

# **ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА**

**А.В. Дорошин**  
[doran@inbox.ru](mailto:doran@inbox.ru)

**Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королева  
(национальный исследовательский университет)**

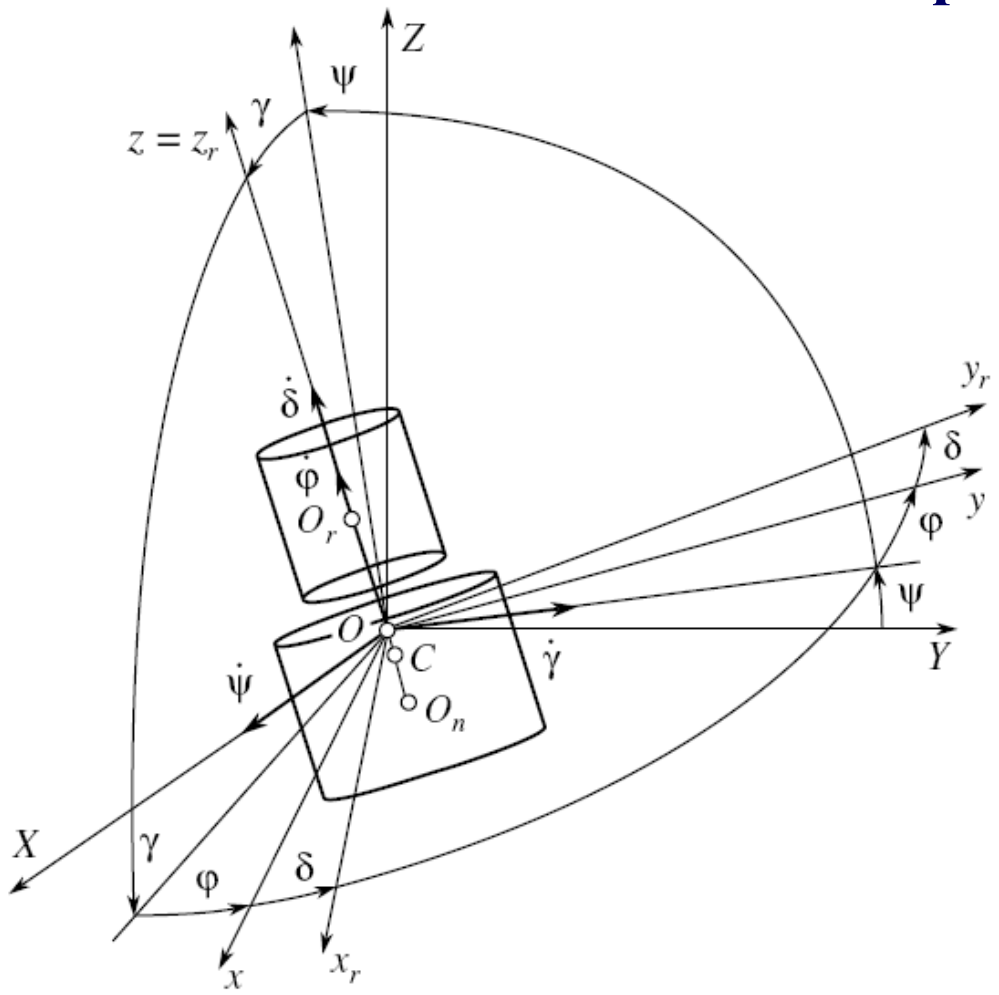
**Факультет летательных аппаратов**

**кафедра космического машиностроения**

Издано в рамках выполнения Программы развития Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва» на 2009-2018 годы.

Самара, СГАУ, 2013г.

# 1. Уравнения пространственного движения соосных КА и гироскопов переменной массы

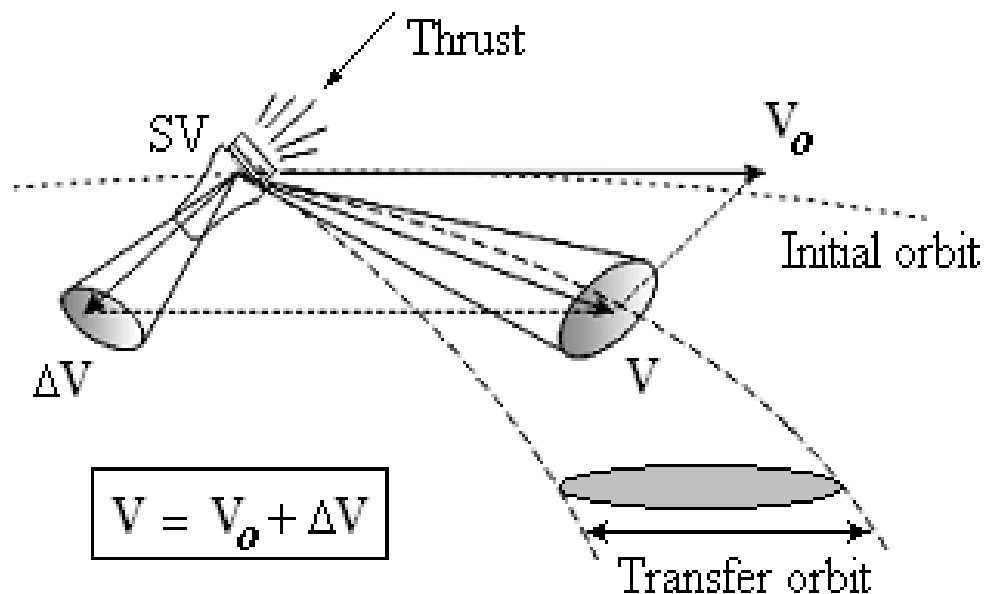


$$\begin{cases} A(t)\dot{p} + (C(t) - A(t))qr + C_r(t)q\sigma = M_x^e \\ A(t)\dot{q} - (C(t) - A(t))pr - C_r(t)p\sigma = M_y^e \\ C(t)\dot{r} + C_r(t)\dot{\sigma} = M_z^R + M_z^e \\ C_r(t)(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r + M_z^R + M_{z,r}^e \end{cases} \quad (1)^*$$

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \gamma} (p \cos \varphi - q \sin \varphi) \\ \dot{\gamma} = p \sin \varphi + q \cos \varphi, \quad \dot{\delta} = \sigma \\ \dot{\varphi} = r - \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} (p \cos \varphi - q \sin \varphi) \end{cases} \quad (2)$$

\* - Дорошин А.В. Эволюции прецессионного движения неуравновешенных гироскопов переменного состава // Прикладная математика и механика. 2008. Т.72. Вып.3. С. 386-398.

## 2. Межорбитальные переходы КА



### Реализация межорбитальных переходов КА

### Причины «рассеивания» переходных орбит:

1. КА совершает два вида движения:
  - траекторное движение ц.м.
  - пространственное (угловое) движение
2. Пространственное движение влияет на траекторное

---

Прецессионное движение вектора тяги вызывает распыление переходного импульса и конечных орбит

### 3. Переход к новым переменным

$$p(t) = G(t) \sin F(t), \quad q = G(t) \cos F(t) \quad (G \geq 0). \quad (3)$$

Динамические уравнения (1) в новых переменных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{F} = -\frac{1}{A(t)} \left[ (C(t) - A(t))r + C_r(t)\sigma + f_F(G, F) \right], \quad \dot{G} = \frac{f_G(G, F)}{A(t)} \\ \dot{r} = \frac{M_{z,c}^e - M_r}{C_m}, \quad \dot{\sigma} = \frac{C(t)M_r}{C_r(t)C_m} + \frac{M_z^R + M_{z,r}^e}{C_r(t)} - \frac{M_{z,m}^e}{C_m} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$f_G(G, F) = (M_x^e \sin F + M_y^e \cos F), \quad f_F(G, F) = \frac{1}{G} (M_x^e \cos F - M_y^e \sin F)$$

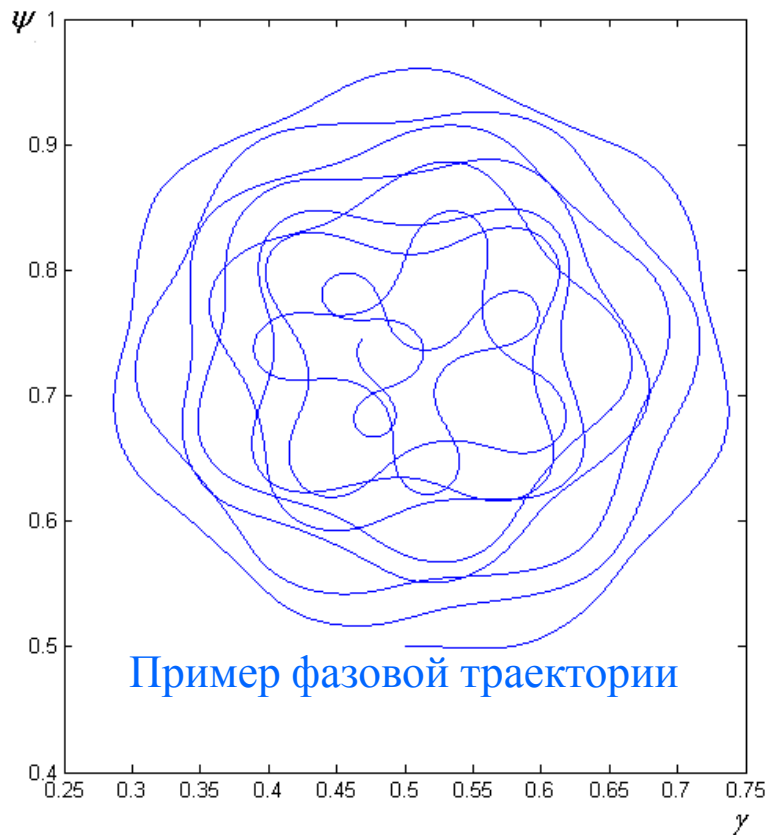
Пусть величина экваториальной угловой скорости и углы  $\psi$  и  $\gamma$  являются малыми:

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 + q^2} / |\sigma| \ll 1, \quad \gamma = O(\varepsilon), \quad \psi = O(\varepsilon)$$

Кинематические уравнения (2) :

$$\dot{\gamma} \cong G \cos \Phi(t), \quad \dot{\psi} \cong G \sin \Phi(t), \quad \dot{\phi} \cong r, \quad \dot{\delta} = \sigma, \quad \Phi(t) = F(t) - \varphi(t) \quad (5)$$

## 4. Анализ поведения фазовой траектории



Фазовые координаты:  $\gamma, \psi$

Фазовые скорости:  $V_\gamma = \dot{\gamma}, V_\psi = \dot{\psi}$  (6)

Фазовые ускорения:  $W_\gamma = \ddot{\gamma}, W_\psi = \ddot{\psi}$  (7)

Кривизна траектории ( $k$ ):

$$k^2 = \frac{(\dot{\gamma}\ddot{\psi} - \ddot{\gamma}\dot{\psi})^2}{(\dot{\gamma}^2 + \dot{\psi}^2)^3} = \frac{\dot{\Phi}^2}{G^2}. \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \left( k(t)^2 \right) = 2 \left( \dot{\Phi} \ddot{\Phi} G - \dot{G} \dot{\Phi}^2 \right) / G^3. \quad (9)$$

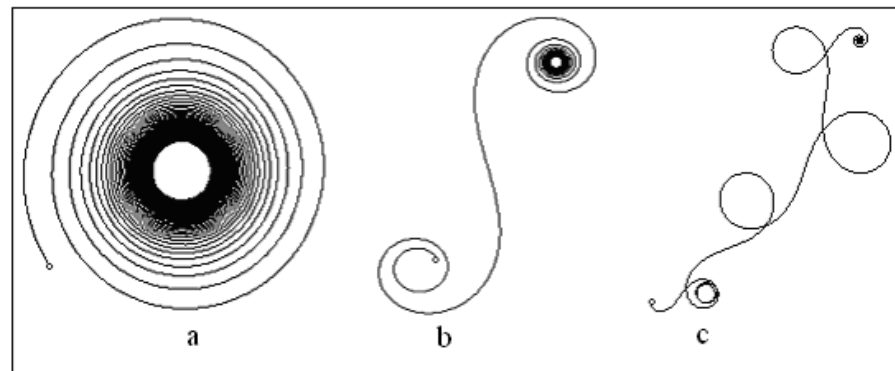
Функция эволюции фазовой траектории:

$$P(t) = \dot{\Phi} \left( \ddot{\Phi} G - \dot{G} \dot{\Phi} \right). \quad (10)$$

случай “a” – функция  $P(t)$  положительна;

case “b” –  $P(t)$  имеет один корень (ноль);

case “c” –  $P(t)$  имеет несколько корней.



## 5. Анализ и синтез специальных режимов движения

5

$$\begin{cases}
 A(t), C(t) - \text{linear}(t) \\
 M_r = \text{const}, M_z^R = \text{const} \\
 r_0 = 0, \sigma_0 < 0, M_r > 0
 \end{cases}
 \begin{cases}
 \dot{G} = 0, & \dot{F} = -\frac{(C_m + C_r - ct - A_m - A_r + at)r + (C_r - ct)\sigma}{A_m + A_r - at} \\
 \dot{\sigma} = \frac{(C_m + C_r - ct)M_r}{(C_r - ct)C_m} + \frac{M_z^R}{(C_r - ct)}, & \dot{r} = -M_r / C_m
 \end{cases} \quad (11)$$

Аналитические решения:

$$\begin{cases}
 r = r_0 - \frac{M_r}{C_n}t, \quad \sigma = \sigma_0 + s_1t + s_2 \ln(1 - ct), \quad \varphi = \varphi_0 + r_0t - \frac{M_r}{2C_m}t^2 \\
 \dot{F} = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i t^i, \quad \dot{\Phi} = \dot{F} - \dot{\varphi} = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i t^i, \quad f_1 = F_1 + M_r / C_m, \quad f_j = F_j \quad (j = 2.. \infty) \\
 s_1 = \frac{M_r}{C_n}, \quad s_2 = -\frac{1}{c}(M_r + M_z^R), \quad c_1 = c / C_r f_0 = F_0 - r_0,
 \end{cases} \quad (12)$$

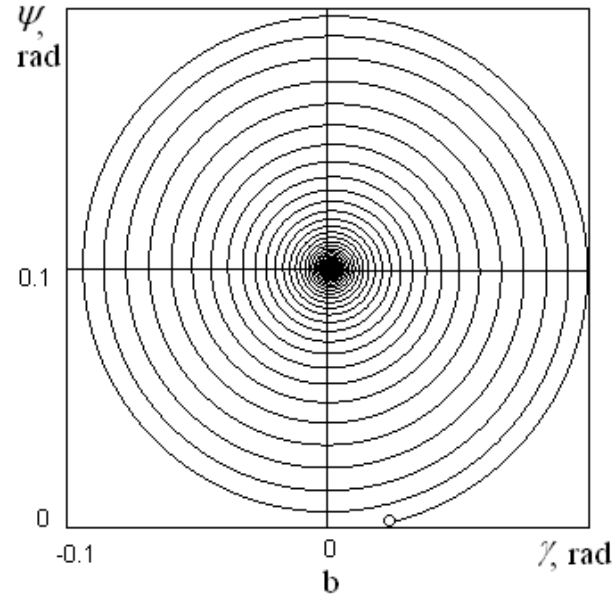
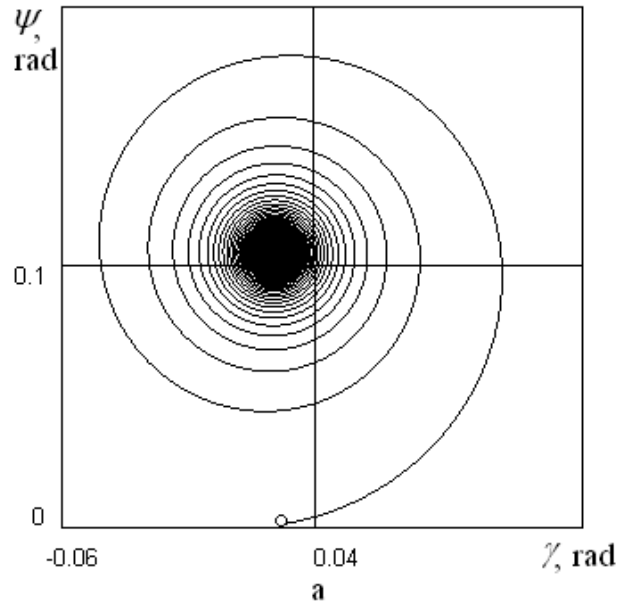
$$\text{Приближенная функция эволюции: } P(t) \approx f_1(f_0 + f_1 t) = f_1^2 t + f_1 f_0 \quad (13)$$

Полином (13) является устойчивым и траектория скручивается по спирали, если  $f_1 f_0 > 0 \Rightarrow$

$$\left\{ \frac{c}{C_r} < \frac{a}{A_m + A_r}, \quad M_z^R < 0 \right\} \quad (14) \quad \left\{ \frac{c}{C_r} < \frac{a}{A_m + A_r}, \quad M_z^R > 0, \quad \frac{\sigma_0 [c(A_m + A_r) - C_r a]}{(A_m + A_r)} > M_z^R \right\} \quad (15)$$

## 6. Численное моделирование движения

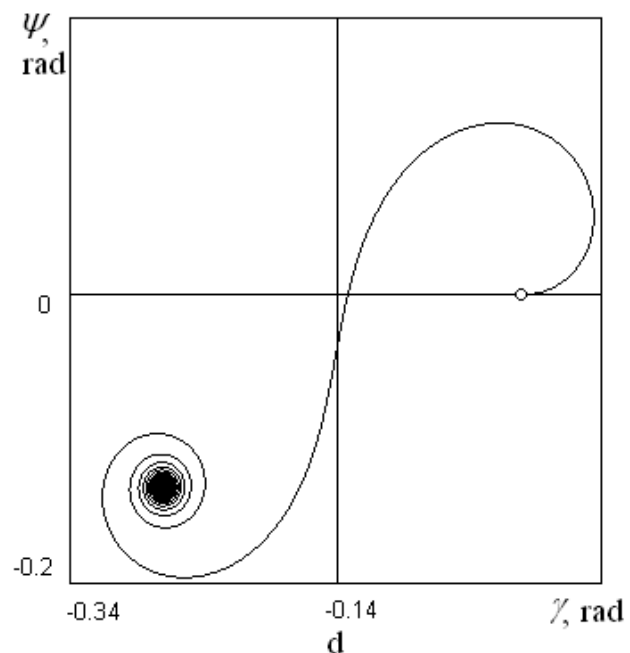
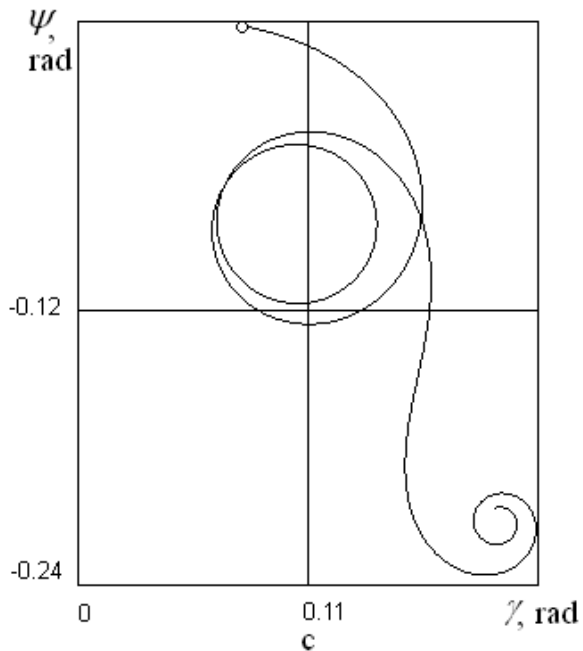
6



случай “а” – выполнение условия (14);

случай “б” – выполнение условия (15);

случай “с” – невыполнение условия (14);

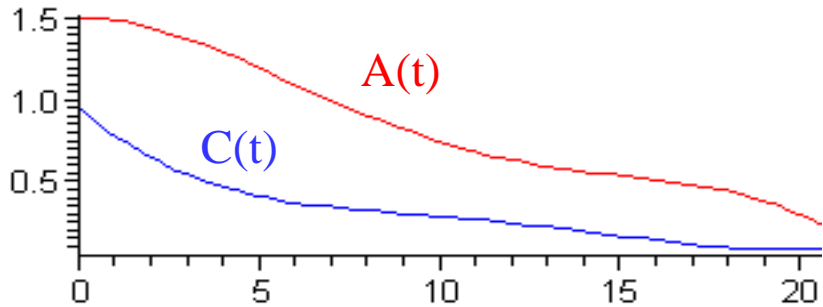


случай “д” – невыполнение условия (15);

*Doroshin A. V. Analysis of attitude motion evolutions of variable mass gyrostats and coaxial rigid bodies system // International Journal of Non-Linear Mechanics 45 (2010) 193–205*

# 7. Пример одного нелинейного случая

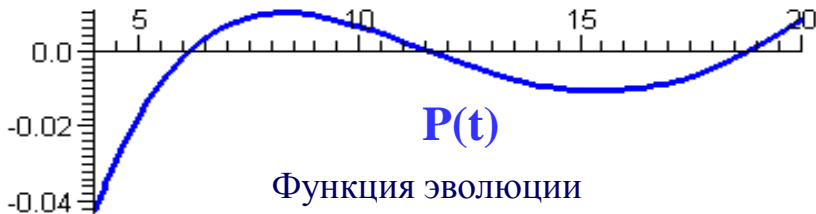
Зависимости моментов инерции от времени



$$\nu = 0.02, \quad \mu = 0.01, \quad \lambda = 0.03$$

$$M_r = -1, \quad M_z^R = -2$$

$$P(t) = G \left( \frac{1}{2} \frac{d\dot{\Phi}^2}{dt} + \frac{\nu \dot{\Phi}^2}{A(t)} \right)$$



Функция эволюции

Три корня  $\Rightarrow$  четыре эволюции  $\Rightarrow$



Анимация движения

Уравнения движения:

$$\begin{cases} A(t) \dot{p} + (C(t) - A(t))qr + C_r(t)q\sigma = -\nu p \\ A(t) \dot{q} - (C(t) - A(t))pr - C_r(t)p\sigma = -\nu q \\ C(t)\dot{r} + C_r(t)\dot{\sigma} = M_z^R - \lambda r - \mu(r + \sigma) \\ C_r(t)(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r + M_z^R - \mu(r + \sigma) \end{cases} \quad (16)$$

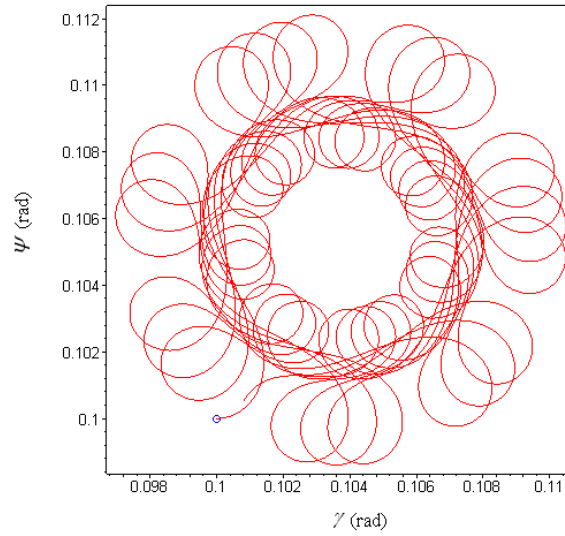
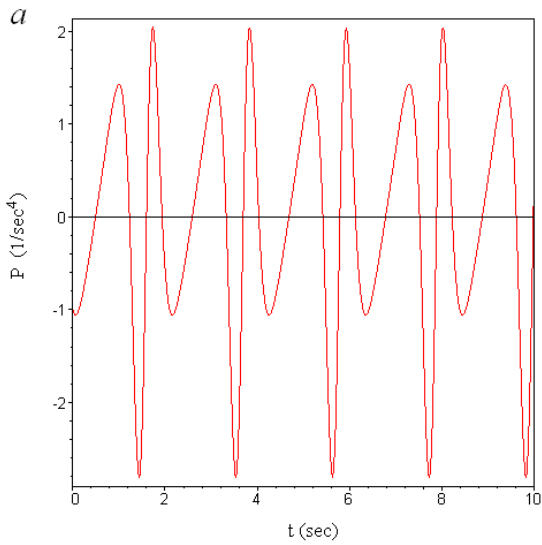
$$\dot{G} = \frac{-\nu G}{A(t)}, \quad \dot{F} = -\frac{1}{A(t)}(C_n r + C_r(t)\Omega - A(t)r) \quad (17)$$

Решения:

$$\begin{cases} G(t) = G_0 \exp[-\nu J_A(t)], \quad G_0 > 0, \\ r(t) = \left( r_0 + \frac{M_r}{\lambda} \right) \exp\left[ \frac{-\lambda t}{C_n} \right] - \frac{M_r}{\lambda}, \\ \Omega(t) = (r + \sigma) = \frac{1}{\mu} (M_r + M_z^R) - \\ - \frac{1}{\mu} (M_r + M_z^R - \mu \Omega_0) \exp[-\mu J_C(t)], \end{cases} \quad (18)$$

$$J_A(t) = \int_0^t \frac{1}{A(t)} dt, \quad J_C(t) = \int_0^t \frac{dt}{C_r(t)}$$



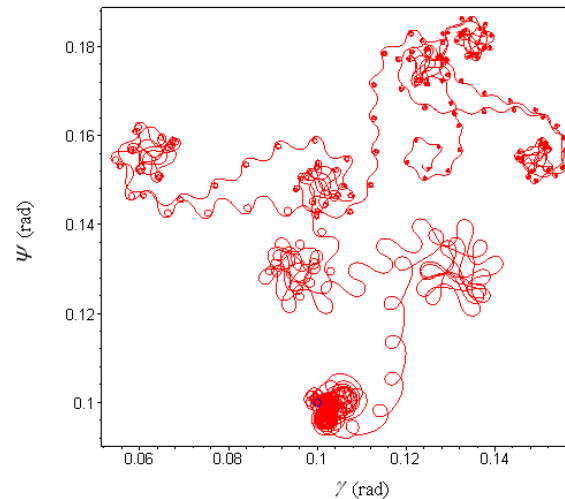
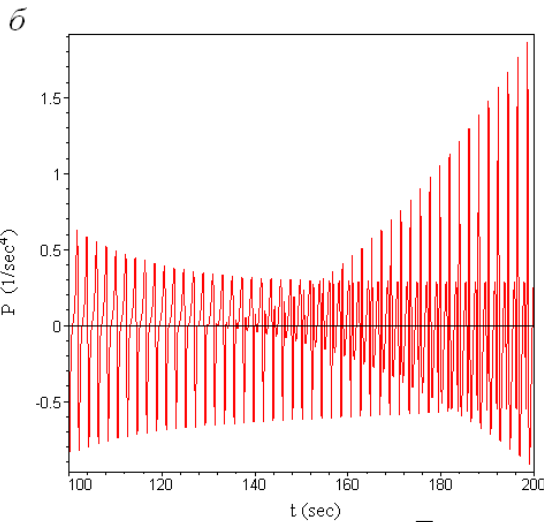


$$A(t) = a_1 \sin \chi t + a_0, \quad a_0 > a_1 > 0, \quad (19)$$

$$C_r(t) = c_1 \cos \chi t + c_0, \quad c_0 > c_1 > 0.$$

$$J_C(t) = a \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{(c_0 - c_1) \operatorname{tg}[\chi t/2]}{\sqrt{c_0^2 - c_1^2}} \right) + \pi s \right],$$

$$J_A(t) = c \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{a_0 \operatorname{tg}[\chi t/2] + a_1}{\sqrt{a_0^2 - a_1^2}} \right) + \pi s \right],$$



$$a = \frac{2}{\chi \sqrt{c_0^2 - c_1^2}}, \quad c = \frac{2}{\chi \sqrt{a_0^2 - a_1^2}},$$

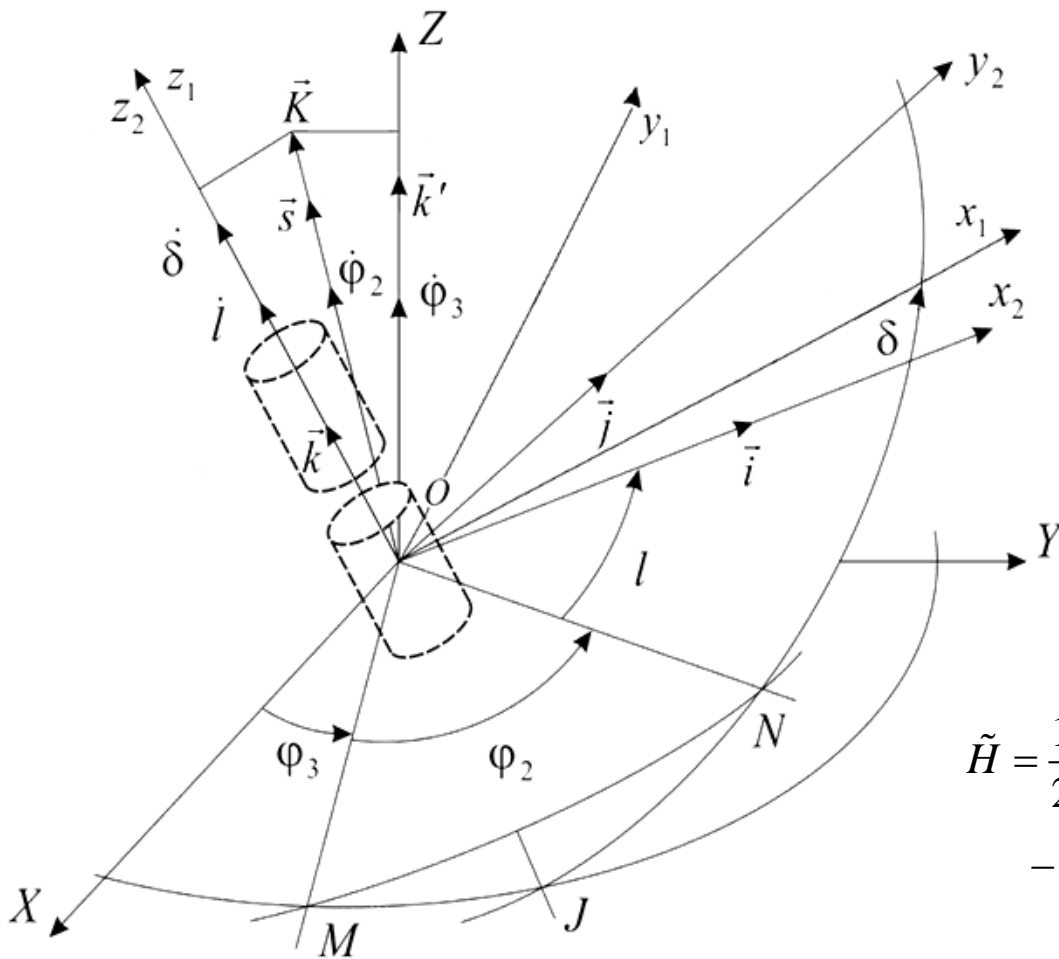
$$s = \left( \left( \frac{\chi t}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{div} \pi \right).$$

Случай а).  $M_r = M_z^R = 0$ ,

Случай б).  $M_r \neq M_z^R \neq 0$ .

$$P(t) = G(t) \left[ \frac{K_z^2(t)}{A^3(t)} (\nu - \dot{A}) + \frac{K_z(t)}{A^2(t)} \left( [\dot{C} - \mu] \Omega(t) + M_z^R - \lambda r(t) \right) \right], \quad K_z(t) = C_n r + C(t) \Omega. \quad (20)$$

\* - M. Inarrea, V. Lanchares, Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit // Int. J. Non-Linear Mech. 41 (2006)



$$\varepsilon = (A_1 - B_1)/A_1 > 0 \quad (21)$$

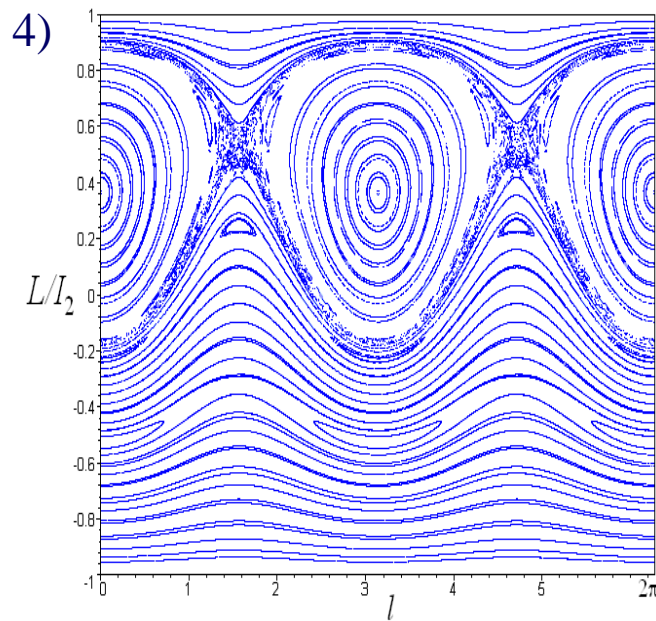
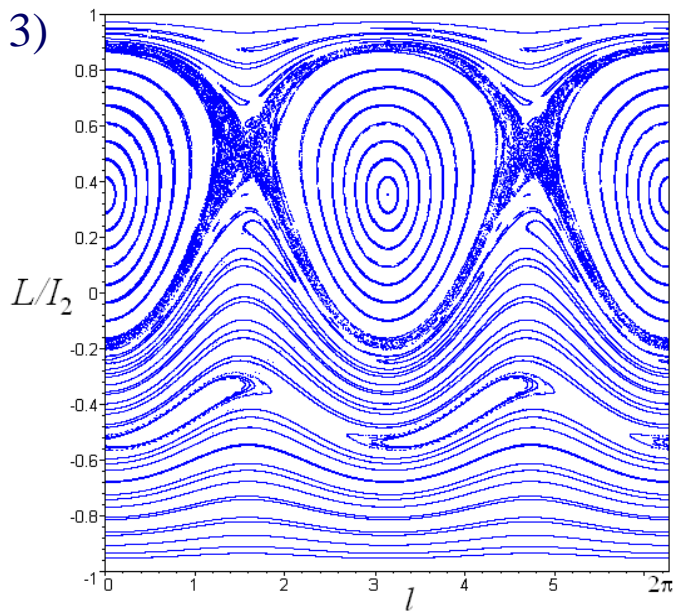
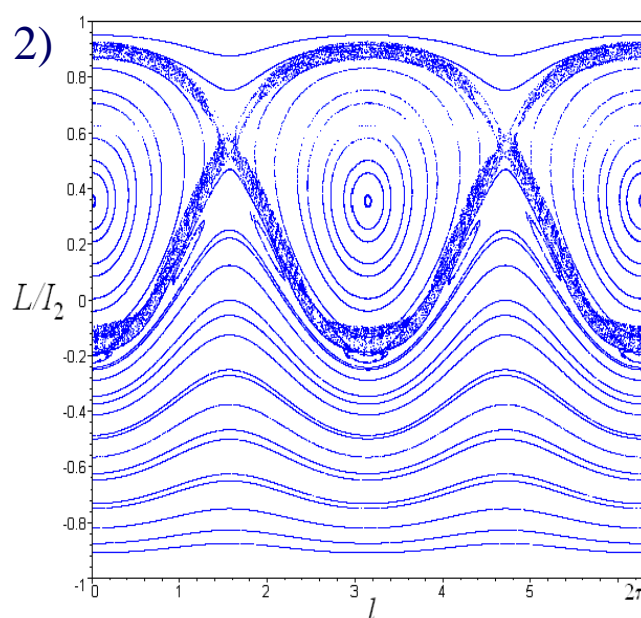
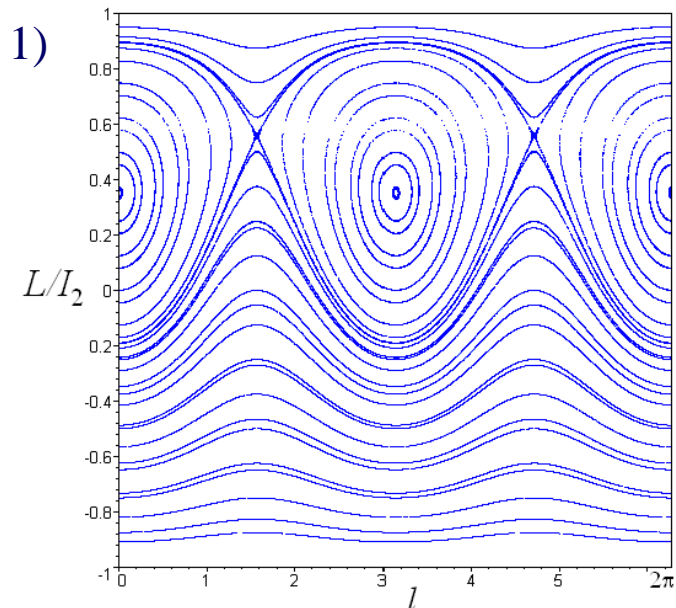
$$H = T = \bar{H}(l, L, I_2, \Delta) + \varepsilon \tilde{H}(l, \delta, L, I_2), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{H} = & \frac{1}{2} (I_2^2 - L^2) \left[ \frac{\sin^2 l}{A_1 + A_2} + \frac{\cos^2 l}{A_1 + B_2} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta^2}{C_1} + \frac{(L - \Delta)^2}{C_2} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \frac{1}{2} \frac{A_1^2 (I_2^2 - L^2)}{S^2} \left\{ \varepsilon D(\delta) [\cos \delta \sin l + \sin \delta \cos l]^2 - \right. \\ & \left. - [(A_1 + A_2) \cos l \cos \delta - (A_1 + B_2) \sin l \sin \delta]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$S = G - \varepsilon D(\delta), \quad G = (A_1 + B_2)(A_1 + A_2), \quad D(\delta) = A_1 (A_1 + B_2 \sin^2 \delta + A_2 \cos^2 \delta).$$

$$\tilde{H}^* = -\varepsilon \frac{A_1^2 (I_2^2 - L^2) [(A_1 + A_2) \cos l \cos \delta - (A_1 + B_2) \sin l \sin \delta]^2}{2(A_1 + B_2)^2 (A_1 + A_2)^2}. \quad (25)$$



1)  $\varepsilon = 0$

2)  $\varepsilon = 0.002$

3)  $\varepsilon \equiv 0$ ,  
гармонические моменты  
инерции

4)  $\varepsilon = 0$ ,  
при добавлении  
неконсервативного  
гармонического момента

Параметры:

$A_2=7.5; B_2=13.5; C_2=8;$   
 $A_1=5; C_1=4; \chi = 1;$   
 $\varphi_2(0)=1; \varphi_3(0)=1; \delta(0)=1;$   
 $I_2(0)=10; I_3(0)=1; \Delta(0)=2.$

Сечения Пуанкаре:

1, 2)  $(\delta \bmod 2\pi) = 0$

3, 4)  $(\chi t \bmod 2\pi) = 0$

$$A_1(t) = 5 + 0.1 \sin \chi t, \quad C_1(t) = 4 + 0.1 \cos \chi t$$

$$M_\Delta = 0.05 \sin \chi t$$

1. Дорошин А.В. Эволюции прецессионного движения неуравновешенных гироскопов переменного состава // Прикладная математика и механика. Т.72. Вып.3. 2008. С.385-398.
  2. Doroshin A.V. Synthesis Of Attitude Motion Of Variable Mass Coaxial Bodies // WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS and CONTROL, Issue 1, Volume 3, 2008. Pp. 50-61.
  3. Doroshin A.V. Analysis of attitude motion evolutions of variable mass gyrostats and coaxial rigid bodies system // International Journal of Non-Linear Mechanics 45 (2010) 193–205.
  4. Doroshin A.V. Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 16, Issue 8, August 2011, Pages 3188-3202.
  5. Doroshin A.V. Heteroclinic dynamics and attitude motion chaotization of coaxial bodies and dual-spin spacecraft.// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 17, Issue 3, March 2012, Pages 1460-1474.
  6. Асланов В.С., Дорошин А.В., Круглов Г.Е. Движение соосных тел переменного состава на активном участке спуска // Космические исследования. 2005. Т.43. №3. С.224-232.
- 

## *Исследования поддержаны:*

### **Российский фонд фундаментальных исследований (РФФИ):**

1. РФФИ, проект № 11-08-00794-а «Динамика и управление пространственным движением космических аппаратов и наноспутников с многороторными гироскопическими системами» (рук. Дорошин А.В., 2011-2013гг.);
2. РФФИ, проект № 06-08-00325-а «Динамические процессы, движение и управление составными космическими аппаратами переменной массы» (рук. Дорошин А.В., 2006-2007гг.);

### **Персональные Гранты Президента РФ - Программа Президента Российской Федерации по поддержке молодых российских ученых и ведущих научных школ РФ (рук. Дорошин А.В.):**

1. МК-1497.2010.8 «Исследование регулярной и хаотической динамики движения неуравновешенных спутников-гироскопов и многороторных мультиосных космических аппаратов с силовыми гироскопическими комплексами» (2010-2011);
2. МК-516.2008.8 «Динамические процессы, пространственное и траекторное движение соосных космических аппаратов с твердотопливными и жидкостными ракетными двигателями» (2008-2009);
3. МК-4707.2006.8 «Динамика движения соосных космических аппаратов и неуравновешенных спутников-гироскопов переменного состава» (2006-2007);
4. МК-2263.2004.8 «Стабилизация частичной закруткой спускаемого аппарата с двойным вращением» (2004-2005).