МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Н.А. КАЛУГИН, А.Н. КАЛУГИН

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

САМАРА
Издательство СГАУ
2011

УДК СГАУ: 004(075)
ББК 22.18
К 176

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доцент Е. Я. Горелова,
канд. техн. наук, доцент Ю.С. Горшков

Калугин Н.А.

К176 **Элементы линейного программирования:** учеб. пособие / *Н.А. Калугин, А.Н. Калугин.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. – 48 с.: ил.

ISBN 978-5–7883-0830-2

Содержатся основные сведения о линейном программировании, приводится постановка задачи линейного программирования и ее геометрическая интерпретация. Описаны графический метод, симплекс-метод и метод решения транспортной задачи. Изложение материала иллюстрируется примерами. Включены варианты индивидуальных заданий.

Рассчитано на студентов экономических специальностей, но будет полезно и студентам других специальностей, изучающим высшую математику.

УДК СГАУ: 004(075)
ББК 22.18

ISBN 978-5–7883-0830-2

© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Управление и планирование являются наиболее сложными функциями администрации предприятий. При этом приходится решать задачи поиска максимума или минимума некоторой функции при наличии системы ограничений. Решением этих задач занимается *математическое программирование*, раздел математики, составной частью которого является линейное программирование.

Цель настоящих методических указаний – дать читателю основные сведения о линейном программировании и научить его самостоятельно решать типовые задачи. Для понимания излагаемого материала достаточно знаний, полученных студентами в курсе линейной алгебры.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом: требуется найти такое решение системы m линейных неравенств и уравнений вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \lesseqgtr b_i,\ (i = 1,2,\ldots,m), \tag{1.1}$$

чтобы *целевая функция*

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.2}$$

принимала оптимальное (минимальное или максимальное) значение.

Любая совокупность n чисел $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, удовлетворяющая системе (1.1), называется *допустимым решением.*

Множество допустимых решений образует *область допустимых решений* (ОДР) в пространстве n переменных.

Допустимое решение, при котором целевая функция F принимает оптимальное значение, называется *оптимальным решением.*

Можно показать [1], что, если оптимальное решение существует, оно достигается на границе ОДР.

2 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗЛП. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

2.1 Общие сведения

Для решения ЗЛП, в которых число неизвестных не превышает трех, можно использовать графический метод, достоинствами которого являются наглядность и возможность применения к системе ограничений (1.1) произвольного вида.

Графический метод состоит из следующих этапов:

– построение ОДР на плоскости или в пространстве;

– построение линий (поверхностей) уровня (тех, на которых значение целевой функции F постоянно);

– определение оптимального решения (или установление факта невозможности его достижения) и вычисление оптимального значения целевой функции F.

Более подробно суть графического метода изложим на конкретном примере.

2.2 Решение ЗЛП графическим методом

Пример 1. Требуется минимизировать и максимизировать целевую функцию

$$F = 8x_1 - 2x_2 \tag{2.1}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 18; \\ 3x_1 - x_2 \geq 3; \\ 2x_1 + x_2 \leq 18; \\ 4x_1 - x_2 \leq 24; \\ x_2 \leq 6. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2.1 Построение ОДР

Рассмотрим первое неравенство из системы (2.2). На плоскости с системой декартовых координат OX_1X_2 построим прямую $3x_1 + 4x_2 = 18$ (прямая I на рис. 2.1).

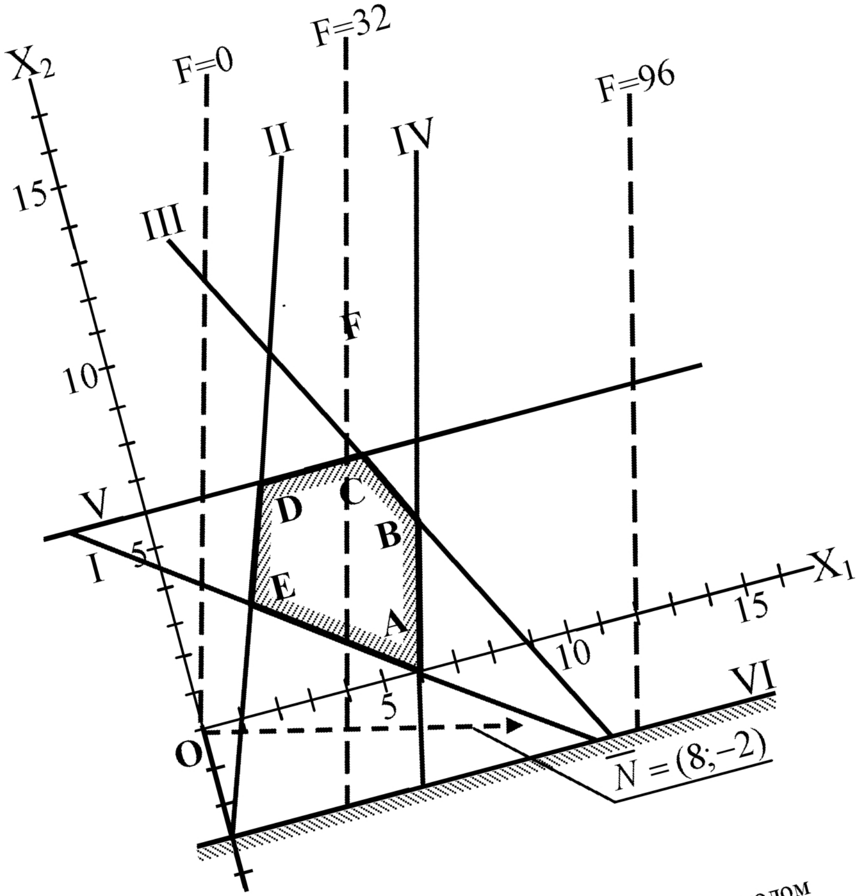

Рис. 2.1. Решение ЗЛП графическим методом

В одной из двух образовавшихся полуплоскостей выберем пробную точку (в данном случае удобно в качестве таковой взять начало координат O(0;0)). Поскольку значения $x_1 = x_2 = 0$ не удовлетворяют рассматриваемому неравенству, областью его решения является другая полуплоскость. На чертеже это можно обозначить штриховкой.

Аналогично рассмотрим остальные ограничения из (2.2) (границы соответствующих полуплоскостей обозначены римскими числами II-V на рис. 2.1).

Областью допустимых решений является часть координатной плоскости, принадлежащая областям решения всех неравенств системы. В рассматриваемом случае ОДР представляет собой пятиугольник *ABCDE* (рис. 2.1).

Замечание 1. Координаты вершин ОДР определяются из условий пересечения соответствующих прямых. Например, координаты точки E(2;3) (пересечение прямых I и II) представляют собой решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 18; \\ 3x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$

Замечание 2. Геометрическая интерпретация позволяет уяснить то, что не всякая система ограничений имеет ОДР. Например, если вместо пятого ограничения в (2.2) записать неравенство $x_2 \le -3$ (прямая VI), то не найдется ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы системе в целом.

Действительно, области решения неравенств I-IV системы (2.2) (четырехугольник *ABFE*) и неравенства $x_2 \le -3$ (полуплоскость, лежащая ниже прямой VI) не имеют общих точек.

Замечание 3. Существенным достоинством графического метода является то, что он не требует линейности неравенств и уравнений системы ограничений.

2.2.2 Построение линий уровня

В данном случае линиями уровня являются прямые

$$8x_1 - 2x_2 = const.$$

На рис. 2.1 изображены линии

$$8x_1 - 2x_2 = 0;\ (F = 0),$$

$$8x_1 - 2x_2 = 32;\ (F = 32),$$

$$8x_1 - 2x_2 = 96;\ (F = 96).$$

Замечание 1. Вследствие линейности функции F линии (поверхности) уровня представляют собой параллельные прямые (плоскости), поэтому при решении ЗЛП нет необходимости строить большое их количество.

Замечание 2. Можно показать, что целевая функция $F = Ax_1 + Bx_2$ $(F = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)$ возрастает при перемещении произвольной линии (поверхности) уровня параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{N} = (A;B)$ $(\overline{N} = (A;B;C))$. Поэтому вполне достаточно построить одну линию (поверхность) уровня и вектор $\overline{N}$, чтобы уяснить положение всех линий (поверхностей) семейства и характер изменения целевой функции. На рис. 2.1 изображен вектор $\overline{N} = (8;-2)$.

Замечание 3. Если на чертеже масштаб на осях координат один и тот же, линии (плоскости) уровня перпендикулярны вектору $\vec{N}$.

2.2.3 Определение оптимального решения

Сначала решим задачу о минимизации функции F. Выберем произвольную линию уровня, пересекающую ОДР. Мысленно будем перемещать ее параллельно самой себе в сторону уменьшения функции F (против вектора $\overline{N}$) до тех пор, пока на линии имеется хотя бы одна точка ОДР. На рис. 2.1 видно, что в крайнем положении линия уровня проходит через точку E. Ее координаты $x_1 = 2, x_2 = 3$, найденные выше, являются оптимальным решением, причем

$$F_{\min} = 8 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 10 .$$

Для того, чтобы максимизировать функцию F, необходимо смещать линию уровня в направлении вектора $\overline{N}$. В крайнем положении она будет включать в себя отрезок AB границы ОДР (следствие того, что AB параллелен линиям уровня). Таким образом, в любой точке AB функция F принимает максимальное значение.

Определим координаты точки A (пересечение прямых I и IV)

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 18; \\ 4x_1 - x_2 = 24. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \ , \\ x_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Максимальное значение $F_{\max} = 8 \cdot 6 - 2 \cdot 0 = 48$. К сведению, в точке $B(7;4)$ (прямые IV, III) $F_B = 8 \cdot 6 - 2 \cdot 0 = 48 = F_{\max}$.

Итак, задача минимизации имеет единственное решение: $F_{\min} = 10$, при $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Максимальное значение целевой функции $F_{\max} = 48$ достигается в любой точке отрезка AB. В качестве оптимального решения можно принять координаты любой точки отрезка (например в точке A $x_1 = 6, x_2 = 0$)

Замечание 1. В том случае, когда ОДЗ – замкнутый многоугольник (многогранник), можно найти оптимальное решение, вычисляя и сравнивая между собой значения целевой функции в его вершинах. Этап 2 в этом случае не нужен.

Замечание 2. Если из чертежа неясно, в какой из двух (трех и т.д.) вершин ОДЗ достигается оптимум (это бывает, например, в случае, когда линии уровня почти параллельны отрезку границы), то следует вычислить целевую функцию во всех конкурирующих точках, после чего выбрать оптимальное решение.

2.3 Выводы

Геометрическая интерпретация позволяет уяснить, что при решении ЗЛП возможны три случая.

1. Задача имеет единственное решение. Пример – $F_{\min}$ в рассмотренной задаче.

2. Задача имеет множество решений (конечное или бесконечное). Пример – $F_{\max}$ в рассмотренной задаче.

3. Решение отсутствует. Это возможно, если система (2.1) противоречива (ОДР – пустое множество), или тогда, когда ОДР не замкнута, и поверхность уровня может смещаться неограниченно. Например, если в рассмотренном примере исключить первое неравенство, то задача минимизации не может быть решена.

Эти выводы, очевидные для случая двух переменных, справедливы и для ЗЛП с произвольным числом переменных.

2.4 Индивидуальные задания

Задача 1. Для производства стали определенной марки, в которую должны входить химические элементы А,В,С, можно закупать шихту двух видов I и II. Содержание легирующих элементов в 1 т шихты каждого вида и в выплавляемой стали, а также стоимость шихты приведены в табл. 2.1 (числовые значения даны в табл. 2.3). Определить наименьшие затраты для производства 1000т стали и необходимое количество шихты каждого вида.

Таблица 2.1 – Исходные данные к задаче 1

Химический элемент	Содержание элемента в 1т шихты (кг)		Минимальное содержание элементов в 1000т стали (кг)
	1	2	
А	a_{11}	a_{12}	b_1
В	a_{21}	a_{22}	b_2
С	a_{31}	a_{32}	b_3
Цена 1т шихты (тыс.руб)	c_1	c_2	

Задача 2. Для производства двух видов изделий А и В используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени на одно изделие, общий фонд времени работы каждого типа оборудование, а также прибыль от реализации изделий приведены в таблице 2.2 (числовые значения в табл. 2.3). Найти план выпуска изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от реализации.

Таблица 2.2 – Исходные данные к задаче 2

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на одно изделие		Общий фонд рабочего времени оборудования (станко-ч)
	1	2	
А	a_{11}	a_{12}	$в_1$
В	a_{21}	a_{22}	$в_2$
С	a_{31}	a_{32}	$в_3$
Прибыль от реализации одного изделия (тыс.руб.)	c_1	c_2	

Таблица 2.3 – Варианты значений коэффициентов

№ вар	Коэффициенты										
	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	$в_1$	$в_2$	$в_3$	c_1	c_1
1	2	2	2	3	5	0	40	57	45	5	3
2	3	4	2	5	4	0	120	70	100	5	4
3	1	1	3	2	0	10	20	54	90	3	5
4	4	3	5	2	0	3	120	70	75	4	6
5	1	1	2	3	5	0	20	54	60	5	3
6	3	4	2	7	2	0	120	140	56	8	5
7	1	1	3	2	0	6	20	54	72	3	5
8	4	3	0	2	7	2	120	56	140	5	7
9	2	2	2	3	5	0	40	54	45	5	6
10	6	5	2	0	0	3	300	60	126	10	6
11	2	2	3	2	0	5	40	54	45	6	5
12	0	6	5	0	5	6	180	210	300	10	4
13	1	1	2	3	6	0	20	54	72	5	6
14	3	1	1	1	1	4	770	330	990	3	4
15	1	1	3	2	0	6	20	54	72	6	5
16	2	7	3	4	3	0	140	120	84	7	6
17	1	1	1	2	3	0	40	50	60	5	4
18	0	2	6	5	4	0	84	300	120	4	10
19	1	1	2	1	0	4	40	50	80	4	6
20	4	3	7	2	0	4	120	140	112	8	10
21	1	1	1	2	2	0	40	50	32	6	4
22	1	4	1	1	3	1	990	330	770	5	4
23	1	1	2	1	0	3	40	50	48	4	8
24	3	0	5	6	0	4	90	300	168	5	10
25	2	4	1	1	2	0	100	40	40	4	5
26	1	1	1	3	4	1	330	770	990	4	2
27	2	1	1	1	0	5	50	40	100	6	5
28	1	4	1	1	1	3	990	330	770	4	6
30	2	1	1	1	0	3	50	40	48	6	5
31	2	2	3	2	0	5	45	40	54	5	6
32	0	6	5	0	5	6	300	180	210	4	10
33	1	1	2	3	6	0	72	20	54	6	5
34	3	1	1	1	1	4	990	770	330	4	3
35	1	1	3	2	0	6	72	20	45	5	6

3. СИМПЛЕКС-МЕТОД

3.1 Общие сведения

Графический метод пригоден тогда, когда число неизвестных ЗЛП не более трех, а на практике чаще приходится иметь дело с большим их количеством. Эффективным методом решения ЗЛП практически любой размерности является симплекс-метод, разработанный Л.В.Канторовичем и усовершенствованный Л.Данцигом.

Пусть требуется найти *максимум* целевой функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{3.1}$$

при ограничениях вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\,, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_i \geq 0 \; (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3.3}$$

Такая формулировка ЗЛП называется канонической. Способы приведения ЗЛП к канонической форме приведены, например, в [1,2].

Выберем произвольно m неизвестных и назовем их *базисными.* Остальные n-m будем называть *свободными.* Выразим из системы (3.2) базисные переменные через свободные и подставим полученные выражения в формулу (3.1). После этого придем к системе ограничений и целевой функции следующего вида (без ограничения общности базисными переменными выбраны первые m).

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \beta_{11}x_{m+1} + \ldots + \beta_{1,n-m}x_n, \\ x_2 = \alpha_2 + \beta_{21}x_{m+1} + \ldots + \beta_{2,n-m}x_n, \\ \quad\ldots \\ x_m = \alpha_m + \beta_{m1}x_{m+1} + \ldots + \beta_{m,n-m}x_n, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$F = F_0 + \gamma_1 x_{m+1} + \gamma_2 x_{m+2} + \ldots + \gamma_{n-m}x_n . \tag{3.5}$$

Может оказаться, что при данном выборе базисных переменных выполняются условия

$$\alpha_i \geq 0 \ (i = 1,2,\ldots,m), \tag{3.6}$$

$$\gamma_j \leq 0 \ (j = 1,2,\ldots,n-m) . \tag{3.7}$$

Тогда из (3.5) и (3.7) следует, что рост значений свободных переменных, приводит к уменьшению целевой функции. Следовательно, *максимальное значение функции* F *равно* F_0, причем все *свободные неизвестные* должны быть *равны нулю* (вследствие (3.3) отрицательными они быть не могут).

Из системы (3.4) следует, что в этом случае *базисные переменные* принимают значения

$$x_i = \alpha_i \ (i = 1,2,\ldots,m), \tag{3.8}$$

причем неравенство (3.6) обеспечивает выполнение условия (3.3).

Таким образом, ЗЛП можно решить, если удастся выбрать номера базисных переменных так, чтобы выполнялись условия (3.6), (3.7). Симплекс-метод представляет собой алгоритм такого выбора переменных и состоит из трех этапов (шагов).

Подготовительный шаг. Сведение рассматриваемой ЗЛП к канонической форме.

Начальный шаг. Начальный выбор базисных переменных так, чтобы выполнялось условие (3.6) (выбор опорного решения).

Основной шаг. Проверка выполнения условия (3.7) и выбор новых базисных переменных. Основные шаги повторяются до тех пор, пока не будет выполняться условие (3.7), или не будет установлен факт невозможности достижения максимума целевой функции F .

Детальное описание симплекс-метода проведем применительно к конкретной задаче.

3.2 Решение ЗЛП симплекс-методом

Для того, чтобы проиллюстрировать смысл операций, рассмотрим задачу с двумя неизвестными.

Пример 2. Требуется найти максимум целевой функции

$$F = 3x_1 + 2x_2 \qquad (3.9)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \le 2, \\ -2x_1 + x_2 \le 2. \end{cases} \qquad (3.10)$$

Кроме того, будем предполагать здесь и в дальнейшем наличие ограничения (3.3).

3.2.1 Подготовительный шаг

Чтобы свести задачу к канонической форме, в рассматриваемом примере достаточно ввести 4 новые неотрицательные переменные, прибавив их к левым частям неравенств. После этого система (3.10) приобретет вид

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_5 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_6 = 2. \end{cases}$$

3.2.2 Начальный шаг

Выбор опорного решения в общем случае представляет довольно сложную задачу. Существуют различные способы ее решения. Некоторые из них представлены в [1, 2]. Здесь мы предлагаем наиболее простой способ, эффективный для большинства реальных задач. Он заключается в следующем.

1. Выбираются *n-m свободных* переменных и приравниваются к нулю.

2. Из получившейся системы m уравнений с n неизвестными вычисляются значения базисных переменных.

3. Если среди вычисленных значений базисных переменных имеется хотя бы одно отрицательное, то выбирают новые свободные переменные (возвращаются к пункту 1).

4. Если все базисные переменные не отрицательны, то выбор допустим. В этом случае выражают базисные неизвестные и целевую функцию через свободные переменные (получают выражения (3.4) и (3.5)), и начальный шаг заканчивается.

Вернемся к рассматриваемой задаче. Выберем в качестве свободных переменные x_1 и x_2

Из системы (3.11) при $x_1 = x_2 = 0$ будем иметь: $x_3 = 6, x_4 = 1, x_5 = 2, x_6 = 2$. Все базисные переменные неотрицательны, значит выбор сделан правильно.

Выражая базисные переменные и целевую функцию через x_1 и x_2, приходим к соотношениям

$$
\begin{cases}
x_3 = 6 - 2x_1 - x_2, \\
x_4 = 1 - x_1 + x_2, \\
x_5 = 2 - x_1, \\
x_6 = 2 + 2x_1 - x_2,
\end{cases}
\tag{3.12}
$$

$$
F = 0 + 3x_1 + 2x_2 . \tag{3.13}
$$

Начальный шаг завершен.

3.2.3 Основной этап симплекс-метода

Из формулы (3.13) видно, что условие (3.7) не выполняется (коэффициенты при x_1 и x_2 положительны), поэтому для решения ЗЛП требуются дальнейшие операции.

На каждом основном шаге одну переменную из свободных переводят в базисные. Перевод проводят так, чтобы значение F_0 (свободный член в правой части (3.7)) не уменьшалось по сравнению с достигнутым к началу очередного шага (в нашем случае достигнутое значение $F_0 = 0$).

Проанализируем выражение (3.13). Для того, чтобы значение целевой функции возросло, можно увеличить либо значение x_1, либо x_2.

Обычно переводят из свободных в базисные ту переменную, коэффициент при которой в (3.5) является максимальным. Однако, данный критерий выбора несовершенен и может привести к более длинному процессу решения.

Переведем в базисные переменную x_2. Одновременно одну из базисных переменных необходимо превратить в свободную. Из (3.12) следует, что при возрастании x_2, значения x_3 и x_6 уменьшаются. Так как они должны оставаться неотрицательными, x_2 нельзя увеличивать безгранично. Та из базисных переменных, которая первой обратится в нуль при возрастании x_2 и должна стать свободной.

Полагая в системе (3.12) $x_1 = 0$, будем увеличивать x_2. Обнаруживается, что x_3 обращается в нуль при $x_2 = 6$, а x_6 – при $x_2 = 2$. Следовательно, свободной станет переменная x_6.

Подчеркнем в системе (3.12) уравнение, определяющее эту переменную, выразим из него x_2 и подставим во все остальные уравнения системы и равенство (3.13).

После приведения подобных членов получим новые соотношения.

$$\begin{cases} \underline{x_3 = 4 - 4x_1 + x_6,} \\ x_4 = 3 + x_1 - x_6, \\ x_5 = 2 - x_1, \\ x_2 = 2 + 2x_1 - x_6, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$F = 4 + 7x_1 - 2x_6. \tag{3.15}$$

Свободными переменными теперь являются $x_1 = x_6 = 0$, значение $F_0 = 4$. Первый основной шаг закончен.

Основные шаги повторяют до тех пор, пока в выражении для целевой функции все коэффициенты перед неизвестными не станут отрицательными. В данном случае коэффициент при x_1 равен 7, поэтому необходимо повторить основной шаг, отталкиваясь от системы (3.14) и равенства (3.15).

Будем увеличивать x_1, полагая $x_6 = 0$. Из (3.14) следует, что x_3 обращается в 0 при $x_1 = 1$, x_5 – при $x_2 = 2$, а x_4 и x_2 возрастают вместе с ростом x_1. Поэтому в свободные переводим переменную x_3.

Аналогично первому шагу, подчеркнем в системе (3.14) соответствующее уравнение, выразим из него x_1 и подставим в остальные уравнения системы (3.14) и равенство (3.15). После приведения подобных членов приходим к соотношениям

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_6, \\ x_4 = 4 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_6, \\ x_5 = 1 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_6, \\ x_2 = 4 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_6, \end{cases}, \tag{3.16}$$

$$F = 11 - \tfrac{7}{4}x_3 - \tfrac{1}{4}x_6 . \tag{3.17}$$

Свободные переменные $x_3 = x_6 = 0$, $F_0 = 11$.

В равенстве (3.17) все коэффициенты отрицательны, что является признаком завершения решения (выполняется условие (3.7)).

Таким образом, максимум целевой функции $F_{\max} = 11$ и достигается при $x_3 = x_6 = 0$. Остальные переменные определяются из (3.16) подстановкой $x_3 = x_6 = 0$. Значения этих переменных будут следующими:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1 .$$

3.3 Геометрический смысл симплекс-метода

На рис. 3.1 изображены результаты решения графическим методом ЗЛП из примера 2 (желающие легко могут проделать решение самостоятельно).

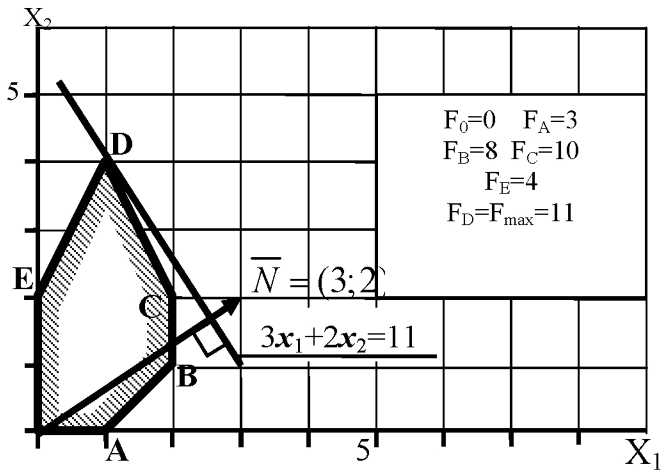

Рис. 3.1. Иллюстрация симплекс-метода

ОДР представляет множество внутренних (включая границы) точек шестиугольника $OABCDE$ с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(2;1)$, $C(2;2)$, $D(1;4)$, $E(0;2)$. Максимум целевой функции достигается в вершине D и равен $F_{\max} = F_D = 11$. На рисунке приведены также значения целевой функции во всех вершинах ОДЗ и вектор $\vec{N} = (3;2)$, перпендикулярный к линиям уровня.

Для того, чтобы уяснить геометрический смысл этапов симплекс-метода выпишем значения переменных x_1, x_2 и целевой функции, вычисленные в процессе решения.

После начального шага $x_1 = x_2 = 0$, $F = 0$; после первого основного шага $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $F = 4$; после второго – $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $F = F_{\max} = 11$.

Легко убедиться в том, что результаты, полученные графически и симплекс-методом, эквивалентны. Можно видеть также, что после начального шага мы находимся в вершине O шестиугольника ОДР, после первого основного оказались в вершине E, после второго – в точке D.

В общем случае геометрический смысл этапов симплекс-метода заключается в следующем.

Начальный шаг представляет собой выбор стартовой вершины многогранника ОДР в многомерном пространстве. Понятно, что в случае противоречивой системы ограничений начальный шаг не удается провести. Практически это будет означать, что при любом выборе базисных переменных условие (3.6) не будет выполняться. Очевидно также, что возможен случай, когда начальный шаг сразу приведет к решению задачи.

Каждый основной шаг симплекс-метода заключается в переходе от одной вершины многогранника к другой, характеризующейся большим (по крайней мере не меньшим) значением целевой функции.

Переход осуществляется по границе ОДР, причем от выбора переводимой в базисные переменной (он определяет направление движения) зависит число шагов решения.

Выбирать переводимую переменную по наибольшему коэффициенту, к сожалению, ненадежно.

Можно показать, что, если на первом шаге рассмотренной задачи перевести в базисные (согласно критерию максимума коэффициента) переменную x_1, потребуется 4 основных шага для достижения $F_{\max}$, а не 2. Переход в вершину D будет в этом случае проходить по пути $O-A-B-C-D$.

3.4 Симплекс-таблицы

3.4.1. Основные соотношения

Основным недостатком симплекс-метода в изложенном выше виде является то, что операции проводятся над системами уравнений. Приходится постоянно переписывать символы неизвестных, хотя вычисления проводятся только над коэффициентами при них. Кроме того в изложенном виде метод мало пригоден для программирования. Ниже изложен вариант симплекс-метода, при котором операции основных шагов проводятся над симплекс-таблицами (особыми матрицами, содержащими коэффициенты системы (3.4) и равенства (3.5)).

Подготовительный и начальный шаг остаются такими же, как и ранее. Однако после начального шага систему ограничений и целевую функцию записывают в виде

$$\begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ b_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \ldots \\ b_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{3.18}$$

$$F_0 = F + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_n x_n \,. \qquad (3.19)$$

Выпишем коэффициенты системы (3.18) и равенства (3.19) в виде симплекс-таблицы, зафиксируем дополнительно в левом столбце каждой строки номера базисных переменных, соответствующих каждому уравнению системы. В верхней строке таблицы укажем обозначения левых частей уравнения и номера всех переменных по порядку

Таблица 3.1 – Типовая симплекс-таблица

	b_k	1	2	…	j	…	n
N_1	b_1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}		a_{1n}
N_2	b_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}		a_{2n}
N_i	b_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}		a_{in}
N_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}		a_{mn}
F	F_0	γ_1	γ_2		γ_j		γ_n

Отметим, что в последней строке ненулевые коэффициенты могут быть только в столбцах, соответствующих свободным переменным.

Основные шаги (итерации) проводятся над симплекс-таблицами, причем следует иметь в виду следующую теорему симплекс-метода [3]

Теорема. Если после выполнения очередной итерации

1. найдется хотя бы один отрицательный коэффициент $\gamma_j < 0$, и в каждом столбце с отрицательным коэффициентом имеется хотя бы один положительный элемент $a_{ij} < 0$, то можно улучшить решение, выполнив следующий шаг;

2. найдется хотя бы один столбец, не содержащий положительных элементов, то функция F не ограничена в ОДР ($F_{\max} \to \infty$);

3. все γ_j окажутся неотрицательными, то достигнуто оптимальное решение.

После каждого шага решения первый столбец таблицы содержит номера базисных переменных, второй столбец – их значения, а также значение целевой функции. Значения свободных переменных (номера которых не указаны в первом столбце) после каждой итерации полагают равными нулю.

На каждом основном шаге метода над симплекс-таблицей проводят следующие операции.

1. Выбирают разрешающий столбец j, в котором $\gamma_j < 0$, и хотя бы один элемент $a_{ij} > 0$,

2. Выбирают разрешающую строку i из условия

$$\frac{b_i}{a_{ij}} = \min\left(\frac{b_k}{a_{kj}}\right), (a_{kj} > 0; k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (3.20)$$

Номер базисной переменной в первом столбце разрешающей строки меняют на номер разрешающего столбца.

3. Производят пересчет элементов разрешающей строки по формулам

$$\overline{b_i} = \frac{b_i}{a_{ij}}; \ \overline{a}_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}}; (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.21)$$

4. Проводят пересчет элементов второго столбца по формулам

$$\overline{b_r} = b_r - \overline{b_i} \cdot a_{rj}; \ (r = 1, \ldots, m; \ r \neq i);$$

$$\overline{F_0} = F_0 - \overline{b_i} \cdot \gamma_j. \qquad (3.22)$$

5. Проводят пересчет элементов последней строки по формуле

$$\overline{\gamma}_k = \gamma_k - \overline{a}_{ik} \cdot \gamma_j; (k = 1,...,n). \tag{3.23}$$

Если все новые элементы строки неотрицательны, то остальные элементы новой таблицы можно не вычислять, поскольку дальнейшие итерации не потребуются, а все необходимые сведения содержатся в первых двух столбцах. Решение на этом заканчивается.

6. Если хотя бы один $\overline{\gamma}_k < 0$, то вычисляют оставшиеся элементы новой таблицы по формуле

$$\overline{a}_{rk} = a_{rk} - \overline{a}_{ik} \cdot a_{rj}; (r = 1,...,m; r \neq i; k = 1,...,n). \tag{3.24}$$

Заметим, что в результате вычислений в разрешающем столбце j элемент $\overline{a}_{ij}$ (на пересечении разрешающих строки и столбца) будет равен 1, а остальные элементы столбца будут равны нулю.

В результате всех вычислений будет сформирована новая симплекс-таблица, и можно переходить к очередной итерации.

3.4.2 Примеры расчетов

Проиллюстрируем сказанное в предыдущем параграфе на задаче **примера 2**. Результаты начального шага будут иметь вид (для сведения указаны также номера базисных переменных, соответствующих каждому уравнению)

$$\begin{cases} (3)\ \ 6 = 2x_1 + x_2 + x_3; \\ (4)\ \ 1 = x_1 - x_2 + x_4; \\ (5)\ \ 2 = x_1 + x_5; \\ (6)\ \ 2 = -2x_1 + x_2 + x_6; \end{cases} \tag{3.25}$$

$$0 = F - 3x_1 - 2x_2. \tag{3.26}$$

Занесем эти результаты в симплекс-таблицу.

Таблица 3.2 – Исходная симплекс таблица

	b_k	1	2	3	4	5	6	b_k / a_{kj}
3	6	2	**1**	1	0	0	0	$6/1 = 6$
4	1	1	**-1**	0	1	0	0	
5	2	1	**0**	0	0	1	0	
6	**2**	**-2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	$2/1 = 2$
F	0	-3	**-2**	0	0	0	0	

В строке F два отрицательных элемента. В каждом из соответствующих столбцов имеются положительные элементы, поэтому можно улучшить решение. Выберем выделенный на рисунке столбец в качестве разрешающего. Правый столбец содержит результаты вычислений, необходимых для выбора разрешающей строки. Разрешающая строка также выделена.

Результаты очередных итераций, приведены ниже.

Таблица 3.3 – Симплекс-таблица №2

	b_k	1	2	3	4	5	6	b_k / a_{kj}
3	**4**	**4**	**0**	**1**	**0**	**0**	**-1**	$4/4 = 1$
4	3	**-1**	0	0	1	0	1	
5	2	**1**	0	0	0	1	0	$2/1 = 2$
2	2	**-2**	1	0	0	0	1	
F	4	**-7**	0	0	0	0	2	

Таблица 3.4 – Симплекс-таблица №3

	b_k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$
4	4						
5	1						
2	4						
F	11	0	0	$\frac{7}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$

Последняя строка последней таблицы не содержит отрицательных элементов, поэтому максимум достигнут.

Итак $F_{\max} = 11$ при $x_1 = 1, x_4 = 4, x_5 = 1, x_2 = 4, x_3 = x_6 = 0$ (номера свободных переменных отсутствуют в первом столбце).

Как и следовало ожидать, результаты совпадают с полученными ранее. Интересно сравнить еще коэффициенты уравнений в п. 3.2 и элементы симплекс-таблиц на каждом шаге (предлагаем сделать это самостоятельно).

Замечание. При выборе разрешающей строки возможен случай, когда в формуле (3.20) минимум b_k / a_{kj} достигается для нескольких строк. В этом случае при неудачном выборе мы можем вернуться к уже встречавшейся таблице, т.е. решение «зациклится». Не останавливаясь на доказательствах, приведем правило, позволяющее этого избежать.

Если на каком-либо этапе расчета возникает неопределенность в выборе разрешающей строки, то следует выбирать ту строку из конкурирующих, для которой отношение элементов другого столбца (с ненулевым γ_j) к элементам разрешающего является наименьшим. Если при этом оказываются равные минимальные отношения, то составляют отношения элементов следующего столбца, и так до тех пор, пока разрешающая строка не определится однозначно.

Таблица 3.5 – Пример выбора разрешающей строки

	b_k	1	2	3	4	5	6	b_k / a_{kj}	a_{ki} / a_{kj}
1	12	1	0	0	0	1	1	12	
2	30	0	1	0	0	5	-1	$6_{\min}$	$-1/5$
3	6	0	0	1	0	1	-2	$6_{\min}$	$-2_{\min}$
4	18	0	0	0	2	3	-2	$6_{\min}$	$-2/3$
F	0	0	0	0	0	-4	-2		

3.5 Индивидуальные задания

Для производства трех видов изделий используется три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции каждого вида, запасы сырья и прибыль от реализации единицы продукции каждого вида приведены в индивидуальных таблицах следующего вида.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
c_1	c_2	c_3	**№**

В правом нижнем углу таблицы стоит номер варианта №; c_1, c_2, c_3 (нижняя строка) – доход предприятия от реализации единицы k -й продукции ($k = 1,2,3$); a_{ik} – затраты i -го ресурса на производство k -й продукции; b_1, b_2, b_3 (правый столбец) – общий запас i-го ресурса.

Требуется найти оптимальные количества (x_1, x_2, x_3) выпуска различных видов продукции, обеспечивающие наибольший суммарный доход при имеющихся ограничениях на ресурсы.

Замечание. Решается задача максимизации функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

при ограничениях вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 \ , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3 \ . \end{cases}$$

Варианты заданий

2	1	1	50
1	1	1	28
0	4	2	38
6	5	5	**№1**

7	2	3	65
1	3	1	30
5	0	4	23
2	6	5	**№2**

9	4	7	90
2	5	1	75
8	3	6	61
9	5	3	**№3**

4	3	6	80
3	1	7	50
9	7	5	90
2	8	1	**№4**

5	4	7	90
3	5	2	60
7	6	9	80
8	1	3	**№5**

1	8	4	70
2	9	5	90
3	7	6	60
6	4	2	**№6**

3	4	8	40
6	3	1	50
7	5	2	60
4	7	5	**№7**

9	5	2	80
7	3	1	60
6	8	4	70
5	6	7	**№8**

7	9	3	60
8	6	5	70
4	5	2	50
9	8	6	**№9**

6	3	8	55
4	7	1	40
5	9	2	60
3	5	6	**№10**

3	7	5	60
9	6	8	90
4	1	2	40
5	8	9	**№11**

2	9	5	50
1	8	4	30
6	7	3	40
9	6	7	**№12**

8	4	1	35
2	5	7	40
6	3	9	30
5	6	8	**№13**

6	4	1	40
7	5	2	50
8	3	5	60
9	8	6	**№14**

3	2	4	40
6	5	7	70
9	8	1	90
8	9	6	**№15**

5	9	3	60
6	8	4	80
7	1	2	40
9	6	7	**№16**

4	1	9	80
2	7	5	70
3	6	4	60
7	9	6	**№17**

8	5	2	50
9	6	3	70
1	4	7	40
7	9	5	**№18**

4	5	8	30
6	9	1	40
3	2	7	60
5	8	3	**№19**

2	8	4	40
7	5	6	60
9	1	3	50
3	8	6	**№20**

1	2	8	90
4	6	3	50
7	4	9	30
5	8	4	**№21**

4	5	9	30
8	1	7	40
3	6	2	60
4	6	8	**№22**

9	8	4	40
6	1	2	50
5	7	3	70
6	4	2	**№23**

4	1	3	60
6	9	7	70
8	2	5	30
3	7	4	**№24**

2	4	6	40
7	8	1	70
4	5	3	20
4	6	5	**№25**

4	2	1	30
3	7	9	50
3	2	6	60
6	8	4	**№26**

5	6	2	40
1	4	3	60
7	9	8	80
2	6	4	**№27**

4	2	3	50
5	7	9	30
8	1	4	60
6	2	7	**№28**

1	4	6	40
9	7	2	90
3	4	8	50
4	2	7	**№29**

5	8	6	30
4	9	1	70
3	5	7	60
4	6	8	**№30**

4	2	1	40
9	7	2	50
5	9	6	60
8	3	4	**№31**

9	6	2	50
3	7	6	40
4	1	5	20
9	7	3	**№32**

4	6	8	30
7	2	1	70
5	9	3	40
4	9	5	**№33**

9	6	1	40
5	4	8	60
3	2	7	80
9	6	4	**№34**

9	6	2	50
4	1	5	70
7	8	3	20
4	3	5	**№35**

4	1	8	70
7	5	6	40
3	2	9	50
5	7	6	**№36**

2	1	7	40
9	6	5	70
8	3	4	30
4	2	7	**№37**

9	4	7	70
6	1	2	60
3	5	6	50
8	4	2	**№38**

1	5	7	50
6	2	8	30
9	3	4	40
2	6	8	**№39**

4	1	5	30
6	7	2	40
9	8	3	70
4	7	5	**№40**

5	3	2	30
7	6	1	50
4	9	8	40
2	5	7	**№41**

5	6	7	70
9	8	4	30
1	3	2	40
4	6	8	**№42**

4	1	5	40
6	7	2	60
9	8	3	80
9	6	4	**№43**

5	3	2	50
7	6	1	70
4	9	8	20
4	3	5	**№44**

5	6	7	30
9	8	4	70
1	3	2	60
5	7	6	**№45**

4 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

4.1 Общие сведения

Одной из типовых задач линейного программирования является транспортная задача. Она формулируется следующим образом.

Пусть в m пунктах отправления находится соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц однородного груза, который должен быть доставлен n потребителям в количествах $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц.

Задана стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из i–го пункта отправления j-му потребителю. Требуется спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

Если обозначить через x_{ij} количество единиц груза, перевозимого от i-го поставщика j-му потребителю, то математическую модель ЗЛП можно сформулировать следующим образом.

Требуется минимизировать функцию стоимости перевозок

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{4.1}$$

при ограничениях вида

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ (i = 1, ..., m); \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \ (j = 1, ..., n); \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x_{ij} \ge 0, \ (i = 1, ..., m; \ j = 1, ..., n). \tag{4.3}$$

Для решения транспортной задачи разработан специальный **транспортный метод**, состоящий из следующих этапов (шагов).

Подготовительный шаг. Приведение задачи к сбалансированному виду.

Начальный шаг. Определение исходного опорного решения (допустимого плана перевозок).

Основной шаг. Оценка имеющегося и построение улучшенного плана перевозок. Основные шаги повторяются до тех пор, пока не будет достигнуто оптимальное решение.

Детальное описание транспортного метода проведем применительно к конкретной задаче.

4.2 Решение транспортной задачи

Пример 4. Найти оптимальное распределение поставок и наименьшую величину затрат на перевозку груза от трех поставщиков трем потребителям при следующих исходных данных.

Таблица 4.1 – Исходные данные

Поставщики и их запасы		Потребители и их спрос		
		1	2	3
		35	15	10
1	10	4	1	2
2	40	2	7	3
3	20	4	2	6

В таблице 4.1 указаны запасы груза у поставщиков a_i (например, $a_2 = 40$), спрос потребителей (например, $b_3 = 10$) и перевозок c_{ij} (например, $c_{23} = 3$).

4.2.1. Подготовительный шаг

Транспортный метод требует, чтобы суммарный запас у поставщиков был равен суммарному спросу потребителей (задача должна иметь сбалансированный вид). В примере 4 запасы $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = 10 + 40 + 20 = 70\right)$ превышают спрос на 10 единиц $\left(\sum_{j=1}^{3} b_j = 35 + 15 + 10 = 60\right)$.

Чтобы обеспечить баланс, вводится «фиктивный» потребитель, спрос которого $b_4 = 70 - 60 = 10$, а стоимость перевозок от всех поставщиков $c_{i4} = 0$.

Если бы спрос превышал предложение, то был бы введен «фиктивный» поставщик с соответствующим запасом и нулевой стоимостью перевозок.

Модифицированные данные запишем в виде таблицы, содержащей запасы, спрос и стоимость перевозок.

Таблица 4.2 – Модифицированные исходные данные

b_j / a_i	35	15	10	10
10	4	1	2	0
40	2	7	3	0
20	4	2	6	0

Математическая модель задачи теперь приобретает следующий вид.

Требуется найти значения поставок x_{ij}, минимизирующих целевую функцию (4.1) и удовлетворяющих неравенствам (4.3) и системе равенств

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i, \ (i = 1, \ldots, 3); \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j, \ (j = 1, \ldots, 4). \end{cases} \tag{4.5}$$

Назовем *допустимым планом* перевозок значения x_{ij}, удовлетворяющие условиям (4.3) и (4.5). Если допустимый план минимизирует целевую функцию (4.1), то он называется *оптимальным*.

4.2.2 Начальный шаг

Для того, чтобы получить исходное допустимое решение, необходимо назначить неотрицательные значения x_{ij} так, чтобы они удовлетворяли условиям (4.5).

В произвольной задаче число линейно независимых уравнений в системе (4.5) равно $m+n-1$. Поэтому нет необходимости назначать значения всех $m \cdot n$ переменных. Достаточно (по аналогии с симплекс-методом) выбрать значения $m+n-1$ базисных неизвестных, а остальные (свободные) считать равными нулю.

В рассматриваемой задаче это означает, что из $3 \cdot 4 = 12$ неизвестных достаточно определить $3+4-1=6$. Результаты вычислений представим в виде таблицы (матрицы) размера $m \cdot n$, причем для удобства будем также указывать значения a_i и b_j, соответствующие строкам и столбцам таблицы.

Таким образом, в рассматриваемом случае требуется заполнить 6 клеток матрицы размера 3×4 так, чтобы сумма элементов i-й строки матрицы была равна a_i, а элементов j-го столбца – b_j.

Начальный шаг можно проводить различными методами [1,2,3]. Одним из наиболее простых и эффективных является *метод северо-западного угла*, который заключается в следующем.

В верхнюю левую клетку (клетка 1.1) заносится меньшее из чисел a_1, b_1; то есть $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$. При этом возможны два случая

1. Пусть $a_1 \geq b_1$. Тогда в остальные клетки 1 столбца ставится прочерк и вычисляется новое значение $\overline{a}_1 = a_1 - b_1$. В результате образуется незаполненная часть матрицы, у которой имеется новый северо-западный угол (клетка 1,2). В нее заносится $x_{12} = \min\{\overline{a}_1, b_2\}$ и т.д.

2. Пусть $a_1 < b_1$. Тогда в остальные клетки первой строки ставится прочерк и вычисляется $\overline{b}_1 = b_1 - a_1$. В результате образуется незаполненная часть таблицы, у которой северо-западной будет клетка 2,1. В нее заносится значение $x_{21} = \min\{a_2, \overline{b}_1\}$ и т.д.

Процесс заполнения продолжается до тех пор, пока не будет заполнена нижняя правая клетка. На каждом из шагов заполнения в северо-западную клетку i, j ставится число $x_{ij} = \min\{\overline{a}_i, \overline{b}_j\}$.

Ниже представлен порядок построения исходного плана для рассматриваемой задачи.

1. Определяем $x_{11} = \min\{10, 35\} = 10$. Так как $10 < 35$ ставим прочерк в остальные клетки строки 1 и вычисляем новое значение $\overline{b}_1 = 35 - 10 = 25$.

2. $x_{21} = \min\{40, 25\} = 25$. $25 < 40$, следовательно, ставим прочерк в клетку (3,1) и определяем $\overline{a}_2 = 40 - 25 = 15$.

3. $x_{22} = \min\{15, 15\} = 15$. $15 = 15$, следовательно, ставим прочерк в клетку (3,2) и определяем $\overline{a}_2 = 10 - 15 = 0$.

4. $x_{23} = \min\{0, 10\} = 0$. $0 < 10$, следовательно ставим прочерк в клетку (2,4) и определяем $\overline{a}_3 = 20 - 10 = 10$.

5. $x_{33} = \min\{20, 10\} = 10$. Столбец уже полностью заполнен, поэтому вычисляем $\overline{a}_2 = 40 - 25 = 15$.

6. $x_{34} = \min\{10, 10\} = 10$.

Процесс построения исходного плана закончен. Результаты представлены в табл. 4.3.

Таблица 4.3 – Исходный план перевозок

			25			
		b_j \ a_i	~~35~~	15	10	10
		10	10	---	---	---
0	~~15~~	~~40~~	25	15	0	---
	10	~~20~~	---	---	10	10

Замечание. Для удобства вычислений модифицированные значения a_i, b_j указываются рядом с таблицей на соответствующих местах.

4.2.3 Основной шаг

Каждый основной шаг транспортного метода включает оценку предыдущего плана (на первом шаге таковым является исходное опорное решение) и переход к новому (улучшенному) плану.

Оценка имеющегося плана проводится по следующему алгоритму.

1. Составляется таблица (матрица) размера $m \times n$, и в правом верхнем углу каждой клетки указывается величина c_{ij}.

2. Вычеркиваются клетки, соответствующие заполненным клеткам оцениваемого плана.

3. Определяются $m+n$ чисел, называемые потенциалами строк $\alpha_i \, (i=1,\ldots,m)$ и столбцов $\beta_j \, (j=1,\ldots,n)$ таблицы, исходя из следующего требования: для вычеркнутых клеток должно выполнятся равенство

$$\alpha_i + \beta_j + c_{ij} = 0. \qquad (4.6)$$

Замечание. Одно (любое) из чисел α_i, β_j можно задавать произвольно (обычно оно приравнивается нулю).

4. Вычисляются оценки γ_{ij} остальных (не вычеркнутых) клеток таблицы по формуле:

$$\gamma_{ij} = \alpha_i + \beta_j + c_{ij}. \qquad (4.7)$$

В результате получается таблица оценок имеющегося плана перевозок.

5. Если все оценки $\gamma_{ij} \geq 0$, то оцениваемый план является оптимальным. В этом случае дальнейшие шаги не нужны. Остается лишь вычислить оптимальное значение целевой функции и зафиксировать окончательное решение транспортной задачи.

6. Если среди оценок γ_{ij} имеется хотя бы одна отрицательная $\gamma_{ij} < 0$, то можно улучшить решение, перейдя к новому допустимому плану.

Переход к улучшенному плану производится по следующему алгоритму.

1. В таблице оценок выбирается клетка с минимальной оценкой γ_{ij}. Если таких клеток несколько, то выбирается любая из них (по возможности та, которая раньше не была заполненной). Эта клетка выделяется (обводится).

2. В соответствующей клетке оцениваемого плана ставится знак «+».

3. Составляется цикл перераспределения поставок – в клетках расставляются знаки «+» и «–», исходя из следующих требований:

– все знаки «+» и «–» кроме одного (первого) должны быть поставлены в заполненных клетках плана;

– количество знаков «+» в каждом столбце (строке) таблицы плана должно быть равно числу знаков «–».

4. Перебирая клетки, помеченные знаком «–», определяем число

$$\Delta = \min\left\{x_{ij}\right\}. \qquad (4.8)$$

5. Вычисляются значения $\overline{x}_{ij}$ улучшенного плана перевозок по следующим правилам:

– для клеток, помеченных знаком «+»

$$\overline{x}_{ij} = x_{ij} + \Delta; \qquad (4.9)$$

– для клеток, помеченных знаком «–»

$$\overline{x}_{ij} = x_{ij} - \Delta. \qquad (4.10)$$

Остальные клетки нового плана остаются такими же, как и в предыдущем.

Клетка, в которой по формуле (4.10) $\overline{x}_{ij}$ окажется равным нулю освобождается (становится незаполненной). Если таких клеток несколько, то освобождается одна из них, а в остальные заносят значение $\overline{x}_{ij} = 0$.

Проводя аналогию с симплекс-методом, можно сказать, что алгоритм перехода к новому плану обеспечивает перевод в базисные ровно одной из свободных переменных.

Результатом описанных операций является новый (улучшенный) план перевозок, который является исходным для следующего основного шага.

Таблица 4.4 – План 1 (исходный)

b_j / a_i	35	15	10	10
10	-- 10	+ ---	---	---
40	+ 25	-- 15	0	---
20	---	---	10	10
$\Delta = x_{11} = 10$				

Таблица 4.5 Оценка плана 1

β_j / α_i	-2	-7	-3	3
-2	4 X	1 -8	2 -3	0 1
0	2 X	7 X	3 X	0 3
-3	4 -1	2 -8	6 X	0 X
$\gamma_{12} = -8(\min)$				

Таблица 4.6 – План 2

b_j / a_i	35	15	10	10
10	---	10	---	---
40	35	-- 5	+ 0	---
20	---	+ ---	-- 10	10
$\Delta = x_{22} = 5$				

Таблица 4.7 – Оценка плана 2

β_j / α_i	-2	-7	-3	3
6	4 8	1 X	2 5	0 9
0	2 X	7 X	3 X	0 3
-3	4 -1	2 -8	6 X	0 X
$\gamma_{32} = -8(\min)$				

Таблица 4.8 – План 3

b_j \ a_i	35	15	10	10
10	---	-- / 10	+ / ---	---
40	35	---	5	---
20	---	+ / 5	-- / 5	10
$\Delta = x_{33} = 5$				

Таблица 4.9 – Оценка плана 3

β_j \ α_i	-5	-2	-6	0
1	4 / 0	1 / X	2 / -3	0 / 1
3	2 / X	7 / 8	3 / X	0 / 3
0	4 / -1	2 / X	6 / X	0 / X
$\gamma_{13} = -3(\min)$				

Таблица 4.10 – План 3

b_j \ a_i	35	15	10	10
10	---	5	5	---
40	35	---	5	---
20	---	10	---	10
План оптимален				

Таблица 4.11 – Оценка плана 3

β_j \ α_i	-2	-2	-3	0
1	4 / 3	1 / X	2 / X	0 / 1
0	2 / X	7 / 5	3 / X	0 / 0
0	4 / 2	2 / X	6 / 3	0 / X
$\gamma_{ij} \geq 0$				

Результаты решения рассматриваемой задачи приведены в таблицах 4.4 – 4.11. Таблица 4.11 оценок плана 4 не содержит отрицательных оценок, поэтому данное решение является оптимальным. Значение целевой функции для этого плана

$$F_{\min} = 5\cdot 1 + 5\cdot 2 + 35\cdot 2 + 5\cdot 3 + 10\cdot 2 + 10\cdot 0 = 120.$$

Итак: Минимальные затраты на перевозку составляют 120 единиц и достигаются при распределении поставок, указанных в таблице (4.10). При этом у третьего поставщика осталось 10 единиц груза $(x_{34} = 10)$.

Замечание. Так как в таблице оценок полученного плана имеется нулевая оценка $(\gamma_{24} = 0)$, оптимальный план не является единственным. Можно получить другое распределение с тем же значением $F_{\min} = 120$, составив, например, цикл перераспределения для клетки (2,4).

4.3 Индивидуальные задания

Каждому студенту выдается задание на решение транспортной задачи в виде следующей таблицы

№	b_1	b_2	b_3	$\cdots$
a_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	$\cdots$
a_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	$\cdots$
a_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

В ее левом верхнем (северо-западном) углу стоит номер варианта; $a_1, a_2, \ldots$ (левый столбец) – запасы сырья на складах; $b_1, b_2, \ldots$ (верхняя строка) – потребности предприятий; c_{ij} – стоимость перевозки сырья с i–го склада j-му потребителю. Определить оптимальные объемы перевозок x_{ij} с i-го склада j-му потребителю, полностью удовлетворяющие потребности (или полностью использующие все запасы) и обеспечивающие минимум суммарных затрат на транспортировку. Варианты заданий указаны ниже.

№1	3	8	4	5
13	2	6	3	4
5	9	5	7	2
9	4	1	3	8

№2	12	20	10
10	5	3	4
15	2	3	6
20	2	1	4

№3	5	3	6	4
3	9	8	7	9
8	7	4	5	3
14	4	3	6	5

№4	3	8	4
5	7	5	3
4	6	2	7
6	4	3	6
7	4	9	8

№5	9	7	5
10	2	3	5
10	1	4	2
4	6	3	1
8	8	9	10

№6	11	7	8
5	4	5	9
15	3	7	2
10	6	3	4
5	2	8	6

№7	9	11	4
7	2	7	8
8	4	6	8
7	3	4	5
4	5	1	4

№8	8	3	4
6	1	4	8
3	9	7	4
5	5	7	6
4	9	3	2

№9	9	8	3
4	8	1	2
6	7	3	6
5	5	2	4
8	6	5	3

№10	12	20	3	10
15	2	3	6	8
20	2	1	3	4
10	7	9	6	8

№11	7	9	8	5
12	2	9	5	4
9	7	4	2	1
19	4	3	6	9

№12	5	7	3	9
12	3	5	6	8
9	2	4	3	6
6	3	2	7	4

№13	5	4	6
8	7	6	4
3	5	2	3
7	7	7	1
4	3	5	8

№14	9	12	4
7	2	8	6
8	7	3	2
9	4	4	5
5	4	1	8

№15	11	10	4
5	7	2	6
9	8	4	3
9	5	1	5
7	3	9	2

№16	3	8	4	7
5	7	5	3	7
4	6	2	7	5
6	4	3	6	1
7	4	9	8	5

№17	9	4	3	8
7	2	1	4	7
5	1	7	2	9
8	6	3	1	5
4	4	8	7	3

№18	3	3	6	6
9	7	4	2	5
3	3	2	6	1
5	9	2	4	7
4	7	8	9	3

№19	5	15	30	20
20	4	7	5	4
10	8	1	3	2
30	6	5	2	1

№20	10	15	20
10	5	7	4
30	9	2	1
20	5	4	2

№21	10	20	10
8	2	4	2
10	6	5	1
15	3	4	5

№22	10	20	30
40	4	1	2
10	6	7	4
5	2	3	5

№23	5	15	25	10
10	5	1	4	2
30	2	8	6	4
40	4	3	5	6

№24	40	60	30
50	5	4	2
10	1	2	1
40	3	6	4

№25	10	10	40
20	4	1	3
10	5	7	2
15	6	9	8

№26	15	10	25
30	4	2	1
5	7	6	5
20	3	1	4

№27	20	10	30	15
30	4	2	1	6
10	3	5	4	7
25	3	8	1	2

№28	12	20	3	10
15	2	2	7	8
20	3	1	9	4
10	6	3	6	8

№29	7	9	8	5
12	2	7	4	4
9	9	4	3	1
19	5	2	6	9

№30	5	7	3	9
12	3	2	3	8
9	5	4	2	6
6	6	3	7	4

№31	5	15	30	20
20	4	4	7	5
10	2	8	1	3
30	1	6	5	2

№32	5	4	6	4
8	4	7	6	8
3	3	5	2	5
7	1	7	7	3

№33	10	15	20
10	4	5	7
30	1	9	2
20	2	5	4

№34	10	20	10
8	2	2	4
10	1	6	5
15	5	3	4

№35	5	15	25	10
10	2	5	1	4
30	4	2	8	6
40	6	4	3	5

№36	5	3	6	4
3	9	9	8	7
8	3	7	4	5
14	5	4	3	6

№37	5	15	30	20
30	4	7	5	4
20	8	1	3	2
30	6	5	2	1

№38	10	15	20
10	5	7	4
40	9	2	1
20	5	4	2

№39	10	20	10
25	2	4	2
10	6	5	1
15	3	4	5

№40	10	20	10
30	2	2	4
10	1	6	5
25	5	3	4

№41	5	15	25	10
40	2	5	1	4
30	4	2	8	6
10	6	4	3	5

№42	5	3	16	4
10	9	9	8	7
5	3	7	4	5
14	5	4	3	6

№43	8	5	10	5
13	2	6	3	4
5	9	5	7	2
9	4	1	3	8

№44	15	20	20
10	5	3	4
15	2	3	6
20	2	1	4

№45	5	10	8	4
3	9	8	7	9
18	7	4	5	3
14	4	3	6	5

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее издание ни в коей мере не претендует на то, чтобы заменить фундаментальные труды по математическому программированию.

Авторы сочтут свою задачу выполненной, если читатели получат некоторое представление о линейном программировании и научатся решать задачи, аналогичные рассмотренным в указаниях.

Авторы также надеются, что учебное пособие послужит читателю базой для дальнейшего изучения методов математического программирования и окажет помощь в решении практических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юдин, Д.Б.* Линейное программирование / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Физматгиз, 1963. – 776 с.

2. Справочник по математике для экономистов / В.Е. Барбаумов, В.И. Ермаков [и др.] – М.: Высшая школа, 1987. – 336 с.

3. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. / [П.Е. Данко и др.] – М.: Высшая школа, 1986. – 304 с.

4. Алгоритмы решения задач линейного программирования: метод. указания / сост. Н.А. Калугин. – Самара: Изд-во СГАУ, 1998. – 40 с.

5. *Калугин, Н.А.* Основы линейного программирования: учеб. пособие / Н.А. Калугин, А.Н. Калугин. – Самара: Изд-во СГАУ, 2003. – 40с.

Учебное издание

Калугин Николай Александрович
Калугин Александр Николаевич

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебное пособие

Редактор И.И. Спиридонова
Верстка Н.А. Калугин
Доверстка И.И. Спиридонова

Подписано в печать 30.09.2011 г. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 3,0.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С – 15/ 2011.

Самарский государственный аэрокосмический университет.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Н.А. КАЛУГИН, А.Н. КАЛУГИН

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С А М А Р А 2011