МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

О.А. КУЗНЕЦОВА, М.С. ТАТАРНИКОВА

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Самара
Издательство СГАУ
2012

УДК СГАУ: 33
ББК 65в6
К89

Рецензент д-р экон. наук, проф. М. И. Г е р а с ь к и н

Кузнецова О.А.

К89 **Эконометрическое моделирование:** учеб. пособие / *О.А. Кузнецова, М.С. Татарникова.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2012. – 44 с.

ISBN 978-5-7883-0892-0

Рассмотрены процесс создания модели, её оценка и анализ. Исследуются особенности моделирования парной и множественной регрессии, систем уравнений, особенности моделирования временных рядов и учёт факторов тренда и сезонности, а также модели формирования портфелей инвестиций.

Предназначено для студентов специальности 080116.65 «Математические методы в экономике», обучающихся по очной форме обучения. Выполнено на кафедре ММЭ.

УДК СГАУ: 33
ББК 65в6

ISBN 978-5-7883-0892-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит основные разделы курса «Эконометрическое моделирование» в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования, не рассмотренные в других курсах.

Эконометрическая модель является основным инструментом исследования и прогноза экономических и социальных явлений. Создание эконометрических моделей характеризуется рядом особенностей, рассмотренных в данной работе. Использование эконометрических моделей актуально как на уровне деятельности фирмы, так и в макроэкономике – на уровне планирования и анализа аспектов экономической деятельности региона и страны.

1. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Процедуру построения эконометрической модели можно разделить на несколько взаимосвязанных между собой этапов:

1. Анализ специфических свойств рассматриваемых явлений и процессов и обоснование класса моделей, наиболее подходящих для их описания (идентификация модели).

2. Выбор рационального состава включаемых в модель переменных и определение количественных характеристик, отражающих их уровни в прошлые периоды времени (на однородных объектах некоторой совокупности – территориях, предприятиях и т.п.).

3. Обоснование типа и формы модели, выражаемой математическим уравнением (системой уравнений), связывающим включенные в модель переменные.

4. Оценка параметров выбранного варианта модели на основании исходных данных, выражающих уровни показателей (переменных) в различные моменты времени, или на совокупности однородных объектов.

5. Проверка качества построенной модели и обоснование вывода о целесообразности ее использования в ходе дальнейшего эконометрического исследования.

При выводе о нецелесообразности использования построенной эконометрической модели в дальнейших исследованиях следует вернуться к первому (или какому-либо другому этапу) и попытаться построить более качественную модификацию модели (другой вариант модели).

Особенности обоснования формы модели

Часто выбрать форму модели возможно, построив график зависимости фактического результата от фактора.

Наиболее часто используемые виды функций:

1) линейная

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \ldots + \alpha_n x_{nt} + \varepsilon_t;$$

2) правая полулогарифмическая

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln x_{1t} + \ldots + \alpha_n \ln x_{nt} + \varepsilon_t;$$

3) степенная

$$y_t = \alpha_0 \cdot {x_{1t}}^{\alpha_1} \cdot {x_{2t}}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {x_{nt}}^{\alpha_{nt}} + \varepsilon_t;$$

4) гиперболическая

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 / x_{1t} + \ldots + \alpha_n / x_{nt} + \varepsilon_t;$$

5) логарифмическая гиперболическая

$$\ln y_t = \alpha_0 + \alpha_1 / x_{1t} + \ldots + \alpha_n / x_{nt} + \varepsilon_t;$$

6) обратная линейная (функция Торнквиста)

$$1/ y_t = \alpha_0 + \alpha_1 / x_{1t} + \ldots + \alpha_n / x_{nt} + \varepsilon_t.$$

На практике могут встретиться и комбинации рассмотренных выше зависимостей.

Методы отбора факторов

Проблема выбора «оптимальных» факторов обычно решается на основе содержательного и количественного (статистического) анализа тенденций рассматриваемых процессов.

На этапе содержательного анализа обычно решается проблема установления самого факта наличия взаимосвязей между явлениями. Каждое из явлений может быть выражено разными факторами и даже их комбинациями.

Факторы, выражающие одну и ту же причину, могут быть тесно взаимосвязаны между собой. Вследствие этого одновременное включение таких факторов в модель нецелесообразно, поскольку таким образом одна и та же причина будет учтена дважды.

Часто возникает проблема выбора наиболее предпочтительного состава независимых факторов среди ряда альтернативных вариантов.

Существует два основных подхода к решению этой проблемы:

- *априорное* (до построения модели) исследование характера и силы взаимосвязей между рассматриваемыми переменными, по результатам которого в модель включаются факторы, наиболее значимые по своему «непосредственному» влиянию на зависимую переменную $\underline{y}$.

Для оценки силы влияния используется парный линейный коэффициент корреляции.

Сильная взаимосвязь между независимыми переменными определяется с помощью их парного коэффициента корреляции.

Возможно явление ложной корреляции, которое характеризуется достаточно высокими по абсолютной величине значениями коэффициентов парной корреляции у процессов, с содержательной точки зрения между собой никак не связанными.

Избежать этого поможет качественный анализ проблемы, направленный на обоснование адекватного ей содержания и формы модели. При построении модели необходимо учитывать:

1. Число факторов, включаемых в модель, не должно быть слишком велико. Их увеличение может свести к минимуму ее практическую ценность, так как в этом случае модель начинает отражать не закономерность развития на фоне случайности, а саму случайность.

2. Простота модели в значительной степени гарантирует ее адекватность, поскольку более сложные зависимости часто априорно трудноуловимы на ограниченном временном интервале, но в то же время они допускают аппроксимацию достаточно простыми функциями. Иными словами, сложная модель может в большей степени выражать второстепенные взаимосвязи между переменными в ущерб основным.

Апостериорное исследование предполагает первоначально включить в модель все отобранные на этапе содержательного анализа факторы. Уточнение их состава в этом случае производится на основе анализа характеристик качества построенной модели, одной из групп которых являются и показатели, выражающие силу влияния каждого из факторов на зависимую переменную y_t.

При апостериорном подходе уточнение состава факторов эконометрической модели осуществляется на основе анализа значений ряда качественных характеристик уже построенного ее варианта. Наиболее важным показателем при отборе факторов являются значения критерия Стьюдента, рассчитываемые для коэффициентов при каждом из факторов модели. С помощью этого критерия проверяется гипотеза о значимости влияния фактора на зависимую переменную y.

Окончательное решение о целесообразности оставления фактора или его удаления из модели принимается на основе анализа всего комплекса её характеристик качества с учётом содержательной стороны проблемы взаимосвязей между зависимой и независимыми переменными.

2. ПАРНАЯ РЕГРЕССИЯ

Парная регрессия - уравнение связи двух переменных y и x:

$y = f(x)$,

y – зависимая переменная (результативный признак);

x – независимая, объясняющая переменная (признак-фактор).

Различают линейные и нелинейные регрессии.

Линейная регрессия: $y = a + b \bullet x + \varepsilon$.

Нелинейные регрессии делятся на два класса: регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, и регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Регрессии, нелинейные по объясняющим переменным:

• полиномы разных степеней

$y = a + b_1 \bullet x + b_2 \bullet x^2 + b_3 \bullet x^3 + \varepsilon$;

• равносторонняя гипербола

$y = a + \dfrac{b}{x} + \varepsilon$.

Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам:

- степенная $y = a \cdot x^b + \varepsilon$;
- показательная $y = a \cdot b^x + \varepsilon$;
- экспоненциальная $y = e^{a+b\cdot x} + \varepsilon$.

Построение уравнения регрессии сводится к оценке ее параметров. Для оценки параметров регрессий, линейных по параметрам, используют *метод наименьших квадратов (МНК)*. МНК позволяет получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака y от теоретических y_x минимальна, т.е.

$$\sum (y - \hat{y}_x)^2 \to \min ,$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x},$$

$$b = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} .$$

Параметр b называется коэффициентом регрессии. Его величина показывает среднее изменение результата с изменением фактора на одну единицу.

Знак при коэффициенте регрессии b показывает направление связи: при $b>0$ — связь прямая, а при $b< 0$ — связь обратная.

Параметр a формально показывает значение y при $x = 0$. Если признак-фактор x не имеет и не может иметь нулевого значения, то трактовка свободного члена a не имеет смысла. Параметр a может не иметь экономического содержания.

Качество построенной модели определяется с помощью ряда коэффициентов.

Линейный коэффициент парной корреляции r_{xy} оценивает тесноту связи изучаемых явлений. Для линейной регрессии ($-1 < r_{xy} < 1$):

$$r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Если значение $|r_{yxi}|$ достаточно велико, т.е. $|r_{yxi}| > 0{,}5\text{-}0{,}6$, то можно говорить о наличии существенной линейной связи между переменными y и x_i или о достаточно сильном влиянии x_i на y. Чем больше абсолютное значение r_{yxi}, тем сильнее это влияние (положительное или отрицательное, в зависимости от знака *r)*.

Значение r_{yxi}. должно рассчитываться с учетом формы преобразования y и x_i в модели. Например, если y ~1/ x_i, то и коэффициент корреляции определяется между y и u_i = 1/x, и т.п.

Корреляция – это степень зависимости между двумя случайными величинами X и Y. Для исследования подобных зависимостей пользуются конечным (выборочным) набором пар значений.

Парный коэффициент корреляции

$$r_{x_i x_j} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j)/(T-1)}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}}.$$

На практике взаимосвязь между факторами признается существенной, $|r_{yxi}| >$ 0,8-0,9. В таких ситуациях один из этих факторов целесообразно исключить из модели, чтобы одна и та же причина не учитывалась дважды. Однако такое исключение следует проводить в тех случаях, когда факторы выражают одно и то же явление.

В нелинейной регрессии используется *индекс корреляции* ($0 <$ $pxy < 1$):

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_{xi})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}}\ .$$

Для оценки качества модели используют *коэффициент детерминации*, он показывает долю дисперсии, которая обусловлена регрессией, в общей дисперсии показателя y:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_{xi} - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}\ .$$

Коэффициент детерминации, как и коэффициент корреляции, *принимает значения* от -1 до +1. Чем ближе его значение коэффициента по модулю к 1, тем теснее связь результативного признака Y с исследуемыми факторами X.

Средняя ошибка аппроксимации – среднее отклонение расчетных значений от фактических:

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y-\hat{y}}{y}\right|\cdot 100\,\%.$$

Допустимый предел значений A – не более8-10%.

Средний коэффициент эластичности Э показывает, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат y от своей средней величины при изменении фактора x на 1% от своего среднего значения:

$$\overline{Э} = f'(x)\frac{\overline{x}}{\overline{y}}.$$

Задача *дисперсионного анализа* состоит в анализе дисперсии зависимой переменной:

$$\sum(y-\bar{y})^2 = \sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2 + \sum(y-\hat{y}_x)^2;$$

$\sum(y-\bar{y})^2$ – общая сумма квадратов отклонений;

$\sum(y-\hat{\bar{y}}_x)^2$ – сумма квадратов отклонений, обусловленная регрессией («объясненная» или «факторная»);

$\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2$ – остаточная сумма квадратов отклонений.

F тест – оценивание качества уравнения регрессии - состоит в проверке гипотезы H_o о статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи. Для этого выполняется сравнение фактического $F_{факт}$ и критического (табличного) $F_{табл}$ значений F – *критерия Фишера*. $F_{факт}$ определяется из соотношения значений факторной и остаточной дисперсий, рассчитанных на одну степень свободы:

$$F_{факт} = \frac{\sum(\hat{y} - \overline{y})^2}{m} \cdot \frac{(n-m-1)}{\sum(y-\hat{y})^2} = \frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}(n-2),$$

где n – число единиц совокупности;

m – число параметров при переменных x.

$F_{табл.}$ – это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости α. Уровень значимости α - вероятность отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна. Обычно α принимается ровной 0,05 или 0,0 1 .

Если $F_{табл} < F_{факт}$, то H_0 - гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность. Если $F_{табл} > F_{факт}$ то гипотеза H_0 не отклоняется и признается статистическая незначимость, ненадежность уравнения регрессии.

Для оценки статистической значимости коэффициентов регрессии и корреляции рассчитываются *t-критерий Стьюдента* и *доверительные интервалы* каждого из показателей. Выдвигается гипотеза H_0 о случайной природе показателей, т.е. о незначимом их отличии от нуля. Оценка значимости коэффициентов регрессии и корреляции с помощью t-критерия Стьюдента проводится путем сопоставления их значений с величиной случайной ошибки:

$$t_a = \frac{a}{m_a};\ t_b = \frac{b}{m_b};\ t_r = \frac{r}{m_r}.$$

Случайные ошибки параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции определяются по формулам:

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y}_x)^2/(n-2)}{\sum(x-\bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{S^2_{ост}}{\sum(x-\bar{x})^2}} = \frac{S_{ост}}{\sigma_x\sqrt{n}};$$

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y}_x)^2}{(n-2)} \cdot \frac{\sum x^2}{n\sum(x-\bar{x})^2}} = \sqrt{S^2_{ост}\frac{\sum x^2}{n^2\sigma^2_x}} = S_{ост}\frac{\sqrt{\sum x^2}}{n\sigma_x};$$

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2_{xy}}{n-2}}.$$

Сравнивая фактическое и критическое (табличное) значения t-статистики - $t_{табл}$ и $t_{факт}$ - принимаем или отвергаем гипотезу H_0.

Если $t_{табл} < t_{факт}$., то H_o отклоняется, т.е. a, b и r_{xy} не случайно отличаются от нуля и сформировались под влиянием систематически действующего фактора x. Если $t_{табл} > t_{факт}$, то гипотеза H_0 не отклоняется и признается случайная природа формирования a, b или r_{xy}.

Для расчета доверительного интервала определяем *предельную ошибку* Δ для каждого показателя:

$$\Delta_a = t_{табл} m_a, \quad \Delta_b = t_{табл} m_b.$$

Формулы для расчета *доверительных интервалов* имеют следующий вид:

$$a - \Delta_a \le a \ge a + \Delta_a,$$

$$b - \Delta_b \le b \ge b + \Delta_b.$$

Если в границы доверительного интервала попадает ноль, т.е. нижняя граница отрицательна, а верхняя положительна, то оцениваемый_параметр принимается нулевым, так как он не может одновременно принимать и положительное, и отрицательное значения. *Прогнозное значение* y_p определяется путем подстановки в уравнение регрессии $y_x = a + bx$ соответствующего (прогнозного) значения x_p. Вычисляется *средняя стандартная ошибка прогноза* $m_{\hat{y}_p}$.

$$m_{\hat{y}_p} = \sigma_{ост} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \overline{x})^2}{\sum (x - \overline{x})^2}},$$

строится *доверительный интервал прогноза*

$$y_p - \Delta_{y_p} \le y_p \ge y_p + \Delta_{y_p}.$$

3. МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

Множественная регрессия - уравнение связи с несколькими независимыми переменными:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p),$$

где y – зависимая переменная (результативный признак);

$x_1, x_2, \dots, x_p$ – независимые переменные (факторы).

Множественная регрессия широко используется в решении проблем спроса, доходности акций, при изучении функции издержек производства, в макроэкономических расчётах.

Основная цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное воздействие их на моделируемый показатель.

Прежде всего, так же как и в парной регрессии, необходимо отобрать необходимые факторы. Они должны отвечать следующим требованиям:

1) быть количественно измеримыми (качественным факторам придают количественную определённость, например, проставляя баллы);

2) не должны быть коррелированными между собой и тем более находиться в точной функциональной связи.

Отбор факторов обычно проводится в две стадии: на первой отбираются факторы исходя из сути проблемы; на второй – на основе матрицы показателей корреляции и определения t-статистики для параметров регрессии.

Коэффициенты интеркорреляции (т.е. корреляции между объясняющими переменными) позволяют исключать из модели дублирующие факторы. Считается, что две переменные явно *коллинеарны*, т.е. находятся между собой в линейной зависимости, если $r_{x_i x_j} \geq 0,7$.

Наибольшие трудности возникают при наличии *мультиколлинеарности* факторов, когда более чем два фактора связаны между собой линейной зависимостью, т.е. имеет место совокупное воздействие факторов друг на друга.

Для построения уравнения множественной регрессии чаще используются следующие функции:

1) линейная

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \ldots + \alpha_n x_{nt} + \varepsilon_t;$$

2) степенная

$$y_t = \alpha_0 \cdot x_{1t}^{\alpha_1} \cdot x_{2t}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_{nt}^{\alpha_{nt}} + \varepsilon_t;$$

3) гиперболическая, используется при обратных связях признаков:

$$y_t = 1/(\alpha \ \ + b_1 x_{1t} + \ldots + b_n x_{nt} + \varepsilon_t).$$

Можно использовать и другие функции, приводимые к линейному виду.

Для оценки параметров уравнения множественной регрессии применяют *метод наименьших квадратов* (МНК). Для линейных и нелинейных уравнений, приводимых к линейным, строится система нормальных уравнений, решение которых позволяет получить оценки параметров регрессии.

Ввиду четкой интерпретации параметров наиболее часто используются линейная и степенная функции. В линейной множественной регрессии $y_x = a + b_1 \bullet x_1 + b_2 \bullet x_2 + ... + b_p$ параметры при x называются *коэффициентами «чистой» регрессии.* Они характеризуют среднее изменение результата с изменением соответствующего фактора на единицу при неизмененном значении других факторов, закрепленных на среднем уровне.

Свободный член уравнения множественной линейной регрессии (параметр a) вбирает в себя информацию о прочих не учитываемых в модели факторах. Его величина экономической интерпретации не имеет. Формально его значение предполагает то значение y, когда все x=0, что практически не бывает.

П р и м е р. Предположим, что зависимость расходов на продукты питания по совокупности семей характеризуется следующим уравнением:

$$y_x = 0{,}5 + 0{,}35\ x_1 + 0{,}73\ x_2,$$

где y – расходы семьи за месяц на продукты питания, тыс. руб.; x_1 – месячный доход на одного члена семьи, тыс. руб.; x_2 – размер семьи, человек.

Анализ данного уравнения позволяет сделать выводы — с ростом дохода на одного члена семьи на 1 тыс. руб. расходы на питание возрастут в среднем на 350 руб. при том же среднем размере семьи. Иными словами, 35 % дополнительных семейных доходов тратится на питание. Увеличение размера семьи при тех же доходах предполагает дополнительный рост расходов на питание на 730 руб. Параметр a не имеет экономической интерпретации.

В степенной функции коэффициенты bj являются коэффициентами эластичности. Они показывают, на сколько процентов в среднем изменяется результат с изменением соответствующего фактора на 1% при неизменности действия других факторов. Этот вид уравнения регрессии получил наибольшее распространение в производственных функциях, в исследованиях спроса и потребления.

Предположим, что при исследовании спроса на мясо получено уравнение

$$\hat{y}_x = 0{,}82 \cdot x_1^{-2{,}63} \cdot x_2^{1{,}11},$$

где y – количество спрашиваемого мяса;

x_1 – цена;

x_2 – доход.

Следовательно, рост цен на 1 % при том же доходе вызывал снижение спроса в среднем на 2,63 %. Увеличение дохода на 1% обусловливает при неизменных ценах рост спроса на 1,11 %.

Производственная функция имеет вид

$$P = a \cdot F_1^{b_1} \cdot F_2^{b_2} \ldots \cdot F_m^{b_m} \cdot \varepsilon,$$

где P – количество продукта, изготавливаемого с помощью m производственных факторов $(F_1, F_2 \ldots F_m)$,

b – параметр, являющийся эластичностью количества продукции по отношению к количеству соответствующих производственных факторов.

Экономический смысл имеют не только коэффициенты каждого фактора, но и их сумма, т. е. сумма эластичности: $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_m$. Эта величина фиксирует обобщенную характеристику эластичности производства.

Средние коэффициенты эластичности для линейной регрессии рассчитываются по формуле

$$\overline{Э}_{yx_j} = b_j \frac{\overline{x}_j}{\overline{y}}.$$

Для расчета *частных коэффициентов эластичности* применяется следующая формула:

$$Э_{yx_j} = b_j \frac{x_j}{\overline{y}_{x_i \cdot x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p}}.$$

Тесноту совместного влияния факторов на результат оценивает *индекс множественной корреляции:*

$$R_{yx_1x_2,\ldots,x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_y^2}}.$$

Значение индекса множественной корреляции лежит в пределах от 0 до 1 и должно быть больше или равно максимальному парному индексу корреляции:

$$R_{yx_1x_2,\ldots,x_p} \geq R_{yx_i(\max)} \quad (i = \overline{1,p}).$$

Индекс множественной корреляции для уравнения в стандартизованном масштабе можно записать в виде

$$R_{yx_1x_2,\ldots,x_p} = \sqrt{\sum \beta_i r_{yx_i}}.$$

При линейной зависимости *коэффициент множественной корреляции* можно определить через матрицу парных коэффициентов корреляции:

$$R_{yx_1x_2,\ldots,x_p} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}}.$$

Частные коэффициенты (или индексы) корреляции, измеряющие влияние на y фактора x_1 при неизменном уровне других факторов, можно определить по формуле

$$r_{yx_1x_2,\ldots x_p} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{yx_1x_2\ldots x_i\ldots x_p}}{1 - R^2_{yx_1x_2\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_p}}}.$$

Частные коэффициенты корреляции изменяются в пределах от -1 до 1.

Качество построенной модели в целом оценивает коэффициент (индекс) детерминации. Коэффициент множественной детерминации рассчитывается как квадрат индекса множественной корреляции.

Скорректированный индекс множественной детерминации держит поправку на число степеней свободы в формуле

$$R^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{(n-1)}{(n-m-1)},$$

где n – число наблюдений;

m – число факторов.

Значимость уравнения множественной регрессии в целом оценивается с помощью F-критерия Фишера:

$$F = \frac{r^2}{1 - r^2} \cdot (n-2).$$

Частный F-критерий оценивает статистическую значимость присутствия каждого из факторов в уравнении. В общем виде для фактора x_i, частный F-критерий определится как

$$F_{x_i} = \frac{R^2_{yx_1\ldots x_i\ldots x_p} - R^2_{yx_1\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_p}}{1 - R^2_{yx_1\ldots x_i\ldots x_p}} \cdot \frac{n-m-1}{1}.$$

При построении уравнения множественной регрессии может возникнуть проблема мультиколлинеарности факторов, их тесной линейной связанности.

Считается, что две переменные явно коллинеарны, т.е. находятся между собой в линейной зависимости, если $r_{xixj} \geq 0{,}7$.

По величине парных коэффициентов корреляции обнаруживается лишь явная коллинеарность факторов. Наибольшие трудности в использовании аппарата множественной регрессии возникают при наличии *мультиколлинеарности* факторов.

Мультиколлинеарность – это линейная зависимость между более чем двумя факторами.

Чем сильнее мультиколлинеарность факторов, тем менее надежна оценка распределения суммы объясненной вариации по отдельным факторам с помощью метода наименьших квадратов.

Для оценки мультиколлинеарности факторов может использоваться *определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами.*

Если бы факторы не коррелировали между собой, то матрица парных коэффициентов корреляции между факторами была бы единичной матрицей, поскольку все недиагональные элементы r_{xixj} $(x_i \neq x_j)$ были бы равны нулю.

Если же, наоборот, между факторами существует полная линейная зависимость и все коэффициенты корреляции равны 1, то определитель такой матрицы равен 0.

Чем ближе к 0 определитель матрицы межфакторной корреляции, тем сильнее мультиколлинеарность факторов и ненадежнее результаты множественной регрессии. И наоборот, чем ближе к 1 определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов.

Для применения МНК требуется, чтобы дисперсия остатков была *гомоскедастичной.* Это значит, что для каждого значения фактора x_i остатки ε_i, имеют одинаковую дисперсию. Если это условие не соблюдается, то имеет место *гетероскедастичностъ.*

Уравнения множественной регрессии могут включать в качестве независимых переменных качественные признаки (например, профессия, пол, образование, климатические условия, отдельные регионы и т.д.). Чтобы ввести такие переменные в регрессионную модель, их необходимо упорядочить и присвоить им те или иные значения, т.е. качественные переменные преобразовать в количественные.

Такого вида сконструированные переменные принято в эконометрике называть *фиктивными переменными.* Например, включать в модель фактор «пол» в виде фиктивной переменной можно в следующем виде:

$$Z=\begin{cases} 1 - \text{мужской пол} \\ 0 - \text{женский пол.} \end{cases}$$

Коэффициент регрессии при фиктивной переменной интерпретируется как среднее изменение зависимой переменной при переходе от одной категории (женский пол) к другой (мужской пол) при неизменных значениях остальных параметров. На основе t -критерия Стьюдента делается вывод о значимости влияния фиктивной переменной, существенности расхождения между категориями.

4.СИСТЕМА ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Сложные экономические процессы описывают с помощью *системы взаимосвязанных (одновременных) уравнений.*

Различают несколько видов систем уравнений:

• *система независимых уравнений* - когда каждая зависимая переменная y рассматривается как функция одного и того же набора факторов x, для решения этой системы и нахождения ее параметров используется метод наименьших квадратов;

• *система рекурсивных уравнений* - когда зависимая переменная y одного уравнения выступает в виде фактора x в другом уравнении;

• *система взаимосвязанных (совместных) уравнений* - когда одни и те же зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую часть, а в других - в правую, такая система уравнений называется *структурной формой модели.*

Эндогенные переменные - взаимозависимые переменные, которые определяются внутри модели (системы) y.

Экзогенные переменные - независимые переменные, которые определяются вне системы x.

Предопределенные переменные - экзогенные и лаговые (за предыдущие моменты времени) эндогенные переменные системы.

Коэффициенты a и b при переменных - *структурные коэффициенты модели.*

Система линейных функций эндогенных переменных от всех предопределенных переменных системы - *приведенная форма модели.*

Необходимое условие идентификации - выполнение счетного правила:

$D + 1 = H$ - уравнение идентифицируемо;

О + 1 < *Я* - уравнение неидентифицируемо;

О + 1 > *Я* - уравнение сверхидентифицируемо,

где *Я* – число эндогенных переменных в уравнении,

О – число предопределенных переменных, отсутствующих в уравнении, но присутствующих в системе.

Достаточное условие идентификации - определитель матрицы, составленной из коэффициентов при переменных, отсутствующих в исследуемом уравнении, не равен нулю, и ранг этой матрицы не менее числа эндогенных переменных системы без единицы.

Для решения идентифицируемого уравнения применяется *косвенный метод наименьших квадратов,* для решения сверхидентифицированных - *двухшаговый метод наименьших квадратов.*

Косвенный МНК состоит в следующем:

- составляют приведенную форму модели и определяют численные значения параметров каждого ее уравнения обычным МНК;
- путем алгебраических преобразований переходят от приведенной формы к уравнениям структурной формы модели, получая тем самым численные оценки структурных параметров.

Двухшаговый МНК заключается в следующем:

- составляют приведенную форму модели и определяют численные значения параметров каждого ее уравнения обычным МНК;
- выявляют эндогенные переменные, находящиеся в правой части структурного уравнения, параметры которого определяют двухшаговым МНК, и находят расчетные значения по соответствующим уравнениям приведенной формы модели;
- обычным МНК определяют параметры структурного уравнения, используя в качестве исходных данных фактические значения предопределенных переменных и расчетные значения эндогенных переменных, стоящих в правой части данного структурного уравнения.

5. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ В ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИСЛЕДОВАНИЯХ

Модели, построенные по данным, характеризующим один объект за ряд последовательных моментов (периодов), называются *моделями временных рядов.*

Временной ряд – это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов или периодов.

Каждый уровень временного ряда формируется из *трендовой (T), циклической* (*S*) и *случайной (E)* компонент.

Модели, в которых временной ряд представлен как сумма перечисленных компонент, – *аддитивные модели,* как произведение – *мультипликативные модели временного ряда.*

Аддитивная модель имеет вид: $У = T+S+E$.

Мультипликативная модель имеет вид: $У=T\ S\ E$.

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчету значений *T,S и E* для каждого уровня ряда.

Построение модели включает следующие шаги:

1) выравнивание исходного ряда методом скользящей средней;

2) расчет значений сезонной компоненты S;

3) устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных в аддитивной $(T + E)$ или в мультипликативной $(T \bullet E)$ модели;

4) аналитическое выравнивание уровней $(T + E)$ или $(T \bullet E)$ и расчет значений Т с использованием полученного уравнения тренда;

5) расчет полученных по модели значений $(T + S)$ или $(T \bullet S)$;

6) расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

Автокорреляция уровней ряда – это корреляционная зависимость между последовательными уровнями временного ряда.

Последовательность коэффициентов автокорреляции уровней первого, второго и т.д. порядков называют *автокорреляционной функцией временного ряда,* а график зависимости ее значений от величины лага (порядка коэффициента автокорреляции) – *коррелограммой.*

Построение аналитической функции для моделирования тенденции (тренда) временного ряда называют *аналитическим выравниванием временного ряда.* Для этого чаще всего применяются следующие функции:

- линейная $y_{\{} = a + b \bullet t;$
- гипербола $y, = a + b/t;$
- экспонента $y, = e^{a+bt};$
- степенная функция $y_г = a\text{-}t^b$;
- парабола второго и более высоких порядков

$y, = a + b_1\, t{+}b_2\text{-}t^2{+}... + b_k\text{-}t^k.$

Параметры трендов определяются обычным МНК, в качестве независимой переменной выступает время $t = 1,2, ..., n$, а в качестве зависимой переменной – фактические уровни временного ряда y_t. Критерием отбора наилучшей формы тренда является наибольшее значение скорректированного коэффициента детерминации R^2.

При построении моделей регрессии по временным рядам для устранения тенденции используются следующие методы.

Метод отклонений от тренда предполагает вычисление трендовых значений для каждого временного ряда модели, например

y_t и x_t, и расчет отклонений от трендов: $y_t - \hat{y}_t$ и $x_t - \hat{x}_t$. Для дальнейшего анализа используют не исходные данные, а отклонения от тренда.

Метод последовательных разностей заключается в следующем: если ряд содержит линейный тренд, тогда исходные данные заменяются первыми разностями:

$$\Delta_t = y_t - y_{t-1} = b + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}),$$

если параболический тренд - вторыми разностями:

$$\Delta^2{}_t = \Delta y_t - \Delta_{t-1} = 2b_2 + (\varepsilon_t - 2 \cdot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}).$$

В случае экспоненциального и степенного тренда метод последовательных разностей применяется к логарифмам исходных данных.

Модель, включающая фактор времени, имеет вид

$y_t = a + b_1 x_t + b_2 t + \varepsilon_t$.

Параметры *a* и *b* этой модели определяются обычным МНК.

Автокорреляция в остатках - корреляционная зависимость между значениями остатков ε_t за текущий и предыдущие моменты времени.

Для определения автокорреляции остатков используют *критерий Дарбина - Уотсона* и расчет величины:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}, \quad 0 \le d \le 4$$

Эконометрические модели, содержащие не только текущие, но и лаговые значения факторных переменных, называются *моделями с распределенным лагом.*

Модель с распределенным лагом в предположении, что максимальная величина лага конечна, имеет вид

$$y = a + b_0x_t+b_1x_{t-1}+\ldots + b_px_{t-p}+\varepsilon_t.$$

Коэффициент регрессии b_0 при переменной x_t характеризует среднее абсолютное изменение y_t при изменении x_t на 1 ед. своего измерения в некоторый фиксированный момент времени t, без учета воздействия лаговых значений фактора x. Этот коэффициент называют *краткосрочным мультипликатором.*

В момент $(t+1)$ воздействие факторной переменной x_t на результат y_t составит $(b_0 + b_1)$ условных единиц; в момент времени $(t+2)$ воздействие можно охарактеризовать суммой $(b_0 + b_1 + b_2)$ и т.д. Эти суммы называют *промежуточными мультипликаторами.* Для максимального лага $(t+l)$ воздействие фактора на результат описывается суммой $(b_o + b_1 + \ldots + b_l = b)$, которая называется *долгосрочным мультипликатором.*

Величина *среднего лага* модели множественной регрессии определяется по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{l} = \sum_{j=1}^{1} j \cdot \beta_j$$

и представляет собой средний период, в течение которого будет происходить изменение результата под воздействием изменения фактора в момент t.

Медианный лаг – это период, в течение которого с момента времени t будет реализована половина общего воздействия фактора на результат:

$$\sum_{j=0}^{l_{Me}-1} \beta_j \approx 0{,}5,$$

где l_{Me} - медианный лаг.

Оценку параметров моделей с распределенными лагами можно проводить согласно одному из двух методов: методу Койка или методу Алмон.

В *распределении Койка* делается предположение, что коэффициенты при лаговых значениях объясняющей переменной убывают в геометрической прогрессии:

$$b_l = b_0 \cdot \lambda^l, \qquad l=0,1,2,\dots \; 0< \lambda <1.$$

Модель Койка – модель двухфакторной линейной авторегрессии.

$$y_t = a \cdot (1-\lambda) + b_0 \cdot x_t + (1-\lambda) \cdot y_{t-1} + u_t,$$

где $u_t = \varepsilon_t - \lambda \cdot \varepsilon_{t-1}$.

В *методе Алмон* предполагается, что веса текущих и лаговых значений объясняющих переменных подчиняются полиномиальному распределению:

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \dots + a_m i^m.$$

Уравнение регрессии примет вид

$$Y_i = a + a_0 Z_{t0} + a_1 Z_{t1} + a_2 Z_{t2} + \varepsilon,$$

где $Z_{t0} = \sum_{i=0}^{k} X_{t-1}$, $Z_{t1} = \sum_{i=0}^{k} i \cdot X_{t-1}$, $Z_{t2} = \sum_{i=0}^{k} i^2 \cdot X_{t-1}$.

Расчет параметров модели с распределенным лагом в методе Алмон проводится по следующей схеме:

1) устанавливается максимальная величина лага l;

2) определяется степень полинома k, описывающего структуру лага;

3) рассчитываются значения переменных $z_0, \dots, z_k$;

4) определяются параметры уравнения линейной регрессии $Y_i = a + a_0 Z_{t0} + a_1 Z_{t1} + a_2 Z_{t2} + \varepsilon$;

5) рассчитываются параметры исходной модели с распределенным лагом.

Модели, содержащие в качестве факторов лаговые значения зависимой переменной, называются *моделями авторегрессии,* например:

$y_t = a + b_0 x_1 + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$.

Краткосрочный мультипликатор b_0 в этой модели характеризует краткосрочное изменение y, под воздействием изменения x, на 1 ед.

Промежуточные мультипликаторы – совокупное воздействие факторной переменной x_t на результат y_t: в момент времени t+1 это сумма (b_0+b_1), в момент времени t+2 это сумма (b_0+b_1+b_2).

Долгосрочный мультипликатор b показывает абсолютное изменение в долгосрочном периоде $t+l$ результата y под влиянием изменения на 1 ед. фактора x, он рассчитывается как сумма краткосрочного и промежуточных мультипликаторов.

Такая интерпретация коэффициентов модели авторегрессии и расчет долгосрочного мультипликатора основаны на предпосылке о наличии бесконечного лага в воздействии текущего значения зависимой переменной на ее будущие значения.

6. ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ ПО МОДЕЛИ МАРКОВИЦА

Формирование инвестиционного портфеля основано на выборе ценных бумаг, включаемых в портфель.

Существует целый ряд общепризнанных моделей, позволяющих оценить основные характеристики (доходность и риск) будущего портфеля. Среди них можно выделить: модель Марковица; ценовая модель рынка капитала (CAPM); модель теории арбитражного ценообразования (APT); модель Тобина и др.

Г. Марковиц предложил решение проблемы оптимального распределения долей капитала между ценными бумагами, сводящего общий риск к минимальному уровню, и составление оптимального портфеля. Модель имеет ряд допущений и может быть реализована только при определённых условиях:

- инвестирование рассматривается как однопериодовый процесс, т.е. полученный в результате инвестирования доход не реинвестируется;

- рынок ценных бумаг является эффективным. Под эффективным рынком понимается такой рынок, на котором вся имеющаяся информация трансформируется в изменение котировок ценых бумаг; это рынок, который практически мгновенно реагирует на появление новой информации.

Марковиц полагал, что значения доходности ценных бумаг являются случайными величинами, распределёнными по нормальному (Гауссовскому) закону. В этой связи Марковиц считал, что инвестор, формируя свой портфель, оцнеивает лишь два показателя: E(*r*) – ожидаемую доходность и σ – стандартное отклонение как меру риска. Следовательно инвестор должен оценить доходность и стандартное отклонение каждого портфеля и выбрать наилучший портфель, который больше всего удовлетворяет его желания – обеспечивает максимальную доходность *r* при допустимом значении риска σ. Какой при этом конкретный портфель предпочтёт инвестор, зависит от его оценки соотношения «доходность-риск».

Инвестор должен выбрать из всего бесконечного набора портфелей такой портфель, который:

1. Обеспечивает максимальную ожидаемую доходность при каждом уровне риска.

2. Обеспечивает минимальный риск для каждой величины ожидаемой доходности.

Набор портфелей, которые минимизируют уровень риска при каждой величине ожидаемой доходности, образуют так называемую границу эффективности. Эффективный портфель – это портфель, который обеспечивает минимальный риск при заданной величине E(r) и максимальную отдачу при заданном уровне риска.

Диверсифицируемый или несистематический риск – часть риска портфеля, которая может быть устранена путём диверсификации. Недиверсифицируемый, или систематический риск – доля риска, которая не устраняется диверсификацией.

Общая постановка задачи нахождения границы эффективных портфелей

Если портфель состоит более чем из 2 ценных бумаг, то для любого заданного уровня доходности существует бесконечное число портфелей, или, иными словами, можно сформулировать бесконечное количество портфелей, имеющих одну и ту же доходность.

Задача инвестора – из всего бесконечного набора портфелей с ожидаемой доходностью $E(r_n)$ необходимо найти такой, который обеспечивал бы минимальный уровень риска. Иными словами, можно задачу инвестора свести к следующему: необходимо найти минимальное значение дисперсии портфеля при заданных начальных условиях.

Для решения задачи нахождения оптимального портфеля, содержащего n ценных бумаг, необходимо первоначально вычислить:

а) n значений ожидаемой доходности $E(r_i)$, где $i=1,2,\ldots,n$ каждой ценной бумаги в портфеле;

б) n значений дисперсий σ_i^2 каждой ценной бумаги;

в) $n(n-1)/2$ значений ковариации σ_i^2, j, где $i,j=1,2,\ldots,n$.

Если подставить значения $E(r_i)$, σ_i и σ_i^2, j в уравнения, то задача сводится к следующему: для выбранной величины доходности E^* инвестор должен найти такие значения W_i – «весов» каждой ценной бумаги в портфеле, при которых риск инвестиционного портфеля становится минимальным.

7. ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ ПО МОДЕЛИ ШАРПА

Выведенные Марковицем правила построения границы эффективных портфелей позволяют находить оптимальный (с точки зрения инвестора) портфель для любого количества ценных бумаг в портфеле. Основной сложностью применения метода Марковица является большой объем вычислений, необходимый для определения весов W_i каждой ценной бумаги. Действительно, если портфель объединяет n ценных бумаг, то для построения границы эффективных портфелей необходимо предварительно вычислить n значений ожидаемых (средних арифметических) доходностей $E(r_i)$ каждой ценной бумаги, n величин σ_i^2 дисперсий всех норм отдачи и $n(n-1)/2$ выражений попарных ковариаций a_{ij} ценных бумаг в портфеле.

В 1963 г. американский экономист У. Шарп (William Sharpe) предложил новый метод построения границы эффективных портфелей, позволяющий существенно сократить объемы необходимых вычислений. В дальнейшем этот метод модифицировался и в настоящее время известен как одноиндексная модель Шарпа (Sharpe singleindex model).

Общее описание модели

В основе модели Шарпа лежит метод линейного регрессионного анализа, позволяющий связать две случайные переменные величины, независимую X и зависимую Y, линейным выражением типа $Y = a + \beta X$. В модели Шарпа независимой считается величина какого-то рыночного индекса. Таковыми могут быть, например, темпы роста валового внутреннего продукта, уровень инфляции, индекс цен потребительских товаров и т.п. Сам Шарп в качестве независимой переменной рассматривал доходность r_m , вычисленную на основе индекса Standart and Poors (S & P 500). В качестве зависимой переменной берется доходность r_i какой-то i-й ценной бумаги. Поскольку зачастую индекс S & P 500 рассматривается как индекс, характеризующий рынок ценных бумаг в целом, то обычно модель Шарпа называют рыночной моделью (Market Model), а доходность r_m – доходностью рыночного портфеля.

Пусть доходность r_m принимает случайные значения, и в течение N шагов расчета наблюдались величины $r_{m1}, r_{m2}, \dots , r_{mN}$. При этом доходность r_i какой-то i-й ценной бумаги имела значения $r_{i1}, r_{i2}, \dots , r_{iN}$. В таком случае линейная регрессионная модель позволяет представить взаимосвязь между величинами r_m и r_i в любой наблюдаемый момент времени в виде

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t},$$

где r_{it} – доходность i-й ценной бумаги в момент времени t (например, 31 декабря 2000 года);

a_i – параметр , постоянная составляющая линейной регрессии, показывающая, какая часть доходности i-й ценной бумаги не связана с изменениями доходности рынка ценных бумаг r_m ;

β_i – параметр линейной регрессии, называемый бета, показывающий чувствительность доходности i-й ценной бумаги к изменениям рыночной доходности;

r_{mt} – доходность рыночного портфеля в момент t;

ε_{it} – случайная ошибка, свидетельствующая о том, что реальные, действующие значения r_{it} и r_{mt} порою отклоняются от линейной зависимости.

Особое значение необходимо уделить параметру β_i, поскольку он определяет чувствительность доходности i-й ценной бумаги к изменениям рыночной доходности.

В общем случае, если β>1, то доходность данной ценной бумаги более чувствительная, подвержена большим колебаниям, чем рыночная доходность r_m . Соответственно, при $\beta_j < 1$ ценная бумага имеет меньший размах отклонений доходности r_j от средней арифметической (ожидаемой) величины $E(r_j)$, чем рыночная доходность. В этой связи ценные бумаги с коэффициентом $\beta > 1$ классифицируются как более рискованные, чем рынок в целом, а с $\beta < 1$ менее рискованными.

Как показывают исследования, для большинства ценных бумаг $\beta > 0$, хотя могут встретиться ценные бумаги и с отрицательной величиной.

Определение ожидаемой доходности и дисперсии портфеля

Ожидаемая доходность портфеля, состоящего из n ценных бумаг, вычисляется по формуле

$$E(r_n) = \sum_{i=1}^{n} W_i E(r_i),$$

где W_i – вес каждой ценной бумаги в портфеле.

Ожидаемую доходность портфеля $E(r_n)$ можно представить состоящей из двух частей:

а) суммы взвешенных параметров α_i каждой ценной бумаги – $W_1\ \alpha_1 + W_1\ \alpha_1 + \ldots + W_n\ \alpha_n$, что отражает вклад $E(r_n)$ самих ценных бумаг.

б) компоненты $W_{n+1}\alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} W_i\beta_i E(r_m)$, т.е. произведения портфельной беты и ожидаемой рыночной доходности, что отражает взаимосвязь рынка с ценными бумагами портфеля.

Дисперсия портфеля представляется в виде

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} W_i^2 \sigma_{\varepsilon,i}^2$$

Дисперсию портфеля можно представить в виде двух компонент:

а) средневзвешенных дисперсий ошибок $\sum_{i=1}^{n} W_i^2 \sigma_{\varepsilon,i}^2$, где весами служат W_i, что отражает долю риска портфеля, связанного с риском самих ценных бумаг (собственный риск);

б) $\beta_n^2 \sigma_m^2$ - взвешенной величины дисперсии рыночного показателя σ_m^2, где весом служит квадрат портфельной беты, что отражает долю риска портфеля, определяемого нестабильностью самого рынка (рыночный риск).

В модели Шарпа цель инвестора сводится к следующему:

Необходимо найти минимальное значение дисперсии портфеля

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} W_i^2 \sigma_{\varepsilon,i}^2$$

при следующих начальных условиях:

$$\sum_{i=1}^{n+1} W_i\alpha_i = E^*, \qquad \sum_{i=1}^{n} W_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} W_i\beta_i = W_{n+1}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Айвазян, С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики [Текст]: учеб. / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998.

2. Бородич, С.А. Эконометрика [Текст] / С.А. Бородич. – М.: Новое знание, 2001.

3. Бушин, П.Я. Эконометрика [Текст] / П.Я. Бушин. - Хабаровск: РИЦ ХГАЭП, 2003.

4. Валентинов, В.А. Эконометрика [Текст]: учеб. / В.А. Валентинов. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и $К^0$», 2006. – 448 с.

5. Винн, О. Введение в прикладной эконометрический анализ [Текст] / О. Винн, К. Холден. – М.: Финансы и статистика, 1981.

6. Грицан, В.Н. Эконометрика [Текст] / В.Н. Грицан. – М.: Издательско-торговая корпорация "Дашков и $К^0$", 2002.

7. Доугерти, К. Введение в эконометрику [Текст] / К. Доугерти. – М.: Инфра – М., 1999.

8. Дуброва, Т.А. Статистические методы прогнозирования в экономике [Текст]: учеб. пособие / Т.А. Дуброва. – М.: МЭСИ, 2002. – 52 с.

9. Ежеманская, С.Н. Эконометрика [Текст] / С.Н. Ежеманская. – Ростов н/Д: Феникс, 2003.– 160 с.

10. Емельянов, А.С. Эконометрия и прогнозирование [Текст] / А.С. Емельянов. – М.: Экономика, 1985.

11. Катышев, П.К. Сборник задач по начальному курсу эконометрики [Текст] / П.К. Катышев, Я.Р. Магнус, А.А. Пересецкий. – М.: Дело, 2001.

12. Клас, А. Введение в эконометрическое моделирование [Текст] / А. Клас. – М.: Статистика, 1978. – 158 с.

13. Кремер, Н.Ш. Эконометрика [Текст]: учеб. / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008.

14. Кулинич, Е.И. Эконометрия [Текст]/ Е.И. Кулинич. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 304 с.

15. Магнус, Я.Р. Эконометрика [Текст]/ Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – М.: Дело, 2001.

16. Мардас, А.Н. Эконометрика [Текст] / А.Н. Мардас. – СПб.: Питер, 2001.

17. Маленво, Э. Статистические методы эконометрии [Текст] / Э. Маленво. – М.: Статистика, 1975.– 423 с.

18. Орлов, А.И. Эконометрика [Текст]: учеб. пособие / А.И. Орлов. – М.: Изд-во «Экзамен», 2002. – 576 с.

19. Попов, Л.А. Анализ и моделирование трудовых показателей [Текст]: учеб. / Л.А. Попов. – М.: Финансы и статистика, 1999.

20. Эконометрия [Текст] / В.И.Суслов Н.М. Ибрагимов, Л.П. Талышева [и др.]. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003.

21. Тихомиров, Н.П. Эконометрика [Текст]: учеб. / Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. – М.: Изд-во «Экзамен», 2003. – 512 с.

22. Хачатрян, С.Р. Прикладные методы математического моделирования экономических систем [Текст] / С.Р. Хачатрян. – М.: Изд-во «Экзамен», 2002.

23. Четыркин, Е.М. Статистические методы прогнозирования [Текст] / Е.М. Четыркин. – М.: Статистика, 1977.

24. Эконометрика [Текст]: учеб. / под. ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2001.

25. Яновский, Л.П. Введение в эконометрику [Текст]: учеб. пособие / Л.П. Яновский. – М.: КНОРУС, 2007. – 256 с.

Учебное издание

Кузнецова Ольга Александровна,
Татарникова Мария Сергеевна

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Редактор Т.К. Кретинина
Довёрстка А.В. Ярославцева

Подписано в печать 29.10.2012 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 2,75.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. -17/2012.

Самарский государственный аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК