МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

Е.А. БАРОВА, А.В. ДЮЖЕВА, Ю.О. ЯКОВЛЕВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 38.03.05. Бизнес-информатика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2017

УДК 517.9(075)
ББК 22.161я7
Б 256

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Л.С. П у л ь к и н а ;
канд. физ.-мат. наук, доц. А.А. А н д р е е в

Барова, Евгения Анатольевна

Б256 **Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений**: учеб. пособие / *Е.А. Барова, А.В. Дюжева, Ю.О. Яковлева*. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 88 с.

ISBN 978-5-7883-1195-1

Учебное пособие по дифференциальным уравнениям и системам дифференциальных уравнений рассчитано на студентов, обучающихся по программе бакалавриата направления 38.03.05 Бизнес-информатика очной формы обучения. В учебном пособии представлен краткий теоретический материал по теме «Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений», приведены решения задач на составление и интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, даны задачи для самостоятельного решения, приведен ряд дифференциальных моделей различных процессов. Материал учебного пособия соответствует требованиям государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по указанному направлению.

УДК 517.9(075)
ББК 22.161я7

ISBN 978-5-7883-1195-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дифференциальные и разностные уравнения – одна из основных дисциплин по программе бакалавриата направления 38.03.05 Бизнес-информатика очной формы обучения.

Целью дисциплины является изучение теоретических основ, задач, моделей и методов теории дифференциальных уравнений, разностных уравнений и систем дифференциальных уравнений, а также формирование у студентов умения самостоятельно решать задачи научной и прикладной значимости, обладая методами решения дифференциальных и разностных уравнений.

Задачами учебного курса являются развитие логического и алгоритмического мышления, овладение основными методами исследования и решения дифференциальных и разностных уравнений, выработка умения самостоятельно расширять математические знания и проводить постановку и математический анализ прикладных задач. Авторы надеются, что данное учебное пособие поможет студентам овладеть основными методами теории дифференциальных уравнений в достаточной степени для изучения математических методов в экономике и других дисциплин специализации.

В учебном пособии представлен краткий теоретический материал по теме «Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений», приведены решения задач на составление и интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, дан краткий обзор теории дифференциальных уравнений в частных производных, приведен ряд дифференциальных моделей различных процессов.

Кроме того, приведено достаточное количество заданий для самостоятельного изучения, задачи для подготовки к контрольной работе с разобранными примерами.

В списке литературы присутствует ряд относительно давних источников, однако это классическая литература – в ней заложены основы теории дифференциальных уравнений.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов современной математики, обладающих рядом особенностей. Первая особенность – это непосредственная связь теории дифференциальных уравнений с приложениями. При изучении некоторых явлений реального мира создается их математическая модель, то есть, пренебрегая второстепенными характеристиками явления, записываются основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто эти законы можно выразить в виде дифференциальных уравнений.

Исследуя полученные дифференциальные уравнения вместе с начальными условиями, получают сведения о происходящем явлении. Изучение математической модели математическими методами позволяет получить качественные характеристики физических явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реального процесса. На основе анализа дифференциальных уравнений так были открыты электромагнитные волны, и только после экспериментального подтверждения Герцем фактического существования электромагнитных колебаний стало возможным рассматривать уравнения Максвелла как математическую модель реального физического явления.

Как известно, теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVII веке одновременно с возникновением дифференциального и интегрального исчисления. Через обыкновенные дифференциальные уравнения шли приложения нового исчисления к задачам геометрии и механики; при этом удалось решить задачи, которые в течение долгого времени не поддавались решению. В небесной механике оказалось возможным не только получить и объяснить уже известные факты, но и сделать новые открытия (например, открытие Леверье в 1846 году планеты Нептун на основе анализа дифференциальных уравнений).

В настоящее время теория обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой сильно разветвленную теорию. Одними из основных задач этой теории являются существование у дифференциальных уравнений таких решений, которые удовлетворяют дополнительным условиям, единственность решения, его устойчивость. Важными для приложений являются исследование характера решения, нахождение методов численного решения уравнений. Теория должна дать в руки инженера и физика, экономиста, биолога методы экономного и быстрого вычисления решения.

Итак, первая черта теории дифференциальных уравнений – ее тесная связь с приложениями. Дифференциальные уравнения находятся как бы на перекрестке математических дорог. С одной стороны, новые важные достижения в топологии, алгебре, функциональном анализе, теории функций и других областях математики сразу же приводят к прогрессу в теории дифференциальных уравнений и тем самым находят путь к приложениям. С другой стороны, проблемы физики, экономики и др., сформулированные на языке дифференциальных уравнений, вызывают к жизни новые направления в математике, приводят к необходимости совершенствования математического аппарата, дают начало новым математическим теориям, имеющим внутренние законы развития, свои собственные проблемы.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, в которое входит хотя бы одна производная искомой функции. Например:

$$m\frac{d^2y}{dx^2}=F(t),\quad x=x(t),\quad \frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad u=u(x,t).$$

Дифференциальное уравнение может содержать и дифференциалы, но эта форма должна сводиться к указанной. Например:

$$xdy+ydx=0\Leftrightarrow xy'+y=0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в данное уравнение.

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомой является функция одной переменной. Если же искомой является функция нескольких переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных.

Общая структура ДУ *n*-го порядка имеет вид:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,.$$

Если дифференциальное уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$, то получаем уравнение следующего вида:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Определение. *Решением дифференциального уравнения* называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это дифференциальное уравнение в верное функциональное равенство.

Определение. *Интегральной кривой дифференциального уравнения* называется график решения $y = \varphi(x)$ этого дифференциального уравнения.

Определение. *Семейством интегральных кривых дифференциального уравнения* называется множество всех интегральных кривых дифференциального уравнения.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Задача Коши состоит в нахождении того решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (1), которое удовлетворяет условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$ или $\varphi(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 – заранее заданные числа, называемые *начальными условиями задачи Коши*.

Геометрический смысл задачи Коши состоит в том, что среди семейства интегральных кривых дифференциального уравнения (1) надо найти ту интегральную кривую, которая проходит через данную точку (x_0, y_0).

Определение. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция вида $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющая условиям:

1) при каждом допустимом значении C эта функция является решением дифференциального уравнения;

2) при любых допустимых начальных условиях существует единственное значение постоянной $C = C_0$ такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением задачи Коши дифференциального уравнения с этими начальными условиями.

Иногда в процессе решения дифференциального уравнения общее решение получается заданным неявно соотношением вида $\Phi(x, y, C) = 0$ или $\Phi(x, y) = C$. Эти соотношения называют *общим интегралом дифференциального уравнения.*

Определение. *Частным решением дифференциального уравнения* называется то решение этого уравнения, которое получается из формулы общего решения при каком-либо значении постоянной C.

Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Дифференциальным уравнением с разделенными переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$N(x)\,dx + M(y)\,dy = 0.$$

Решение уравнения основано на следующей теореме.

Теорема. Если функция $N(x)$ имеет первообразную $P(x)$, а функция $M(y)$ – первообразную $Q(y)$, то общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид $Q(y) + P(x) = C$.

Пример. Найти общее решение или общий интеграл уравнения

$$(x^2 + 1)\,dx + \frac{y}{y^2 - 1}\,dy = 0.$$

Решение. Задано дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части уравнения, получим общий интеграл уравнения:

$$\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=C,\ C\in R.$$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Это уравнение вида

$$N_1(x)M_1(y)\,dx+N_2(x)M_2(y)\,dy=0.$$

Приведем уравнение к уравнению с разделенными переменными, разделив обе части уравнения на произведение $M_1(y)\cdot N_2(x)\neq 0$.

$$\frac{N_1(x)}{N_2(x)}dx+\frac{M_2(y)}{M_1(y)}dy=0.$$

Далее интегрируем обе части полученного равенства.

Пример. Найти общее решение или общий интеграл уравнения $x(y^2-1)\,dx+y(x^2-1)\,dy=0$.

Решение. Дано дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные, для этого разделим обе части уравнения на произведение $(y^2-1)\cdot(x^2-1)\neq 0$.

Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части уравнения, получим общий интеграл уравнения

$$\ln\left|x^2-1\right|+\ln\left|y^2-1\right|=\ln|C|$$

или

$$(y^2-1)\cdot(x^2-1)=C, \quad C\neq 0.$$

Результат получен при условии, что $(y^2-1)\cdot(x^2-1)\neq 0$. Пусть теперь $(y^2-1)\cdot(x^2-1)=0$. Функции $y=\pm 1$, $x=\pm 1$ являются решениями данного уравнения. Очевидно, что эти решения получаются из общего при $C=0$, поэтому выражение $(y^2-1)\cdot(x^2-1)=C$ является общим интегралом данного уравнения при любом $C\in R$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $y'+p(x)\,y=q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные в интервале (a,b) функции.

Линейное дифференциальное уравнение будет однородным, если $q(x)=0$, и неоднородным, если $q(x)\neq 0$.

Для решения неоднородного существует несколько способов.

I способ. *Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).*

Метод заключается в том, что общее решение линейного дифференциального уравнения ищется в том же виде, что и общее решение соответствующего однородного уравнения, в котором вместо произвольной постоянной берется произвольная функция.

Тем самым задача по отысканию общего решения линейного неоднородного уравнения сводится к нахождению этой функции.

Пример. Найти общее решение или общий интеграл уравнения $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

Решение. Уравнение

$$y'-\frac{2x}{1+x^2}\,y=1+x^2$$

является неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого типа. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 0.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим общее решение однородного уравнения

$$y = C(1+x^2).$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = c(x)(1+x^2).$$

Для определения неизвестной функции $c(x)$ подставим функцию y в данное уравнение, получим тождество

$$c'(x)(1+x^2) + c(x)2x - c(x)2x = 1+x^2.$$

Тогда $c'(x) = 1, \quad c(x) = x + C$.

Итак, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (x+C)(1+x^2).$$

II способ. *Метод Бернулли.* Общее решение линейного неоднородного уравнения ищется в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые произвольные функции.

Это ДУ решается с помощью подстановки $y = u(x)v(x)$, причем одна из функций (например $v(x)$) подбирается так, чтобы относительно другой – $u(x)$ исходное уравнение максимально упростилось.

$$u'v + uv' + puv = q \Rightarrow u'v + u(v' + pv) = q.$$

Подберем $v(x)$ так, что $(v' + pv) = 0$. Тогда $u'v = q$. Находим $v(x)$ из следующих соотношений:

$$\frac{dv}{v} = -pdx \Rightarrow \ln v = -\int pdx \Rightarrow v = e^{-\int pdx}.$$

Отсюда

$$u' = \frac{q}{v} \Rightarrow u' = qe^{\int pdx} \Rightarrow u = \int qe^{\int pdx} dx + C.$$

Таким образом, окончательно находим

$$y = \left(\int qe^{\int pdx} dx + C \right) \ e^{-\int pdx}.$$

Пример. Найти общее решение или общий интеграл уравнения $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2$.

Решение. Будем искать решение в виде $y = u(x) \cdot v(x)$. Подставим функцию в данное уравнение, получим верное функциональное тождество

$$u'v + uv' - \frac{2x}{1+x^2} uv = 1 + x^2.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые.

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{1+x^2} v \right) = 1 + x^2. \qquad (*)$$

Будем считать, что функция $v(x)$ такова, что $v' - \frac{2x}{1+x^2} = 0$.

$$dv - \frac{2x}{1+x^2} v\, dx = 0 \mid \ : v \neq 0.$$

$$\frac{dv}{v} - \frac{2x}{1+x^2} dx = 0,$$

$$\ln|v| - \ln\left|1 + x^2\right| = C.$$

Будем считать, что $v(x) > 0$, $C = 0$, получим $v = 1 + x^2$.

Тогда тождество (*) примет вид:

$$u'(1 + x^2) = 1 + x^2.$$

Отсюда $u' = 1, \quad u = x + C.$

Таким образом, общее решение данного уравнения запишется следующим образом:

$$y = (x + C)(1 + x^2).$$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией степени m*, если в результате умножения обоих ее аргументов *x* и *y* на одну и ту же величину k она приобретает множитель k^m, то есть $f(kx, ky) = k^m f(x, y)$.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $M(x, y)\,dx + {}$ $+N(x, y)\,dy = 0$, где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одной и той же степени однородности *m*, *называется однородным уравнением*.

Запишем уравнение в виде $y' = f(x, y)$, где $f(x, y) = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$ – однородная функция нулевой степени. Однородные уравнения решаются с помощью замены $z = \dfrac{y}{x}$.

Пример. Найти общее решение или общий интеграл уравнения $y' = -\dfrac{x^2 + y^2 + xy}{x^2}$.

Решение. Дано дифференциальное уравнение первого порядка. Определим тип уравнения. Рассмотрим функцию $f(x, y) = -\dfrac{x^2 + y^2 + xy}{x^2}$.

Так как

$$f(kx, ky) = -\frac{k^2x^2 + k^2y^2 + k^2xy}{k^2x^2} = -\frac{k^2(x^2 + y^2 + xy)}{k^2x^2} = f(x, y),$$

то функция однородная нулевой степени. Следовательно, данное уравнение является однородным.

Введем замену $z=\dfrac{y}{x}$. Тогда $y=zx,\quad y'=z'x+z$ и уравнение примет вид

$$z'x+z=-\frac{x^2+(zx)^2+zx^2}{x^2}\ \Rightarrow\ z'x+z=-1-z^2-z,$$

$$\frac{dz}{dx}x+(z+1)^2=0,$$

$$\frac{dz}{(z+1)^2}+\frac{dx}{x}=0,$$

$$\int\frac{dz}{(z+1)^2}+\int\frac{dx}{x}=C,$$

$$-\frac{1}{z+1}+\ln|x|=C.$$

Выполним обратную замену, получим $\dfrac{-x}{y+x}+\ln|x|=C-$ общий интеграл уравнения.

Уравнения первого порядка в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение $P(x,y)dx+$ $+Q(x,y)dy=0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, то есть $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Пример. Найти общий интеграл уравнения $(x+y-1)dx+$ $+(x+y^3-2)dy=0$.

Решение. Дано дифференциальное уравнение первого порядка. Определим тип уравнения. Если предположить, что это уравнение в полных дифференциалах, то $P(x,y)=x+y-1$, $Q(x,y)=x+y^3-2$.

Для того, чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$ по теореме об эквивалентности четырех предложений [2] необходимо, чтобы функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ были непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой односвязной области D и $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в этой области.

В нашем случае $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то данное уравнение в полных дифференциалах, то есть левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $du = (x + y - 1)dx + (x + y^3 - 2)dy$ и уравнение можно записать в виде $du = 0 \;\Rightarrow\; u(x,y) = C$ – общее решение уравнения. Задача свелась к отысканию вида функции $u(x,y)$.

Мы получили с одной стороны

$$du = (x + y - 1)dx + (x + y^3 - 2)dy,$$

с другой стороны полный дифференциал функции двух переменных записывается в виде

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x + y - 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + y^3 - 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x + y - 1, \\ u(x,y) = \int (x + y^3 - 2)dy = xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + C(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\left(xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + C(x)\right)}{\partial x} = x + y - 1, \\ u(x,y) = xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + C(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + C'(x) = x + y - 1, \\ u(x, y) = xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + C(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} C'(x) = x - 1, \\ u(x, y) = xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + C(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2} + C, \\ u(x, y) = xy + \dfrac{y^4}{4} - 2y + \dfrac{(x-1)^2}{2} + C. \end{cases}$$

Подставив $u(x, y)$ в общий интеграл уравнения, получим

$$xy + \frac{y^4}{4} - 2y + \frac{(x-1)^2}{2} = C\,.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

В задачах 1–8 найти общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

1. $x\,dx + y\,dy = 0$.
2. $\left(x^2 + x\right) dx + y^3 dy = 0$.
3. $5y + x\,y' = 0$.
4. $\left(1 + e^x\right) y\,y' = e^x$.
5. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$.
6. $\sqrt{y^2 + 1}\,dx = xy\,dy$.
7. $\left(x\,y^2 + x\right)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0$.
8. $x\,y' = y \ln y$.

В задачах 9–12 построить семейство интегральных кривых данного уравнения и выделить ту кривую, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

9. $x\,dx + 2y\,dy = 0$; $M_0(1,2)$.
10. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$; $M_0(1,1)$.
11. $\sqrt{1-x^2}\,dy - x\,dx = 0$; $M_0(0,-1)$, $M(1,0)$.
12. $y' = -\dfrac{1}{x^2}$; $M_0(1,1)$, $M(-1,-1)$.

В задачах 13–17 найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию.

13. $y' = \sin x$; $y(0) = 0$.

14. $\left(x^2 - 1\right) y' + 2xy^2 = 0$; $y(0) = 1$.

15. $xyy' = 1 - x^2$; $y(1) = 2$.

16. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$; $y(2) = 0$.

17. $xy' + y = y^2$; $y(1) = 0{,}5$.

18. Найти линию, проходящую через точку $(2, 3)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

19. Найти линию, проходящую через точку $(2, 0)$ и обладающую тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную двум.

20. Найти все линии, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

21. Материальная точка массой m движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t = 10$ с скорость равнялась 0,5 м/с, а сила – $4 \cdot 10^5$ Н. Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

В задачах 22–33 найти общее решение дифференциального уравнения.

22. $y' + x^2 y = x^2$.

23. $2y\,dx + \left(y^2 - 6x\right)dy = 0$.

24. $y' - \dfrac{4}{x} y = xy^{\frac{1}{2}}$.

25. $y' - y\operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$.

26. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

27. $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2$.

28. $y' + 2y = 4x$.

29. $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2}\, y = 1$.

30. $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$.

31. $xy + e^x - xy' = 0$.

32. $y' + 2xy = 4x$.

33. $x\ y' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}$.

34. Найти линию, у которой начальная ордината любой касательной на две единицы масштаба меньше абсциссы точки касания.

35. Точка массой m движется прямолинейно, на нее действует сила, пропорциональная времени, протекшему от момента, когда скорость равнялась нулю. Кроме того, на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости. Найти закон зависимости скорости от времени.

36. Точка массой m движется прямолинейно, на нее действует сила, пропорциональная кубу времени, протекшему с момента, когда скорость равнялась v_0. Кроме того, точка испытывает противодействие среды, пропорциональное произведению скорости и времени. Найти зависимость скорости от времени.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

В задачах 37–48 найти общее или частное решение данного дифференциального уравнения.

37. $y' - \frac{y}{x} = y$.

38. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

39. $x\,dy - y\,dx = y\,dy$.

40. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$.

41. $(xy' - y)\, arctg\left(\frac{y}{x}\right) = x$.

42. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$.

43. $x\,y' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

44. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0$, $y(0) = 1$.

45. $\frac{y - xy'}{x + xy'} = 2$, $y(1) = 1$.

46. $y' = \frac{y - x}{x}$, $y(e) = 0$.

47. $y' = \frac{x + y}{x - y}$.

48. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

49. Найти линию, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания.

50. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

51. Какой поверхностью вращения является зеркало прожектора, если лучи света, исходящие из точечного источника, отразившись, направляются параллельным пучком?

Дифференциальные уравнения первого порядка в полных дифференциалах

В задачах 52–58 найти общее решение данного дифференциального уравнения.

52. $(2xy-5)dx+(3y^2+x^2)dy=0$.
53. $(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0$.
54. $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$.
55. $y'(y^2-x)=y$.
56. $(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0$.
57. $(x^2-y)dx+(x^2y^2+x)dy=0$.
58. $(\sin x+e^y)dx+\cos x\,dy=0$.

Разные дифференциальные уравнения первого порядка

В задачах 59–71 найти общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

59. $xy'+x^2+xy-y=0$.
60. $2xy'+y^2=1$.
61. $(2xy^2-y)dx+x\,dy=0$.
62. $y-y'=y^2+xy'$.
63. $x^2y'=y(y+x)$.
64. $x^2y'-2xy=3y$.
65. $xy'=e^y+2y'$.
66. $dx+(xy-xy^3)dy=0$.
67. $(xy^2-x)dx+(y+xy)dy=0$.
68. $(\sin x+y)dy+(y\cos x-x^2)dx=0$.
69. $(e^y+2xy)dx+(e^y+x)x\,dy=0$.
70. $(\cos x-x\sin x)y\,dx+(x\cos x-2y)dy=0$.
71. $x\,dy+y\,dx+y^2(x\,dy-y\,dx)=0$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков, допускающие понижения порядка.

I. *Уравнение n-го порядка, не содержащее искомой функции и ее производных до (n-1) порядка включительно:* $F\left(x,y^{(n)}\right)=0$.

Будем считать, что оно разрешимо относительно старшей производной: $y^{(n)}=f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a,b). Такие уравнения решаются путем интегрирования n раз. Каждый раз порядок производной понижается на единицу.

Пример. Найти общее решение уравнения: $y'''=\sin x$.

Решение: Дано дифференциальное уравнение третьего порядка, допускающее понижение порядка, так как уравнение не содержит искомой функции y и ее производных до второго порядка.

Следовательно, уравнение решается путем интегрирования.

$$y''=-\cos x+C_1,$$

$$y'=-\sin x+C_1x+C_2,$$

$$y=\cos x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.$$

II. *Уравнение, не содержащее искомой функции y:* $F(x,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$.

Понижение порядка уравнения происходит после замены $y'=z(x)$, тогда $y''=z'(x),\ldots,y^{(n)}(x)=z^{(n-1)}(x)$, где x – независимая переменная.

Пример. Найти общий интеграл уравнения $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

Решение. Задано дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, так как уравнение не содержит искомую функцию.

Выполнив замену $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка $2xzz' = z^2 + 1$.

$$2xzdz - (z^2 + 1)dx = 0,$$

$$\frac{2zdz}{z^2 + 1} - \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\int \frac{2zdz}{z^2 + 1} - \int \frac{dx}{x} = C,$$

$$\frac{z^2 + 1}{x} = C.$$

Выразим z, получим: $z = \pm\sqrt{Cx - 1}$.

Сделаем обратную замену $z = y'$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными

$$y' = \pm\sqrt{Cx - 1},$$

интегрируя которое, найдем общее решение данного уравнения

$$y = \pm\int \sqrt{Cx - 1}dx + C_1 = \pm\frac{2(Cx - 1)^{\frac{3}{2}}}{3C} + C_1.$$

III. *Уравнение, не содержащее независимую переменную x:* $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Понижение порядка происходит с помощью замены $y' = z(y)$, $y'' = z'_y(y)\, y'_x = z'\, z$, …

Пример. Найти общий интеграл уравнения: $yy''+\left(y'\right)^2=1$, $\left(y>0\right)$.

Решение. Задано дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, так как уравнение не содержит независимую переменную *x*.

Выполним замену $y'=z(y)$, $y''=z'z$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными: $yz'z+z^2=1$.

$$yzdz+(z^2-1)dy=0,$$

$$\frac{zdz}{z^2-1}+\frac{dy}{y}=0,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|z^2-1\right|+\ln|y|=\ln|c_1|,$$

$$y\sqrt{z^2-1}=c_1.$$

Выразив z, получим $z=\pm\sqrt{\left(\frac{c_1}{y}\right)^2+1}$.

Выполнив обратную замену $z=y'$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y'=\pm\frac{\sqrt{c_1^2+y^2}}{y},$$

$$\pm\frac{ydy}{\sqrt{c_1+y^2}}=dx,$$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{c_1+\mathrm{y}^2}=x+c_2,$$

$$(x+c_2)^2-\frac{y^2}{4}=c_3.$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Это уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 .$$

Определение. Множество функций $y_1,\ y_2, \ldots, y_n$, определенных в интервале $(a\ ,b)$, на котором непрерывны коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения, образуют *фундаментальную систему* линейного однородного дифференциального уравнения**,** если:

1) $y_1,\ y_2, \ldots\ y_n$ – решения линейного однородного дифференциального уравнения;

2) $y_1,\ y_2, \ldots\ y_n$ – линейно независимы в интервале $(a\ ,b)$.

Теорема **(о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения)**. Если $y_1,\ y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему линейного однородного дифференциального уравнения, то функция

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения, где c_i – произвольные постоянные.

Таким образом, задача по отысканию общего решения линейного однородного дифференциального уравнения сводится к отысканию фундаментальной системы этого уравнения.

Вид фундаментальной системы линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами зависит от корней характеристического уравнения:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0 .$$

1. Пусть характеристическое уравнение имеет действительные различные корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Тогда функции $y_1 = e^{k_1 x}\ y_2 = e^{k_2 x}, \ldots,$

$y_n = e^{k_n x}$ образуют фундаментальную систему линейного однородного дифференциального уравнения. Следовательно, общее решение этого уравнения в случае различных действительных корней характеристического уравнения имеет вид $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}$.

2. Пусть характеристическое уравнение имеет действительные корни, среди которых есть повторяющиеся. Обозначим корни $k_1, k_2, \ldots, k_r$, где k_1 кратности s_1, $k_2, \ldots, k_r$ – различные, $s_1 + r - 1 = n$. Тогда функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = x e^{k_1 x}$, $y_3 = x^2 e^{k_1 x}$, ..., $y_{s_1} = x^{s_1 - 1} e^{k_1 x}$, $y_{s_1 + 1} = e^{k_2 x}$, ..., $y_n = e^{k_r x}$ образуют фундаментальную систему линейного однородного дифференциального уравнения.

3. Пусть характеристическое уравнение имеет комплексный корень $k_1 = \alpha + \beta i$. Так как коэффициенты характеристического уравнения a_1, a_2, ..., a_n – действительные числа, то из алгебры известно, что и число $k_2 = \alpha - \beta i$ также является корнем характеристического уравнения. Тогда функции $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ будут линейно независимыми решениями линейного однородного дифференциального уравнения.

4. Если корень характеристического уравнения $k_1 = \alpha + \beta i$ имеет кратность s, тогда каждому корню $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ соответствует s линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения, которые имеют вид

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x & y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \\
y_3 = x e^{\alpha x} \cos \beta x & y_4 = x e^{\alpha x} \sin \beta x \\
y_5 = x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x & y_6 = x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x \\
\text{-------------------} & \text{-----------------} \\
y_{2s-1} = x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x & y_{2s} = x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x
\end{array}
$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y^{(\mathrm{V})} + 10 y^{(\mathrm{IV})} - 3 y''' = 0$.

Решение. Задано линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами пятого порядка. Общее решение уравнения запишется в виде $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 + c_5 y_5$, где $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5$ – произвольные постоянные, функции $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5$ образуют фундаментальную систему данного уравнения. Чтобы ее найти, составим и решим характеристическое уравнение.

$$k^5 + 10k^4 - 3k^3 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0,\quad k_4 = -5 + \sqrt{28},\quad k_5 = -5 - \sqrt{28}.$$

Тогда фундаментальная система данного дифференциального уравнения имеет вид: $y_1 = e^{0x} = 1,\quad y_2 = xe^{0x} = x,\quad y_3 = x^2 e^{0x} = x^2$, $y_4 = e^{(-5+\sqrt{28})x}$, $y_5 = e^{(-5-\sqrt{28})x}$.

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot e^{(-5+\sqrt{28})x} + c_5 \cdot e^{(-5-\sqrt{28})x}.$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y^{(\mathrm{IV})} + 8y'' + 16y = 0.$$

Решение. Задано линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения запишется в виде $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4$, где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные, функции y_1, y_2, y_3, y_4 образуют фундаментальную систему данного уравнения. Чтобы ее найти, запишем и решим характеристическое уравнение.

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0 \quad\Rightarrow\quad (k^2 + 4)^2 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = 2i,\quad k_3 = k_4 = -2i.$$

Тогда фундаментальная система данного дифференциального уравнения имеет вид: $y_1 = e^{0x}\cos 2x = \cos 2x$, $y_2 = e^{0x}\sin 2x = \sin 2x$, $y_3 = x\cos 2x$, $y_4 = x\sin 2x$.

Итак, общее решение данного дифференциального уравнения запишется в виде:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x .$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \text{ где } a_i \in R,\ i = \overline{1, n}.$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение, соответствующее этому уравнению, имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения). Если Y является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения, соответствующего данному линейному неоднородному дифференциальному уравнению, а $\overline{y}$ является частным решением линейного неоднородного дифференциального уравнения, то функция $y = Y + \overline{y}$ является общим решением линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения всегда можно найти методом вариации произвольных постоянных. Но в некоторых случаях особого вида правой части уравнения этого метода при отыскании общего решения можно избежать. В этих случаях частное решение неоднородного дифференциального уравнения $\overline{y}$ ищется отдельно. Рассмотрим эти случаи.

I. Правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид: $f(x) = e^{ax} P_m(x)$, где a – действительная постоянная, $P_{\mathrm{m}}(x)$ – многочлен степени $m \geq 0$.

В этом случае $\overline{y}$ ищется в виде $\overline{y} = x^s e^{ax} Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ многочлен той же степени, что и $P_m(x)$, но записанный с неопределенными коэффициентами, s – кратность корня $k = a$ характеристического уравнения $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$ для линейного однородного уравнения, соответствующего данному линейному неоднородному дифференциальному уравнению.

Если число a не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = (x^2 + 1)\, e^x$.

Решение. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения записывается в виде $y = Y + \overline{y}$, где Y является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + y' = 0$, а $\overline{y}$ является частным решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем общее решение уравнения $y'' + y' = 0$. По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения оно имеет вид $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где y_1, y_2 образуют фундаментальную систему однородного уравнения. Чтобы найти фундаментальную систему, составим и решим характеристическое уравнение.

$$k^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0,\ k_2 = -1.$$

Получили, что корни характеристического уравнения действительные различные, поэтому $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{-x}$ и общее решение однородного дифференциального уравнения запишется в виде $Y = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot e^{-x}$.

Правая часть данного дифференциального уравнения имеет вид $f(x) = (x^2 + 1) e^x$.

Здесь $P_m(x) = x^2 + 1$, $m = 2$, $a = 1$. Следовательно, частное решение данного линейного неоднородного уравнения $\bar{y}$ запишется в виде $\bar{y} = x^s e^x (Ax^2 + Bx + C)$.

Сравним число $a = 1$ с корнями характеристического уравнения $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Делаем вывод: a не является корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 0$.

Подставим $\bar{y} = e^x (Ax^2 + Bx + C)$ в данное уравнение. Для этого найдем

$$\bar{y}' = e^x (Ax^2 + (B + 2A)x + B + C),$$

$$\bar{y}'' = e^x (Ax^2 + (B + 4A)x + 2B + 2A + C).$$

При подстановке получим равенство двух многочленов:

$$2Ax^2 + (2B + 6A)x + 3B + 2A + 2C = x^2 + 1.$$

Из алгебры известно, что два многочлена равны, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях *x*. В нашем случае получаем систему:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2A = 1, \\ x & 2B + 6A = 0, \\ x^0 & 3B + 2A + 2C = 1. \end{array}$$

Следовательно, $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = \frac{9}{4}$. Тогда частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\bar{y} = e^x \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{9}{4} \right).$$

Итак, функция $y = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot e^{-x} + e^x \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{9}{4} \right)$ является общим решением данного линейного неоднородного уравнения.

II. Правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x),$$

где α , β – действительные постоянные, $M_n(x)$, $N_m(x)$ – многочлены возможно разных степеней.

В этом случае $\overline{y}$ ищется в виде: $\overline{y} = e^{\alpha x}x^s(P(x)\cos\beta x +$ $+Q(x)\sin\beta x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены одной и той же степени наибольшей из степеней многочленов $M_n(x)$, $N_m(x)$, записанные с неопределенными коэффициентами, s – кратность корня $k = (\alpha + \beta i)$ характеристического уравнения $k^n + a_1k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0$ для линейного однородного уравнения, соответствующего данному линейному неоднородному дифференциальному уравнению.

Если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos\dfrac{x}{2}$.

Решение. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение этого уравнения записывается в виде $y = Y + \overline{y}$, где Y является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$, а $\overline{y}$ является частным решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения оно имеет вид $Y = c_1y_1 + c_2y_2$, где y_1, y_2 образуют фундаментальную систему однородного уравнения. Чтобы найти фундаментальную систему, составим и решим характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1\,,\ k_2 = 2\,.$$

Корни характеристического уравнения действительные различные. Тогда общее решение линейного однородного уравнения запишется в виде $Y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Правая часть данного дифференциального уравнения имеет вид $f(x) = 2e^x \cos\dfrac{x}{2}$.

Здесь $\alpha = 1$, $\beta = \dfrac{1}{2}$, $M_n(x) = 2$, $N_m(x) = 0$, $n = 0$, $m = 0$.

Частное решение $\bar{y}$ данного линейного неоднородного дифференциального уравнения запишется в виде $\bar{y} = x^s e^x \left(A\cos\dfrac{x}{2} + B\sin\dfrac{x}{2} \right)$.

Сравним число $\alpha + \beta i = 1 + \dfrac{i}{2}$ с корнями характеристического уравнения $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Делаем вывод: $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 0$.

Подставим $\bar{y} = e^x \left(A\cos\dfrac{x}{2} + B\sin\dfrac{x}{2} \right)$ в данное уравнение. Для этого найдем

$$\bar{y}' = e^x \left(\left(A + \frac{B}{2} \right) \cos\frac{x}{2} + \left(B - \frac{A}{2} \right) \sin\frac{x}{2} \right),$$

$$\bar{y}'' = e^x \left(\left(\frac{3A}{4} + B \right) \cos\frac{x}{2} + (3B - A) \sin\frac{x}{2} \right).$$

При подстановке получим равенство

$$\cos\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B \right) + \sin\frac{x}{2}\left(2B + \frac{1}{2}A \right) = 2\cos\frac{x}{2}\,.$$

Очевидно, что равенство выполняется, если равны коэффициенты при $\sin\dfrac{x}{2}$ и при $\cos\dfrac{x}{2}$ соответственно. Получаем систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B = 2, \\ 2B + \frac{1}{2}A = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}B = 2, \\ A = -4B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 4, \\ A = -16. \end{cases}$$

Следовательно, $\overline{y} = e^x\left(-16\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\right)$.

Итак, функция $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + e^x\left(4\sin\frac{x}{2} - 16\cos\frac{x}{2}\right)$ является общим решением данного линейного неоднородного уравнения.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = e^x x\sin x$.

Решение. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение этого уравнения записывается в виде $y = Y + \overline{y}$, где Y является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$, а $\overline{y}$ является частным решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$. По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения оно имеет вид $Y = c_1y_1 + c_2y_2$, где y_1, y_2 образуют фундаментальную систему однородного уравнения. Чтобы найти фундаментальную систему, составим и решим характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1 + i\,,\ k_2 = 1 - i\,.$$

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные. Тогда общее решение линейного однородного уравнения запишется в виде

$$Y = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x\,.$$

Правая часть данного дифференциального уравнения имеет вид $f(x)=e^x x\sin x$. Здесь

$$\alpha=1\ ,\ \beta=1\ ,\ M_n(x)=0\ ,\ N_m(x)=x\ ,\ n=0\ ,m=1.$$

Частное решение $\overline{y}$ данного линейного неоднородного дифференциального уравнения запишется в виде $\overline{y}=x^s e^x\big((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\big)$.

Сравним число $\alpha+\beta i=1+i$ с корнями характеристического уравнения $k_1=1+i$, $k_2=1-i$. Делаем вывод: $\alpha+\beta i$ единожды является корнем характеристического уравнения, поэтому $s=1$.

Подставим $\overline{y}=xe^x\big((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\big)$ в данное уравнение. Для этого найдем:

$$\begin{aligned}\overline{y}'&=e^x(((A+C)x^2+(2A+B+D)x+B)\cos x+\\&\quad+((C-A)x^2+(D+C-B)x+D)\sin x),\\ \overline{y}''&=e^x(((2Cx^2+(4A+2D+4C)x+2B+2A+2D)\cos x+\\&\quad+((-2Ax^2+(4C-4A-2B)x-2B+2C+2D)\sin x).\end{aligned}$$

При подстановке получим равенство

$$(4Cx+2A+2D)\cos x+(-4Ax-2B+2C)\sin x=x\sin x.$$

Приравняем соответствующие коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$, получим систему относительно неизвестных постоянных *A, B, C, D*.

$$\begin{cases}4Cx+2A+2D=0,\\-4Ax-2B+2C=1.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}-4A=1,\\-2B+2C=0,\\4C=0,\\2A+2D=0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=-\dfrac{1}{4},\\B=0,\\C=0,\\D=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Следовательно, частное решение $\overline{y}$ имеет вид

$$\bar{y} = \left(xe^x \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x \right).$$

Итак, общим решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения является функция

$$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + xe^x \left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x \right).$$

Решим задачу Коши для уравнения $y'' - 2y' + 2y = e^x x \sin x$ с начальными условиями: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}$.

Найдем y'.

$$y' = c_1(e^x \cos x - e^x \sin x) + c_2(e^x \sin x + e^x \cos x) + e^x \left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x \right) +$$
$$+ xe^x \left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x \right) + xe^x \left(-\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x \right).$$

Подставим начальные условия в выражения для y и y', получим

$$\begin{cases} e^{\frac{\pi}{2}} = c_2 e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{8}e^{\frac{\pi}{2}}, \\ \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}} = c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4}e^{\frac{\pi}{2}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = c_2 - \frac{\pi}{8}, \\ 1 = 4c_1 + 4c_2 - 1 - \pi. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_2 = 1 + \frac{\pi}{8}, \\ c_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \right) e^x \cos x + \left(1 + \frac{\pi}{8} \right) e^x \sin x + xe^x \left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x \right).$$

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Определение. Совокупность соотношений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \end{cases}$$

где x – независимая переменная, $y_1, y_2, ..., y_n$ – искомые функции, называется *системой дифференциальных уравнений первого порядка.*

Определение. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций, называется *нормальной системой дифференциальных уравнений.*

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \qquad (1)$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

Теорема. (Теорема Коши). Если в некоторой области (n-1)-мерного пространства функции $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, … $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по $y_1, y_2, ..., y_n$, то для любой точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ этой области существует единственное решение:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ... \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида, определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям $x_0 . y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Определение. Общим решением системы дифференциальных уравнений вида будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$,… $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Определение. Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется *линейной однородной*, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u, \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u, \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u. \end{cases}$$

Решения указанной системы обладают следующими свойствами:

1) Если y, z, u – решения системы, то Cy, Cz, Cu , где C = const, тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде:

$$y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = \text{const}.$$

Подставляя эти значения в систему и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0.$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k. Это уравнение называется *характеристическим уравнением* и имеет три корня: k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы дифференциальных уравнений:

$$y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x},$$

$$y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x},$$

$$y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы:

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$

$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$

$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Пример. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5-k)(2-k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 6.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0. \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0, \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0, \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0. \end{cases}$

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0, \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0, \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0. \end{cases}$

Полагая $\alpha_2 = 2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2 = 1$.

Общее решение системы: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t}, \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t}. \end{cases}$

Этот пример может быть решен другим способом.

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$.

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения, получим

$$x'' = 5x' + 4x + 4y.$$

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x,$$

$$x'' - 7x' + 6x = 0,$$

$$k_1 = 6; \qquad k_2 = 1,$$

$$x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$

$$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t};$$

$$y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t}.$$

Обозначив $A = C_1$; $\frac{1}{2}B = C_2$, получаем решение системы:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t}, \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t}. \end{cases}$$

Пример. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = y + z + x. \end{cases}$$

Эта система дифференциальных уравнений не относится к рассмотренному выше типу, т.к. не является однородной (во второе уравнение входит независимая переменная x).

Для решения продифференцируем первое уравнение по x. Получаем:

$$y'' = y' + z'.$$

Заменяя значение z' из второго уравнения, получаем: $y'' = y' + y + z + x$.

С учетом первого уравнения, получаем: $y'' = 2y' + x$.

Решаем полученное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' - 2y' = x; \qquad y'' - 2y' = 0; \qquad k^2 - 2k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2.$$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Теперь находим частное решение неоднородного дифференциального уравнения по формуле

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x); \quad \alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax + B;$$

$$y = Ax^2 + Bx; \quad y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A;$$

$$2A - 4Ax - 2B = x; \qquad A = -\frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4}.$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4} x(x+1).$$

Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получаем:

$$z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1).$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} y' = z + w, \\ z' = 3y + w, \\ w' = 3y + z. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0; \qquad -k\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-k(k^2 - 1) + 3k + 3 + 3 + 3k = 0; \qquad k^3 - 7k - 6 = 0;$$

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3.$$

1) $k = -1$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \alpha = 0; \quad \beta = -\gamma.$$

Если принять γ = 1, то решения в этом случае получаем:

$$y_1 = 0; \quad z_1 = -e^{-x}; \quad w_1 = e^{-x}.$$

2) $k_2 = -2$.

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \qquad \alpha = -\gamma; \quad \beta = \gamma.$$

Если принять γ = 1, то получаем:

$$y_2 = -e^{-2x}; \quad z_2 = e^{-2x}; \quad w_2 = e^{-2x}.$$

3) $k_3 = 3$.

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + \gamma = 0\,; \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \quad \alpha = \frac{2}{3}\gamma; \quad \beta = \gamma.$$

Если принять γ = 3, то получаем:

$$y_3 = 2e^{3x}; \quad z_3 = 3e^{3x}; \quad w_3 = 3e^{3x}.$$

Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} y = -C_2 e^{-2x} + 2C_3 e^{3x}, \\ z = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x}, \\ w = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x}. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

В задачах 72–80 найти общее или частное решение данного дифференциального уравнения.

72. $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0.$

73. $y''=x+\sin x.$

74. $y''=x\sin x.$

75. $y''=x^2e^x.$

76. $(y')^2+2yy''=0.$

77. $xy''=y'.$

78. $yy''+(y')^2=1.$

79. $y''(x^2+1)=2xy';\ y(0)=1,\ y'(0)=3.$

80. $y''+\dfrac{2}{1-y}(y')^2=0.$

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

В задачах 81–112 найти общее или частное решение данного дифференциального уравнения.

81. $y''-5y'+6y=0.$

82. $y''+6y'+9y=0.$

83. $y''+4y=0.$

84. $3y''+y'+y=0.$

85. $y''+16y=0.$

86. $y^{IV} - 4y = 0.$

87. $y^{(n-2)} = y^{(n)}.$

88. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0.$

89. $y^{IV} + 2y' + y = 0.$

90. $y''' - y'' - y' + y = 0.$

91. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0.$

92. $y^{V} - 10y''' + 9y' = 0.$

93. $4y'' + 4y' + y = 0.$

94. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(2) = 1$, $y'(2) = -2.$

95. $y'' + y = 4e^{x}$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3.$

96. $y'' + 16y' + 64y = x^2 - 2x - 3.$

97. $y'' + 3y' = 9x.$

98. $y'' + y' = 2x^2 - x + 3.$

99. $y'' - 7y' + 6y = 2e^{x}.$

100. $y'' - 2y' + y = xe^{2x}.$

101. $y'' + y' - 2y = \cos x.$

102. $3y'' - 2y' - 8y = -\sin x.$

103. $y'' - y' = x\sin x.$

104. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x.$

105. $y'' - y = 2e^{x} - x^2.$

106. $y'' - 3y' + 2y = x + \sin 2x.$

107. $y'' + y' = 4\sin x.$

108. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}.$

109. $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}.$

110. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x}.$

111. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

112. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

В задачах 113–117 найти общее или частное решение данной системы дифференциальных уравнений.

113. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$

114. $\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = 5x + 3y. \end{cases}$

115. $\begin{cases} x' = 2x + \cos t, \\ y' = -x + 2\sin t. \end{cases}$

116. $\begin{cases} x' = x + 2\cos t, \\ y' = -x - 3\sin t. \end{cases}$

117. $\begin{cases} x' = e^{3t} - y, \\ y' = 2e^{3t} - x. \end{cases}$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ, ГЕОМЕТРИИ И ЭКОНОМИКЕ

Математические модели реальных объектов всегда широко использовались в науке и технике для проверки достоверности гипотез, получения экспериментального материала.

Под математической моделью понимается приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Для того, чтобы получить количественную информацию о явлении, нужно найти адекватное математическое описание всех его существенных особенностей, которые и будут представлять математическую модель. Обычно это уравнение или система уравнений, описывающие элементарные процессы, из которых складывается исследуемое явление. При этом часто возникает такая ситуация, что не удается непосредственно найти законы, связывающие величины, характеризующие явление, но в то же время можно установить зависимость между этими величинами и их производными или дифференциалами, то есть получить дифференциальные уравнения. Такие модели называются дифференциальными.

В настоящее время практически все разделы физики посвящены построению, а также исследованию математических моделей различных физических объектов и явлений. Математические модели используются не только в физике, но и в других научных областях. Большим достижением в химии и биологии является разработка и исследование математических моделей для биологических систем и различных химических процессов. Широкое применение математические модели нашли в экономике, экологии, а также в социологии, медицине и промышленности.

Рассмотрим *дифференциальные модели первого порядка* в физике, геометрии и экономике.

При решении задач физики или механики с помощью дифференциальных уравнений, в том числе первого порядка, рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Установить величины, изменяющиеся в данном явлении, и выявить физические законы, связывающие их.
2. Выбрать независимую переменную и функцию этой переменной, которую мы хотим найти.
3. Исходя из условий задачи, определить начальные или краевые условия.
4. Выразить все фигурирующие в условии задачи величины через независимую переменную, искомую функцию и ее производные.
5. Исходя из условий задачи и физического закона, которому подчиняется данное явление, составить дифференциальное уравнение.
6. Найти общий интеграл или общее решение дифференциального уравнения.
7. По начальным условиям найти частное решение.
8. Исследовать полученное решение.

Пример. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с. Через 4 секунды скорость ее 1 м/с. Когда скорость лодки уменьшится до 1 см/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?

Решение. Пусть сила сопротивления воды $F_s = kv$, где $v -$ скорость лодки, $k -$ коэффициент пропорциональности. Учитывая второй закон Ньютона, получим равенство

$$mv' = kv.$$

$$v' = \frac{k}{m}v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} - \frac{k}{m}dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|v| - \frac{k}{m}t = \ln C \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad v = Ce^{\frac{k}{m}t}$ – общее решение дифференциального уравнения. Найдем произвольную постоянную из условий задачи Коши. Поскольку начальная скорость равна 1,5 м/с, то начальное условие задачи Коши выразится равенством $v(0) = 1{,}5$, из которого находим $C = \frac{3}{2}$. Коэффициент k определяем из условия: через 4 секунды скорость была равна 1 м/с, то есть

$$v(4) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}e^{4\frac{k}{m}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 4\frac{k}{m} = \ln\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} = \frac{1}{4}\ln\frac{2}{3}.$$

Таким образом, в данной задаче зависимость между скоростью лодки и временем имеет вид:

$$v(t) = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{4}\ln\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{0,25t} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0,25t-1}.$$

Найдем зависимость пути от времени, учитывая, что $s'(t) = v(t)$. Следовательно,

$$s(t) = \int\left(\frac{2}{3}\right)^{0,25t-1}dt = \frac{4\left(\frac{2}{3}\right)^{0,25t-1}}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + C.$$

Постоянную C найдем из начального условия $s(0) = 0$.

$$\frac{4}{\left(\frac{2}{3}\right)\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{4}{\left(\frac{2}{3}\right)\ln\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Итак, $s(t) = \dfrac{6}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{0,25t} - 1\right)$.

Теперь найдем момент времени, когда $v = 0{,}01$ м/с.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{0{,}25-1} = 0{,}01,$$

$$0{,}25t - 1 = \frac{\lg 0{,}01}{\lg\frac{2}{3}} = -\frac{2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{2}{\lg 1{,}5},$$

$$t = 4\left(\frac{2}{\lg 1{,}5} + 1\right) \approx 50 \text{ с.}$$

Пройденный путь при этом

$$s(t) = \frac{6}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3\cdot 100} - 1\right) \approx \frac{6}{\ln 1{,}5} \approx 15 \text{ м.}$$

При решении геометрических задач с помощью дифференциальных уравнений, в том числе первого порядка, рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Сделать чертеж и ввести обозначения.
2. Отделить условия, имеющие место в произвольной точке искомой линии, от условий, выполняющихся лишь в отдельных точках, то есть начальных условий.
3. Выразить все упомянутые в задаче величины через координаты произвольной точки и через значение производной в этой точке, учитывая геометрический смысл производной.
4. По условию задачи составить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет искомая кривая.
5. Найти общее решение этого уравнения и получить из него с помощью начальных условий уравнение искомой линии.

Пример. Найти кривую, проходящую через точку $N(4,5)$, если в любой ее точке отрезок нормали, заключенный между осями координат, делится пополам.

Решение. Строим чертеж (рис. 1) и вводим обозначения: $y = f(x)$ – уравнение искомой кривой. Координаты точки $N(4;5)$ – начальные условия – пока не учитываем. $M(x, y)$ – любая точка кривой и AB – нормаль к кривой в точке M, уравнение которой имеет вид: $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$.

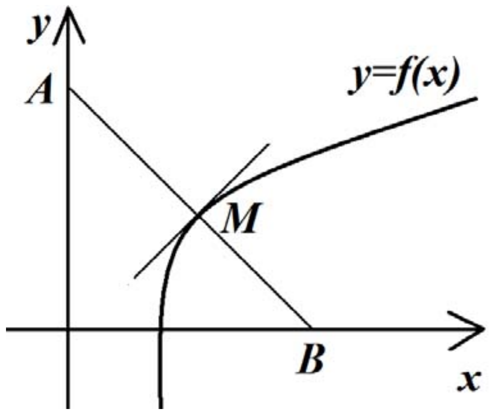

Рис. 1

Составим дифференциальное уравнение, исходя из условия, что $AM = BM$.

Точки $A(0, Y_0)$ и $B(X_0, 0)$ лежат на нормали. Поэтому из уравнения нормали получаем: $Y_0 = y + \frac{x}{y'}$ и $X_0 = yy' + x$.

Используя формулу расстояния между двумя точками, найдем:

$$AM^2 = (Y_0 - y)^2 + x^2 = \frac{x^2}{(y')^2}\left(1 + (y')^2\right),$$

$$BM^2 = (X_0 - x)^2 + y^2 = y^2\left(1 + (y')^2\right).$$

Таким образом, задача свелась к решению дифференциального уравнения

$$\sqrt{\frac{x^2}{(y')^2}\left(1 + (y')^2\right)} = \sqrt{y^2\left(1 + (y')^2\right)}.$$

После упрощений получим дифференциальное уравнение $y' = \frac{x}{y}$. Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, найдем общий интеграл $y^2 - x^2 = C$. Это семейство равносторонних гипербол. Подставляя координаты заданной точки, находим значение константы $C = 9$. Уравнение искомой кривой имеет вид $y^2 - x^2 = 9$ (рис. 2).

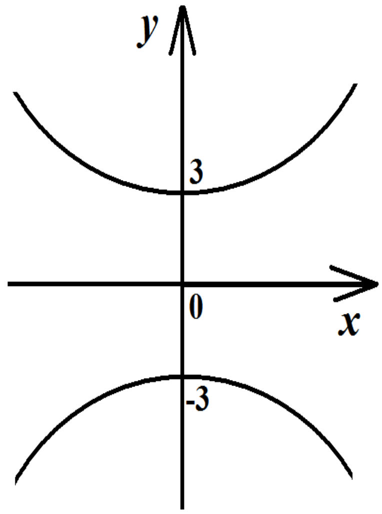

Рис. 2

Математические модели в экономических процессах принято называть экономико-математическими моделями. Экономико-математическая модель – это математическая модель, предназначенная для исследования экономической проблемы. При экономико-математическом моделировании в некоторых случаях исследуемый объект или явление можно описать дифференциальным уравнением или системой дифференциальных уравнений.

В качестве примера рассмотрим экономическую модель, описываемую линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Пример. Задача освоения производственных мощностей

Пусть $n = \text{const}$ – производственная мощность, $x(t)$ – фактическое производство, основанное на этой мощности в момент времени t. При этом, очевидно, что $x(t) \le n$. Дадим аргументу t приращение Δt, тогда фактическое производство $x(t)$ получит прирост производства Δx. Предположим, что прирост производства пропорционален недоиспользованной мощности

$$\Delta x = \gamma(n - x(t))\Delta t .$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка для освоения производственной мощности

$$T\frac{dx}{dt} + x = n\,, T = \frac{1}{\gamma}.$$

Начальным условием для этого уравнения является соотношение

$$x(0) = x_0\,, (x_0 < n).$$

Общим решением уравнения является функция

$$x(t) = n + Ce^{-\frac{t}{T}}.$$

Константа C находится из начального условия

$$C = x_0 - n\,.$$

Таким образом, закон освоения производственных мощностей имеет вид

$$x(t) = n + (x_0 - n)e^{-\frac{t}{T}}.$$

Закон показывает, что процесс освоения производственных мощностей завершается выходом на заданный размер мощности

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = n\,.$$

В частном случае, при $x_0 = 0$, решение принимает вид

$$x(t) = n\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Пример. Односекторная модель экономического роста Солоу

В односекторной модели экономическая система фигурирует как единое целое предприятие, производящее один универсальный продукт, подлежащий потреблению и инвестированию. Национальный доход (ВВП) Y задается однородной производственной функцией первого порядка

$$Y = F(K, L).$$

Здесь K – объем капиталовложений (производственных фондов), L – объем затрат труда (число занятых), $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$. Разделив обе части производственной функции на L, получаем

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k).$$

Здесь y – производительность труда, $k = \dfrac{K}{L}$ – величина фондовооруженности. Будем предполагать, что:

1. Скорость роста трудовых ресурсов пропорциональна объему затрат труда:

$$\frac{dL}{dt} = \alpha L, \ (0 \le \alpha \le 1).$$

2. Инвестиции расходуются на увеличение производственных фондов $\dfrac{dK}{dt}$ и амортизацию βK:

$$I = \frac{dK}{dt} + \beta K.$$

Здесь α – годовой темп прироста числа занятых, β – норма амортизации (доля выбывших за год основных производственных фондов).

Обозначая h – норму инвестиций, находим

$$I = hY = \frac{dK}{dt} + \beta K$$

или

$$\frac{dK}{dt} = hF(K, L) - \beta K .$$

Из формулы для фондовооруженности $k = \frac{K}{L}$ следует, что $\ln k = \ln K - \ln L$ или, после дифференцирования,

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L} .$$

Получаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{k'}{k} = h\frac{f(k)}{k} - (\beta + \alpha)$$

или

$$k' = hf(k) - (\alpha + \beta)k .$$

Полученное уравнение представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Начальным условием для уравнения является соотношение $k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0}$.

Пусть производственная функция имеет вид

$$F(K, L) = \sqrt{K L} .$$

Тогда $f(k) = \sqrt{k}$, и исследуемое уравнение принимает вид

$$\frac{dk}{dt} = h\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k ,$$

общее решение уравнения которого имеет вид:

$$k(t)=\left(\frac{h}{\alpha+\beta}+Ce^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\right)^2.$$

Произвольная константа находится из начального условия $k(0)=k_0=\left(\frac{h}{\alpha+\beta}+C\right)^2=\left(\sqrt{k_\infty}+C\right)^2.$

Здесь $k_\infty=\frac{h^2}{(\alpha+\beta)^2}$. Таким образом $C=\sqrt{k_0}-\sqrt{k_\infty}$ и функция, являющаяся решением уравнения, принимает вид:

$$k(t)=\left(\sqrt{k_\infty}+\left(\sqrt{k_0}-\sqrt{k_\infty}\right)e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\right)^2.$$

Пример. Простейшая модель изменения зарплаты и занятости

Рынок труда, на котором взаимодействуют работодатели и наемные рабочие, характеризуется зарплатой *p(t)* и числом занятых *N(t)*.

Пусть на нем существует равновесие, т.е. ситуация, когда за плату $p_0>0$ согласны работать $N_0>0$ человек. Если по каким-то причинам это равновесие нарушается (например, по возрасту часть работников уходит на пенсию либо у предпринимателей возникают финансовые трудности), то функции *p(t)* и *N(t)* отклоняются от значений p_0, N_0.

Будем считать, что работодатели изменяют зарплату пропорционально отклонению численности занятых от равновесного значения. Тогда

$$\frac{dp}{dt}=-\alpha_1(N-N_0),\qquad \alpha_1>0.$$

Предположим, что число работников увеличивается или уменьшается также пропорционально росту или уменьшению зарплаты относительно значения p_0, т.е.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_2(p - p_0), \qquad \alpha_2 > 0.$$

Дифференцируя первое уравнение по *t* и исключая из него с помощью второго уравнения величину *N*, приходим к стандартной модели колебаний

$$\frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} = -\alpha_1\alpha_2(p - p_0)$$

заработной платы относительно положения равновесия (аналогично и для величины *N(t)*). Из первого интеграла этого уравнения

$$\alpha_1(N - N_0)^2 + \alpha_2(p - p_0)^2 = \text{const} > 0$$

видно, что в некоторые моменты $t = t_i, i = 1,2,\ldots$, когда $p = p_0$ (т. е. зарплата становится равной равновесному значению), имеем $N > N_0$, т.е. число занятых больше равновесного, а при $N = N_0$ получаем $p > p_0$, т.е. зарплата превышает равновесную. В эти моменты фонд заработной платы, равный *pN*, превышает равновесное значение p_0N_0 (или меньше его), если при подходе к моменту t_i выполнено $p > p_0$ или $N > N_0$ (и наоборот). Но в среднем за период колебаний величина *pN* равна p_0N_0.

Пример. Модель рынка с прогнозируемыми ценами

В простых моделях спрос и предложение полагают зависящими только от цены, но в реальных ситуациях спрос и предложение зависит еще от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными от функции цены $P(t)$.

Рассмотрим пример, в котором функция спроса и предложения будет задаваться следующим образом:

$$D(t) = 3P'' - P' - 2P + 18, \quad S(t) = 4P'' + P' + 3P + 3,$$

где $D(t)$ – спрос, $S(t)$ – предложение.

Принятые выражения вполне объяснимы. Спрос зависит от темпов изменения цены. Если темп увеличивается, то интерес рынка к товару становится больше и наоборот. Если же цена становится выше, при этом наблюдается быстрый рост цены, то это отпугивает покупателей, поэтому слагаемое с первой производной входит в функцию спроса со знаком "–".

Предложение еще в большей мере усиливается темпом изменения $P(t)$, поэтому слагаемое, содержащее $P'(t)$, входит со знаком "+". Требуется установить зависимость цены от времени.

Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D(t) = S(t)$, то приравняем выражения:

$$3P'' - P' - 2P + 18 = 4P'' + P' + 3P + 3,$$

приведем подобные:

$$P'' + 2P' + 5P = 15,$$

характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получаем сопряженные комплексные корни:

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i,$$

следовательно, обобщенное решение однородного уравнения имеет вид:

$$P_0 = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t),$$

где C_1, C_2 – const.

Найдем частное решение неоднородного уравнения: $P_{ч.н.} = A$, откуда $P''_{ч.н.} = 0$, следовательно $A = 3$.

Тогда обобщенное решение принимает вид:

$$P = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3.$$

Полученная функция описывает зависимость цены от времени. При наложении начальных условий в конкретных примерах можно найти C_1, C_2, тогда функция позволит строить прогноз изменения цены со временем.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Определение. *Дифференциальным уравнением в частных производных* называется уравнение относительно неизвестной функции нескольких переменных, ее аргументов и ее частных производных различных порядков.

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}\right) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения в частных производных называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. *Решением* уравнения будет некоторая функция $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, которая обращает уравнение в тождество.

Линейные однородные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка от функции $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно в общем виде записать как

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Линейное уравнение в частных производных имеет вид:

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + X_n(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

где X_i – некоторые заданные функции.

Очевидно, что одним из решений такого уравнения будет функция $u = C$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n} \text{ или } \frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1}{X_n}; \quad \frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2}{X_n}; \quad \ldots \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n}$$

– указанная система называется *нормальной.*

Общее решение этой системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ x_2 = f_2(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = f_{n-1}(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}). \end{cases}$$

Если разрешить эти уравнения относительно постоянных C, получим:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}. \end{cases}$$

Каждая из функций φ_k является интегралом системы.

Теорема. *Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – интеграл указанной системы, то функция $u=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – решение исходного уравнения.*

Определение. Задача об определении функции u (x_1, .., x_n), удовлетворяющей дифференциальному уравнению в частных производных порядка k и некоторым *начальным условиям***,** заданным на *гиперповерхности* γ, называется *задачей Коши* для дифференциального уравнения в частных производных.

Наряду с задачей Коши большое значение в практике имеют задачи, где дополнительные условия при ($k \geq 2$) ставятся не на одной кривой, а на двух и более (другими словами, p-условий на одной кривой, ($к - p$)-условий – на другой).

Так, для уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0, \\ u\big|_{\gamma_1} = g_1(x, y), \\ u\big|_{\gamma_2} = g_1(x, y) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0, \\ u(a, y) = \varphi_1(y), \\ u(b, y) = \varphi_2(y). \end{cases}$$

Дополнительные условия могут иметь и более сложный вид.

Определение. Задача для дифференциального уравнения в частных производных, в которой дополнительные условия ставятся на нескольких границах (кривых), называется *граничной или краевой задачей.*

Классификация основных типов уравнений математической физики

Большая часть всех уравнений в частных производных второго порядка, линейных относительно вторых производных, являются представителями трех различных классов уравнений, которые существенно отличаются друг от друга по методам исследования и по физической природе. Рассмотрим более подробно уравнения трех основных типов уравнений математической физики.

1) *Волновое уравнение.* (Уравнение колебаний струны, электроколебания, крутильные колебания вала и др.) Это простейшее уравнение *гиперболического типа*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2) *Уравнение теплопроводности* (уравнение Фурье). Это простейшее уравнение *параболического типа*. Описывает процессы теплопроводности, фильтрации жидкости и газа, некоторые вопросы теории вероятностей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3) *Уравнение Лапласа.* Это простейшее уравнение *эллиптического типа*. Описывает магнитные и электрические поля, гидродинамику, диффузию и др.:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

В этих уравнениях функция *u* зависит от двух переменных, однако задача может быть расширена для случая трех переменных:

1) волновое уравнение: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

2) уравнение теплопроводности: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

3) уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение обыкновенного дифференциального уравнения.
2. Как определить порядок дифференциального уравнения?
3. Дайте определения: решения дифференциального уравнения первого порядка, общего интеграла, общего решения и частного решения дифференциального уравнения первого порядка.
4. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
5. Что такое интегральная кривая дифференциального уравнения? Сколько можно построить интегральных кривых, проходящих через заданную точку? Какая теорема дает ответ на этот вопрос?
6. Перечислите основные типы дифференциальных уравнений первого порядка.
7. Запишите общий вид дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Каков алгоритм решения этого уравнения?
8. Приведите общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка. Перечислите методы решения такого уравнения.
9. Каков порядок действий при решении линейного дифференциального уравнения первого порядка методом Бернулли?
10. Какая функция называется однородной степени однородности m? Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным? Запишите замену переменной, с помощью которой решается такое уравнение.
11. Как проверить, является ли данное дифференциальное уравнение первого порядка уравнением в полных дифференциалах? Опишите метод решения такого уравнения.
12. Дайте определения: общего и частного решений дифференциального уравнения n-го порядка.

13. Сколько произвольных постоянных должно содержать общее решение дифференциального уравнения n-го порядка?

14. Перечислите дифференциальные уравнения n-го порядка, допускающие понижения порядка. Укажите замены переменной, с помощью которых понижается порядок дифференциального уравнения в случаях, когда уравнение не содержит искомой функции или независимой переменной.

15. Запишите общий вид линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Как составить характеристическое уравнение для данного линейного однородного дифференциального уравнения?

16. Какова структура решения линейного однородного дифференциального уравнения?

17. От чего зависит вид фундаментальной системы линейного однородного дифференциального уравнения?

18. Запишите общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Какова структура общего решения этого уравнения?

19. От чего зависит вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения?

ПРИМЕР ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Целью контрольной работы по курсу «Дифференциальные уравнения» является приобретение студентом навыков:

- решения простейших дифференциальных уравнений первого порядка;
- нахождения общего и частного решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида при различных начальных условиях;
- применения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка к решению физических и геометрических задач.

Прежде чем приступать к выполнению контрольной работы, следует ответить на теоретические вопросы для самопроверки и решить достаточное количество задач по каждому разделу изучаемой темы.

Контрольная работа должна выполняться студентом самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к экзамену.

Найти общий интеграл или общее решение уравнений 1-4:

1. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.
2. $\left(x^2 + 2x + 1\right)y' - \left(x + 1\right)y = x - 1$.
3. $\sin x \cdot \cos^2 y\, dx + (1 + \cos x \cdot \sin 2y)\, dy = 0$.

4. $y''' + 2y'' + y' = 3x^2 + 4$.

5. Найти семейство интегральных кривых уравнения $y' = \operatorname{tg} x$ и выделить ту, которая проходит через точку $y(0) = 1$.

6. Найти кривые, у которых тангенс угла между положительным направлением оси Ox и касательной обратно пропорционален ординате точки касания. Построить семейство этих кривых.

7. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой толщиной в 2 м?

Рассмотрим решение данного варианта контрольной работы.

№ 1. Найти общий интеграл или общее решение уравнения $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

Решение. Уравнение $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$ является дифференциальным уравнением первого порядка. Запишем уравнение в виде

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}.$$

Рассмотрим функцию $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$. Так как

$$f(kx, ky) = \frac{\sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} + ky}{kx} = \frac{k\left(\sqrt{x^2 + y^2} + y\right)}{kx} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x} = f(x, y),$$

то функция однородная нулевой степени. Следовательно, данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Введем замену $z=\dfrac{y}{x}$. Тогда $y=zx$, $y'=z'\,x+z$ и уравнение примет вид

$$z'\,x+z=\frac{\sqrt{x^2+(zx)^2}+zx}{x} \quad\Rightarrow\quad z'\,x+z=\sqrt{1+z^2}+z,$$

$$\frac{dz}{dx}x-\sqrt{1+z^2}=0,$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}-\frac{dx}{x}=0.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим

$$\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|+\ln|x|=\ln|C|$$

или

$$x\cdot\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=C,\quad C\neq 0.$$

Выполнив обратную замену, получим общий интеграл уравнения

$$x\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)=C,\ C\in R$$

или

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C,\quad C\in R,$$

$$x^2=C^2-2Cy.$$

Получили семейство парабол при $C\neq 0$ и ось Oy при $C=0$.

№ 2. Найти общий интеграл или общее решение уравнения $\left(x^2+2x+1\right)y'-(x+1)y=x-1$.

Решение. Уравнение $(x^2+2x+1)\,y'-(x+1)\,y=x-1$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Запишем его в виде

$$y'-\frac{y}{x+1}=\frac{x-1}{(x+1)^2}.$$

Решение уравнения будем искать в виде $y=u(x)\cdot v(x)$. Подставим функцию в данное уравнение, получим верное функциональное тождество

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x+1}=\frac{x-1}{(x+1)^2}.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые:

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x+1}\right)=\frac{x-1}{(x+1)^2}.$$

Будем считать, что функция $v(x)$ такова, что $v'-\dfrac{1}{x+1}=0$.

$$dv-\frac{dx}{x+1}=0 \quad\Rightarrow\quad \ln|v|-\ln|x+1|=C.$$

Будем считать, что $v(x)>0$, $C=0$, получим $v=x+1$. Тождество примет вид

$$u'(x+1)=\frac{x-1}{(x+1)^2}.$$

Тогда $u'=\dfrac{x-1}{(x+1)^3}$. Следовательно,

$$u(x)=\int\frac{x-1}{(x+1)^3}dx=\int\frac{(x+1)-2}{(x+1)^3}dx=\int\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}\right)dx=$$

$$= \frac{1}{2(x+1)^4} - \frac{1}{x+1} + C.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения запишется следующим образом:

$$y = \left(\frac{1}{2(x+1)^4} - \frac{1}{x+1} + C \right)(x+1), \ C \in R.$$

№ 3. Найти общий интеграл или общее решение уравнения $\sin x \cdot \cos^2 y\, dx + (1 + \cos x \cdot \sin 2y)\, dy = 0$.

Решение. Уравнение $\sin x \cdot \cos^2 y\, dx + (1 + \cos x \cdot \sin 2y)\, dy = 0$ является дифференциальным уравнением первого порядка. Выясним тип уравнения. По виду данное уравнение похоже на уравнение в полных дифференциалах, тогда $P(x) = \sin x \cdot \cos^2 y$, $Q(x) = 1 + \cos x \cdot \sin 2y$.

Найдем $\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin x \cdot \sin 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin x \cdot \sin 2y$.

Из равенства $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и непрерывности функций $P(x)$, $Q(x)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ следует тип данного уравнения – уравнение в полных дифференциалах, то есть левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Тогда уравнение можно записать в виде $du = 0$. Следовательно, $u(x, y) = c$ – общее решение уравнения и задача свелась к отысканию вида функции $u(x, y)$.

В ходе решения мы получили, с одной стороны,

$$du = \sin x \cdot \cos^2 y\, dx + (1 + \cos x \cdot \sin 2y)\, dy,$$

с другой стороны – полный дифференциал функции двух переменных записывается в виде $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$.

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \sin x \cdot \cos^2 y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 + \cos x \cdot \sin 2y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = \int \sin x \cdot \cos^2 y \, dx + C(y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 + \cos x \cdot \sin 2y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = -\cos x \cdot \cos^2 y + C(y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 + \cos x \cdot \sin 2y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = -\cos x \cdot \cos^2 y + C(y), \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\cos x \cdot \cos^2 y + C(y)\right) = 1 + \cos x \cdot \sin 2y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = -\cos x \cdot \cos^2 y + C(y), \\ \cos y \cdot \sin 2y + C'(y) = 1 + \cos x \cdot \sin 2y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = -\cos x \cdot \cos^2 y + C(y), \\ C'(y) = 1. \end{cases}$$

Итак, $u(x,y) = y - \cos x \cdot \cos^2 y$. Следовательно, общий интеграл уравнения имеет вид $y - \cos x \cdot \cos^2 y = C$, $C \in R$.

№ 4. Найти общий интеграл или общее решение уравнения $y''' + 2y'' + y' = 3x^2 + 4$.

Решение. Уравнение $y''' + 2y'' + y' = 3x^2 + 4$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение этого уравнения записывается в виде $y = Y + \overline{y}$, где Y является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения $y''' + 2y'' + y' = 0$, а $\overline{y}$ – частным решением данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем общее решение уравнения $y''' + 2y'' + y' = 0$. По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения оно имеет вид $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$, где y_1, y_2, y_3 образуют фундаментальную систему однородного уравнения. Чтобы найти фундаментальную систему, составим и решим характеристическое уравнение

$$k^3 + 2k^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0, \quad k_2 = k_3 = -1.$$

Получили, что корни характеристического уравнения действительные, то есть кратные, поэтому

$$y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = x e^{-x}$$

и общее решение однородного дифференциального уравнения запишется в виде $Y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}$.

Правая часть данного дифференциального уравнения имеет вид $f(x) = 3x^2 + 4$.

Здесь $P_m(x) = 3x^2 + 4$, $m = 2$, $a = 0$. Следовательно, частное решение данного линейного неоднородного уравнения $\overline{y}$ запишется в виде $\overline{y} = x^s (Ax^2 + Bx + C)$.

Сравним число $a = 0$ с корнями характеристического уравнения $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = -1$. Делаем вывод, что a является единожды корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 1$.

Подставим $\overline{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ в данное уравнение. Для этого найдем

$$\overline{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C;$$

$$\overline{y}'' = 6Ax + 2B;$$

$$\overline{y}''' = 6A.$$

При подстановке получим равенство двух многочленов

$$3Ax^2 + (12A + 2B)\,x + 6A + 4B + C = 3x^2 + 4.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 3A = 3, \\ 12A + 2B = 0, \\ 6A + 4B + C = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -6, \\ C = 22. \end{cases}$$

Таким образом, функция

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + x^3 - 6x^2 + 22x$$

является общим решением данного линейного неоднородного уравнения, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

№ 5. Найти семейство интегральных кривых уравнения $y' = \operatorname{tg} x$ и выделить ту, которая проходит через точку $y(0) = 1$.

Решение. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = \operatorname{tg} x$. Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными. Найдем его общее решение, проинтегрировав его правую и левую части по x:

$$y' = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad y = \int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C.$$

Таким образом, семейство интегральных кривых представляет собой множество кривых вида $y = C - \ln|\cos x|$, $C \in R$.

Определим кривую, проходящую через точку $y(0) = 1$, то есть решим задачу Коши с начальным условием $y(0) = 1$:

$$1 = C - \ln|\cos 0| \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Следовательно, уравнение искомой кривой: $y = 1 - \ln|\cos x|$.

№ 6. Найти кривые, у которых тангенс угла между положительным направлением оси *Ox* и касательной обратно пропорционален ординате точки касания. Построить семейство этих кривых.

Решение. Строим чертеж (рис. 3) и вводим обозначения: $y = f(x)$ – уравнение искомой кривой, $M(x, y)$ – точка касания, α – угол между положительным направлением оси *Ox* и касательной.

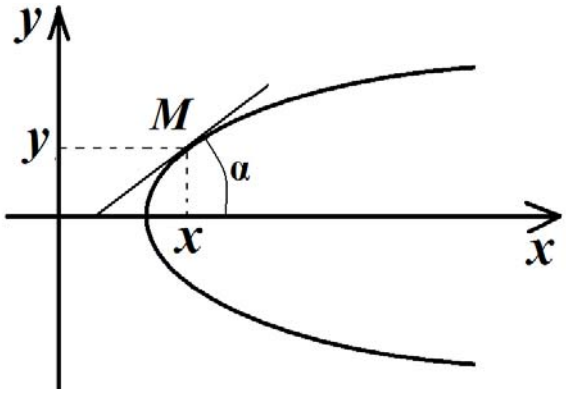

Рис. 3

По геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\alpha = y'$. По условию задачи $\operatorname{tg}\alpha$ обратно пропорционален ординате точки касания, то есть $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{y}$. Получаем дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{1}{y}.$$

Решая его, находим общий интеграл:

$$y\,dy = dx \quad \Rightarrow \quad \int y\,dy - \int dx = C \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} - x = C,\ C \in R.$$

Таким образом, искомые кривые имеют уравнения вида $x = \frac{y^2}{2} - C$, где C – произвольная постоянная, $C \in R$. Это семейство парабол с вершинами на оси Ox (рис. 4).

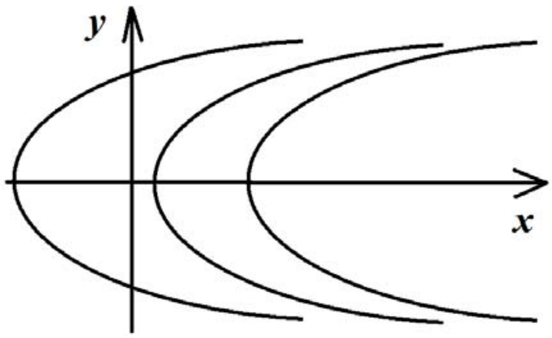

Рис. 4

№ 7. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой толщиной в 2 м?

Решение. Пусть количество света, которое проходит на глубину h, равно $h(v)$. Возьмем участок бесконечно малой толщины Δh, найдем количество света $v(h+\Delta h)$, которое останется после прохождения этого участка. Согласно условию задачи на участке поглотится $k\,v(h)\,\Delta h$ света, где k – коэффициент пропорциональности. Тогда

$$v(h+\Delta h) = v(h) - kv(h)\Delta h,$$

$$\frac{v(h+\Delta h)-v(h)}{\Delta h} = -kv(h).$$

После перехода к пределу при $\Delta h \to 0$ получаем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$v' = -kv,$$

$$\frac{dv}{v} + kdv = 0,$$

$$\ln|v| + kh = \ln C \Rightarrow v = Ce^{kh}.$$

Отметим, что по условию задачи $C = v(0)$. Таким образом, зависимость количества света, которое останется после прохождения участка длины h, равно $v(h) = v(0)e^{-kh}$.

Для нахождения неизвестного коэффициента k воспользуемся тем, что после прохождения участка 0,35 м поток света ослабел в 2 раза, то есть

$$\frac{v(0{,}35)}{v(0)} = e^{-0{,}35k} = 0{,}5.$$

Логарифмируя последнее выражение, получим

$$0{,}35k = \ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{0{,}35}.$$

$$v(h) = v(0)e^{-\frac{\ln 2}{0{,}35}h} = v(0)2^{-\frac{h}{0{,}35}}.$$

Часть света, которая останется после прохождения двухметровой преграды:

$$\frac{v(2)}{v(0)} = 2^{\frac{2}{0{,}35}} = 2^{-\frac{40}{7}} \approx 0{,}02 \text{ или } 2\%.$$

Таким образом, поглотится 100 – 2 = 98 % света.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

1. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения.

   1) $(x^2-1)\,y'+2xy^2=0$
   2) $2xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy=0$
   3) $xy'-2y=2x^4$
   4) $(x+2y)\,dx-x\,dy=0$
   5) $(x+1)y'=4+2y$
   6) $(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=0$
   7) $x(y'-y)=e^x$
   8) $y\,y'=\frac{1-2x}{y}$
   9) $xy\,dx+(x+1)\,dy=0$
   10) $(y^2-2xy)\,dx+x^2\,dy=0$
   11) $x^2y'+xy+1=0$
   12) $(2x^3-xy^2)\,dx+(2y^3-x^2y)\,dy=0$
   13) $y=x(y'-x\cos x)$
   14) $\sqrt{y^2+1}\,dx=xy\,dy$
   15) $y'+y=y^2e^{-x}$
   16) $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$
   17) $y'+2xy=xe^{-x^2}$
   18) $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$

2. Найти общее решение уравнения $y'-2xy=3x^3y^2$. Найти и построить интегральную кривую, проходящую через точку $(0,1)$.
3. Найти множество интегральных кривых дифференциального уравнения $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$. Выделить и построить ту интегральную кривую, которая проходит через точку $M(1,1)$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'(x-y)=x+y$. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y|_{x=1}=2$.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'=3\sqrt[3]{y^2}$. Построить несколько интегральных кривых этого уравнения и выделить ту, которая проходит через точку $(2,0)$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'+\dfrac{y}{x}=3x$ $(x>0)$. Выделить решение, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=1}=1$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0$ и частное решение этого уравнения при условии $y|_{x=1}=0$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $x\,y'-2y=2x^4$ и выделить решение, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=1}=2.$
9. Найти частное решение уравнения $y''-2y'=e^x\left(x^2+x-3\right)$, если $y(0)=2$, $y'(0)=2$.
10. Найти общее решение уравнения $y''+y=-8\cos 3x$.
11. Найти частное решение уравнения $y''-2y'+10y=10x^2+18x+6$, если $y(0)=1$, $y'(0)=3{,}2$.
12. Найти общее решение уравнения $y''-5y'=3x+\sin 5x$.
13. Найти частное решение уравнения $y''+y=4xe^x$, если $y(0)=0$, $y'(0)=5$.
14. Найти частное решение уравнения $y''+y=4\sin x$, если $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4.$
15. Найти частное решение уравнения $y''-5y'+4y=4x^2e^{2x}$, если $y(0)=0$, $y'(0)=4$.

16. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 3x$.

17. Найти частное решение уравнения $y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$, если $y(0) = 0{,}1$, $y'(0) = -1{,}9$.

18. Найти общее решение уравнения $y''' + 2y'' + y' = 3x^2 + 4$.

19. Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\left(x^2 + x\right)$.

20. Найти общее решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0$.

21. Определить тип, записать характеристическое уравнение, найти уравнения характеристик, привести к каноническому виду уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

22. Найти общее решение уравнения $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

23. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$

24. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = y. \end{cases}$

25. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases}$

26. Найти то решение уравнения $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, которое удовлетворяет условию при $x = 0$, $u(0, y) = 2y$.

27. Найти то решение уравнения $\dfrac{1}{2}(1 + x^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{3}xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, которое удовлетворяет условию при $x = 0$, $u(0, y) = y^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонов С.А. Дифференциальные уравнения. М.: МГТУ, 2004.
2. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Сер. Классические направления в математике. М.: МЦНМО, 2012. 384 с.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Сер. Классические направления в математике. М.: МЦНМО, 2012. 352 с.
4. Балабаева Н.П., Барова Е.А., Томина Е.И. Дифференциальные уравнения**:** Методическая разработка по кафедре математического анализа. Самара: Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, 2010. 64 с.
5. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб: Лань, 2003.
7. Дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков [и др.]. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1962.
8. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие. М.: Едиториал УРСС, Ленанд, 2016. 256 с.
9. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб: Лань, 2003.
10. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие. 7-е изд., доп. СПб: Лань, 2002.
11. Олейник О.А. Роль теории дифференциальных уравнений в современной математике и ее приложениях // Соросовский образовательный журнал. № 4. 1196. С. 114–121.

12. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум: учеб. пособие. М.: Инфра-М, 2016. 432 с.
13. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
14. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
15. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений. Минск: Высшая школа, 1973.
16. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М. ФИЗМАТЛИТ, 2005. 320 с.
17. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Практический курс: учеб. пособие. 3-е изд., перераб. М.: Высшая школа, 2006.
18. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука,1964.
19. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Ленанд, 2015. 448 с.
20. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учеб. 2-е изд., испр. М.: КомКнига, 2007.
21. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т.1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
22. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т.2. М.: ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория Знаний, 2003.
23. Шалдырван В.А., Медведев К.В. Руководство по решению обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Либроком, 2012. 252 с.
24. Школьник А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Учпедгиз, 1963.

Приложение 1

Таблица производных элементарных функций

1. $(C)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$
4. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
5. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
6. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
7. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
8. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
9. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
10. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
11. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
12. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
13. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
14. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
16. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
17. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Приложение 2

Таблица интегралов

1. $\int 0\,dx = C$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$
6. $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$
7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
10. $\int \mathrm{ctg}\,x\,dx = \ln|\sin x| + C$
11. $\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \mathrm{arctg}\,x + C$
12. $\int \frac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{x^{2}-a^{2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$

17. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

18. $\int \sqrt{x^2 + A}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$

Учебное издание

Барова Евгения Анатольевна,
Дюжева Александра Владимировна,
Яковлева Юлия Олеговна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор Н.С. Куприянова
Компьютерная верстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 13.11.2017. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 5,5.
Тираж 300 экз. (1-й з-д 1-25). Заказ . Арт. 30/2017

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК