ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

С.В. БУШКОВ, Л. В. КОЛОМИЕЦ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

САМАРА 2006

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

С.В. БУШКОВ, Л. В. КОЛОМИЕЦ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

САМАРА 2006

УДК 517.5

Рецензенты: д-р физ.-мат.наук, проф. *А.И. Жданов*;

канд. физ.-мат.наук, доц. *Е.Я. Горелова*

Бушков, С.В. **Элементы теории функций комплексного переменного:** учеб. пособие / ***С.В. Бушков, Л.В. Коломиец;*** Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Самара, 2006. – 67с.:ил.

ISBN 5-7883-0389-3

Учебное пособие составлено в соответствии с действующей программой по курсу математики для инженерно-технических специальностей вузов. Пособие обеспечивает полную теоретическую и методическую поддержку этапа курсовой работы, посвященного изучению теории функций комплексного переменного.

Пособие может быть рекомендовано студентам для самостоятельной работы и подготовки к экзаменам, а также преподавателям для подготовки и проведения практических занятий по теме «Теория функций комплексного переменного».

ISBN 5-7883-0389-3

СОДЕРЖАНИЕ

Третий этап курсовой работы посвящен изучению теории функций комплексного переменного.

3.1. Основные соотношения для комплексных чисел

Комплексное число $z = x + i\,y$ геометрически изображается вектором на плоскости XOY с началом в точке (0; 0) и концом в точке $(x; y)$. Тем самым множество комплексных чисел C_z находится во взаимно однозначном соответствии с множеством точек плоскости XOY: числу $z = x + i\,y \in C_z$ соответствует точка с координатами $(x; y)$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, обозначается символом $\textcircled{z}$ в правом верхнем углу. Множество C_z с присоединенной бесконечно удаленной точкой $z = \infty$ называется расширенной комплексной плоскостью.

Модуль $|z|$ комплексного числа $z = x + i\,y$ вычисляется по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а его аргумент $\varphi = \mathrm{Arg}\, z$ определяется соотношениями $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Аргумент комплексного числа определен с точностью до слагаемого, кратного 2π, при этом главное значение аргумента обозначается с маленькой буквы и находится в пределах $-\pi < \arg z \le \pi$, а значения аргумента $\varphi = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k$, $k \in Z$.

Можно использовать также формулу $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{y}{x}$, из которой главное значение аргумента определяется с учетом четверти, в которой находится точка $(x; y)$:

$$\arg z = \arg(x + i\,y) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, \text{ если } (x;y) \in \text{I, IV четверти;} \\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} + \pi, \text{ если } (x;y) \in \text{II четверти;} \\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} - \pi, \text{ если } (x;y) \in \text{III четверти.} \end{cases}$$

В частных случаях аргумент определяется следующим образом:

$$\arg z = \begin{cases} 0, & \text{если } z = x,\, x > 0; \\ \pi, & \text{если } z = x,\, x < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } z = iy,\, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } z = iy,\, y < 0. \end{cases}$$

Комплексное число может быть записано в трех формах:

1) алгебраическая форма $z = x + iy$, где x называется действительной частью числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, y называется мнимой частью числа z и обозначается $y = \operatorname{Im} z$;

2) тригонометрическая форма $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $\varphi = \arg z$;

3) показательная форма $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, где $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ по формуле Эйлера.

Действия с комплексными числами в показательной форме

Пусть даны два комплексных числа: $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$.

Тогда справедливы соотношения:

- $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$. При умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$. При делении комплексных чисел модули делятся, а аргументы вычитаются.
- $(z)^n = |z|^n \cdot e^{in\varphi}$. При возведении комплексного числа в целую степень n модуль возводится в степень n, а аргумент умножается на n.
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Корень степени n из комплексного числа имеет ровно n различных значений с одинаковыми

модулями $\sqrt[n]{|z|}$ и аргументами, отличающимися на $\frac{2\pi}{n}$. По формуле Эйлера последнюю формулу можно переписать в тригонометрической форме:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \quad (3.1)$$

Пример 1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-128 - i \cdot 128\sqrt{3}}$. Построить их на комплексной плоскости.

Решение. Представим число $z = -128 - i \cdot 128\sqrt{3}$ в тригонометрической форме. Для этого найдем его модуль и аргумент:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-128)^2 + (-128\sqrt{3})^2} = \sqrt{128^2 + 128^2 \cdot 3} = 256.$$

Число z находится в 3 четверти, $tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-128\sqrt{3}}{-128} = \sqrt{3}$, откуда $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$.

Таким образом, $z = -128 - i \cdot 128\sqrt{3} = 256 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right)$.

Подставляя значения $|z| = 256$, $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$ в формулу (3.1) при $n = 4$, получим следующие значения корня:

$$k = 0, \quad z_0 = \sqrt[4]{256} \cdot \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3 \cdot 4} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3 \cdot 4} \right) \right) = 2\sqrt{3} - 2i;$$

$$k = 1, \quad z_1 = \sqrt[4]{256} \cdot \left(\cos\frac{1}{4}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi \right) + i \cdot \sin\frac{1}{4}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi \right) \right) = 2 + 2\sqrt{3}\, i;$$

$$k = 2, \quad z_2 = \sqrt[4]{256} \cdot \left(\cos\frac{1}{4}\left(-\frac{2\pi}{3} + 4\pi \right) + i \cdot \sin\frac{1}{4}\left(-\frac{2\pi}{3} + 4\pi \right) \right) = -2\sqrt{3} + 2i;$$

$$k = 3, \quad z_3 = \sqrt[4]{256} \cdot \left(\cos\frac{1}{4}\left(-\frac{2\pi}{3} + 6\pi \right) + i \cdot \sin\frac{1}{4}\left(-\frac{2\pi}{3} + 6\pi \right) \right) = -2 - 2\sqrt{3}\, i.$$

На комплексной плоскости эти 4 значения изображаются точками (векторами) на окружности радиуса $R = 4$ (рис.1). Точки разбивают окружность на 4 части.

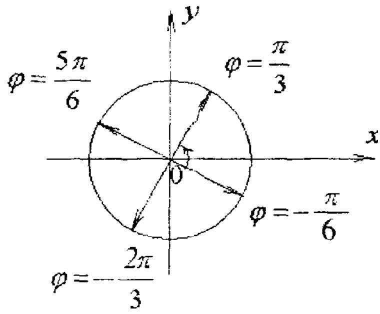

Рис.1. Корни из комплексного числа

3.2. Области и кривые в комплексной плоскости

Расстояние между двумя точками $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ комплексной плоскости определяет модуль их разности:

$$\rho(z_1, z_2) = |\,z_2 - z_1\,| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Исходя из этой формулы, уравнение окружности $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$ с радиусом R и центром в точке $z_o = x_o + i \cdot y_o$ записывается в виде $|\,z - z_o\,| = R$.

При любом фиксированном числе $\varepsilon > 0$ множество всех точек $z \in C_z$, удовлетворяющих неравенству $|\,z - z_o\,| < \varepsilon$, образует внутренность круга с радиусом ε и центром в точке z_o. Это множество называется ε-***окрестностью*** точки z_o и обозначается $U_\varepsilon(z_o)$. Исключив из окрестности точку z_o, получаем ***проколотую*** окрестность $\mathring{U}_\varepsilon(z_o) = U_\varepsilon(z_o) \setminus z_o$ точки z_o.

Точка $z \in D$ называется ***внутренней*** точкой множества D, если существует ε - окрестность $\bigcup_{\varepsilon}(z_0)$ этой точки, целиком содержащаяся в D.

Точка $z \in D$ называется ***граничной*** точкой множества D, если в любой ее окрестности $\bigcup_{\varepsilon}(z_0)$ имеются точки как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству D. Множество $D \subset C_z$, содержащее только внутренние точки, называется ***открытым***. Множество, содержащее все свои граничные точки, называется ***замкнутым***. Множество называется ***связным***, если две любые его точки можно соединить непрерывной кривой, полностью расположенной в D. Связное открытое множество называется ***областью***.

<u>**Пример 2**</u>. Вычертить область, заданную неравенствами $|z-1|<1$, $\arg z \le \frac{\pi}{4}$, $\arg(z-1) > \frac{\pi}{4}$.

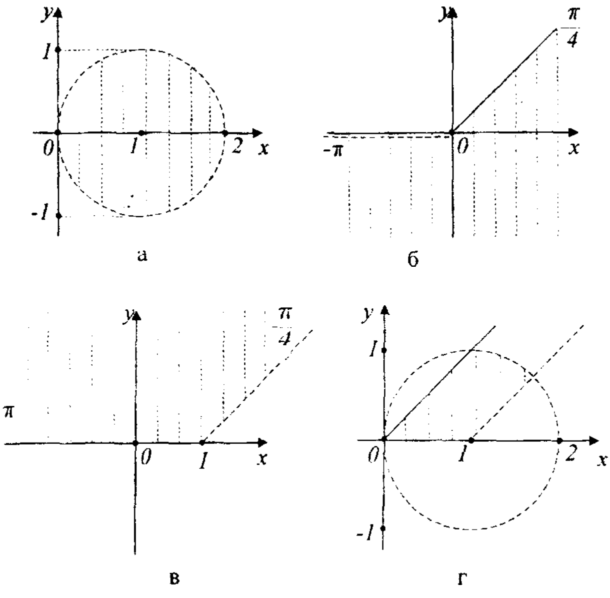

Рис. 2. Области на комплексной плоскости

Решение. Множество $|z-1|<1$ есть внутренность круга радиусом 1 с центром в точке $z_o=1$ без границы (рис.2 ,а).

По определению главного значения аргумента неравенство $-\pi<\arg z\le\frac{\pi}{4}$ определяет множество точек плоскости, изображенное на рис.2 ,б. Область, определяемая неравенством $\frac{\pi}{4}<\arg(z-1)\le\pi$, получается из области $\frac{\pi}{4}<\arg(z)\le\pi$ параллельным переносом начала координат в точку $z=1$ (рис.2 ,в).

Область, определяемая всеми тремя неравенствами, получается пересечением соответствующих областей и изображена на рис.2 ,г.

Кривые в комплексной плоскости

Пусть $x=x(t)$, $y=y(t)$ — непрерывные (непрерывно дифференцируемые) действительные функции. Тогда комплекснозначная функция действительного аргумента

$$z(t)=x(t)+i\,y(t) \tag{3.2}$$

определяет на комплексной плоскости непрерывную (гладкую) кривую ℓ. Уравнение (3.2) равносильно параметрическому заданию кривой ℓ на плоскости XOY: $x=x(t)$, $y=y(t)$.

<u>**Пример 3.**</u> Определить вид кривой $z(t)=3e^{i\cdot t}-\dfrac{1}{2e^{i\cdot t}}$.

Решение. Функция $z(t)$ является комплекснозначной функцией действительного аргумента. По формуле Эйлера $e^{i\,t}=\cos t+i\cdot\sin t$, $e^{-i\,t}=\cos t-i\cdot\sin t$, тогда

$$z(t)=3e^{i\,t}-\frac{1}{2}e^{-i\,t}=3(\cos t+i\cdot\sin t)-\frac{1}{2}\left(\cos t-i\cdot\sin t\right)=\frac{5}{2}\cos t+i\cdot\frac{7}{2}\sin t.$$

Отсюда получим параметрические уравнения эллипса: $x = 2{,}5\cos t$, $y = 3{,}5\sin t$ или в канонической форме: $\dfrac{x^2}{(2{,}5)^2} + \dfrac{y^2}{(3{,}5)^2} = 1$.

3.3. Функции комплексного переменного

Если каждой точке из области D расширенной комплексной плоскости (z) по какому- либо закону ставится в соответствие точка области Е комплексной плоскости (w), то говорят, что задана функция комплексного переменного $w = f(z)$: $D \to E$. Функция $w = f(z)$ называется ***однозначной***, если каждому числу z соответствует только одно значение w, в противном случае она называется многозначной. Например, функция $w = z^2$ является однозначной во всей расширенной комплексной плоскости, а функция $w = \sqrt{z}$, в силу определения корня из комплексного числа, двузначна во всех точках, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$, в которых она однозначна (точки ветвления).

Функция $w = f(z)$ называется ***однолистной*** в области D, если в различных точках z этой области она принимает различные значения. Если функция $w = f(z)$ в различных точках z может принимать одинаковые значения, то она называется многолистной. Например, функция $w = z^2$ является двулистной на расширенной плоскости, областью ее однолистности, в частности, является верхняя полуплоскость (т.к. верхняя полуплоскость вместе с положительной частью действительной оси при отображении $w = z^2$ переходит в полную комплексную плоскость w).

В дальнейшем, если специально не оговорено иное, будем рассматривать только однозначные и однолистные функции, осуществляющие взаимно - однозначные отображения.

Пусть функция $w = f(z)$ определена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(z_o)$ точки z_o. Комплексное число A называется ***пределом*** функции $f(z)$ при $z \to z_o$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $0 < |z - z_o| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. Предел функции комплексного переменного не зависит от способа стремления z к z_o.

Функция комплексного переменного обладает свойствами, аналогичными свойствам функций действительного переменного.

1° Если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, то он единственный.

2° Если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, то найдется такая проколотая окрестность точки z_o, в которой $f(z)$ ограничена, т.е. $|f(z)| \le M$.

3° Если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \ne 0$, то найдется $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(z_o)$, в которой $f(z) \ne 0$.

4° Если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$, то справедливы соотношения

$\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = A \pm B$; $\qquad \lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = A \cdot B$;

$\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}$, если $B \ne 0$, $g(z) \ne 0$.

Функция $w = f(z)$ называется ***непрерывной*** в точке z_o, если она определена в непроколотой окрестности $U_{\varepsilon}(z_o)$ и существует $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_o)$.

Функция $f(z)$ называется непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой точке множества D. Из непрерывности функции комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ следует непрерывность ее действительной $u(x,y)$ и мнимой $v(x,y)$ частей по совокупности переменных. Справедливо и обратное утверждение: если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны по совокупности переменных, то функция $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ непрерывна. Это позволяет перенести на функции комплексного переменного основные свойства непрерывных функций двух действительных переменных (непрерывность суммы, произведения, частного, непрерывность на замкнутом множестве и т.п.).

3.4. Основные элементарные функции комплексного переменного

1) ***Степенная функция*** $w=z^n$, $n\in N$. Степенная функция непрерывна и однозначна на всей комплексной плоскости. Ее действительную и мнимую части можно найти по формуле бинома Ньютона, положив $z^n=(x+i\,y)^n$. Степенная функция является n-листной, областью ее однолистности, в частности, служит сектор $0\le \arg z<\dfrac{2\pi}{n}$.

2) ***Целая рациональная функция***, или многочлен

$$w=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=P_n,$$

где коэффициенты a_i – комплексные числа. Функция $P_n(z)$ определена, однозначна и непрерывна на всей комплексной плоскости.

3) ***Дробно - рациональная функция***, или рациональная дробь

$$w=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_{m-1}z+b_m}.$$

Эта функция определена, однозначна и непрерывна на всей комплексной плоскости за исключением тех точек, где $Q_m(z)=0$.

4) ***Показательная функция*** $w=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.

Показательная функция обладает свойствами:

• она определена, непрерывна и однозначна на всей комплексной плоскости;

• выполняются все свойства показательной функции действительной переменной, например $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;

• функция e^z является периодической с периодом $T = 2\pi\, i$, т.е. $e^z = e^{z+(2\pi i)k}$;

• для любого комплексного числа $z = x + i\,y$ справедливы равенства

$|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x, \quad \arg e^z = \arg e^{x+iy} = y$.

5) ***Тригонометрические функции***

$$\sin z = \frac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2i}, \ \cos z = \frac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2}.$$

Тригонометрические функции обладают свойствами:

• они однозначны и непрерывны на всей комплексной плоскости,

• являются периодическими с периодом $T = 2\pi$,

• $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,

• справедливы соотношения: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

$\sin z = \sin(x + i \cdot y) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cdot \cos x \cdot \operatorname{sh} y$,

$\cos z = \cos(x + i \cdot y) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \cdot \sin x \cdot \operatorname{sh} y$.

6) ***Гиперболические функции***

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Связь с тригонометрическими функциями:

$\operatorname{sh} z = -i \cdot \sin(i \cdot z)$, $\operatorname{ch} z = \cos(i \cdot z)$.

7) ***Логарифмическая функция***

$w = \operatorname{Ln} z = u + i\,v = \ln|z| + i\,(\arg z + 2\pi k), \quad k \in Z.$

Логарифмическая функция является многозначной, она определена и непрерывна на всей комплексной плоскости, кроме точки $z=0$. Значение функции при $k=0$ называется *главным значением* логарифма и обозначается

$$\ln z = \ln|z| + i\cdot\arg z.$$

8) *Общие степенная и показательная функции*

$$z^{\alpha} = e^{\alpha\cdot\mathrm{Ln}\, z}, \quad a^{z} = e^{z\cdot\mathrm{Ln}\, a}$$

9) *Обратные тригонометрические функции*

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\cdot\mathrm{Ln}(\, i\cdot z + \sqrt{1-z^2}\,); \quad \mathrm{Arccos}\, z = -i\cdot\mathrm{Ln}(\, z + \sqrt{z^2-1}\,);$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = \frac{-i}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{1+i\cdot z}{1-i\cdot z}; \qquad \mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{z-i}{z+i}.$$

Все обратные тригонометрические функции являются многозначными. Главные значения этих функций получаются при $k=0$ и обозначаются, как и логарифм, с маленькой буквы.

10) *Обратные гиперболические функции*

$$\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}(\, z + \sqrt{z^2+1}\,); \qquad \mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}(\, z + \sqrt{z^2-1}\,);$$

$$\mathrm{Arth}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{1+z}{1-z}; \qquad \mathrm{Arcth}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}.$$

Пример 4. Выделить действительную и мнимую части и представить в алгебраической форме значение $\mathrm{ch}\,(3+\frac{\pi i}{4})$.

Решение. 1 способ. Используя формулу $\mathrm{ch}\, z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, запишем

$$\mathrm{ch}\, z = \frac{1}{2}(e^{3+\frac{\pi i}{4}} + e^{-3-\frac{\pi i}{4}}) = \frac{1}{2}\left[e^3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + e^{-3}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+e^{-3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{e^3+e^{-3}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{e^3-e^{-3}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ch }3+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\text{sh }3.$$

2 способ. Используем связь с тригонометрическими функциями:

$\text{ch } z=\cos(iz)$, $\cos(x+iy)=\cos x\cdot\text{ch } y-i\cdot\sin x\cdot\text{sh } y$. Тогда

$$\text{ch}\left(3+\frac{\pi i}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}+3i\right)=$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\text{ch }3-i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\text{sh }3=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\text{ch}3+i\cdot\text{sh}3\right).$$

Пример 5. Выделить действительную и мнимую части и представить в алгебраической форме значение $(-1)^{4i}$.

Решение. Воспользуемся формулой $a^z=e^{z\cdot\text{Ln}\,a}$, получим $(-1)^{4i}=e^{4i\cdot\text{Ln}(-1)}$. Так как $\text{Ln}\,z=\ln|z|+i\,(\arg z+2\pi k)$, $k\in Z$, то $\text{Ln}\,(-1)=\ln|-1|+i\,(\arg(-1)+2\pi k)=\ln 1+i\,(\pi+2\pi k)=i\pi\,(1+2k)$.

Следовательно

$$(-1)^{4i}=e^{4i\cdot\text{Ln}(-1)}=e^{4i\cdot(i\pi\cdot(1+2k))}=e^{-4\pi\cdot(1+2k)},\quad k\in Z.$$

Значения этой многозначной функции на комплексной плоскости представлены на рис.3. Все они являются действительными числами. Главное значение выражения $(-1)^{4i}$ равно $e^{-4\pi}$.

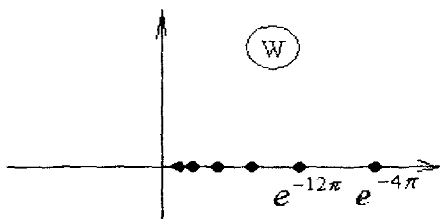

Рис.3. Значения многозначной функции $(-1)^{4i}$

Пример 6. Выделить действительную и мнимую части и представить в алгебраической форме значение $\operatorname{Arctg}\dfrac{3\sqrt{3}+8i}{7}$.

Решение. Применим формулу $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{-i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$, для чего вычислим выражение $\dfrac{1+i\cdot z}{1-i\cdot z} = \dfrac{1+\frac{i}{7}(3\sqrt{3}+8i)}{1-\frac{i}{7}(3\sqrt{3}+8i)} = \dfrac{-1+3\sqrt{3}\,i}{15-3\sqrt{3}\,i} = -\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$.

Найдем модуль и аргумент этого числа: $\left|-\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}i\right| = \dfrac{1}{6}\sqrt{1+3} = \dfrac{1}{3}$,

$$\arg\left(-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\pi = \frac{2\pi}{3} \quad \text{(2 четверть).}$$

Тогда по определению логарифмической функции получим:

$$\operatorname{Arctg}\frac{3\sqrt{3}+8i}{7} = \frac{-i}{2}\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{-i}{2}\left(\ln\frac{1}{3}+i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3}+k\right)+i\cdot\ln\sqrt{3}, \quad k\in Z.$$

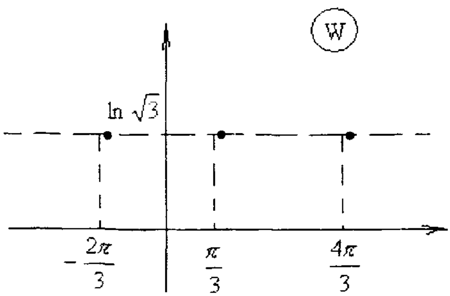

Рис. 4. Значения многозначной функции $\operatorname{Arctg}\dfrac{3\sqrt{3}+8i}{7}$

Значения этой многозначной функции представлены на рис.4. Главное значение функции равно

$$\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}=\frac{\pi}{3}+i\cdot\ln\sqrt{3}.$$

3.5. Производная функции комплексного переменного

Пусть функция $w=f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_o.

Производной функции $f(z)$ в точке z_o называется предел $f'(z_o)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_o+\Delta z)-f(z_o)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$, если этот предел существует и не зависит от способа, которым приращение стремится к нулю.

Функция $w=f(z)$ называется ***дифференцируемой*** в точке z_o, если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f=f(z_o+\Delta z)-f(z_o)=A\cdot\Delta z+\overline{o}(|\Delta z|),$$

где A – некоторое число.

Теорема 3.1. Функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_o тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(z_o)$.

В этом случае $A=f'(z_o)$, и приращение можно представить в виде

$$\Delta f=f'(z_o)\cdot\Delta z+\overline{o}(|\Delta z|).$$

Следствие. Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_o, то она непрерывна в этой точке, т.к. ее приращение $\Delta f\to 0$ при $\Delta z\to 0$.

Теорема 3.2. (необходимое условие дифференцируемости функции).

Если функция $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ дифференцируема в точке z_o, то ее действительная и мнимая части $u(x,y)$, $v(x,y)$ имеют в точке (x_o,y_o) частные производные, удовлетворяющие условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{3.3}$$

При этом $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$. (3.4)

Теорема 3. 3. (достаточные условия дифференцируемости функции).

Пусть функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ имеют ***непрерывные*** частные производные в точке (x_o, y_o), удовлетворяющие условиям Коши-Римана (3.3). Тогда функция $w = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ дифференцируема в точке $z_o = x_o + i \cdot y_o$.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_o и в некоторой ее окрестности. Если $f'(z_o) \neq 0$, то модуль производной $|f'(z_o)|$ равен ***коэффициенту растяжения*** бесконечно малого элемента в точке z_o при отображении $w = f(z)$. Все кривые, проходящие через точку z_o, при отображении $w = f(z)$ растягиваются (сжимаются) с одним и тем же коэффициентом $k = |f'(z_o)|$.

Аргумент производной $\varphi = \arg f'(z_o)$ функции $w = f(z)$ равен ***углу поворота*** в точке z_o при отображении $w = f(z)$. Все кривые, проходящие через точку z_o, при отображении $w = f(z)$ поворачиваются на один и тот же угол, равный $\varphi = \arg f'(z_o)$.

3.6. Аналитические и гармонические функции

Функция $w = f(z) = u + i \cdot v$ называется ***аналитической*** в точке z_o, если она дифференцируема как в самой точке z_o, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$ называется аналитической в области, если она является аналитической в каждой точке этой области. Точка z_0, в которой функция $f(z)$ является аналитической, называется ***правильной*** точкой функции.

Если же функция $f(z)$ является аналитической в некоторой проколотой окрестности точки z_0, но не является аналитической в самой точке z_0 или не определена в ней, то z_0 называется ***особой*** точкой функции $f(z)$.

Теорема 3.4. Главные значения основных элементарных функций комплексного переменного являются аналитическими функциями в области своего определения.

Гармонические функции

Пусть функция $w = f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ является аналитической в области D, причем функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Так как в D выполнены условия Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то, дифференцируя первое из этих условий по x, а второе по y, получим равенства $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$.

Отсюда с учетом равенства смешанных производных получим уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Если ввести обозначение $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (оператор Лапласа), то полученное уравнение можно написать в виде $\Delta u = 0$ (уравнение Лапласа).

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется ***гармонической***. Таким образом, действительная часть аналитической функции является гармонической функцией. Аналогично можно получить, что мнимая часть аналитической функции — также гармоническая функция, т.е. $\Delta v = 0$.

Теорема 3.5. Любая гармоническая функция, определенная в односвязной области, является вещественной или мнимой частью некоторой аналитической функции.

Пример 7. Дана функция $v(x,y) = 2xy + x$.

1) Проверить, что $v(x,y)$ является мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$.

2) Найти производную функции $f'(z)$ по мнимой части $v(x,y)$.

3) Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x,y)$ и данному значению $f(z_o) = f(0) = 0$.

4) Найти по восстановленной $f(z)$ производную $f'(z)$ и проверить ее совпадение с найденной $f'(z)$ из п.2.

5) Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $f(z)$ в точке $z_1 = 1 + i$.

Решение. Проверим, что функция $v(x,y)$ является гармонической. Для этого найдем $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y + 1$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Так как $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, то $v(x,y)$ является гармонической функцией и, следовательно, согласно теореме 3.5 служит мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$.

2) Для нахождения $f'(z)$ применим одну из формул (3.4). В нашем случае известна функция $v(x,y)$, поэтому

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i(2y+1) = 2(x+iy) + i = 2z + i.$$

3) Для восстановления функции $f(z)$ по известной мнимой части $v(x,y)$ воспользуемся условиями Коши- Римана (3.3)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

Из первого условия определяем, что $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy+x\right)=2x$. Интегрируя это равенство по x при постоянном y, находим действительную часть в виде $u(x,y)=\int 2x\,dx=x^2+C(y)$, где $C(y)$- неизвестная функция.

Для определения функции $C(y)$ подставим действительную часть $u(x,y)=x^2+C(y)$ во второе условие Коши- Римана $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+C(y)\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy+x\right)\ \Leftrightarrow\ 0+C'(y)=-(2y+1).$$

Интегрируя по y последнее равенство, определяем $C(y)=-y^2-y+D$, где D- произвольная постоянная. Таким образом, $u(x,y)=x^2-y^2-y+D$ и, следовательно, $f(z)=u+iv=x^2-y^2-y+D+i\cdot(2xy+x)$.

Преобразуем полученную функцию следующим образом:

$$f(z)=x^2-y^2-y+D+i\cdot(2xy+x)\ =\ x^2+i\cdot 2xy-y^2+i\cdot(x+i\,y)+D=$$
$$=(x+i\,y)^2+i\cdot(x+i\,y)+D=\ z^2+i\cdot z+D.$$

С учетом условия $f(0)=0$ найдем константу D: $0=0+D\ \Rightarrow\ D=0$.

4) Так как для аналитических функций справедливы формулы и правила дифференцирования функций, то $f'(z)=\left(z^2+i\cdot z\right)'=2z+i$. Такое же выражение для производной было получено в пункте 2.

5) Коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z_1 = 1 + i$ определяются по формулам: $k = |f'(z_1)|$, $\varphi = \arg f'(z_1)$. Вычислим значение производной в этой точке: $f'(z_1) = 2(1+i) + i = 2 + 3i$. Тогда коэффициент растяжения и угол поворота будут равны

$$k = |f'(z_1)| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\,; \qquad \varphi = \arg f'(z_1) = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$$

Таким образом, при отображении, осуществляемом аналитической функцией $f(z) = z^2 + i \cdot z$, коэффициент растяжения бесконечно малого элемента в точке $z_1 = 1 + i$ равен $k = \sqrt{3}$, а угол поворота в этой точке равен $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$.

3.7. Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть в области D комплексной плоскости определена однозначная и непрерывная функция $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ и задана кусочно-гладкая ориентированная кривая L с начальной точкой A и конечной точкой B. Интеграл от функции комплексного переменного вдоль кривой L определяется следующим образом:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u + i \cdot v)(dx + i \cdot dy) = \int_L \big(u\,dx - v\,dy\big) + i\int_L \big(v\,dx + u\,dy\big).$$

Если функция $f(z)$ является многозначной, то при интегрировании необходимо выделить ее однозначную ветвь.

Интеграл от функции комплексного переменного представляет собой сумму двух криволинейных интегралов второго рода от действительных функций. Вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению обычных определенных интегралов.

Пример 8. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного $\int\limits_{AB} \overline{z} \cdot \operatorname{Im} z^2\, dz$ по данной кривой $L = AB$, которая является дугой параболы $y = 3x^2$ с началом в точке $z_A = 0$ и концом в точке $z_B = 1 + 3i$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение.

$$z = x + i\,y \quad , \qquad \overline{z} = x - i\,y, \qquad z^2 = (x + i\,y)^2 = x^2 + 2xy \cdot i - y^2 \ ,$$

$$\operatorname{Im} z^2 = 2x\,y, \qquad dz = d(x + i\,y) = dx + i\ dy.$$

Кривая AB - дуга параболы $y = 3x^2$ с начальной точкой A с абсциссой $x_A = 0$ и конечной точкой B с абсциссой $x_B = 1$ (рис.5). Поэтому на этой кривой

$$\overline{z}\Big|_{y=3x^2} = x - i \cdot 3x^2, \qquad \operatorname{Im} z^2\Big|_{y=3x^2} = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3.$$

$$dz\Big|_{y=3x^2} = dx + i \cdot 6x\,dx = (1 + 6i\,x)dx,$$

$$\int\limits_{AB} \overline{z} \cdot \operatorname{Im} z^2 dz = \int\limits_0^1 \left(x - i \cdot 3x^2\right) 6x^3 \left(1 + 6i\,x\right) dx = \left[\begin{array}{c} \text{выделим} \\ \text{действительную} \\ \text{и мнимую части} \end{array}\right] =$$

$$= 6\int\limits_0^1 \left(x^4 + 18x^6\right) dx + i\int\limits_0^1 18x^5 dx = \frac{582}{35} + 3\,i.$$

Если кривая L задана в параметрическом виде $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то интеграл сводится к вычислению определенного интеграла по действительной переменной t:

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot z'(t)\ dt. \qquad (3.5)$$

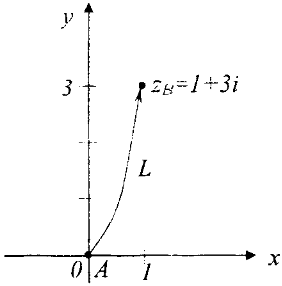

Рис. 5. Кривая интегрирования к примеру 8

Пример 9. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного $\int\limits_L (z^3+\sin z)\,dz$ по данной кривой $L:\{\ |z|=1,\ \operatorname{Re} z \ge 0\}$.

Решение. Кривая L представляет собой правую полуокружность с радиусом $R=1$ и центром в точке (0, 0) (рис.6). Такая полуокружность описывается уравнением $z=e^{it}=\cos t+i\cdot\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Найдем вид подынтегрального выражения при $z=e^{it}$:

$$(z^3+\sin z)\,dz\,\Big|_{z=e^{it}}=(e^{3it}+\sin e^{it})\cdot i\,e^{it}dt.$$

В интеграле можно перейти к интегрированию по параметру по формуле (3.5):

$$\int\limits_L (z^3+\sin z)dz = i\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(e^{3it}+\sin e^{it})e^{it}dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{it}\right)^3 d\left(e^{it}\right)+$$

$$+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(e^{it})d\left(e^{it}\right) = \frac{1}{4}e^{i\frac{4\pi}{2}}-\frac{1}{4}e^{-i\frac{4\pi}{2}}-\cos e^{i\frac{\pi}{2}}+\cos e^{-i\frac{\pi}{2}} =$$

$$=\frac{1}{4}(1)-\frac{1}{4}(1)-\cos i+\cos(-i)=0.$$

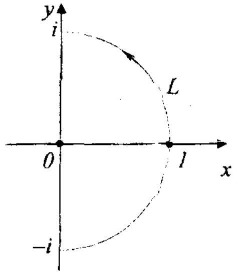

Рис. 6. Кривая интегрирования к примеру 9

3.8. Интегральная теорема Коши

Эта теорема является одним из важнейших результатов теории функций комплексного переменного.

Теорема 3.6 (интегральная теорема Коши для односвязной области).

Пусть $f(z)=u+iv$ является аналитической функцией в односвязной замкнутой области D, ограниченной кусочно-гладкой границей Γ. Тогда интеграл от этой функции по замкнутому контуру Γ равен нулю (обход контура Γ — против часовой стрелки):

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0 \qquad (3.6)$$

Теорема 3.7 (интегральная теорема Коши для многосвязной области).

Пусть $f(z)=u+iv$ является аналитической функцией в многосвязной замкнутой области D, ограниченной внешней границей Γ и внутренними границами γ_k, $k=1,2,\ldots,n$ (γ_k — замкнутые непересекающиеся контуры, расположенные внутри D).

Тогда интеграл от $f(z)$ по внешней границе равен сумме интегралов по внутренним границам области (обход всех контуров - против часовой стрелки):

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz\,. \qquad (3.7)$$

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть $f(z)=u+iv$ является аналитической функцией в односвязной области D. Фиксируем в этой области некоторую точку z_0 и обозначим через $\int\limits_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma$ интеграл по какой-либо кривой, целиком лежащей в D и соединяющей точки z_0 и z. В силу теоремы Коши этот интеграл не зависит от выбора кривой интегрирования и является однозначной функцией от z:

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma=\Phi(z). \tag{3.8}$$

Теорема 3.8. Пусть $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру $L\in D$ равен нулю: $\oint\limits_L f(z)dz=0$. Тогда аналитическая функция (3.8) является первообразной для $f(z)$ в области D и $\Phi'(z)=f(z)$.

Методы вычисления интегралов от элементарных аналитических функций в комплексном анализе те же, что и в действительном. Верна таблица интегралов и формула Ньютона – Лейбница.

Пример 10. Вычислить интеграл $\int\limits_L(\sin z+z^5)dz$, где L – ломаная, соединяющая точки $z_0=0,\ z_1=1,\ z_2=2i$.

Решение. Ломаная интегрирования приведена на рис.7. Так как подынтегральная функция является аналитической на всей комплексной плоскости, то интеграл зависит только от начальной точки $z_0=0$ и конечной точки $z_2=2i$ ломаной, т.е.

$$\int\limits_L (\sin z + z^5)\, dz = \int\limits_0^{2i} (\sin z + z^5)\, dz = \left(-\cos z + \frac{z^6}{6}\right)\Bigg|_0^{2i} =$$

$$= -\cos 2i + \frac{(2i)^6}{6} + \cos 0 = -ch\, 2 - \frac{29}{3}.$$

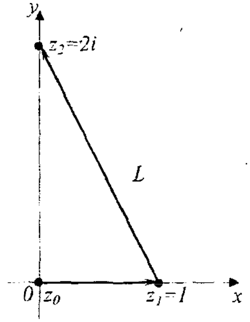

Рис. 7. Ломаная интегрирования к примеру 10

Дальнейшие параграфы посвящены методам интегрирования функций, не являющихся аналитическими во всей области D.

3.9. Интегральная формула Коши

Эта формула связывает значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0 области D со значениями этой функции в граничных точках области. Во всех случаях направление обхода контура Γ против часовой стрелки.

Теорема 3.9 (формула Коши).

Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной замкнутой области D, ограниченной кусочно-гладкой границей Γ.

Тогда для любой внутренней точки $z_0 \in D$ справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Теорема 3.10. (формула Коши для n - й производной).

Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной замкнутой области D, ограниченной кусочно-гладкой границей Γ.

Тогда для любой внутренней точки $z_0 \in D$ справедлива формула:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Правило вычисления интеграла по замкнутому контуру

1. Построить контур Γ, показать его обход.
2. Найти особые точки подынтегральной функции.
3. Определить, какие особые точки попадают внутрь контура.
4. Если внутри контура Γ только одна особая точка, то в зависимости от вида интеграла применить одну из формул Коши в виде, удобном для вычисления интеграла:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0), \tag{3.9}$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0). \tag{3.10}$$

5. Если внутри контура Γ несколько особых точек, то окружить их непересекающимися внутренними контурами γ_k и применить:

- сначала теорему Коши для многосвязной области (3.7);
- затем в зависимости от вида интеграла по каждому из контуров γ_k применить одну из формул Коши – (3.9) или (3.10).

Пример 11. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{(z-i)^3} dz$.

Решение. Подынтегральная функция имеет внутри контура (рис.8) только одну особую точку $z = i$. В то же время функция в числителе $f(z) = \sin z$ является аналитической в области $|z - i| \leq 1$. Применим интегральную формулу Коши для производных (3.10) при $n = 2$. Получим:

$$\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{(z-i)^3}\, dz = \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{(z-i)^{2+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''\big|_{z=i} = -\pi i \cdot \sin i = \pi \operatorname{sh} 1.$$

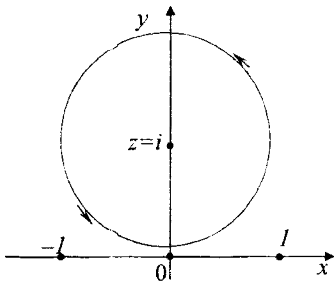

Рис. 8. Контур интегрирования к примеру 11

__Пример 12.__ Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2 + z - 2}\, dz$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{\cos z}{z^2 + z - 2} = \frac{\cos z}{(z+2)(z-1)}$ внутри окружности $|z| = 3$ имеет две особые точки: $z_1 = -2$, $z_2 = 1$, в которых нарушается аналитичность функции $f(z)$. Окружим эти точки непересекающимися контурами γ_1, γ_2, лежащими внутри круга $|z| < 3$. В результате получим трехсвязную область D с вырезанными кругами, изображенную на рис.9. Функция $f(z)$ является аналитической в этой трехсвязной области, т.к. особые точки $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$ уже не принадлежат этой области.

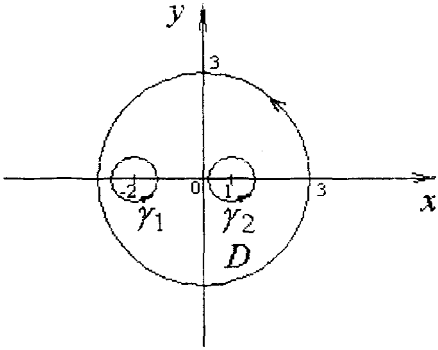

Рис. 9. Трехсвязная область аналитичности функции к примеру 12

По теореме Коши для многосвязной области (3.7):

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2+z-2}dz = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\cos z}{(z+2)(z-1)}dz + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\cos z}{(z+2)(z-1)}dz.$$

Вычислим первый интеграл в правой части этого равенства по формуле Коши (3.9). Запишем этот интеграл в виде:

$$I_1 = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\cos z}{(z+2)(z-1)}dz = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\left(\dfrac{\cos z}{z-1}\right)}{(z+2)}dz = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\varphi(z)}{(z+2)}dz.$$

Функция $\varphi(z) = \dfrac{\cos z}{z-1}$ не имеет внутри контура γ_1 (окружающего $z_1 = -2$) особых точек и является аналитической внутри этого контура. Применяя к интегралу I_1 формулу Коши (3.9), получим

$$I_1 = 2\pi i \cdot \varphi(-2) = 2\pi i \frac{\cos(-2)}{-2-1} = -\frac{2}{3}\pi i \cos 2.$$

Вычислим аналогично второй интеграл по формуле (3.9):

$$I_2 = \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\cos z}{(z+2)(z-1)}\,dz = \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\left(\dfrac{\cos z}{z+2}\right)}{(z-1)}\,dz = 2\pi i\,\frac{\cos 1}{1+2} = \frac{2}{3}\pi i \cos 1.$$

Окончательно получим: $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{\cos z}{z^2+z-2}\,dz = I_1 + I_2 = \dfrac{2\pi i}{3}(\cos 1 - \cos 2).$

3.10. Ряды в комплексной области

Аналитическую функцию $f(z)$ в каждой внутренней точке области аналитичности можно разложить в степенной ряд Тейлора.

Теорема 3.11. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, единственным образом разлагается в этом круге в сходящий к ней степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n. \tag{3.11}$$

Ряд (3.11) называется ***рядом Тейлора*** аналитической функции $f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$.

Коэффициенты C_n этого разложения можно найти по формуле $C_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$, где Γ - произвольный контур, целиком принадлежащий кругу сходимости и содержащий внутри точку z_0.

Обобщением ряда Тейлора является ***ряд Лорана***, в который разлагается функция, аналитическая в кольце. Нахождение кольца аналитичности функции основано на теореме 3.4. и определении особых точек.

Теорема 3.12. Пусть на комплексной плоскости задано кольцо $0 \le r < |z - z_0| < R < +\infty$ с центром в точке z_0. Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, единственным образом разлагается в этом кольце в сходящийся к ней ряд:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}. \tag{3.12}$$

Коэффициенты C_n этого разложения можно найти по формуле $C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где Γ - произвольная окружность $|z - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$, ориентированная против часовой стрелки.

Ряд (3.12) называется ***рядом Лорана*** функции $f(z)$ по степеням $(z - z_0)$, при этом ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ с неотрицательными степенями называют ***правильной*** или регулярной частью ряда Лорана, а ряд с отрицательными степенями $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$ - его ***главной*** частью. Правильная часть ряда Лорана есть степенной ряд, сходящийся в круге $|z - z_0| < R$, а главная часть представляет собой ряд, сходящийся в области $|z - z_0| > r$.

Правило разложения функции в ряд Лорана

1. Построить на комплексной плоскости точку z_0.
2. Найти особые точки z_k функции $f(z)$ и построить их на комплексной плоскости.
3. Построить окружности с центром в точке z_0, проходящие через каждую из особых точек. Найти радиусы этих окружностей как расстояния от точки z_0 до каждой из особых точек $R_k = |z_k - z_0|$.

4. Записать аналитические выражения образовавшихся колец на комплексной плоскости $R_{k-1} < |z - z_0| < R_k$.

5. В каждом из колец найти разложение в ряд Лорана.

__Пример 13.__ Найти все возможные разложения функции $f(z) = \dfrac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$ в ряд Лорана по степеням z.

Решение. Чтобы в ряде Лорана получить степени z, нужно выбрать центром разложения точку $z_0 = 0$. Особыми точками функции служат корни знаменателя $50z^2+5z^3-z^4 = -z^2(z-10)(z+5)$, т.е. $z_0 = 0$, $z_1 = 10$, $z_2 = -5$. Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби:

$$\frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4} = -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z-10} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+5}.$$

Рассмотрим на комплексной плоскости три области: D_1 - кольцо $0 < |z| < 5$, D_2 - кольцо $5 < |z| < 10$ и D_3 - область $|z| > 10$ (рис.10).

В каждой из этих областей функция $f(z)$ является аналитической, т.к. ее особые точки не принадлежат этим областям. Следовательно, по теореме 3.12 в каждой из этих областей функция $f(z)$ единственным образом разлагается в ряд Лорана.

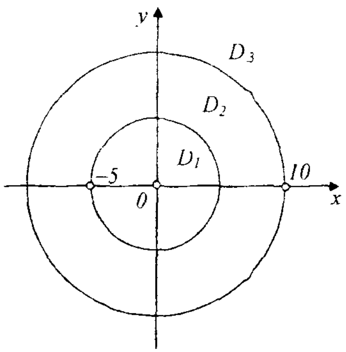

Рис. 10. Области аналитичности функции к примеру 13

1. В кольце D_1: $\{\ 0<|z|<5\ \}$ (рис.10) выполняются неравенства $\left(\left|\frac{z}{5}\right|<1 \text{ и } \left|\frac{z}{10}\right|<1\right)$ и можно записать:

$$\frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10\left(1-\frac{z}{10}\right)}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5\left(1-\frac{z}{-5}\right)}.$$

Дробь $\frac{1}{\left(1-\frac{z}{10}\right)}=\frac{b_1}{1-q}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=1$ и знаменателем $q=\frac{z}{10}$, $|q|=\left|\frac{z}{10}\right|<1$, поэтому

$$\frac{1}{1-\frac{z}{10}}=\sum_{n=0}^{\infty}b_1\cdot q^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{10}\right)^n.$$

Аналогично получаем, что $\frac{1}{1-\left(\frac{z}{-5}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{5}\right)^n$. Функция разлагается в ряд

$$\frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{100}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{10}\right)^n+\frac{1}{25}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{5}\right)^n=$$

$$=\frac{2}{z^2}-\frac{1}{10z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^{n+2}}+\frac{(-1)^n}{5^{n+2}}\right)z^n.$$

Заметим, что в кольце $0<|z|<5$ главная часть ряда Лорана состоит из двух слагаемых $\frac{2}{z^2}$ и $-\frac{1}{10z}$.

2. В кольце D_2 на рис.10 выполняются неравенства

$(5<|z|<10) \Rightarrow \left(\left| \frac{5}{z} \right| < 1 \text{ и } \left| \frac{z}{10} \right| < 1 \right)$. Функция разлагается в ряд

$$f(z) = -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10\left(1-\frac{z}{10}\right)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z\left(1+\frac{5}{z}\right)} =$$

$$= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} + \frac{1}{100} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{10}\right)^n + \frac{1}{5z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{z}\right)^n =$$

$$= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{10^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^{n-1}}{z^{n+1}}.$$

Заметим, что в кольце $5<|z|<10$ главная часть ряда Лорана $\frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^{n-1}}{z^{n+1}}$ содержит бесконечное число слагаемых.

3) Если $z \in D_3$, то $|z|>10$, тогда $\left| \frac{10}{z} \right| < 1$ и $\left| \frac{5}{z} \right| < 1$.

$$f(z) = -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{z\left(1-\frac{10}{z}\right)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z\left(1+\frac{5}{z}\right)} = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} -$$

$$-\frac{1}{10z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{10}{z}\right)^n + \frac{1}{5z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{z}\right)^n = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^{n-1}}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^{n-1}}{z^{n+1}}.$$

В области D_3 ряд Лорана функции $f(z)$ содержит только главную часть.

<u>**Пример 14.**</u> Найти все возможные разложения функции $f(z) = \frac{2z}{z^2-4}$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$, $z_0 = -1+3i$.

Решение. Особыми точками функции $\dfrac{2z}{z^2-4}$ являются $z_1=-2,\ z_2=2$.

Центром разложения является точка $z_0=-1+3i$. Радиусы r и R колец разложения в ряд Лорана (рис.11) находятся как расстояния от z_0 до особых точек функции $f(z)$: $r=|z_1-z_0|=\sqrt{(-1+2)^2+3^2}=\sqrt{10}$,

$$R=|z_2-z_0|=\sqrt{(-1-2)^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

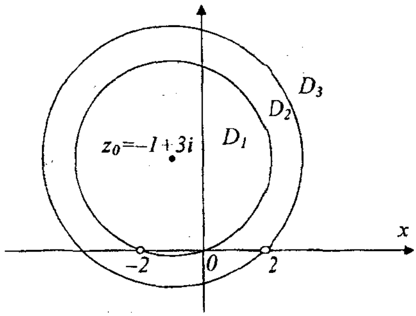

Рис. 11. Области аналитичности функции к примеру 14

Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2-4}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-2}.$$

1. В круге D_1: $|z-z_0|=|z+1-3i|<\sqrt{10}$ (рис.11) выполняется неравенство $\dfrac{|z+1-3i|}{\sqrt{10}}<1$. В этом круге функция $f(z)$ является аналитической и, следовательно, по теореме 3.11 разлагается в ряд Тейлора. Представим функцию в виде

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+1-3i)+(1+3i)}+\frac{1}{(z+1-3i)-(3-3i)}=$$

$$=\frac{1}{1+3i}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{z+1-3i}{1+3i}\right)}-\frac{1}{3-3i}\cdot\frac{1}{1-\left(\dfrac{z+1-3i}{3-3i}\right)}.$$

Так как в круге D_1 выполняются неравенства

$$\left|\frac{z+1-3i}{1+3i}\right|=\frac{|z+1-3i|}{\sqrt{10}}<\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=1 \quad \text{и}$$

$$\left|\frac{z+1-3i}{3-3i}\right|=\frac{|z+1-3i|}{3\sqrt{2}}<\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2}}<1,$$

то, воспользовавшись формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим разложение функции в ряд

$$f(z)=\frac{1}{1+3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z+1-3i}{1+3i}\right)^n-\frac{1}{3-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1-3i}{3-3i}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(1+3i)^{n+1}}-\frac{1}{(3-3i)^{n+1}}\right)(z+1-3i)^n.$$

В круге D_1 ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора и содержит только правильную часть, так как функция $f(z)$ аналитическая.

2. В кольце D_2: $\sqrt{10}<|z+1-3i|<3\sqrt{2}$ (рис.11) выполняются неравенства $\dfrac{|z+1-3i|}{3\sqrt{2}}<\dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=1$ и $\dfrac{\sqrt{10}}{|z+1-3i|}<\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=1$. В этой области функция является аналитической и по теореме 3.12 разлагается в ряд

$$f(z)=\frac{1}{(z+1-3i)+(1+3i)}+\frac{1}{(z+1-3i)-(3-3i)}=$$

$$=\frac{1}{z+1-3i}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{1+3i}{z+1-3i}\right)}-\frac{1}{3-3i}\cdot\frac{1}{1-\left(\dfrac{z+1-3i}{3-3i}\right)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+3i)^n}{(z+1-3i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1-3i)^n}{(3-3i)^{n+1}}.$$

В кольце D_2 ряд Лорана содержит как правильную часть (вторая сумма), так и главную часть (первая сумма).

3. В области D_3: $|z+1-3i|>3\sqrt{2}$ (рис.11) выполняются неравенства $\frac{3\sqrt{2}}{|z+1-3i|}<\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=1$ и $\frac{\sqrt{10}}{|z+1-3i|}<\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2}}<1$. В этой области функция является аналитической и по теореме 3.12 разлагается в ряд

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+1-3i)+(1+3i)}+\frac{1}{(z+1-3i)-(3-3i)}=$$

$$=\frac{1}{z+1-3i}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1+3i}{z+1-3i}\right)}+\frac{1}{z+1-3i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{3-3i}{z+1-3i}\right)}=$$

$$=\frac{1}{z+1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+3i)^n}{(z+1-3i)^n}+\frac{1}{z+1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-3i)^n}{(z+1-3i)^n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+3i)^n+(3-3i)^n}{(z+1-3i)^{n+1}}.$$

Ряд Лорана в области D_3 содержит только главную часть.

<u>**Пример 15.**</u> Разложить функцию $f(z)=z\cdot\sin\left(\frac{z^2-2z}{(z-1)^2}\right)$ в окрестности точки $z_0=1$ в ряд Лорана.

Решение. Точка $z_0=1$ является особой точкой функции. В аргументе синуса выделим целую часть и представим функцию в виде:

$$f(z)=(z-1+1)\sin\left(1-\frac{1}{(z-1)^2}\right)=(z-1)\sin\left(1-\frac{1}{(z-1)^2}\right)+$$

$$+\sin\left(1-\frac{1}{(z-1)^2}\right)=(z-1)\left(\sin 1\cdot\cos\frac{1}{(z-1)^2}-\cos 1\cdot\sin\frac{1}{(z-1)^2}\right)+$$

$$+\sin 1\cdot\cos\frac{1}{(z-1)^2}-\cos 1\cdot\sin\frac{1}{(z-1)^2}.$$

Используя известные разложения для $\sin t$ и $\cos t$ при $t=\frac{1}{(z-1)^2}$,

будем иметь $\cos\frac{1}{(z-1)^2}=1-\frac{1}{2!(z-1)^4}+\frac{1}{4!(z-1)^8}-\dots$

$$\sin\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{3!(z-1)^6}+\frac{1}{5!(z-1)^{10}}-\dots$$

С учетом этих разложений окончательно получаем:

$$f(z)=\sin 1\cdot\left((z-1)-\frac{1}{2!(z-1)^3}+\frac{1}{4!(z-1)^7}-\dots\right)-$$

$$-\cos 1\cdot\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^5}+\frac{1}{5!(z-1)^9}-\dots\right)+$$

$$+\sin 1\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^4}+\frac{1}{4!(z-1)^8}-\dots\right)-$$

$$-\cos 1\cdot\left(\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{3!(z-1)^6}+\frac{1}{5!(z-1)^{10}}-\dots\right).$$

Это разложение имеет место в кольце $0<|z-1|<R$, где R - произвольное.

3.11. Нули и особые точки аналитических функций

Нулем функции $f(z)$ называется комплексное число z_0, для которого $f(z_0)=0$. Нули функции называются ***изолированными***, если их можно окружить окрестностью, не содержащей других нулей функций.

Теорема 3.13. Нули аналитической функции $f(z)$ изолированы.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки z_0 и в самой этой точке. Тогда по теореме 3.11 в окрестности точки $|z-z_0|<R$ имеет место разложение в ряд Тейлора

$$f(z)=C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+C_3(z-z_0)^3+\ldots \tag{3.13}$$

Если $z=z_0$ - нуль функции $f(z)$, то из равенства (3.13) следует, что $C_0=0$.

Будем говорить, что точка $z=z_0$ является ***нулем порядка*** k функции $f(z)$, если коэффициенты $C_0,\ C_1,\ldots,C_{k-1}$ ряда (3.13) равны нулю, а $C_k\neq 0$.

При $k=1$ нуль $z=z_0$ называется ***простым***. Определение порядка нулей функции основано на следующих теоремах.

Теорема 3.14. *Для того чтобы точка* $z=z_0$ *была* ***нулем*** *порядка* k функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ можно было представить в виде $f(z)=(z-z_0)^k\cdot\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - аналитическая в окрестности точки $z=z_0$ функция, причем $\varphi(z_0)\neq 0$.

Теорема 3.15. Для того чтобы точка $z=z_0$ была ***нулем*** порядка k функции $f(z)$, необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(k-1)}(z_0)=0,\quad f^{(k)}(z_0)\neq 0.$$

Пример 16. Найти нули функции $f(z)=(z^2+1)^3\cdot\operatorname{sh} z$ и определить их порядок.

Решение. Функция $f(z)=0$ при $z=\pm i$, $z=\pi k i$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$

Определим порядок нуля $z=i$, для чего преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z)=(z-i)^3(z+i)^3\operatorname{sh} z=(z-i)^3\cdot\varphi(z).$$

Так как функция $\varphi(z)=(z+i)^3\operatorname{sh} z$ является аналитической в окрестности точки $z=i$ и $\varphi(i)\neq 0$, то по теореме 3.14 точка $z=i$ является нулем 3-го порядка. Аналогично проверяется, что $z=-i$ также является нулем 3-го порядка. Для определения порядка нулей $z=\pi k i$ найдем производную

$$f'(z)=3(z^2+1)^2 \operatorname{sh} z+(z^2+1)^3 \operatorname{ch} z.$$

Первое слагаемое правой части этого равенства обращается в нуль при $z=\pi k i$, а второе слагаемое при $z=\pi k i$ отлично от нуля. Следовательно $f'(\pi k i)\neq 0$, и по теореме 3.15 точки $z=\pi k i$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ являются простыми нулями.

Изолированные особые точки

Точка z_0 называется изолированной ***особой точкой*** функции $f(z)$, если в этой точке функция $f(z)$ не определена или не является аналитической, но $f(z)$ определена и является аналитической в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Пусть z_0 - изолированная особая точка. Разложим функцию $f(z)$ в проколотой окрестности точки z_0 в ряд Лорана (3.12):

1) если ряд Лорана не содержит главной части, т.е. имеет вид $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$, то точка z_0 называется ***устранимой*** особой точкой;

2) если главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ содержит конечное число слагаемых и имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{C_{-k}}{(z-z_0)^k},$$

то точка z_0 называется ***полюсом*** ***k-го порядка***. При $k=1$ полюс называется ***простым***;

3) если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

то точка z_0 называется ***существенно особой*** точкой функции $f(z)$;

4) если особая точка $z=z_0$ является ***неизолированной***, т.е. в любой ее окрестности содержится хотя бы одна другая особая точка функции $f(z)$ (например, z_0 - предел полюсов), то функцию $f(z)$ нельзя разложить в ряд Лорана в окрестности этой точки;

5) исследование характера бесконечно удаленной точки $z=\infty$ удобнее проводить путем замены $z=\dfrac{1}{\eta}$, с помощью которой бесконечно удаленная точка $z=\infty$ переходит в точку $\eta=0$.

Теорема 3.16. Точка $z=z_0$ является:

- устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a\neq\infty$;
- полюсом, если $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$;
- существенно особой точкой, если $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ не существует.

Теорема 3.17. Для того чтобы точка $z=z_0$ была ***полюсом*** порядка k функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ можно было представить в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}$, где $\varphi(z)$- аналитическая в окрестности точки z_0 функция, причем $\varphi(z)\neq 0$.

Теорема 3.18. Точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда точка z_0 является нулем порядка k функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Теорема 3.19. Так как нули аналитических функций изолированы, то полюсы аналитических функций также изолированы.

Пусть функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Если $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - аналитические функции, то функция $f(z)$ может иметь полюсы только в нулях знаменателя.

Теорема 3.20. Если точка $z=z_0$ является нулем порядка s числителя $\varphi(z)$, и она же является нулем порядка m знаменателя $\psi(z)$, то

при $s\geq m$ точка z_0 является устранимой особой точкой $f(z)$,

при $s<m$ точка z_0 является полюсом порядка $k=(m-s)$ функции $f(z)$.

Пример 17. Определить характер особой точки $z=0$ функции $f(z)=\dfrac{1}{2+z^2-2\operatorname{ch} z}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\infty$, то $z=0$ — полюс. Найдем порядок нуля знаменателя данной дроби, обозначив его $\psi(z)=2+z^2-2\operatorname{ch} z$.

$$\psi(0)=0,\quad \psi'(0)=(2z-2\operatorname{sh} z)\big|_{z=0}=0,\quad \psi''(0)=(2-2\operatorname{ch} z)\big|_{z=0}=0,$$

$$\psi'''(0)=-2\operatorname{sh} z\big|_{z=0}=0,\quad \psi^{(4)}(0)=-2\operatorname{ch} z\big|_{z=0}=-2\neq 0.$$

Следовательно, по теореме 3.15 точка $z=0$ является нулем 4-го порядка знаменателя $\psi(z)$, поэтому по теореме 3.18 эта точка является полюсом 4-го порядка данной функции $f(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$.

Пример 18. Определить характер особой точки $z=1$ функции $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{2e^{z-1}-z^2-1}$.

Решение. Пусть $\varphi(z)=\sin\pi z$, $\psi(z)=2e^{z-1}-z^2-1$, $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.

Найдем производные числителя и знаменателя:

$\varphi(1)=0$, $\quad\varphi'(1)=\pi\cos\pi z\big|_{z=1}=-\pi\neq0$. Следовательно, по теореме 3.15 $z=1$ — нуль порядка $s=1$ числителя $\varphi(z)$.

$$\psi(1)=0,\quad \psi'(1)=(2e^{z-1}-2z)\Big|_{z=1}=0,\quad \psi''(1)=(2e^{z-1}-2)\Big|_{z=1}=0,$$

$$\psi'''(1)=2e^{z-1}\Big|_{z=1}=2\neq0.$$

Следовательно, точка $z=1$ — нуль порядка $m=3$ знаменателя $\psi(z)$.

По теореме 3.20 точка $z=1$ является полюсом порядка $k=m-s=3-1=2$ функции $f(z)$.

Пример 19. Определить характер особой точки $z=0$ функции $f(z)=z\cos\dfrac{2}{z^3}$.

Решение. Пользуясь известным разложением в ряд Маклорена для косинуса, разложим функцию $\cos\dfrac{2}{z^3}$ в ряд Лорана в окрестности $z_0=0$:

$$f(z)=z\cos\frac{2}{z^3}=z\left(1-\left(\frac{2}{z^3}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}+\left(\frac{2}{z^3}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}-\ldots\right)=z-\frac{4}{z^5 2!}+\frac{16}{z^{11}4!}-\ldots$$

Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности $z=0$ содержит бесконечное число слагаемых, следовательно $z=0$ – существенно особая точка.

Пример 20. Определить характер особых точек функции $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$.

Решение. Особыми точками данной функции являются точки $z_k=\dfrac{1}{\pi k}$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$ и $z_0=0$. Нетрудно проверить, что точки $z_k=\dfrac{1}{\pi k}$ являются изолированными простыми полюсами. Для определения характера особой точки $z_0=0$ найдем $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\pi k}=0$. Таким образом, точка $z_0=0$ является пределом полюсов функции $f(z)$, следовательно в любой окрестности этой точки содержится бесконечное число полюсов функции $f(z)$. По определению $z_0=0$ — неизолированная особая точка, поэтому функцию $f(z)$ нельзя разложить в ряд Лорана в окрестности этой точки.

3.12. Вычеты

Пусть z_0 — изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$. Тогда в проколотой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\dfrac{C_{-1}}{(z-z_0)}+\dfrac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\dfrac{C_{-3}}{(z-z_0)^3}+\ldots$

Коэффициент C_{-1} при степени $(z-z_0)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 называется ***вычетом*** функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $\operatorname*{Res}\limits_{z_0} f(z)=C_{-1}$ или $\operatorname*{Выч}\limits_{z_0} f(z)=C_{-1}$.

Запишем вычет с помощью формулы для коэффициентов ряда Лорана:

$$\operatorname*{Res}\limits_{z_0} f(z)=C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{-1+1}}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}f(z)dz,$$

где γ - произвольный замкнутый контур, окружающий точку z_0, не содержащий других особых точек и ориентированный против часовой стрелки.

Вычисление вычетов

1. Пусть $z = z_0$ — ***устранимая*** особая точка функции $f(z)$. Тогда ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности $z = z_0$ имеет вид:

$$f(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

Отсюда следует, что в устранимой особой точке

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = C_{-1} = 0. \tag{3.14}$$

2. Пусть z_0 — ***простой полюс*** функции $f(z)$. Тогда вычет в точке z_0 можно вычислить по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{3.15}$$

3. Если z_0 — ***простой полюс*** для функции $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - аналитические в точке z_0 функции, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то вычет в точке z_0 можно вычислить по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{3.16}$$

4. Если z_0 — ***полюс порядка*** k функции $f(z)$, то вычет в точке z_0 можно вычислить по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}. \tag{3.17}$$

В формуле (3.17) вычисляется предел от *производной* $(k-1)$ порядка.

5. В *существенно особой* точке вычет вычисляется с помощью разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 по формуле $\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = C_{-1}$.

6. Рассмотрим вычисление вычета *в бесконечно удаленной точке.* Пусть функция $f(z)$ является аналитической в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Тогда ее ряд Лорана в области $|z| > R$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n .$$

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ называется коэффициент при степени z^{-1} разложения в ряд Лорана этой функции, взятый с обратным знаком, т.е. $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = -C_{-1}$.

Пример 21. Найти вычеты во всех особых точках функции

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-2)(z+1)^2}.$$

Решение. Особыми точками $f(z)$ являются точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = -1$. Так как $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = -\frac{1}{2}$, то $z = 0$ – устранимая особая точка $f(z)$, поэтому $\operatorname*{Res}_{0} f(z) = 0$ по формуле (3.14).

Точка $z = 2$ является простым полюсом функции $f(z)$. Для нахождения вычета $f(z)$ в точке $z = 2$ применим формулу (3.15):

$$\operatorname*{Res}_{2} f(z) = \lim_{z \to 2} (z-2) \frac{e^z - 1}{z(z-2)(z+1)^2} = \lim_{z \to 2} \frac{e^z - 1}{z(z+1)^2} = \frac{e^2 - 1}{18}$$

Точка $z = -1$ является полюсом второго порядка функции $f(z)$. Применяя формулу (3.17) при $k = 2$, найдем

$$\operatorname*{Res}_{-1} f(z) = \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{e^z-1}{z(z-2)(z+1)^2}\right] = \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z-1}{z^2-2z}\right] =$$

$$= \lim_{z\to-1}\left[\frac{e^z\left(z^2-2z\right)-\left(e^z-1\right)(2z-2)}{\left(z^2-2z\right)^2}\right] = \frac{7e^{-1}-4}{9}.$$

Пример 22. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ в особых точках.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются $z=1$ (простой полюс) и $z=0$ (существенно особая точка).

Для нахождения $\operatorname*{Res}_{1} f(z)$ применим формулу (3.16), где

$$\varphi(z)=e^{\frac{1}{z}},\ \psi(z)=1-z,\quad \psi'(z)=-1,\qquad \operatorname*{Res}_{1} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}=\frac{e^1}{-1}=-e.$$

Для нахождения $\operatorname*{Res}_{0} f(z)$ разложим $f(z)$ в окрестности $z=0$ в ряд Лорана:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{1-z}=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\ldots\right)\cdot\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right).$$

Этот ряд сходится при $|z|<1$. Перемножим ряды и выделим коэффициент C_{-1} при степени z^{-1}. Получим следующий ряд:

$$f(z)=[\text{правильная часть}]+\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\right)+[\text{ост. главная часть}].$$

Следовательно $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=C_{-1}=1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots=e-1$ по известному разложению для показательной функции.

3.13. Основная теорема о вычетах

Особые точки аналитических функций и вычеты в них играют важную роль в комплексном анализе. С помощью вычетов можно вычислять интегралы, не находя первообразных.

Теорема 3.21. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой односвязной области $\bar{D}$ с положительно ориентированной границей Γ за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих внутри области D. Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z). \qquad (3.18)$$

Теорема 3.22. Пусть функция $f(z)$ является аналитической на всей расширенной комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая и вычет в точке $z = \infty$, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = 0. \qquad (3.19)$$

Правило вычисления интеграла по замкнутому контуру

1. Построить контур Γ, показать его положительный обход.
2. Найти особые точки подынтегральной функции.
3. Определить, какие особые точки попадают внутрь контура.
4. Найти вид этих особых точек и вычислить вычеты в этих точках по формулам (3.14) – (3.17).
5. Применить основную теорему 3.21 о вычетах

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z).$$

Пример 23. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin^2 z}{z \cdot \cos z}\, dz$.

Решение. Особыми точками подынтегральной функции являются $z = 0$, $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Внутри окружности $|z| = 2$ находятся точки $z = 0$, $z = \pm\dfrac{\pi}{2}$ (рис.12). Так как $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin^2 z}{z \cdot \cos z} = 0$, то $z = 0$ является устранимой особой точкой, следовательно $\operatorname*{Res}\limits_{0} f(z) = 0$. Точки $z = \pm\dfrac{\pi}{2}$ являются для подынтегральной функции полюсами первого порядка. Вычеты в них найдем по формуле (3.16):

$$\operatorname*{Res}_{\pm\frac{\pi}{2}} f(z) = \left.\frac{\sin^2 z}{(z \cdot \cos z)'}\right|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{\sin^2 z}{(\cos z - z \cdot \sin z)}\right|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}.$$

Согласно основной теореме о вычетах (3.21) вычислим интеграл

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cdot \cos z} dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{0} f(z) + \operatorname*{Res}_{\frac{\pi}{2}} f(z) + \operatorname*{Res}_{-\frac{\pi}{2}} f(z) \right) =$$

$$= 2\pi i \left(0 - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \right) = -8i.$$

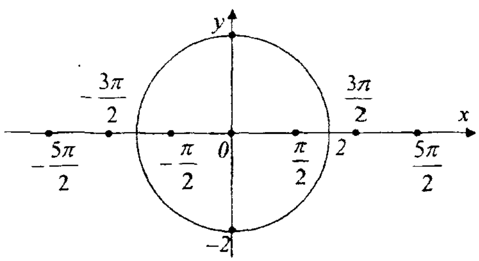

Рис. 12. Контур интегрирования к примеру 23

Пример 24. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2\cdot \mathrm{sh}(8iz)}\,dz$.

Решение. Внутри окружности $|z|=0,3$ находится единственная особая точка подынтегральной функции $z=0$. Разложим функции e^{4z}, $\sin 4z$, $\mathrm{sh}(8iz)$ в ряд Маклорена в окрестности $z=0$. Получим

$$\frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2\cdot \mathrm{sh}(8iz)}=\frac{\left(1+4z+8z^2+\frac{64z^3}{3!}+\frac{4^4z^4}{4!}+\ldots\right)-1-4z+\frac{64z^3}{3!}-\frac{4^5z^5}{5!}+\ldots}{z^2\left(8iz+\frac{(8iz)^3}{3!}+\frac{(8iz)^5}{5!}+\ldots\right)}=$$

$$=\frac{8z^2+\frac{128}{3!}z^3+\ldots}{8iz^3\left(1-\frac{(8z)^2}{3!}+\frac{(8z)^4}{5!}-\ldots\right)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{8+\frac{128}{3!}z+\ldots}{8i\left(1-\frac{(8z)^2}{3!}+\frac{(8z)^4}{5!}-\ldots\right)}=\frac{1}{z}\cdot\varphi(z).$$

Так как функция $\varphi(z)$ является аналитической в окрестности точки $z=0$ и $\varphi(0)\neq 0$, то по теореме (3.17) точка $z=0$ является полюсом первого порядка для подынтегральной функции. По формуле (3.15) вычислим вычет

$$\operatorname*{Res}_{0} f(z)=\lim_{z\to 0} z\cdot f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z\left(8+\frac{128}{3!}z+\ldots\right)}{8iz\left(1-\frac{64z^2}{3!}+\ldots\right)}=\frac{1}{i}=-i$$

Теперь по основной теореме о вычетах (3.21) вычислим интеграл

$$\oint\limits_{|z|=0,3}\frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2\cdot\mathrm{sh}(8iz)}dz=2\pi i\,(-i)=2\pi.$$

Пример 25. Вычислить интеграл $I=\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^{17}}{\left(z^2+2\right)^3\cdot\left(z^3+3\right)^4}dz$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z)$ имеет внутри контура пять особых точек, являющихся кратными полюсами. С другой стороны, вне контура конечных особых точек $f(z)$ нет, а находится только бесконечно удаленная особая точка. С учетом теоремы 3.22 запишем:

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{5} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z) = -2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{\infty} f(z).$$

Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$f(z) = \frac{z^{17}}{z^6\left(1+\dfrac{2}{z^2}\right)^3 \cdot z^{12}\left(1+\dfrac{3}{z^3}\right)^4} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{2}{z^2}\right)^3 \cdot \left(1+\dfrac{3}{z^3}\right)^4}.$$

Так как $\lim\limits_{z\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{z^2}\right)^3 \cdot \left(1+\dfrac{3}{z^3}\right)^4 = 1$, ряд Лорана будет содержать слагаемое $\dfrac{1}{z}$ с коэффициентом $C_{-1} = 1$. Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = -C_{-1} = -1.$$

Тогда интеграл $I = -2\pi i \cdot \operatorname*{Res}\limits_{\infty} f(z) = -2\pi i \cdot (-1) = 2\pi i$.

3.14. Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt$

Пусть $R(\sin t, \cos t)$ – дробно-рациональная функция от $\sin t, \cos t$.

Введем замену $e^{it} = z$. Тогда $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dz = i \cdot e^{it}\,dt = i \cdot z\,dt \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Так как уравнение окружности $|z| = 1$ в параметрическом виде имеет вид $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, то функция $z = e^{it}$ отображает отрезок $t \in [0, 2\pi]$ на положительно ориентированную окружность $|z| = 1$. Поэтому интеграл от действительной функции переменной t после замены будет равен интегралу от функции комплексного переменного:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Интеграл в правой части этого равенства можно вычислить с помощью основной теоремы о вычетах (3.21).

<u>Пример 26.</u> Вычислить интеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}\sin t + 3}$.

Решение. Сделаем замену $z = e^{it}$, тогда интеграл будет равен

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2i}\cdot\left(z - z^{-1}\right) + 3} \cdot \frac{dz}{iz} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{5}z^2 + 6iz - \sqrt{5}}.$$

Особыми точками подынтегральной функции являются $z_1 = -\frac{i}{\sqrt{5}}$ и $z_2 = -i\sqrt{5}$. Так как $|z_2| = \sqrt{5} > 1$, то внутри окружности $|z| = 1$ находится лишь одна особая точка $z_1 = -\frac{i}{\sqrt{5}}$, являющаяся простым полюсом (рис.13).

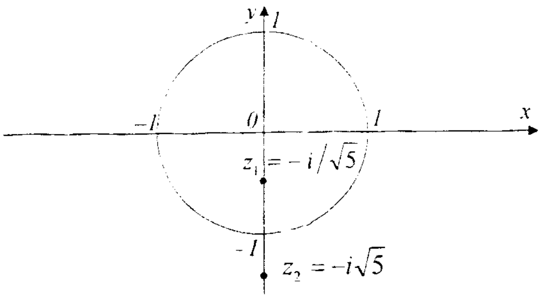

Рис. 13. Контур интегрирования к примеру 26

В этой точке $\operatorname{Res}_{-\frac{i}{\sqrt5}} f(z) = \lim_{z\to -\frac{i}{\sqrt5}} \dfrac{z+\frac{i}{\sqrt5}}{\left(z+\frac{i}{\sqrt5}\right)\cdot\left(z+\frac{5i}{\sqrt5}\right)} = -\frac{i}{4}$.

По основной теореме о вычетах получаем

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt5 \sin t + 3} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt5 z^2 + 6iz - \sqrt5} = 2\cdot 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \pi .$$

3.15. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Здесь $f(x)$ – рациональная функция. При вычислении таких интегралов используется следующее утверждение.

Теорема 3.23. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \ge 0$ за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, не лежащих на действительной оси $(\operatorname{Im} z_k > 0)$. Пусть Γ_R^+ – верхняя полуокружность большого радиуса: $\{\,|z| = R,\ \operatorname{Im} z > 0\,\}$. Если при $z \to \infty$ функция $f(z) \sim \dfrac{c}{z^m}$, $m \ge 2$, $c = const$, то справедливо соотношение

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^+} f(z)\,dz = 0.$$

Замечание. Условие $f(z) \sim \dfrac{c}{z^m}$, $m \ge 2$ на практике означает, что у дробно-рациональной функции $f(z) = \dfrac{P_k(z)}{Q_s(z)}$ степень знаменателя больше степени числителя на 2: $k - s \ge 2$.

Правило вычисления интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

1. Рассмотреть функцию $f(z)$, являющуюся аналитическим продолжением подынтегральной функции $f(x)$ на комплексную плоскость и проверить, что функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.23.

2. Найти особые точки $z_1, z_2, \ldots$ функции $f(z)$.

3. Рассмотреть замкнутый контур Γ, состоящий из отрезка $[-R;\, R]$ верхней полуокружности Γ_R^+ такого большого радиуса, чтобы все особые точки функции $z_1, z_2, \ldots$, лежащие в верхней полуплоскости, находились внутри этой полуокружности (рис. 14).

4. По свойству аддитивности записать:

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_R^+} f(z)\,dz + \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

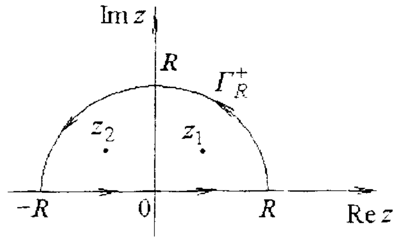

Рис. 14. Замкнутый контур большого радиуса

5. Отметить следующие утверждения:

а) во втором интеграле переменная $z = x$, т.к. интегрирование ведется по действительной оси;

б) так как $f(z)\sim\frac{c}{z^m}$, $m\geq 2$, то при $R\to\infty$ второй интеграл в правой части последнего равенства сходится, а первый интеграл по теореме 3.23 стремится к нулю:

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^+} f(z)\,dz+\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx=0+\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\ ;$$

в) таким образом, несобственный интеграл с бесконечными пределами от действительной функции оказывается равным интегралу по замкнутому контуру от функции комплексного переменного.

6. С другой стороны, по основной теореме о вычетах интеграл по замкнутому контуру Γ не зависит от радиуса окружности и равен

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z_k} f(z).$$

7. Записать окончательную формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z_k} f(z),\ \text{где}\ \operatorname{Im} z_k>0. \qquad (3.20)$$

<u>**Пример 27.**</u> Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$, являющуюся аналитическим продолжением подынтегральной функции $f(x)$ на комплексную плоскость. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 3.23:

1) функция $f(z)$ не имеет особых точек на действительной оси;

2) в верхней полуплоскости находятся два полюса первого порядка

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\ ;$$

3) $f(z)=\dfrac{1}{1+z^4}\sim\dfrac{c}{z^4}$ при $z\to\infty$.

Вычеты подынтегральной функции в особых точках z_1, z_2 найдем по формуле (3.16):

$$\operatorname*{Res}_{z_1} f(z)=\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{1}{1+z^4}=\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)}=\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}=-\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}};$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2} f(z)=\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Данный интеграл по формуле (3.20) будет равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=2\pi i\left(-\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)=\pi\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2i}\right)=\pi\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Заметим, что вычеты можно было найти не в показательной, а в алгебраической форме, но это потребовало бы большего объема вычислений.

3.16. Леммы Жордана и интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{itx}dx$

Лемма 1 (Жордана). Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на действительной оси;

2) $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $(\operatorname{Im} z>0)$ за исключением конечного числа изолированных особых точек;

3) $M_R=\max\limits_{z\in\Gamma_R^+}|f(z)|\to 0$ при $R\to\infty$, где Γ_R^+ — верхняя полуокружность $|z|=R$, лежащая в области $\operatorname{Im} z\ge 0$. Условие $\lim\limits_{R\to\infty} M_R=0$ кратко можно формулировать в виде: «функция исчезает в бесконечности».

Тогда **при $t>0$** $\quad\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma_R^+} f(z)\,e^{itz}dz=0.$

При аналогичных условиях 1)–3) имеет место другой вариант леммы Жордана для нижней полуплоскости.

<u>**Лемма 2.**</u> $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R^-} f(z)\, e^{itz} dz = 0$, при $t<0$, где Γ_R^- — нижняя полуокружность.

Леммы Жордана используются при вычислении спектральной плотности сигналов (преобразование Фурье), в операционном исчислении, в теории вероятностей для определения характеристических функций.

<u>**Пример 28.**</u> Найти спектральную плотность функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$, построить график амплитудного спектра.

Решение. Спектральная плотность $F(\omega)$ определяется как преобразование Фурье от данной функции $f(x)$:

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+2x+2} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(-\omega)x}}{x^2+2x+2} dx.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$, являющуюся аналитическим продолжением данной функции $f(x)$ на комплексную плоскость. Эта функция имеет две особые точки $z = -1 \pm i$, из которых одна лежит в верхней полуплоскости, а другая – в нижней.

Аргумент спектральной плотности $\omega \in (-\infty; +\infty)$. В связи с этим рассмотрим два случая.

1. Если $\omega < 0$, $(-\omega) = t > 0$, то применяется лемма 1 Жордана. Рассмотрим замкнутый контур Γ^+, состоящий из отрезка $[-R;\ R]$ и верхней полуокружности Γ_R^+ такого большого радиуса, чтобы особая точка $z_1 = -1+i$

находилась внутри нее (рис.15). Вычислим интеграл от функции $f(z)e^{i(-\omega)z}$ по этому замкнутому контуру, обход контура положительный.

По свойству аддитивности интеграла можно записать:

$$\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)e^{i(-\omega)z}dz = \int\limits_{\Gamma_R^+} f(z)e^{i(-\omega)z}dz + \int\limits_{-R}^{+R} f(x)e^{i(-\omega)x}dx. \quad (3.21)$$

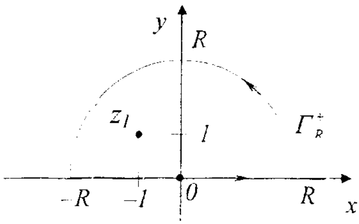

Рис. 15. Замкнутый контур большого радиуса к примеру 28

Проверим выполнение условий леммы 1 Жордана при $t = (-\omega) > 0$:

1) функция $f(x)$ непрерывна на действительной оси;

2) функция $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 2}$ имеет в верхней полуплоскости одну изолированную особую точку $z_1 = -1 + i$;

3) при $|z| = R$ выполняется $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{1}{R^2 + 2R + 2} = 0$.

Выполнение условий леммы Жордана означает, что при $R \to \infty$ первый из интегралов в (3.21) стремится к нулю, а второй сходится:

$$\lim_{R\to\infty} \oint\limits_{\Gamma^+} f(z)e^{i(-\omega)z}dz = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R^+} f(z)e^{i(-\omega)z}dz + \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{+R} f(x)e^{i(-\omega)x}dx =$$

$$= 0 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i(-\omega)x}dx .$$

С другой стороны, по основной теореме о вычетах интеграл по замкнутому контуру Γ с положительным обходом не зависит от радиуса окружности и равен сумме вычетов в особых точках:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma} f(z) e^{i(-\omega)z} dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} \left(f(z) e^{i(-\omega)z} \right), \quad \operatorname{Im} z_k > 0.$$

Окончательно получим формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i(-\omega)x} dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} \left(f(z) e^{i(-\omega)z} \right), \quad \operatorname{Im} z_k > 0. \quad (3.22)$$

Применим эту формулу к конкретной задаче, вычет вычислим по формуле (3.16), т.к. особая точка $z_1 = -1 + i$ является простым полюсом.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + 2x + 2} dx = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{-1+i} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2 + 2z + 2} = 2\pi i \left. \frac{e^{-i\omega z}}{2z + 2} \right|_{z=-1+i} =$$

$$= 2\pi i \, \frac{e^{-i\omega(-1+i)}}{-2 + 2i + 2} = \pi \, e^{\omega(1+i)} = \pi \, e^{\omega} \, (\cos\omega + i \sin\omega), \quad \boldsymbol{\omega < 0}.$$

2. Если $\omega > 0$, $(-\omega) = t < 0$, то применяется лемма 2 Жордана для нижней полуплоскости. Аналогично первому случаю рассмотрим замкнутый контур Γ^-, состоящий из отрезка $[-R;\, R]$ и нижней полуокружности Γ_R^- такого большого радиуса, чтобы особая точка $z_2 = -1 - i$ находилась внутри нее (рис.16). Обход этого контура нужно выбрать отрицательным, так как в преобразовании Фурье интегрирование ведется от $-\infty$ до $+\infty$.

Проверив выполнение условий леммы 2 Жордана для нижней полуплоскости и выполнив аналогичные первому случаю преобразования, придем к формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i(-\omega)x} dx = -2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} \left(f(z) e^{i(-\omega)z} \right), \quad \operatorname{Im} z_k < 0. \quad (3.23)$$

Знак минус в (3.23) появляется в связи с отрицательным обходом контура интегрирования.

Применим эту формулу к конкретной задаче, вычет вычислим по формуле (3.16), т.к. особая точка $z_2 = -1 - i$ является простым полюсом.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + 2x + 2} dx = -2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{-1-i} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2 + 2z + 2} = -2\pi i \cdot \left. \frac{e^{-i\omega z}}{2z + 2} \right|_{z=-1-i} =$$

$$= -2\pi i \cdot \frac{e^{-i\,\omega\,(-1-i)}}{-2 - 2i + 2} = \pi\, e^{\omega(-1+i)} = \pi\, e^{-\omega} (\cos\omega + i \sin\omega), \quad \omega > 0.$$

При $\omega = 0$ значение $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ находится аналогично примеру 27 и равно $F(0) = \pi$.

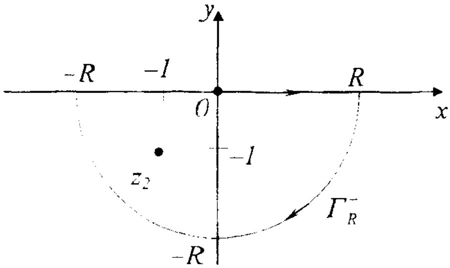

Рис. 16. Замкнутый контур большого радиуса к примеру 28

Таким образом, спектральная плотность является комплекснозначной функцией и имеет вид

$$F(\omega) = \begin{cases} \pi\, e^{-\omega} (\cos\omega + i \sin\omega), & \omega \ge 0, \\ \pi\, e^{\omega} (\cos\omega + i \sin\omega), & \omega < 0. \end{cases}$$

Амплитудный спектр определяется как модуль спектральной плотности и равен

$$S(\omega)=|F(\omega)|=\pi\, e^{-|\omega|}=\begin{cases}\pi\, e^{-\omega}, & \omega\ge 0,\\ \pi\, e^{\omega}, & \omega<0.\end{cases}$$

График амплитудного спектра функции $f(x)$ приведен на рис.17.

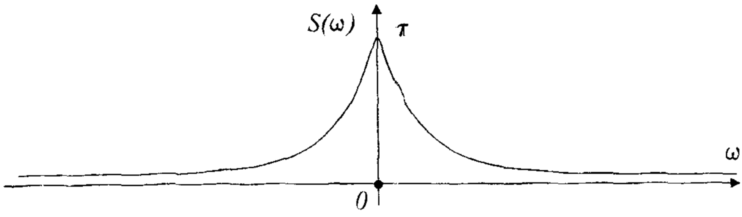

Рис. 17. График амплитудного спектра к примеру 28

3.17. Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos tx\,dx$, $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\sin tx\,dx$ и т.п.

Леммы Жордана применяются также при вычислении интегралов указанного вида, в которых в силу четности (нечетности) тригонометрических функций всегда можно считать $t>0$.

Пример 29. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x\,dx}{\left(x^2+16\right)\cdot\left(x^2+9\right)}$.

Решение. Так как по формуле Эйлера $e^{i\,2x}=\cos 2x+i\sin 2x$,

$\cos 2x=\mathrm{Re}\left[\,e^{i\,2x}\right]$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x\;dx}{\left(x^2+16\right)\cdot\left(x^2+9\right)}=\mathrm{Re}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\,2x}\,dx}{\left(x^2+16\right)\cdot\left(x^2+9\right)}\right].$$

В этом случае $t=2>0$, $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+16\right)\cdot\left(z^2+9\right)}$.

Рассмотрим замкнутый контур Γ, состоящий из отрезка $[-R;\ R]$ и верхней полуокружности Γ_R^+ такого большого радиуса, чтобы особые точки функции $z_1 = 3i,\ z_2 = 4i$ находились внутри нее (рис.18).

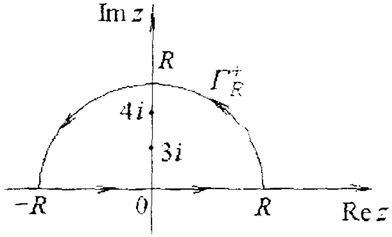

Рис. 18. Замкнутый контур большого радиуса к примеру 29

Проверим выполнение условий леммы 1 Жордана при $t = 2 > 0$:

1) функция $f(x)$ непрерывна на действительной оси;

2) особыми точками функции $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+16)\cdot(z^2+9)}$ в верхней полуплоскости являются $z_1 = 4i$ и $z_2 = 3i$ (полюсы первого порядка);

3) при $|z| = R$ выполняется $\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{1}{(R^2+16)\cdot(R^2+9)} = 0$.

Выполнение условий леммы Жордана означает, что данный интеграл будет равен сумме вычетов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{itx}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)e^{itx}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^+} f(z)e^{itz}dz =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma} f(z)e^{itz}dz = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z_k}\left(f(z)\,e^{itz}\right),\quad \operatorname{Im} z_k > 0.$$

Применим эту формулу к конкретной задаче и вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x\ dx}{\left(x^2+16\right)\cdot\left(x^2+9\right)}=\operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2x}dx}{\left(x^2+16\right)\cdot\left(x^2+9\right)}\right]=$$

$$=\operatorname{Re}\left[2\pi i\cdot\left(\operatorname*{Res}_{4i}\frac{e^{i2z}}{\left(z^2+16\right)\cdot\left(z^2+9\right)}+\operatorname*{Res}_{3i}\frac{e^{i2z}}{\left(z^2+16\right)\cdot\left(z^2+9\right)}\right)\right].$$

Точки $z_1=4i$ и $z_2=3i$ являются простыми полюсами. Вычислим вычеты в этих точках по формуле (3.15):

$$\operatorname*{Res}_{4i}\left(f(z)e^{i2z}\right)=\lim_{z\to 4i}\frac{e^{i2z}}{(z+4i)\cdot\left(z^2+9\right)}=-\frac{e^{-8}}{56i};\quad \operatorname*{Res}_{3i}\left(f(z)e^{i2z}\right)=\frac{e^{-6}}{42i}.$$

Тогда данный интеграл будет равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x\,dx}{\left(x^2+16\right)\cdot\left(x^2+9\right)}=\operatorname{Re}\left[2\pi i\cdot\left(-\frac{e^{-8}}{56i}+\frac{e^{-6}}{42i}\right)\right]=2\pi\cdot\left(\frac{e^{-6}}{42}-\frac{e^{-8}}{56}\right).$$

Интегралы вида $\int_0^{+\infty} f(x)\cos tx\,dx$, $\int_0^{+\infty} f(x)\sin tx\,dx$

Первый из этих интегралов можно вычислить с помощью вычетов, если $f(x)=f(-x)$ — ***четная*** функция. В силу четности подынтегральной функции в этом случае можно записать при $\operatorname{Im} z_k>0$:

$$\int_0^{-\infty} f(x)\cos tx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos tx\,dx=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{Re}\left[2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z_k}\left(f(z)e^{itz}\right)\right].$$

Если $f(x)$ — ***нечетная*** функция, то, рассуждая аналогично, можно получить формулу

$$\int_0^{+\infty} f(x)\sin tx\,dx=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{Im}\left[2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z_k}\left(f(z)e^{itz}\right)\right],\quad \operatorname{Im} z_k>0.$$

Пример 29. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3 \cdot \sin x}{(1+x^2)^2} dx$.

Решение. Функция $f(z) = \frac{z^3}{(1+z^2)^2}$ является нечетной и имеет в верхней полуплоскости одну особую точку $z = i$, являющуюся полюсом второго порядка. Вычисляя вычет в этой точке по формуле (3.17), получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3 \cdot \sin x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Im}\left[2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_i \left(\frac{z^3 \cdot e^{iz}}{(1+z^2)^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Im}\left[2\pi i \cdot \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^3 \cdot e^{iz}}{(i+z)^2}\right)\right] = \frac{\pi}{4e}.$$

Заключение

В третьем этапе курсовой работы изучены основные соотношения для комплексных чисел, области и кривые в комплексной плоскости, функции комплексного переменного и их производные, интегралы от функций комплексного переменного, интегральная теорема и формула Коши, ряды в комплексной области, вычеты и их приложения к вычислению интегралов.

Список рекомендуемой литературы

1. Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной/ А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов – М.: Физматлит, 2001.
2. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. Ч. 2. – М.: Наука, 1986.
3. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) / В.Ф. Чудесенко – М.: Высшая школа, 1999.

Задание к курсовой работе

Найдите спектральную плотность и построить график амплитудного спектра функции $f(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$, где функция $\varphi(x)$ равна:

1. $\varphi(x)=x^2-8x+25$
2. $\varphi(x)=x^2+6x+34$
3. $\varphi(x)=x^2-4x+29$
4. $\varphi(x)=x^2+2x+26$
5. $\varphi(x)=x^2+8x+17$
6. $\varphi(x)=x^2-6x+10$
7. $\varphi(x)=x^2+4x+5$
8. $\varphi(x)=x^2-2x+10$
9. $\varphi(x)=x^2-8x+17$
10. $\varphi(x)=x^2+6x+13$
11. $\varphi(x)=x^2-4x+20$
12. $\varphi(x)=x^2+2x+5$
13. $\varphi(x)=x^2+8x+25$
14. $\varphi(x)=x^2-4x+13$
15. $\varphi(x)=x^2+2x+10$
16. $\varphi(x)=x^2-6x+25$
17. $\varphi(x)=x^2+8x+20$
18. $\varphi(x)=x^2-6x+34$
19. $\varphi(x)=x^2+4x+29$
20. $\varphi(x)=x^2-2x+26$
21. $\varphi(x)=x^2+6x+25$
22. $\varphi(x)=x^2-4x+5$
23. $\varphi(x)=x^2+2x+17$
24. $\varphi(x)=x^2-8x+20$
25. $\varphi(x)=x^2+6x+10$
26. $\varphi(x)=x^2-2x+17$
27. $\varphi(x)=x^2+4x+20$
28. $\varphi(x)=x^2-6x+13$
29. $\varphi(x)=x^2+4x+13$
30. $\varphi(x)=x^2-2x+5$

Учебное издание

Бушков Станислав Владимирович

Коломиец Людмила Вадимовна

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Редактор Н.С. Куприянова

Подписано в печать 30.03.2006г. Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,95. Усл. кр. - отт. 4,07. Уч. - изд. л. 4,25.
Тираж 200 экз. Заказ 26 . Арт. С – 5/2006

Самарский государственный аэрокосмический университет
443086 Самара, Московское шоссе, 34

РИО Самарского государственного аэрокосмического университета
443086 Самара, Московское шоссе, 34