МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)"

Е. И. Коновалова

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Электронное учебное пособие

САМАРА

2011

УДК 517.518

Автор: **Коновалова Елена Игоревна**

Коновалова, Е. И. Функциональный анализ [Электронный ресурс]: электрон. учеб.пособие/ Е. И. Коновалова; М-во образования и науки РФ, Самар.гос. аэрокосм. ун-т. им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). - Электрон. текстовые дан. (0,3 Мбайт). - Самара, 2011. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Учебное пособие содержит конспект лекций по дисциплине "Функциональный анализ" включающий темы: метрические и нормированные линейные пространства, мера и интеграл Лебега, гильбертовы пространства. Кроме теоретического материала, пособие содержит ряд упражнений, которые могут служить основой для проведения практических занятий по курсу.

Учебное пособие предназначено для студентов 6 факультета, обучающихся по направлению "Прикладная математика и информатика" 010400.62 и изучающих дисциплину "Функциональный анализ" в 5 семестре.

Разработано на кафедре прикладной математики.

Оглавление

Стр.

Глава 1

ТОПОЛОГИЯ МЕТРИЧЕСКИХ И ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этой главе предполагается, что студент знаком с такими понятиями, как линейное пространство, пространство $\mathbb{R}^n$.

1.1. Метрические пространства

Расстояние между предметами - понятие хорошо всем известное. На оси действительных чисел мы вводим понятие расстояния, как модуль разности между соответсвующими точками, например, расстояние от точки 5 до точки 7 равно 2: $|7-5|=2$. Понятие расстояния лежит в основе важнейшей операции анализа: операции предельного перехода. Обобщая понятие множества, в котором определено расстояние между его элементами (точками), мы приходим к понятию метрического пространства.

Определение 1.1 *Метрическим пространством (МП) называется множество X, в котором задана однозначная неотрицательная действительнозначная функция, называемая метрикой (расстоянием) $\rho(x,y) : X \to \mathbb{R}_+$, которая удовлетворяет следующим аксиомам:*

1. $\rho(x,y) \geq 0$, *причем* $\rho(x,y)=0$ *тогда и только тогда, когда* $x=y$;
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ *(аксиома симметрии)*
3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$ *(неравенство треугольника)*

Поясняя аксиомы, можно сказать, что первая аксиома имеет в виду, что расстояние между двумя объектами (точками) равно нулю, в том и только том случае, когда объекты совпадают. Во второй аксиоме говорится о том, что расстояние от точки x до точки y равно расстоянию от точки y до точки

x. Третья аксиома - это хорошо известное неравенство треугольника: расстояние между двумя любыми точками не длиннее суммы расстояний от данных точек до третьей точки (или путь из пункта x в пункт y для путешественника будет не длиннее того пути, который ему предстоит пройти, если он по дороге решит заглянуть в пункт z).

1.2. Примеры метрических пространств

Приведем примеры метрических пространств. Эти пространства играют большую роль в дальнейшем изложении.

Пример 1.1 *Положив для элементов произвольного множества*

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

мы получим метрическое пространство. Его называют пространством изолированных точек.

Пример 1.2

- *Множество действительных чисел с расстоянием*

  $$\rho(x,y) = |x - y|$$

  образует метрическое пространство $\mathbb{R}^1$*. (Вспомним пример, приведенный в начале раздела.)*

- *Множество точек на плоскости с расстоянием*

  $$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \text{ где } x = (x_1, x_2), \ y = (y_1, y_2),$$

  называется двумерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^2$*.*

- *Множество точек в пространстве с расстоянием*

  $$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

  $$\text{где } x = (x_1, x_2, x_3), \ y = (y_1, y_2, y_3).$$

- *Обобщая примеры, получим расстояние в n-мерном пространстве*

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n}(x_k - y_k)^2}, \text{ где } x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Оно называется n-мерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$.

Во всех приведенных примерах аксиомы метрики предлагается проверить читателю самостоятельно.

Заметим, что на одном и том же множестве X можно задать разные метрики, при этом будут получаться разные метрические пространства.

Пример 1.3 *Рассмотрим то же множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, но функцию метрики зададим следующим образом:*

$$\rho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{k=n} |x_k - y_k|.$$

Справедливость аксиом метрики здесь очевидна. Обозначим это метрическое пространство $\mathbb{R}_1^n$.

В случае плоскости имеем: $\rho(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. С геометрической точки зрения отличие пространства $\mathbb{R}^2$ от пространства $\mathbb{R}_1^2$ состоит в том, что в случае пространства $\mathbb{R}^2$ расстояние между точками x и y - это длина отрезка, соединяющего точки,а в случае пространства $\mathbb{R}_1^2$ - это длина двузвенной ломаной, с концами в точках x и y.

Пример 1.4 *Опять рассмотрим множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, но на этот раз определим расстояние так:*

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|.$$

Справедливость аксиом метрики очевидна. Это пространство, которое мы *обозначим* $\mathbb{R}^n_\infty$, *во многих вопросах анализа не менее удобно, чем евклидово пространство* $\mathbb{R}^n$.

Элементами метрического пространства не обязательно являются математические объекты. Например, в теории кодирования, биоинформатике, генетике используют расстояние Хэмминга. Оно рассматривается на множестве слов одинаковой длины и равно количеству не совпадающих между собой букв, стоящих на одинаковых местах в сравниваемых словах. Например, $\rho(rose, rock) = 2$.

1.3. Линейные нормированные пространства

В предыдущем разделе мы занимались метрическими пространствами, то есть множествами, в которых введено понятие расстояния между элементами, причем мы заметили, что элементами метрического пространства могут быть не только математические объекты. Однако, в анализе удобно иметь дело с линейными пространствами, в которых введены операции сложения элементов и умножения их на числа и, кроме того, введено понятие расстония между элементами. Теория таких пространств была развита в работах С.Банаха.

Определение 1.2 *Линейным нормированным пространством (ЛНП) называется линейное пространство* X *над полем* $\mathbb{R}$, *в котором задана однозначная неотрицательная действительнозначная функция, называемая нормой (расстоянием)* $\|x\| : X \to \mathbb{R}_+$, *которая удовлетворяет следующим аксиомам:*

1. $\|x\| \geq 0$, *причем* $\|x\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in X$ *(неравенство треугольника).*

Упражнение 1.1 *Докажите неравенство, обратное неравенству треугольника:* $\forall x, y \in X$ *выполняется* $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Приведем примеры линейных нормированных пространств.

Пример 1.5 *Прямая линия* $X = \mathbb{R}^1$ *становится нормированным пространством, если для всякого* $x \in \mathbb{R}^1$ *положить* $\|x\| = |x|$.

Пример 1.6

- *В случае плоскости* $\mathbb{R}^2$ $\|x\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$, *где* $x = (x_1, x_2)$.
- *В случае пространства* $\mathbb{R}^3$ $\|x\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$, *где* $x = (x_1, x_2, x_3)$.

- *В случае пространства* $\mathbb{R}^n$ $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^2}$, *где* $x = (x_1, x_2 \ldots x_n)$.

Заметим, что формула $\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$ *определяет в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *ту самую метрику, которую мы в этом пространстве уже рассматривали в примере 1.2.*

Пример 1.7 *В этом же линейном пространстве можно ввести норму* $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{k=n} |x_k|$ *или норму* $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le k\le n} |x_k|$. *Эти нормы определяют в* $\mathbb{R}^n$ *метрики, которые мы рассматривали в примерах 1.3 и 1.4.*

Теорема 1.3 *Любое линейное нормированное пространство является метрическим при этом метрика* $\rho(x,y) = \|x-y\|$.

Доказательство.

Доказательство состоит в проверке аксиом метрики для функции $\rho(x,y) = \|x-y\|$.

1. $\rho(x,y) = \|x-y\| \ge 0$ (в силу первой аксиомы нормы), кроме того $\|x-y\| = 0 \Longleftrightarrow x-y = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
2. $\rho(x,y) = \|x-y\| = |-1| \cdot \|y-x\| = \rho(y,x)$ (в силу второй аксиомы нормы)
3. $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \le \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (в силу третьей аксиомы нормы)

□

1.4. Шары в линейных нормированных пространствах

Определение 1.4 *Пусть X - ЛНП, $x_0 \in X$, $r > 0$. Открытым шаром с центром в точке x_0 радиуса r называется множество:*

$$S_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}.$$

Замкнутым шаром называется множество:

$$\bar{S}_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \le r\}.$$

Сферой называется множество

$$\sigma_r(x_0) = \bar{S}_r(x_0) \backslash S_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}.$$

Определение 1.5 *ε-окрестностью точки x_0 называется открытый шар радиуса ε с центром в этой точке.*

Пример 1.8 *Изобразим замкнутые шары с центром в точке $0 = (0,0)$ радиуса 1 в пространствах $\mathbb{R}^2_1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2_\infty$.*

- *В $\mathbb{R}^2_1$ норма элемента $x = (x_1, x_2)$: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$.*
  Тогда $\bar{S}_1(0) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \le 1\}$.
- *В $\mathbb{R}^2$ норма элемента $x = (x_1, x_2)$: $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.*
  Тогда $\bar{S}_1(0) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le 1\}$.
- *В $\mathbb{R}^2_\infty$ норма элемента $x = (x_1, x_2)$: $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.*
  Тогда $\bar{S}_1(0) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} \le 1\}$.

1.5. Сходимость в линейных нормированных пространствах и ее свойства.

Определение 1.6 *Пусть X - ЛНП. Последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in X$ называется сходящийся к элементу $x \in X$, если числовая последовательность $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначение:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что если $n > N$, то $x_n \in S_\varepsilon(x)$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists N \; : n > N \Rightarrow x_n \in S_\varepsilon(x) \tag{1.1}$$

Теорема 1.7 *Пусть X - ЛНП, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ последовательности элементов из X, x, y - элементы из X, $\{\lambda_n\}$ - числовая последовательность, $\lambda \in \mathbb{R}$ - число. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена в X, то есть существует такое число $M > 0$, что $\forall n$ $\|x_n\| \le M$.*
2. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x$.*
3. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.*
4. *(непрерывность нормы) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то числовая последовательность $\|x_n\|$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.*

Доказательство:

1. Положим в (1.1) $\varepsilon = 1$, то есть существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\|x_n - x\| \le 1$. Тогда $\forall n > N$ справедлива оценка: $\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \le \|x_n - x\| + \|x\| \le 1 + \|x\|$.

$$\forall n > N \quad \|x_n\| \le 1 + \|x\| \tag{1.2}$$

В качестве M возьмем максимальное из $N+1$ чисел: $M = \max\{1 + \|x\|; \|x_1\|; \|x_2\|; ...\|x_N\|\}$. Получаем, что для всякого номера k выполняется $\|x_k\| \leq M$ (для $k \leq N$ в силу определения M, для $k > N$ в силу (1.2)), то есть последовательность $\{x_k\}$ ограничена.

2. Оценим разность:

$$0 \leq \|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda x_n + \lambda x_n - \lambda x\| \leq$$

$$\leq |\lambda_n - \lambda| \|x_n\| + |\lambda| \|x_n - x\| \leq M|\lambda_n - \lambda| + |\lambda| \|x_n - x\|$$

(по первому свойству $\|x_n\| \leq M$ для любого n). По условию, $|\lambda_n - \lambda| \to 0$ и $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x$.

3. Аналогично пункту 2:

$$0 \leq \|x_n + y_n - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

4. Оценим $|\|x_n\| - \|x\||$ по неравенству, обратному нервавенству треугольника:

$$0 \leq |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \to 0.$$

□

1.6. Реализция сходимости в конкретных линейных нормированных пространствах

Сходимость по норме в конкретном ЛНП может совпадать с каким-либо хорошо известным видом сходимости.

Утверждение 1.8 *Сходимость в пространстве $\mathbb{R}^n_\infty$ эквивалентна покоординатной сходимости, то есть последовательность точек из $\mathbb{R}^n$ $x^k = (x^k_1, x^k_2, ...x^k_n)$ сходится к точке $x = (x_1, x_2...x_n) \in \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|_\infty$ тогда и только тогда, когда $\forall i = \overline{1,n}$ $x^k_i \to x_i$ при $k \to \infty$.*

Доказательство:

1. Пусть $\|x_k - x\|_\infty \to 0$, тогда для любого номера $i = \overline{1,n}$ $0 \leq |x^k_i - x_i| \leq \max\limits_{1\leq j\leq n} |x^k_j - x_j| = \|x^k - x\|_\infty \to 0$. Следовательно, $x^k_i \to x_i$, $\forall i = \overline{1,n}$, то есть из сходимости по норме следует покоординатная сходимость.

2. Докажем, что из покоординатной сходимости, следует сходимость по норме $\|\cdot\|$. Возьмем $\varepsilon > 0$ произвольное. Посокольку $\forall i$ $x^k_i \to x_i$ при $k \to \infty$, то существует номер N_i такой, что для всякого номера k, $k \geq N_i$ выполняется $\|x^k_i - x_i\| < \varepsilon$. Положим $N = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{N_i\}$. Тогда $\forall k > N$ $\forall i = \overline{1,n}$ $|x^k_i - x_i| < \varepsilon$ (особенно подчеркнем, что последнее неравенство выполнено для любого номера i). Тогда $\|x^k - x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x^k_i - x_i| < \varepsilon$.

□

Упражнение 1.2 *Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n_1$ с нормой $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| < \infty$. Доказать, что сходимость по этой норме эквивалентна покоординатной сходимости.*

Упражнение 1.3 *Доказать, что в пространстве ℓ_2 из сходимости по метрике следует покоординатная сходимость. Показать, что обратное не верно, то есть из покоординатной сходиомсти в ℓ_2 не следует сходимость по метрике. Для этого рассмотреть последовательность:*

$x_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, $x_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, $x_3 = (0, 0, 1, 0 \ldots)$, $\ldots$. *Такая последовательность покоординатно сходится к нулевой:* $x = (0, 0, 0, 0 \ldots)$. *Однако,* $: \|x_k\| = 1 \nrightarrow \|x\| = 0$.

Утверждение 1.9 *В пространстве* $C[a, b]$ *с нормой* $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$ *сходимость по норме эквивалентна покоординатной сходиомсти.*

Доказательство

$$\|x_k(t) - x(t)\| \to 0 \Leftrightarrow \max_{t \in [a,b]} |x_k(t) - x(t)| \to 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \;\; \forall \;\; \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall k \geq N : \; \max_{t \in [a,b]} |x_k(t) - x(t)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \;\; \forall \;\; \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall k \geq N \;\; \forall t \in [a, b] : |x_k(t) - x(t)| < \varepsilon$$

Это и означает равномерную сходиомсть последовательности функций $\{x_k(t)\}$ к $\{x(t)\}$ на отрезке $[a, b]$.

□ Определим на пространстве $C[a, b]$ еще две нормы.

Определение 1.10 *На пространстве непрерывных функций на отрезке* $[a, b]$ *определим норму*

$$\|x(t)\| = \int\limits_a^b |x(t)| dt.$$

Такое пространство будем обозначать $C_1[a, b]$, *а сходимость в этой норме будем называть сходимостью в среднем.*

Определение 1.11 *На том же пространстве определим норму*

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int\limits_a^b (|x(t)|)^2 dt}.$$

Такое пространство будем обозначать $C_2[a, b]$, *а сходимость в этой норме будем называть сходимостью в среднем квадратичном.*

Упражнение 1.4 *Доказать, что из равномерной сходимости следует сходимость в среднем, из сходимости в среднем следует сходимость в среднем квадратичном. Обратные утверждения не верны. То, что из сходимости в среднем не следует равномерная сходиомсть, можно убедиться на примере функциональной последовательности:* $x_n(t) = \frac{nt}{1+n^2t^2}$, $t \in [0,1]$.

1.7. Открытые множества в ЛНП

Везде далее X - линейное нормированное пространство.

Определение 1.12 *Множество M, $M \subset X$ называется открытым, если любая точка из M входит в M вместе с некоторым шаром:*

$$\forall x \in M \ \exists r > 0 \ : \ S_r(x) \subset M.$$

Пустое множество считается открытым по определению.

Теорема 1.13 *1. Пересечение конечного числа открытых множеств-открытое множество.*

2. Объединение любого семейства открытых множеств - отктытое множество.

3. Линейное нормированное пространство X - открытое множество.

Доказательство:

1. Пусть множества M_1, M_2,... M_k - открытые. Докажем, что $M := \bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i$ - открытое. Возьмем любую точку $x \in M$. По определению M, $x \in M_i \ \forall i = \overline{1,k}$. Поскольку M_i открытое множество, то найдется такой радиус шара $r_i > 0$, что $S_{r_i}(x) \subset M_i$, $\forall i = \overline{1,k}$. Положим $r = \min\limits_{i=\overline{1,k}} r_i$. Осталось заметить, что $S_r(x) \subset M_i$, $\forall i = \overline{1,k}$, следовательно, $S_r(x) \subset M$, следовательно, M - открытое.

$\square$

Упражнение 1.5 *Доказать утверждения теоремы 2 и 3.*

Замечание.

Утверждение 1 теоремы 1.13 для бесконечного числа множеств вообще говоря не верно.

Пример 1.9 *Пересечение счетного числа открытых множеств в ЛНП $\mathbb{R}$:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) = [0, 1].$$

Теорема 1.14 *Любой открытый шар в ЛНП - открытое множество.*

Доказательство:

Возьмем любую точку $z \in S_r(x)$ и найдем $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon < \|x-z\| < r-\varepsilon$. Покажем, что шар $S_\varepsilon(z)$ содержится в шаре $S_r(x)$, это и будет означать, что $S_r(x)$ - открытое множество.

Возьмем произвольную точку $y \in S_\varepsilon(z)$. Тогда $\|y-x\| \leq \|y-z\|+\|z-x\| < \varepsilon + r - \varepsilon$, следовательно, $y \in S_r(x)$, следовательно, $S_\varepsilon(z) \subset S_r(x)$.

$\square$

1.8. Замкнутые множества в ЛНП

Определение 1.15 *Пусть $M \subset X$. Точка $x_0 \in M$ называется предельной точкой для множества M, если в любой tt окрестности, найдется точка, принадлежащая множеству M и отличная от нее самой:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \neq x_0 \ : x \in M \bigcap S_\varepsilon(x_0).$$

Определение 1.16 *Множество $M \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Пустое множество - замкнутое по определению.*

Упражнение 1.6 *Доказать утверждение о том, что точка $a \in X$ - предельная точка для множества $M \subset X$ тогда и только тогда, когда существует нетривиальная последовательность точек из M, сходящаяся к точке a:*

$$\exists \{x_n \neq a\} \subset M : \lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Теорема 1.17 *Множество M замкнутое тогда и только тогда, когда дополнение к нему открытое множество:*

$$M \text{ - открытое } \Leftrightarrow X \backslash M \text{ открытое множество.}$$

Теорема 1.18

1. *Объединение конечного числа замкнутых множеств - замкнутое множество.*
2. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств - замкнутое множество.*
3. *Линейное нормированное пространство X - замкнутое множество.*

Упражнение 1.7 *Доказать, что любой замкнутый шар $\overline{S}_r(x)$ является замкнутым множеством в ЛНП X.*

1.9. Числовые неравенства Гельдера и Минковского.

Пусть число $p \in (1, +\infty)$. Тогда сопряженным к нему будем называть число q: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Заметим, что:

$$q \in (1, +\infty) \;\; q = \frac{p}{p-1} \tag{1.3}$$

Итак, p и q - взаимосопряженные числа. Будем считать, что для $p = 1$ $q = \infty$ и обратно: для $p = \infty$ $q = 1$.

Лемма 1.19 *Пусть $u, v \geq 0$ произвольные числа, а p и q сопряжены. Тогда выполняется неравенство:*

$$u \cdot v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \tag{1.4}$$

Пусть $p \in [1, \infty)$, $x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда, по определению, $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Теорема 1.20 *(неравенство Гельдера) Пусть $p \in (1, \infty)$, q сопряжено к p. Тогда $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots x_n)$, $y = (y_1, \dots y_n)$:*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \tag{1.5}$$

Замечание: Неравенство 1.4 выполняется, когда $p = 1$, $q = \infty$ и $p = \infty$, $q = 1$.

Теорема 1.21 *(Неравенство Минковского) Пусть $p \in (1, \infty)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство:*

$$(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{1.6}$$

1.10. Фундаментальные последовательности. Определение банахового пространства.

Определение 1.22 *Пусть X - линейное нормированное пространство. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ называется фундаментальной последовательностью или последовательностью Коши, если $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$.*

Теорема 1.23 *(Свойства фундаментальных последовательностей) X - линейное нормированное пространство.*

1. *Если $\{x_n\}$ фундаментальная последовательность, то она ограничена в $\{X\}$.*
2. *Если $\{x_n\}$ фундаментальная последовательность и существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к x, то тогда $\{x_n\}$ также сходится к x.*
3. *Если последовательность x_n сходится к элементу $x \in X$, то она фундаментальная последовательность. (Любая сходящаяся последовательность точек метрического пространства является фундаментальной последовательностью.)*

Упражнение 1.8 *Верно ли утверждение о том, что всякое фундаментальная последовательность сходится?*

Определение 1.24 *Линейное нормированное пространство X называется полным (банаховым), если любая фундаментальная последовательность в нем имеет предел.*

1.11. Примеры банаховых пространств. Пример неполного ЛНП.

Пример 1.10 *Числовая прямая* $\mathbb{R}_1$ *с нормой* $\|x\|$ *- банахово пространство.*

Пример 1.11 *Пространство* $\mathbb{R}^n$ *с любой нормой - банаховов пространство.*

Пример 1.12 *Пространство* $C[a,b]$ *- банахово пространство.*

Пример 1.13 *Рассмотрим пространство* $\widetilde{C}_2[-1,1]$ *всех кусочно-непрерывных функций на отрезке* $[-1,1]$. *В качестве нормы определим величину:* $\|x\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}|x(t)|^2dt}$ *(интеграл Римана). Она обладает всеми свойствами нормы, в частности, неравенство треугольника следует из неравенства Коши-Буняковского.*

1.12. Принцип вложенных шаров в банаховом пространстве

Теорема 1.25 *Пусть* X *- банахово пространство и* $\overline{S}_{r_n}(x_n)$ *- последовательность замкнутых шаров такая, что* $\overline{S}_{r_n}(x_n) \supset \overline{S}_{r_{n+1}}(x_{n+1})$ *и* $\{r_n\} \to 0$ *при* $n \to \infty$*. Тогда существует единственная точка* $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S}_{r_n}(x_n)$.

1.13. Множества первой и второй категории. Принцип Бэра-Хаусдорфа.

Определение 1.26 *Пусть X - линейное нормированное пространство. Тогда множество $M \subset X$ называется неплотным в X, если для любого шара $S_r(x_0)$, ($r > 0$) из этого пространства, существует шар $S_{r_1}(x_1) \subset S_r(x_0)$, $r_1 > 0$ такой, что $S_{r_1}(x_1) \cap M = \emptyset$.*

Определение 1.27 *Множество $M \subset X$ называется всюду плотным в некотором шаре $S_r(x_0)$, если для любого шара $S_{r_1}(x_1) \subset S_r(x_0)$ $S_{r_1}(x_1) \cap M \neq \emptyset$.*

Упражнение 1.9 *Доказать, что множество $M \subset X$ не является нигде не плотным в X тогда и только тогда, когда оно всюду плотно в некотором шаре.*

Пример 1.14 *В $\mathbb{R}$ нигде не плотно множество $\mathbb{Z}$.*

Определение 1.28 *Множество $A \subset X$ называется множеством первой категории, если оно представимо в виде счетного или конечного объединения нигде не плотных в X множеств, то есть: $A = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n нигде не плотно в X. Все остальные множества называются множествами второй категории.*

Пример 1.15 *Множество $\mathbb{Q}$ на прямой - множество первой категории, так как $\mathbb{Q} = \cup_{n=1}^{infty} \{r_n\}$, где $\{r_n\}$ - одноточечные множества, а они нигде не плотны на прямой.*

Теорема 1.29 *(принцип Бэра-Хаусдорфа) Любое банахово пространство X - множество второй категории.*

Глава 2
МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

2.1. Мера Лебега на прямой

Построим наиболее общее определение меры ограниченного множжества на прямой, переходя от простых объектов к более сложным.

Определение 2.1 *Мерой интервала* (a, b) *назовем его длину:* $\mu(a, b) = b - a$.

Дадим определение меры открытого ограниченного множества. Как изветсно, любое открытое множество на прямой представляет из себя объединение конечного или счетного числа попарно не пересекающихся интервалов. В качестве меры такого множетсва можно выбрать сумму мер составляющих его интервалов. Однако, законность такого подхода не очевидна в случае счетного числа интервалов, так как при этом мера множества будет равно сумме положительного ряда, который, вообще говоря, может оказаться расходящимся.

Убедимся, что в нашей задаче ряд обязательно будет сходящимся. Всякое открытое ограниченное множетсво можно поместить внутрь интервала (a, b), мера которого равна $b-a$. Тогда число $b-a$ будет ограничивать сверху любую частичную сумму данного положительного ряда, из этого следует сходимость ряда. Таким образом, следующее определение справедливо.

Определение 2.2 *Мера открытого ограниченного множества на прямой равна сумме мер составляющих его интервалов.*

Перейдем к рассмотрению более общей ситуации - найдем меру любого ограниченного множества на прямой.

Множество E ограничено тогда и только тогда, когда существует интеравл (a, b) такой, что E содержится в этом интервале.

Будем рассматривать всевозможные покрытия данного множества E открытыми множествами X: $X \cap E \subset X$. Рассмотрим множество мер открытых покрытий (это возможно по определению 2.1). Это будет числовое множество, ограниченное по крайней мере нулем. Следовательно, на основании аксиомы Кантора у этого множества есть точная нижняя грань.

Определение 2.3 *Нижняя грань множества мер всевозможных открытых покрытий данного множества E называется внешней мерой множества E и обозначается $m^*E = \inf\{mX\}$, где mX - мера множества X (открытого покрытия).*

Определение 2.4 *Внутренней мерой множества, E назовем разность между мерой содержинтервала и внешней мерой дополнения множества E до содержащего данное множество интервала (a, b), $m_*E = b - a - m^*(CE)$.*

Оказывается, что выбранное определение внутренней и внешней мер множества E обеспечивают выполнение естественного свойства:

Теорема 2.5 *Если E - ограниченное множество на прямой, то его внешняя и внутренняя меры связаны неравенством:*

$$m_*E \leq m^*E \tag{2.1}$$

Доказательство:

В силу определения внутренней меры множества, неравенство (2.1) эквивалентно неравенству

$$m^*E + m^*(CE) \geq b - a \tag{2.2}$$

Докажем неравенство (2.2). Заметим, что каждое из слагаемых в левой части неравенства (2.2) предстваляет собой точку прикосновения множества мер всевозможных открытых покрытий множества E и его дополнения. Тогда на основании определения точки прикосновения получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists X_1,\; X_1 \text{ открытое и } E \subset X_1 \Rightarrow mX_1 < m^*E + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists X_2, \; X_2 \text{ открытое и } CE \subset X_2 \Rightarrow mX_2 < m^*CE + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.4}$$

Почленно сложим последние два неравенства:

$$mX_1 + mX_2 < m^*E + m^*(CE) + \varepsilon \tag{2.5}$$

Поскольку множества X_1 и X_2 в совокупности покрывают интервал (a, b), то сумма их мер будет больше или равна меры этого интервала, то есть

$$mX_1 + mX_2 \geq b - a \tag{2.6}$$

Тогда из (2.5) и (2.6) следует:

$$b - a < m^*E + m^*(CE) + \varepsilon \tag{2.7}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство (2.2).

□

Доказанная выше теорема, позволяет сформулировать общее определение меры.

Определение 2.6 *Если внешняя и внутренняя меры ограниченного множества на прямой совпадают, то это множество называют измеримым по Лебегу, а общее значение внутренней и внешней мер называется мерой Лебега этого множества и обозначается* $m^*E = m_*E = mE$.

2.2. Примеры измеримых по Лебегу множеств.

Пример 2.1 *Пусть E - точка на прямой. $m^*E = 0$, следовательно, $m_*E = 0$, значит, $m^*E = m_*E = 0$. Вывод:точеченое множество измеримо и его мера равна нулю.*

Пример 2.2 *$E = (c, d)$. m^*E будет порождаться множеством X, которое совпадает с самим интервалом (c, d): $m^*E = d - c$.*

Рассмотрим в качестве содержащего интервала сам интервал (c, d), тогда $m^*(C(c, d)) = 0$, а $m_*((c, d)) = d - c - 0 = d - c = m^*E$. Вывод: интервал является измеримым по Лебегу множеством, и его мера Лебега равна длине интервала: $mE = d - c$.

Пример 2.3 *$E = [c, d]$. Из примеров 2.1 и 2.2. следует, что отрезок является множеством, измеримым по Бебегу и $mE = d - c$.*

2.3. Свойства меры Лебега.

Теорема 2.7 *Для любого измеримого множества E: $mE \geq 0$.*

Теорема 2.8 *Если E - измеримое множество, то его дополнение до содержащего интервала (a, b) тоже измеримо, при этом выполняется равенство: $mE + m(CE) = b - a$.*

Доказательство:

Докажем по определению. Найдем внутреннюю меру дополнения: $m_*(CE) = b - a - m^*(C(CE)) = b - a - m^*E = b - a - m_*E$ ($m^*E = m_*E$, поскольку E - измеримое). Теперь найдем внешнюю меру дополнения. $m_*E = b - a - m^*(CE)$, следовательно, $m_*(CE) = b - a - (b - a - m^*(CE)) = m^*(CE)$. Итак, внешняя мера множества CE равна его внутренней мере, значит, CE - измеримое множество. Кроме того, $m(CE) = b - a - mE$.

□

Теорема 2.9 *Любое конечное или счетное множество измеримо, причем их мера равна нулю*

Доказательство:

Проведем доказательство для наиболее общего случая, когда множество E счетно: $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$. Поместим каждую из точек x_i внутрь интервала, длина которого определяется следуюим алгоритмом: $\forall \varepsilon > 0 \;\; x_1$ поместим в интервал радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$, x_2 поместим внутрь интервала радиуса $\frac{\varepsilon}{4}$,. . ., x_n поместим в интервал радиуса $\frac{\varepsilon}{2^n}$,. . .. Тогда все множество E будет покрыто объединением интервалов, следовательно, множество E будет содержаться внутри открытого множества. На основании определения меры открытого множества и с учетом того, что могут пересекаться между собой получим, что $m^*E \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \ldots = \varepsilon(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots) = 2\varepsilon$. В силу произвольности выбора ε, перейдем в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, тогда $m^*E \leq 0$, следовательно, $m^* = 0$. По неравенству из предыдущего пункта

(2.1) $m_* \leq m^*E = 0$, следовательно, $m_*E = 0$. Внутренняя и внешняя меры множества E совпадают, следовательно, E - измеримое по Лебегу множество и его мера равна 0.

$\square$

Следствие 2.10 *Любое ограниченное множество рациональных и алгебраических чисел имеет меру 0.*

У п р а ж н е н и е 2.1 *Найдите меру множества I иррациональных чисел, содержащихся в интервале (a, b).*

У п р а ж н е н и е 2.2 *Найдите меру канторова совершенного множества.*

Решение.

Найдем меру дополнения: $m(Cp_0) = \frac{1}{8} + 2\frac{1}{9} + 4\frac{1}{27} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1.$

Тогда $m(P_0) = m([0,1]) - m(CP_0) = 1 - 1 = 0$

2.4. Основные теоремы о мере Лебега. Измеримость открытых и замкнутых множеств.

Можно доказать, что рассмотренное в предыдущем параграфе мера Лебега позволяет обобщить известное свойство аддитивности мер с конечного числа объектов на счетное число.

Теорема 2.11 *Если дано счетное количество измеримых множеств, то их объединение тоже будет измеримым, при этом мера объединения будет меньше или равна суммы мер множеств, входящих в объединение, в частности, если множества, входящие в объединение попарно не пересекаются, то выполняется точное равенство.*

Если E_n измеримое множество, то множество $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ измеримое и

$$mE \leq \sum_{n=1}^{\infty} mE_n \tag{2.8}$$

Замечание.

В случае объединения не счетного числа измеримых множеств, само объединение может оказаться не измеримым.

Теорема 2.12 *Пересечение любого конечного или счетного числа измеримых множеств измеримо.*

Доказательство.

Пусть имеется счетное число измеримых множеств E_n, обозначим через $E = \cap_{n=1}^{(}\infty) E_n$ результат пересечения этих множеств. Докажем измеримость множества E. Для этого рассмотрим дополнение множества E и воспользуемся формулой двойственности: $CE = C(\cap n = 1^{\infty} E_n) = \cup_{n=1}^{\infty} CE_n$. Последнее множество измеримо по предыдущей теореме, следовательно, $E = C(CE)$ - измеримое множество.

□

Следствие 2.13 *Если множества* E_1 *и* E_2 *измеримы, то измерима и их разность, то есть* $E_1 \backslash E_2$.

Доказать самостоятельно.

Следствие 2.14 *Любое ограниченное открытое множество на прямой измеримо.*

Следствие 2.15 *Любое ограниченное замкнутое множество на прямой измеримо.*

2.5. Измеримые функции.

Пусть функция $f(x)$ ограничена и определена на некотором E - измеримом множестве. Пусть $c \in \mathbb{R}$. Определим следующий символ:

Определение 2.16 $E(f \geq c) = \{x: \ x \in E \ \wedge f(x) \geq c\}$

Аналогично определяются символы $E(f > c)$, $E(f \leq c)$, $E(f < c)$.

Определение 2.17 *Функция $y = f(x)$ определенная и ограниченная на измеримом множестве E называется измеримой на этом множестве, если для $\forall c \in \mathbb{R}$ будут измеримыми 4 множества $E(f \geq c)$, $E(f > c)$, $E(f \leq c)$, $E(f < c)$.*

Упростить проверку измеримости функции позволяет следующая теорема.

Теорема 2.18 *Если любое из 4 множеств $E(f \geq c)$, $E(f > c)$, $E(f \leq c)$, $E(f < c)$ измеримо, то измеримы и остальные множества.*

Доказательство. Пусть множество $E(f \geq c)$ измеримо. Заметим, что $E(f < c) = CE(f \geq c)$ - измеримо. Аналогично, измеримость одного из множеств $E(f \leq c)$, $E(f > c)$, влечет за собой измеримость другого.

Докажем, что из измеримости $E(f \geq c)$ следует измеримость $E(f \leq c)$. Заметим, что $E(f \leq c) = E(f < c) \cup E(f = c)$. Из вышесказанного следует, что $E(f < c)$ - измеримое множество. Осталось проверить измеримость множества $E(f = c)$. Представим этом множество в виде: $E(f = c) = (E(f < c+1))\backslash E(f < c))\backslash E(c < f < c+1)$. Множества $E(f < c+1)$, $E(f < c)$ измеримы, осталось проверить измеримость мноежства $E(c < f < c+1)$. Рассмотрим вспомогательные множества $E_n = E(f < c + \frac{1}{n})$. Эти множества измеримы. Тогда множество $E(c < f < c+1) = (E_1 \backslash E_2) \cup (E_2 \backslash E_3) \cup \ldots \cup (E_n \backslash E_{n+1}) \cup \ldots$ - представили в виде счетного объединения измеримых множеств, значит, множество $E(c < f < c+1)$ измеримое, следовательно, измеримыми будут множества $E(f \leq c)$ и $E(f > c)$.

□

Замечание.

Из определения измеримой функции следует, что если изменится ее значение в конечном или счетном числе точек (вообще говоря, во множестве меры ноль), то функция $f(x)$ останется измеримой.

2.6. Свойства измеримых функций.

Теорема 2.19 *Пусть* $k \in \mathbb{R}$ *- произвольное и известно, что функция* $f(x)$ *измеримая на множестве* E*. Тогда:*

1. *Функция* $f + k$ *измеримая на множестве* E*;*
2. *Функция* $kf(x)$ *измеримая на множестве* E*.*

Доказательство.

1. Для любого числа $c \in \mathbb{R}$ множество $E(f \geq c)$ измеримо по определению измеримой функции. Тогда множество $E(f + k \geq c) = E(f \geq c - k)$ - измеримо, тогда по теореме 2.18 функция $f+k$ измеримая на множестве E.
2. Для любого числа $c \in \mathbb{R}$ множество $E(f \geq c)$ измеримо по определению измеримой функции. Тогда:

   а). Для $k > 0$ множество $E(kf \geq c) = E(f \geq \frac{c}{k})$ измеримое.

   б). Для $k < 0$ множество $E(kf \geq c) = E(f \leq \frac{c}{k})$ измеримое.

   в). Для $k = 0$ множество

$$E(kf \geq c) = E(0 \geq c) = \begin{cases} E, \ c \leq 0 \\ (a,b)\backslash E, \ C > 0 \end{cases} \text{ измеримое.}$$

□

Теорема 2.20 *Пусть функции* f *и* g *измеримы на множестве* E*, тогда:*

1. $f(x) + g(x)$*,* $f(x) - g(x)$ *- измеримые функции на множестве* E*;*
2. $f(x)g(x)$ *измеримая функция на множестве* E
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ *измеримая фнкция на множестве* E *(предполагается, что функция* $g(x)$ *не обращается в ноль на множестве* E*).*

Теорема 2.21 *Если функция* $f(x)$ *измеримая на множестве* E *и* A *- любое измеримое подмножество множества* E*, то функция* $f(x)$ *измеримая на подмножестве* A*.*

Доказательство.

Для любого числа $c \in \mathbb{R}$: $A(f \geq c) = A \cap E(f \geq c)$ - измеримое множество по теореме 2.12.

$\square$

Теорема 2.22 *Если функция $f(x)$ непрерывна на изхмеримом множестве E, то она измерима на этом множестве.*

Замечание.

Обратное утверждение не верно, так как если данная измеримая функция была непрерывной, то мы можем, изменив ее значение в одной точке, превратить в разрывную функцию. Измеримость при этом сохраняется.

Определение 2.23 *характеристической функцией множества E называется следующая функция:*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in (a,b) \backslash E \end{cases} \tag{2.9}$$

Например, функция Дирихле является характеристической функцией множества рациональных чисел.

Теорема 2.24 *Для того, чтобы множество E было измеримым необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция была измерима на данном множестве.*

Следствие 2.25 *Функция Дирихле измерима по Лебегу на любом ограниченном промежутке (a, b).*

2.7. Интеграл Лебега и его существование.

Как известно, интеграл Римана существует для функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, или, в крайнем случае, для функций, имеющих "не слишком большое"(конечное или счетное) число точек разрыва.

Заслуга Лебега в том, что он распространил операцию интегрирования на случай множеств, устроенных более сложно, чем отрезок или отрезок, с исключенными точками.

Интеграл Лебега - это обобщение интеграла Римана на более широкий класс функций. Все функции, определенные на конечном отрезке числовой прямой и интегрируемые по Риману, являются также интегрируемыми по Лебегу, приччм в этом случае оба интеграла равны. Однако, существует большой класс функций, определчнных на отрезке и интегрируемых по Лебегу, но неинтегрируемых по Риману. Также интеграл Лебега может иметь смысл для функций, заданных на произвольных множествах.

Идея построения интеграла Лебега состоит в том, что вместо разбиения области определения подынтегральной функции на части и составления потом интегральной суммы из значений функции на этих частях, на интервалы разбивают еч область значений, а затем суммируют с соответствующими весами меры прообразов этих интервалов.

Определение 2.26 *Будем говорить, что некоторое свойство выполняется почти везде на множестве, если оно выполняется во всех точках этого множества, за исключением, может быть, множества меры ноль.*

Теорема 2.27 *Для того, чтобы ограниченная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *была интегрируема по Риману на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна почти везде на этом отрезке.*

Замечание.

Эта теорема обобщает теоремы, полученные ранее (см. курс "Математический анализ -2").

Построим интеграл Лебега для функции $f(x)$, ограниченной на некотором измеримом множестве E.

Множество значений функции $f(x)$ ограничено, следовательно, существуют точная нижняя и точная верхняя грань множества значений функции $f(x)$: $m = \inf\limits_{x \in E}\{f(x)\}$ и $M = \sup\limits_{x \in E}\{f(x)\}$. Разобьем отрезок от m до M на n произвольных частей:

$m = y_0 < y_1 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_n = M$.

Определение 2.28 *Сумма* $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k mE(y_k \leq f \leq y_{k+1}$ *называется интегральной сумми Лебега.*

Положим $\lambda = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} y_{k+1} - y_k$

Определение 2.29 *Интегралом Лебега от функции* $f(x)$ *по измеримому множеству* E *называется предел предел соответсвующей суммы Лебега, если этот предел существует.*

$$\int_E f(x)dm = \lim_{\lambda \to 0} \sigma \tag{2.10}$$

Теорема 2.30 *Если функция* $f(x)$ *ограниченная и измеримая на любом измеримом множестве* E, *то она интегрируема по Лебегу на этом множестве.*

Следствие 2.31 *Функция Дирихле интегрируема по Лебегу на люом отрезке* $[a, b]$.

Заметим, что функция Дирихле - это пример функции, интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману.

2.8. Основные свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

Теорема 2.32 *Если E - измеримое множество меры ноль, то* $\int\limits_E f(x)dm = 0$.

Теорема 2.33 *(Аддитивность интеграла Лебега.) Пусть измеримое множество $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ и E_1, E_2 - измеримые множества. Тогда*

$$\int_E f(x)dm = \int_{E_1} f(x)dm + \int_{E_2} f(x)dm \tag{2.11}$$

Теорема 2.34 *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают почти везде на измеримом множестве E, то интегралы Лебега от этих функций равны:* $\int_E f(x)dm = \int_E g(x)dm$.

Ранее было отмечено, что из интегрируемости функции по Лебегу не обязательно следует интегрируемость функции по Риману, обратное утверждение, напротив, всегда имеет место.

Теорема 2.35 *Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то*

1. *она интегрируема на этом отрезке по Лебегу;*
2. *интегралы Римана и Лебега совпадают.*

Вывод: интеграл Лебега является обобщением интеграла Римана.

Глава 3
ТЕОРИЯ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

3.1. Определение гильбертова пространства.

Гильбертово пространство, математическое понятие, обобщающее понятие евклидова пространства на бесконечномерный случай. Возникло на рубеже 19 и 20 вв. в виде естественного логического вывода из работ нем. математика Гильберта в результате обобщения фактов и методов, относящихся к разложениям функций в ортогональные ряды и к исследованию интегральных уравнений. Постепенно развиваясь, понятие гильбертова пространства находило все более широкие приложения в различных разделах математики и теоретической физики; оно принадлежит к числу важнейших понятии математики.

Определение 3.1 *Пусть X - линейное нормированное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда скалярным произведением в X называется функционал $(\cdot,\cdot) : X^2 \to \mathbb{C}$ удовлетворяющий следующим условиям:*

1. $(x,x) \geq 0$, $\forall x \in X$
2. $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ $\forall x,y,z \in X$
4. $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $x,y \in X$
5. $(x,y) = \overline{(y,x)}$, $\forall x,y \in X$.

Замечание.

Если пространство X рассматривать над полем вещественных чисел, то аксиомы 1-4 остаются теми же, а аксиома 5 принимает вид:

5. $(x,y) = (y,x)$, $\forall x,y \in X$.

Следствие 3.2 $(x,\lambda y) = \overline{\lambda}(x,y)$, $\forall x,y \in X$.

Доказательство:

$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y).$

$\square$.

Определение 3.3 *Пусть X - пространство со скалярным произведением. Тогда для любого $x \in X$ можно определить норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.*

Определение 3.4 *Гильбертово пространство - это линейное пространство X, в котором задано скалярное произведение и которое является полным относительно нормы, порождаемой этим скалярным произведением.*

3.2. Неравенство Коши-Буняковского.

Теорема 3.5 *Пусть X - пространтсво со скалярным произведением. Тогда для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство Коши-Буняковского: $|(x, y| \leq \|x\|\|y\|$.*

Доказательство.

Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = (x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
С дургой стороны: $(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x + \lambda y) + \lambda(y, x + \lambda y) = (x, x) + \lambda((x, y) + \overline{(x, y)}) + \lambda^2(y, y) = (x, x) + 2\lambda Re(x, y) + \lambda^2(y, y) \geq), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Заметим, что дискриминант полученного квадратного неравенства меньше или равен нуля:
$D = (Re(x, y))^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$, следовательно, $(Re(x, y))^2 \leq (x, x)(y, y)$, следовательно, $|Re(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$.
Запишем комплексное число (x, y) в показательной форме: $(x, y) = |(x, y)| \cdot e^{i\varphi}$, где $\varphi = arg(x, y)$.
введем вектор $y_1 = e^{i\varphi} \cdot y$. Тогда $(x, y_1) = |(x, y)|$. Неравенство $|Re(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$ справедливо для любой пары векторов x, y_1, в частности, для пары x, y_1. Следовательно, $|Re(x, y_1)| \leq \|x\|\|y_1\|$. Заметим, что $Re(x, y_1) = |(x, y)|$, а $\|y_1\| = \|y\|$. Таким образом, доказали неравенство: $\|(x, y)\| \leq \|x\|\|y\|$.
□

Теорема 3.6 *Если X - пространство со скалярным произведением, то $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ является нормой в X.*

3.3. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве.

Пусть H - гильбертово пространство.

Определение 3.7 *Конечная или счетная система векторов* x_k *из* H *называется*

ортогональной, если $(x_i, x_j) = 0$, $i \neq j$;

нормированнолй, если $\|x_i\| = 1$, $\forall i$;

ортонормированной, если система ортогональна и ортонормированна.

Определение 3.8 *Ортонормированная система называется полной, если замыкание линейной оболочки векторов этой системы совпадапает с гильбертовым пространством* H. *(то есть линейные комбинации векторов из ОНС всюду плотны в* H*).*

3.4. Тригонометрическая система в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.

Пространство $L_2[0, \pi]$ - пространство классов измеримых по Лебегу функций. Скалярное произведение: $(x, y) = \int\limits_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)}dt$ в $L_2[0, \pi]$.

Норма $\|x\|_2 = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} x(t)\overline{x(t)}dt} = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt}$

Под тригонометрической системой обычно понимается система функций: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}$, $\ldots$, $\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}$, $\ldots$

Упражнение 3.1 *Проверьте, что тригонометрическая система является ортонормированной системой в* $L_2[0, 2\pi]$.

Указание.

Вычислите скалярные произведения: $(\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}})$, $(\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}})$, $(\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mt}{\sqrt{\pi}})$.

Теорема 3.9 *Тригонометрическая система является ортонормированной полной системой в* $L_2[0, 2\pi]$.

Доказательство. Достаточно проверить полноту тригонометрической системы.

Ранее было опказано, что в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ всюду плотно множество всех тригонометрических полиномов T. Любой такой полином - это комбинация функций из тригонометрической системы.

$\square$

3.5. Критерий сходимости ортогонального ряда в гильбертовом пространстве.

Теорема 3.10 *(Теорема Пифагора) Пусть* $\{x_k\}_{k=1}^n$ *конечная ортогональная система в гильбертовом пространстве* H*. Тогда* $\|\sum_{k=1}^n x_k\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$

Теорема 3.11 *(Критерий сходимости ортогонального ряда) Пусть* e_n *счетная ортонормированная система в гильбертовом пространстве* H*. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n e_n$, $c_n \in \mathbb{C}$ *сходится в* H *тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$

Следствие 3.12 *Для того, чтобы тригонометрический ряд* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} \infty(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *сходился в среднем квадратичном к некоторой функции* $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty$.

3.6. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.

Определение 3.13 *Пусть* e_n *- конечная или счетная ОНС в гильбертовом пространстве* H*. Пусть* $s \in H$ *- произвольный вектор. Тогда рядом Фурье вектора* s *по ОНС* e_n *называется формальный ряд* $\sum (s, e_n) e_n$*. Числа* (s, e_n) *называются коэффициентами Фурье вектора* s *по системе* e_n*.*

3.7. Существование ортонормированной системы в гильбертовом пространстве.

Пусть H - гильбертово пространство, $x \in H$.

Определение 3.14 *Обозначим* $\overline{x} = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ *- нормированный элемент.*

Определение 3.15 *Пусть* $\{x_n\}$ *- конечная или счетная система векторов в пространстве* H*. Определим систему векторов: 1)* $y_1 = x_1$ *2)* $\forall n = 2, 3, \ldots$ $y_n = x_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} (x_n, \overline{y_k})\overline{y_k}$*. говорят, что система* $\{y_n\}$ *получена из системы векторов* $\{x_n\}$ *методом ортогонализации Гильберта-Шмидта.*

Теорема 3.16 *Пусть* $\{x_n\}$ *- конечная или счетная система из гильбертова пространства* H*, а система* $\{y_n\}$ *получена из системы векторов* $\{x_n\}$ *методом ортогонализации Гильберта-Шмидта. Тогда:*

1. $\{y_n\}$ *ортогональная система;*
2. *линейные оболочки систем* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *совпадают.*

Теорема 3.17 *Пусть* H *- гильбертово пространство. Тогда в* H *существует конечный ортонормированный базис.*

Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа - М.: Наука, 1989.
2. Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика. - М.: Физматлит, 2000.
3. Треногин В. А. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1980.
4. Треногин В. А., Писаревский Б. М. Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - М.: Наука, 1984.