис. 14. Распределение компонент тензора напряжений σ_{12} и σ_{22} в диаметрально сжимаемом образце с угловым вырезом для $\gamma = 30^\circ$, $\beta = 0^\circ$



Рис. 15. Распределение компонент тензора деформаций ε_{11} , ε_{12} в диаметрально сжимаемом образце с угловым вырезом для $\gamma = 30^\circ$, $\beta = 0^\circ$



Рис. 16. Распределение компоненты тензора деформаций ε_{22} в диаметрально сжимаемом образце с угловым вырезом для $\gamma = 30^\circ$, $\beta = 0^\circ$ и распределение интенсивности напряжений по Мизесу в диаметрально сжимаемом образце с угловым вырезом для $\gamma = 45^\circ$, $\beta = 20^\circ$



Рис. 17. Распределение компонент вектора перемещений u_x , u_y в диаметрально сжимаемом образце с угловым вырезом для $\gamma = 30^\circ$, $\beta = 0^\circ$

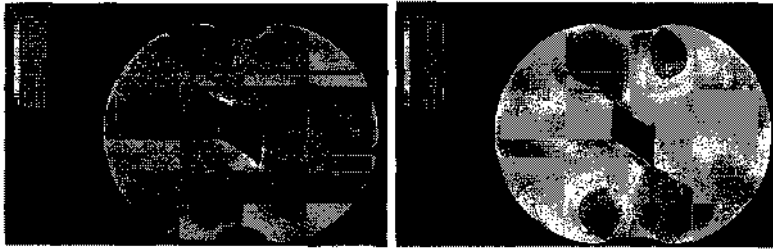


Рис. 18. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{11} , σ_{12} в диаметально сжимаемом образце с угловым вырезом для $\gamma = 45^\circ$, $\beta = 20^\circ$

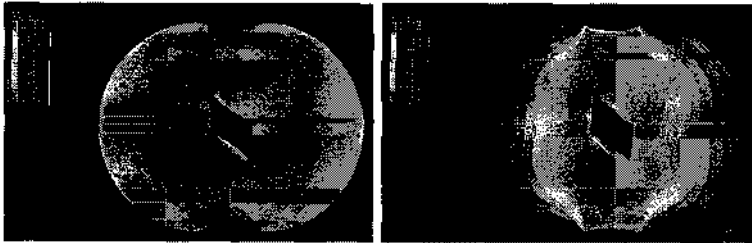


Рис. 19. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} и компоненты тензора деформаций ϵ_{22} диаметально сжимаемом образце с угловым вырезом для $\gamma = 45^\circ$, $\beta = 20^\circ$

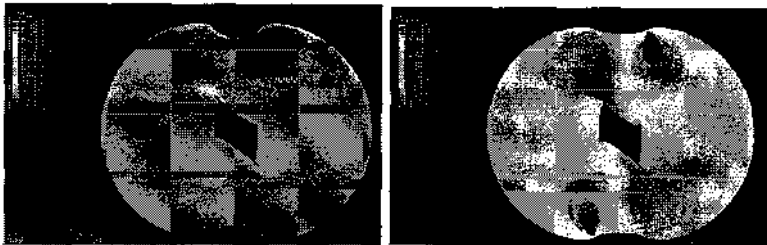


Рис. 20. Распределение компонент тензора деформаций ϵ_{11} и ϵ_{12} в диаметально сжимаемом образце с угловым вырезом для $\gamma = 45^\circ$, $\beta = 20^\circ$

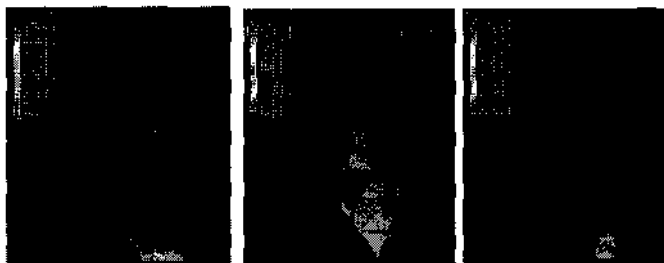


Рис. 21. Распределение компонент тензора напряжений σ_{11} , σ_{12} и σ_{22} в образце с угловым вырезом $\gamma = 45^\circ$



Рис. 22. Распределение интенсивности напряжений и компонент вектора перемещений u_1 и u_2 в образце с угловым вырезом $\gamma = 45^\circ$

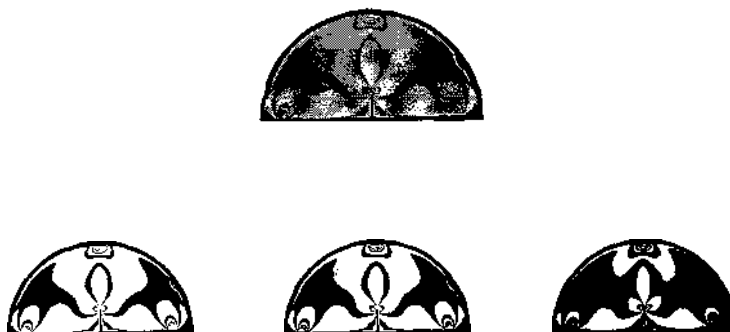


Рис. 23. Выбор оптимального порогового значения

5.3. Методика эксперимента

Испытания оптически чувствительных образцов проводились на установке ППУ-7 (поляризационно-оптическая установка), изображенной на рис. 7. Фотографии образцов показаны на рис. 8. В проведенном эксперименте были построены следующие картины полос. Картина полос изохром в бразильском диске приведена на рис. 9. Картины полос изохром в бразильском диске вблизи вершин углового выреза приведены на рис. 10.

6. Численная обработка результатов оптоэлектронных измерений в механике деформируемого твердого тела: поляризационно-оптические методы

6.1. Использование пакета Matlab. Image Processing Toolbox

В пакете матричных вычислений Matlab с помощью модуля "Image Processing Toolbox" имеются возможности для написания интерактивных программ для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений и последующих коэффициентов в асимптотических разложениях компонент тензора напряжений вблизи углового выреза или выточки. **Налижите две программы для обработки результатов измерений.** В первой программе данные фотоупругих измерений (r_k, θ_k, N_k^I) должны быть собраны для большого количества выбранных точек в исследуемом образце. Процедуры этих программ базируются на том факте, что каждый пиксель чернобелой фотографии имеет значение интенсивности в диапазоне от 0 до 255; таким образом, что пиксель, соответствующий значению 0.0 на фотографии изображается черным цветом, а пиксель со значением 255 изображается белым цветом. Следовательно, пиксели с более низкими значениями интенсивности отвечают более темному цвету. На практике при цифровой обработке изображения создается программа, использующая возможности модуля "Image Processing Toolbox" для определения значений интенсивности точек, лежащих на пересечении изохроматических полос. Эта процедура выполняется несколько раз для различных линий в радиальных направлениях. В результате определяются наиболее темная точка каждой изохромы. Вычисленные координаты этих наиболее темных точек используются как входные данные для работы второй программы, написанной на основе метода наименьших квадратов и процедуры метода Ньютона-Рафсона.

7. Конечно-элементный эксперимент. Моделирование деформирования образца с угловыми вырезами

7.1. Вычислительный эксперимент. Конечно-элементное решение задачи в пакете Simulia ABAQUS. Конечно-элементное решение задачи о растяжении образца с двумя симметричными угловыми вырезами

В программе Simulia Abaqus/ CAE 6.10-1 была выполнена серия конечно-элементных расчетов для различных конфигураций образцов с угловыми вырезами. Рассмотрите нагружение образца с вырезами угловой формы. Результаты расчетов представьте на графиках, подобных 13 - 22. Проведите вычислительный эксперимент в конечно-элементном комплексе SIMULIA Abaqus и получите следующие распределения механических величин в окрестности вершин угловых вырезов.

Сравните экспериментальные данные с конечно-элементными решениями. Покажите необходимость учета высших приближений в асимптотических решениях линейной механики разрушения.

7.2. Направления дальнейших исследований

Метод фотоупругости, называемый в современной механике деформируемого твердого тела, цифровой фотоупругостью, является мощным средством экспериментальной проверки теоретических моделей в механике. С появлением и развитием цифровой обработки изображений, получаемых в эксперименте, стало возможным быстро обрабатывать эти изображения [51]. Поэтому в настоящее время методы цифровой фотоупругости и теневой метод каустик приобретают первостепенное значение среди экспериментальных методов механики твердого тела, о чем свидетельствует все возрастающее количество публикаций [11] - [18]. **Асимптотический анализ в нелинейной механике разрушения. Построение высших приближений в асимптотических разложениях компонент тензора напряжений, деформаций и вектора перемещений.** В последнее время в нелинейной механике разрушения, одной из задач которой является определение напряженно-деформированного состояния в непосредственной окрестности вершины трещины, большое внимание уделяется построению высших приближений в асимптотических разложениях механических величин (полей напряжений, деформаций и перемещений) в окрестности вершины трещины в материалах с нелинейными определяющими уравнениями. Для материалов, следующих степенному закону теории установившейся ползучести $iij = 3B \langle i_j^{m-1} S_{jj} \rangle / 2$, асимптотические разложения компонент тензора напряже-

ний в непосредственной окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$) могут быть представлены в форме

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \sigma_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 r^{s_2} \sigma_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 r^{s_3} \sigma_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots, \quad (41)$$

где C^* – интеграл, определяемый равенством

$$C^* = \int_{\Gamma} \left(\dot{W} dx_2 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_1} ds \right), \quad \dot{W} = \int_0^{\epsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \frac{n}{n+1} \sigma_e \dot{\epsilon}_e.$$

В литературе имеется достаточно большое число оценок инвариантного C^* –интеграла, полученных для различных образцов, наиболее часто используемых в эксперименте. Однако остаются открытыми многие вопросы, связанные с определением второго коэффициента в асимптотических разложениях (41), а именно, A_2 . Естественно предположить, что A_2 в общем случае является функцией приложенных нагрузок, геометрических характеристик образца и показателя нелинейности материала n . Определение этого коэффициента и составляет задачу теории, поскольку даже известные оценки, полученные для первого амплитудного коэффициента и приведенные в справочной литературе [10], дают существенную погрешность. Например, для образца с односторонним боковым надрезом в [10] для инвариантного J -интеграла приведена формула $J = B\sigma_0 \epsilon_0 W(1-a)ah_1(P/P_0)$, где h_1 – безразмерная функция приложенной нагрузки и геометрии образца. Оказывается, что уточненные вычисления, проведенные в последнее время, показали, что значения функции h_1 могут отличаться от приведенных в [10] более, чем на сто процентов. Следовательно, с появлением вычислительных комплексов, таких ABAQUS, предоставляется возможность получения более точных оценок для параметров механики разрушения.

Одной из важных проблем является разработка и развитие математических многомасштабных моделей накопления повреждений на макро-, мезо- и микроуровнях у вершины трещины в элементах конструкций, находящихся в условиях пластического течения, высокотемпературной ползучести; усталостного нагружения и формулировка критериев разрушения неупругих материалов, учитывающих процессы повреждаемости материала в процессе деформирования. Многомасштабность или многоуровневость процесса разрушения можно отразить, вводя в рассмотрение поля напряжений на различных расстояниях от кончика трещины с разной особенностью (с различной степенью сингулярности). Таким образом, сильная и слабая особенности механических полей у вершины трещины отражают многомасштабный процесс разрушения. В силу этих особенностей моделирование процесса разрушения представляется важным знанием всех возможных решений задачи определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины, а не только тех слагаемых в асимптотических

разложениях полей напряжений и перемещений, которые традиционно удерживаются в классических решениях. Таким образом, многоуровневые модели разрушения требуют исследования всего спектра собственных значений в задаче определения полей напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины в материалах с нелинейными определяющими уравнениями. Если для упругих материалов в линейной механике разрушения построено полное разложение (решение Уильямса [6, 7]), то для материалов со степенными определяющими соотношениями многие вопросы остаются открытыми.

8. Цифровая обработка изображений

Несколько лет назад в современной экспериментальной механике деформируемого твердого тела метод фотоупругости как метод определения напряженного состояния отчасти потерял свое значение в связи с необходимостью обработки большого объема экспериментальной информации. Однако в настоящее время в связи с появлением высокоточной техники (цифровых камер) и появлением и распространением систем матричных вычислений и символьной математики метод фотоупругости вновь становится весьма популярным [28] - [47]. Следует отметить, что методы цифровой обработки изображений становятся необходимыми в связи с возрастающими требованиями к определению параметров механики трещин и многопараметрических асимптотических разложений у вершины трещины [43, 44, 45]. В цифровой фотоупругости получают и обрабатывают две фазовые картины, одна из которых связана с направлением одного из главных напряжений (картина изоклин), вторая отвечает разности главных напряжений (картина изохроматических полос). Термин цифровая обработка изображений (ЦОИ) обычно относится к обработке двумерной картины с помощью компьютера. Цифровой образ представляет собой массив действительных чисел, соответствующий конечному числу бит. Образ, имеющийся первоначально в форме фотографии, сначала оцифровывается и сохраняется как матрица бинарных цифр в памяти компьютера. Отцифрованный образ затем можно обработать и проанализировать с помощью монитора с высоким разрешением.

8.1. Изображения как функции двух переменных

Картина (фотография) является плоским объектом, яркость которого меняется от точки к точке. Вариация света может быть затемнена серым цветом в случае черно-белой фотографии. Такая фотография может быть представлена с помощью единственной вещественной функции $d(x, y)$. Удобно предположить, что эта функция интегрируема, дифференцируема и т.д. Для компьютерной обработки изображения функция $d(x, y)$ должна быть представлена в виде массива цифр, представляющих собой пространственное распределение этой функции и амплитудное ее распределение. Отцифровка пространствен-

ных координат называется дискретизацией образа. Амплитудная отцифровка носит название квантования серым цветом. Наиболее общий метод дискретизации образа – регулярно расположенный (квадратный) массив точек, т.е. точек (md, nd) , т.е. точек, координаты которых умножаются на единицу расстояния d . Значение функции $g(x, y)$ в точке называют интенсивностью картины в данной точке или уровнем серого цвета. Пусть непрерывный образ $g(x, y)$ представлен массивом данных размерностью MN :

$$g(x, y) = \begin{bmatrix} g(0, 0) & g(0, 1) & \dots & g(0, N - 1) \\ g(1, 0) & g(1, 1) & \dots & g(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g(M - 1, 0) & g(M - 1, 1) & \dots & g(M - 1, N - 1) \end{bmatrix} \quad (42)$$

Правую часть выражения (42) обычно называют цифровым образом. Каждый элемент массива представляет собой дискретную величину, указывающую уровень серого цвета элемента изображения (пикселя). Обычно эти значения положительны и ограничены $0 \leq g(x, y) \leq K$, где K – количество дискретных уровней, разрешенных для каждого пикселя изображения. Процесс отцифровки требует знания (или задания) значений M, N, K . Разрешение или степень различимой детали образа зависит от значений параметров M, N, K . Чем выше значения данных параметров, тем ближе отцифрованный массив чисел приближает оригинальный образ. Обычно данные значения – это целые степени числа 2 (в настоящее время данные значения могут не являться степенями числа 2). Типичный размер цифрового образа, получаемого при съемке изображения современной цифровой камерой, равен 2592×1924 .

8.2. Некоторые базовые соотношения и математические операции между пикселями. Окрестность пикселя

Пиксель p с координатами (x, y) имеет две горизонтальные, две вертикальные и четыре диагональные соседние точки. Горизонтальные и вертикальные точки образуют 4-точечную окрестность пикселя p . Четырехточечная окрестность пикселя p вместе с диагональными соседними точками образуют восьмиточечную окрестность пикселя p (таб. 1, 2) Некоторые из соседних по отношению к пикселю p точек лежат на границе образа. Арифметические и логические операции между пикселями очень широко используются в большинстве направлений цифровой обработки изображений. Базовыми операциями над пикселями являются сложение, вычитание, умножение и деление. Эти действия имеют свою специфику в ходе цифровой обработки изображения. Данные действия должны быть проведены для каждого пикселя изображения. Поскольку перечисленные операции включают только один пиксель в некоторый момент времени, результат выполнения арифметического действия для положения (x, y) может быть сохранен на месте одного из существующих образов. Эта операция носит

	$(x, y - 1)$	
$(x - 1, y)$	(x, y)	$(x + 1, y)$
	$(x, y + 1)$	

Таблица 1. Четырехточечная окрестность пикселя

$(x - 1, y - 1)$	$(x, y - 1)$	$(x + 1, y - 1)$
$(x - 1, y)$	(x, y)	$(x + 1, y)$
$(x - 1, y + 1)$	$(x, y + 1)$	$(x + 1, y + 1)$

Таблица 2. Восьмиточечная окрестность пикселя

название обработки изображения "in-place" (операция замещения). Операция добавления образа применяется для усреднения образа в целях снижения шума. Вычитание образа используется для удаления статической посторонней информации. Умножение (или деление) применяется для корректировки уровня затемнения изображения, полученного вследствие неоднородности освещения. Основные логические операции, используемые при цифровой обработке изображения, – AND, OR и COMPLEMENT. Данные логические операции функционально полные, поскольку они могут быть скомбинированы для проведения любой другой логической операции. Логические операции используются только для бинарных изображений. Так как логические операции включают только один пиксель изображения, то эти операции, как и арифметические действия, могут быть проведены как операции замещения. Логические операции являются базовыми действиями при обработке бинарных изображений: маскировки, определения черт изображения, анализа формы.

8.2.1 Операции над окрестностью пикселя изображения

Одной из простых операций над окрестностью пикселя является замена значения $g(x, y)$ его средним значением по шаблону 3×3 с центром в рассматриваемом пикселе. Данная операция проводится в соответствии с формулой

$$g^R(x, y) = \frac{1}{9} \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 g(x + i, y + j). \quad (43)$$

Вместо $g(x, y)$ пикселю присваивается среднее значение $g^R(x, y)$. Наиболее общий путь представления таких операций над окрестностью пикселя – использование шаблона 3×3 : Шаблон (маска) также может быть интерпретирован как фильтр или образец. Элементы маски (шаблона) представляют собой вес, который должен быть назначен каждому пикселю при выполнении вычислений.

$w_{-1,-1}$	$w_{0,-1}$	$w_{1,-1}$
$w_{-1,0}$	$w_{0,0}$	$w_{1,0}$
$w_{-1,1}$	$w_{0,1}$	$w_{1,1}$

Например, при вычислении среднего значения по маске используется формула

$$g^R(x, y) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 w_{ij} g(x+i, y+j). \quad (44)$$

При сканировании целого образа маска движется от пикселя к пикселю. Процесс продолжается до тех пор, пока все положения не будут пройдены. Для пикселей, расположенных на границе изображения, среднее значение $g^R(x, y)$ вычисляется по части окрестности. Кроме того, необходимо отметить, что обычной практикой является сохранение значений $g^R(x, y)$ в отдельном файле и формирование нового образа вместо замещения существующего. Уравнение (44) широко используется на практике. Правильный выбор весовых множителей и применение шаблона к каждому пикселю изображения позволяет выполнить целый спектр операций, таких как снижение шума, определение границ изображения. В действительности, операция (44) позволяет снизить шум, если мы полагаем, что $w_{ij} = 1/9$. Эта операция носит название пространственного усреднения, с помощью которой исключается наличие случайно возникающих белых и черных пикселей.

8.3. Основные шаги обработки изображения

Базовыми шагами при цифровой обработке изображения являются получение образа, препроцессинг, сегментация, анализ и показ изображения. Роль препроцессинга заключается в улучшении изображения с помощью различных методов, зависящих от целей обработки изображения. Сегментация предполагает деление изображения на части, что представляет собой наиболее сложную задачу в цифровой обработке изображения. Как только образ сегментирован, в зависимости от приложения, из изображения пытаются извлечь полезную информацию, например, пытаются определить порядок изохромы в картине изохроматических полос. Указанные шаги взаимозависимы и могут требовать больших усилий от исследователя. Полное исключение участия человека, по всей видимости, не представляется возможным, поскольку цифровая обработка изображения интерактивна по своей природе. В цифровой фотоупругости очень популярны системы цифровой обработки изображений в силу их относительно низкой стоимости и сравнительно легкой интеграции с полярископом. В настоящее время цифровая фотокамера заменяет глаз человека в полярископе. Как правило, если компьютер соединен с полярископом, то на экране компьютера мы видим полученное изображение.

8.4. Пространственная фильтрация

Обработка изображения состоит из 1) определения центральной точки, 2) совершение операции, которая использует только значения пикселей в заранее определенной окрестности центральной точки, 3) назначение результата этой операции, 4) повторение всего процесса для каждой точки изображения. В результате перемещения центральной точки появляются новые окрестности, отвечающие каждому пикселю изображения. Для данной процедуры используют термин окрестностная обработка и пространственная фильтрация. Под пространственной фильтрацией понимают использование пространственной маски для обработки изображения, сами пространственные маски носят название пространственных фильтров. Фильтры можно разделить на линейные и нелинейные фильтры. Линейные операции предусматривают умножение каждого пикселя на некоторый коэффициент, суммирование этих произведений. Если окрестность точки имеет размер $m \times n$, то для проведения умножения потребуется mn коэффициентов. Эти коэффициенты носят название фильтра, маски, фильтрующей маски, шаблона или окна. Нелинейная пространственная фильтрация базируется на тех же операциях окрестности пикселя. Однако в отличие от линейной фильтрации, которая использует сумму произведений - линейную операцию, нелинейная фильтрация основана на нелинейных операциях над пикселями текущей окрестности [48].

9. Умножение, утонение полос и кластеризация полос

Картины изоклин и изохром - два семейства полос (два семейства интерференционных картин), получаемых с помощью метода фотоупругости. Изохрома - геометрическое место точек, соответствующее одинаковой разности главных напряжений. Изоклина - линия, вдоль которой ориентация одного из главных напряжений остается постоянной. Для того чтобы получить поле напряжений в каждой точке экспериментального образца с помощью метода фотоупругости необходимо знание 1) порядка изохроматической полосы; 2) параметр изоклины в этой точке. В общем случае полосы на интерференционной картине не появляются в виде тонких, четких линий, экспериментатор в большинстве экспериментов наблюдает достаточно широкие полосы. Поэтому первый шаг при обработке картин полос - идентификация действительного положения изохромы внутри широкой полосы. Раньше положение изохроматической полосы определялось вручную. С появлением высокоточной техники стало возможным автоматическое определение геометрического места точек с наименьшей интенсивностью света, которые и формируют действительный контур полос. Следует различать центральные линии полосы и так называемый скелет изхроматической картины полос. Скелетом изхроматической системы полос называют совокуп-

ность точек из экспериментальной картины полос с наименьшей интенсивностью света, в отличие от середины или центральной линии экспериментальной полосы. Именно определение геометрического места точек с наименьшей освещенностью дает математически правильный контур изохроматической полосы. Несмотря на то, что фотоупругость - экспериментальный метод, позволяющий определить напряженное состояние во всех точках модели, в ранних экспериментах собирались данные только для изохроматических полос. Поэтому количество экспериментальных точек было ограничено, если в экспериментальной картине наблюдалось лишь несколько полос. В силу указанной причины усилия экспериментаторов были направлены на развитие схем, дающих возможность увеличить число экспериментальных данных. Таким образом появилась техника умножения полос, заключающаяся в суперпозиции (наложении) негативов. Остановимся на технике умножения полос.

9.1. Умножение полос

В круговом полярископе темного поля интенсивность света определяется формулой

$$g_d(x, y) \approx I_d = I_a \sin^2 \delta/2, \quad (1)$$

где I_a - амплитуда падающего на модель света. I_d - амплитуда прошедшего через модель света. В круговом полярископе светлого поля порядок полосы меняется с шагом 0.5, начиная с полосы, порядок которой равен 0.5 (получаем полосы полуцелого порядка). Интенсивность освещения в круговом полярископе белого поля равна

$$g_l(x, y) \approx I_l = I_a \cos^2 \delta/2. \quad (2)$$

Если нагрузка мала или мал оптический отклик материала (если материал не является очень оптически чувствительным), то эксперимент может и не дать достаточную для определения напряженного состояния информацию. В технике умножения полос интенсивность света в цифровом образе соответствующим образом меняется для получения полос с дробным порядком. Одна из простейших процедур была предложена в работе [49], в которой предполагается простое вычитание изображения, полученного в полярископе темного поля, из картины полос, полученной в полярископе светлого поля. Вычитая из (2) выражение (1), можно получить

$$g(x, y) \approx I_d = I_a \cos \delta. \quad (3)$$

Согласно уравнению (3) гашение света произойдет в точках, где $\delta = (2n + 1)\pi/2$, т.е. порядок полосы N для результирующего образа равен $(2n + 1)/4$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Результирующий образ носит название смешанного изображения и порядок полос равен $N = 0.25, 0.75, 1.25, \dots$. Впоследствии была предложена другая процедура умножения полос, в рамках которой используется

только изображение, полученное в полярископе темного поля. В соответствии с формулой (2), если известна амплитуда падающего света, то деля на нее обе части уравнения (2), уровень серого цвета каждого пикселя будет представлен функцией $\cos^2 \delta/2$. Тогда нормированная интенсивность картины полос будет определяться выражением

$$g_n(x, y) = \cos^2 \delta/2. \quad (4)$$

Следует отметить, что в силу нормировки функция $g_n(x, y)$ изменяется от нуля до единицы. Для получения умножения полос вводится преобразование уровня серого цвета, в котором интенсивность меняется по закону $\cos^2 m\delta/2$, где m представляет собой порядок умножения полос. Поскольку освещенность каждого пикселя представляется $\cos^2 \delta/2$, то, если порядок умножения равен двум, то трансформированная освещенность $g_t(x, y)$ равна

$$g_t(x, y) = \cos^2 \delta = 4g_n^2(x, y) - 4g_n(x, y) + 1. \quad (5)$$

Гашение света с интенсивностью, определяемой формулой (5), наблюдается в точках, где $\delta = (2n + 1)\pi/2$ для $n = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому порядок полос будет дробным и будет равен 0.25, 0.75, 1.25, ... Значения освещенности $g_t(x, y)$, вычисляемое по формуле (5) снова меняется от нуля до единицы и эти значения могут быть сведены в карту, где числовые значения интенсивности меняются от 0 до 255 для генерации визуального изображения. Для множителя 3 можно ввести следующую трансформацию уровня серого цвета

$$g_t(x, y) = \cos^2(3\delta/2) = 16g_n^3(x, y) - 24g_n^2(x, y) + 9g_n(x, y). \quad (6)$$

В данном случае порядок полос будет меняться с шагом 0.333, начиная с полосы порядка 0.167. В литературе отражены преобразования умножения полос до 16-ого порядка.

9.2. Полуполосная фотоупругость

Исторически, одним из более ранних подходов, использующих информацию о дробных порядках, был метод, развитый Волошиным и Бюрджером [25]. В рамках их процедуры была предложена система обработки полос, позволяющая найти полосы с порядками полос, изменяющимися от 0 до 0.5. В связи с этим данная процедура получила название полуполосной фотоупругости. В рамках данного метода устанавливается взаимнооднозначное соответствие между числовым значением освещенности и дробным порядком полосы. Волошин и Бюрджер предложили нелинейное соотношение, связывающее уровень серого цвета и освещенность прошедшего через модель света,

$$g(x, y) = kI_d^\gamma, \quad (7)$$

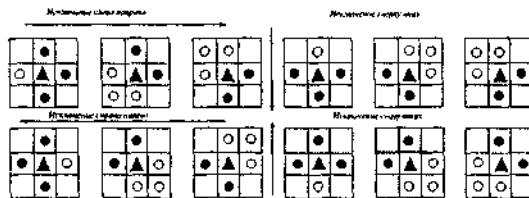


Рис. 24. Механизм утонения полос: сканирования изображения слева направо, справа налево, сверху вниз и снизу вверх. незаполненные кружочки показывают пиксели, не принадлежащие изохроме; заполненные треугольники в центре представляют собой точки, которые исследуются на предмет исключения

где γ - наклон линии чувствительности оптического устройства, используемого Волошиным и Бюргером. Комбинируя (7) и (1), можно найти порядок полосы в форме

$$N = (1/\pi) \arcsin \left[\kappa g(x, y)^{1/2} \right], \quad (8)$$

где $\kappa = 1/\sqrt{kI_n}$. Значения констант γ и κ находятся путем измерения дробного порядка полосы N и уровня серого цвета $g(x, y)$ для любой пары точек оптического поля. Для определения порядка полосы рекомендуется использовать метод компенсации Тарди. Для увеличения точности измерений компенсация может быть сделана цифровым способом для определения точек с минимальной освещенностью.

10. Методы утонения полос

10.1. Алгоритмы, базирующиеся на рассмотрении картины полос как двоичного образа

В рамках этого метода сначала с помощью выбранного глобального порогового значения интенсивности света идентифицируется область, занятая полосами. Центральные линии изохроматических полос определяются посредством процесса эрозии, в рамках которого внешние слои, формирующие полосу последовательно удаляются вплоть до достижения центра полосы. Ввиду последовательного утонения полосы данный процесс является итерационным процессом по своей природе. Следует отметить, что при наличии широких полос центральная линия полосы может не являться истинным положением изохромы. Одним из элегантных методов утонения полосы является метод, предложенный в [50]. Метод основан на сканировании бинарного изображения слева направо, справа налево, сверху вниз и снизу вверх в целях последовательного исключения пикселей, формирующих широкую полосу (рис. 24).

$g(-2, -2)$	$g(-1, -2)$	$g(0, -2)$	$g(1, -2)$	$g(2, -2)$
$g(-2, -1)$	$g(-1, -1)$	$g(0, -1)$	$g(1, -1)$	$g(2, -1)$
$g(-2, 0)$	$g(-1, 0)$	$g(0, 0)$	$g(1, 0)$	$g(2, 0)$
$g(-2, 1)$	$g(-1, 1)$	$g(0, 1)$	$g(1, 1)$	$g(2, 1)$
$g(-2, 2)$	$g(-1, 2)$	$g(0, 2)$	$g(1, 2)$	$g(2, 2)$

Таблица 3. Расположение пикселей, участвующих в процедуре сканирования

В течение каждого такого сканирования, для каждого пикселя со значением, ниже, чем назначенное пороговое значение, накладывається маска 3×3 для исключения границы полосы. Например, когда фотография сканируется слева направо, осуществляется проверка, лежит ли точка $g(0, 0)$ на границе изохромы. В этом случае $g(-1, 0)$ не является точкой изохромы и $g(1, 0)$ является точкой изохромы. В случае, когда $g(0, 0)$ является граничной точкой изохромы, то в маске 3×3 могут быть четыре комбинации точек выше и ниже рассматриваемого пикселя. Эти четыре комбинации следующие

- 1) $g(0, 1)$ и $g(0, -1)$ обе являются точками изохромы;
- 2) $g(0, -1)$ – точка изохромы и $g(0, 1)$ не точка изохромы;
- 3) $g(0, -1)$ – не является точкой изохромы и $g(0, 1)$ – точка изохромы;
- 4) обе точки $g(0, -1)$ и $g(0, 1)$ не являются точками изохромы.

Точка $g(0, 0)$ исключается, если выполняется какое-либо из первых трех условий. Четвертое условие показывает, что точка $g(0, 0)$ формирует скелет изохромы в горизонтальном направлении и, следовательно, должна быть удержана. Исключающие условия для сканирования образа слева направо, справа налево, сверху вниз и снизу вверх показаны на рис. 24. На рисунках сплошными кружочками показаны пиксели, принадлежащие изохроматической полосе; незаполненные кружочки показывают пиксели, не принадлежащие изохроме; заполненные треугольники в центре представляют собой точки, которые исследуются на предмет исключения. Исключение каждой граничной точки делает изохрому тоньше. Процесс продолжается до тех пор, пока не останется неисследованных изохром.

10.2. Алгоритмы, базирующиеся на изменении освещенности внутри интерференционной полосы

К настоящему времени предложен целый ряд алгоритмов, предусматривающих анализ интенсивности света внутри полосы. Критерий определения минимальной освещенности задается индивидуально для каждого метода. Один из наиболее простых подходов нахождения точки с использует маску 5×5 [51].

В соответствии с данным подходом сначала выбираются четыре направления и определяются условия минимальной освещенности в первом и четвертом

направлениях как

$$\begin{aligned}g_{00} + g_{0-1} + g_{01} < g_{-21} + g_{-20} + g_{-2-1} \text{ и} \\g_{00} + g_{0-1} + g_{01} < g_{21} + g_{20} + g_{2-1},\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}g_{00} + g_{-1-1} + g_{1-1} < g_{22} + g_{21} + g_{12} \text{ и} \\g_{00} + g_{-11} + g_{1-1} < g_{-2-2} + g_{-2-1} + g_{-1-2}\end{aligned}\tag{2}$$

В таблице 3 показаны пиксели, участвующие в процедуре сканирования. Подобно неравенствам (1) и (2) условия минимума освещенности могут быть легко выписаны для второго и третьего направлений. Когда условия минимума выполнены для любого из двух или более направлений, считается, что исследуемая точка $g(0, 0)$ принадлежит скелету интерференционной картины. Полученный таким образом скелет (остов) интерференционной полосы в общем случае не состоит из одного пикселя и для дальнейшего утоньшения полосы может быть использован алгоритм, описанный выше.

11. Глобальная идентификация полос интерференционной картины

В общем случае фотографии, получаемые в рамках метода фотоупругости, имеют высокую контрастность и границы интерференционных полос четко определены. При глобальной идентификации интерференционной картины полос их утонение включает две процедуры 1) определение границ полосы (ее краев) и установление скелета интерференционной картины.

11.1. Определение краев интерференционных полос

Определение краев интерференционных полос является важным шагом анализа интерференционной полосы. Чем лучше алгоритм определения края интерференционной полосы, тем лучше будет идентифицирована вся интерференционная картина. На практике края интерференционной полосы находят путем установления соответствующего порогового значения (рис. 23). При реализации второго шага идентификации интерференционной картины устанавливается область, занятая полосами, затем внутри выделенной области используются алгоритмы, нацеленные на поиск точек с минимальной освещенностью. Образ, полученный при нахождении краев интерференционных полос, сохраняется и для определения точек скелета сканируются точки, расположенные между полосами. Одна из простейших схем сканирования носит название сканирования вдоль горизонтали. Этот алгоритм оказывается наиболее подходящим в случае почти вертикальных полос. Образ сканируется построчно, по горизонтали от одного края полосы до другого края. Сохраняются значения уровня серого

цвета пикселей внутри границ полосы и идентифицируется точка с минимальной освещенностью, которая отмечается как точка скелета интерференционной картины. Процесс сканирования продолжается до тех пор, пока не будут проанализированы все точки. В результате данного алгоритма получается образ с тонкими полосами. Если сканирование осуществить по вертикали, то процесс позволит определить интерференционные полосы, которые преимущественно являются горизонтальными, как, например, в случае чистого изгиба балки. Если исследуется образец, содержащий трещину, то требуется более усовершенствованный алгоритм сканирования образа, учитывающий кривизну изохроматической полосы. Естественно предположить, что сканирование в данном случае следует проводить по направлению нормали к границе изохроматической полосы, однако процесс определения нормали к каждой полосе сопровождается большим объемом вычислений. Поэтому используется следующий подход. Сначала строится скелет изохроматической картины посредством нескольких ортогональных сканирований. Как только границы интерференционных полос определены, полученный образ сканируется 1) построчно; 2) по диагонали; 3) вдоль вертикали; и 4) под углом 135° . При каждом сканировании выбирается пиксель с наименьшей освещенностью. Выбранные пиксели и образуют скелет интерференционной полосы. В результате процесса получают четыре новых образа интерференционной картины, отвечающий каждому из четырех направлений сканирования. Необходимо отметить, что данный процесс сканирования осуществляется глобально без применения маски. Поэтому в каждом результате сканирования присутствует погрешность (шум), зависящая от направления сканирования. Показано [51], что применение логических операций (AND и OR) дает возможность исключить разрывы в линиях интерференционной картины и шум в экспериментальных данных. Логическая операция OR между ортогональными сканированными образами позволяет получить непрерывную картину полос, содержащую шум. Этот шум зависит от направления сканирования и может быть удален с помощью логической операции AND. Процедура описанного подхода изображена на рис. 25.

Теоретически реконструированный образ картины изохроматических полос показан на рис. 12 (справа).

Список литературы

- [1] Бьюи Х.Д. Механика разрушения: Обратные задачи и решения. М.: Физматлит, 2011. 412 с.
- [2] Li J., Recho N. Methodes asymptotiques en mecanique de la rupture. Paris: Hermes Science Publications, 2002. 262 p.
- [3] Аргатов И.И. Введение в асимптотическое моделирование в механике. СПб.: Политехника, 2004. 302 с.

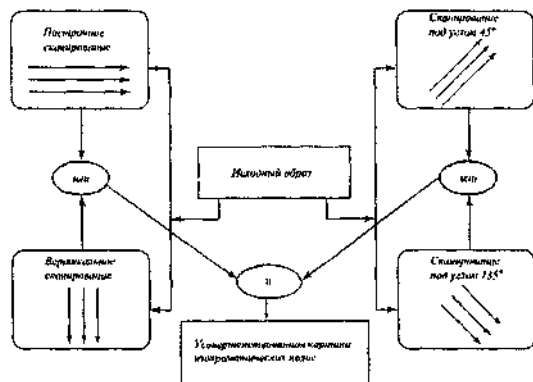


Рис. 25. Схема логических операций, используемых при построении интерференционной картины

- [4] Prassianakis J. N., Theocaris P.S. Stress intensity factors at V-notched elastic symmetrically loaded plates by the method of caustics. J Phys D: Appl Phys 1980;13:1043 -53.
- [5] Mahinfalah M., Zackery L. Photoelastic determination of mixed mode stress intensity factors for sharp reentrant corners. Eng Fract Mech 1995;52(4):639 -45.
- [6] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions. ASME. J. Appl. Mech. 1952. V. 74. P. 526-528.
- [7] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. ASME. J. Appl. Mech. 1957. V. 24. P. 109-114.
- [8] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М: Физматлит, 2009. 336 с.
- [9] Ayatollahi M.R., M. Nejadi M. Experimental evaluation of stress field around the sharp notches using photoelasticity/ Materials and Design 2011; 32. P. 561-569.
- [10] Kumar V., German M.D., Shih C.F. An engineering approach for elastic-plastic fracture analysis. 1981.
- fill Zakeri M., Ayatollahi M.R., Guagliano M., A photoelastic study of T-stress in centrally cracked Brazilian disk specimen under mode II loading. Strain 2011, 47, 268-274.

- [12] Ayatollahi M.R., Zakeri, M. T-stress effects on isochromatic fringe patterns in mode II. *Int. J. Fract.* 2007. 143, 189-194.
- [13] Ayatollahi M.R., Dehghany M., On T-stresses near V-notches. *Int. J. Fract.* 2010, 165, 121-126.
- [14] Ayatollahi, M.R., Nejati, M., 2011. Experimental evaluation of stress field around the sharp notches using photoelasticity. *Mater. Des.* 32, 561-569.
- [15] Ayatollahi, M.R., Nejati, M., 2011. Determination of NSIFs and coefficients of higher order terms for sharp notches using finite element method. *Int. J. Mech. Sci.* 53, 164-177.
- [16] Ayatollahi, M.R., Dehghany, M., Nejati, M., 2011. Fracture analysis of V-notched components - Effects of first non-singular stress term. *Int. J. Solids Struct.* 48, 1579-1589.
- [17] Ayatollahi, M.R., Torabi, A.R., Azizi, P., 2011. Experimental and theoretical assessment of brittle fracture in engineering components containing a sharp V-notch. *Exp. Mech.* 51, 919-932.
- [18] Ayatollahi, M.R., Mirsayar, M.M., Dehghany, M., 2011. Experimental determination of stress field parameters in bi-material notches. *Mater. Des.* 32 (10), 4901-4908.
- [19] Gymez, F.J., Elices, M., Berto, F., Lazzarin, P., 2009. Fracture of V-notched specimens under mixed mode (I and II) loading in brittle materials. *Int. J. Fract.* 159, 121-135.
- [20] Ju, S.H., Chung, H.Y., 2007. Accuracy and limit of a least-squares method to calculate 3D notch SIFs. *Int. J. Fract.* 148, 169-183.
- [21] Kim, J.K., Cho, S.B., 2009. Effect of second non-singular term of mode I near the tip of a V-notched crack. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 32, 346-356.
- [22] Kondo, T., Kobayashi, M., Sekine, H., 2001. Strain gage method for determining stress intensities of sharp-notched strips. *Exp. Mech.* 41 (1), 1-7.
- [23] Lazzarin, P., Zambardi, R., 2001. A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches. *Int. J. Fract.* 112, 275-298.
- [24] Lazzarin, P., Berto, F., Elices, M., Gymez, J., 2009. Brittle failures from U- and Vnotches in mode I and mixed, I and II, mode: a synthesis based on the strain energy density averaged on finite-size volumes. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 32, 671-684.

- [25] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack//Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 1957. V. 24. P. 109-114.
- [26] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension// Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 1952. V.19. P. 526-528.
- [27] Экспериментальная механика: В 2-х книгах: Книга 1/ Под ред. А. Кобаяси. М.: Мир, 1990. 616 с.
- [28] Razumovsky LA. Interference-Optical Methods of Solid Mechanics. New York: Springer, 2011. 180 p.
- [29] Frankovsky P., Ostertag O., Ostertegova E. Automation of experiments in photoelasticity// Procedia Engineering. 2012. V. 48. P. 153-157.
- [30] Lei Z., Jun H., Kang Y. Automatic evaluation of photoelastic fringe constant by the nonlinear least-squares method// Optics and Laser Technology. 2009. V. 41. Issue 8. P. 985-989.
- [31] Ramesh K., Vivek R., Dore P.T., Sanyal D. A simple approach to photoelastic calibration of glass using digital photoelasticity// Journal of Non-Crystalline Solids. 2013. V. 378. P. 7-14.
- [32] Blobel S., Thielsch K., Ulbricht V. Investigation on the micromechanical behavior of fiber reinforced epoxy with a semi-automatic phase shifting method// Procedia Materials Science. 2013. v. 2 P. 220-226.
- [33] Ramji M., Prasath R.G.R. Sensitivity of isoclinic data using various phase shifting techniques in digital photoelasticity towards generalized error sources// Optics and Lasers in Engineering. 2011. V. 49. Issue 9-10. P. 1153-1167.
- [34] Zhang Y.-T., Huang M.-J., Liang H.-R., Lao F.-Y. Branch cutting algorithm for unwrapping photoelastic phase map with isotropic point// Optics and Lasers in Engineering. 2012. V. 50. Issue 5. P. 619-631.
- [35] Степанова Л.В., Фебина М.Е. Автомодельное решение задачи о трещине антиплоского сдвига в связанной постановке (ползучесть - поврежденность)// Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. №5(255). С. 114-123.
- [36] Ayatollahi M.R., Dehghany M., Mirsayar M.M. A comprehensive photoelastic study for mode I sharp V-notches// European Journal of Mechanics-A/Solids. 2013. V. 37. P. 216-230.
- [37] Guagliano M., Sangirardia M., Sciuccati A., Zakeri M. Multiparameter Analysis Of The Stress Field Around A Crack Tip// Procedia Engineering. 2011. V. 10. P. 2931-2936.

- [38] Ayatollahi M.R., Sedighiani K. A T-stress controlled specimen for mixed mode fracture experiments on brittle materials// *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2012. V. 36. P. 83-93.
- [39] James M.N., Christopher C.J., Janivei L., Patterson E.A. Local crack plasticity and its influence on the global elastic stress field// *International Journal of Fatigue*. 2013. V. 46. P. 4-15.
- [40] Surenda K.V.N., Simha K.R.Y. Deesign and analysis of novel compression fracture specimen with constant form factor: Edge cracked semicircular disk (ECSD). 2013. V. 102. P. 235-248.
- [41] Ezrin M. Failure Analysis and Test Procedures/ In *Plastic Failure Guide (Second Edition)*. 2013. P. 321-394.
- [42] Герасимова Т.Е., Ломаков П.Н., Степанова Л.В. Цифровая фотомеханика: численная обработка результатов оптоэлектронных измерений и ее приложение к задачам механики разрушения// *Вестник Самарского госуниверситета*. 2013. №9/2(110). С. 64-74.
- [43] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. Самара: Самарский университет, 2006. 232 с.
- [44] Адылина Е.М., Игонин С.А., Степанова Л.В. О нелинейной задаче на собственные значения, следующей из анализа напряжений у вершины усталостной трещины// *Вестник Самарского государственного университета*. 2012. №3.1(94). С. 83-102.
- [45] Степанова Л.В. Уточненный расчет напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения в среде с поврежденностью// *Вестник Самарского государственного университета*. 2011. №83. С. 105-115.
- [46] Khaleghian S., Emami A., Tehrani M., Soltani N. Analysis of effective parameters for stress intensity factors in the contact problem between an asymmetric wedge and a half-plane using an experimental method of photoelasticity// *Materials and Design*. 2013. V. 43. P. 447-453.
- [47] Адылина Е.М., Степанова Л.В. О построении многомасштабных моделей неупругого разрушения// *Вестник Самарского государственного университета*. 2012. №9(100). С. 70-83.
- [48] Гонсалес Р., Вудс Р., Эдлинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. М.: Технофера, 2006. 616 с.
- [49] Toh S.L., Tang S.H., Hovanesian J.D. Computerised photoelastic fringe multiplication// *Exp. Tech*. 1990. V. 14. №4. P. 21-23.

- [50] Chen T.Y., Taylor C.B. Computerised fringe analysis in photomechanics// Exp. Mech. 1989. V. 29. №3. P. 323-329.
- [51] Ramesh K. Digital photoelasticity. Advanced Techniques and Applications. Berlin: Springer, 2000. 424 p.

Учебное издание

Герасимова Татьяна Евгеньевна,
Ломаков Павел Николаевич,
Степанова Лариса Валентиновна

**ЧИСЛЕННАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ
ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В МЕХАНИКЕ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА:
ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции
Титульное редактирование Т. И. Кузнецовой
Компьютерная верстка, макет Л.В. Степановой

Подписано в печать 30.09.15. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл.-печ. л. 2,8; уч.-изд. л. 3,0. Гарнитура Times.

Тираж 100 экз. Заказ № 2665

Издательство "Самарский университет",
443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Тел. 8 (846) 334-54-23.

Отпечатано на УОП СамГУ.