

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

*Ю. Н. ПОЛУХИН*

# ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки бакалавров, магистров 11.03.01 Радиотехника, 11.04.01 Радиотехника

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2016

УДК 621.396(075)  
ББК 32.86-01(я7)  
П534

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. С. Е. Курушина (Самарский государственный университет путей сообщения);  
канд. техн. наук, проф. Ю. Ф. Широков (Самарский государственный аэрокосмический университет)

*Полухин Ю.Н.*

П534 **Излучение электромагнитных волн** : учеб. пособие / *Ю.Н. Полухин.* – Самара: Изд-во СГАУ, 2016. – 156 с.

**ISBN 978-5-7883-1068-8**

Изложен один из основных разделов теории электромагнетизма, посвященный принципам излучения электромагнитных волн и теории элементарных излучателей. Включены вопросы, не освещенные в традиционных учебных пособиях, отражен авторский взгляд на некоторые вопросы теории излучения.

Предназначено для студентов радиотехнических специальностей вузов в качестве пособия по дисциплинам «Электродинамика и распространение радиоволн», «Теория электромагнитного поля», «Устройства СВЧ и антенны», «Техническая электродинамика».

Разработано на кафедре радиотехники.

УДК 621.396(075)  
ББК 32.86-01(я7)

ISBN 978-5-7883-1068-8

© СГАУ, 2016

# Оглавление

<b>Предисловие .....</b>	<b>5</b>
<b>1. Понятие излучения электромагнитных волн. Потенциалы и поля произвольной излучающей системы .....</b>	<b>8</b>
1.1. Понятие излучения электромагнитных волн .....	8
1.2. Система неоднородных уравнений Максвелла .....	16
1.3. Электрические векторный и скалярный потенциалы .....	21
1.4.* Свойство градиентной инвариантности .....	23
1.5. Условие калибровки Лоренца. Неоднородные волновые уравнения для потенциалов .....	25
1.6. Физический смысл электрических потенциалов.....	29
1.7. Электрические потенциалы стационарных и квазистационарных полей .....	35
1.8. Сферически-симметричное решение однородного волнового уравнения для потенциала вне точечного источника...39	
1.9. Решение неоднородного волнового уравнения для произвольной излучающей системы. Запаздывающие потенциалы .....	44
1.10. Комплексное представление потенциалов и полей гармонических излучателей .....	49
1.11.* Функция Грина уравнения Гельмгольца для свободного пространства.....	57
1.12. Поле произвольной излучающей системы в дальней зоне....	61
1.13. Особенности поля произвольной излучающей системы в дальней зоне.....	69
1.14. Характеристики излучения произвольной излучающей системы .....	73
1.15.* Парциальные характеристики направленности и коэффициенты направленного действия по угловым составляющим поля .....	81
1.16.* Поляризационные параметры поля излучения.....	83
1.17.* Поляризационная характеристика поля излучения.....	95
<b>2. Элементарный электрический излучатель .....</b>	<b>100</b>

2.1. Понятие элементарного электрического излучателя и способы его реализации.....	100
2.2. Поле элементарного электрического излучателя в произвольной точке пространства .....	105
2.3. Поле элементарного электрического излучателя в ближней зоне.....	113
2.4.* Энергетические характеристики поля элементарного электрического излучателя в ближней зоне.....	117
2.5. Особенности поля элементарного электрического излучателя в ближней зоне .....	124
2.6. Поле элементарного электрического излучателя в дальней зоне .....	125
2.7. Особенности поля элементарного электрического излучателя в дальней зоне .....	133
2.8. Характеристики излучения элементарного электрического излучателя .....	135
2.9.* Трансформация поля элементарного электрического излучателя с расстоянием .....	139
<b>Приложение 1. Некоторые соотношения векторного анализа ....</b>	<b>148</b>
<b>Приложение 2. Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах .....</b>	<b>152</b>
<b>Список рекомендуемой литературы .....</b>	<b>153</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии излагается один из основных разделов макроскопической электродинамики – излучение электромагнитных волн, включающий принципы излучения, общие соотношения для поля произвольной излучающей системы, элементарные излучатели, задаваемые сторонними электрическими и магнитными токами.

Пособие предназначено для студентов радиотехнических специальностей вузов и может использоваться при изучении соответствующих разделов дисциплин «Электродинамика и распространение радиоволн», «Техническая электродинамика», а также – вводной общетеоретической части курса «Антенны». Вопросы проектирования сложных излучающих систем, изучаемые в курсе «Антенны», в настоящем пособии не рассматриваются.

Пособие рассчитано на студентов, изучивших основные разделы высшей математики, в частности, дифференциальные уравнения в частных производных, кратные интегралы, элементы векторного анализа, а также начальные разделы курса электродинамики: уравнения Максвелла, энергетические характеристики поля, однородные плоские волны.

Пособие задумано как руководство для самостоятельного изучения излагаемых вопросов, и в соответствии с этим замыслом автор старался дать последовательное и достаточно подробное обоснование математических соотношений, раскрывающих физическую сущность процесса излучения.

Пособие разбито на 2 части. В настоящем издании представлена 1-я часть, включающая главы 1 и 2. В главе 1 изложены понятия излучения и излучающих систем, представление поля излучения через векторный и скалярный потенциалы, дифференциальные уравнения для потенциалов, решения этих уравнений, поля и характеристики излучения произвольной излучающей системы. В главе 2 рассматривается

элементарный электрический излучатель, способы его реализации, расчет и исследование его полей в произвольной точке пространства, в ближней и дальней зонах, трансформация поля с расстоянием.

Во 2-й части пособия предполагается рассмотреть понятия магнитных токов и источников, электродинамический принцип двойственности, теорему эквивалентности, влияние экранов на характеристики излучения, поля и характеристики излучения элементарных излучателей магнитного типа – рамочных, шелевых, ферритовых, а также двухдипольных излучателей – турникетных, кардиоидных.

В пособии используется Международная система единиц СИ (SI). Входящие в формулы величины выражены в основных единицах СИ, размерные числовые коэффициенты в формулах не используются.

Геометрический вектор обозначается буквенным символом и чертой сверху (например,  $\bar{E}$ ), его абсолютная величина – тем же символом между двумя вертикальными чертами ( $|\bar{E}|$ ), его орт – единицей с индексом в виде того же буквенного символа ( $\bar{1}_E = \bar{E}/|\bar{E}|$ ).

Комплексное представление гармонически колеблющейся величины обозначается тем же буквенным символом, что и мгновенное значение физической величины, но отмечается точкой сверху, например,  $U = Re(\dot{U}), \bar{E} = Re(\dot{\bar{E}})$ . Комплексно-сопряженные величины отмечаются звездочкой (\*). Временной множитель в комплексном представлении гармонических колебаний записывается в виде  $e^{i\omega t}$ . Амплитуды гармонически колеблющихся величин отмечаются индексом «m»:

$$U_m = |\dot{U}| = \sqrt{\dot{U}\dot{U}^*}; E_m = |\dot{\bar{E}}| = \sqrt{\dot{\bar{E}}\dot{\bar{E}}^*}.$$

Положение точки в пространстве обозначается радиус-вектором  $\bar{r}$  этой точки относительно выбранного начала координат, а зависимость поля от координат в общем случае записывается в виде  $\bar{E}(\bar{r})$ . Оператор Лапласа обозначается символом  $\Delta$ , так как используемое иногда обозначение  $\nabla^2$  (где  $\nabla$  – оператор Гамильтона) может спровоцировать его неправильное понимание; например, скалярный оператор

Лапласа в обозначении  $\nabla^2$  может быть истолкован как двукратное применение оператора  $\nabla$ , что верно только в декартовых координатах.

Разделы, отмеченные звездочкой (\*), при первом прочтении можно опустить.

Автор выражает благодарность студентам Михелю А.С., Руденко Е.А., Садыкову А.Н., Чунихину В.А. за помощь в оформлении пособия. Любые замечания по структуре и содержанию пособия будут встречены с благодарностью.

# 1. ПОНЯТИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН. ПОТЕНЦИАЛЫ И ПОЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

## 1.1. Понятие излучения электромагнитных волн

Электромагнитное поле, возбуждаемое переменными токами (электрическими или эквивалентными магнитными), способно «отрываться» от создающих его источников и существовать независимо от них в виде свободного поля. В соответствии с концепцией близкодействия и базирующимися на ней уравнениями Максвелла оторвавшееся или свободное поле распространяется от точки к точке в пространстве: переменное электрическое поле возбуждает в окружающих точках магнитное поле, а переменное магнитное поле возбуждает вокруг себя электрическое поле. Возникающие таким образом электромагнитные возмущения перемещаются в пространстве с конечной скоростью. Возмущение любой непрерывной субстанции, распространяющееся с конечной скоростью, называется волновым процессом или, просто, волной. Таким образом, оторвавшееся от источника свободное поле распространяется в виде *электромагнитных волн*. Процесс формирования этого поля называется излучением, а само поле – полем излучения. Скорость распространения электромагнитных волн в безграничной среде с диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями составляет  $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ , где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Форма волновых возмущений определяется законом изменения возбуждающих токов и может иметь вид как одиночных импульсов, так и повторяющихся колебаний, непериодических или периодических, в частности, синусообразных.

Поле излучения является вынужденным, причина его существования – исходный переменный ток. Расчет поля излучения сводится к решению неоднородных уравнений Максвелла (или вытекающих из



них неоднородных волновых уравнений), в которые исходный переменный ток включается как заданный и называется сторонним. Под **сторонним** током понимается заранее известный переменный ток (электрический или эквивалентный магнитный), распределенный в ограниченной области пространства, заданный как функция времени и координат и существующий за счет внешних энергетических ресурсов.

Таким образом, **излучение** – это процесс возбуждения переменным сторонним током и передача в окружающее пространство вынужденного свободно распространяющегося электромагнитного поля, сопровождающийся переносом энергии от источника в окружающее пространство.

Структура и свойства полей излучения определяются пространственным распределением сторонних токов, область распределения которых называют **излучающей системой**. Совокупность элементов для создания полей излучения называется **антенной**. В ее составе, наряду с излучающей системой, выделяют: **распределительное устройство**, обеспечивающее требуемое распределение излучающих токов; **устройство согласования** антенны с линией передачи, соединяющей антенну с генератором колебаний и называемой в антенной технике **фидером**.

Постоянные токи не излучают: поток вектора Пойнтинга стационарного поля, создаваемого такими токами, через любую замкнутую поверхность, охватывающую область существования токов, равен нулю.

Любой переменный ток излучает электромагнитные волны. Однако излучение незначительно, если размеры  $L$  области распределения тока малы по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , т. е. выполняется **условие квазистационарности**:

$$L \ll \lambda = v/f.$$

По мере ослабления этого условия излучение возрастает, поэтому для создания интенсивного излучения используют высокочастотные колебания и увеличивают размеры антенн.

Увеличение интенсивности излучения с ростом частоты колебаний непосредственно следует из уравнений Максвелла, согласно кото-

рым чем выше скорость изменения во времени одного из векторов поля (электрического или магнитного), тем больше интенсивность возбуждаемого им второго вектора (магнитного или электрического соответственно).

Излучатели, задаваемые сторонним электрическим током, называют излучателями *электрического типа* или, просто, электрическими. Сторонний электрический ток, характеризуемый вектором плотности  $\vec{j}^e$  и являющийся первопричиной возникновения поля или первичным током, вводится в первое уравнение Максвелла, как и вторичный ток, обусловленный действием поля в проводящей среде, т.е. в среде со свободными или квазисвободными зарядами.

Для упрощения расчетов некоторые излучатели (например, рамочные, щелевые, ферритовые) удобнее задавать эквивалентными (фиктивными) *магнитными токами*, которые вводятся во второе уравнение Максвелла и совпадают по размерности с другими членами этого уравнения: интегральный магнитный ток  $I^m$  имеет размерность вольт (В), плотность объемного магнитного тока  $\vec{j}^m$  – В/м<sup>2</sup>, плотность поверхностного магнитного тока  $\vec{\eta}^m$  – В/м. Излучатели, задаваемые сторонними магнитными токами, называют излучателями *магнитного типа* или, просто, магнитными.

Мощность источника объемом  $V_\Sigma$ , заданного сторонним электрическим током с плотностью  $\vec{j}^e$  или сторонним магнитным током с плотностью  $\vec{j}^m$  и возбуждающего поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , определяется соотношениями:

$$P^{ct} = \int_{V_\Sigma} \vec{j}^e \cdot \vec{E} dV; \quad P^{ct} = \int_{V_\Sigma} \vec{j}^m \cdot \vec{H} dV.$$

Если сторонние силы совершают работу против сил поля, т.е. в источнике происходит превращение сторонней энергии в энергию электромагнитного поля и, следовательно, источник увеличивает энергию поля, то  $P^{ct} < 0$ . Для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы в объеме  $V_\Sigma$  преобладали отрицательные скалярные произведения ( $\vec{j}^e \vec{E} < 0$ ,  $\vec{j}^m \vec{H} < 0$ ), когда углы между перемножаемыми векторами являются тупыми.

Если источник ограниченного объема  $V_{\Sigma}$  (рис. 1.1) возбуждает поле  $\vec{E}, \vec{H}$  ( $P^{ct} < 0$ ) в свободном пространстве, заполненном непоглощающей средой и лишенном элементов для накопления или рассеяния энергии, то мощность потерь равна нулю ( $P^{\Pi} = 0$ ) и запас энергии остается неизменным ( $W = \text{const}, dW/dt = 0$ ). При этом уравнение баланса мгновенной мощности (теорема Пойнтинга) для области, включающей объем  $V_{\Sigma}$  и охваченной воображаемой сферической поверхностью  $S$  с ортом внешней нормали  $\vec{1}_r$ , запишется в виде:

$$P^{\Sigma} \equiv \oint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{1}_r dS = -P^{ct} > 0,$$

где  $\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}]$  – вектор Пойнтинга, выражающий плотность потока мощности возбуждаемого поля;  $P^{\Sigma}$  – поток вектора Пойнтинга через поверхность  $S$ , выражающий мощность, переносимую полем через эту поверхность. При  $P^{ct} < 0$  поток вектора Пойнтинга положителен, что означает движение энергии поля через поверхность  $S$  в направлении орта  $\vec{1}_r$  от источника в окружающее пространство. Поверхность  $S$  может быть выбрана сколь угодно далеко от источника ( $S_1 < S_2 < S_3 \dots$  – рис. 1.1), но поскольку  $P^{ct} = \text{const}$ , поток через любую из этих поверхностей одинаков:

$$\oint_{S_1} \vec{\Pi} \cdot \vec{1}_r dS = \oint_{S_2} \vec{\Pi} \cdot \vec{1}_r dS = \dots = -P^{ct} = \text{const} > 0.$$

Это означает, что электромагнитная энергия, поставляемая источником, передается от прилегающих к нему точек во все более удаленные точки, т.е. имеет место процесс излучения. Величину  $P^{\Sigma} = -P^{ct}$  называют **мощностью излучения**. Поскольку поверхность  $S$  растет с расстоянием пропорционально  $r^2$ , независимость мощности излучения от расстояния означает, что вектор Пойнтинга поля излучения уменьшается с расстоянием пропорционально  $1/r^2$ , а напряженность этого поля – пропорционально  $1/r$ .

Антенны используются не только для передачи электромагнитных волн в окружающее пространство, но и для их приема из окружа-

ющего пространства. В передающей антенне направляемые волны, распространяющиеся по фидеру от генератора к излучающей системе, возбуждают в ней высокочастотные токи, энергия которых преобразуется в энергию свободно распространяющихся волн. В приемной антенне падающие на нее свободные волны преобразуются в высокочастотные токи, энергия которых передается направляемыми волнами по фидеру ко входу приемника.

Любая реальная антенна обладает, хотя бы в какой-то мере, направленностью действия. Одной из основных характеристик антенн является *амплитудная характеристика направленности* (АХН). АХН для передающей антенны – это зависимость амплитуды излучаемого поля от направления в пространстве, а для приемной антенны – зависимость амплитуды принимаемого сигнала от направления прихода падающей волны.

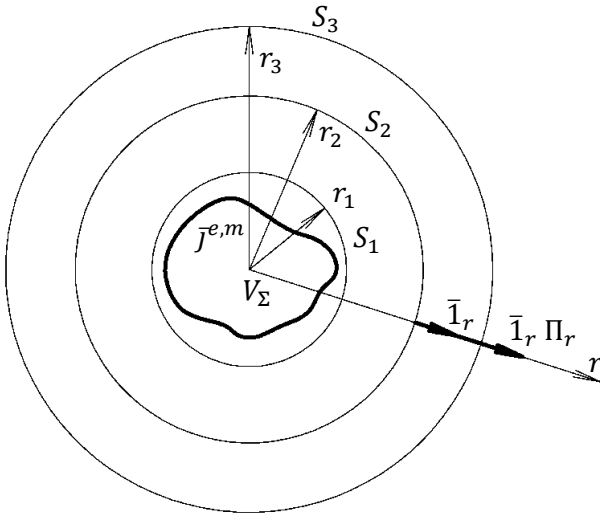


Рис. 1.1 – К энергетической трактовке излучения

Любая антенна может использоваться в режиме как передачи, так и приема. Если окружающее пространство линейно и изотропно, то справедлив *принцип взаимности*, согласно которому любая антенна при переходе от режима передачи к режиму приема сохраняет неиз-

менными основные характеристики и, в частности, характеристику направленности.

Для эффективного функционирования радиосистем антенна должна распределять энергию в пространстве (или реагировать на приходящее поле) по определенному закону, т. е. обладать требуемой характеристикой направленности. Требуемая направленность действия достигается законом распределения токов по излучающей системе (их направлений, амплитуд, фаз), который определяется конструкцией излучающей системы и способом ее питания. Стремление к реализации различных характеристик направленности породило большое разнообразие антенн, различающихся по конструкции и способам питания.

**Элементарным** называется излучатель, размеры которого малы по сравнению с длиной волны ( $l \ll \lambda$ ), что позволяет пренебречь волновым запаздыванием тока и считать неизменными его амплитуду, фазу и направление в пределах излучателя.

Расчет полей элементарных излучателей и окончательные выражения этих полей сравнительно просты и достаточно точны (тем точнее, чем меньше размеры излучателя по сравнению с длиной волны). Вместе с тем поля элементарных излучателей обладают некоторыми общими закономерностями полей излучения, которые легче изучать на примерах полей элементарных излучателей.

Анализ сложных излучающих систем, не малых в сравнении с длиной волны, основан на их представлении в виде совокупности малых в сравнении с длиной волны элементов, каждый из которых может считаться элементарным излучателем.

Направленность действия сложных излучающих систем обусловлена интерференцией полей, возбуждаемых отдельными малыми элементами. В соответствии с этим можно выделить следующие факторы, определяющие направленность действия сложных излучающих систем:

- направленность действия отдельных малых элементов;
- характер изменения фазы токов от одного элемента к другому;
- характер изменения амплитуды токов от элемента к элементу;

- характер изменения направления токов от элемента к элементу;
- разность хода лучей от отдельных элементов до точки наблюдения и, следовательно, пространственное расположение элементов, т. е. геометрия излучающей системы.

Одним из многочисленных типов антенн является *линейный электрический вибратор* – антенна в виде линейного токопроводящего (металлического) отрезка (проволочного, стержневого, трубчатого, полоскового), поперечный размер которого ( $d$ ) мал по сравнению с продольным размером ( $l$ ) и длиной волны ( $\lambda$ ):  $l \gg d \ll \lambda$ . Линейный вибратор, питаемый генератором высокочастотных колебаний точно в середине длины вибратора, т.е. имеющий равные плечи  $l_1 = l_2 = l/2$ , называется симметричным (рис. 1.2).

Симметричный линейный электрический вибратор можно рассматривать как результат разворота на  $\pm 90^\circ$  проводников симметричной двухпроводной линии (СДЛ), разомкнутой на конце (рис. 1.2, а). В исходной разомкнутой СДЛ поле имеет характер стоячей волны: текущий по проводам ток проводимости равен нулю на конце линии ( $z = l_1$ ) и максимален на расстоянии  $\lambda/4$  от конца ( $z = l_1 - \lambda/4$ ), а синфазный с ним ток смещения, существующий между проводами, максимален на конце ( $z = l_1$ ) и равен нулю при  $z = l_1 - \lambda/4$ . Полный ток, равный сумме токов проводимости и смещения, непрерывен. При развороте проводников (рис. 1.2, б) распределение тока проводимости приближенно считается таким же, как и в исходной линии, однако ток смещения пронизывает значительно большую, чем в исходной линии, область пространства, что облегчает его частичное ответвление и образование свободно распространяющихся электромагнитных волн.

Для упрощения анализа возбуждаемые излучателями поля условно делят на 3 зоны: *ближнюю*, в которой преобладает квазистационарное реактивное поле; *дальнюю*, или зону Фраунгофера, в которой преобладает волновое поле; *промежуточную*, или зону Френеля, которая расположена между ближней и дальней зонами и поле которой содержит признаки обеих этих зон. Для элементарного излучателя эти зоны определяются условиями:  $r/\lambda \ll 1$  – ближняя зона;  $0.1 < r/\lambda < 10$  – промежуточная зона;  $r/\lambda \gg 1$  – дальняя зона.

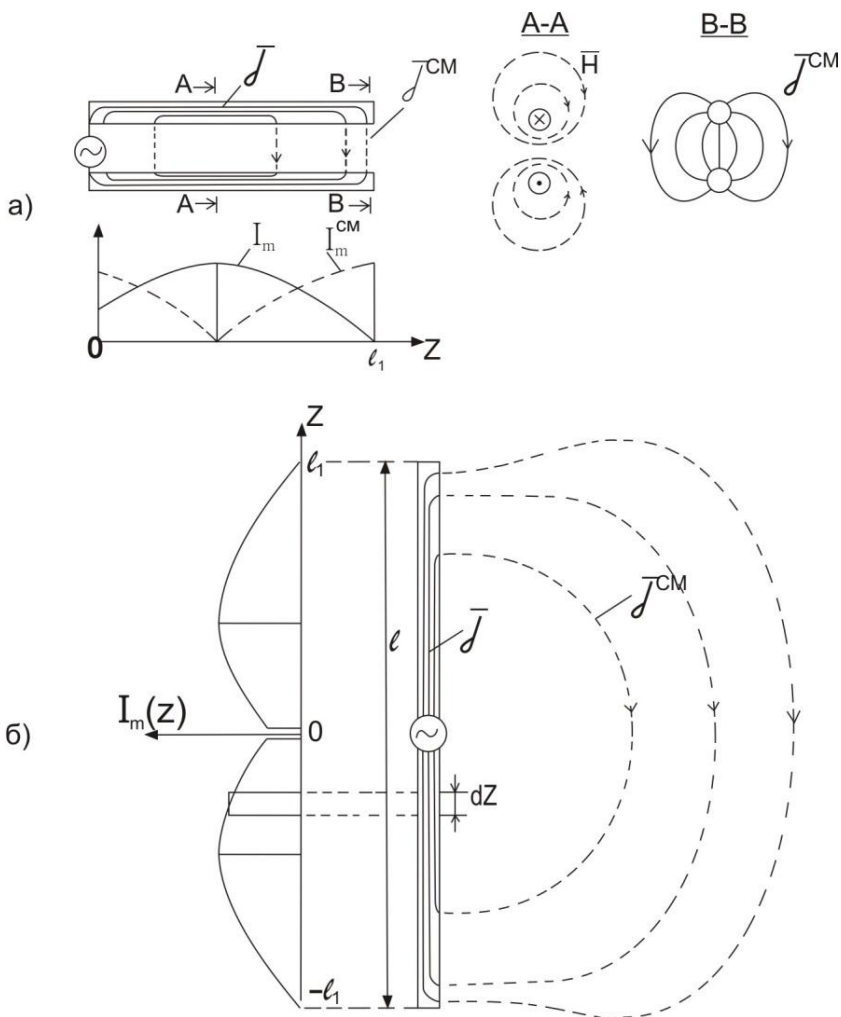


Рис. 1.2 – Преобразование разомкнутой двухпроводной линии (а) в симметричный электрический вибратор (б)

В большинстве радиотехнических систем передающая и приемная антенны разнесены на расстояния, значительно превосходящие длину волны, поэтому для радиотехники первостепенное значение имеет исследование поля дальней зоны.

Для произвольной излучающей системы с наибольшим размером  $L$  за дальнюю зону принимается область расстояний  $r$ , превышающих условную внутреннюю границу  $r_d$ :

$$r \geq r_d = (1 \div 2)L^2/\lambda; \quad \text{или} \quad r_d/\lambda = (1 \div 2)(L/\lambda)^2. \quad (1.1)$$

## 1.2. Система неоднородных уравнений Максвелла

Поля излучения являются вынужденными и подчиняются неоднородным уравнениям Максвелла, в которых учтены сторонние электрические (инд. « $e$ ») и (или) магнитные (инд. « $m$ ») токи с плотностью  $\bar{j}^{e,m}$  и заряды с плотностью  $\rho^{e,m}$ . Для поля, имеющего произвольную зависимость от времени  $t$  и описываемого векторами электрической напряженности  $\bar{E}$  и индукции  $\bar{D}$  и магнитной напряженности  $\bar{H}$  и индукции  $\bar{B}$ , система неоднородных дифференциальных уравнений Максвелла записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \bar{H} &= \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j} + \bar{j}^e; & \text{(I)} \\ \text{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \bar{j}^m; & \text{(II)} \\ \text{div} \bar{D} &= \rho + \rho^e; & \text{(III)} \\ \text{div} \bar{B} &= \rho^m. & \text{(IV)} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Здесь римскими цифрами отмечена нумерация уравнений Максвелла, принятая в большинстве современных научных изданий;  $\bar{j}$  – плотность электрического тока проводимости, обусловленного действием поля в проводящей среде, т.е. в среде со свободными или квазисвободными зарядами, распределенными с плотностью  $\rho$ ; первое слагаемое в правой части уравнения (I) выражает плотность электрического тока смещения  $\bar{j}^{\text{см}} = \partial \bar{D} / \partial t$ . Векторы поля зависят от времени



$t$  и от пространственных координат, т.е. от радиус-вектора  $\vec{r}$  точки пространства относительно выбранного начала координат, и там, где необходимо подчеркнуть эти зависимости, используется запись  $\vec{E}(t, \vec{r}), \vec{H}(t, \vec{r})$  и т.д.

Сторонние токи (с плотностью  $\vec{j}^{e,m}$ ) и заряды (с плотностью  $\rho^{e,m}$ ) являются первопричиной существования поля, т.е. *первичными* по отношению к этому полю. Электрические токи проводимости с плотностью  $\vec{j}$ , возникающие в проводящей среде, и смещения с плотностью  $\vec{j}^{cm} = \partial \vec{D} / \partial t$  обусловлены действием поля и считаются *вторичными*.

Сторонний электрический ток вводится в уравнение (I), как и вторичные электрические токи проводимости и смещения. Сторонние электрические заряды с плотностью  $\rho^e$  вводятся в уравнение (III), как и свободные заряды с плотностью  $\rho$ , движением которых обусловлен вторичный ток проводимости.

Слагаемое  $\partial \vec{B} / \partial t$  уравнения (II) играет такую же роль в возбуждении электрического поля, как и плотность электрического тока смещения  $\vec{j}^{cm} = \partial \vec{D} / \partial t$  в возбуждении магнитного поля согласно (I); поэтому величина  $\partial \vec{B} / \partial t$  рассматривается как *плотность магнитного тока*, а сторонний магнитный ток с плотностью  $\vec{j}^m$  вводится в уравнение (II) с тем же знаком, что и  $\partial \vec{B} / \partial t$ .

Плотности свободных зарядов  $\rho$  и тока проводимости  $\vec{j}$ , обусловленного движением этих зарядов, связаны *уравнением непрерывности*, являющимся макроскопическим выражением закона сохранения заряда в дифференциальной форме, и такие же уравнения вводятся для плотностей сторонних токов и зарядов – электрических  $\vec{j}^e, \rho^e$  и магнитных  $\vec{j}^m, \rho^m$ :

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{j}^{e,m} = -\frac{\partial \rho^{e,m}}{\partial t}. \quad (1.3)$$

В системе уравнений Максвелла (1.2) уравнения (I), (II), связывающие векторы электрического и магнитного полей, считаются ос-

новными. Уравнение (III) является следствием уравнения (I) и уравнений непрерывности, связывающих  $\vec{j}$  с  $\rho$  и  $\vec{j}^e$  с  $\rho^e$ . В этом нетрудно убедиться: взяв дивергенцию от обеих частей (I), учтя векторное тождество  $\text{div rot } \vec{H} \equiv 0$ , уравнения непрерывности для  $\vec{j}, \rho$  и для  $\vec{j}^e, \rho^e$  и полагая поля переменными (а только они и могут быть полями излучения), приходим к уравнению (III). Аналогичным образом доказывается, что уравнение (IV) является следствием уравнения (II) и уравнения непрерывности, связывающего  $\vec{j}^m$  с  $\rho^m$ .

Система уравнений Максвелла (1.2) дополняется материальными уравнениями, учитывающими электромагнитные свойства среды, в которой существует поле. В случае изотропной среды эти уравнения записываются в виде:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}; \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где  $\sigma$  – удельная электропроводность;  $\varepsilon, \mu$  – безразмерные диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно;  $\varepsilon_0, \mu_0$  – используемые в СИ коэффициенты размерностей, называемые электрической и магнитной постоянными соответственно:

$$\varepsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1} \text{ Ф/м}; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Для краткости записи в СИ используются абсолютные проницаемости (инд. «а»): диэлектрическая  $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$  и магнитная  $\mu_a = \mu_0 \mu$ .

Материальные параметры  $\sigma, \varepsilon, \mu$  могут зависеть от различных факторов:

- для неоднородных сред – от координат, например,  $\varepsilon(\vec{r})$ ;
- для нелинейных сред – от напряженности поля, что при переменном поле приводит к зависимости свойств среды от времени, например,  $\varepsilon(E(t)) = \varepsilon(t)$ ;
- для инерционных сред – от предыстории состояния среды и, следовательно, от времени, а при гармоническом поле – от его частоты  $\omega$ , например,  $\varepsilon(\omega)$  (временная или частотная дисперсия);

- для анизотропных сред – от направления поля, что в векторной записи материальных уравнений отображается тензорными параметрами среды, отмечаемыми значком « $\leftrightarrow$ »:

$$\vec{j} = \vec{\sigma} \vec{E}; \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon} \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{\mu} \vec{H}.$$

В изотропной среде  $\vec{\sigma} = \sigma \vec{1}$ ,  $\vec{\epsilon} = \epsilon \vec{1}$ ,  $\vec{\mu} = \mu \vec{1}$ , где  $\vec{1}$  – единичный тензор (с единичными диагональными и нулевыми остальными элементами).

Возбуждение полем вторичных токов проводимости в проводящей среде и поддержание переменного поля в инерционной (диспергирующей) среде требует затрат энергии поля на преодоление сопротивления среды и сопровождается поглощением энергии поля средой, т.е. потерями энергии поля. Среды, в которых проявляется хотя бы один из этих факторов, называют поглощающими, а среды, в которых эти факторы отсутствуют, – непоглощающими.

В непроводящей среде, т.е. в среде с нулевой электропроводностью ( $\sigma = 0$ ), отсутствуют вторичные токи проводимости ( $\vec{j} = \sigma \vec{E} = 0$ ) и, как следует из уравнения непрерывности для переменных процессов ( $\partial/\partial t \neq 0$ ), – свободные заряды ( $\partial\rho/\partial t = -\text{div} \vec{j} = 0; \Rightarrow \rho = 0$ ).

Еще раз подчеркнем, что сторонними считаются заранее известные токи, заданные как функции времени и пространственных координат. Сторонние токи могут иметь различную физическую природу и во многих случаях являются лишь эквивалентными замещениями реальных физических процессов, поставляющих энергию полю. Электрические сторонние токи могут быть как токами проводимости, обусловленными движением квазисвободных зарядов в проводящем или полупроводящем твердом теле либо свободных зарядов в вакууме, газе, плазме, так и токами смещения. Для упрощения расчетов малый (в сравнении с длиной волны) контур переменного электрического тока представляется перпендикулярным плоскости контура магнитным током (элементарная рамочная антенна), а малый контур магнитного тока (например, кольцевая щель в проводнике) – перпендикулярным плоскости контура электрическим током. Источниками излучения или их эквивалентными замещениями могут служить электрический и маг-

нитный токи поляризации, каждый из которых может быть сопоставлен с колебаниями как электрических диполей (т.е. вектора поляризованности  $\bar{P}$ ), так и магнитных диполей (т.е. вектора намагниченности  $\bar{M}$ ).

В качестве источников излучения могут рассматриваться излучающие поверхности с заданным распределением эквивалентных поверхностных токов. Поверхностным называется гипотетический ток, распределенный по некоторой поверхности  $S$  в бесконечно тонком (в направлении нормали  $n$  к этой поверхности) слое  $\Delta n \rightarrow 0$ . Он описывается вектором поверхностной плотности тока:

$$\bar{\eta} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \bar{1}_i \frac{\Delta I}{\Delta l};$$

где  $\bar{1}_i$  – орт направления тока;  $\Delta l$  – элемент линии, пересекаемый током  $\Delta I$  и перпендикулярный направлению тока. При этом плотность объемного тока  $\bar{j}$ , фигурирующая в уравнениях (1.2), (1.3), представляется через  $\bar{\eta}$  и  $\delta$  – функцию Дирака:

$$\bar{j}(\bar{r}) = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ \Delta n \rightarrow 0}} \bar{1}_i \frac{\Delta I}{\Delta l \cdot \Delta n} = \bar{\eta}(\bar{r}_s) \cdot \delta(n - n'), \quad (1.4)$$

где  $\bar{r}_s$  – радиус-вектор точек поверхности  $S$ ;  $n$  – нормаль к поверхности  $S$ , пересекаемая этой поверхностью при  $n = n'$ . Согласно граничным условиям наличие электрического или магнитного поверхностного тока эквивалентно разрыву на поверхности  $S$  тангенциальной составляющей (инд. « $\tau$ ») магнитного или электрического поля соответственно:

$$\bar{\eta}^e = [\bar{1}_n, \bar{H}_\tau^s]; \quad \bar{\eta}^m = -[\bar{1}_n, \bar{E}_\tau^s]; \quad (1.5)$$

где  $\bar{1}_n$  – орт нормали к границе  $S$ , направленный в область существования поля. Таким образом, задание источника поверхностным сторонним током предполагает, что известно тангенциальное поле на поверхности  $S$ .

### 1.3. Электрические векторный и скалярный потенциалы

Рассмотрим электромагнитное поле, возбуждаемое только электрическими источниками ( $\vec{j}^e \neq 0$ ,  $\rho^e \neq 0$ ,  $\vec{j}^m = 0$ ,  $\rho^m = 0$ ) в безграничном пространстве, в котором заполняющая среда является:

- непроводящей ( $\sigma = 0$ ) и, следовательно, не содержащей вторичных токов проводимости ( $\vec{j} = 0$ ) и свободных зарядов ( $\rho = 0$ );
- изотропной ( $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{1}$ ,  $\vec{\mu} = \mu \vec{1}$ );
- однородной ( $\partial \varepsilon / \partial \vec{r} = \partial \mu / \partial \vec{r} = 0$ );
- линейной и безынерционной ( $\partial \varepsilon / \partial t = \partial \mu / \partial t = 0$ ).

Совокупность первого и последнего ограничений означает, что среда является непоглощающей.

С учетом перечисленных условий система неоднородных уравнений Максвелла (1.2) сведется к следующей:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \bar{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \vec{j}^e; & \text{(I)} \\ \text{rot} \bar{E} &= -\mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}; & \text{(II)} \\ \text{div} \bar{D} &= \varepsilon_a \cdot \text{div} \bar{E} = \rho^e; & \text{(III)} \\ \text{div} \bar{B} &= \mu_a \cdot \text{div} \bar{H} = 0. & \text{(IV)} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

С целью упрощения расчета полей излучения для их определения обычно используют вспомогательные функции – векторные и скалярные потенциалы. Потенциалы, вводимые для поля, возбуждаемого электрическими токами и зарядами и описываемого системой уравнений (1.6), называют *электрическими*.

Электрические потенциалы вводятся следующим образом. На основании уравнения (IV) с учетом векторного тождества  $\text{div} \text{rot} \bar{A} \equiv 0$  магнитное поле можно представить через ротор вспомогательного вектора  $\bar{A}$ , который называется *электрическим векторным потенциалом*:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \bar{B} = 0; \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} \equiv 0; \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}; \quad \bar{H} = \mu_a^{-1} \cdot \operatorname{rot} \bar{A}. \quad (1.7)$$

Выразив в уравнении (II) вектор  $\bar{H}$  через  $\bar{A}$  и учтя векторное тождество  $\operatorname{rot}(\pm \operatorname{grad} \varphi) \equiv 0$ , представим  $\bar{E}$  через  $\bar{A}$  и  $\varphi$ :

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} \bar{E} + \mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \left( \bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0; \\ \operatorname{rot}(-\operatorname{grad} \varphi) \equiv 0; \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{E} = - \left( \operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right). \quad (1.8)$$

Введенная здесь вспомогательная функция  $\varphi$  называется *электрическим скалярным потенциалом*. В соотношении (1.8)  $\operatorname{grad} \varphi$  взят со знаком «минус» в соответствии с традицией, согласно которой стационарное электрическое поле ( $\partial/\partial t = 0$ ,  $\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ ), а в проводящей среде и ток направлены в сторону уменьшения скалярного потенциала.

Векторы  $\bar{E}$ ,  $\bar{H}$ , выраженные соотношениями (1.7), (1.8) через потенциалы  $\bar{A}$ ,  $\varphi$ , описывают некоторый электромагнитный процесс, т.е. являются векторами электромагнитного поля, если они в таком представлении удовлетворяют всем уравнениям Максвелла (1.6). Уравнения (IV), (II) являются исходными для введения соотношений (1.7), (1.8). Проверим выполнимость уравнений (I), (III). Из (I) с учетом (1.7), (1.8) и векторного тождества  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \Delta \bar{A}$  (где  $\Delta$  – оператор Лапласа), получим:

$$\begin{aligned} & \operatorname{rot} \bar{H} - \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \bar{j}^e = \\ & = \mu_a^{-1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} + \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) - \bar{j}^e = \end{aligned}$$

$$= \mu_a^{-1}(\text{grad div}\bar{A} - \Delta\bar{A}) + \varepsilon_a \left( \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \bar{j}^e = 0;$$

$$\Delta\bar{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left( \text{div}\bar{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_a \bar{j}^e. \quad (1.9)$$

Из (III) с учетом (1.8) и векторного тождества  $\text{div grad}\varphi \equiv \Delta\varphi$  найдем:

$$\begin{aligned} \text{div}\bar{E} - \frac{\rho^e}{\varepsilon_a} &= -\text{div} \left( \text{grad}\varphi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) - \frac{\rho^e}{\varepsilon_a} = \\ &= - \left( \Delta\varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \text{div} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \frac{\rho^e}{\varepsilon_a} = 0; \end{aligned}$$

$$\Delta\varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div}\bar{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{\rho^e}{\varepsilon_a}. \quad (1.10)$$

Таким образом, если потенциалы  $\bar{A}, \varphi$  являются решениями дифференциальных уравнений 2-го порядка (1.9), (1.10), то векторы  $\bar{E}, \bar{H}$ , выраженные через  $\bar{A}, \varphi$  соотношениями (1.7), (1.8), удовлетворяют всем уравнениям Максвелла и, следовательно, являются векторами некоторого электромагнитного поля. Система уравнений (1.9), (1.10), определяющих потенциалы  $\bar{A}, \varphi$ , в принципе разрешима, однако эти уравнения взаимозависимы, поскольку и в то и в другое входят оба потенциала, т.е. это система с неразделенными искомыми функциями.

#### 1.4.\* Свойство градиентной инвариантности

Определение потенциалов  $\bar{A}, \varphi$  соотношениями (1.7), (1.8) является неоднозначным и допускает известный произвол в их выборе. Можно убедиться, что одному и тому же полю  $\bar{E}, \bar{H}$  соответствуют не

только потенциалы  $\bar{A}$ ,  $\varphi$ , определенные по (1.7), (1.8), но и потенциалы  $\bar{A}'$ ,  $\varphi'$ , полученные из исходных с помощью преобразований:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}' &= \bar{A} \pm \text{grad}\psi; \\ \varphi' &= \varphi \mp \frac{\partial\psi}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

где  $\psi = \psi(\bar{r}, t)$  – произвольная скалярная функция координат и времени; знаки в первом и втором преобразованиях противоположны. Действительно, в силу векторного тождества  $\text{rot grad}\psi \equiv 0$  преобразованное поле  $\bar{E}'$ ,  $\bar{H}'$ , выраженное через преобразованные потенциалы  $\bar{A}'$ ,  $\varphi'$ , совпадает с исходным полем  $\bar{E}$ ,  $\bar{H}$ , выраженным через  $\bar{A}$ ,  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \bar{H}' &= \mu_a^{-1} \text{rot}\bar{A}' = \mu_a^{-1} (\text{rot}\bar{A} \pm \text{rot grad}\psi) = \\ &= \mu_a^{-1} \text{rot}\bar{A} = \bar{H}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}' &= -\text{grad}\varphi' - \frac{\partial\bar{A}'}{\partial t} = -\text{grad}\varphi \pm \text{grad} \frac{\partial\psi}{\partial t} \mp \text{grad} \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} = \\ &= -\text{grad}\varphi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} = \bar{E}. \end{aligned}$$

Как видим, поле  $\bar{E}$ ,  $\bar{H}$ , определяемое системой потенциалов  $\bar{A}$ ,  $\varphi$ , и поле  $\bar{E}'$ ,  $\bar{H}'$ , определяемое системой потенциалов  $\bar{A}'$ ,  $\varphi'$ , тождественны, если первая и вторая системы потенциалов связаны преобразованиями (1.11). Иными словами, электромагнитные поля инвариантны по отношению к преобразованиям потенциалов (1.11). Это свойство называется *свойством градиентной инвариантности*, а преобразования (1.11) – *преобразованиями инвариантности*.

В силу произвольности функции  $\psi$  в преобразованиях (1.11) одному и тому же полю соответствует бесчисленное множество потенциалов. Неоднозначность потенциалов, соответствующих одному и тому же полю, обусловлена неполным заданием потенциалов. В векторном анализе доказывается, что любой вектор полностью определяется за-



данием его ротора и дивергенции. Соотношение (1.7) определяет  $rot\bar{A}$ , однако сам вектор  $\bar{A}$  еще не определен, поскольку пока не задана его дивергенция.

Как в измерительной технике для устранения неоднозначности показаний прибора проводят его калибровку, так и в рассматриваемой теории для устранения неоднозначности потенциалов, соответствующих одному и тому же полю, проводят калибровку потенциалов, т.е. налагают на них дополнительное условие, определяющее  $div\bar{A}$  и называемое *условием калибровки*.

С учетом преобразований (1.11)  $div\bar{A}$  можно записать в виде:

$$div\bar{A} = div\bar{A}' - div(grad\psi) = div\bar{A}' - \Delta\psi.$$

Поскольку  $\psi$  – произвольная функция, ее можно выбрать так, чтобы  $div\bar{A}$  была требуемой функцией координат, т.е. в выборе  $div\bar{A}$  допустим известный произвол. Путем добавления к  $\bar{A}$  слагаемого  $grad\psi$  согласно (1.11) можно изменять  $div\bar{A}$ , не изменяя  $rot\bar{A}$ . Обычно условие калибровки, определяющее  $div\bar{A}$ , выбирают из соображений *математического упрощения* уравнений для  $\bar{A}$  и  $\varphi$ .

### 1.5. Условие калибровки Лоренца.

#### Неоднородные волновые уравнения для потенциалов

Нетрудно видеть, что если на потенциалы  $\bar{A}$ ,  $\varphi$  наложить условие:

$$div\bar{A} = -\varepsilon_a\mu_a \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad (1.12)$$

называемое *условием калибровки Лоренца*, то уравнения (1.9), (1.10) сведутся к независимым и однотипным дифференциальным уравнениям для  $\bar{A}$  и  $\varphi$ :

$$\square \bar{A} \equiv \Delta \bar{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \bar{j}^e; \quad (1.13)$$

$$\square \varphi \equiv \Delta \varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho^e}{\varepsilon_a}. \quad (1.14)$$

Уравнения (1.13), (1.14) являются неоднородными (с заданной правой частью) дифференциальными уравнениями в частных производных 2-го порядка гиперболического типа, известными в математической физике под названием *неоднородных волновых уравнений* или *уравнений Д'Аламбера*. Как показано ниже, их решениями являются неискаженные или «чистые» волны. Отличительная особенность волнового уравнения состоит в том, что искомая функция ( $\bar{A}$  или  $\varphi$ ) содержится в нем только под знаком вторых производных по пространственным координатам ( $\Delta \bar{A}$  или  $\Delta \varphi$ ) и по времени ( $\partial^2 \bar{A} / \partial t^2$  или  $\partial^2 \varphi / \partial t^2$ ), которые входят в это уравнение с противоположными знаками. Значком « $\square$ » обозначен так называемый *оператор Д'Аламбера* – оператор двукратного дифференцирования по четырем переменным (по времени и трем пространственным координатам, что учтено оператором Лапласа « $\Delta$ »):

$$\square = \Delta - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Можно доказать, что для любого поля с учетом преобразований (1.11) можно подобрать потенциалы  $\bar{A}$ ,  $\varphi$ , подчиняющиеся условию Лоренца (1.12), а значит и уравнениям Д'Аламбера (1.13), (1.14). Поэтому в пространстве, отвечающем исходным условиям, отмеченным в начале параграфа 1.3, можно использовать потенциалы, удовлетворяющие уравнениям Д'Аламбера, не задумываясь о калибровке.

При тех же условиях, налагаемых на пространство существования поля и отмеченных в начале параграфа 1.3, из исходной системы уравнений Максвелла (1.6) можно получить независимые дифференциальные уравнения для векторов поля  $\bar{E}$ ,  $\bar{H}$ . Это достигается повыше-

нием порядка дифференцирования. Например, уравнение для  $\bar{H}$  получается путем взятия ротора от обеих частей уравнения (I), подстановки в полученное соотношение величины  $rot \bar{E}$  из (II) и учета уравнения (IV). Получающиеся таким образом независимые дифференциальные уравнения 2-го порядка для  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ , как и уравнения (1.13), (1.14) для  $\bar{A}$  и  $\varphi$ , являются уравнениями Д'Аламбера, однако в правые части уравнений для  $\bar{E}, \bar{H}$  сторонние токи и заряды входят под знаками пространственных производных: правая часть уравнения для  $\bar{H}$  содержит  $rot \bar{j}^e$ , а правая часть уравнения для  $\bar{E}$  содержит  $grad \rho^e$ .

Одно из преимуществ использования потенциалов состоит в том, что в правые части уравнений Д'Аламбера для потенциалов входят непосредственно заданные функции сторонних источников: в уравнение для  $\bar{A}$  – плотность стороннего тока  $\bar{j}^e$ , в уравнение для  $\varphi$  – плотность стороннего заряда  $\rho^e$ . Кроме того, при использовании потенциалов разрешению подлежат четыре скалярных уравнения относительно четырех скалярных функций ( $\varphi$  и трех проекций  $\bar{A}$ ) вместо шести при использовании уравнений Д'Аламбера для векторов поля  $\bar{E}, \bar{H}$  (трех проекций  $\bar{E}$  и трех проекций  $\bar{H}$ ).

В декартовой системе координат ( $j = x, y, z$ ), орты которой ( $\bar{1}_j = \bar{1}_x, \bar{1}_y, \bar{1}_z$ ) не зависят от координат и могут быть вынесены из-под знака оператора Лапласа, векторное уравнение (1.13) раскладывается на 3 скалярных уравнения того же типа для координатных составляющих  $A_j$ , т.е. на 3 скалярных уравнения Д'Аламбера:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \sum_j \bar{1}_j A_j; & \bar{j}^e &= \sum_j \bar{1}_j j_j^e; \\ \Delta \bar{A} &= \sum_j \Delta(\bar{1}_j A_j) = \sum_j \bar{1}_j \Delta A_j. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta A_j - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} = -\mu_a j_j^e.$$

Таким образом, как скалярный потенциал  $\varphi$ , так и декартовы составляющие  $A_j$  векторного потенциала  $\bar{A}$  подчиняются уравнению одного и того же типа – скалярному неоднородному волновому уравне-

нию (скалярному уравнению Д'Аламбера), которое запишем в следующем обобщенном виде:

$$\square U(\vec{r}, t) \equiv \left( \Delta - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(\vec{r}, t) = -w(\vec{r}, t), \quad (1.15)$$

где  $U(\vec{r}, t)$  – обобщенный потенциал, под которым понимается либо  $\varphi$ , либо  $A_j (j = x, y, z)$ ;  $w(\vec{r}, t)$  – обобщенная плотность стороннего источника:

$$U \in \{\varphi, A_j (j = x, y, z)\}; \quad w = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^e}{\varepsilon_a} \quad (\text{при } U = \varphi); \\ \mu_a j_j^e \quad (\text{при } U = A_j). \end{array} \right\} \quad (1.16)$$

Расчет поля с использованием потенциалов проводится в следующем порядке:

- находятся решения уравнений Д'Аламбера (1.13) для векторного  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  и (1.14) для скалярного  $\varphi(\vec{r}, t)$  потенциалов при заданных функциях сторонних токов  $\vec{j}^e(\vec{r}, t)$  и зарядов  $\rho^e(\vec{r}, t)$ , хотя для расчета поля достаточно решения только уравнения (1.13) для  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , поскольку скалярный потенциал можно определить через векторный, используя их связь с помощью условия калибровки (1.12), которая, как будет показано ниже, особенно проста в случае гармонических процессов;
- по найденным функциям  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ,  $\varphi(\vec{r}, t)$  путем их дифференцирования определяются векторы поля:  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  с помощью (1.7) и  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  с помощью (1.8); однако можно определить через потенциалы лишь один из векторов поля ( $\vec{H}$  или  $\vec{E}$ ), а второй вектор ( $\vec{E}$  или  $\vec{H}$  соответственно) в точке наблюдения (вне источников) найти, используя одно из основных уравнений Максвелла (I) или (II) в их однородном варианте (без сторонних токов).

В классической теории электромагнетизма, в рамках которой ведется настоящее изложение, скалярный и векторный потенциалы играют роль лишь *вспомогательных* величин, удобных для решения уравнений электродинамики и расчета векторов  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , являющихся непосредственными характеристиками электромагнитного поля, определенными по его силовому действию на заряды.

В более общей теории – квантовой электродинамике – для описания электромагнитных взаимодействий вместо уравнений Максвелла вводится более общая система уравнений, в которых потенциалы  $\vec{A}$ ,  $\varphi$  считаются фундаментальными величинами.

## 1.6. Физический смысл электрических потенциалов

Соотношением (1.8) электрическое поле представлено в виде суммы двух слагаемых. Одно из них выражается через скалярный потенциал  $\varphi$  и называется *потенциальным* (инд. «п») полем:

$$\vec{E}^{\text{п}} = -\text{grad } \varphi. \quad (1.17)$$

В потенциальном поле потенциал  $\varphi$  определен соотношением (1.17) неоднозначно, с точностью до не зависящей от координат произвольной аддитивной постоянной (лат.: additio – прибавление), поскольку потенциалы  $\varphi$  и  $\varphi' = \varphi + C$  (где  $C = \text{const}$ ,  $\partial C / \partial \vec{r} = 0$ ) определяют одно и то же поле:

$$\vec{E}^{\text{п}'} = -\text{grad} \varphi' = -\text{grad} \varphi = \vec{E}^{\text{п}}.$$

Составляющая поля  $\vec{E}^{\text{п}}$  по направлению орта  $\vec{1}_l$  равна скорости уменьшения потенциала в этом направлении:

$$E_l^{\text{п}} = \vec{E}^{\text{п}} \cdot \vec{1}_l = -\text{grad} \varphi \cdot \vec{1}_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l},$$

а скалярное произведение  $\vec{E}^{\text{п}}$  на векторный элемент длины  $d\vec{l} = \vec{1}_l dl$  – уменьшению потенциала на этом элементе:

$$\bar{E}^n d\bar{l} = E_l^n dl = -grad\varphi \cdot d\bar{l} = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} dl = -d\varphi.$$

В соответствии с известным тождеством векторного анализа  $rot\bar{E}^n$  всегда равен нулю:

$$rot\bar{E}^n = -rot grad\varphi \equiv 0,$$

что является определением безвихревого поля. Таким образом, потенциальное поле всегда является **безвихревым**. Применение теоремы Стокса к такому полю показывает, что его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_l \bar{E}^n d\bar{l} \equiv \int_S rot\bar{E}^n d\bar{S} = 0.$$

Отметив замкнутый контур интегрирования  $l$  следующими друг за другом точками  $A, B, C, D, A$  и разбив этот контур на две части  $ABC + CDA$ , получим:

$$\oint_l \bar{E}^n d\bar{l} = \int_{ABC} \bar{E}^n d\bar{l} + \int_{CDA} \bar{E}^n \cdot d\bar{l} = 0; \Rightarrow \int_{ABC} \bar{E}^n d\bar{l} = \int_{ADC} \bar{E}^n d\bar{l}.$$

Это означает, что линейный интеграл от  $\bar{E}^n$  между двумя точками  $A$  и  $C$  одинаков при любом пути интегрирования ( $ABC$  и  $ADC$ ).

В теории квазистационарных электрических цепей для описания электрических процессов используется интегральный параметр электрического поля – **напряжение**. Напряжение определяется как линейный интеграл от напряженности электрического поля между двумя точками заданного пути интегрирования  $l$ , зависящий в общем случае от выбора этого пути:

$$U = \int_l \bar{E} \cdot d\bar{l}.$$

Как видно из предпоследнего соотношения, для потенциального (безвихревого) поля этот интеграл одинаков при любом пути интегрирования ( $ABC$  и  $ADC$ ) и может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned}
 U &= \int_A^C \vec{E}^n \cdot d\vec{l} = \int_{ABC} \vec{E}^n \cdot d\vec{l} = \int_{ADC} \vec{E}^n \cdot d\vec{l} = - \int_A^C \text{grad } \varphi \cdot d\vec{l} = \\
 &= - \int_{\varphi_A}^{\varphi_C} d\varphi = \varphi_A - \varphi_C.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для потенциального поля напряжение между двумя точками не зависит от пути интегрирования, равно **разности потенциалов** между конечными точками этого пути и является **однозначным** интегральным параметром такого поля.

Напряжение выражает удельную (отнесенную к заряду) работу  $\Delta W/q$  по перемещению точечного заряда  $q$  под действием силы поля  $\vec{F}^n = q\vec{E}^n$  из точки  $A$  в точку  $C$  или против силы поля под действием сторонней силы  $\vec{F}^{ст} = -\vec{F}^n$  из точки  $C$  в точку  $A$ , т.е. разность потенциальных энергий единичного точечного заряда в точках  $A$  и  $C$ :

$$\begin{aligned}
 U &= \varphi_A - \varphi_C = \int_A^C \vec{E}^n \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \int_A^C \vec{F}^n \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \int_C^A \vec{F}^{ст} \cdot d\vec{l} = \\
 &= \frac{W_A - W_C}{q} = \frac{\Delta W}{q}.
 \end{aligned}$$

Как отмечалось выше, скалярный потенциал определен с точностью до постоянной величины. Обычно эту постоянную выбирают условно, приписывая некоторой точке пространства  $\vec{r}_0$  определенное значение  $\varphi(\vec{r}_0) = \varphi_0$ , принимаемое за начало отсчета потенциала; при этом измеряется разность потенциалов между исследуемой точкой пространства  $\varphi(\vec{r})$  и началом отсчета  $\varphi_0$ , а потенциал  $\varphi(\vec{r})$  определяется соотношением:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi(\vec{r})} d\varphi + \varphi_0 = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}^{\text{п}}(\vec{r}) d\vec{r} + \varphi_0.$$

В низкочастотной технике, базирующейся на теории стационарных и квазистационарных (медленно меняющихся) полей, за начальный потенциал, приравняваемый нулю ( $\varphi_0 = 0$ ), принимают либо потенциал проводящего корпуса прибора, либо потенциал земли, которая на низких частотах, вплоть до частот  $f \leq 1\text{кГц}$ , проявляет свойства проводника  $tg\Delta_3 \geq 10^2 \gg 1$ .

Поле системы зарядов, сосредоточенных в ограниченной области пространства, убывает с расстоянием в любом направлении и обращается в ноль на бесконечности, поэтому для такой системы удобнее считать, что потенциал равен нулю на бесконечности  $\varphi_0 = \varphi|_{r=\infty} = 0$ ; в этом случае:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int_0^{\varphi(\vec{r})} d\varphi = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}^{\text{п}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{q} \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}^{\text{ст}} \cdot d\vec{r} = \\ &= \frac{1}{q} \int_0^{W(\vec{r})} dW = \frac{W(\vec{r})}{q}; \end{aligned} \quad (1.18)$$

т.е. потенциал  $\varphi(\vec{r})$  точки поля, созданного локально ограниченной системой зарядов, равен потенциальной энергии единичного точечного заряда, помещенного в данную точку поля.

В частности, для поля, создаваемого расположенным в точке  $r = 0$  точечным зарядом  $q$ , электрическая напряженность определяется исходя из закона Кулона выражением:

$$\vec{E}^{\text{п}} = \frac{\vec{1}_r \cdot q}{4\pi\epsilon_\alpha r^2},$$

а потенциал, согласно (1.18), – соотношением:



$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r \bar{E}^n d\bar{r} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (1.19)$$

Дивергенция потенциального поля противоположна оператору Лапласа от  $\varphi$ :

$$\operatorname{div} \bar{E}^n = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi,$$

а с учетом уравнения Д'Аламбера (1.14):

$$\operatorname{div} \bar{E}^n = -\Delta \varphi = \frac{\rho^e}{\epsilon_a} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Второе слагаемое электрического поля (1.8) выражено через векторный потенциал  $\bar{A}$ , существует только в случае переменного во времени процесса ( $\partial/\partial t \neq 0$ ) и называется **индуцированным полем** (инд. «и»):

$$\bar{E}^n = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Как следует из (1.7), (1.8)  $\operatorname{rot} \bar{E}^n \neq 0$ , т.е. поле  $\bar{E}^n$  является **вихревым**, и именно эта составляющая электрического поля индуцируется переменным магнитным полем в соответствии со вторым уравнением Максвелла:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = \operatorname{rot} \bar{E}^n = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \bar{A}) = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \neq 0.$$

Применение теоремы Стокса к индуцированному полю показывает, что его циркуляция не равна нулю:

$$\oint_l \bar{E}^n dl \equiv \int_S \operatorname{rot} \bar{E}^n d\bar{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0.$$

Здесь  $\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$  – магнитный поток, пронизывающий поверхность  $S$ , опирающуюся на замкнутый контур  $l$ . Поскольку циркуляция индуцированного поля отлична от нуля, линейный интеграл от  $\bar{E}^n$  между двумя точками, т.е. напряжение, зависит от пути интегрирования и является **неоднозначным** параметром индуцированного поля.

Напряженность индуцированного поля тем выше, чем больше скорость изменения электромагнитного процесса. В случае быстропеременных (высокочастотных) процессов индуцированное поле становится преобладающим, что позволяет в полном поле учитывать только индуцированную составляющую, пренебрегая потенциальной:

$$\begin{aligned} |\bar{E}^n| &= \left| \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right| \gg |\bar{E}^n| = |\text{grad } \varphi|; \\ \bar{E} &= - \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi \right) \approx - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \bar{E}^n. \end{aligned}$$

Для упрощения расчетов некоторых характеристик высокочастотных электродинамических систем их заменяют приближенными моделями в виде совокупности сосредоточенных элементов и используют аппарат теории низкочастотных (квазистационарных) цепей и, в частности, понятие напряжения. Однако надо помнить, что в этом случае напряжение – **неоднозначный** параметр и при его введении надо в каждом случае обязательно указывать путь интегрирования.

С учетом условия калибровки (1.12) дивергенция вектора  $\bar{E}^n$  выразится соотношением:

$$\text{div} \bar{E}^n = - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \bar{A} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Из определения магнитного потока  $\Phi$ , соотношения (1.7) и теоремы Стокса следует:

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = \int_S \text{rot} \bar{A} \cdot d\bar{S} = \oint_l \bar{A} \cdot d\bar{l},$$

т.е. магнитный поток через поверхность  $S$  равен циркуляции векторного потенциала  $\bar{A}$  по контуру  $l$ , ограничивающему эту поверхность. При этом в замкнутом проводящем контуре  $l$ , пронизываемом переменным магнитным полем, наводится ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}^n = \oint_l \bar{E}^n d\bar{l} = \oint_l E_l^n dl = - \oint_l \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} d\bar{l} = - \oint_l \frac{\partial A_l}{\partial t} dl; \quad (1.21)$$

$$E_l^n = \partial \mathcal{E}^n / \partial l = - \partial A_l / \partial t.$$

Таким образом, погонная ЭДС индукции  $\partial \mathcal{E}^n / \partial l$ , т.е. составляющая  $E_l^n$  индуцированного электрического поля вдоль элемента длины контура, равна скорости изменения во времени проекции векторного потенциала на элемент длины контура  $\partial A_l / \partial t$ .

Электрический векторный потенциал ввел в теорию электромагнетизма в 1845 г. немецкий физик Ф. Нейман, давший теоретический вывод закона электромагнитной индукции и представивший его в формулировке (1.21).

Однозначное разделение электрического поля  $\bar{E}$  на потенциальную ( $\bar{E}^n = -grad\varphi$ ) и индуцированную ( $\bar{E}^n = -\partial \bar{A} / \partial t$ ) составляющие иногда встречает затруднения и может оказаться неосуществимым, особенно когда рассматривается не все пространство, занятое полем, а только некоторая часть этого пространства.

## 1.7. Электрические потенциалы стационарных и квазистационарных полей

**Стационарным** называется неизменное во времени поле ( $\partial / \partial t = 0$ ) при наличии постоянных токов. **Квазистационарным** называется переменное поле, изменяющееся настолько медленно, что оно сохраняет структуру стационарного: в любой момент времени  $t$

поле  $\bar{E}(t)$ ,  $\bar{H}(t)$  может рассматриваться как стационарное, созданное существующим в этот же момент током  $\bar{j}(t)$ .

Критерием деления переменных полей на квазистационарные и нестационарные является волновое запаздывание электромагнитных возмущений в пределах исследуемой системы, которое в случае синусообразных колебаний выражается фазовым запаздыванием  $\Delta\psi$ . Электромагнитный процесс в некоторой системе с размером  $L$  считается квазистационарным, если выполняется уже упоминавшееся в параграфе 1.1 *условие квазистационарности*, которое запишем в расширенном виде:

$$\frac{\Delta\psi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{f \cdot L}{v} = \frac{L}{\lambda} \ll 1, \quad (1.22)$$

где  $\Delta t = L / v$  – время запаздывания возмущения в пределах системы;  $T$  – период колебаний;  $f = 1/T$  – частота;  $\lambda$  – длина волны;  $v = \lambda f$  – скорость волны. Условие квазистационарности выполняется на низких частотах, значительно меньших некоторой граничной частоты  $f_{гр}$ , которая тем ниже, чем больше размеры системы:

$$f \ll f_{гр} = v/L.$$

В уравнениях для стационарного и квазистационарного полей можно пренебречь производными по времени ( $\partial/\partial t \approx 0$ ), вследствие чего вместо (1.6) получим следующую систему уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot}\bar{H} &= \bar{j}^e; \quad (I) & \text{rot}\bar{E} &= 0; \quad (II) \\ \text{div}\bar{E} &= \rho^e/\varepsilon_a; \quad (III) & \text{div}\bar{H} &= 0. \quad (IV) \end{aligned}$$

В этом случае электрическое поле содержит только потенциальную составляющую:

$$\bar{E} = \bar{E}^\pi = -\text{grad}\varphi; \quad \bar{E}^n = -\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} = 0,$$

а уравнение 2-го порядка (1.14) для скалярного потенциала переходит в уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho^e}{\varepsilon_a}. \quad (1.23)$$

Магнитное поле по-прежнему определяется соотношением (1.7) через векторный потенциал, условие калибровки (1.12) принимает вид:

$$\operatorname{div}\bar{A} = 0,$$

а уравнение 2-го порядка (1.13) для  $\bar{A}$  сводится к векторному уравнению Пуассона:

$$\Delta\bar{A} = -\mu_a \cdot \bar{j}^e. \quad (1.24)$$

В декартовой системе координат, орты которой  $\bar{1}_j$  ( $j = x, y, z$ ) не зависят от координат и могут быть вынесены из-под знака оператора Лапласа, векторное уравнение (1.24) раскладывается на 3 скалярных уравнения Пуассона для координатных составляющих  $A_j$  вектора  $\bar{A}$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \sum_j \bar{1}_j A_j; \quad \bar{j}^e = \sum_j \bar{1}_j j_j^e; \\ \Delta\bar{A} &= \sum_j \Delta(\bar{1}_j A_j) = \sum_j \bar{1}_j \Delta A_j; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta A_j = -\mu_a j_j^e.$$

Используя выражение (1.19) для скалярного потенциала, создаваемого точечным зарядом, можно просто обосновать решение уравнения Пуассона (1.23). Если заряд распределен в пространственно ограниченной области  $V$  по точкам  $\bar{r}'$  этой области с объемной плотностью  $\rho^e(\bar{r}')$ , то потенциал поля, создаваемого в точке наблюдения  $\bar{r}$  дифференциально малым зарядом  $dq = \rho^e(\bar{r}') dV'$ , выразится, согласно (1.19), соотношением:

$$d\varphi(\bar{r}) = \frac{\rho^e(\bar{r}')dV'}{4\pi\epsilon_a R},$$

где  $R = |\bar{r} - \bar{r}'|$  – расстояние между точкой наблюдения ( $\bar{r}$ ) и точкой источника ( $\bar{r}'$ ). Для потенциала, создаваемого всей системой зарядов, получим:

$$\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho^e(\bar{r}')}{R(\bar{r}')} dV'. \quad (1.25)$$

Здесь интегрирование ведется по координатам точек источника  $\bar{r}'$  и при вычислении интеграла нужно учитывать не только заданное распределение плотности заряда  $\rho^e(\bar{r}')$ , но и зависимость от  $\bar{r}'$  величины  $R(\bar{r}') = |\bar{r} - \bar{r}'|$ .

Аналогично записывается решение уравнения Пуассона для каждой декартовой составляющей  $A_j$  векторного потенциала:

$$A_j(\bar{r}) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{j_j^e(\bar{r}')}{R(\bar{r}')} dV',$$

а затем – уравнения (1.24) для векторного потенциала:

$$\bar{A}(\bar{r}) = \sum_j \bar{1}_j A_j(\bar{r}) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\bar{j}^e(\bar{r}')}{R(\bar{r}')} dV'. \quad (1.26)$$

Для квазистационарных процессов следует в выражения плотности источников и потенциалов добавить зависимость от времени, которая в соответствии с определением квазистационарных процессов не изменит структуру решения.

Переходя согласно обозначениям (1.16) к обобщенному потенциалу  $U$  и обобщенной плотности источника  $w$ , запишем скалярное уравнение Пуассона и его решение для квазистационарного процесса в виде:

$$\Delta U(\bar{r}, t) = -\omega(\bar{r}, t); \quad (1.27)$$

$$U(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\omega(\bar{r}', t)}{R(\bar{r}')} dV'. \quad (1.28)$$

### 1.8. Сферически-симметричное решение однородного волнового уравнения для потенциала вне точечного источника

Рассмотрим дифференциально малый излучающий элемент объема  $dV$ , считая его в пределе точечным ( $dV \rightarrow 0$ ) и полагая, что во всем пространстве, за исключением  $dV$ , источники отсутствуют. При этом обобщенный потенциал  $U(\bar{r}, t)$  внутри  $dV$  должен удовлетворять неоднородному уравнению (1.15), а вне  $dV$  – однородному волновому уравнению:

$$\left( \Delta - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(\bar{r}, t) = 0; \quad (\bar{r} \notin dV). \quad (1.29)$$

Найдем решение однородного волнового уравнения (1.29) для потенциала вне точечного источника. Воспользуемся сферической системой координат  $R, \theta, \varphi$ , центр которой совмещен с центром источника (рис. 1.3). Для точечного источника все направления равноправны, поэтому функция  $U$  не должна зависеть от угловых координат  $\theta, \varphi$ :  $\partial U / \partial \theta = \partial U / \partial \varphi = 0$ . Удовлетворяющее этому условию решение называется *сферически-симметричным*. При этом условии в оператор Лапласа войдут только производные по  $R$ :

$$\Delta U = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial U}{\partial R} \right) = \frac{2}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (RU)}{\partial R^2},$$

а уравнение (1.29) приводится к виду:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 (RU)}{\partial R^2} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (1.30)$$

Используя подстановку

$$f(t, R) = R \cdot U(t, R), \quad (1.31)$$

получим для вновь введенной функции  $f(t, R)$  уравнение:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(t, R) = 0. \quad (1.32)$$

Уравнение (1.32) имеет такую же структуру, что и однородное волновое уравнение (1.29), однако уравнение (1.29) в общем случае учитывает зависимость потенциала от трех пространственных координат, т.е. является трехмерным, а уравнение (1.32) учитывает зависимость искомой функции только от одной пространственной координаты, т.е. является **одномерным** однородным волновым уравнением относительно функции  $f(t, R)$ .

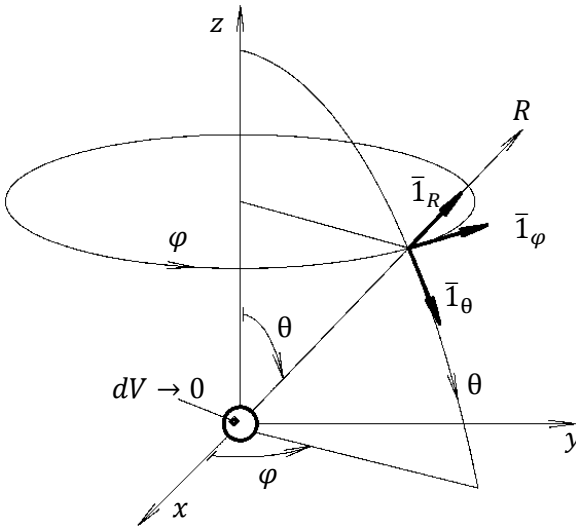


Рис. 1.3 – Сферическая система координат  $R, \theta, \varphi$  и точечный излучатель в ее центре



Общим решением уравнения (1.32) является линейная комбинация двух частных решений вида:

$$f(t, R) = C_1 \cdot f(t - \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \cdot R) + C_2 \cdot f(t + \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \cdot R), \quad (1.33)$$

где  $C_{1,2} = \text{const}$ .

Рассмотрим первое частное решение, обозначив аргумент функции  $f$  через  $\tau = t - \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \cdot R$ :

$$f(t, R) = f(t - \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \cdot R) = f(\tau). \quad (1.34)$$

Вид функции  $f(\tau)$  определяется временной зависимостью колебаний источника, но независимо от вида этой функции она является частным решением уравнения (1.32), если в ее аргументе время  $t$  и расстояние  $R$  объединены в комбинацию  $\tau = t - R\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ . Действительно, подстановка производных функции (1.34) по  $t$  и по  $R$  в уравнение (1.32) обращает его в тождество:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}; \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \equiv 0.$$

В общем случае, при произвольной функции  $f(\tau)$ , можно определенно утверждать о равенстве двух значений этой функции только при равенстве ее аргументов:

$$f(\tau_1) = f(\tau_2); \Rightarrow \tau_1 = \tau_2; \Rightarrow t_1 - \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \cdot R_1 = t_2 - \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \cdot R_2.$$

Это означает, что то значение функции  $f$ , которое на расстоянии  $R_1$  наблюдается в момент  $t_1$ , в более удаленной точке  $R_2 = R_1 + \Delta R > R_1$  наблюдается в более поздний момент  $t_2 = t_1 + \Delta t > t_1$ , т.е. приходит в точку  $R_2$  с запаздыванием на  $\Delta t$ :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \cdot (R_2 - R_1) = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \cdot \Delta R.$$

Таким образом, за время  $\Delta t$  ордината  $f(\tau_1)$  перемещается в направлении увеличения  $R$  на расстояние  $\Delta R$ . Скорость этого перемещения конечна и составляет:

$$v = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (1.35)$$

где  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость электромагнитных волн в безграничном вакууме.

Если в соответствии с исходными условиями среда является однородной, линейной, безынерционной и непоглощающей, т.е. ее параметры  $\varepsilon$ ,  $\mu$  не зависят от  $t$  и  $R$ , то любая ордината функции  $f(\tau)$  и все возмущение в целом, описываемое этой функцией, перемещается с течением времени, не меняя своей формы, в направлении увеличения  $R$  с той же конечной скоростью. Таким образом, 1-е слагаемое общего решения (1.33) уравнения (1.32) описывает волновое возмущение, запаздывающее в направлении удаления от источника и называемое **запаздывающим** частным решением, или **расходящейся** волной.

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что 2-е слагаемое общего решения (1.33) уравнения (1.32) описывает возмущение, распространяющееся с той же скоростью в направлении уменьшения  $R$  (к источнику), и называется **опережающим** частным решением, или **сходящейся** волной.

Рассмотренные процессы, подчиняющиеся волновому уравнению и описываемые вне точечного источника решением (1.33) этого уравнения, представляют собой неискаженные или «чистые» волны, а определяющее эти процессы волновое уравнение часто называют «уравнением неискаженных волн».

При обобщении задачи на более широкий круг сред (в частности, при учете поглощения или инерционности среды) в уравнениях 2-го порядка для искомого поля или его потенциалов, наряду с производными 2-го порядка по времени ( $\partial U^2/\partial t^2$ ) и по координатам ( $\Delta U$ ), характерными для волнового уравнения (Д'Аламбера), появляются члены, содержащие искомую функцию  $U(\vec{r}, t)$  в других комбинациях, например, в виде непосредственного слагаемого или под знаком пер-

вой производной по времени ( $\partial U/\partial t$ ). В этих случаях решения уравнений 2-го порядка также описывают возмущения, перемещающиеся в пространстве, однако в процессе распространения эти возмущения претерпевают искажения. В отличие от неискаженных («чистых») волн, описываемых волновым уравнением (Д'Аламбера), такие процессы называют *квазиволнами*, а описывающие их уравнения – *квазиволновыми* уравнениями.

Возвращаясь к обобщенному потенциалу  $U$ , связанному с функцией  $f$  соотношением (1.31), запишем общее решение уравнения (1.30) для  $U$  в виде суммы двух частных решений:

$$U(t, R) = C_1 \frac{f(t - R/v)}{R} + C_2 \frac{f(t + R/v)}{R}. \quad (1.36)$$

В любой фиксированный момент времени  $t = \text{const}$  любое из частных решений имеет неизменное значение на поверхности сферы  $R = \text{const}$ . Процессы, описываемые такими решениями, называются *сферическими* волнами; 1-е частное решение описывает *расходящуюся*, а 2-е – *сходящуюся* сферическую волну.

В дальнейшем будем рассматривать только 1-е частное решение, соответствующее физическому смыслу поставленной задачи, когда точечный источник находится в безграничном пространстве и расположен в центре сферической системы координат:

$$U(t, R) = \frac{f(t - R/v)}{R}. \quad (1.37)$$

Это соотношение является сферически-симметричным решением однородного волнового уравнения (1.29) для потенциала вне точечного источника в безграничном пространстве и описывает расходящуюся сферическую волну, временная зависимость которой, задаваемая функцией  $f(t)$ , определяется характером колебаний источника и может быть произвольной.

## 1.9. Решение неоднородного волнового уравнения для произвольной излучающей системы. Запаздывающие потенциалы

Рассмотрим произвольную систему источников, распределенных в пределах пространственно ограниченного объема  $V_{\Sigma}$  (рис. 1.4). Требуется определить потенциалы, а затем и векторы поля, возбуждаемого этой системой в произвольной точке  $P$  неограниченного пространства. Выберем начало координат в некоторой точке  $O$  внутри излучающей системы, положение точки источника  $Q$ , принадлежащей области  $V_{\Sigma}$ , обозначим радиус-вектором  $\vec{r}'$ , а положение точки наблюдения  $P$ , в которой определяется поле, – радиус-вектором  $\vec{r}$  (рис. 1.4). При этом расстояние от точки источника до точки наблюдения  $R = |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'|$ . Для определения потенциала в точке наблюдения  $U(t, \vec{r})$  необходимо найти решение неоднородного волнового уравнения (1.15), которое, с учетом (1.35), запишем в виде:

$$(\Delta - v^{-2} \cdot \partial^2 / \partial t^2) U(t, \vec{r}) = -w(t, \vec{r}).$$

Представим излучающую систему  $V_{\Sigma}$  в виде совокупности дифференциально малых элементов  $dV'$  (рис. 1.4). Каждый из таких элементов возбуждает в точке наблюдения парциальную сферическую волну вида (1.37). Полное поле, возбуждаемое в точке наблюдения всей совокупностью источников, будет результатом суперпозиции парциальных сферических волн.

Решение неоднородного волнового уравнения (1.15) для произвольной излучающей системы можно построить на основе сопоставления рассматриваемой электродинамической (нестационарной) задачи с рассмотренной выше в параграфе 1.7 квазистационарной задачей – решением (1.28) уравнения Пуассона (1.27) для потенциала системы квазистационарных источников.

Электромагнитный процесс может считаться квазистационарным, если за время  $\Delta t = R/v$  распространения возмущения от источника до точки наблюдения изменение состояния источника

$$\Delta w(\Delta t) \approx \frac{\partial w}{\partial t} \Delta t = \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{R}{v}$$

пренебрежимо мало. Это изменение обращается в ноль в случае стационарного поля ( $\partial/\partial t = 0$ ). Однако к такому же результату приводит пренебрежение временем запаздывания возмущений  $\Delta t = R/v \rightarrow 0$ , т.е. предположение об их мгновенном распространении ( $v \rightarrow \infty$ ). Следовательно, предположение, что электромагнитные возмущения распространяются с бесконечной скоростью, равносильно сведению электродинамической задачи к стационарной.

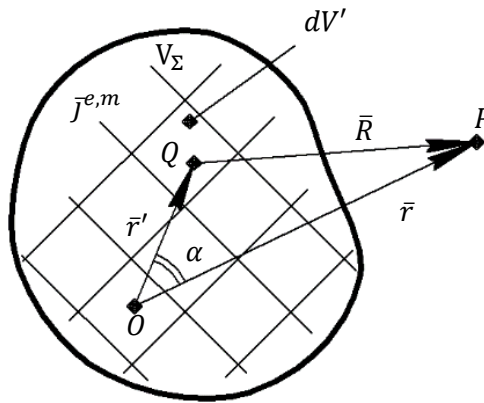


Рис. 1.4 – Представление произвольной излучающей системы в виде совокупности дифференциально малых излучателей

При переходе от нестационарной задачи к квазистационарной ( $\partial/\partial t \rightarrow 0$  или  $v \rightarrow \infty$ ) неоднородное волновое уравнение (Д'Аламбера) (1.15) переходит в рассмотренное ранее уравнение Пуассона (1.27), имеющее решение (1.28), которое выпишем еще раз:

$$U(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \frac{w(\bar{r}', t)}{R(\bar{r}')} dV'.$$

При обратном переходе от квазистационарной задачи к нестационарной необходимо во временной зависимости поля учесть запазды-

вание  $\Delta t = R/v$  электромагнитных возмущений при их распространении на расстояние  $R = |\bar{r} - \bar{r}'|$  от источника до точки наблюдения, т.е. считать, что потенциал  $U(\bar{r}, t)$  в точке наблюдения  $\bar{r}$  в момент времени  $t$  определяется состоянием источника в предшествующий, более ранний момент  $\tau = t - R/v$ , и в соответствии с этим заменить функцию  $w(\bar{r}', t)$ , фигурирующую в квазистационарном решении (1.28), на  $w(\bar{r}', \tau) = w(\bar{r}', t - R/v)$ :

$$U(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_{\Sigma}} \frac{w(\bar{r}', t - R/v)}{R(\bar{r}')} dV'. \quad (1.38)$$

Преобразования уравнений 2-го порядка и их решений при переходе от нестационарной задачи к квазистационарной и обратно отображены в табл. 1.1.

Напомним, что через  $U(\bar{r}, t)$  обозначен обобщенный потенциал, под которым согласно (1.16) может пониматься любая из декартовых составляющих  $A_j$  ( $j = x, y, z$ ) векторного потенциала. Переходя к векторной сумме этих составляющих, запишем решение уравнения (1.13) для векторного потенциала:

$$\bar{A}(\bar{r}, t) = \sum_j \bar{1}_j \cdot A_j(\bar{r}, t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{V_{\Sigma}} \frac{\bar{j}^e(\bar{r}', t - R/v)}{R(\bar{r}')} dV'. \quad (1.39)$$

Интегрирование в соотношениях (1.38), (1.39) ведется по точкам источника  $\bar{r}'$  и при вычислении интегралов нужно учитывать не только заданное распределение по координатам плотности источника  $w(\bar{r}')$  или  $\bar{j}^e(\bar{r}')$ , но и зависимость от  $\bar{r}'$  величины  $R(\bar{r}') = |\bar{r} - \bar{r}'|$ .

Соотношения (1.38), (1.39) являются решениями неоднородных волновых уравнений – скалярного (1.15) для  $U$  и векторного (1.13) для  $\bar{A}$  соответственно – и выражают потенциалы поля, возбуждаемого в произвольной точке  $\bar{r}$  неограниченного пространства произвольной системой источников, распределенных по координатам  $\bar{r}'$  пространственно

Таблица 1.1.1. Преобразования уравнений 2-го порядка и их решений при переходе от нестационарной задачи к квазистационарной и обратно

	Нестационарный (волновой) процесс		Квазистационарный процесс
Неоднородные уравнения 2-го порядка	<p>Неоднородное волновое уравнение (Д'Аламбера)</p> $\left( \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(\bar{r}, t) = -w(\bar{r}, t)$	$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$ $(v \rightarrow \infty)$	<p>Уравнение Пуассона</p> $\Delta U(\bar{r}, t) = -w(\bar{r}, t)$
Решения неоднородных уравнений – потенциалы, создаваемые системой источников	$U(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_{\Sigma}} \frac{w(\bar{r}', t - R/v)}{R} dV'$	$R$ $t - \frac{R}{v} \leftarrow t$	$U(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_{\Sigma}} \frac{w(\bar{r}', t)}{R} dV'$

ограниченной излучающей системы объема  $V_{\Sigma}$ . Интегралами (1.38), (1.39) эти решения представлены в виде суперпозиции парциальных сферических волн вида (1.37), возбуждаемых отдельными дифференциально малыми элементами  $dV'$  излучающей системы с учетом запаздывания при распространении на расстояние  $R(\vec{r}') = |\vec{r} - \vec{r}'|$  от точек источника  $\vec{r}'$  до точки наблюдения  $\vec{r}$ . Поэтому решения (1.38), (1.39) называют *запаздывающими потенциалами*.

Если, в частности, во всех точках излучающей системы ток имеет одно и то же прямолинейное направление, то, совместив одну из декартовых осей (например,  $z$ ) с направлением тока  $\vec{j}^e = \bar{1}_z j^e$  и вынося из-под интеграла (1.39) орт  $\bar{1}_z$  в силу его независимости от координат, получим:

$$\bar{A}(\vec{r}, t) = \bar{1}_z \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{V_{\Sigma}} \frac{j^e(\vec{r}', t - R/v)}{R} dV' = \bar{1}_z \cdot A(\vec{r}, t) \parallel \vec{j}^e.$$

Это означает, что в любой точке пространства векторный потенциал  $\bar{A}(\vec{r}, t)$  поля, создаваемого прямолинейным током, параллелен этому току.

Если источник представлен излучающей поверхностью  $S$  (рис. 1.5) с нормалью  $n$ , пересекающей поверхность при  $n = n'$ , и задан поверхностным током, распределенным по координатам поверхности  $\vec{r}_s$  с поверхностной плотностью  $\bar{\eta}^e(\vec{r}_s)$ , то плотность объемного тока  $\vec{j}^e(\vec{r})$  выражается согласно (1.4) через  $\bar{\eta}^e(\vec{r}_s)$  и  $\delta$ -функцию  $\delta(n - n')$ . С учетом фильтрующего свойства  $\delta$ -функции решение (1.39) неоднородного волнового уравнения для  $\bar{A}(\vec{r}, t)$  преобразуется в этом случае в соотношение:

$$\begin{aligned} \bar{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S \int_{\Delta n} \frac{\bar{\eta}^e(\vec{r}_s, t - R/v)}{R} \delta(n - n') dS \cdot dn = \\ &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S \frac{\bar{\eta}^e(\vec{r}_s, t - R/v)}{R} dS, \end{aligned}$$

где  $R = |\vec{r} - \vec{r}_s|$ .



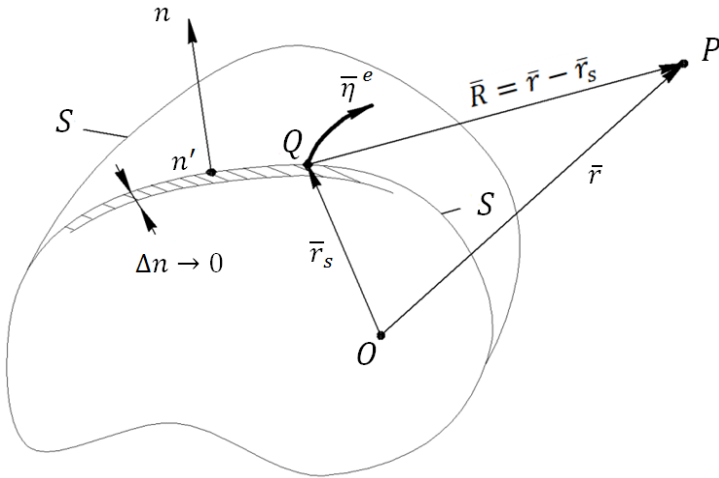


Рис. 1.5 – Задание источника поверхностным током

### 1.10. Комплексное представление потенциалов и полей гармонических излучателей

В случае гармонических во времени (монохроматических) колебаний расчеты упрощаются при использовании *символического метода*, в рамках которого любая из гармонически колеблющихся физических величин заменяется ее комплексным символом, обозначаемым той же буквой, что и физическая величина, и точкой сверху. Так обобщенный потенциал  $U(\vec{r}, t)$  заменяется комплексным потенциалом  $\dot{U}(\vec{r}, t)$ :

$$U(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\dot{U}(\vec{r}, t)\}; \Rightarrow \dot{U}(\vec{r}, t) = \dot{U}_m(\vec{r}) e^{i\omega t},$$

где  $\omega$  – круговая частота колебаний;  $\dot{U}_m(\vec{r})$  – комплексная амплитуда; индексом « $m$ » здесь и в дальнейшем отмечаются амплитудные значе-

ния гармонических колебаний. Аналогично вводятся комплексные векторы для любого из физических векторов поля  $\vec{F} \in \{\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}, \vec{j}\}$ :

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{F}}(\vec{r}, t) \right\}; \Rightarrow \dot{\vec{F}}(\vec{r}, t) = \dot{\vec{F}}_m(\vec{r}) e^{i\omega t}.$$

В отличие от комплексных величин  $\dot{U}, \dot{\vec{F}}$ , являющихся лишь удобными для расчетов математическими объектами, их вещественные составляющие  $U = \text{Re } \dot{U}, \vec{F} = \text{Re } \dot{\vec{F}}$ , определяющие физические проявления поля и их конечные количественные характеристики, мы называем **физическими** величинами.

Колебания сложной временной структуры, т.е. негармонические или полихроматические, могут быть представлены в виде разложений в ряд или интеграл Фурье по гармоническим составляющим.

В случае гармонических колебаний источника неоднородные волновые уравнения (Д'Аламбера) для обобщенного скалярного потенциала (1.15) и для векторного потенциала (1.13) преобразуются в уравнения для комплексных потенциалов следующего вида:

$$(\Delta + k^2)\dot{U}(\vec{r}, t) = -i\dot{w}(\vec{r}, t); \quad (1.40)$$

$$(\Delta + k^2)\dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) = -\mu_a \dot{\vec{j}}^e(\vec{r}, t), \quad (1.41)$$

где  $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = \omega/v = 2\pi/\lambda$  – так называемое **волновое число** электромагнитных волн в безграничном пространстве. Входящий в левую и правую части этих уравнений временной множитель  $e^{i\omega t}$  можно сократить и записать такие же уравнения для комплексных амплитуд, зависящих только от пространственных координат. Так первое из этих уравнений можно представить в виде:

$$(\Delta + k^2)\dot{U}_m(\vec{r}) = -i\dot{w}_m(\vec{r}). \quad (1.40a)$$

Дифференциальные уравнения 2-го порядка (1.40), (1.41) относятся к уравнениям эллиптического типа и называются неоднородны-

ми *уравнениями Гельмгольца* – скалярным и векторным соответственно. Они содержат в качестве независимых переменных только пространственные координаты, входящие под знаком оператора Лапласа  $\Delta$ , и определяют распределение по координатам комплексных амплитуд гармонических колебаний – колебаний с фиксированной заранее заданной временной зависимостью.

Условие калибровки Лоренца (1.12) в комплексной форме примет вид:

$$\operatorname{div} \dot{\vec{A}} = -i\omega \varepsilon_a \mu_a \dot{\phi}.$$

Выражение вектора магнитного поля через векторный потенциал в комплексном представлении сохранит форму (1.7) с заменой  $\vec{H} \rightarrow \dot{\vec{H}}$ ,  $\vec{A} \rightarrow \dot{\vec{A}}$ :

$$\dot{\vec{H}} = \mu_a^{-1} \cdot \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}. \quad (1.42)$$

При записи на основании (1.8) комплексного вектора электрического поля можно исключить скалярный потенциал, выразив его с учетом условия калибровки через  $\operatorname{div} \dot{\vec{A}}$ :

$$\dot{\vec{E}} = -\left(\operatorname{grad} \dot{\phi} + i\omega \dot{\vec{A}}\right) = -i\omega \left(k^{-2} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{A}} + \dot{\vec{A}}\right). \quad (1.43)$$

Таким образом, при комплексном представлении гармонического поля можно обойтись без скалярного потенциала и определить векторы поля только через векторный потенциал.

Состояние гармонического колебания  $U(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}\{\dot{U}(\vec{r}, t)\}$  определяется его фазой  $\psi(\vec{r}, t)$ , под которой понимается аргумент комплексного представления  $\dot{U}(\vec{r}, t) = |\dot{U}(\vec{r}, t)| e^{i\psi(\vec{r}, t)}$  этого колебания:

$$\psi(\vec{r}, t) = \arg \dot{U}(\vec{r}, t) = \operatorname{Im}\{\ln \dot{U}(\vec{r}, t)\}.$$

Если в момент времени  $t$  фаза колебания точечного источника  $\omega t$ , то в этот же момент фаза колебания, возбуждаемого этим источником в точке наблюдения, будет:

$$\psi(\bar{r}, t) = \omega\tau = \omega(t - R/v) = \omega t - kR,$$

где  $R$  – расстояние между точками наблюдения и источника. Отсюда видно, что волновое число  $k$  есть скорость уменьшения фазы в направлении распространения:  $k = -\partial\psi/\partial R$ .

Одномерное однородное волновое уравнение (1.32) для функции  $f(t, R)$  при переходе к гармоническим колебаниям и их комплексному представлению преобразуется в одномерное однородное уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды  $\dot{f}_m(R)$ :

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} + k^2\right)\dot{f}_m(R) = 0. \quad (1.44)$$

При замене в (1.44) координаты  $R$  на время  $t$ , а волнового числа  $k$  на собственную частоту  $\omega_0$  это уравнение совпадает с уравнением свободных колебаний в колебательном контуре без потерь или в более общей трактовке – с уравнением *гармонического осциллятора*.

Обычно уравнение (1.44) решается следующим образом. Предполагается, что его частное решение можно представить в виде показательной функции  $e^{pR}$ , подстановка которой в (1.44) приводит к характеристическому уравнению для  $p$ :

$$p^2 + k^2 = 0,$$

имеющему корни:

$$p_{1,2} = \mp\sqrt{-k^2} = \mp ik.$$

Общее решение уравнения (1.44) записывается как линейная комбинация частных решений, соответствующих корням  $p_{1,2}$ :

$$\dot{f}_m(R) = C_1 \cdot e^{-ikR} + C_2 \cdot e^{ikR}.$$

Переходя к комплексной амплитуде  $\dot{U}_m$  обобщенного потенциала, связанного с функцией  $f$  соотношением (1.31), получим общее

сферически-симметричное решение однородного уравнения Гельмгольца, т.е. уравнения (1.40а) при нулевой правой части:

$$\dot{U}_m(R) = C_1 \frac{e^{-ikR}}{R} + C_2 \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (1.45)$$

Сферически-симметричное решение (1.45) однородного уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала можно получить и иным путем – на основании сферически-симметричного решения (1.36) однородного волнового уравнения, переходя в нем от функции  $f(t)$  с произвольной временной зависимостью к гармонической функции и представляя последнюю в комплексной форме. Так 1-е частное решение однородного уравнения Гельмгольца получается из 1-го частного решения (1.37) однородного волнового уравнения с помощью преобразования:

$$\begin{aligned} U(t, R) &= \frac{f(t - R/v)}{R} = \frac{f(\tau)}{R}; \Rightarrow \\ \Rightarrow C \cdot \frac{\cos \omega\tau}{R} &= \operatorname{Re} \left( C \frac{e^{i\omega\tau}}{R} \right) = \operatorname{Re} \{ \dot{U}(t, R) \}; \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{U}(t, R) &= C \frac{e^{i\omega\tau}}{R} = C \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R} = \dot{U}_m(R) e^{i\omega t}; \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\dot{U}_m(R) = C \frac{e^{-ikR}}{R}. \quad (1.46a)$$

Соотношение (1.46а) является частным сферически-симметричным решением однородного уравнения Гельмгольца, т.е. уравнения (1.40а) при нулевой правой части, и выражает пространственную зависимость комплексной амплитуды потенциала  $\dot{U}_m(R)$  вне точечного гармонического источника.

Напомним, что в рассмотренном ранее волновом уравнении (1.15) независимыми переменными являются время и пространствен-

ные координаты, а решения этого уравнения описывают процесс распространения возмущений в пространстве с течением времени, т.е. пространственно-временной волновой процесс, вследствие чего уравнение и называется *волновым*. В отличие от этого уравнение Гельмгольца содержит, как уже отмечалось, в качестве независимых переменных только пространственные координаты. Решение (1.46а) однородного уравнения Гельмгольца описывает пространственное распределение комплексной амплитуды потенциала  $\dot{U}_m(R)$  вне точечного источника в случае гармонических колебаний. Но в совокупности с временным множителем  $e^{i\omega t}$ , т.е. в форме (1.46), решение однородного уравнения Гельмгольца описывает пространственно-временной волновой процесс.

Процесс, описываемый комплексной *волновой функцией*  $e^{i(\omega t - kR)}/R$ , называют расходящейся *элементарной сферической волной*. Поверхностью равных фаз этой волны  $\psi(R) = kR = \text{const}$  является сфера  $R = \text{const}$ . В пределах сферы  $R = \text{const}$  амплитуда этой волны остается неизменной, т.е. поверхностью равных амплитуд также является сфера. Волны, у которых поверхности равных фаз и равных амплитуд совпадают, называются однородными. Таким образом, элементарная сферическая волна является *однородной*. Обычно при комплексном представлении гармонических колебаний временной множитель  $e^{i\omega t}$  опускают. При этом радиальную зависимость  $e^{-ikR}/R$  также трактуют как волновую функцию элементарной сферической волны, подразумевая, что эта зависимость только после ее дополнения множителем  $e^{i\omega t}$  становится волновой функцией.

Используя решение (1.38) неоднородного волнового уравнения для потенциала произвольной системы источников с произвольной временной зависимостью, построим решение неоднородного уравнения Гельмгольца (1.40) для комплексного потенциала произвольной системы гармонических источников. При переходе к комплексному представлению гармонических колебаний подынтегральная плотность источника  $w(\bar{r}', \tau)$  в решении (1.38) заменяется на комплексную плотность источника  $\dot{w}(\bar{r}', \tau)$ :

$$\begin{aligned} \omega(\bar{r}', t - R/v) &= \omega(\bar{r}', \tau) = \operatorname{Re}\{\dot{\omega}(\bar{r}', \tau)\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\omega}(\bar{r}', \tau) &= \dot{\omega}_m(\bar{r}')e^{i\omega\tau} = \dot{\omega}_m(\bar{r}')e^{i(\omega t - kR)} = \dot{\omega}(\bar{r}', t)e^{-ikR}. \end{aligned}$$

С учетом этого решение (1.38) преобразуется в соотношение для комплексного потенциала:

$$\begin{aligned} \dot{U}(\bar{r}, t) &= \dot{U}_m(\bar{r})e^{i\omega t} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \dot{\omega}_m(\bar{r}') \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R} dV' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \dot{\omega}(\bar{r}', t) \frac{e^{-ikR}}{R} dV'. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Сократив множитель  $e^{i\omega t}$  в обеих частях этого соотношения, получим выражение комплексной амплитуды потенциала  $\dot{U}_m(\bar{r})$  через комплексную амплитуду плотности источника  $\dot{\omega}_m(\bar{r}')$ .

Учитывая, что в решении (1.47) под  $\dot{U}$  может пониматься любая из декартовых составляющих  $A_j$  ( $j = x, y, z$ ) вектора  $\vec{\dot{A}}$  и переходя к векторной сумме этих составляющих  $\vec{\dot{A}} = \sum_j \bar{1}_j \dot{A}_j$ , запишем решение векторного неоднородного уравнения Гельмгольца (1.41) для комплексного векторного потенциала:

$$\begin{aligned} \vec{\dot{A}}(\bar{r}, t) &= \vec{\dot{A}}_m(\bar{r})e^{i\omega t} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \vec{j}_m^e(\bar{r}') \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R} dV' = \\ &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \vec{j}^e(\bar{r}', t) \frac{e^{-ikR}}{R} dV'. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Соотношения (1.47), (1.48) являются решениями неоднородных уравнений Гельмгольца – скалярного (1.40) и векторного (1.41) соответственно – и выражают комплексные потенциалы поля, возбуждаемого в точке наблюдения  $\bar{r}$  произвольной системой гармонических источников, распределенных по координатам  $\bar{r}'$

пространственно ограниченной излучающей системы объема  $V_{\Sigma}$ . Интегралами (1.47), (1.48) эти решения представлены в виде суперпозиции расходящихся элементарных сферических волн, возбуждаемых отдельными дифференциально малыми элементами источника и определенных с учетом фазового запаздывания этих волн при их распространении от точек источника  $\bar{r}'$  до точки наблюдения  $\bar{r}$  на величину  $\psi(R) = kR = k |\bar{r} - \bar{r}'|$ .

Величина  $R$  в подынтегральных выражениях решений (1.47), (1.48) есть расстояние между точками источника ( $\bar{r}'$ ), по которым ведется интегрирование, и точкой наблюдения ( $\bar{r}$ ):

$$R = |\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{(\bar{r} - \bar{r}')(\bar{r} - \bar{r}')} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2(\bar{r}, \bar{r}')} = \\ = r\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r) \cos \alpha},$$

где  $r = |\bar{r}|$ ,  $r' = |\bar{r}'|$ ;  $\alpha$  – угол между векторами  $\bar{r}$  и  $\bar{r}'$  (см. рис. 1.4);  $\cos \alpha = (\bar{r}, \bar{r}') / (r \cdot r') = (\bar{1}_r, \bar{1}_{r'})$ . Полагая, что точка наблюдения находится на достаточном удалении от области распределения источников  $V_{\Sigma}$ , т.е.  $r > r'$ , разложим радикал в выражении  $R$  в ряд по степеням малого параметра  $r'/r$ :

$$R = r[1 - (r'/r) \cos \alpha + 0,5 \cdot (r'/r)^2 (1 - \cos^2 \alpha) + \dots] = \\ = r - r' \cdot \cos \alpha + 0,5 \cdot (r')^2 / r \cdot \sin^2 \alpha + \dots \quad (1.49)$$

Представим это разложение в виде:

$$R = r - \Delta R; \quad \Delta R = \Delta r - \delta r; \quad \Delta r = r' \cdot \cos \alpha; \quad (1.50)$$

где  $\Delta R$  – разность хода лучей от разных точек излучателя до точки наблюдения. В составе  $\Delta R$  выделены слагаемое  $\Delta r$ , содержащее  $r'$  в 1-й степени, и слагаемое  $\delta r$ , содержащее  $r'$  во 2-й и более высоких степенях.



## 1.11.\* Функция Грина уравнения Гельмгольца для свободного пространства

*Функцией Грина* какого-либо неоднородного линейного дифференциального уравнения называют решение этого уравнения при задании правой (возбуждающей) части в виде  $\delta$ -функции (т.е. в виде точечного единичного источника), которое удовлетворяет определенным граничным условиям, соответствующим рассматриваемой граничной задаче. Если в некотором линейном дифференциальном уравнении совокупность операций над искомой функцией  $U(\vec{r})$  представлена оператором  $\hat{L}$ , а возбуждающей является функция  $w(\vec{r}')$ , распределенная по координатам источника  $\vec{r}'$ ,

$$\hat{L} U(\vec{r}) = w(\vec{r}'),$$

то функция Грина  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  определяется уравнением:

$$\hat{L} G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Каждой граничной задаче соответствует своя функция Грина, вид которой определяется как видом дифференциального уравнения, так и характером граничных условий.

В обозначении функция Грина  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  отражено, что она является функцией координат точек наблюдения  $\vec{r}$  и точек источника  $\vec{r}'$ . Как  $\delta$ -функция, так и функция Грина являются четными функциями, т.е. симметричны относительно своих аргументов:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r}' - \vec{r}); \quad G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r}).$$

Знание функции Грина позволяет найти в интегральном виде решение граничной задачи (т.е. дифференциального уравнения с заданными граничными условиями) при любой возбуждающей функции, описывающей источник.

В теории радиотехнических цепей и сигналов функция Грина какой-либо линейной системы выражает отклик этой системы на

входной сигнал в виде  $\delta$ -функции и называется *импульсной характеристикой*.

Согласно вышеизложенному обобщенный комплексный потенциал  $\dot{U}(\bar{r})$  гармонического поля, возбуждаемого в точке наблюдения  $\bar{r}$  системой источников, распределенных с плотностью  $i\omega(\bar{r}')$  по точкам  $\bar{r}'$  излучающей системы, определяется неоднородным уравнением Гельмгольца (1.40), которое выпишем еще раз:

$$(\Delta + k^2) \dot{U}(\bar{r}) = -i\omega(\bar{r}'). \quad (1.40)$$

Функция Грина  $G(\bar{r}, \bar{r}')$  уравнения Гельмгольца согласно ее определению должна удовлетворять уравнению

$$(\Delta + k^2) G(\bar{r}, \bar{r}') = -\delta(\bar{r} - \bar{r}'). \quad (1.51)$$

Для нахождения решения неоднородного уравнения Гельмгольца с помощью функции Грина проделаем следующие операции. Умножим обе части уравнения Гельмгольца (1.40) для искомой функции  $\dot{U}(\bar{r})$  на  $G(\bar{r}, \bar{r}')$ , а обе части уравнения (1.51) для  $G(\bar{r}, \bar{r}')$  – на  $\dot{U}(\bar{r})$  и затем вычтем из первого соотношения второе:

$$\begin{aligned} & [(\Delta + k^2) \dot{U}(\bar{r}) = -i\omega(\bar{r}')] \cdot G(\bar{r}, \bar{r}'); \\ - & \\ & [(\Delta + k^2) G(\bar{r}, \bar{r}') = -\delta(\bar{r} - \bar{r}')] \cdot \dot{U}(\bar{r}); \\ \hline & G \cdot \Delta \dot{U} - \dot{U} \cdot \Delta G = \dot{U}(\bar{r}) \delta(\bar{r} - \bar{r}') - i\omega(\bar{r}') G(\bar{r}, \bar{r}'). \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части полученного равенства по объему  $V$ , включающему все точки распределения источников  $\bar{r}'$  и точки наблюдения  $\bar{r}$ :

$$\int_V (G \cdot \Delta \dot{U} - \dot{U} \cdot \Delta G) dV = \int_V [\dot{U}(\bar{r}) \delta(\bar{r} - \bar{r}') - i\omega(\bar{r}') G(\bar{r}, \bar{r}')] dV.$$

В объемном интеграле от первого слагаемого правой части поменяем местами  $\bar{r}$  и  $\bar{r}'$ , т.е. от интеграла по точкам наблюдения  $\bar{r}$  перейдем к интегралу по точкам источника  $\bar{r}'$ , что допустимо в силу

симметрии функции  $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  относительно точек  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$ . Наличие под интегралом функции  $\delta(\vec{r}' - \vec{r})$  переводит интеграл в значение подынтегральной функции в точке  $\vec{r}$  («фильтрующее» свойство  $\delta$ -функции). При этом объемный интеграл от первого слагаемого правой части дает искомую функцию  $\dot{U}(\vec{r})$  в точке наблюдения:

$$\int_V \dot{U}(\vec{r}') \cdot \delta(\vec{r}' - \vec{r}) dV = \dot{U}(\vec{r}).$$

Используя известную из векторного анализа 2-ю формулу Грина, заменим в левой части интегрального равенства интеграл по объему  $V$  интегралом по ограничивающей этот объем замкнутой поверхности  $S$  с ортом внешней (относительно  $V$ ) нормали  $\vec{1}_n$ :

$$\int_V (G \cdot \Delta \dot{U} - \dot{U} \cdot \Delta G) dV = \oint_S (G \cdot \text{grad } \dot{U} - \dot{U} \cdot \text{grad } G) \vec{1}_n dS.$$

В результате этих операций получим:

$$\dot{U}(\vec{r}) = \int_V \dot{w}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV + \oint_S (G \cdot \text{grad } \dot{U} - \dot{U} \cdot \text{grad } G) \vec{1}_n dS.$$

Рассмотрим случай излучения пространственно ограниченной системы источников  $V_\Sigma$  в свободном (безграничном) пространстве (рис. 1.6). Свободное пространство можно трактовать как предельный случай, когда область  $V$  ограничена поверхностью сферы  $S$ , радиус которой  $r_s$  стремится к бесконечности. Поскольку источники поля расположены в ограниченной области  $V_\Sigma$ , при удалении поверхности  $S$  от этой области значения функций  $\dot{U}(\vec{r})$  и  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  уменьшаются и при  $r_s \rightarrow \infty$  поверхностный интеграл обращается в ноль. Поэтому для свободного пространства решение уравнения Гельмгольца (1.40) запишется в виде:

$$\dot{U}(\vec{r}) = \int_V \dot{w}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV. \quad (1.52)$$

Выше (в парагр. 1.9, 1.10) было изложено эвристическое обоснование решения (1.47) неоднородного уравнения Гельмгольца (1.40) для функции  $\dot{U}(\vec{r})$ . Сравнивая это решение с выражением (1.52), приходим к выводу:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad (1.53)$$

где  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ . Строгое решение уравнения Гельмгольца (1.51) с  $\delta$ -функцией в правой части, которое можно найти в учебниках по векторному анализу (например, [8]) или по уравнениям математической физики (например, [9]), также приводит к выражению (1.53).

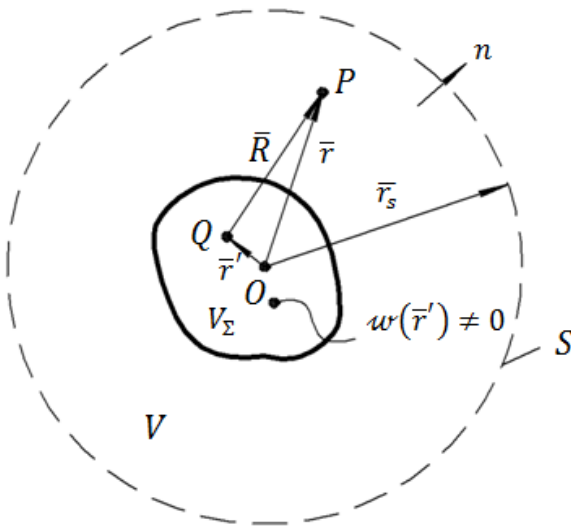


Рис. 1.6 – К выводу решения уравнения Гельмгольца через функцию Грина

Условие излучения пространственно ограниченной системы источников в свободное (безграничное) пространство, т.е. удаление поверхности  $S$  на бесконечное расстояние ( $r_s \rightarrow \infty$ ) и обращение в ноль поверхностного интеграла, эквивалентно заданию граничного условия,

которое необходимо наложить на функцию Грина в соответствии с ее определением. Таким образом, соотношение (1.53) выражает **функцию Грина уравнения Гельмгольца для свободного пространства**.

Функция Грина (1.53) описывает элементарную сферическую волну, возбуждаемую точечным источником, расположенным в точке  $\vec{r}'$ , а интеграл (1.52) выражает возмущение, наблюдаемое в точке  $\vec{r}$ , в виде суммы элементарных сферических волн от всех точек источника.

Учитывая, что в (1.52) под  $\dot{U}$  может пониматься любая из декартовых составляющих  $\dot{A}_j$  вектора  $\dot{\vec{A}}$ , и используя обозначения (1.16), запишем решение уравнения Гельмгольца для векторного потенциала  $\dot{\vec{A}}$  в свободном пространстве через функцию Грина:

$$\dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \mu_a \int_{V_\Sigma} \dot{\vec{j}}^e(\vec{r}', t) \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') dV, \quad (1.54)$$

где, как и выше,  $\dot{\vec{j}}^e(\vec{r}', t) = \dot{\vec{j}}_m^e(\vec{r}') \cdot e^{i\omega t}$ .

## 1.12. Поле произвольной излучающей системы в дальней зоне

Получим приближенные выражения комплексного векторного потенциала  $\dot{\vec{A}}$ , а затем и комплексных векторов поля  $\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}$  для дальней зоны произвольной системы гармонических источников. Как и выше, считаем, что все источники сосредоточены в ограниченном объеме  $V_\Sigma$ , поле описывается в сферической системе координат с центром  $O$  внутри излучающей системы, положение точки наблюдения  $P$  определяется радиус-вектором  $\vec{r}(r, \theta, \varphi)$ , координаты точек источника  $Q$ , по которым ведется интегрирование, отмечаются штрихами  $\vec{r}'(r', \theta', \varphi')$  – рис. 1.7. Источники задаются комплексным вектором плотности гар-

монического электрического тока, распределенного по координатам  $\overline{r'}$  объема  $V_{\Sigma}$  :

$$\dot{j}^e = \dot{j}^e(\overline{r'}, t) = \dot{j}_m^e(\overline{r'})e^{i\omega t}.$$

При определении поля дальней зоны считается  $r \gg r'$  и в силу этого обычно принимаются следующие два приближения (а, б):

а) Ввиду малости параметра  $r'/r$ , а значит и параметра  $\Delta R/r$ , величина  $R$  в знаменателе подынтегрального выражения соотношения (1.48) приближенно считается одинаковой для всех точек излучающей системы:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r(1 - \Delta R/r)} \approx \frac{1}{r'}$$

что позволяет вынести  $1/R \approx 1/r$  из-под интеграла.

б) В показателе экспоненты  $e^{-ikR} = e^{-ik(r-\Delta R)}$  подынтегрального выражения соотношения (1.48) разность хода лучей  $\Delta R$  заменяется на  $\Delta r = r' \cdot \cos \alpha$ , т.е. отбрасывается величина  $\delta r$ , содержащая  $r'$  во 2-й и более высоких степенях. Это возможно, поскольку при наибольшем размере излучающей системы  $L$ , определении внутренней границы дальней зоны  $r_d$  по (1.1) и представлении  $R$  в виде разложения (1.49) имеем:

$$r' \leq \max r' \approx L/2;$$

$$\delta r \leq \max(\delta r) = \max\{0,5 \cdot (r')^2/r\} \approx$$

$$\approx 0,5 \frac{\max(r')^2}{r_d} \approx \frac{L^2}{8r_d} = (1 \div 2) \frac{\lambda}{16};$$

$$\delta\psi = k \cdot \delta r \leq \frac{2\pi}{\lambda} \max(\delta r) = (1 \div 2) 2\pi/16 \ll 2\pi;$$

$$e^{-ik \cdot \delta r} \approx 1; \quad e^{-ikR} = e^{-ik(r-\Delta r+\delta r)} \approx e^{-ik(r-\Delta r)}.$$

Таким образом, в показателе экспоненты принимается:

$$R = r - \Delta R \approx r - \Delta r = r - r' \cdot \cos \alpha, \quad (1.55)$$

что позволяет вынести множитель  $e^{-ikr}$  из-под интеграла (1.48), а в показателе подинтегральной экспоненты оставить только  $\Delta r = r' \cdot \cos \alpha$ .

Приближение (1.55) означает, что лучи, проведенные в точку наблюдения дальней зоны из начала координат  $O$  и из текущей точки интегрирования  $Q$  в объеме  $V_\Sigma$ , считаются параллельными, что поясняется рис. 1.8. Такое представление  $R$  называется **приближением параллельных лучей**. В этом приближении фазовое запаздывание  $\psi(R) = kR = k(r - \Delta r + \delta r \approx k(r - \Delta r))$  определяется с **фазовой ошибкой**  $\delta\psi = k \cdot \delta r \leq (1 \div 2)2\pi/16$ , значительно меньшей периода  $2\pi$  экспоненты  $e^{i\psi}$ . Именно таким требованием к величине фазовой ошибки обосновывается соотношение (1.1) для внутренней границы дальней зоны  $r_d$ .

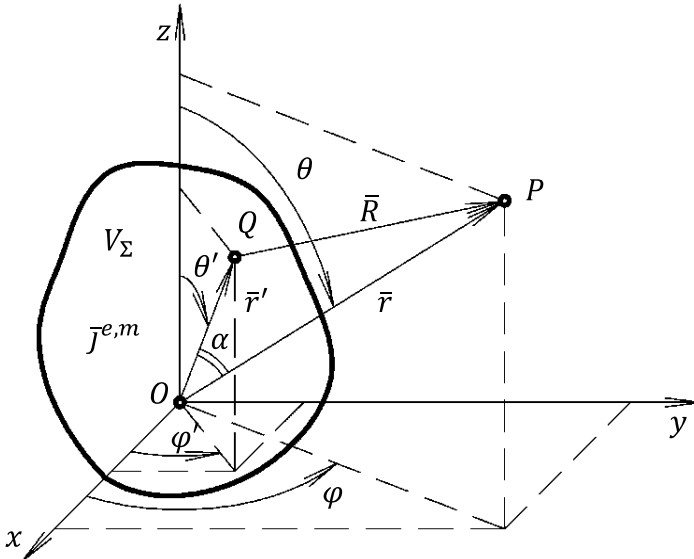


Рис. 1.7 – Координаты точек произвольной излучающей системы  $Q(\vec{r}') = Q(r', \theta', \varphi')$  и точки наблюдения  $P(\vec{r}) = P(r, \theta, \varphi)$

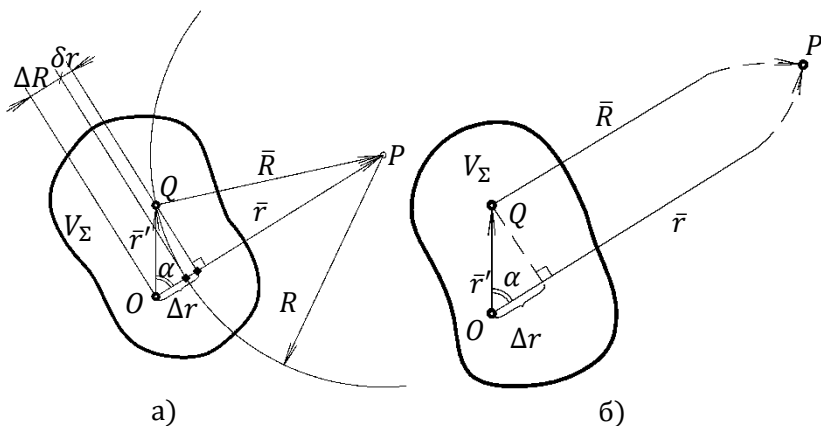


Рис. 1.8 – Разность хода лучей от точек источника до точки наблюдения:  
 а – при строгом подходе  $\Delta R = \Delta r - \delta r$ ;  
 б – в приближении параллельных лучей  $\Delta R \approx \Delta r = r' \cdot \cos \alpha$

Для записи  $\Delta r$  через сферические координаты точек источника и наблюдения представим орт  $\bar{1}_r$  в виде разложения:

$$\bar{1}_r = \bar{r}/r = (\bar{1}_x \cdot \cos \varphi + \bar{1}_y \cdot \sin \varphi) \sin \theta + \bar{1}_z \cdot \cos \theta.$$

Аналогично представляется орт  $\bar{1}_{r'} = \bar{r}'/r'$  через  $\theta', \varphi'$ . Скалярное перемножение ортов  $\bar{1}_r$  и  $\bar{1}_{r'}$  приводит к выражению:

$$\begin{aligned} \Delta r &= r' \cdot \cos \alpha = r' (\bar{1}_r, \bar{1}_{r'}) = \\ &= r' [\sin \theta \cdot \sin \theta' \cdot \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cdot \cos \theta']. \end{aligned} \quad (1.56)$$

С учетом принятых приближений (а, б) выражение (1.48) комплексного векторного потенциала произвольной излучающей системы приводится для дальней зоны к виду:



$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}}(\vec{r}) &\approx \dot{\vec{A}}^\infty(\vec{r}) = \frac{\mu_a}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \int_{V_\Sigma} \dot{\vec{j}}^e(\vec{r}', t) e^{ik \cdot \Delta r} \cdot dV' = \\ &= \frac{\mu_a}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \dot{\vec{N}}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Это выражение является строгим в асимптотическом случае очень больших расстояний ( $r \rightarrow \infty$ ), что отмечено индексом « $\infty$ ». При конечном  $r$  это выражение является приближенным, дающим тем большую точность, чем больше  $r$ , и обеспечивающим достаточную точность для дальней зоны, определенной условием (1.1).

Интеграл, обозначенный в (1.57) через  $\dot{\vec{N}}(\theta, \varphi)$ , является обобщенным векторным **моментом тока** излучающей системы, определенным с учетом разности хода лучей от разных точек излучателя в приближении параллельных лучей (1.55). Величина  $\Delta r$  под интегралом соотношения (1.57) определяется согласно (1.56) координатами точек источника  $\vec{r}'(r', \theta', \varphi')$  и только угловыми координатами точки наблюдения  $\theta, \varphi$ . Поскольку интегрирование в (1.57) ведется по координатам точек источника, величина  $\dot{\vec{N}}(\theta, \varphi)$ , определяемая в результате интегрирования, зависит только от угловых координат точки наблюдения  $\theta, \varphi$ .

При исследовании угловых зависимостей полей излучения направление в пространстве представляют для краткости **обобщенной угловой координатой**  $\Omega = \Omega(\theta, \varphi)$ , под которой понимается совокупность плоских углов  $\theta$  и  $\varphi$ . Дифференциал обобщенной угловой координаты есть элементарный телесный угол  $d\Omega = dS/r^2 = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$ , т.е. телесный угол обзора из начала координат элементарной площадки  $dS$  сферической поверхности радиуса  $r$  (рис. 1.9), а интеграл от  $d\Omega$  по всем направлениям есть полный телесный угол (инд. «п»):

$$\Omega_{\text{п}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot d\theta d\varphi = 4\pi \text{ стерадиан.}$$

При этом положение точки в пространстве записывается в виде  $\vec{r} = \vec{r}(r, \Omega)$ , элементарная площадка сферической поверхности – в виде  $dS = r^2 \cdot d\Omega$ , элементарный объем – в виде  $dV = r^2 \cdot dr \cdot d\Omega$ .

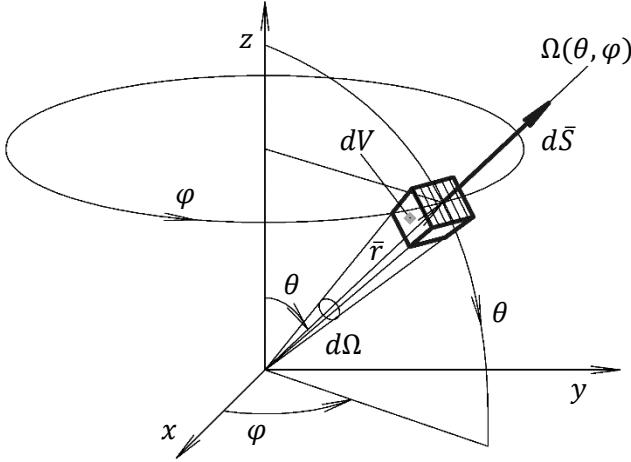


Рис. 1.9 – К определению обобщенной угловой координаты  $\Omega = \Omega(\theta, \varphi)$

С учетом этих обозначений фигурирующий в (1.57) момент тока можно представить соотношением:

$$\dot{\vec{N}}(\Omega) = \dot{\vec{N}}_m(\Omega)e^{i\omega t} = e^{i\omega t} \int_{V_\Sigma} \dot{\vec{J}}_m^e(\vec{r}') e^{ik \cdot \Delta r(\vec{r}', \Omega)} \cdot dV', \quad (1.58)$$

где  $\Delta r(\vec{r}', \Omega)$  – определяемая по (1.56) разность хода лучей, зависящая от координат точек источника  $\vec{r}' = \vec{r}'(r', \Omega')$  и только от угловых координат точки наблюдения  $\Omega = \Omega(\theta, \varphi)$ .

Комплексный вектор магнитного поля  $\dot{\vec{H}}$  выражается через векторный потенциал  $\dot{\vec{A}}$  соотношением (1.42). Подставим в (1.42) выраже-

ние (1.57) для вектора  $\dot{\vec{A}}$  в дальней зоне, воспользуемся формулой для ротора от произведения скалярной  $\chi$  и векторной  $\dot{\vec{N}}$  функций

$$\text{rot} \left( \chi \dot{\vec{N}} \right) = \left[ \text{grad} \chi, \dot{\vec{N}} \right] + \chi \cdot \text{rot} \dot{\vec{N}}$$

и пренебрежем в соответствии с определением дальней зоны членами, имеющими радиальную зависимость  $1/r^2$ , полагая, в частности,

$$\text{grad} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) = -\bar{1}_r \left( \frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-ikr} \approx -\bar{1}_r \cdot ik \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

В результате этих преобразований получим:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}} &= \mu_a^{-1} \cdot \text{rot} \dot{\vec{A}} \approx \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \dot{\vec{N}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[ \text{grad} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right), \dot{\vec{N}} \right] + \frac{e^{-ikr}}{r} \text{rot} \dot{\vec{N}} \right\} \approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi} \left[ \text{grad} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right), \dot{\vec{N}} \right] \approx \frac{ik}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \left[ \dot{\vec{N}}, \bar{1}_r \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что в последнее векторное произведение войдет только поперечная относительно  $\bar{1}_r$  составляющая  $\dot{\vec{N}}_{\perp} = \bar{1}_{\theta} \dot{N}_{\theta} + \bar{1}_{\varphi} \dot{N}_{\varphi}$  вектора  $\dot{\vec{N}}$ , представим окончательное выражение вектора  $\dot{\vec{H}}$  для дальней зоны в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}} &\approx \frac{i}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \left[ \dot{\vec{N}}_{\perp}(\Omega), \bar{1}_r \right] = \\ &= \frac{i}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \left[ \bar{1}_{\theta} \dot{N}_{\varphi}(\Omega) - \bar{1}_{\varphi} \dot{N}_{\theta}(\Omega) \right]. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Комплексный вектор электрического поля  $\dot{\vec{E}}$  выражается через векторный потенциал  $\dot{\vec{A}}$  соотношением (1.43). Подставим в (1.43) вы-

ражение (1.57) для вектора  $\dot{\vec{A}}$  в дальней зоне, воспользуемся формулами векторного анализа для дивергенции от произведения скалярной  $\chi$  и векторной  $\dot{\vec{N}}$  функций и для градиента от произведения двух скалярных функций  $\chi_1, \chi_2$ :

$$\operatorname{div}(\chi \cdot \dot{\vec{N}}) = \chi \cdot \operatorname{div} \dot{\vec{N}} + \dot{\vec{N}} \cdot \operatorname{grad} \chi;$$

$$\operatorname{grad}(\chi_1 \cdot \chi_2) = \chi_1 \cdot \operatorname{grad} \chi_2 + \chi_2 \cdot \operatorname{grad} \chi_1,$$

учтем, что  $\dot{\vec{N}} = \dot{\vec{N}}(\Omega)$  является функцией только угловых координат  $\Omega = \Omega(\theta, \varphi)$ , и пренебрежем в соответствии с определением дальней зоны членами, имеющими радиальную зависимость  $1/r^2, 1/r^3$ . В результате этих преобразований получим:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} &= -i\omega \left( \dot{\vec{A}} + k^{-2} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{A}} \right) \approx \\ &\approx -i \frac{\omega \mu_a}{4\pi} \left[ \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{\vec{N}} + k^{-2} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{\vec{N}} \right) \right] \approx \\ &\approx -i \frac{\omega \mu_a}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \left( \dot{\vec{N}} - \bar{1}_r \dot{N}_r \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\dot{\vec{N}} - \bar{1}_r \dot{N}_r = \dot{\vec{N}}_{\perp}$ , запишем окончательное выражение вектора  $\dot{\vec{E}}$  для дальней зоны в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} &\approx -i \frac{Z_c}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{\vec{N}}_{\perp}(\Omega) = \\ &= -i \frac{Z_c}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \left[ \bar{1}_{\theta} \dot{N}_{\theta}(\Omega) + \bar{1}_{\varphi} \dot{N}_{\varphi}(\Omega) \right], \end{aligned} \quad (1.60)$$

где  $Z_c = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a} = Z_0 \sqrt{\mu/\varepsilon}$  – *характеристическое сопротивление* безграничной окружающей среды;  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$  Ом.

В выражениях (1.59), (1.60) вектор  $\dot{\bar{N}}(\Omega)$  и его координатные составляющие определяются соотношением (1.58) и являются функциями только угловых координат  $\Omega(\theta, \varphi)$  точки наблюдения.

### 1.13. Особенности поля произвольной излучающей системы в дальней зоне

а) В дальней зоне преобладают составляющие поля  $\bar{E}_\perp, \bar{H}_\perp$ , **поперечные** (инд. "  $\perp$  ") относительно радиального направления, содержащие в общем случае компоненты по обоим угловым координатам  $\theta, \varphi$  сферической системы:

$$\bar{E}_\perp = \bar{1}_\theta E_\theta + \bar{1}_\varphi E_\varphi; \quad \bar{H}_\perp = \bar{1}_\theta H_\theta + \bar{1}_\varphi H_\varphi.$$

б) Пространственная зависимость поперечных (угловых) составляющих поля дальней зоны в случае гармонических колебаний представляется в следующей комплексной форме:

$$\dot{E}_{\theta, \varphi} = -i \frac{Z_c}{2\lambda} \dot{N}_{\theta, \varphi}(\Omega) \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (1.61)$$

где  $\dot{N}_{\theta, \varphi}(\Omega)$  – угловые составляющие обобщенного момента тока  $\dot{\bar{N}}(\Omega) = \dot{\bar{N}}_m(\Omega)e^{i\omega t}$ , определяемого по (1.58);  $\Omega(\theta, \varphi)$  – обобщенная угловая координата точки наблюдения. Радиально-временная зависимость поля определяется волновой функцией  $e^{i(\omega t - kr)}/r$  и имеет характер расходящейся **элементарной сферической волны**. Поскольку  $\dot{N}_{\theta, \varphi}(\Omega)$  зависит от угловых координат, комплексная амплитуда поля изменяется на сферической поверхности равных фаз  $r = \text{const}$ , т.е. поле имеет характер **неоднородной** сферической волны.

в) Поперечные составляющие электрического и магнитного полей **синфазны** и их комплексные векторы связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{E}}_{\perp} &= Z_c [\dot{\bar{H}}_{\perp}, \bar{1}_r]; \\ \dot{\bar{H}}_{\perp} &= Z_c^{-1} [\bar{1}_r, \dot{\bar{E}}_{\perp}]; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\dot{E}_{\theta}}{\dot{H}_{\varphi}} = -\frac{\dot{E}_{\varphi}}{\dot{H}_{\theta}} = Z_c. \quad (1.62)$$

Соотношения (1.62) аналогичны соотношениям связи поперечных полей плоских волн, поэтому в ограниченной области дальней зоны  $\Delta V \sim (\Delta r)^3$  с линейным размером  $\Delta r$ , удовлетворяющим условию  $\lambda \ll \Delta r \ll r$ , поле излучения можно рассматривать как *локально плоскую волну*.

г) Образующий поперечными полями  $\bar{E}_{\perp}$ ,  $\bar{H}_{\perp}$  комплексный вектор Пойнтинга имеет радиальное направление и в силу синфазности этих полей содержит только активную (инд. "А") составляющую:

$$\dot{\bar{\Pi}}_r = 0,5 [\dot{\bar{E}}_{\perp}, \dot{\bar{H}}_{\perp}^*] = \bar{1}_r \cdot \Pi_A. \quad (1.63)$$

Это означает, что в дальней зоне есть только однонаправленное движение энергии поля в радиальном направлении – от источника в окружающее пространство. Абсолютная величина  $\Pi_A$  активного вектора Пойнтинга, т.е. среднего (за период колебаний) значения мгновенного вектора Пойнтинга, называется *интенсивностью* поля и определяется соотношением:

$$\begin{aligned} \Pi_A &= 0,5(\dot{E}_{\theta}\dot{H}_{\varphi}^* - \dot{E}_{\varphi}\dot{H}_{\theta}^*) = 0,5 \cdot Z_c^{-1} (|\dot{E}_{\theta}|^2 + |\dot{E}_{\varphi}|^2) = \\ &= 0,5 \cdot Z_c^{-1} |\dot{\bar{E}}_{\perp}|^2 = 0,5 \cdot Z_c |\dot{\bar{H}}_{\perp}|^2. \end{aligned} \quad (1.64)$$

д) Поле дальней зоны убывает с расстоянием от источника пропорционально  $1/r$ , а его интенсивность – пропорционально  $1/r^2$ ; при двукратном увеличении расстояния ( $r_2/r_1 = 2$ ) интенсивность поля уменьшается в 4 раза, т.е. поле ослабляется на 6 дБ:

$$10 \lg\{\Pi(r_1)/\Pi(r_2)\} = 10 \lg(r_2/r_1)^2 = 6 \text{ дБ.}$$

Однако в общем случае хотя бы один из векторов поля  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$  наряду с поперечной составляющей, содержит и радиальную составляющую, что следует из условия соленоидальности векторов поля в

дальней зоне ( $div \vec{E} = 0, div \vec{H} = 0$ ), т. е. непрерывности их векторных линий. При этом комплексный вектор Пойнтинга, наряду с радиальной

активной составляющей  $\vec{P}_r = \vec{I}_r \cdot P_A$ , содержит поперечную составляющую, обусловленную наличием радиального поля, которая является реактивной (инд. «R»), так как радиальные составляющие поля сдвинуты по фазе относительно поперечных на  $\pm\pi/2$  :

$$\vec{P} = 0.5 \left[ \vec{E}, \vec{H}^* \right] = \vec{P}_r + \vec{P}_\perp = \vec{I}_r \cdot P_A + i \cdot \vec{P}_R .$$

Назовем «*активной областью*» дальней зоны область преобладания активной составляющей комплексного вектора Пойнтинга над реактивной, определив ее соотношением:

$$\sigma = |\vec{P}_A|/|\vec{P}_R| \geq \sigma_{гр} \gg 1,$$

где  $\sigma_{гр}$  – граничное значение параметра  $\sigma$ , начиная с которого можно пренебречь величиной  $|\vec{P}_R|$  по сравнению с  $|\vec{P}_A|$  и радиальными составляющими поля по сравнению с поперечными. Границу активной области можно определить, задав, например,  $\sigma_{гр} = 10$ . В дальней зоне  $P_A$  изменяется с расстоянием пропорционально  $1/r^2$ , а  $P_R$  пропорционально  $1/r^3$ , поэтому параметр  $\sigma$  увеличивается с расстоянием. Поверхность активной области  $S_A$ , т.е. та часть окружающей антенну сферической поверхности, которая перекрывает активную область, растет с расстоянием быстрее, чем полная поверхность сферы  $S_{сф} = 4\pi r^2$  и, следовательно, отношение  $S_A/S_{сф}$  растет с расстоянием.

Энергия, безвозвратно уносимая полем излучения от передающей антенны в окружающее пространство и частично попадающая на приемную антенну, определяется активной (т. е. средней за период колебаний) мощностью излучения, равной потоку активного вектора

Пойнтинга  $\bar{\Pi}_A$  через замкнутую поверхность, охватывающую антенну. Поэтому при определении характеристик излучения и, в частности, энергетических характеристик антенн обычно рассматривают лишь активную область дальней зоны, т. е. учитывают только поперечные составляющие поля (1.62) и только активную составляющую (1.64) комплексного вектора Пойнтинга.

Однако при построении структуры поля в виде семейства векторных линий  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  следует учитывать и радиальные составляющие поля, так как без этих составляющих векторные линии полного поля или хотя бы одного из векторов  $\bar{E}$  или  $\bar{H}$  окажутся незамкнутыми.

Амплитуда поперечного поля в точке  $\bar{r} = \bar{r}(r, \Omega)$  дальней зоны является функцией радиальной  $r$  и угловых  $\Omega(\theta, \varphi)$  координат этой точки:

$$E_m(r, \Omega) = |\dot{\bar{E}}_{\perp}| = \sqrt{|\dot{E}_{\theta}|^2 + |\dot{E}_{\varphi}|^2} = Z_c \cdot H_m(r, \Omega), \quad (1.65)$$

а в направлении максимального излучения  $\Omega_m = \Omega(\theta_m, \varphi_m)$  – функцией только расстояния от источника  $r$ :

$$E_{\max}(r) = E_m(r, \Omega_m).$$

Абсолютная величина активного вектора Пойнтинга или интенсивность излучения в произвольной точке дальней зоны  $\Pi_A(r, \Omega)$  и в направлении максимального излучения  $\Pi_{\max}(r)$  выразятся согласно (1.64) соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_A(r, \Omega) &= 0.5 \cdot E_m^2(r, \Omega)/Z_c; \\ \Pi_{\max}(r) &= \Pi_A(r, \Omega_m) = 0.5 \cdot E_{\max}^2(r)/Z_c. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$



## 1.14. Характеристики излучения произвольной излучающей системы

*Амплитудной характеристикой направленности* (АХН) называется нормированная по максимуму зависимость амплитуды поля от направления в пространстве, т. е. от угловых координат:

$$F(\Omega) = F(\theta, \varphi) = E_m(r, \Omega)/E_{\max}(r). \quad (1.67)$$

*Энергетической характеристикой направленности* (ЭХН) называется нормированная по максимуму зависимость интенсивности излучения от направления в пространстве:

$$F^{\exists}(\Omega) = F^{\exists}(\theta, \varphi) = \Pi_A(r, \Omega)/\Pi_{\max}(r) = F^2(\Omega).$$

Зависимость

$$F_l(\Omega) = 10 \cdot \lg F^{\exists}(\Omega) = 20 \cdot \lg F(\Omega)$$

называется *логарифмической* характеристикой направленности.

Графическое изображение характеристики направленности называется *диаграммой направленности*. Обычно строят не пространственные диаграммы направленности, а их сечения в определенных плоскостях  $\varphi = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$ . Диаграммы направленности строятся либо в декартовых координатах с линейным или логарифмическим масштабом по оси ординат, либо в полярных координатах, когда при каждом значении угла  $\theta$  (при  $\varphi = \text{const}$ ) или  $\varphi$  (при  $\theta = \text{const}$ ) величина  $F$  или  $F^{\exists}$  откладывается как радиус-вектор.

*Шириной диаграммы направленности* называется угловой интервал  $\Delta\theta = |\theta_2 - \theta_1|$  (при  $\varphi = \text{const}$ ) или  $\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|$  (при  $\theta = \text{const}$ ), в пределах которого  $F(\Omega) \geq F(\Omega_{1,2}) = 1/\sqrt{2}$ ,  $F^{\exists}(\Omega) \geq F^{\exists}(\Omega_{1,2}) = 0.5$ ,  $F_l(\Omega) \geq F_l(\Omega_{1,2}) = -3$  дБ.

Введем *среднеугловое* значение энергетической характеристики направленности по всем угловым направлениям  $\Omega(\theta, \varphi)$  или по полному телесному углу  $\Omega_{\Pi} = 4\pi$ :

$$\begin{aligned}
\langle F^{\exists} \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{\Pi}} F^{\exists}(\Omega) \cdot d\Omega = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F^2(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi; \quad (1.68)
\end{aligned}$$

а также среднеугловое значение интенсивности (плотности потока активной мощности), т. е. ее среднее значение по всем угловым направлениям  $\Omega(\theta, \varphi)$  или по полному телесному углу  $\Omega_{\Pi} = 4\pi$ :

$$\langle \Pi_A \rangle_{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{\Pi}} \Pi_A(\Omega) \cdot d\Omega = \Pi_{\max} \cdot \langle F^{\exists} \rangle.$$

Активная (т. е. средняя за период колебаний) **мощность излучения**, традиционно отмечаемая индексом « $\Sigma$ », определяется как поток активного вектора Пойнтинга через поверхность сферы, охватывающей излучатель:

$$\begin{aligned}
P_{\Sigma} &= \oint_{S_{\text{сф}}} \Pi_A \cdot dS = \int_{\Omega_{\Pi}} \Pi_A(r, \Omega) \cdot r^2 \cdot d\Omega = 4\pi r^2 \cdot \langle \Pi_A \rangle_{\Omega} = \\
&= \Pi_{\max}(r) \cdot r^2 \int_{\Omega_{\Pi}} F^2(\Omega) \cdot d\Omega = 4\pi r^2 \cdot \Pi_{\max}(r) \cdot \langle F^{\exists} \rangle. \quad (1.69)
\end{aligned}$$

Как уже отмечалось, любой реальный излучатель обладает, хотя бы в какой-то мере, направленностью действия. Однако для оценки направленности реальных излучателей их необходимо сравнивать с некоторым эталоном, в качестве которого используется гипотетический изотропный (ненаправленный) точечный излучатель. Для изотропного излучателя (инд. «И»):

$$F_{\text{И}}(\Omega) = 1; \quad P_{\text{И}} = 4\pi r^2 \cdot \Pi_{\text{И}}(r); \quad \Pi_{\text{И}}(r) = 0.5 \cdot [E_m^{\text{И}}(r)]^2 / Z_c.$$

Направленность реального излучателя оценивается параметром, называемым *коэффициент направленного действия* (КНД) в направлении  $\Omega(\theta, \varphi)$  и определяемым соотношениями:

$$D(\Omega) = D(\theta, \varphi) = \frac{P_A(r, \Omega)}{P_{\Pi}(r)} \Big|_{P_{\Pi}=P_{\Sigma}} = \frac{P_{\Pi}}{P_{\Sigma}} \Big|_{E_m^{\Pi}(r)=E_m(r, \Omega)} = \frac{P_A(r, \Omega)}{\langle P_A \rangle_{\Omega}} =$$

$$= 4\pi r^2 \cdot \frac{P_A(r, \Omega)}{P_{\Sigma}} = \frac{F^2(\Omega)}{\langle F^{\exists} \rangle} = D_m \cdot F^2(\Omega), \quad (1.70)$$

где  $D_m$  – значение КНД в направлении максимального излучения  $\Omega_m = \Omega(\theta_m, \varphi_m)$  или максимальный КНД:

$$D_m = \max D(\Omega) = D(\Omega_m) = \frac{P_{\max}}{\langle P_A \rangle_{\Omega}} = 1/\langle F^{\exists} \rangle. \quad (1.71)$$

Представленные выражения КНД позволяют дать следующие трактовки этого параметра:

- КНД показывает, во сколько раз интенсивность излучения реального излучателя  $P_A(r, \Omega)$  в направлении  $\Omega(\theta, \varphi)$  на расстоянии  $r$  больше, чем интенсивность излучения изотропного излучателя на таком же расстоянии  $r$ , при равенстве мощностей излучения этих излучателей  $P_{\Pi} = P_{\Sigma}$ ;
- КНД показывает во сколько раз следует увеличить мощность изотропного излучателя  $P_{\Pi}$  по сравнению с мощностью реального излучателя  $P_{\Sigma}$ , чтобы амплитуда поля в точке наблюдения  $\bar{r}(r, \Omega)$  осталась неизменной  $E_m^{\Pi}(r) = E_m(r, \Omega)$ ;
- КНД показывает, во сколько раз энергетическая характеристика направленности  $F^{\exists}(\Omega) = F^2(\Omega)$  в направлении  $\Omega(\theta, \varphi)$  больше, чем среднеугловое значение этой характеристики  $\langle F^{\exists} \rangle$ ;
- КНД показывает, во сколько раз интенсивность  $P_A(\Omega)$  в направлении  $\Omega(\theta, \varphi)$  больше, чем среднеугловое значение этой величины  $\langle P_A \rangle_{\Omega}$ .

Смысл КНД поясняется рис. 1.10, где представлены угловые диаграммы в полярных координатах в плоскости  $\varphi = \text{const}$  интенсивностей направленного излучателя  $\Pi_A(\theta) = \Pi_{\text{max}} \cdot F^3(\theta)$  (кривая 1) и изотропного излучателя  $\Pi_{\text{И}}$  (окружность 2) при равенстве мощностей излучения изотропного  $P_{\text{И}} = 4\pi r^2 \cdot \Pi_{\text{И}}$  и направленного  $P_{\Sigma} = 4\pi r^2 \cdot \Pi_{\text{max}} \cdot \langle F^3 \rangle$  излучателей. Из равенства  $P_{\text{И}} = P_{\Sigma}$  следует:  $\Pi_{\text{И}} = \langle \Pi_A \rangle_{\Omega} = \Pi_{\text{max}} \cdot \langle F^3 \rangle = \Pi_{\text{max}} / D_m$ , т. е. радиус  $\Pi_{\text{И}}$  окружности 2 меньше величины  $\Pi_{\text{max}}$  в  $D_m$  раз.

Для характеристики эффективности излучателей электрического типа вводится параметр, определяющий мощность излучения при заданной амплитуде тока излучателя и называемый *сопротивлением излучения*  $R_{\Sigma}$ . Это эквивалентное активное сопротивление, на котором при токе, равном току излучателя, выделяется мощность, равная мощности излучения:

$$P_{\Sigma} = 0.5 \cdot R_{\Sigma} \cdot I_m^2; \Rightarrow R_{\Sigma} = 2 \cdot P_{\Sigma} / I_m^2. \quad (1.72)$$

Сопротивление излучения привязывается к некоторой отсчетной точке излучателя, в которой задается амплитуда тока излучателя  $I_m$ . Фактически этого сопротивления как детали (резистора) в излучателе нет. Энергия, поглощение которой приписывается сопротивлению  $R_{\Sigma}$ , на самом деле излучается в свободное пространство, т. е.  $R_{\Sigma}$  трактуется как эквивалентный «поглотитель излучения».

Часть энергии, подводимой от генератора, теряется в антенне, идет на нагрев ее элементов. В случае электрического излучателя потери энергии учитываются введением сопротивления потерь  $R_{\Pi}$ . Эквивалентная схема цепи питания антенны электрического типа, т. е. антенны, задаваемой сторонним электрическим током (рис. 1.11, а), представляется в виде последовательного соединения активных сопротивлений излучения  $R_{\Sigma}$  и потерь  $R_{\Pi}$  и реактивного сопротивления  $X_A$ , учитывающего влияние реактивных полей. При этом полное сопротивление антенны:

$$Z_A = R_A + i \cdot X_A; \quad R_A = R_{\Sigma} + R_{\Pi}.$$

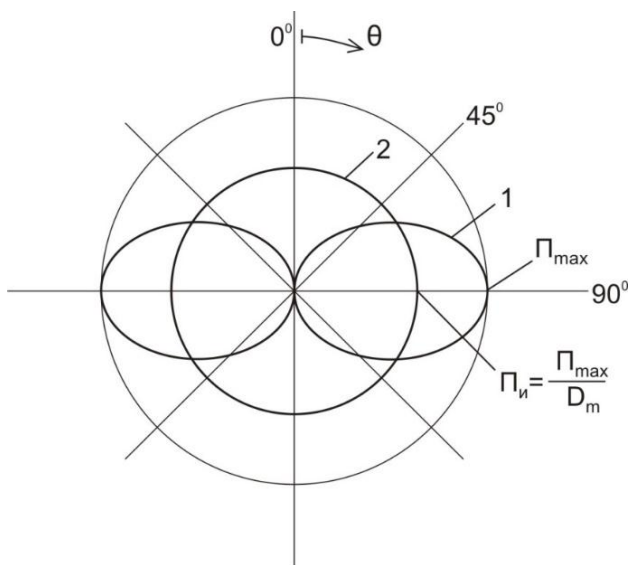


Рис. 1.10 – Угловые диаграммы в плоскости  $\varphi = \text{const}$  интенсивностей направленного излучателя  $\Pi_A(\theta) = \Pi_{\text{max}} \cdot F^2(\theta) - 1$  и изотропного излучателя  $\Pi_{\text{и}} - 2$  при равенстве мощностей излучения изотропного  $P_{\text{и}}$  и направленного  $P_{\Sigma}$  излучателей

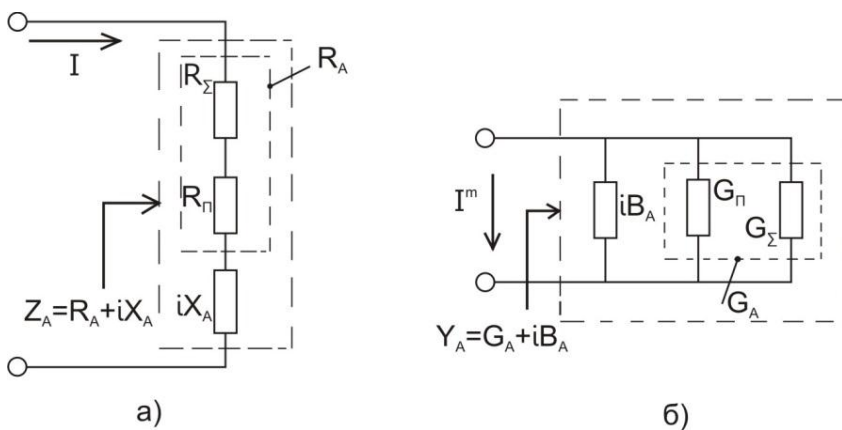


Рис. 1.11 – Эквивалентные схемы цепи питания излучателей электрического (а) и магнитного (б) типов

С учетом этого активная мощность на входе антенны выразится соотношением:

$$P_{\text{вх}} = \operatorname{Re} \left( 0.5 \cdot Z_A \cdot |i|^2 \right) = 0.5 \cdot R_A \cdot I_m^2 = \\ = 0.5(R_\Sigma + R_\Pi)I_m^2 = P_\Sigma + P_\Pi,$$

где  $P_\Pi = 0.5 \cdot R_\Pi \cdot I_m^2$  – мощность потерь.

**Коэффициент полезного действия** (КПД) антенны определяется как отношение мощности излучения к входной мощности:

$$\eta = P_\Sigma / P_{\text{вх}} = P_\Sigma / (P_\Sigma + P_\Pi).$$

Для антенны электрического типа:

$$\eta = R_\Sigma / (R_\Sigma + R_\Pi).$$

Для характеристики эффективности излучателей магнитного типа, т.е. излучателей, задаваемых магнитным током  $I^m$ , вводится параметр, называемый **проводимостью излучения** и определяемый соотношениями:

$$P_\Sigma = 0.5 \cdot G_\Sigma \cdot |i^m|^2; \Rightarrow G_\Sigma = 2P_\Sigma / |i^m|^2. \quad (1.73)$$

Такое представление мощности излучения магнитного излучателя аналогично представлению активной мощности в электрической цепи через амплитуду напряжения, поскольку интегральный магнитный ток имеет размерность напряжения и в некоторых случаях совпадает с фактическим напряжением (например, магнитный ток щелевой антенны равен напряжению между краями щели).

Эквивалентная схема цепи питания антенны магнитного типа (рис. 1.11, б) представляется в виде параллельного соединения актив

ных проводимостей излучения  $G_{\Sigma}$  и потерь  $G_{\Pi}$  и реактивной проводимости  $B_A$ , учитывающей влияние реактивных полей. При этом полная проводимость антенны:

$$Y_A = G_A + i \cdot B_A; \quad G_A = G_{\Sigma} + G_{\Pi};$$

активная входная мощность:

$$\begin{aligned} P_{\text{вх}} &= \operatorname{Re} \left( 0.5 \cdot Y_A \cdot |I^m|^2 \right) = 0.5 \cdot G_A \cdot |I^m|^2 = \\ &= 0.5 \cdot (G_{\Sigma} + G_{\Pi}) |I^m|^2 = P_{\Sigma} + P_{\Pi}; \end{aligned}$$

коэффициент полезного действия антенны:

$$\eta = G_{\Sigma} / (G_{\Sigma} + G_{\Pi}).$$

Параметром, поддающимся непосредственному измерению (методом сравнения исследуемой антенны с эталонной антенной), является *коэффициент усиления*, определяемый соотношением:

$$G = \frac{P_{\text{И}}}{P_{\text{вх}}} \Big|_{\Pi_{\text{И}} = \Pi_{\text{max}}} = \frac{P_{\Sigma}}{P_{\text{вх}}} \cdot \frac{P_{\text{И}}}{P_{\Sigma}} \Big|_{\Pi_{\text{И}} = \Pi_{\text{max}}} = \eta \cdot D_m.$$

Коэффициент усиления показывает, во сколько раз следует увеличить мощность гипотетического изотропного излучателя без потерь  $P_{\text{И}} = 4\pi r^2 \cdot \Pi_{\text{И}}$  по сравнению с входной мощностью реального направленного излучателя с потерями  $P_{\text{вх}} = P_{\Sigma} / \eta = 4\pi r^2 \cdot \Pi_{\text{max}} / (\eta \cdot D_m)$  для того, чтобы интенсивность гипотетического излучателя  $\Pi_{\text{И}}$  равнялись интенсивности реального излучателя в направлении максимального излучения  $\Pi_{\text{max}}$ .

Для линейных вибраторов с неоднородным распределением тока по длине  $\partial I(z) / \partial z \neq 0$  вводится параметр, называемый *действи-*

*ющей длиной* (или действующей высотой)  $h_g$  и определяемый соотношением:

$$h_g = \frac{1}{I_0} \int_l I(z) \cdot dz, \quad (1.74)$$

где  $I_0$  – комплексная амплитуда тока в некоторой отсчетной точке вибратора. Действующая длина реального линейного вибратора – это длина эквивалентного излучателя с однородным распределением тока, который в направлении максимального излучения создает поле той же амплитуды, что и реальный излучатель с тем же током в отсчетной точке.

С учетом введенных параметров амплитуду поперечного поля в дальней зоне можно представить следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} E_m(\vec{r}) &= \left| \vec{E}_\perp(\vec{r}) \right| = E_m(r, \Omega) = E_{\max}(r) \cdot F(\Omega); \\ E_{\max}(r) &= \sqrt{2Z_c \cdot \Pi_{\max}(r)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot Z_c \cdot D_m \cdot P_\Sigma \cdot \frac{1}{r}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot Z_c \cdot G \cdot P_{\text{вх}} \cdot \frac{1}{r}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \cdot Z_c \cdot D_m \cdot \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{R_\Sigma} \cdot |I|}{\sqrt{G_\Sigma} \cdot |I^m|} \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi} \cdot Z_c \cdot G \cdot \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{R_A} \cdot |I|}{\sqrt{G_A} \cdot |I^m|} \right\}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.75)$$



### 1.15.\* Парциальные характеристики направленности и коэффициенты направленного действия по угловым составляющим поля

Если поле дальней зоны содержит составляющие по обоим угловым координатам  $\theta$  и  $\varphi$ , то вводятся *парциальные* амплитудные характеристики направленности по полярной  $f_\theta(\Omega)$  и азимутальной  $f_\varphi(\Omega)$  составляющим:

$$f_\theta(\Omega) = \frac{|\dot{E}_\theta(\Omega)|}{E_{\theta\max}}; \quad f_\varphi(\Omega) = \frac{|\dot{E}_\varphi(\Omega)|}{E_{\varphi\max}},$$

где  $E_{\theta\max}$ ,  $E_{\varphi\max}$  – амплитуды координатных составляющих в направлениях парциальных максимумов  $\Omega_{m1}$ ,  $\Omega_{m2}$  соответственно:

$$E_{\theta\max} = |\dot{E}_\theta(\Omega_{m1})|; \quad E_{\varphi\max} = |\dot{E}_\varphi(\Omega_{m2})|.$$

При этом амплитуда полного поля в произвольной точке дальней зоны:

$$\begin{aligned} E_m^2(\Omega) &= \left| \dot{\vec{E}}(\Omega) \right|^2 = |\dot{E}_\theta(\Omega)|^2 + |\dot{E}_\varphi(\Omega)|^2 = \\ &= E_{\theta\max}^2 [f_\theta^2(\Omega) + |s(\Omega)|^2 \cdot f_\varphi^2(\Omega)] = \\ &= E_{\varphi\max}^2 [f_\theta^2(\Omega)/|s(\Omega)|^2 + f_\varphi^2(\Omega)], \end{aligned}$$

а ее значение в направлении максимума интенсивности  $\Omega_m$ :

$$\begin{aligned} E_{\max}^2 &= E_m^2(\Omega_m) = E_{\theta\max}^2 [f_\theta^2(\Omega_m) + |s_m|^2 \cdot f_\varphi^2(\Omega_m)] = \\ &= E_{\varphi\max}^2 [f_\theta^2(\Omega_m)/|s_m|^2 + f_\varphi^2(\Omega_m)], \end{aligned}$$

где  $|s(\Omega)|$ ,  $|s|_m$  – модуль параметра поляризации (подробнее обсуждаемого ниже) в произвольном направлении  $\Omega$  и в направлении максимума интенсивности  $\Omega_m$  соответственно:

$$|s(\Omega)| = |\dot{E}_\varphi(\Omega)|/|\dot{E}_\theta(\Omega)|; \quad |s|_m = |s(\Omega_m)|.$$

Полная энергетическая характеристика направленности выражается через парциальные АХН соотношением:

$$\begin{aligned} F^\exists(\Omega) &= F^2(\Omega) = E_m^2(\Omega)/E_{\max}^2 = \\ &= \frac{f_\theta^2(\Omega)}{f_\theta^2(\Omega_m) + |s|_m^2 \cdot f_\varphi^2(\Omega_m)} + \frac{f_\varphi^2(\Omega)}{f_\theta^2(\Omega_m)/|s|_m^2 + f_\varphi^2(\Omega_m)}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Введем среднеугловые значения парциальных энергетических характеристик направленности  $\langle f_{\theta,\varphi}^\exists \rangle$  и максимумы парциальных коэффициентов направленного действия  $D_{m,\theta,\varphi}$ :

$$\langle f_{\theta,\varphi}^\exists \rangle = 1/D_{m,\theta,\varphi} = (4\pi)^{-1} \int_{\Omega_\Pi} f_{\theta,\varphi}^2(\Omega) \cdot d\Omega.$$

Выразим через эти величины среднеугловое значение полной энергетической характеристики направленности  $\langle F^\exists \rangle$  и максимум полного КНД  $D_m$ :

$$\begin{aligned} \langle F^\exists \rangle &= 1/D_m = (4\pi)^{-1} \int_{\Omega_\Pi} F^2(\Omega) \cdot d\Omega = \\ &= \frac{\langle f_\theta^\exists \rangle}{f_\theta^2(\Omega_m) + |s|_m^2 \cdot f_\varphi^2(\Omega_m)} + \frac{\langle f_\varphi^\exists \rangle}{f_\theta^2(\Omega_m)/|s|_m^2 + f_\varphi^2(\Omega_m)}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

При совпадении направлений парциальных максимумов ( $\Omega_{m1} = \Omega_{m2} = \Omega_m$ ) справедливы соотношения:

$$f_{\theta}(\Omega_m) = f_{\varphi}(\Omega_m) = 1;$$

$$E_{\max}^2 = E_{\theta\max}^2 \cdot (1 + |s|_m^2) = E_{\varphi\max}^2 \cdot (1/|s|_m^2 + 1);$$

$$F^{\exists}(\Omega) = F^2(\Omega) = f_{\theta}^2(\Omega)/(1 + |s|_m^2) + f_{\varphi}^2(\Omega)/(1/|s|_m^2 + 1); \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} \langle F^{\exists} \rangle &= 1/D_m = \langle f_{\theta}^{\exists} \rangle / (1 + |s|_m^2) + \langle f_{\varphi}^{\exists} \rangle / (1/|s|_m^2 + 1) = \\ &= \frac{1}{D_{m\theta} \cdot (1 + |s|_m^2)} + \frac{1}{D_{m\varphi} \cdot (1/|s|_m^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

При совпадении направлений парциальных максимумов ( $\Omega_{m1} = \Omega_{m2} = \Omega_m$ ) и равенстве этих максимумов получим:

$$|s|_m = |\dot{E}_{\varphi}(\Omega_m)| / |\dot{E}_{\varphi\theta}(\Omega_m)| = E_{\varphi\max} / E_{\theta\max} = 1;$$

$$E_{\max}^2 = 2E_{\theta\max}^2 = 2E_{\varphi\max}^2;$$

$$\left. \begin{aligned} F^{\exists}(\Omega) &= F^2(\Omega) = 0.5[f_{\theta}^2(\Omega) + f_{\varphi}^2(\Omega)]; \\ \langle F^{\exists} \rangle &= 1/D_m = 0.5[\langle f_{\theta}^{\exists} \rangle + \langle f_{\varphi}^{\exists} \rangle] = 0.5/D_{m\theta} + 0.5/D_{m\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

### 1.16.\* Поляризационные параметры поля излучения

Излагаемое в настоящем параграфе поляризационное описание поля распространяется на любое переменное поле, поперечное относительно оси  $x_3$  декартовой системы координат  $x_1, x_2, x_3$ , т.е. имеющее составляющие только по осям  $x_1, x_2$ :  $\vec{E} = \bar{1}_1 E_1 + \bar{1}_2 E_2$ . Поскольку рассматривается только поперечное поле, использовавшийся ранее индекс "  $\perp$  " для обозначения поперечной составляющей опускаем. Это описание распространяется и на поле излучения в дальней зоне, в котором

преобладают угловые составляющие  $E_\theta, E_\varphi$ , поперечные относительно направления распространения волны  $\bar{1}_r$ . В ограниченной области дальней зоны это поле имеет характер локально плоской волны, локальный фронт которой, называемый *картинной плоскостью*, есть плоскость, проходящая через точку наблюдения и перпендикулярная направлению распространения волны, т.е. касательная к поверхности сферы. Для поляризационного описания поля излучения введем декартову систему координат  $x_1, x_2, x_3$ , ось  $x_3$  которой совпадает с направлением распространения волны ( $\bar{1}_3 = \bar{1}_r$ ), а орты  $\bar{1}_1, \bar{1}_2$  лежат в картинной плоскости и совпадают с ортами угловых координат сферической системы в точке наблюдения (например,  $\bar{1}_1 = \bar{1}_\theta$ ,  $\bar{1}_2 = \bar{1}_\varphi$  либо  $\bar{1}_1 = \bar{1}_\varphi, \bar{1}_2 = -\bar{1}_\theta$ ).

Координатные составляющие поперечного (относительно  $x_3$ ) гармонического поля в общем случае могут иметь различные амплитуды  $E_{1m} = |\dot{E}_1| \neq E_{2m} = |\dot{E}_2|$  и фазы  $\psi_1 = \arg \dot{E}_1 \neq \psi_2 = \arg \dot{E}_2$ . Полагая  $\psi_1 = \psi, \psi_2 = \psi - \Delta\psi$ , запишем комплексный вектор поля в виде:

$$\dot{\vec{E}} = \bar{1}_1 \dot{E}_1 + \bar{1}_2 \dot{E}_2 = \bar{1}_1 E_{1m} e^{i\psi} + \bar{1}_2 E_{2m} e^{i(\psi - \Delta\psi)}.$$

Для плоской или локально плоской гармонической волны, бегущей в направлении  $x_3$ , общий фазовый набег  $\psi$  зависит от времени  $t$  и координаты  $x_3$ :

$$\psi = \omega t - kx_3.$$

Введем комплексный *параметр поляризации*, учитывающий различие координатных составляющих по амплитуде и по фазе:

$$s = \frac{\dot{E}_2}{\dot{E}_1} = |s| e^{-i\Delta\psi}; \quad |s| = \frac{E_{2m}}{E_{1m}}; \quad \Delta\psi = \psi_1 - \psi_2. \quad (1.81)$$

С учетом этого представим амплитуду поля  $E_m$  и его комплексный вектор  $\dot{\vec{E}}$  в виде:

$$E_m = |\dot{\vec{E}}| = \sqrt{E_{1m}^2 + E_{2m}^2} = E_{1m} \sqrt{1 + |s|^2};$$

$$\dot{\bar{E}} = (\bar{1}_1 + \bar{1}_2 s) E_{1m} e^{i\psi} = \dot{\bar{n}} E_m e^{i\psi}; \quad (1.82)$$

где  $\dot{\bar{n}}$  – нормированный комплексный **вектор поляризации**:

$$\dot{\bar{n}} = \frac{\bar{1}_1 + \bar{1}_2 |s| e^{-i\Delta\psi}}{\sqrt{1 + |s|^2}}; \quad |\dot{\bar{n}}| = \sqrt{\dot{\bar{n}} \dot{\bar{n}}^*} = 1. \quad (1.83)$$

Мгновенные значения физического вектора поля  $\bar{E}(\psi)$  и физического вектора поляризации  $\bar{n}(\psi)$  выразятся соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{E}(\psi) &= Re(\dot{\bar{E}}) = E_m \cdot Re(\dot{\bar{n}} e^{i\psi}) = E_m \bar{n}(\psi); \\ \bar{n}(\psi) &= Re(\dot{\bar{n}} e^{i\psi}) = \frac{\bar{1}_1 \cdot \cos\psi + \bar{1}_2 \cdot |s| \cdot \cos(\psi - \Delta\psi)}{\sqrt{1 + |s|^2}} = \\ &= \bar{1}_1 n_1(\psi) + \bar{1}_2 n_2(\psi). \end{aligned} \quad (1.84)$$

При различии координатных составляющих по амплитуде ( $|s| \neq 1$ ) и по фазе ( $\Delta\psi \neq 0$ ) мгновенные значения физического вектора поля  $\bar{E}(\psi)$  и физического вектора поляризации  $\bar{n}(\psi)$  при изменении  $\psi = \omega t - kx_3$  изменяются по абсолютной величине и по направлению. При этом в картинной плоскости ( $x_3 = \text{const}$ ) векторы  $\bar{E}(\psi)$  и  $\bar{n}(\psi)$  с течением времени описывают своими концами годографы в виде софокусных эллипсов, отличающихся только масштабом. В дальнейшем будем говорить только о годографе  $\bar{n}$ , называя его **поляризационным эллипсом**. Построение поляризационного эллипса показано на рис. 1.12. При  $s = (-1)^k |s|$  ( $\Delta\psi = k\pi$ ) эллипс вырождается в прямую, а при  $s = \pm i$  ( $|s| = 1$ ,  $\Delta\psi = \pm\pi/2$ ) – в окружность.

Закон изменения вектора поля по абсолютной величине и по направлению с течением времени (при  $x_3 = \text{const}$ ) или в зависимости от  $x_3$  (при  $t = \text{const}$ ), характеризуемый **годографом** вектора в функции этих переменных, называется **поляризацией** вектора. Плоскость, проходящая через мгновенное направление вектора и направление распространения волны, называется **плоскостью поляризации**. Поляризация характеризуется введенным выше комплексным вектором поляризации

$\dot{\vec{n}}$  и полностью определяется одним комплексным или двумя вещественными параметрами. В системе координат  $x_1, x_2$ , привязанной к угловым сферическим координатам точки наблюдения, поляризация характеризуется комплексным параметром  $s = |s|e^{-i\Delta\psi}$ , т.е. двумя вещественными параметрами:  $|s|$  и  $\Delta\psi = -\text{args}$ .

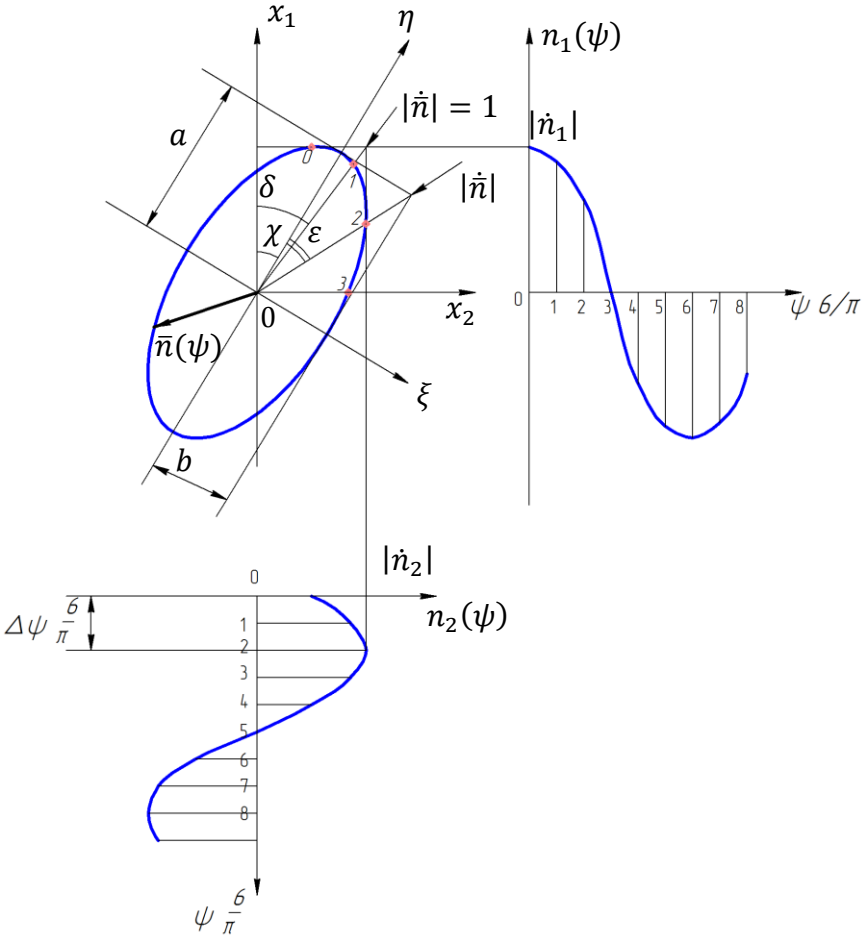


Рис. 1.12 – Построение поляризационного эллипса:  $\chi$  – поляризационный азимут;  $\varepsilon$  – угол эллиптичности;  $|\dot{n}_1| = 1/\sqrt{1 + |s|^2}$ ;  $|\dot{n}_2| = |s|/\sqrt{1 + |s|^2}$ ;  $\text{tg}\delta = |\dot{n}_2|/|\dot{n}_1| = |s|$ ; цифрами отмечены значения  $\psi \cdot 6/\pi$

В рассмотренном общем случае, когда годограф вектора является эллипсом, поляризация называется *эллиптической* или *вращающейся*; в этом случае плоскость поляризации вращается вокруг направления распространения волны.

Поляризация называется *правой*, если с течением времени вектор вращается в картинной плоскости ( $x_3 = \text{const}$ ) по часовой стрелке относительно направления распространения волны (т. е. для наблюдателя, смотрящего в этом направлении); пространственный (трехмерный) годограф вектора при  $t = \text{const}$  имеет в этом случае форму левовинтовой спирали относительно направления  $x_3$ . В противоположном случае поляризация называется *левой*. Направление поляризации определяется знаком фазового сдвига  $\Delta\psi$  координатных составляющих вектора: при  $-\pi \leq \Delta\psi \leq 0$  – левая поляризация; при  $0 \leq \Delta\psi \leq \pi$  – правая поляризация.

Для описания поляризации, наряду с исходным базисом  $x_1, x_2$ , привязанным к угловым сферическим координатам, используется *собственный* базис поляризационного эллипса, оси которого  $\eta, \xi$  направлены по большой и малой осям эллипса соответственно (рис. 1.12). Как уже отмечалось, поляризация полностью описывается двумя вещественными параметрами. В собственном базисе эллипса для описания поляризации используются параметры, которые будем называть *собственными*:

- поляризационный *азимут*  $\chi$  – угол наклона большой оси эллипса относительно выбранного направления, например, оси  $x_1$  ( $0 \leq \chi \leq \pi$ );
- угол эллиптичности  $\varepsilon$  ( $-\pi/4 \leq \varepsilon \leq \pi/4$ ) либо тангенс этого угла  $\mathcal{E}$ , называемый *коэффициентом эллиптичности* или, просто, эллиптичностью и равный отношению малой оси эллипса  $b$  к большой  $a$ , взятому со знаком «+» при правом и со знаком «-» при левом вращении:

$$\mathcal{E} = \operatorname{tg} \varepsilon = \pm |E|_{\min} / |E|_{\max} = \pm b/a.$$

Между собственными параметрами поляризации  $\chi, \mathcal{E}$  и параметрами поляризации  $|s|, \Delta\psi$  в исходном базисе  $x_1, x_2$  существует одно-

значная взаимосвязь. Записав уравнение эллипса в координатах  $n_1, n_2$  сначала через исходные параметры поляризации  $|s|, \Delta\psi$ , а затем через собственные параметры поляризации  $\chi, \varepsilon$  и приравняв в этих двух уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях  $n_1, n_2, n_1 \cdot n_2$ , получим соотношения связи исходных и собственных параметров:

$$|s| = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + \operatorname{tg}^2 \chi}{1 + (\varepsilon \cdot \operatorname{tg} \chi)^2}}; \quad \operatorname{tg}(\Delta\psi) = \frac{2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2) \cdot \sin(2\chi)}; \quad (1.85)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(2\chi) &= \frac{2|s|}{1 - |s|^2} \cdot \cos(\Delta\psi); \\ \varepsilon = \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{2 \cdot \sin(\Delta\psi) \cdot |s| / (1 + |s|^2)}{1 + \sqrt{1 - [2 \cdot \sin(\Delta\psi) \cdot |s| / (1 + |s|^2)]^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (1.86)$$

Для значений этих параметров приняты следующие пределы:

$$0 \leq |s| \leq \infty; \quad \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \Delta\psi \leq 0; \quad (\text{левая пол.}) \\ 0 \leq \Delta\psi \leq \pi. \quad (\text{правая пол.}) \end{array} \right\}$$

$$0 \leq \chi \leq \pi; \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon < 0; \quad -1 \leq \varepsilon < 0; \quad (\text{левая пол.}) \\ 0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}; \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (\text{правая пол.}) \end{array} \right\}$$

Частными случаями поляризации являются:

- **круговая**, когда годограф является окружностью:

$$\left. \begin{aligned} |s| &= 1; \\ \Delta\psi &= \pm\pi/2; \end{aligned} \right\} s = \mp i; \quad \dot{n} = (\bar{1}_1 \mp i \cdot \bar{1}_2) / \sqrt{2}; \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon &= \pm \frac{\pi}{4}; \quad \varepsilon = \pm 1; \quad \chi - \text{неопределенно}; \end{aligned} \right\}, \quad (1.87)$$

где верхний знак соответствует правому, а нижний – левому вращению;

- **линейная**, когда годограф вырождается в прямую линию:



$$\left. \begin{aligned} |s| = \operatorname{tg} \delta - \text{любое положительное число;} \\ \Delta\psi = k\pi; (k = 0; \mp 1); \\ \exists = 0; \operatorname{tg} \chi = (-1)^k \cdot |s| = (-1)^k \cdot \operatorname{tg} \delta. \end{aligned} \right\} s = (-1)^k \cdot |s|; \quad (1.88)$$

В случае волны линейной поляризации плоскость поляризации неподвижна, поэтому такую волну называют также **плоскополяризованной**; при этом угол  $\delta$  – угол наклона плоскости поляризации к оси  $x_1$ , называемый **углом поляризации** ( $0 \leq \delta \leq \pi/2$ ).

Характерные виды поляризации и соответствующие им параметры отображены в табл. 1.2.

Выше комплексные векторы поля  $\vec{E}$  и поляризации  $\vec{n}$  представлялись в виде разложений по декартовым базисам – исходному  $\bar{1}_1, \bar{1}_2$  и собственному  $\bar{1}_\eta, \bar{1}_\xi$ , т.е. в виде разложений на линейно-поляризованные составляющие. Для решения некоторых задач радиотехники используются поля излучения круговой поляризации и формирующие эти поля антенны круговой поляризации. Кроме того, на использовании полей круговой поляризации основан принцип действия некоторых функциональных устройств высокочастотных трактов. Поэтому целесообразно и, как будет показано, возможно представление поля произвольной – в общем случае эллиптической – поляризации в виде разложения не только на линейно-поляризованные составляющие, но и на составляющие круговой поляризации правого и левого вращения, которые называют **циркулярными составляющими**. Такое разложение позволяет дать более полное описание поляризационных свойств поля и уточнить определения введенных выше поляризационных параметров.

Введем для поляризационных векторов круговой поляризации (1.87) правого (инд. «п») и левого (инд. «л») вращения новые обозначения:

$$\bar{1}_{\text{л}} = (\bar{1}_1 \mp i \cdot \bar{1}_2) / \sqrt{2}. \quad (1.89)$$

Таблица 1.2. Виды и параметры поляризации

Виды поляризации	Круговая левая	Эллиптическая левая	Линейная	Эллиптическая правая	Круговая правая
Разность фаз составляющих линейной поляризации $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$	$\Delta\psi = -\frac{\pi}{2}$	$-\pi < \Delta\psi < 0$	$\Delta\psi = 0, \pm\pi$	$0 < \Delta\psi < \pi$	$\Delta\psi = \frac{\pi}{2}$
Отношение амплитуд составляющих линейной поляризации $ s  = E_{2m}/E_{1m}$	$ s  = 1$	$0 \leq  s  \leq \infty$			$ s  = 1$
Угол эллиптичности $\varepsilon$	$\varepsilon = -\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4} < \varepsilon < 0$	$\varepsilon = 0$	$0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$	$\varepsilon = \frac{\pi}{4}$
Коэффициент эллиптичности $\mathcal{E} = \operatorname{tg} \varepsilon$	$\mathcal{E} = -1$	$-1 < \mathcal{E} < 0$	$\mathcal{E} = 0$	$0 < \mathcal{E} < 1$	$\mathcal{E} = 1$

Поскольку эти векторы удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки

$$(\bar{1}_\pi, \bar{1}_\lambda) = \bar{1}_\pi \cdot \bar{1}_\lambda^* = 0; \quad |\bar{1}_\pi|^2 = \bar{1}_\pi \cdot \bar{1}_\pi^* = 1, \quad (1.90)$$

что в совокупности называют условием *ортонормировки*, их можно использовать в качестве базисных векторов нового базиса  $\bar{1}_\pi, \bar{1}_\lambda$ , называемого *циркулярным*.

Запишем комплексные векторы поля  $\dot{\vec{E}}$  и поляризации  $\dot{\vec{n}}$ , заданные в исходном базисе выражениями (1.82), (1.83) соответственно, в виде разложений по циркулярному базису:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{n}} E_m e^{i\psi} &= \bar{1}_\pi \dot{E}_\pi + \bar{1}_\lambda \dot{E}_\lambda = (\bar{1}_\pi \dot{n}_\pi + \bar{1}_\lambda \dot{n}_\lambda) E_m e^{i\psi}; \\ \dot{\vec{n}} &= \bar{1}_\pi \dot{n}_\pi + \bar{1}_\lambda \dot{n}_\lambda. \end{aligned}$$

Комплексные циркулярные составляющие этих векторов определяются соотношениями:

$$\dot{E}_\pi = \dot{n}_\pi \cdot E_m e^{i\psi} = \dot{\vec{E}} \cdot \bar{1}_\pi^* = (\dot{E}_1 \pm i\dot{E}_2)/\sqrt{2}; \quad (1.91)$$

$$\dot{n}_\pi = |\dot{n}_\pi| e^{i\theta_\pi} = \dot{\vec{n}} \cdot \bar{1}_\pi^* = (1 \pm i|s|e^{-i\Delta\psi})/\sqrt{2(1+|s|^2)}; \quad (1.92)$$

$$|\dot{n}_\pi| = \sqrt{\dot{n}_\pi \dot{n}_\pi^*} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{2 \cdot |s| |\sin(\Delta\psi)|}{1 + |s|^2} \right]}; \quad (1.93)$$

$$|\dot{\vec{n}}| = \sqrt{\dot{\vec{n}} \cdot \dot{\vec{n}}^*} = \sqrt{|\dot{n}_\pi|^2 + |\dot{n}_\lambda|^2} = 1; \quad (1.94)$$

$$\text{tg} \theta_\pi = \frac{\pm |s| \cdot \cos(\Delta\psi)}{1 \pm |s| \cdot \sin(\Delta\psi)};$$

$$\operatorname{tg}(\theta_{\pi} - \theta_{\lambda}) = \frac{2|s| \cdot \cos(\Delta\psi)}{1 - |s|^2} = \operatorname{tg}(2\chi). \quad (1.95)$$

Мгновенное значение физического вектора поляризации  $\bar{n}(\psi)$  выразится через циркулярные составляющие соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{n}(\psi) &= \operatorname{Re}(\dot{\bar{n}} \cdot e^{i\psi}) = \operatorname{Re}[(\bar{1}_{\pi}\dot{n}_{\pi} + \bar{1}_{\lambda}\dot{n}_{\lambda})e^{i\psi}] = \bar{n}_{\pi}(\psi) + \bar{n}_{\lambda}(\psi); \\ \bar{n}_{\pi}(\psi) &= \operatorname{Re} \left[ \bar{1}_{\pi} \left| \dot{n}_{\pi} \right| e^{i(\psi + \theta_{\pi})} \right] = \\ &= \left[ \bar{1}_1 \cos(\psi + \theta_{\pi}) \pm \bar{1}_2 \sin(\psi + \theta_{\pi}) \right] \cdot \left| \dot{n}_{\pi} \right| / \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Определим абсолютные величины  $E(\psi)$  и  $n(\psi)$  мгновенных векторов поля  $\bar{E}(\psi)$  и поляризации  $\bar{n}(\psi)$  соответственно (мгновенные «длины» этих векторов):

$$\begin{aligned} E(\psi) &= \sqrt{\bar{E}(\psi) \cdot \bar{E}(\psi)} = E_m \cdot n(\psi); \\ n^2(\psi) &= \bar{n}(\psi) \cdot \bar{n}(\psi) = [\operatorname{Re}(\dot{\bar{n}} e^{i\psi})]^2 = [0.5(\dot{\bar{n}} e^{i\psi} + \dot{\bar{n}}^* e^{-i\psi})]^2 = \\ &= 0.5\{\dot{\bar{n}}\dot{\bar{n}}^* + 0.5[\dot{\bar{n}}^2 e^{i2\psi} + (\dot{\bar{n}}^*)^2 e^{-i2\psi}]\} = \\ &= 0.5[1 + \operatorname{Re}(\dot{\bar{n}}^2 e^{i2\psi})]. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Используя (1.90), (1.92), (1.93), (1.86), представим величину  $\dot{\bar{n}}^2$  в виде:

$$\dot{\bar{n}}^2 = \dot{\bar{n}}\dot{\bar{n}} = 2\dot{n}_{\pi}\dot{n}_{\lambda} = 2|\dot{n}_{\pi}||\dot{n}_{\lambda}|e^{i(\theta_{\pi} + \theta_{\lambda})} = |\dot{\bar{n}}^2|e^{i2\theta}; \quad (1.97)$$

$$|\dot{\bar{n}}^2| = 2|\dot{n}_{\pi}||\dot{n}_{\lambda}| = \sqrt{1 - \left[ \frac{2 \sin(\Delta\psi) \cdot |s|}{1 + |s|^2} \right]^2} = \frac{1 - \vartheta^2}{1 + \vartheta^2}. \quad (1.98)$$

На основании (1.96), (1.97) мгновенная длина вектора поляризации выразится соотношением

$$\begin{aligned}
n(\psi) &= \sqrt{0,5 \left\{ 1 + \operatorname{Re} \left[ \left| \dot{\vec{n}}^2 \right| e^{i2(\psi+\theta)} \right] \right\}} = \\
&= \sqrt{0,5 [1 + |\dot{\vec{n}}^2| \cdot \cos 2(\psi + \theta)]}. \quad (1.99)
\end{aligned}$$

Максимум и минимум длины вектора поляризации, т.е. большая и малая полуоси поляризационного эллипса, традиционно обозначаемые через "a" и "b" соответственно, имеют место при значениях  $\cos 2(\psi + \theta)$ , равных +1 и -1, и с учетом (1.99), (1.98), (1.94) определяются выражением:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} &= \sqrt{0,5(1 \pm |\dot{\vec{n}}^2|)} = \sqrt{0,5(1 \pm 2|\dot{n}_\parallel||\dot{n}_\perp|)} = \\
&= \sqrt{0,5(|\dot{n}_\parallel|^2 + |\dot{n}_\perp|^2 \pm 2|\dot{n}_\parallel||\dot{n}_\perp|)} = \left| |\dot{n}_\parallel| \pm |\dot{n}_\perp| \right| / \sqrt{2}. \quad (1.100)
\end{aligned}$$

На основании полученных соотношений можно собственные параметры поляризации ( $\mathcal{E}, \chi$ ) выразить через параметры циркулярных составляющих вектора поляризации ( $\dot{n}_\parallel = |\dot{n}_\parallel| e^{i\theta_\parallel}$ ). Соотношение (1.100) позволяет дать следующее определение коэффициента эллиптичности:

$$\mathcal{E} = \pm \frac{b}{a} = \frac{|\dot{n}_\parallel| - |\dot{n}_\perp|}{|\dot{n}_\parallel| + |\dot{n}_\perp|}.$$

Подставив сюда выражение (1.93) для  $|\dot{n}_\parallel|$ , снова придем к соотношению (1.86) для  $\mathcal{E}$ . Согласно (1.95) разность фаз циркулярных составляющих равна удвоенному азимуту поляризации:

$$\theta_\parallel - \theta_\perp = \arg \dot{n}_\parallel - \arg \dot{n}_\perp = 2\chi.$$

На рис. 1.13 показано формирование вектора эллиптической поляризации  $\vec{n}(\psi)$  при суммировании векторов круговой поляризации

$\bar{n}(\psi) = \bar{n}_\pi(\psi) + \bar{n}_\lambda(\psi)$ , где стрелками изображены эти векторы при  $\psi = 0$ :

$$\bar{n}(0) = \bar{n}_{|\psi=0} = \bar{n}_\pi(0) + \bar{n}_\lambda(0);$$

$$\bar{n}_{\lambda}(\psi) = \bar{n}_{\lambda|\psi=0} = (\bar{1}_1 \cdot \cos\theta_{\lambda} \pm \bar{1}_2 \cdot \sin\theta_{\lambda}) \cdot |\dot{n}_{\lambda}|/\sqrt{2}.$$

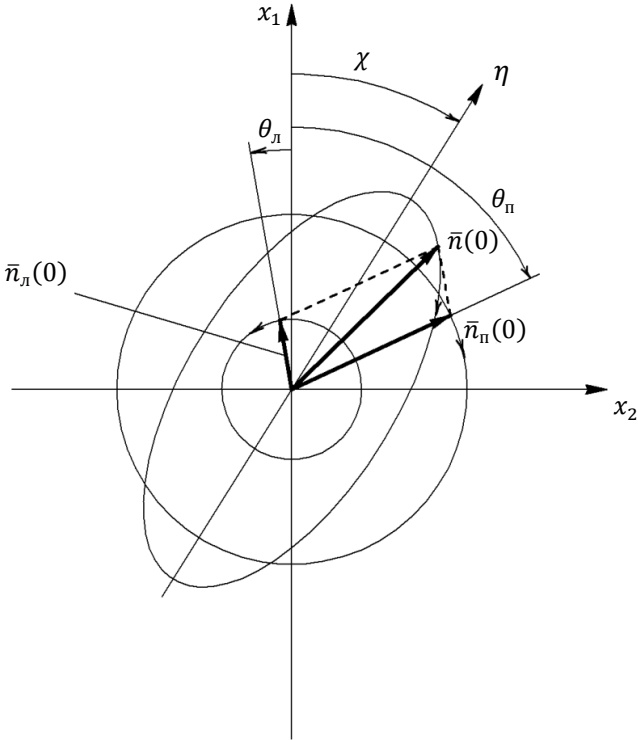


Рис. 1.13 – Формирование вектора эллиптической поляризации  $\bar{n}(\psi)$  при суммировании векторов круговой поляризации  $\bar{n}_\pi(\psi)$  и  $\bar{n}_\lambda(\psi)$ :  $\bar{n}(0) = \bar{n}_{|\psi=0}$ ;  $\bar{n}_\pi(0) = \bar{n}_{\pi|\psi=0}$ ;  $\bar{n}_\lambda(0) = \bar{n}_{\lambda|\psi=0}$

## 1.17.\* Поляризационная характеристика поля излучения

Для экспериментального исследования поляризационных свойств поля излучения антенны используется вспомогательная (инд. «в») индикаторная антенна – чаще всего, антенна линейной поляризации.

**Поляризационная характеристика** поля излучения исследуемой антенны – это зависимость амплитуды поля, возбуждаемого этой антенной во вспомогательной антенне линейной поляризации, от угла поворота  $\alpha$  вспомогательной антенны вокруг оси, направленной на исследуемую антенну, в картинной плоскости последней. При каждом положении  $\alpha$  вспомогательной антенны амплитуда возбуждаемого в ней поля пропорциональна максимальной проекции вектора  $\vec{E} = E_m \vec{n}$ , а значит и вектора поляризации  $\vec{n}$  исследуемого поля на вектор поляризации вспомогательной антенны  $\vec{n}^B$ .

Пусть вектор поляризации вспомогательной антенны линейной поляризации ориентирован под углом  $\alpha$  к оси  $x_1$ :

$$\vec{n}^B = \vec{1}_1 \cdot \cos\alpha + \vec{1}_2 \cdot \sin\alpha.$$

Введем «поляризационный коэффициент передачи» (от поля исследуемой передающей антенны с вектором поляризации  $\vec{n}$  к полю, возбуждаемому во вспомогательной приемной антенне с вектором поляризации  $\vec{n}^B$ ), который запишем с учетом выражения (1.83) для  $\vec{n}$ :

$$\xi = \vec{n} \cdot \vec{n}^B = \frac{\cos\alpha + |s|e^{-i\Delta\psi} \cdot \sin\alpha}{\sqrt{1 + |s|^2}} = |\xi|e^{i \cdot \arg \xi}.$$

Проекция мгновенного вектора поляризации исследуемого поля  $\vec{n}(\psi) = Re(\vec{n} \cdot e^{i\psi})$  на направление  $\vec{n}^B$  запишется в виде:

$$\begin{aligned} \vec{n}^B \cdot \vec{n}(\psi) &= Re(\vec{n}^B \cdot \vec{n} \cdot e^{i\psi}) = Re \left[ |\xi| e^{i(\psi + \arg \xi)} \right] = \\ &= |\xi| \cdot \cos(\psi + \arg \xi). \end{aligned}$$

Амплитуда поля, возбуждаемого во вспомогательной антенне, пропорциональна максимуму величины  $\bar{n}^B \cdot \bar{n}(\psi)$ , т.е. значению этой величины при  $\cos(\psi + \arg \xi) = 1$ :

$$\begin{aligned} \max(\bar{n}^B \bar{n}(\psi)) &= |\xi| = |\bar{n}^B \cdot \dot{n}| = \frac{|\cos\alpha + |s|e^{-i\Delta\psi} \cdot \sin\alpha|}{\sqrt{1 + |s|^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2\alpha + |s|^2 \cdot \sin^2\alpha + |s| \cdot \sin(2\alpha) \cdot \cos(\Delta\psi)}{1 + |s|^2}}. \end{aligned}$$

Зависимость параметра  $|\xi|$  от угла  $\alpha$ , определяемая этим соотношением, и есть поляризационная характеристика поля излучения исследуемой антенны с параметрами поляризации  $|s|, \Delta\psi$ . Графическое представление функции  $|\xi(\alpha)|$  в полярных координатах, т.е. график зависимости нормированной амплитуды поля, возбуждаемого во вспомогательной антенне, от угла поворота  $\alpha$  этой антенны в картинной плоскости исследуемой антенны, называется *поляризационной диаграммой* последней.

Экстремумы поляризационной характеристики  $|\xi|_e = |\xi(\alpha_e)|$  определяются из соотношений:

$$\left. \frac{d|\xi|}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_e} = 0; \Rightarrow \operatorname{tg}(2\alpha_e) = \frac{2|s| \cdot \cos(\Delta\psi)}{1 - |s|^2} = \operatorname{tg}(2\chi);$$

$$\alpha_{e1,2} = \chi, \chi \pm \pi/2;$$

$$|\xi|_{e1,2} = |\xi(\alpha_{e1,2})| = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \left[ \frac{2\sin(\Delta\psi) \cdot |s|}{1 + |s|^2} \right]^2} \right\}} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}.$$

Поляризационная диаграмма исследуемого поля не совпадает с его поляризационным эллипсом, хотя по поляризационной диаграмме можно построить поляризационный эллипс, поскольку эти зависимо-



сти взаимосвязаны. Однако для определения основных поляризационных параметров не требуется построение поляризационного эллипса. Как видно из последних соотношений, направления и длины большой и малой осей поляризационной диаграммы совпадают с соответствующими величинами поляризационного эллипса ( $\alpha_{e1} = \chi$ ;  $\alpha_{e2} = \chi \pm \pm\pi/2$ ;  $|\dot{\xi}|_{e1} = a$ ,  $|\dot{\xi}|_{e2} = b$ ). Таким образом, модуль эллиптичности равен отношению малой оси поляризационной диаграммы к большой ( $|\mathcal{E}| = b/a$ ), а поляризационный азимут  $\chi$  – углу наклона большой оси поляризационной диаграммы к выбранной оси ( $x_1$ ).

На рис. 1.14 построены годографы мгновенного вектора поляризации  $\bar{n}(\psi)$  и поляризационные диаграммы  $|\dot{\xi}(\alpha)|$  для случаев линейной поляризации вектора  $\bar{n}(\psi)$  под углом  $\chi$  к оси  $x_1$  (рис. 1.14, а), круговой поляризации правого вращения (рис. 1.14, б) и эллиптической поляризации (рис. 1.14, в).

В случае линейной поляризации исследуемого поля под углом  $\chi$  к оси  $x_1$  ( $\Delta\psi = 0$ ;  $|s| = \text{tg}\chi$ ) получим (рис. 1.14, а):

$$\dot{\bar{n}} = \bar{1}_1 \cos\chi + \bar{1}_2 \sin\chi;$$

$$\bar{n}(\psi) = \text{Re}(\dot{\bar{n}} e^{i\psi}) = (\bar{1}_1 \cos\chi + \bar{1}_2 \sin\chi) \cdot \cos\psi;$$

$$\bar{n}^B \cdot \bar{n}(\psi) = (\cos\chi \cdot \cos\alpha + \sin\chi \cdot \sin\alpha) \cos\psi = \cos(\chi - \alpha) \cos\psi.$$

Величина  $\bar{n}^B \cdot \bar{n}(\psi)$  имеет максимум при  $\psi = 0$  и, следовательно, поляризационная характеристика запишется в виде:

$$|\dot{\xi}(\alpha)| = \max\{\bar{n}^B \cdot \bar{n}(\psi)\} = |\bar{n}^B \cdot \bar{n}(0)| = |\cos(\chi - \alpha)|.$$

При этом поляризационная диаграмма имеет форму цифры «8» с ориентацией большей оси под углом  $\chi$ , большая и малая оси диаграммы  $a = 1$ ,  $b = 0$  соответственно, а модуль эллиптичности  $|\mathcal{E}| = b/a = 0$ .

Если исследуемое поле имеет круговую поляризацию, например, правого вращения ( $\Delta\psi = \pi/2$ ;  $|s| = 1$ ), то получим (рис 1.14, б):

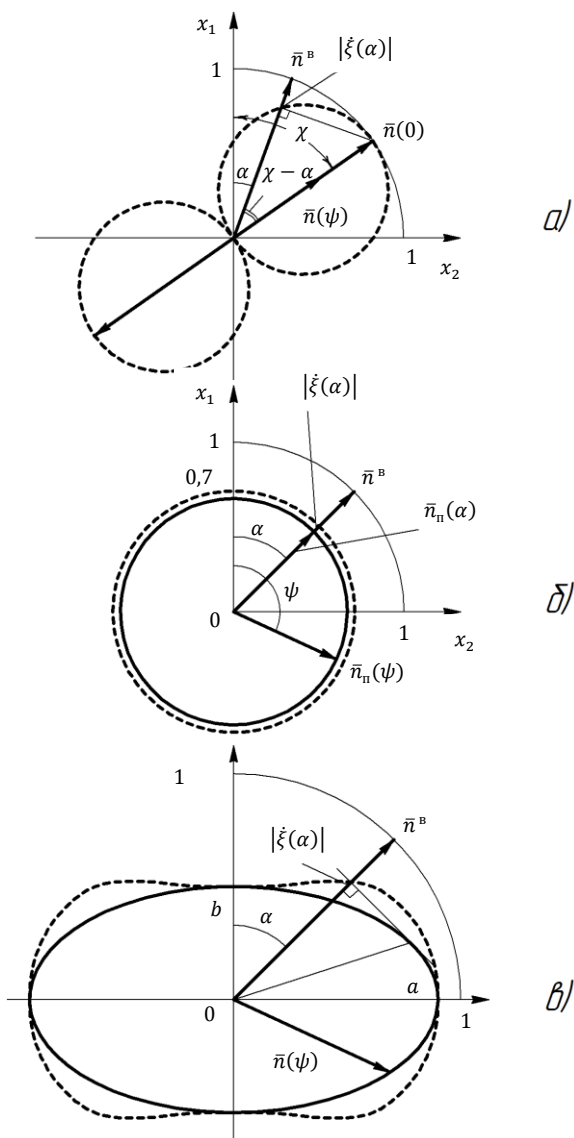


Рис. 1.14 – Годографы мгновенного вектора поляризации  $\bar{n}(\psi)$  (—) и поляризационные диаграммы  $|\xi(\alpha)|$  (-----) для случаев: а) линейной поляризации под углом  $\chi$  к оси  $x_1$ ; б) круговой поляризации правого вращения; в) эллиптической поляризации

$$\dot{\bar{n}}_{\text{п}} = \frac{\bar{1}_1 - i\bar{1}_2}{\sqrt{2}}; \bar{n}_{\text{п}}(\psi) = \text{Re}(\dot{\bar{n}}_{\text{п}} \cdot e^{i\psi}) = (\bar{1}_1 \cos\psi + \bar{1}_2 \sin\psi)/\sqrt{2};$$

$$\bar{n}^{\text{B}} \cdot \bar{n}_{\text{п}}(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\psi \cdot \cos\alpha + \sin\psi \cdot \sin\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\psi - \alpha).$$

Величина  $\bar{n}^{\text{B}} \cdot \bar{n}_{\text{п}}(\psi)$  имеет максимум при  $\psi = \alpha$ , поэтому поляризационная характеристика запишется в виде:

$$|\dot{\xi}(\alpha)| = \max\{\bar{n}^{\text{B}} \cdot \bar{n}_{\text{п}}(\psi)\} = \bar{n}^{\text{B}} \cdot \bar{n}_{\text{п}}(\alpha) = 1/\sqrt{2} = \text{const.}$$

При изменении  $\alpha$  величина  $|\dot{\xi}|$  остается постоянной, т.е. поляризационная диаграмма имеет форму окружности, совпадающей с годографом вектора  $\bar{n}(\psi)$ .

В общем случае поляризационная диаграмма различна для разных направлений, задаваемых угловыми координатами  $\theta, \varphi$  луча, идущего от исследуемой антенны в точку наблюдения.

## 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ

### 2.1. Понятие элементарного электрического излучателя и способы его реализации

*Элементарным электрическим излучателем* (ЭЭИ) называется модель излучателя в виде прямолинейного отрезка, малого по сравнению с длиной волны ( $l \ll \lambda$ ), вдоль которого течет переменный электрический ток с неизменными амплитудой и фазой в пределах отрезка.

Изучение свойств ЭЭИ важно прежде всего потому, что сложные вибраторные антенны можно представить в виде совокупности малых элементов, каждый из которых представляет собой ЭЭИ. На рис. 1.2, б показан один из таких элементов  $Id\vec{z}$ .

Однако возможна реализация и автономного излучателя, близкого к ЭЭИ. Он представляет собой малый в сравнении с длиной волны симметричный линейный электрический вибратор, плечи которого заканчиваются емкостными элементами – шарами, дисками или пластинами (рис. 2.1).

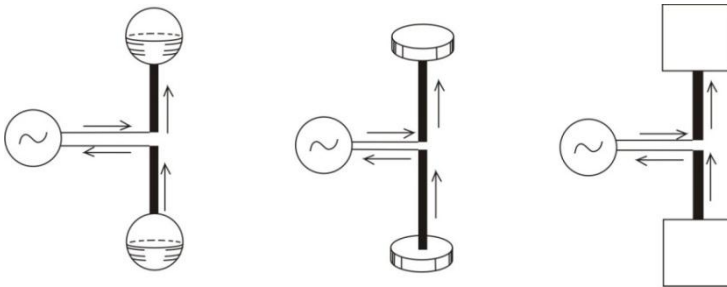


Рис. 2.1 – Возможные реализации элементарного электрического излучателя

Роль концевых емкостных элементов поясняется рис. 2.2. На рис. 2.2, а показано распределение амплитуды тока в разомкнутой чет-

вертьволновой линии ( $L = \lambda/4$ ). В сечении  $z = l_1 \ll \lambda/4$  входное сопротивление линии имеет емкостный характер, поэтому, заменив первый от  $z = l_1$  участок линии эквивалентной емкостью, как показано на рис. 2.2, б, получим такое же распределение тока, как на участке I четвертьволновой линии; при развороте проводников линии, нагруженной емкостью (рис. 2.2, б), т. е. в вибраторе с концевыми емкостями (рис. 2.2, в), распределение амплитуды тока останется примерно таким же, почти однородным. При включении генератора на расстоянии  $l_1 \ll \lambda/4$  от разомкнутого конца линии без концевых емкостей (рис. 2.2, г) амплитуда тока изменяется вдоль линии так же, как на участке II четвертьволновой линии; при развороте проводников линии рис. 2.2, г, т.е. в вибраторе без концевых емкостей (рис. 2.2, д), распределение амплитуды тока останется примерно таким же – резко неоднородным. Таким образом, наличие концевых емкостных элементов приводит при  $l \ll \lambda$  к выравниванию амплитуды тока вдоль вибратора.

В концевых емкостных элементах накапливаются попеременно заряды противоположного знака, в результате чего излучатель эквивалентен диполю с колеблющимся дипольным моментом. Такой излучатель был впервые создан Г. Герцем и получил название *диполя Герца*, или *вибратора Герца*.

В соответствии с определением ЭЭИ его ток, распределенный вдоль оси  $z$  между точками  $z_1 = -l_1$  и  $z_2 = l_1$  ( $z_2 - z_1 = 2 \cdot l_1 = l$ ), можно представить в случае гармонических колебаний в следующей комплексной форме:

$$\overset{\bullet}{I}(z) = I \cdot [\overset{\bullet}{\sigma}(z - z_1) - \overset{\bullet}{\sigma}(z - z_2)]; \quad \overset{\bullet}{I} = I_m \cdot e^{i\omega t}, \quad (2.1)$$

где  $\overset{\bullet}{\sigma}(z)$  – единичная ступенчатая функция Хевисайда. При этом мгновенное значение тока (рис. 2.3, а):

$$I(t, z) = \text{Re} \left\{ \overset{\bullet}{I}(z) \right\} = I_m(z) \cdot \cos(\omega \cdot t);$$

$$I_m(z) = I_m \cdot [\overset{\bullet}{\sigma}(z - z_1) - \overset{\bullet}{\sigma}(z - z_2)].$$

Приписав элементу тока некоторое поперечное сечение  $S_{\perp}$  ( $\lambda \gg \sqrt{S_{\perp}} \ll l$ ), запишем комплексный вектор плотности тока:

$$\vec{j}(z) = \vec{1}_z \cdot j(z) = \vec{1}_z \cdot I(z)/S_{\perp}.$$

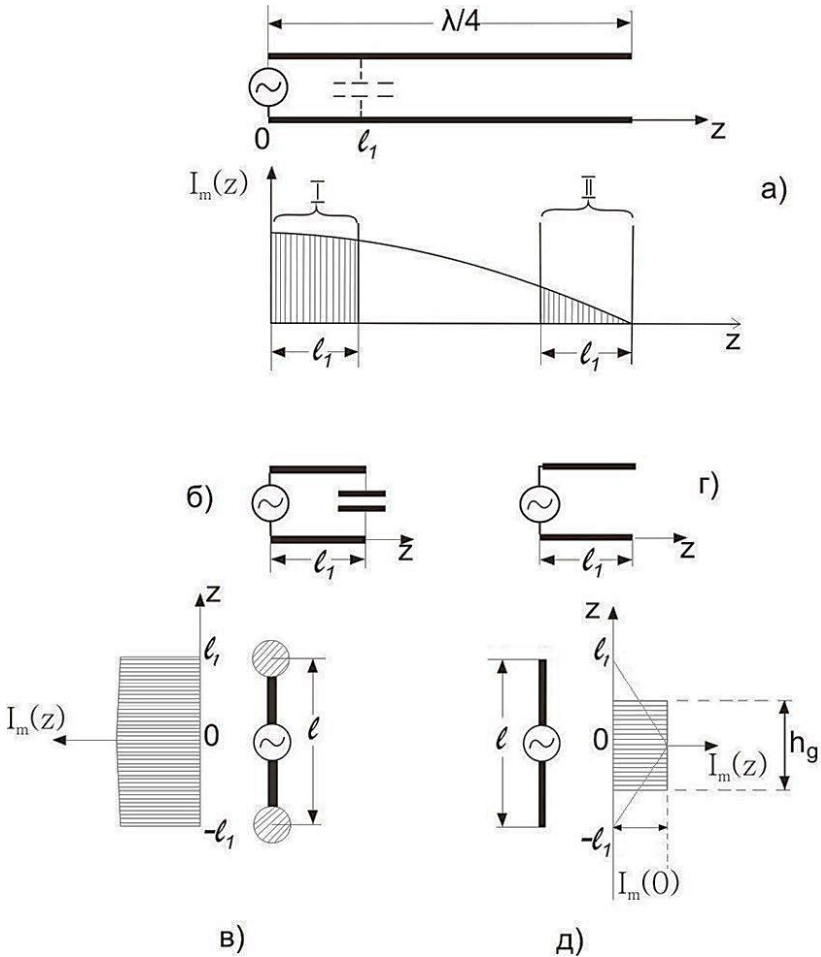


Рис. 2.2 – Распределение амплитуды тока в разомкнутой четвертьволновой линии (а), в нагруженной на емкость короткой линии  $l \ll \lambda$  (б), в коротком вибраторе с емкостными элементами (в), в разомкнутой короткой линии  $l \ll \lambda$  (г), в коротком вибраторе без емкостных элементов (д)

С помощью уравнения непрерывности определим распределение плотности электрического заряда:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(z) &= \frac{1}{-i \cdot \omega} \cdot \operatorname{div} \dot{j}(z) = \frac{i}{\omega} \cdot \frac{dj(z)}{dz} = \\ &= i \cdot \frac{I}{\omega \cdot S_{\perp}} \cdot [\delta(z - z_1) - \delta(z - z_2)], \end{aligned}$$

где  $\delta(z)$  –  $\delta$ -функция Дирака. Используя свойство  $\delta$ -функции, найдем распределение заряда по излучателю:

$$\begin{aligned} \dot{q}(z) &= \int_V \dot{\rho} \cdot dV = S_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\rho}(z) \cdot dz = \\ &= i \cdot \frac{I}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_1) - \delta(z - z_2)] \cdot dz = \\ &= \dot{q}(z_1) + \dot{q}(z_2) = \dot{q}_1 + \dot{q}_2, \end{aligned}$$

где  $\dot{q}_1 = \dot{q}(z_1)$ ,  $\dot{q}_2 = \dot{q}(z_2)$  – значения заряда в конечных точках излучателя:

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 = -\dot{q}_1 = \dot{q} &= -i \cdot I/\omega = -i \cdot I_m/\omega \cdot e^{i\omega t} = -i \cdot q_m \cdot e^{i\omega t}; \\ q_m &= |\dot{q}| = I_m/\omega. \end{aligned}$$

Мгновенное значение заряда в конечных точках (рис. 2.3, б):

$$\dot{q}_{2,1}(t) = \operatorname{Re} \left( \dot{q}_{2,1} \right) = \pm \operatorname{Re}(\dot{q}) = \pm q_m \cdot \sin(\omega t).$$

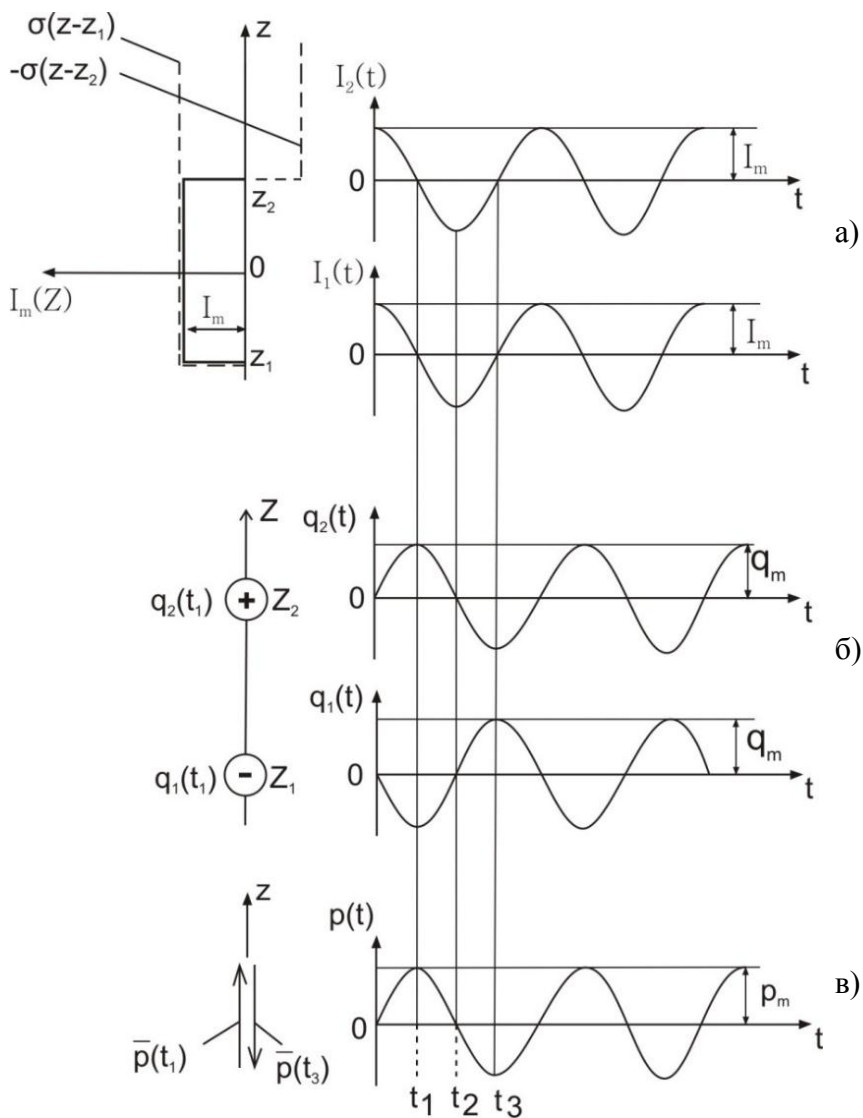


Рис. 2.3 – Временные зависимости параметров элементарного электрического излучателя: тока  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$  (а), заряда  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  (б) в конечных точках излучателя ( $Z_1$ ,  $Z_2$  соответственно) и дипольного момента  $p(t)$  (в)



Как видим, распределение тока постоянной амплитуды на ограниченном участке  $z_1 \leq z \leq z_2$  требует, чтобы в конечных точках этого участка накапливались заряды противоположного знака, изменяющиеся со сдвигом относительно тока по фазе на  $\pm 0.5 \cdot \pi$ , а во времени – на четверть периода колебаний  $\Delta t = \pm 0.5 \cdot \pi / \omega = \pm T/4$ . При этом излучатель эквивалентен диполю с колеблющимся дипольным моментом, определяемым соотношениями:

$$\dot{\bar{p}} = \dot{q} \cdot l \cdot \bar{1}_z = -i \cdot (\dot{I} \cdot l / \omega) \cdot \bar{1}_z = \dot{p} \cdot \bar{1}_z;$$

$$\dot{p} = -i \cdot I \cdot l / \omega = -i \cdot (I_m \cdot l / \omega) \cdot e^{i\omega t} = -i \cdot p_m \cdot e^{i\omega t};$$

$$p_m = |\dot{p}| = I_m \cdot l / \omega;$$

$$\bar{p}(t) = \text{Re}(\dot{\bar{p}}) = \bar{1}_z \cdot p_m \cdot \sin(\omega t).$$

Графики временных зависимостей тока и заряда в конечных точках излучателя, а также дипольного момента представлены на рис. 2.3, а, б, в соответственно.

## 2.2. Поле элементарного электрического излучателя в произвольной точке пространства

Определим поле гармонического ЭЭИ в произвольной точке пространства, используя решение (1.48) неоднородного уравнения Гельмгольца для комплексного векторного потенциала  $\dot{\vec{A}}$  и выражения (1.42), (1.43) векторов поля  $\dot{\vec{H}}, \dot{\vec{E}}$  через векторный потенциал. Считаем, что излучатель расположен в неограниченном пространстве, его поле

описывается в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ , центр которой совпадает с серединой излучателя, а дипольный момент  $\vec{p}$  и плотность тока  $\vec{j}$  излучателя ориентированы по полярной оси  $z$ :  $\vec{p} = \vec{1}_z \cdot p$ ,  $\vec{j} = \vec{1}_z \cdot j$  (рис. 2.4).

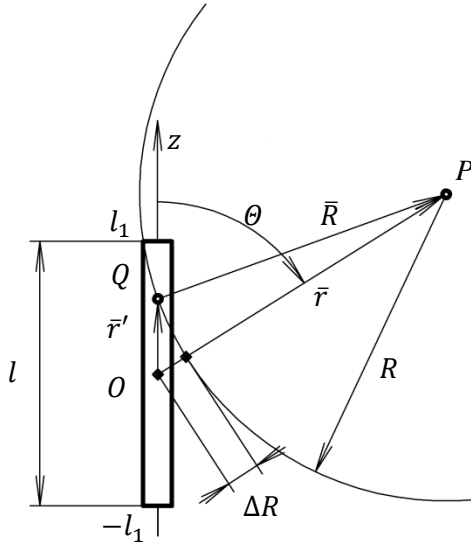


Рис. 2.4 – К определению поля элементарного электрического излучателя

Напомним, что величина  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$  под интегралом выражения (1.48) есть расстояние между точкой наблюдения ( $\vec{r}$ ), в которой определяется поле, и точками источника ( $\vec{r}'$ ), по которым ведется интегрирование. Координаты точек источника не превышают половину его длины:  $r' \leq \max r' = l/2$ . При этом, согласно разложению (1.49) величины  $R$ , разность хода лучей от разных точек излучателя до точки наблюдения не превышает  $l/2$ :

$$\Delta R \equiv r - R \leq \max(\Delta R) \approx \max r' = l/2.$$

Последнее соотношение в совокупности с условием  $l/r \ll 1$ , определяющим диполь, позволяет принять:

$$\frac{\Delta R}{r} \leq \frac{\max(\Delta R)}{r} \approx \frac{l}{2r} \ll 1; \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r(1 - \Delta R/r)} \approx \frac{1}{r},$$

т.е. считать величину  $1/R$  в подынтегральном выражении формулы (1.48) приближенно одинаковой для всех точек излучателя и вынести  $1/R \approx 1/r$  из-под интеграла.

Кроме того, с учетом условия  $l/\lambda \ll 1$ , определяющего элементарный излучатель, в показателе экспоненты  $e^{-ikR}$  подынтегрального выражения формулы (1.48) можно пренебречь фазовым сдвигом на расстоянии  $\Delta R$ :

$$\Delta\psi = k\Delta R \leq \frac{2\pi}{\lambda} \max(\Delta R) \approx \pi \frac{l}{\lambda} \ll \pi; \quad e^{ik\Delta R} \approx 1.$$

Это позволяет считать величину  $e^{-ikR}$  одинаковой для всех точек излучателя

$$e^{-ikR} = e^{-ik(r-\Delta R)} \approx e^{-ikr}$$

и вынести ее из-под интеграла.

С учетом этих допущений выражение (1.48), определяющее векторный потенциал произвольной излучающей системы, для ЭЭИ приводится к виду:

$$\dot{\vec{A}}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_a}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \int_{V_\Sigma} \dot{\vec{j}}(\vec{r}') \cdot dV' = \frac{\mu_a}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{\vec{N}}, \quad (2.2)$$

где обозначенный через  $\dot{\vec{N}}$  объемный интеграл от плотности тока есть комплексный векторный **момент тока** ЭЭИ.

Приписав проводникам излучателя некоторое поперечное сечение  $S_\perp$  ( $\lambda \gg \sqrt{S_\perp} \ll l$ ) и учтя постоянство комплексной амплитуды тока в пределах излучателя

$$\dot{I} = \int_{S_\perp} \dot{\vec{j}}(\vec{r}') d\vec{S} = I_m \cdot e^{i\omega t}; \quad I_m = \text{const при } -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2},$$

представим момент тока ЭЭИ в виде:

$$\dot{\vec{N}} = \int_{V_{\Sigma}} \dot{\vec{j}}(\vec{r}') \cdot dV' = \int_{-l/2}^{l/2} \bar{1}_z dz \int_{S_{\perp}} \dot{\vec{j}}(\vec{r}') d\bar{S} = \bar{1}_z \int_{-l/2}^{l/2} \dot{I} dz = \bar{1}_z \cdot \dot{I} l.$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{N}} &= \bar{1}_z \dot{N}; & \dot{N} &= \dot{I} l = i\omega \dot{p} = N_m \cdot e^{i\omega t}; \\ N_m &= |\dot{\vec{N}}| = I_m l = \omega p_m. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Согласно (2.2), (2.3) в любой точке пространства векторный потенциал поля ЭЭИ совпадает по направлению с вектором плотности тока и имеет радиально-временную зависимость в виде волновой функции расходящейся элементарной сферической волны  $e^{i(\omega t - kr)}/r$ .

Соотношение (2.2) для  $\dot{\vec{A}}$  является при конечной длине излучателя приближенным, справедливым в рамках принятых допущений ( $\lambda \gg l \ll r$ ) и дающим тем большую точность, чем меньше  $l$ . Однако можно ввести модель излучателя, для которой соотношение (2.2) является точным. Эта модель называется **точечным** или **идеальным** диполем и представляет собой излучатель, длина которого  $l$  стремится к нулю, а дипольный момент и момент тока остаются конечными и неизменными:

$$l \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \bar{p}_m = \bar{1}_z q_m l = \bar{1}_z I_m l / \omega = \bar{1}_z N_m / \omega = \text{const.}$$

Плотность тока такого излучателя можно задать с помощью трехмерной  $\delta$ -функции, которая, напомним, имеет размерность  $\text{м}^{-3}$ :

$$\dot{\vec{j}}(\vec{r}') = \bar{1}_z \dot{I} l \cdot \delta(\vec{r}') = \dot{\vec{N}} \cdot \delta(\vec{r}'). \quad (2.4)$$

Подставим (2.4) в выражение (1.48) для векторного потенциала произвольной излучающей системы. Наличие под интегралом  $\delta$ -функции  $\delta(\vec{r}') = \delta(\vec{r}' - 0)$  переводит интеграл в значение подынтегральной функции в точке  $\vec{r}' = 0$  («фильтрующее» свойство  $\delta$ -функции), а фигурирующая в подынтегральном выражении величина

$R(\bar{r}') = |\bar{r} - \bar{r}'|$  при  $\bar{r}' = 0$  принимает значение  $R(0) = R(\bar{r}')|_{\bar{r}'=0} = |\bar{r}| = r$ . С учетом этого получим:

$$\begin{aligned}\dot{A}(\bar{r}) &= \frac{\mu_a}{4\pi} \bar{1}_z \dot{I} l \int_{V_\Sigma} \frac{e^{-ikR(\bar{r}')}}{R(\bar{r}')} \delta(\bar{r}' - 0) dV' = \\ &= \frac{\mu_a}{4\pi} \bar{1}_z \dot{I} l \frac{e^{-ikR(0)}}{R(0)} = \frac{\mu_a}{4\pi} \dot{N} \frac{e^{-ikr}}{r}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Полученное таким образом окончательное выражение (2.5) совпадает с (2.2), но для точечного излучателя, заданного в виде (2.4), оно является точным.

Используя соотношение (1.42) и выражение (2.2) для векторного потенциала, определим магнитное поле:

$$\dot{\vec{H}} = \mu_a^{-1} \text{rot} \dot{A} = \frac{\dot{N}}{4\pi} \text{rot} \left( \bar{1}_z \frac{e^{-ikr}}{r} \right).$$

Учтем формулы для ротора от произведения орта  $\bar{1}_z$  и функции  $\chi$  и для градиента функции  $\chi = e^{-ikr}/r$ :

$$\begin{aligned}\text{rot}(\bar{1}_z \chi) &= [\nabla, \bar{1}_z \chi] = [\nabla \chi, \bar{1}_z] + \chi [\nabla, \bar{1}_z] = [\nabla \chi, \bar{1}_z]; \\ \nabla \chi &= \text{grad}(e^{-ikr}/r) = -\bar{1}_r \frac{(1 + ikr)}{r^2} e^{-ikr}.\end{aligned}$$

Представив  $\bar{1}_z$  через сферические координаты ( $\bar{1}_z = \bar{1}_r \cos\theta - \bar{1}_\theta \sin\theta$ ), найдем:

$$[-\bar{1}_r, \bar{1}_z] = [\bar{1}_r, \bar{1}_\theta] \sin\theta = \bar{1}_\varphi \sin\theta.$$

С помощью этих операций получим:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}} &= \frac{\dot{N}}{4\pi} \left[ \nabla \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right), \bar{1}_z \right] = \frac{\dot{N}}{4\pi} \frac{(1 + ikr)}{r^2} e^{-ikr} [-\bar{1}_r, \bar{1}_z] = \\ &= \bar{1}_\varphi \frac{\dot{N}}{4\pi} \sin\theta \frac{(1 + ikr)}{r^2} e^{-ikr}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Электрическое поле определяется через векторный потенциал соотношением (1.43), в котором 1-е слагаемое выражает потенциальную  $\dot{\vec{E}}^n$ , а 2-е – индуцированную  $\dot{\vec{E}}^n$  составляющие полного поля. Как отмечалось выше, при комплексном представлении гармонического поля можно обойтись без скалярного потенциала и определить векторы поля только через векторный потенциал. Тем не менее, для полноты описания поля определим, используя условие калибровки Лоренца, скалярный потенциал  $\dot{\phi}$ , а затем потенциальную составляющую  $\dot{\vec{E}}^n$  электрического поля:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= i(\omega\varepsilon_a\mu_a)^{-1} \cdot \text{div } \dot{\vec{A}} = i(\omega\varepsilon_a\mu_a)^{-1} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \dot{A}_r) + \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \cdot \dot{A}_\theta) \right] = \\ &= -i \frac{\dot{N}}{4\pi\omega\varepsilon_a} \cdot \cos\theta \cdot \frac{(1 + ikr)}{r^2} e^{-ikr}; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}^n &= -\text{grad } \dot{\phi} = \bar{1}_r \dot{E}_r^n + \bar{1}_\theta \dot{E}_\theta^n; \\ \left. \begin{aligned} \dot{E}_r^n &= -\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r} = -i \frac{\dot{N}}{4\pi\omega\varepsilon_a} \cdot \cos\theta \cdot \frac{(2 + 2ikr - k^2r^2)}{r^3} e^{-ikr}; \\ \dot{E}_\theta^n &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta} = -i \frac{\dot{N}}{4\pi\omega\varepsilon_a} \cdot \sin\theta \cdot \frac{(1 + ikr)}{r^3} e^{-ikr}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8) \end{aligned}$$

Индуцированное электрическое поле  $\dot{\vec{E}}^n$ , согласно (1.43), отличается от  $\dot{\vec{A}}$  только множителем  $-i\omega$ . Учтя соотношение  $\bar{1}_z = \bar{1}_r \cdot \cos\theta - \bar{1}_\theta \cdot \sin\theta$  и равенство  $\omega\mu_a = k^2/(\omega\varepsilon_a)$ , запишем:

$$\dot{\vec{E}}^n = -i\omega\dot{\vec{A}} = -i \frac{\dot{N}k^2}{4\pi\omega\varepsilon_a} (\bar{1}_r \cdot \cos\theta - \bar{1}_\theta \cdot \sin\theta) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2.9)$$

Для полного электрического поля получим:

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}^n + \dot{\vec{E}}^n = \bar{1}_r \dot{E}_r + \bar{1}_\theta \dot{E}_\theta;$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_r &= -i \frac{\dot{N}}{4\pi\omega\varepsilon_a} 2\cos\theta \cdot \frac{(1+ikr)}{r^3} e^{-ikr}; \\ \dot{E}_\theta &= -i \frac{\dot{N}}{4\pi\omega\varepsilon_a} \sin\theta \cdot \frac{(1+ikr - k^2r^2)}{r^3} e^{-ikr}. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Из представленных соотношений следует, что радиальное индуцированное поле  $\dot{E}_r^{\text{н}}$  и последнее слагаемое радиального потенциального поля  $\dot{E}_r^{\text{п}}$ , медленно спадающие с расстоянием ( $\sim 1/r$ ), равны по величине и противоположны по знаку, т.е. взаимно компенсируются. При этом радиальная составляющая полного поля содержит только нескомпенсированную быстропадающую ( $r^{-3} + ikr^{-2}$ ) часть радиального потенциального поля. Вследствие частичной взаимной компенсации потенциальной и индуцированной составляющих электрического поля затруднительно выделить в произвольной точке пространства порознь эти составляющие в полном их виде.

Нетрудно убедиться, что соотношения (2.10) для полного электрического поля можно получить с помощью первого уравнения Максвелла, подставив в него выражение (2.6) для магнитного поля:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} &= \frac{1}{i\omega\varepsilon_a} \text{rot} \dot{\vec{H}} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_a} \left[ \bar{1}_r \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \cdot \dot{H}_\varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \bar{1}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \dot{H}_\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Выполнив дифференцирование, получим (2.10). Но поскольку потенциальное поле является безвихревым ( $\text{rot} \dot{\vec{E}}^{\text{п}} = 0$ ), 2-е уравнение Максвелла связывает магнитное поле только с индуцированной составляющей электрического поля:

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{-i\omega\mu_a} \text{rot} \dot{\vec{E}} = \frac{1}{-i\omega\mu_a} \text{rot} \dot{\vec{E}}^{\text{н}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \dot{\vec{A}}.$$

Согласно полученным соотношениям (2.2) для  $\dot{\vec{A}}$ , (2.6) для  $\dot{\vec{H}}$  и (2.10) для  $\dot{\vec{E}}$  при  $r \rightarrow 0$  поле ЭЭИ обращается в бесконечность, т.е. принимает физически нереализуемые значения, поскольку для созда-

ния такого поля требуется источник с бесконечной энергией. Однако в соответствии с условием  $r \gg l$ , определяющим диполь (точнее, область дипольного проявления системы зарядов) и принятым при обосновании соотношения (2.2) для  $\dot{\vec{A}}$ , область расстояний  $r$ , сравнимых с  $l$ , исключается из исследуемой области. Можно считать, что исследуемая область, в которой справедливы полученные соотношения для поля ЭЭИ, ограничена условием  $r \geq r_0$ , где  $r_0$  – радиус внутренней границы этой области, в несколько раз превышающий  $l$ . Приняв, например,  $r_0 = 4l$ , получим для относительной разности хода лучей от разных точек ЭЭИ:  $\Delta R/r \leq l/(2r) \leq l/(2r_0) = 0,125$ .

Поскольку точки расположения зарядов исключены из исследуемой области, в любой точке этой области  $\text{div} \dot{\vec{E}} = 0$ . Это согласуется со следующими соображениями. Скалярный потенциал в исследуемой области ввиду отсутствия в ней зарядов удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0.$$

Учитывая это и определение потенциального поля, получим:

$$\text{div} \dot{\vec{E}}^n = -\text{div} \text{grad} \phi = -\Delta \phi = k^2 \phi.$$

Для индуцированного поля согласно его определению и условию калибровки Лоренца имеем:

$$\text{div} \dot{\vec{E}}^i = -i\omega \cdot \text{div} \dot{\vec{A}} = -k^2 \phi.$$

Следовательно

$$\text{div} \dot{\vec{E}} = \text{div} (\dot{\vec{E}}^n + \dot{\vec{E}}^i) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что магнитное поле, определяемое по (2.6), удовлетворяет 4-му уравнению Максвелла для однородной среды:  $\text{div} \dot{\vec{H}} = 0$ .

Таким образом, в произвольной точке исследуемой области ( $r > r_0$ ) электрическое и магнитное поля ЭЭИ являются **соленоидальными** ( $\text{div} \dot{\vec{E}} = 0, \text{div} \dot{\vec{H}} = 0$ ) **вихревыми** ( $\text{rot} \dot{\vec{E}} \neq 0, \text{rot} \dot{\vec{H}} \neq 0$ ) полями.



### 2.3. Поле элементарного электрического излучателя в ближней зоне

При определении поля элементарного излучателя в ближней зоне полагают  $1 \gg kr \gg (kr)^2$ . Это позволяет в общих выражениях поля ЭЭИ (2.6), (2.10) пренебречь слагаемыми  $kr$  и  $(kr)^2$  по сравнению с единицей, а также изменением фазы поля с расстоянием или волновым запаздыванием поля, т.е. считать  $e^{-ikr} \approx 1$ . Вводя эти упрощения в общие выражения (2.7) для скалярного потенциала  $\phi$ , (2.8) для потенциальной составляющей  $\dot{E}_r^{\text{п}}$  и (2.9) для индуцированной составляющей  $\dot{E}_\theta^{\text{и}}$  электрического поля, получим для ближней зоны:

$$\phi = -i \frac{\dot{N}}{4\pi\omega\epsilon_a} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2}; \quad (2.11)$$

$$\dot{E}_r^{\text{п}} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -i \frac{\dot{N}}{4\pi\omega\epsilon_a} \cdot \frac{2\cos\theta}{r^3};$$

$$\dot{E}_\theta^{\text{п}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -i \frac{\dot{N}}{4\pi\omega\epsilon_a} \cdot \frac{\sin\theta}{r^3};$$

$$\dot{E}^{\text{и}} = -i \frac{\dot{N}}{4\pi\omega\epsilon_a} \cdot \frac{k^2}{r} (\bar{1}_r \cdot \cos\theta - \bar{1}_\theta \cdot \sin\theta).$$

Как видим, для ближней зоны справедливо соотношение:

$$\frac{|\dot{E}^{\text{и}}|}{|\dot{E}^{\text{п}}|} = \sqrt{\frac{|\dot{E}_r^{\text{п}}|^2 + |\dot{E}_\theta^{\text{п}}|^2}{|\dot{E}_r^{\text{и}}|^2 + |\dot{E}_\theta^{\text{и}}|^2}} = \frac{(kr)^2}{\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}} \leq (kr)^2 \ll 1,$$

что позволяет пренебречь индуцированной составляющей и представить электрическое поле в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}} &\approx \dot{\vec{E}}^n = -grad \dot{\varphi} = -i \frac{\dot{N}}{4\pi\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{1}{r^3} (\bar{1}_r 2\cos\theta + \bar{1}_\theta \sin\theta) = \\ &= -iE_0(r)(\bar{1}_r 2\cos\theta + \bar{1}_\theta \sin\theta)e^{i\omega t} = -i\vec{E}^{ct} e^{i\omega t};\end{aligned}\quad (2.12)$$

где

$$E_0(r) = \left| \dot{\vec{E}} \right|_{|\theta=\pi/2} = \frac{N_m}{4\pi\omega\varepsilon_a r^3} = \frac{p_m}{4\pi\varepsilon_a r^3};$$

$\vec{E}^{ct}$  – поле электростатического диполя с дипольным моментом  $p_m \bar{1}_z$ . Амплитуда электрического поля в произвольной точке ближней зоны:

$$E_m = \left| \dot{\vec{E}} \right| = \left| \vec{E}^{ct} \right| = \sqrt{|\dot{E}_r|^2 + |\dot{E}_\theta|^2} = E_0(r) \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}.$$

Магнитное поле, определяемое в общем случае по (2.6), для ближней зоны с учетом принятых приближений запишется в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}} &= \bar{1}_\varphi \dot{H}_\varphi = \bar{1}_\varphi \frac{\dot{N}}{4\pi} \cdot \frac{\sin\theta}{r^2} = \\ &= \bar{1}_\varphi H_0(r) \cdot \sin\theta e^{i\omega t} = \vec{H}^{ct} \cdot e^{i\omega t};\end{aligned}\quad (2.13)$$

$$H_0(r) = \left| \dot{\vec{H}} \right|_{|\theta=\pi/2} = \frac{N_m}{4\pi r^2} = \frac{I_m l}{4\pi r^2},$$

где  $\vec{H}^{ct}$  – стационарное магнитное поле короткого прямолинейного проводника длиной  $l$  с постоянным током, равным  $I_m$  и направленным по оси  $z$ .

При обосновании соотношений (2.12), (2.13) для поля ближней зоны мы пренебрегли волновым запаздыванием в пределах этой зоны, т.е. приняли *условие квазистационарности*:

$$\Delta\psi = \omega\Delta t = \omega r/v = kr = 2\pi r/\lambda \rightarrow 0.$$

К такому же результату приводит любой из следующих предельных переходов:

$$v \rightarrow \infty ; k \rightarrow 0 ,$$

каждый из которых можно рассматривать как условие перехода от динамического процесса к квазистационарному. Действительно, выражения (2.11) для  $\dot{\phi}$ , (2.12) для  $\dot{\vec{E}}$  и (2.13) для  $\dot{\vec{H}}$  в ближней зоне можно получить из общих выражений (2.7), (2.10) и (2.6) соответственно, полагая в последних  $k \rightarrow 0$ .

Поскольку заряды исключены из исследуемой области ( $\rho^e = 0$  при  $r > r_0$ ), а поле ближней зоны является квазистационарным, что эквивалентно условию  $k \rightarrow 0$ , неоднородное уравнение Гельмгольца для скалярного потенциала  $\dot{\phi}$  сводится к уравнению Лапласа:

$$\Delta \dot{\phi} = 0.$$

В этом нетрудно убедиться вычислением оператора Лапласа от функции (2.11).

Мгновенные значения физического поля ближней зоны:

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}(t) &= Re(\dot{\vec{E}}) = \bar{E}^{ct} \cdot \sin \omega t ; \\ \bar{H}(t) &= Re(\dot{\vec{H}}) = \bar{H}^{ct} \cdot \cos \omega t . \end{aligned} \right\}$$

Как и для всякого квазистационарного процесса, для поля ближней зоны характерна следующая особенность: в любой точке ближней зоны временная зависимость каждого из векторов поля описывается одной и той же функцией. Для магнитного поля ближней зоны эта функция совпадает с временной зависимостью тока излучателя ( $\cos \omega t$ ), а для электрического – с временной зависимостью заряда и дипольного момента ( $\sin \omega t$ ).

Нетрудно убедиться, что вектор  $\dot{\vec{H}}$ , определяемый по (2.13), удовлетворяет 4-му уравнению Максвелла для однородной среды:

$$div \dot{\vec{H}} = div (\bar{1}_\varphi \dot{H}_\varphi) = \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

Вычисление ротора вектора  $\dot{\vec{H}}$ , определяемого по (2.13), и подстановка найденной величины в 1-е уравнение Максвелла приводит к полученному выше выражению (2.12) для вектора  $\dot{\vec{E}}$ :

$$\dot{\vec{E}} = (i\omega\varepsilon_a)^{-1} \cdot \text{rot } \dot{\vec{H}} \neq 0.$$

Таким образом, магнитное поле ближней зоны является **соленоидальным** ( $\text{div } \dot{\vec{H}} = 0$ ) **вихревым** ( $\text{rot } \dot{\vec{H}} \neq 0$ ) полем.

Электрическое поле ближней зоны, определяемое по (2.12), удовлетворяет соотношениям:

$$\text{div } \dot{\vec{E}} = \text{div } \dot{\vec{E}}^n = -\text{div}(\text{grad } \dot{\varphi}) = -\Delta \dot{\varphi} = 0;$$

$$\text{rot } \dot{\vec{E}} = \text{rot } \dot{\vec{E}}^n = -\text{rot}(\text{grad } \dot{\varphi}) = 0;$$

$$\Delta \dot{\vec{E}} = \Delta \dot{\vec{E}}^n = \text{grad} \left( \text{div } \dot{\vec{E}}^n \right) - \text{rot} \left( \text{rot } \dot{\vec{E}}^n \right) = 0.$$

Таким образом, электрическое поле ближней зоны является **потенциально-соленоидальным** ( $\text{rot } \dot{\vec{E}} = 0, \text{div } \dot{\vec{E}} = 0$ ). Такое поле называют также **лапласовым**, поскольку и скалярный потенциал  $\dot{\varphi}$  и вектор  $\dot{\vec{E}}$  удовлетворяют уравнению Лапласа.

Векторные линии магнитного поля в ближней зоне  $\vec{H} = \vec{1}_\varphi H_\varphi$  совпадают с координатными линиями  $\varphi$ , т.е. являются охватывающими ось  $z$  окружностями  $\rho = r \sin\theta = \text{const}$ , плотность которых уменьшается с увеличением расстояния  $r$  и отклонением угла  $\theta$  от значения  $\pi/2$ .

Электрическое поле имеет составляющие  $E_r$  и  $E_\theta$ . Учитывая, что дифференциал длины по координате  $\theta$  есть  $dl_\theta = r d\theta$ , запишем дифференциальное уравнение векторных линий поля  $\vec{E}$ :

$$dr/E_r = rd\theta/E_\theta.$$

После подстановки  $E_r$  и  $E_\theta$  и разделения переменных это уравнение приводится к виду:

$$dr/r = 2ctg\theta d\theta .$$

Интегрирование обеих частей этого соотношения дает алгебраическое уравнение векторных линий:

$$\ln r = \ln(\sin^2\theta) + \ln C \quad \text{или} \quad r = C \sin^2\theta; \quad (2.14)$$

где  $C = \text{const}$  – постоянная интегрирования. На рис. 2.5 представлены векторные линии вектора  $\vec{E}$  в полярных координатах  $r - \theta$ , построенные по уравнению (2.14) для трех значений  $C$ .

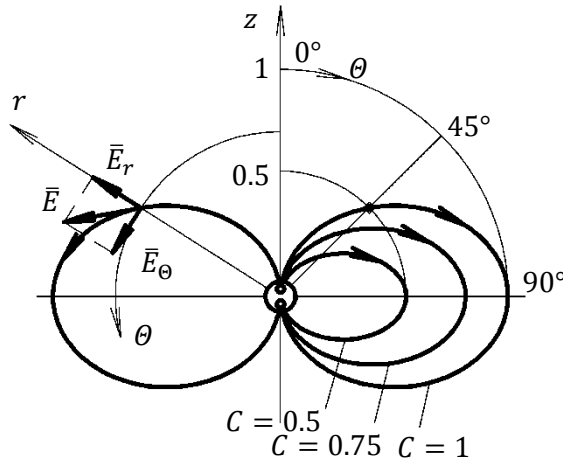


Рис. 2.5 – Структура электрического поля ЭЭИ в ближней зоне

## 2.4.\* Энергетические характеристики поля элементарного электрического излучателя в ближней зоне

Поскольку электрическое (2.12) и магнитное (2.13) поля ближней зоны сдвинуты по фазе на  $\pm\pi/2$ , образуемый ими комплексный вектор Пойнтинга  $\vec{\Pi}$  не содержит активной (инд. «A») составляющей, а имеет только реактивную (инд. «R»):

$$\dot{\bar{\Pi}} = 0,5 \left[ \dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^* \right] = -i 0,5 \left[ \bar{E}^{\text{CT}} \bar{H}^{\text{CT}} \right] = i \bar{\Pi}_R ;$$

$$\bar{\Pi}_A = \bar{\Pi}_{\text{cp}} = \text{Re} \dot{\bar{\Pi}} = 0 ;$$

$$\bar{\Pi}_R = \text{Im} \dot{\bar{\Pi}} = -0,5 \left[ \bar{E}^{\text{CT}} \bar{H}^{\text{CT}} \right] = -\Pi_0(r) (\bar{1}_r \sin^2 \theta - \bar{1}_\theta \sin 2\theta) ;$$

$$\Pi_0(r) = \left| \dot{\bar{\Pi}} \right|_{\theta=\pi/2} = 0,5 E_0(r) H_0(r) = \frac{0,5}{\omega \varepsilon_a} \left( \frac{N_m}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{r^5} .$$

Поля, в которых электрический и магнитный векторы сдвинуты по фазе на  $\pm\pi/2$  (или, как говорят, колеблются в квадратуре) и вследствие этого комплексный вектор Пойнтинга является чисто реактивным, называются **реактивными** полями, каковым и является поле ближней зоны.

Дивергенция комплексного вектора Пойнтинга выразится соотношением:

$$\text{div} \dot{\bar{\Pi}} = i \text{div} \bar{\Pi}_R = i \frac{0,5}{\omega \varepsilon_a} \left( \frac{N_m}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta) .$$

Мгновенное значение физического вектора Пойнтинга имеет нулевое среднее значение, т.е. содержит только колеблющуюся составляющую (инд. « $\sim$ »):

$$\bar{\Pi}(t) = \left[ \bar{E}(t) \bar{H}(t) \right] = \bar{\Pi}_{\sim}(t) = 0,5 \left[ \bar{E}^{\text{CT}} \bar{H}^{\text{CT}} \right] \sin(2\omega t) = -\bar{\Pi}_R \sin(2\omega t) .$$

В соответствии с вышеизложенным исключим из рассмотрения точку  $r = 0$ , введя условную внутреннюю границу ближней зоны в виде охватывающей излучатель и прилегающей к нему сферической поверхности  $S_0 = 4\pi r_0^2$  малого радиуса ( $r_0 \sim l$ ). Положительное значение потока вектора Пойнтинга через эту поверхность соответствует передаче мощности в направлении  $\bar{1}_r$ , т.е. поступлению мощности от источника в ближнюю зону.

Поток комплексного вектора Пойнтинга через поверхность  $S_0$ , т.е. комплексная мощность, поступающая от источника в ближнюю зону:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \oint_{S_0} \dot{\bar{\Pi}}_r dS = i \oint_{S_0} \bar{\Pi}_R \bar{\Gamma}_r dS = i P_R = -i \oint_{S_0} \Pi_0(r_0) \sin^2 \theta dS = \\ &= -i \Pi_0(r_0) r_0^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= -i \Pi_0(r_0) r_0^2 8\pi/3 = -i N_m^2 / (12\pi\omega\varepsilon_a r_0^3). \end{aligned}$$

Мгновенная мощность, переносимая ближним полем через поверхность  $S_0$ , т.е. поток мгновенного вектора Пойнтинга через эту поверхность:

$$P(t) = \oint_{S_0} \bar{\Pi}(t) \bar{\Gamma}_r dS = -\sin(2\omega t) \oint_{S_0} \bar{\Pi}_R \bar{\Gamma}_r dS = -P_R \sin(2\omega t).$$

Среднее (за период колебаний) значение удельной энергии (объемной плотности энергии) – электрической  $w_{\text{cp}}^e$  и магнитной  $w_{\text{cp}}^m$ :

$$w_{\text{cp}}^e = \frac{\varepsilon_a}{4} \left| \dot{\bar{E}} \right|^2 = \frac{\varepsilon_a}{4} \left| \bar{E}^{\text{CT}} \right|^2 = w_0^e(r) (1 + 3\cos^2 \theta);$$

$$w_0^e(r) = w_{\text{cp}}^e|_{\theta=\pi/2} = \frac{\varepsilon_a}{4} E_0^2(r) = \left( \frac{N_m}{8\pi} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_a \omega^2 r^6};$$

$$w_{\text{cp}}^m = \frac{\mu_a}{4} \left| \dot{\bar{H}} \right|^2 = \frac{\mu_a}{4} \left| \bar{H}^{\text{CT}} \right|^2 = w_0^m(r) \sin^2 \theta;$$

$$w_0^m(r) = w_{\text{cp}}^m|_{\theta=\pi/2} = \frac{\mu_a}{4} H_0^2(r) = \mu_a \left( \frac{N_m}{8\pi} \right)^2 \frac{1}{r^4} = w_0^e(r) (kr)^2.$$

Мгновенные значения удельных энергий:

$$\omega^e(t) = \frac{\varepsilon_a}{2} \bar{E}^2(t) = \omega_{\text{cp}}^e [1 - \cos(2\omega t)];$$

$$\omega^m(t) = \frac{\mu_a}{2} \bar{H}^2(t) = \omega_{\text{cp}}^m [1 + \cos(2\omega t)].$$

Средние значения интегральных энергий ближнего поля в объеме  $V$ , ограниченном внутренней границей ближней зоны  $S_0 = 4\pi r_0^2$  и сферой предельно большого радиуса ( $r \rightarrow \infty$ ), при котором ближнее поле исчезающе мало:

$$\begin{aligned} W_{\text{cp}}^e &= \int_V \omega_{\text{cp}}^e dV = \int_{r_0}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \omega_{\text{cp}}^e r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \\ &= \left(\frac{N_m}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_a \omega^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^4} \int_0^{\pi} (1 + 3 \cos^2\theta) \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{N_m^2}{24\pi \varepsilon_a \omega^2 r_0^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{cp}}^m &= \int_V \omega_{\text{cp}}^m dV = \mu_a \left(\frac{N_m}{8\pi}\right)^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \mu_a \frac{N_m^2}{24\pi r_0} = W_{\text{cp}}^e \cdot (kr_0)^2. \end{aligned}$$

Мгновенные значения интегральных энергий в том же объеме:

$$W^e(t) = \int_V \omega^e(t) dV = W_{\text{cp}}^e [1 - \cos(2\omega t)];$$

$$W^m(t) = \int_V \omega^m(t) dV = W_{\text{cp}}^m [1 + \cos(2\omega t)].$$

Поскольку для ближней зоны  $(kr)^2 \ll kr \ll 1$ , можно считать справедливыми неравенства:



$$\frac{w_{\text{cp}}^m}{w_{\text{cp}}^e} \leq \left( \frac{w_{\text{cp}}^m}{w_{\text{cp}}^e} \right)_{|\theta=\pi/2} = \frac{w_0^m(r)}{w_0^e(r)} = (kr)^2 \ll 1;$$

$$W_{\text{cp}}^m / W_{\text{cp}}^e = (kr_0)^2 \ll 1;$$

т.е. в полной энергии учитывать только электрическую составляющую:

$$w_{\text{cp}} = w_{\text{cp}}^e + w_{\text{cp}}^m \approx w_{\text{cp}}^e; \quad w(t) \approx w^e(t) = w_{\text{cp}}[1 - \cos(2\omega t)];$$

$$W_{\text{cp}} = W_{\text{cp}}^e + W_{\text{cp}}^m \approx W_{\text{cp}}^e; \quad W(t) \approx W^e(t) = W_{\text{cp}}[1 - \cos(2\omega t)].$$

Допустимость такого приближения подтверждается тем, что при представлении поля ближней зоны в виде (2.12), (2.13) общие энергетические теоремы выполняются, если в полной энергии учитывается только электрическая энергия. Так теорема об удельной комплексной мощности (или локальный энергетический баланс в комплексной форме)

$$\text{div } \dot{\vec{\Pi}} + i 2\omega(w_{\text{cp}}^m - w_{\text{cp}}^e) = 0$$

для вычисленных величин сводится к равенству:

$$\text{div } \dot{\vec{\Pi}} = i 2\omega \cdot w_{\text{cp}}^e.$$

Теорема Пойнтинга о комплексной мощности (или баланс комплексных мощностей) для объема  $V$ , ограниченного сферой  $S_0 = 4\pi r_0^2$ , имеющей орт внешней нормали  $\vec{1}_n = -\vec{1}_r$ , и сферой бесконечного радиуса,

$$\oint_{S_0} \dot{\vec{\Pi}} \vec{1}_n dS + i 2\omega(W_{\text{cp}}^m - W_{\text{cp}}^e) = 0$$

для вычисленных величин сводится к выражению:

$$\dot{P} = i \cdot P_R = \oint_{S_0} \dot{\vec{\Pi}} \vec{1}_r dS = - \oint_{S_0} \dot{\vec{\Pi}} \vec{1}_n dS = -i 2\omega W_{\text{cp}}^e.$$

Теорема Пойнтинга о мгновенной мощности (или баланс мгновенных мощностей) для того же объема

$$\oint_{S_0} \bar{\Pi}(t) \bar{1}_n dS + \frac{dW}{dt} = 0$$

для вычисленных величин сводится к соотношению:

$$P(t) = \oint_{S_0} \bar{\Pi}(t) \bar{1}_r dS = - \oint_{S_0} \bar{\Pi}(t) \bar{1}_n dS = \frac{dW^e}{dt} = 2\omega W_{cp}^e \sin(2\omega t).$$

На рис. 2.6, а представлены нормированные временные зависимости электрического поля  $E(t)/|\dot{E}| = \sin \omega t$ , магнитного поля  $H(t)/|\dot{H}| = \cos \omega t$  и плотности потока мощности (абсолютной величины вектора Пойнтинга)  $\Pi(t)/|\dot{\Pi}| = \sin(2\omega t)$  в ближней зоне ЭЭИ, а на рис. 2.6,б. – нормированные временные зависимости интегральной энергии ближнего поля  $W(t)/W_{cp} = 1 - \cos(2\omega t)$  и мощности, переносимой через внутреннюю границу ближней зоны  $S_0$ ,  $P(t)/|\dot{P}| = \sin(2\omega t)$ . Плотность потока мгновенной мощности  $\Pi(t)$  имеет только колеблющуюся составляющую, которая изменяется по синусоидальному закону с частотой  $2\omega$ , равной удвоенной частоте поля (рис. 2.6, а), что соответствует изменению направления вектора Пойнтинга через каждые четверть периода. По такому же закону изменяется мгновенная мощность  $P(t)$ , проходящая через внутреннюю границу ближней зоны  $S_0$  (рис. 2.6, б). Энергия поля ближней зоны при учете только электрической составляющей изменяется по закону  $W(t) = W^e(t) = W_{cp} [1 - \cos(2\omega t)]$ . В течение четверти периода, соответствующей увеличению энергии, вектор Пойнтинга направлен от источника, а мощность  $P(t)$  имеет положительное значение, т.е. поступает от источника в ближнюю зону; в течение следующей четверти периода, соответствующей уменьшению энергии, вектор Пойнтинга направлен к источнику, а мощность  $P(t)$  имеет отрицательное значение, т.е. движется к источнику.

Поскольку в ближней зоне ЭЭИ преобладает энергия электрического поля, реактивное сопротивление  $X_A$  на эквивалентной схеме рис. 1.11, а, учитывающее влияние реактивного ближнего поля, имеет для ЭЭИ емкостной характер  $X_A = -1/(\omega C_A)$  и может быть заменено эквивалентной емкостью  $C_A$ .

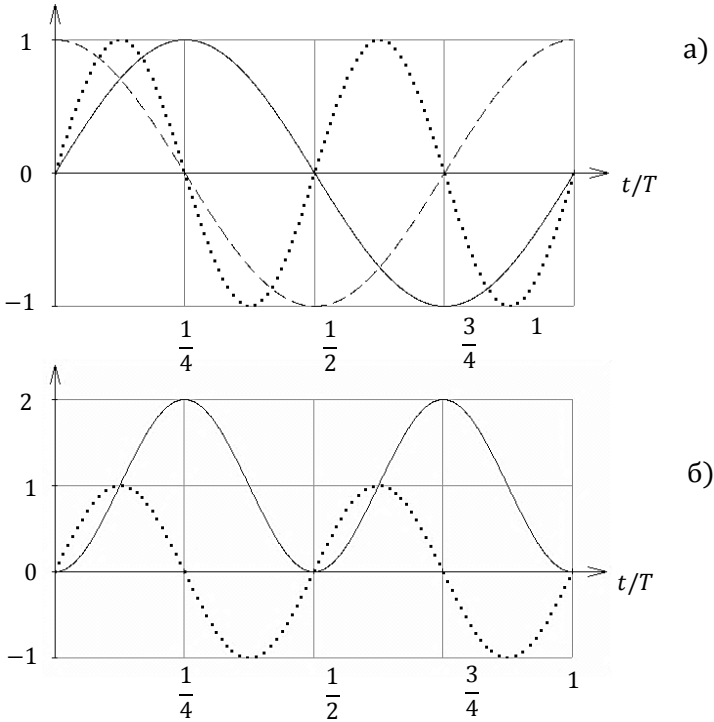


Рис. 2.6 – Нормированные временные зависимости параметров ЭЭИ в ближней зоне: а)  $E(t)/|\dot{E}|$  (—);  $H(t)/|\dot{H}|$  (---);  $\Pi(t)/|\dot{\Pi}|$  (.....); б)  $W(t)/W_{cp}$  (—);  $P(t)/|\dot{P}|$  (.....)

## 2.5. Особенности поля элементарного электрического излучателя в ближней зоне

а) В пределах ближней зоны не проявляется изменение фазы поля с расстоянием, т.е. волновое запаздывание поля ( $e^{-ikr} \approx 1$ ); поле не обладает волновыми свойствами, а имеет *квазистационарный* характер.

б) Электрическое поле содержит только потенциальную составляющую и отличается от поля электростатического диполя только временным множителем ( $\sin \omega t$ ); в любой фиксированный момент времени  $t = \text{const}$  электрическое поле ближней зоны совпадает по структуре с полем электростатического диполя.

в) В любой точке ближней зоны составляющие электрического поля ( $E_r, E_\theta$ ) имеют одинаковую временную зависимость с колебанием дипольного момента и совпадают с ним по фазе.

г) Магнитное поле отличается от стационарного поля короткого прямолинейного отрезка постоянного тока только временным множителем ( $\cos \omega t$ ); в любой фиксированный момент времени  $t = \text{const}$  магнитное поле ближней зоны совпадает по структуре со стационарным полем такого тока.

д) В любой точке ближней зоны магнитное поле имеет одинаковую временную зависимость с током излучателя и совпадает с ним по фазе.

е) Составляющие электрического поля ( $E_r, E_\theta$ ) сдвинуты относительно магнитного поля по фазе на  $\Delta\Psi = \pm\pi/2$  и во времени на четверть периода  $\Delta t = \Delta\Psi/\omega = \pm T/4$ .

ж) В ближней зоне электрическое поле убывает с расстоянием пропорционально  $1/r^3$ , магнитное – пропорционально  $1/r^2$ , а вектор Пойнтинга – пропорционально  $1/r^5$ ; при двукратном увеличении расстояния ( $r_2/r_1 = 2$ ) интенсивность поля ближней зоны уменьшается в  $2^5 = 32$  раза, т.е. на 15 дБ:

$$10 \lg \frac{|\bar{\Pi}(r_1)|}{|\bar{\Pi}(r_2)|} = 10 \lg \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^5 = 10 \lg 32 = 50 \lg 2 = 15 \text{ дБ.}$$

з) В ближней зоне энергия сосредоточена в основном в электрическом поле; превышение электрической средней удельной энергии над магнитной растет с уменьшением расстояния  $r$ , имея наименьшую величину на условной внешней границе ближней зоны  $r_B$ :

$$m = \frac{w_{cp}^e}{w_{cp}^m} \geq \left( \frac{w_{cp}^e}{w_{cp}^m} \right)_{|\theta=\pi/2} = \frac{1}{(kr)^2} \geq \frac{1}{(kr_B)^2};$$

если ограничить ближнюю зону условием  $r \leq r_B = 0,05 \cdot \lambda$ , то  $m \geq 10$ ; если же принять  $r \leq r_B = 0,08 \cdot \lambda$ , то  $m \geq 4$ .

и) Поскольку электрическое и магнитное поля сдвинуты по фазе на  $\pm\pi/2$ , в комплексном векторе Пойнтинга отсутствует активная составляющая и содержится только реактивная, т.е. поле ближней зоны является реактивным. Мгновенный вектор Пойнтинга имеет только колеблющуюся составляющую. Отсутствие активной составляющей комплексного вектора Пойнтинга, т.е. нулевое среднее (за период колебаний) значение мгновенного вектора Пойнтинга, означает отсутствие в среднем за период однонаправленного переноса энергии ближним полем.

## 2.6. Поле элементарного электрического излучателя в дальней зоне

Используя общие выражения (2.6), (2.8) – (2.10) поля ЭЭИ в произвольной точке пространства, запишем поле в дальней зоне. Из определения дальней зоны элементарного излучателя ( $r/\lambda \gg 1$ ) следует:  $(kr)^2 \gg kr \gg 1$ . Пренебрегая малыми членами, определяемыми этим неравенством, получим для потенциальной  $\dot{\vec{E}}^n$  и индуцированной  $\dot{\vec{E}}^и$  составляющих электрического поля в дальней зоне:

$$\dot{E}_r^n = -i \frac{\dot{N}}{4\pi\omega\epsilon_a} \cdot \cos\theta \cdot \frac{(2ikr - k^2r^2)}{r^3} \cdot e^{-ikr};$$

$$\dot{E}_\theta^{\text{п}} = \frac{\dot{N}k}{4\pi\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{\sin\theta}{r^2} \cdot e^{-ikr};$$

$$\dot{E}^{\text{н}} = -i \frac{\dot{N}k^2}{4\pi\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{1}{r} (\bar{1}_r \cdot \cos\theta - \bar{1}_\theta \cdot \sin\theta) e^{-ikr}.$$

При этом

$$|\dot{E}_\theta^{\text{п}}|/|\dot{E}_\theta^{\text{н}}| = 1/(kr) \ll 1,$$

что позволяет в поперечной (угловой) составляющей поля учесть только индуцированную часть  $\dot{E}_\theta \approx \dot{E}_\theta^{\text{н}}$ . Медленно спадающие ( $\sim 1/r$ ) радиальное индуцированное поле и последнее слагаемое радиального потенциального поля взаимно компенсируются, а в полном радиальном поле остается только нескомпенсированная быстропадающая ( $\sim 1/r^2$ ) составляющая потенциального поля. Учитывая это, а также соотношения  $\dot{N} = N_m \cdot e^{i\omega t}$ ,  $k/(\omega\varepsilon_a) = Z_c$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ , представим поле дальней зоны в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_r &= Z_c \frac{N_m}{2\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot \\ \dot{E}_\theta \approx \dot{E}_\theta^{\text{н}} &= iZ_c \frac{N_m}{2\lambda} \cdot \frac{\sin\theta}{r} \cdot \\ \dot{H}_\varphi &= i \frac{N_m}{2\lambda} \cdot \frac{\sin\theta}{r} \cdot \end{aligned} \right\} \cdot e^{i(\omega t - kr)}. \quad (2.15)$$

Вычисление ротора вектора  $\dot{\vec{H}}$  из (2.15) и подстановка найденной величины в 1-е уравнение Максвелла приводит к выражению вектора  $\dot{\vec{E}}$ , содержащему и угловую  $\dot{E}_\theta$  и радиальную  $\dot{E}_r$  составляющие, определяемые по (2.15):

$$(i\omega\varepsilon_a)^{-1} \text{rot}(\bar{1}_\varphi \dot{H}_\varphi) = \bar{1}_r \dot{E}_r + \bar{1}_\theta \dot{E}_\theta.$$

Однако подстановка составляющих вектора  $\dot{\vec{E}}$  из (2.15) во 2-е уравнение Максвелла показывает, что оно связывает магнитное поле  $\dot{\vec{H}}$  из

(2.15) только с угловой (индуцированной) составляющей  $\dot{E}_\theta$  электрического поля:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\bar{1}_\theta \dot{E}_\theta) &= -i\omega\mu_a \dot{H}; \\ \text{rot}\dot{E} &= \text{rot}(\bar{1}_\theta \dot{E}_\theta + \bar{1}_r \dot{E}_r) \neq -i\omega\mu_a \dot{H}. \end{aligned}$$

Таким образом, в рамках приближений, принятых для дальней зоны, магнитное поле  $\dot{H}$  из (2.15) возбуждается полным электрическим полем, содержащим обе составляющие  $\dot{E}_r$  и  $\dot{E}_\theta$ , однако это же магнитное поле  $\dot{H}$  возбуждает только угловую (индуцированную) составляющую электрического поля  $\dot{E}_\theta$ .

Вычислив дивергенцию электрического и магнитного полей, определяемых по (2.15), убеждаемся, что они удовлетворяют 3-му и 4-му уравнениям Максвелла соответственно:

$$\begin{aligned} \text{div}(\bar{1}_r \dot{E}_r) &= -\text{div}(\bar{1}_\theta \dot{E}_\theta); \Rightarrow \text{div}\dot{E} = \text{div}(\bar{1}_r \dot{E}_r + \bar{1}_\theta \dot{E}_\theta) = 0; \\ \text{div}\dot{H} &= \text{div}(\bar{1}_\varphi \dot{H}_\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, и электрическое и магнитное поля дальней зоны являются **соленоидальными** ( $\text{div}\dot{E} = 0, \text{div}\dot{H} = 0$ ) **вихревыми** ( $\text{rot}\dot{E} \neq 0, \text{rot}\dot{H} \neq 0$ ) полями.

Комплексный вектор Пойнтинга поля (2.15) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} &= 0.5[\dot{E}, \dot{H}^*] = 0.5(\bar{1}_r \cdot \dot{E}_\theta \cdot \dot{H}_\varphi^* - \bar{1}_\theta \cdot \dot{E}_r \cdot \dot{H}_\varphi^*) = \\ &= \frac{Z_c}{2} \cdot \left( \frac{N_m}{2\lambda} \cdot \frac{\sin\theta}{r} \right)^2 (\bar{1}_r + i \cdot \bar{1}_\theta / \sigma) = \bar{\Pi}_A + i \cdot \bar{\Pi}_R. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь  $\bar{\Pi}_A, \bar{\Pi}_R$  – активная и реактивная составляющие вектора  $\dot{\Pi}$  соответственно:

$$\bar{\Pi}_A = \text{Re}(\dot{\Pi}) = \bar{1}_r \cdot \Pi_A; \quad \Pi_A = \frac{Z_c}{2} \cdot \left( \frac{N_m}{2\lambda} \cdot \frac{\sin\theta}{r} \right)^2; \quad (2.17)$$

$$\bar{\Pi}_R = \text{Im}(\dot{\bar{\Pi}}) = \bar{1}_\theta \cdot \Pi_R; \quad \Pi_R = \frac{\Pi_A}{\sigma},$$

где  $\sigma$  – введенное выше превышение активной составляющей вектора  $\dot{\bar{\Pi}}$  над реактивной, определяемое для дальней зоны ЭЭИ соотношением:

$$\sigma = |\bar{\Pi}_A|/|\bar{\Pi}_R| = |\dot{E}_\theta|/|\dot{E}_r| = 0.5 \cdot kr \cdot \text{tg } \theta. \quad (2.18)$$

Согласно последнему соотношению в дальней зоне  $\sigma < 1$  только в узкой области вокруг оси  $z$  и  $\sigma > 1$  в широком диапазоне углов  $\theta$ , который возрастает с ростом  $r$ .

Мгновенные значения составляющих физического поля и радиальной составляющей вектора Пойнтинга в дальней зоне определяются выражениями:

$$E_r(t) = \text{Re}(\dot{E}_r) = |\dot{E}_r| \cos(\omega t - kr);$$

$$E_\theta(t) = \text{Re}(\dot{E}_\theta) = -|\dot{E}_\theta| \sin(\omega t - kr);$$

$$H_\varphi(t) = \text{Re}(\dot{H}_\varphi) = -|\dot{H}_\varphi| \sin(\omega t - kr);$$

$$\Pi_r(t) = E_\theta(t)H_\varphi(t) = \Pi_A[1 - \cos 2(\omega t - kr)].$$

На рис. 2.7 представлены нормированные временные зависимости этих величин при  $kr = 2\pi \cdot m$  ( $m \gg 1$  – дальняя зона).

Активную область дальней зоны ЭЭИ определим соотношением:

$$\sigma \geq \sigma_{\text{гр}} \gg 1 \quad \text{или} \quad \text{tg } \theta \geq \text{tg } \theta_{\text{гр}} = 2\sigma_{\text{гр}}/(kr), \quad (2.19)$$

где  $\sigma_{\text{гр}}$  – граничное значение параметра  $\sigma$ , которое примем равным  $\sigma_{\text{гр}} = 10$ . Определим, какую часть поверхности сферы  $S_{\text{сф}} = 4\pi r^2$ , окружающей излучатель, составляет поверхность активной области  $S_A$ :

$$\begin{aligned} S_A &= \int_{\theta_{\text{гр}}}^{\pi - \theta_{\text{гр}}} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = 4\pi r^2 \int_{\theta_{\text{гр}}}^{\pi/2} \sin \theta \cdot d\theta = \\ &= S_{\text{сф}} \cdot \cos \theta_{\text{гр}} = S_{\text{сф}} / \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta_{\text{гр}}} = S_{\text{сф}} / \sqrt{1 + (2\sigma_{\text{гр}})^2 / (kr)^2}. \end{aligned}$$



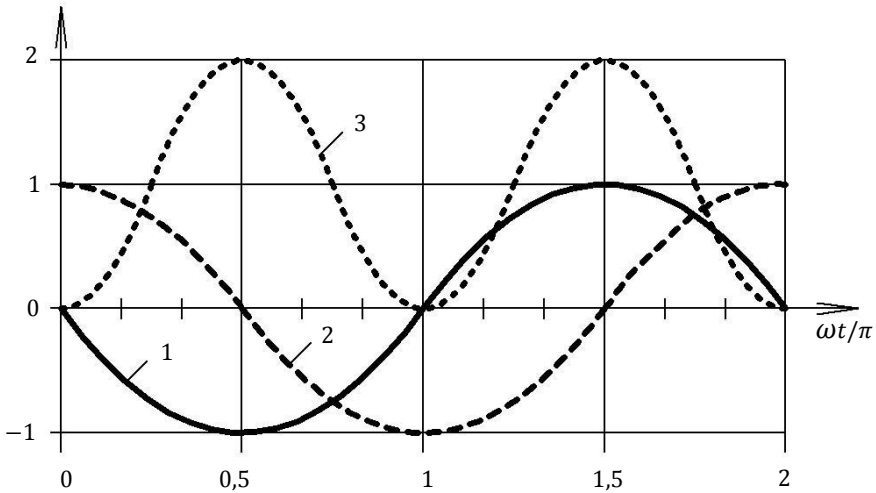


Рис. 2.7 – Временные зависимости составляющих физического поля  $E_{\theta}(t)/|\dot{E}_{\theta}| = H_{\varphi}(t)/|\dot{H}_{\varphi}| - 1$  ( ————— ),  $E_r(t)/|\dot{E}_r| - 2$  ( - - - - ) и радиальной с оставляющей вектора Пойнтинга  $\Pi_r(t)/|\Pi_A| - 3$  ( ······ ) в дальней зоне ЭЭИ

На рис. 2.8 построены в полярных координатах линии фиксированного отношения активной и реактивной составляющих вектора  $\vec{\Pi}$  в дальней зоне ЭЭИ  $\sigma = |\bar{\Pi}_A|/|\bar{\Pi}_R| = \text{const}$ , определяемые уравнением  $kr = 2\sigma/\text{tg } \theta$ , для  $\sigma = 1$  и  $\sigma = 10$ . На рис. 2.9 представлены зависимости от  $r/\lambda$  граничного угла активной области дальней зоны  $\theta_{\text{гр}} = \text{arctg}[2\sigma_{\text{гр}}/(kr)]$  и отношения площади активной области к площади поверхности сферы  $S_A/S_{\text{сф}}$  при  $\sigma_{\text{гр}} = 10$ . При  $\sigma_{\text{гр}} = 10$  получим:

$$\theta_{\text{гр}} = 45^\circ; \quad S_A/S_{\text{сф}} = 0.7 \quad \text{при} \quad r/\lambda = 3.2 \quad (kr \approx 20);$$

$$\theta_{\text{гр}} \leq 17.7^\circ; \quad S_A/S_{\text{сф}} \geq 0.95 \quad \text{при} \quad r/\lambda \geq 10 \quad (kr \geq 63).$$

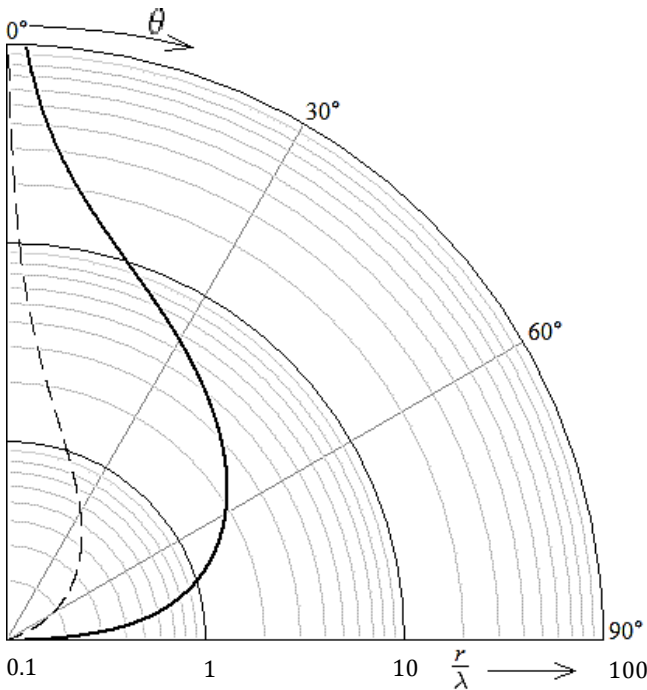


Рис. 2.8 – Представление в полярных координатах линии фиксированного отношения активной и реактивной составляющих вектора  $\dot{\vec{P}}$  в дальней зоне ЭЭИ  $\sigma = |\dot{P}_A|/|\dot{P}_R| = \text{const}$ :  $kr = 2\sigma/\text{tg}\theta$   $\sigma = 10$  (—);  $\sigma = 1$  (---)

Для полноты описания поля в дальней зоне (в частности, для построения структуры поля) следует наряду с поперечными составляющими  $E_\theta$ ,  $H_\varphi$  учитывать и радиальную составляющую  $E_r$ . В дальней зоне, где нет электрических зарядов, согласно третьему уравнению Максвелла ( $\text{div } \dot{\vec{E}} = 0$ ) электрическое поле соленоидально, т. е. его векторные линии должны быть замкнуты, а это выполняется для поля (2.15) только при  $E_r \neq 0$ . Векторные линии поля  $\vec{E}$ , имея в области  $\theta_{\text{гр}} < \theta < \pi - \theta_{\text{гр}}$  в основном составляющую  $E_\theta$ , в областях, прилегающих к оси диполя, замыкаются через составляющую  $E_r$ .

Однако, как отмечалось выше, при определении характеристик излучения и, в частности, энергетических характеристик рассматривают лишь активную область дальней зоны, т. е. учитывают только поперечные составляющие поля  $E_\theta$ ,  $H_\varphi$ , а радиальной составляющей  $E_r$  пренебрегают.

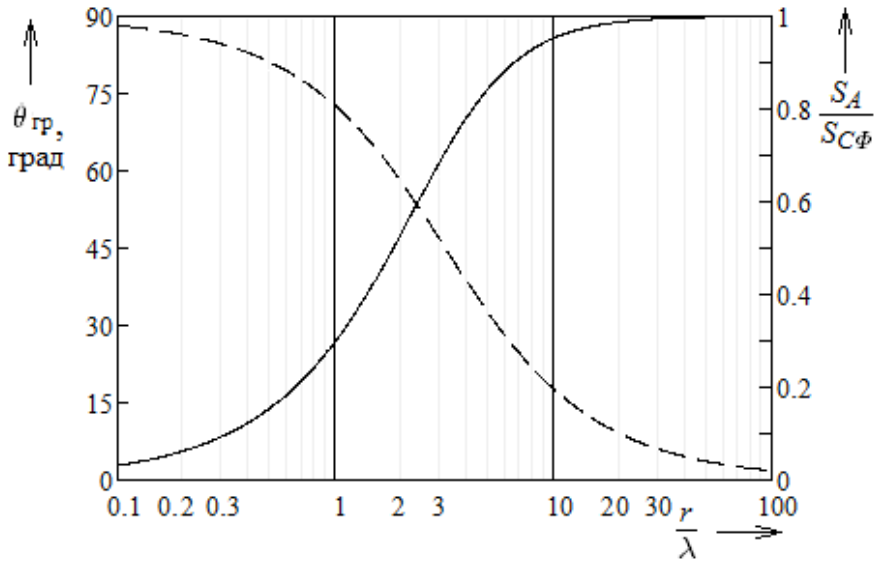


Рис. 2.9 – Зависимости от  $r/\lambda$  граничного угла активной области дальней зоны  $\theta_{гр} = \arctg[2\sigma_{гр}/(kr)]$  (---) и отношения площади активной области к площади поверхности сферы  $S_A/S_{сф}$  (—) при  $\sigma_{гр} = 10$

На рис. 2.10 представлена структура поля ЭЭИ в дальней зоне в меридиональной ( $\varphi = \text{const}$ , рис. 2.10, а) и экваториальной ( $\theta = \pi/2$ , рис. 2.10, б) плоскостях.

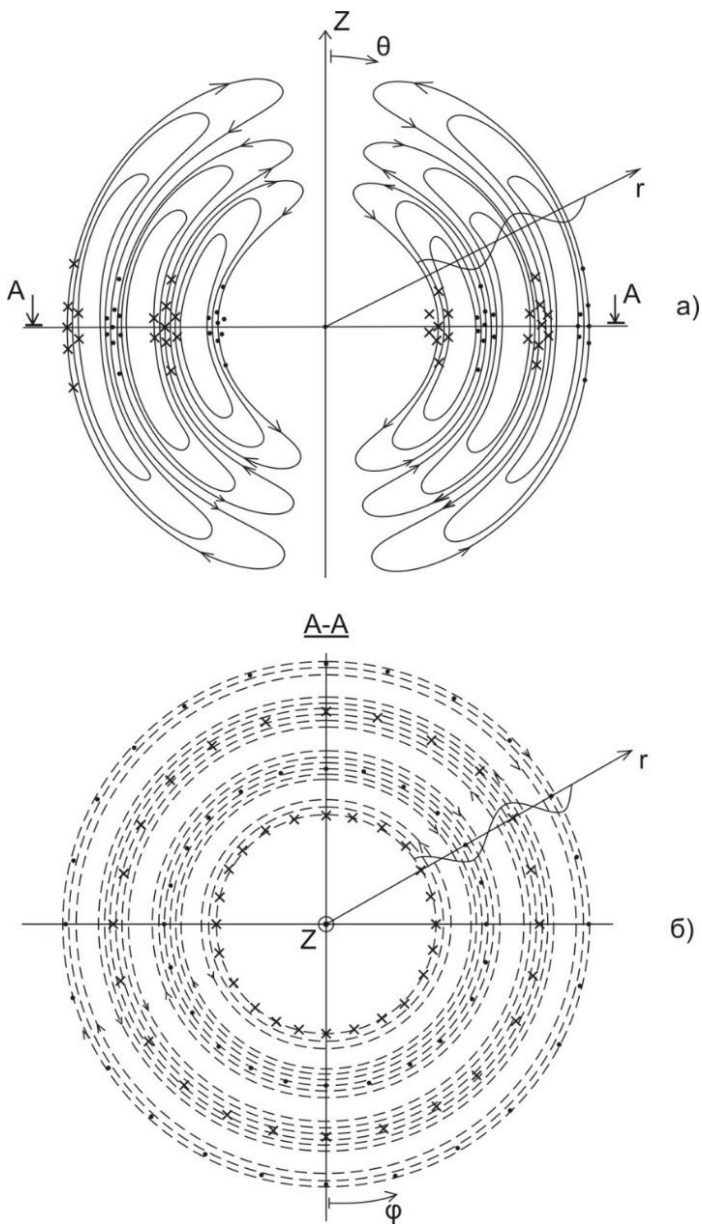


Рис. 2.10 – Структура поля элементарного электрического излучателя в дальней зоне: а) в меридиональной плоскости ( $\varphi = \text{const}$ ); б) в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ )

## 2.7. Особенности поля элементарного электрического излучателя в дальней зоне

а) Фаза поля дальней зоны  $\psi = \omega t - kr$  при  $t = \text{const}$  постоянна на поверхности сферы  $r = \text{const}$  и уменьшается с ростом  $r$ , что соответствует запаздыванию поля в более удаленных от излучателя точках. Это означает, что поверхностью равных фаз является сфера, радиус которой увеличивается с течением времени  $r = (\omega t - \psi)/k$ , т.е. поле имеет характер сферической волны, бегущей от источника, или *расходящейся сферической волны*.

б) Амплитуда поля на поверхности равных фаз  $r = \text{const}$  зависит от полярной координаты  $\theta$ , следовательно, поле имеет характер *неоднородной* сферической волны.

в) От азимутальной координаты  $\varphi$  поле не зависит, т. е. имеет одинаковое распределение в любой плоскости  $\varphi = \text{const}$ , проходящей через ось излучателя (в меридиональной плоскости), что является следствием осевой симметрии самого излучателя, для которого направления, различающиеся только углами  $\varphi$ , равноправны.

г) Поле дальней зоны представляет собой волну **типа E (ТМ)** относительно направления распространения  $r$ , поскольку, наряду с поперечными (угловыми) составляющими  $E_\theta$ ,  $H_\varphi$ , содержит продольную электрическую составляющую  $E_r$ , наличие которой следует из условия соленоидальности электрического поля дальней зоны ( $\text{div } \vec{E} = 0$ ), т.е. непрерывности его векторных линий. Составляющая  $E_r$  уменьшается с расстоянием пропорционально  $1/r^2$  и сдвинута по фазе на  $\pm\pi/2$  относительно поперечных составляющих  $E_\theta$ ,  $H_\varphi$ .

д) Поперечные составляющие поля  $E_\theta$ ,  $H_\varphi$  синфазны, уменьшаются с расстоянием пропорционально  $1/r$  (т.е. медленнее, чем  $E_r \sim 1/r^2$ ); их комплексная радиально-временная зависимость совпадает с комплексной волновой функцией элементарной сферической волны  $e^{i(\omega t - kr)}/r$ ; образуемая ими радиальная составляющая комплексного вектора Пойнтинга активна  $\dot{\vec{P}}_r = 0.5[\dot{\vec{E}}_\perp, \dot{\vec{H}}_\perp^*] = \bar{1}_r \cdot 0.5 \cdot \dot{E}_\theta \cdot \dot{H}_\varphi^* = \bar{1}_r \cdot P_A$ .

е) Активная область дальней зоны, в которой превышение активной составляющей вектора  $\vec{P}$  над реактивной и поперечной составляющей вектора  $\vec{E}$  над радиальной  $\sigma = |\vec{P}_A|/|\vec{P}_R| = |\dot{E}_\theta|/|\dot{E}_r|$  больше граничного значения  $\sigma \geq \sigma_{гр} \gg 1$  (например,  $\sigma_{гр} = 10$ ), ограничена углами  $\theta_{гр} \leq \theta \leq \pi - \theta_{гр}$ , где  $\theta_{гр} = \arctg \{2\sigma_{гр}/(kr)\}$ . Угловой диапазон активной области  $\Delta\theta = \pi - 2\theta_{гр}$  и отношение поверхности активной области к полной поверхности сферы  $S_A/S_{сф} = \cos \theta_{гр}$  увеличиваются с ростом  $r$ . При  $r/\lambda \geq 10$ :  $\theta_{гр} \leq 18^\circ$ ;  $\Delta\theta \geq 144^\circ$ ;  $S_A/S_{сф} \geq 0.95$ .

ж) Направленность действия ЭЭИ выражается зависимостью поперечных составляющих поля от угла  $\theta$  по закону  $\sin \theta$ , а интенсивности излучения – по закону  $\sin^2 \theta$ ; излучение отсутствует в направлении оси излучателя  $z$  ( $\theta = 0, \pi$ ) и максимально в направлении  $\theta_m = \pi/2$  (в экваториальной плоскости).

з) По определению ЭЭИ ( $l \ll \lambda$ ) сторонний ток не изменяется в его пределах ни по амплитуде, ни по фазе и не учитывается фазовая разность хода лучей от разных точек излучателя до точки наблюдения ( $\Delta\psi = k \cdot \Delta r = \cos \theta \cdot \frac{2\pi l}{\lambda} \ll 2\pi$ ), поэтому направленность действия ЭЭИ обусловлена только **направленностью его тока**  $\vec{j} = \vec{1}_z \cdot j$  (а вместе с ним и дипольного момента  $\vec{p} = \vec{1}_z \cdot p$  и момента тока  $\vec{N} = \vec{1}_z \cdot N$ ); угловая зависимость поперечных составляющих поля  $E_\theta, H_\phi$  определяется наличием в их выражениях множителя  $[\vec{N}, \vec{1}_r] = N[\vec{1}_z, \vec{1}_r] \sim N \cdot \sin \theta$ .

и) Амплитуды поперечных составляющих поля  $|\dot{E}_\theta|, |\dot{H}_\phi|$  пропорциональны  $l/\lambda$ , а плотность потока активной мощности –  $(l/\lambda)^2$ ; следовательно, интенсивность излучения тем больше, чем сильнее нарушается условие квазистационарности, но вместе с этим уменьшается и точность расчетных соотношений, которые справедливы только в рамках определения ЭЭИ ( $l/\lambda \ll 1$ ).

## 2.8. Характеристики излучения элементарного электрического излучателя

На основании соотношений (2.15) поле излучения ЭЭИ в активной области дальней зоны можно записать в виде:

$$\dot{E}_\theta = Z_c \cdot \dot{H}_\varphi = i \cdot E_m(\bar{r}) \cdot e^{i(\omega t - kr)};$$

$$E_m(\bar{r}) = E_m(r, \theta) = |\dot{E}_\theta| = E_{\max}(r) \cdot \sin \theta; \quad (2.20)$$

где  $E_{\max}(r)$  – амплитуда в направлении максимального излучения  $\theta_m = \pi/2$ :

$$E_{\max}(r) = E_m(r, \theta_m) = Z_c \cdot I_m \cdot l / (2\lambda r). \quad (2.21)$$

Используя соотношения (2.20), (2.21), а также определения (1.67)–(1.72) основных характеристик излучения произвольной излучающей системы, запишем выражения этих характеристик для ЭЭИ.

- Амплитудная характеристика направленности (АХН):

$$F(\Omega) = F(\theta) = E_m(r, \theta) / E_{\max}(r) = \sin \theta.$$

- Ширина АХН  $\Delta\theta$  в меридиональной плоскости ( $\varphi = \text{const}$ ):

$$F(\theta_{1,2}) \equiv \sin \theta_{1,2} = 1/\sqrt{2}; \Rightarrow \theta_{1,2} = \pi/4, 3\pi/4;$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \pi/2.$$

- Среднеугловое значение энергетической характеристики направленности:

$$\begin{aligned} \langle F^\vartheta \rangle &= \frac{1}{4 \cdot \pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F^2(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \\ &= 0.5 \int_0^\pi \sin^3 \theta \cdot d\theta = 2/3. \end{aligned}$$

- Интенсивность излучения (плотность потока активной мощности) в произвольном направлении  $\Pi_A(r, \Omega)$  и в направлении максимального излучения  $\Pi_{\max}(r)$ :

$$\begin{aligned}\Pi_A(r, \Omega) &= 0.5 \cdot \dot{E}_\theta \cdot \dot{H}_\varphi^* = 0.5 \cdot |\dot{E}_\theta|^2 / Z_c = \\ &= 0.5 \cdot E_m^2(r, \theta) / Z_c = \Pi_{\max}(r) \cdot F^2(\theta);\end{aligned}$$

$$\Pi_{\max}(r) = \Pi_A(r, \theta_m) = 0.5 \cdot E_{\max}^2(r) / Z_c = \frac{Z_c}{8} \left( \frac{I_m l}{\lambda r} \right)^2.$$

- Активная мощность излучения:

$$P_\Sigma = 4\pi r^2 \cdot \Pi_{\max}(r) \cdot \langle F^3 \rangle = Z_c \cdot (I_m l / \lambda)^2 \cdot \pi / 3.$$

- Коэффициент направленного действия в произвольном направлении  $D(\theta)$  и в направлении максимального излучения  $D_m$ :

$$D(\theta) = D_m \cdot \sin^2 \theta; \quad D_m = D(\theta_m) = 1 / \langle F^3 \rangle = 1.5.$$

- Сопротивление излучения:

$$R_\Sigma = 2P_\Sigma / I_m^2 = Z_c \cdot (l / \lambda)^2 \cdot 2\pi / 3.$$

Согласно последнему соотношению  $R_\Sigma \approx 7.9$  Ом при  $l / \lambda = 0.1$ ;  $R_\Sigma \approx 49.3$  Ом при  $l / \lambda = 0.25$ .

На рис. 2.11 представлены диаграммы направленности ЭЭИ. Поскольку поле ЭЭИ не зависит от  $\varphi$ , диаграмма направленности в экваториальной плоскости ( $\Theta = \pi/2$ )  $F(\varphi)$  в декартовых координатах изображается прямой линией, проходящей на единичном уровне параллельно оси  $\varphi$  (рис. 2.11, а), а в полярных координатах – окружностью единичного радиуса (рис. 2.11, б). Амплитудная  $F(\Theta)$  и энергетическая  $F^3(\Theta) = F^2(\Theta)$  диаграммы направленности в меридиональной



плоскости ( $\varphi = \text{const}$ ) в декартовых координатах изображены на рис. 2.11, в и в полярных координатах – на рис. 2.11, г; диаграмма  $F(\Theta)$  в полярных координатах имеет форму окружности с центром  $\Theta_{\text{ц}} = \pi/2$ ,  $r_{\text{ц}} = 0.5$  и радиусом 0.5. На рис. 2.11.д представлена логарифмическая диаграмма направленности  $F_l(\Theta) = 10 \lg F^3(\Theta) = 20 \lg F(\Theta)$ . Пространственная (трехмерная) амплитудная диаграмма направленности (рис. 2.11, е) имеет форму тора с осью  $z$ , внутренним радиусом  $r_i = 0$  и внешним радиусом  $r_e = 1$ .

В практике находят применение вибраторные антенны, близкие к элементарным, которые удовлетворяют условию квазистационарности ( $l \ll \lambda$ ), но имеют неоднородное распределение амплитуды тока по длине. Одним из таких излучателей является короткий симметричный вибратор без концевых емкостей, показанный на рис. 2.2.д. При  $l_1 \ll \lambda$  распределение амплитуды тока по длине такого вибратора можно аппроксимировать линейной зависимостью:

$$I_m(z) = I_m(0) \cdot (1 - |z|/l_1).$$

Согласно (1.74) действующая длина такого вибратора:

$$\begin{aligned} h_g &= \frac{1}{I_m(0)} \int_{-l_1}^{l_1} I_m(z) \cdot dz = 2 \int_0^{l_1} (1 - z/l_1) \cdot dz = \\ &= 2(l_1 - l_1/2) = l/2. \end{aligned}$$

Для оценки характеристик излучения симметричных линейных вибраторов с длинами  $l \leq 0.2 \cdot \lambda$  можно использовать представленные выше соотношения для ЭЭИ, заменяя в них  $l$  на  $h_g = l/2$  для вибраторов без концевых емкостных элементов.

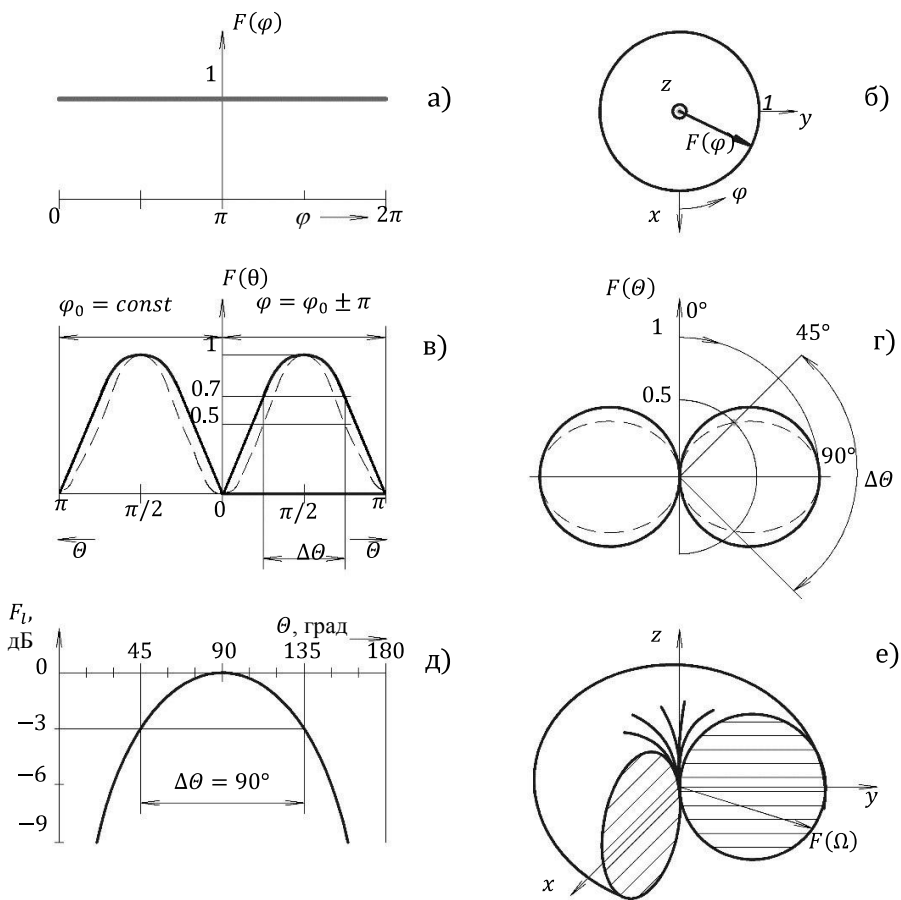


Рис. 2.11 – Диаграммы направленности ЭЭИ: а, б) в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ )  $F(\varphi)$  в декартовых (а) и в полярных (б) координатах; в, г) в меридиональной плоскости ( $\varphi = \text{const}$ )  $F(\theta)$  (—) и  $F^3(\theta)$  (—) в декартовых (в) и в полярных (г) координатах; д) логарифмическая в меридиональной плоскости  $F_l(\theta)$ ; е) пространственная  $F(\Omega) = F(\theta, \varphi)$

## 2.9.\* Трансформация поля элементарного электрического излучателя с расстоянием

Выше рассмотрены по отдельности особенности поля ЭЭИ в предельных случаях – квазистационарного поля, преобладающего в ближней зоне, и волнового поля, преобладающего в дальней зоне. Рассмотрим теперь полное поле, определяемое соотношениями (2.6), (2.10), и проследим, как оно трансформируется с увеличением расстояния  $r$  от излучателя до точки наблюдения. Для удобства сравнения радиальных зависимостей составляющих поля выберем фиксированное направление  $\theta_1 = 63.5^\circ$ , в котором функции угловой зависимости для всех составляющих имеют одинаковое значение:  $\sin\theta_1 = 2 \cdot \cos\theta_1 = 0.895$ . Пронормируем магнитное и электрическое поля по их амплитудам в фиксированной точке с радиус-вектором  $\vec{r}_1(r_1, \theta_1)$ , определяемым координатами  $\theta_1$  и  $r_1 = 0,16 \cdot \lambda$  ( $kr_1 = 1$ ). Амплитуды поля в этой точке:

$$H_m(\vec{r}_1) = |\dot{H}_\varphi(\vec{r}_1)| = \frac{N_m \cdot k^2}{4\pi} \sin\theta_1 \cdot \sqrt{2};$$

$$E_m(\vec{r}_1) = |\dot{\vec{E}}(\vec{r}_1)| = \sqrt{|\dot{E}_r(\vec{r}_1)|^2 + |\dot{E}_\theta(\vec{r}_1)|^2} = Z_c \frac{N_m \cdot k^2}{4\pi} \sin\theta_1 \cdot \sqrt{3}.$$

На основании (2.6), (2.10) запишем комплексные составляющие электрического и магнитного полей в направлении  $\theta_1$ , нормированные по  $E_m(\vec{r}_1)$  и  $H_m(\vec{r}_1)$  соответственно:

$$\left. \begin{aligned} e_r &= |e_r| e^{i\Psi_r} = \frac{\dot{E}_r(\theta_1)}{E_m(\vec{r}_1)} = \frac{kr - i}{\sqrt{3} \cdot (kr)^3} \cdot e^{-ikr}; \\ e_\theta &= |e_\theta| e^{i\Psi_\theta} = \frac{\dot{E}_\theta(\theta_1)}{E_m(\vec{r}_1)} = \frac{kr + i(k^2r^2 - 1)}{\sqrt{3} \cdot (kr)^3} \cdot e^{-ikr}; \\ h_\varphi &= |h_\varphi| e^{i\Psi_\varphi} = \frac{\dot{H}_\varphi(\theta_1)}{H_m(\vec{r}_1)} = \frac{1 + i \cdot kr}{\sqrt{2} \cdot (kr)^2} \cdot e^{-ikr}. \end{aligned} \right\} (2.22)$$

Фазы составляющих поля (2.22) выражаются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_r &= \arg e_r = \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{kr} \right) - kr; \\ \Psi_\theta &= \arg e_\theta = \operatorname{arctg} \left( kr - \frac{1}{kr} \right) - kr; \\ \Psi_\varphi &= \arg h_\varphi = \operatorname{arctg} (kr) - kr. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

В выражения фаз всех координатных составляющих (2.23) входит слагаемое  $-kr$ , являющееся аргументом экспоненты  $e^{-ikr}$ , т.е. фазовым запаздыванием элементарной сферической волны.

Нормированные комплексные составляющие поля и их фазы имеют при  $1 \gg kr \rightarrow 0$  ( $e^{-ikr} \rightarrow 1$ ) асимптотические выражения (инд. «0»), принимаемые в качестве приближений для ближней зоны:

$$\left. \begin{aligned} e_r^0 &= e_\theta^0 = \frac{-i}{\sqrt{3}(kr)^3}; \quad \Psi_r^0 = \Psi_\theta^0 = -\frac{\pi}{2}; \\ h_\varphi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}(kr)^2}; \quad \Psi_\varphi^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

а при  $1 \ll kr \rightarrow \infty$  – асимптотические выражения (инд. « $\infty$ »), принимаемые в качестве приближений для дальней зоны:

$$\left. \begin{aligned} e_r^\infty &= \frac{1}{\sqrt{3}(kr)^2} e^{-ikr}; \quad \Psi_r^\infty = -kr; \\ e_\theta^\infty \cdot \sqrt{3} &= h_\varphi^\infty \cdot \sqrt{2} = \frac{i}{kr} e^{-ikr}; \quad \Psi_\theta^\infty = \Psi_\varphi^\infty = \pi/2 - kr. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Изменение с расстоянием нормированных амплитуд составляющих полного поля  $|e_r|$ ,  $|e_\theta|$ ,  $|h_\varphi|$ , рассчитанных по соотношениям (2.22), показано на рис. 2.12. По обеим осям использован логарифмический масштаб; при этом асимптотические амплитуды представляются зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \lg |e_r^0| &= \lg |e_\theta^0| = -3 \cdot \lg(kr) - 0,24; \\ \lg |h_\varphi^0| &= -2 \cdot \lg(kr) - 0,15; \\ \lg |e_r^\infty| &= -2 \cdot \lg(kr) - 0,24; \\ \lg |e_\theta^\infty| &= -\lg(kr) - 0,24; \\ \lg |h_\varphi^\infty| &= -\lg(kr) - 0,15. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Это означает, что при использовании логарифмического масштаба радиальные зависимости асимптотических амплитуд изображаются прямыми линиями, крутизна которых равна множителю при  $\lg(kr)$  в соотношениях (2.26), т.е. показателю степени величины  $kr$  в асимптотических выражениях поля (2.24), (2.25).

При малых расстояниях ( $kr \leq 0,5$ ,  $r/\lambda \leq 0,08$ ) амплитуды электрических составляющих  $|e_\theta|$ ,  $|e_r|$  уменьшаются с расстоянием приблизительно по одному и тому же закону  $|e_\theta^0| = |e_r^0| \sim 1/(kr)^3$ , амплитуда магнитного поля  $|h_\varphi|$  падает с расстоянием медленнее:  $|h_\varphi^0| \sim 1/(kr)^2$ . В окрестности  $kr \sim 1$  (примерно в области  $kr = 0.5 \div 5$  или  $r/\lambda = 0.08 \div 0.8$ ) наблюдается плавный переход зависимостей от асимптотических прямых для ближней зоны (инд. «0») к асимптотическим прямым для дальней зоны (инд. «∞»). При больших расстояниях ( $kr \geq 10$ ,  $r/\lambda \geq 1.6$ ) графики для угловых составляющих  $|e_\theta|$ ,  $|h_\varphi|$  сближаются, стремясь к асимптоте  $|e_\theta^\infty| \sim |h_\varphi^\infty| \sim 1/(kr)$ , а  $|e_r|$  падает быстрее, стремясь к асимптоте  $|e_r^\infty| \sim 1/(kr)^2$ .

Изменение с расстоянием фаз составляющих поля иллюстрируется на рис.2.13. При малых расстояниях ( $kr \leq 0,5$ ;  $r/\lambda \leq 0,08$ ) фазы составляющих почти не меняются с расстоянием и близки к значениям  $\psi_\varphi \approx \psi_\varphi^0 = 0$ ,  $\psi_\theta \approx \psi_r \approx \psi_{\theta,r}^0 = -\frac{\pi}{2}$ . Существенные изменения фаз с расстоянием начинают проявляться в окрестности  $kr \approx 1$  ( $r/\lambda \approx 0,16$ ), фазовое запаздывание  $e_\theta$  начинает уменьшаться и кривая  $\psi_\theta(kr)$  приближается к кривой  $\psi_\varphi(kr)$ . С ростом расстояния графики  $\psi_\theta(kr)$  и  $\psi_\varphi(kr)$  сближаются и стремятся к асимптотической прямой  $\psi_\theta^\infty = \psi_\varphi^\infty = \frac{\pi}{2} - kr$ , а график  $\psi_r(kr)$  отклоняется от графика  $\psi_\theta(kr)$  и стремится к асимптотической прямой  $\psi_r^\infty = -kr$ .

На рис. 2.14 на комплексной плоскости построены годографы радиальных зависимостей нормированных комплексных составляющих поля ЭЭИ  $h_\varphi$ ,  $e_\theta$ ,  $e_r$ , определяемых соотношениями (2.22). По радиусу отложены модули составляющих поля в логарифмическом масштабе, по углу – фазы составляющих. Нарастание фазы, как обычно, отсчитывается от положительного направления вещественной оси в

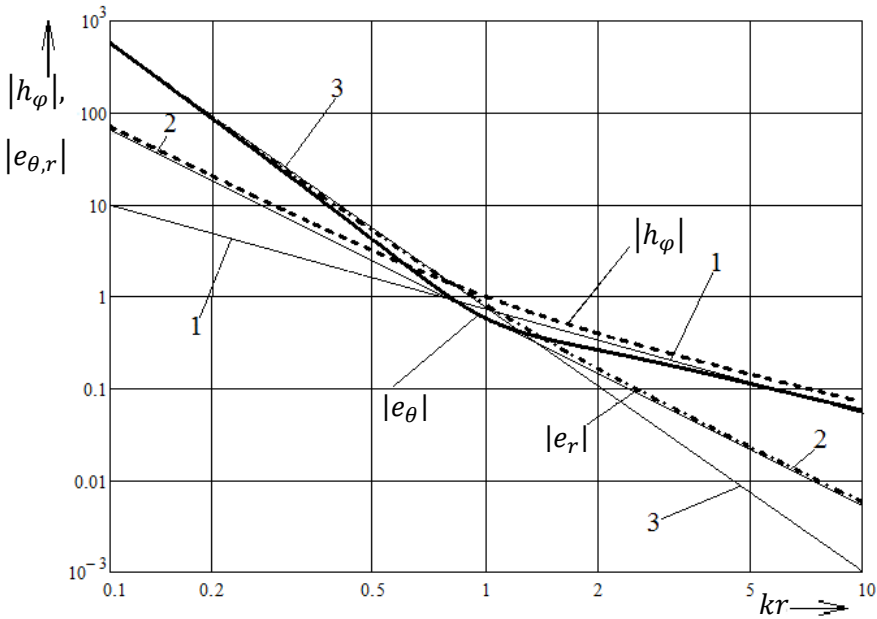


Рис. 2.12 – Изменение с расстоянием нормированных амплитуд составляющих поля ЭЭИ:  $|h_\varphi|$  - - - -;  $|e_\theta|$  —;  $|e_r|$  - · - · -; 1 – асимптота для  $|e_\theta|$ ,  $|h_\varphi|$  при  $kr \gg 1$ :  $|e_\theta^\infty| \sim |h_\varphi^\infty| \sim 1/kr$ ; 2 – асимптота для  $|h_\varphi|$  при  $kr \ll 1$  и для  $|e_r|$  при  $kr \gg 1$ :  $|h_\varphi^\circ| \sim |e_r^\circ| \sim 1/(kr)^2$ ; 3 – асимптота для  $|e_\theta|$ ,  $|e_r|$  при  $kr \ll 1$ :  $|e_\theta^\circ| = |e_r^\circ| \sim 1/(kr)^3$

сторону положительного направления мнимой оси, т.е. против часовой стрелки, а фазовое запаздывание поля при удалении от источника – по часовой стрелке. Значками  $\bullet$ ,  $\circ$ ,  $\times$ ,  $\Delta$  отмечены точки, соответствующие значениям составляющих поля при фиксированных значениях  $kr$ , указанных цифрами около этих значков. Фазовый множитель элементарной сферической волны  $e^{-ikr}$  отображается окружностью единичного радиуса, ее фазовое запаздывание  $-\psi/(2\pi) = kr/(2\pi) = r/\lambda$  отсчитывается по часовой стрелке и отмечено цифрами на внешней окружности. Для наглядности годографы представлены двумя рисунками (рис. 2.14, а, б), отличающимися масштабом по радиусу, т.е. по модулю составляющих: рис. 2.14, а дает более подробное отображение поля вблизи излучателя, рис. 2.14, б – вдали от излучателя. При малых

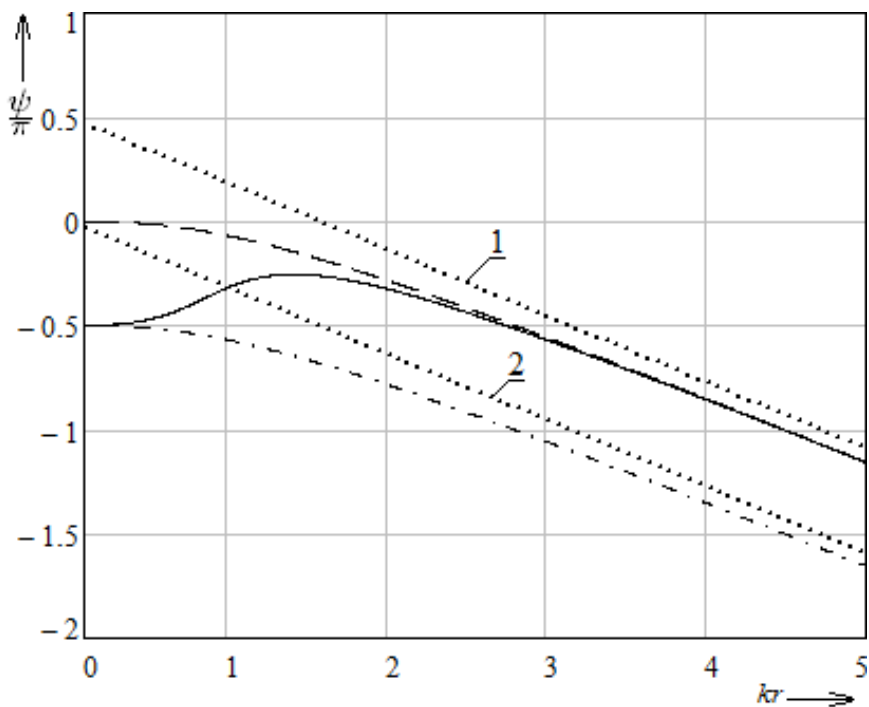


Рис. 2.13 – Зависимость от  $kr$  фаз координатных составляющих поля ЭЭИ:  
 $\psi_\varphi = \arg(\dot{H}_\varphi)$  - - - - -;  $\psi_\theta = \arg(\dot{E}_\theta)$  —;  $\psi_r = \arg(\dot{E}_r)$  - · - · - ·; 1 – асимптота  
 для  $\psi_\varphi, \psi_\theta$  при  $kr \rightarrow \infty$ :  $\psi_{\theta, \varphi}^\infty = \pi/2 - kr$ ; 2 – асимптота для  $\psi_r$   
 при  $kr \rightarrow \infty$ :  $\psi_r^\infty = -kr$

$kr$  ( $kr \leq 0.5$ ;  $r/\lambda \leq 0.08$ ) фаза магнитного поля  $h_\varphi$  близка к нулю, электрические составляющие  $e_\theta, e_r$  почти синфазны и запаздывают относительно  $h_\varphi$  примерно на  $90^\circ$ . С увеличением  $kr$  модули всех составляющих уменьшаются, их годографы имеют вид свертывающихся спиралей, годографы угловых составляющих  $e_\theta, h_\varphi$  сближаются, а  $e_r$  запаздывает относительно  $e_\theta, h_\varphi$  на угол, стремящийся к  $\pi/2$ .

На основании (2.6), (2.10), (2.22) запишем мгновенные значения составляющих физических векторов поля в произвольной точке пространства:

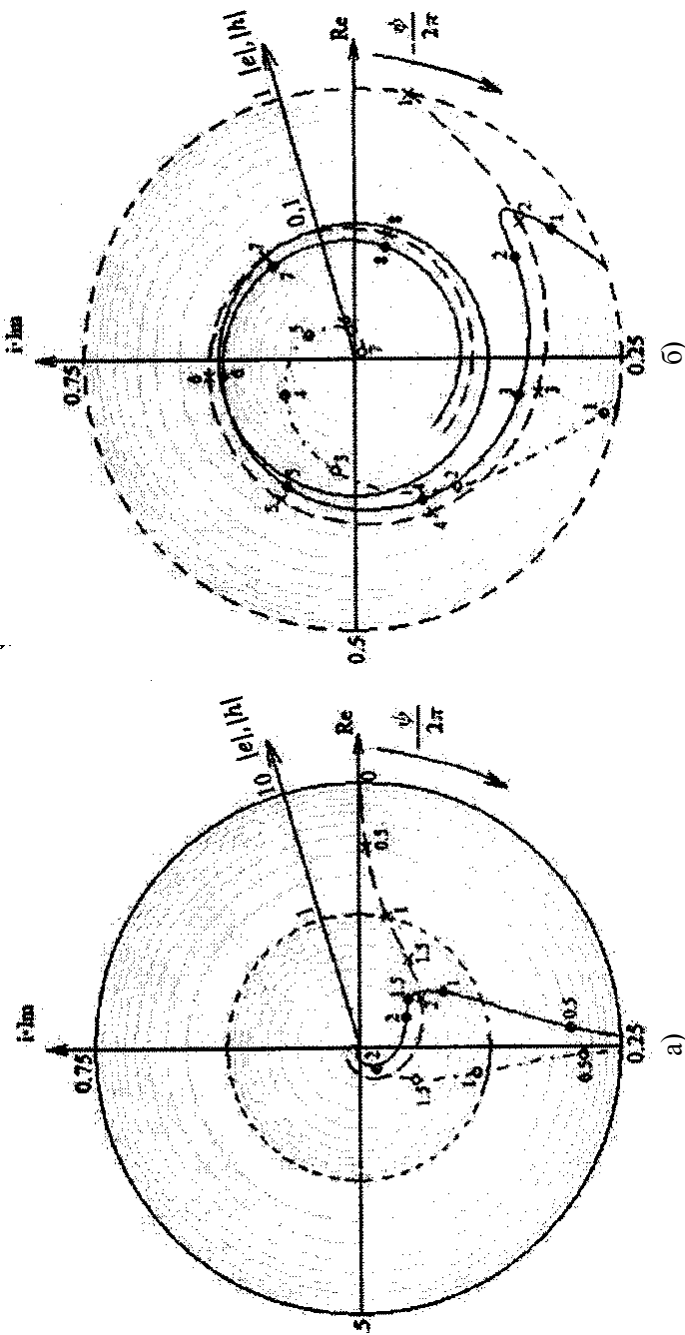


Рис. 2.14 – Отображение на комплексной плоскости зависимостей от  $kr$  нормированных комплексных составляющих поля ЭИИ:  $h_\varphi$  (—  $\times$  —),  $e_\theta$  (—  $\bullet$  —),  $e_r$  (—  $\circ$  —),  $e^{-ikr}$  (—  $\times$  —); знаками ( $\times$ ,  $\bullet$ ,  $\circ$ ,  $\Delta$ ) и цифрами отмечены значения  $kr$ ; на внешней окружности по часовой стрелке отложена фаза элементарной сферической волны:  $-\psi/(2\pi) = r/\lambda$



$$E_r = \text{Re}(\dot{E}_r) = |\dot{E}_r| \cos(\omega t + \psi_r); |\dot{E}_r| = E_m(\bar{r}_1) |e_r| \frac{\cos\theta}{\cos\theta_1};$$

$$E_\theta = \text{Re}(\dot{E}_\theta) = |\dot{E}_\theta| \cos(\omega t + \psi_\theta); |\dot{E}_\theta| = E_m(\bar{r}_1) |e_\theta| \frac{\sin\theta}{\sin\theta_1};$$

$$H_\varphi = \text{Re}(\dot{H}_\varphi) = |\dot{H}_\varphi| \cos(\omega t + \psi_\varphi); |\dot{H}_\varphi| = H_m(\bar{r}_1) |h_\varphi| \frac{\sin\theta}{\sin\theta_1},$$

где  $\psi_r, \psi_\theta, \psi_\varphi$  определяются по (2.23). При  $\omega t = 2\pi m = \text{const}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) имеем:

$$\frac{E_r(r)}{|\dot{E}_r|} = \cos \psi_r(r); \frac{E_\theta(r)}{|\dot{E}_\theta|} = \cos \psi_\theta(r); \frac{H_\varphi(r)}{|\dot{H}_\varphi|} = \cos \psi_\varphi(r).$$

Графики нормированных радиальных зависимостей поля, определяемых этими соотношениями, для начального участка расстояний ( $r/\lambda = 0 \div 5/4$ ) представлены на рис. 2.15. Здесь же приведены графики временных зависимостей зарядов  $q_2(t)/q_m = -q_1(t)/q_m$  и тока  $I(t)/I_m$  излучателя (рис. 2.15. а). С увеличением  $r$  нормированные радиальные зависимости составляющих поля (рис. 2.15, б) приближаются к зависимостям для дальней зоны ( $kr \gg 1$ ):

$$\frac{E_r(r)}{|\dot{E}_r|} = \cos \psi_r^\infty = \cos(kr);$$

$$\frac{E_\theta(r)}{|\dot{E}_\theta|} = \frac{H_\varphi(r)}{|\dot{H}_\varphi|} = \cos \psi_{\theta,\varphi}^\infty = \sin(kr).$$

Трансформация поля ЭЭИ с расстоянием и формирование поля излучения изображены на рис. 2.16. Здесь же (рис.2.16, а) представлены временные зависимости тока  $I(t)$  и заряда  $q(t)$  излучателя.

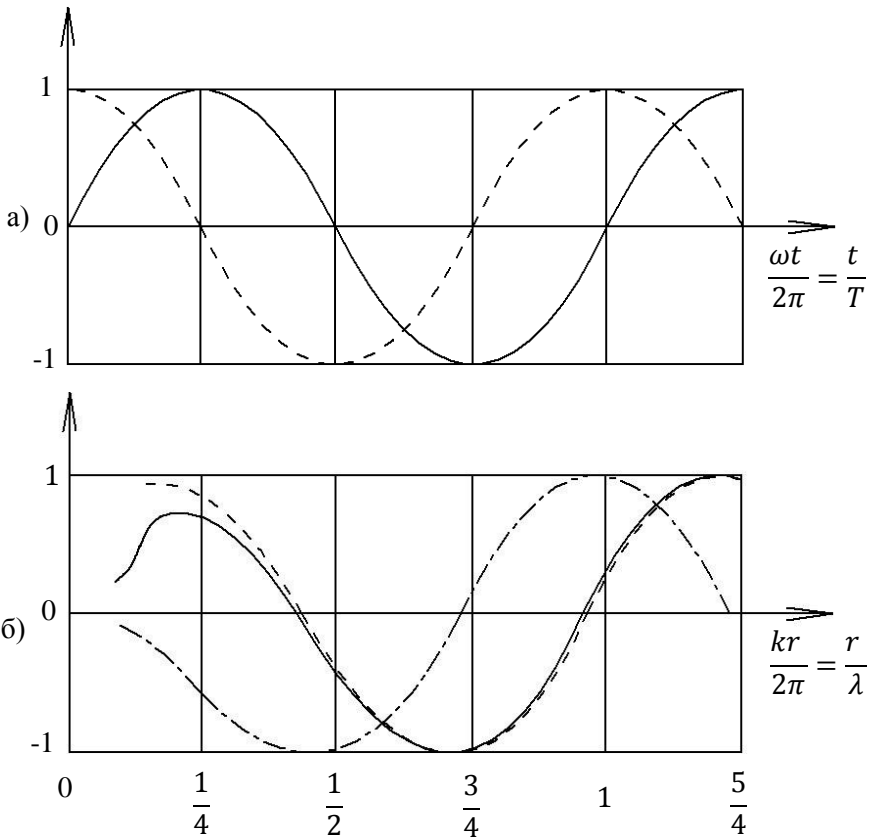


Рис. 2.15 – а) Временные зависимости зарядов  $q_2(t)/q_m = -q_1(t)/q_m$  (—) и тока  $I(t)/I_m$  (- - - -) излучателя; б) нормированные радиальные зависимости (при  $\omega t = 2\pi m = const$ ) составляющих поля ЭЭИ  $E_\theta(r)/|\dot{E}_\theta|$  (—),  $H_\phi(r)/|\dot{H}_\phi|$  (- - - -),  $E_r(r)/|\dot{E}_r|$  (- · - · -)

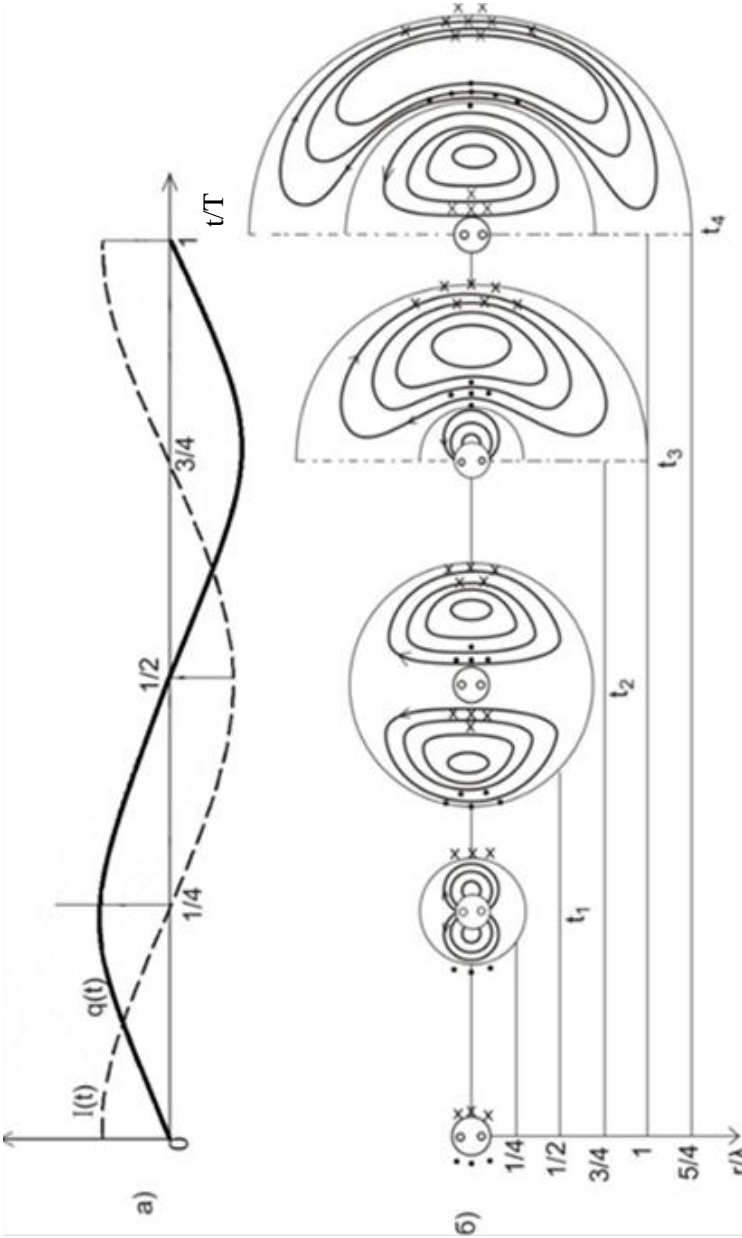


Рис. 2.16 – а) временные зависимости тока  $I(t)$  (—) и заряда  $q(t)$  (---) излучателя; б) формирование поля излучения ЭЭИ:  $t_1 = T/4$ ;  $t_2 = T/2$ ;  $t_3 = 3T/4$ ;  $t_4 = T$

## Некоторые соотношения векторного анализа

### *Определения операций пространственного дифференцирования*

– Градиент скалярной функции координат  $\psi = \psi(\vec{r})$ :

$$\text{grad } \psi = \bar{1}_N \frac{\partial \psi}{\partial N},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки пространства;  $\bar{1}_N$  – орт нормали  $N$  к эквипотенциальной поверхности  $\psi = \text{const}$ , направленный в сторону возрастания  $\psi$ .

– Скорость изменения скалярной функции  $\psi$  по направлению  $l$ , заданному ортом  $\bar{1}_l$  этого направления:

$$\frac{\partial \psi}{\partial l} = (\text{grad } \psi, \bar{1}_l) = \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot (\bar{1}_N, \bar{1}_l).$$

– Дивергенция векторной функции координат  $\bar{A} = \bar{A}(\vec{r})$ :

$$\text{div } \bar{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S (\bar{A}, d\bar{S}),$$

где  $S$  – замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $\Delta V$ ;  $d\bar{S} = \bar{1}_n \cdot dS$  – векторный дифференциально малый элемент поверхности  $S$ ;  $\bar{1}_n$  – орт внешней (относительно объема  $\Delta V$ ) нормали к поверхности  $S$ .

– Ротор векторной функции координат  $\bar{A} = \bar{A}(\vec{r})$  в ортогональной системе координат  $q_j$  с ортами  $\bar{1}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$\text{rot } \bar{A} = \sum_j \bar{1}_j \cdot \text{rot}_j \bar{A} = \sum_j \bar{1}_j \cdot \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_j} \oint_{l_j} (\bar{A}, d\bar{l}),$$

где  $\Delta S_j$  – площадка, перпендикулярная направлению  $\bar{1}_j$ ;  $d\bar{l}$  – векторный элемент длины контура  $l_j$ , охватывающего площадку  $\Delta S_j$  в праввинтовом относительно  $\bar{1}_j$  направлении.

**Операции векторного анализа в декартовой системе координат  $x_j$  с ортами  $\bar{1}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ )**

– Оператор Гамильтона  $\nabla$  (читается «набла»):

$$\nabla = \bar{1}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{1}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{1}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_j \bar{1}_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

– Градиент скалярной функции координат  $\psi(\vec{r})$ :

$$\text{grad } \psi = \sum_j \bar{1}_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \nabla \psi.$$

– Дивергенция векторной функции координат  $\bar{A}(\vec{r}) = \sum_j \bar{1}_j A_j(\vec{r})$ :

$$\text{div } \bar{A} = \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = (\nabla, \bar{A}).$$

– Ротор векторной функции координат

$$\text{rot } \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{1}_1 & \bar{1}_2 & \bar{1}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = [\nabla, \bar{A}].$$

– Оператор Лапласа  $\Delta$  («дельта») от скалярной функции координат  $\psi(\vec{r})$ :

$$\Delta\psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} = \nabla^2 \psi.$$

– Оператор Лапласа от векторной функции координат  $\bar{A}(\bar{r})$ :

$$\Delta \bar{A} = \sum_j \Delta(\bar{1}_j A_j) = \sum_j \bar{1}_j \cdot \Delta A_j = \sum_j \bar{1}_j \cdot \nabla^2 A_j = \sum_j \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x_j^2}.$$

### ***Пространственные производные от произведений***

$$\operatorname{grad}(\psi \cdot u) = \psi \cdot \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{grad} \psi;$$

$$\operatorname{div}(\psi \cdot \bar{A}) = \psi \cdot \operatorname{div} \bar{A} + \bar{A} \cdot \operatorname{grad} \psi;$$

$$\operatorname{div}[\bar{A}, \bar{B}] = \bar{B} \cdot \operatorname{rot} \bar{A} - \bar{A} \cdot \operatorname{rot} \bar{B};$$

$$\operatorname{rot}(\psi \cdot \bar{A}) = \psi \cdot \operatorname{rot} \bar{A} + [\operatorname{grad} \psi, \bar{A}].$$

### ***Пространственные производные 2-го порядка***

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi) = \Delta \psi;$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{A}) = 0;$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \psi) = 0;$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{A}) - \Delta \bar{A}.$$

### ***Интегральные теоремы векторного анализа***

– Теорема о градиенте (объемный интеграл от градиента):

$$\int_V \operatorname{grad} \psi \cdot dV = \oint_S \psi \cdot d\bar{S}.$$

– Теорема Остроградского-Гаусса (объемный интеграл от дивергенции):

$$\int_V \operatorname{div} \bar{A} \cdot dV = \oint_S (\bar{A}, d\bar{S}).$$

–Теорема о роторе (объемный интеграл от ротора):

$$\int_V \operatorname{rot} \bar{A} \cdot dV = \oint_S [d\bar{S}, \bar{A}].$$

–Теорема Стокса (поток ротора):

$$\int_S (\operatorname{rot} \bar{A}, d\bar{S}) = \oint_l (\bar{A}, d\bar{l}).$$

–1-я формула Грина:

$$\int_V (\psi \cdot \Delta u + \nabla \psi \cdot \nabla u) dV = \oint_S \psi \cdot \nabla u \cdot d\bar{S} \equiv \oint_S \psi \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

–2-я формула Грина:

$$\int_V (\psi \cdot \Delta u - u \cdot \Delta \psi) dV = \oint_S (\psi \cdot \nabla u - u \cdot \nabla \psi) d\bar{S} \equiv \oint_S \left( \psi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS.$$

–3-я формула Грина:

$$\int_V (\psi \cdot \Delta \psi + (\nabla \psi)^2) dV = \oint_S \psi \cdot \nabla \psi \cdot d\bar{S} \equiv \oint_S \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS.$$

В интегралах по замкнутой поверхности  $S$ , охватывающей объем  $V$ ,  $d\bar{S} = \bar{1}_n \cdot dS$  – векторный дифференциально малый элемент поверхности  $S$ ,  $\bar{1}_n$  – орт внешней (относительно  $V$ ) нормали  $n$  к поверхности  $S$ . В выражениях циркуляции  $d\bar{l}$  – векторный элемент длины контура  $l$ , охватывающего поверхность  $S$  в правовинтовом направлении относительно  $d\bar{S} = \bar{1}_n \cdot dS$ .

**Приложение 2**  
**Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах**

Система координат	Обобщенные криволинейные координаты $q_1, q_2, q_3$	Цилиндрические координаты $\rho, \varphi, z$	Сферические координаты $r, \theta, \varphi$
Коэффициенты Ламэ	$h_1, h_2, h_3$	$h_\rho = 1, h_\varphi = \rho, h_z = 1$	$h_r = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r \sin \theta$
Градиент $grad \Psi$	$grad \Psi = \bar{1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} + \bar{2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} + \bar{3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Psi}{\partial q_3}$	$grad \Psi = \bar{1} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \bar{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \bar{z} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$	$grad \Psi = \bar{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \bar{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \bar{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$
Дивергенция $div \vec{A}$	$div \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right]$	$div \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$div \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right]$
Ротор $rot \vec{A}$	$rot \vec{A} = \begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ h_2 h_3 & h_3 h_1 & h_1 h_2 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$	$rot \vec{A} = \begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{\varphi} & \bar{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$	$rot \vec{A} = \begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{\theta} & \bar{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$
Оператор Лапласа скалярной функции $\Delta \Psi = div grad \Psi$	$\Delta \Psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Psi}{\partial q_3} \right) \right]$ При условиях $\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2) = 0; h_3 = 1; \Delta \Psi = \Delta_{\perp} \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_3^2}$ ; $\Delta_{\perp} \Psi = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right) \right]$	$\Delta \Psi = \Delta_{\perp} \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$ ; $\Delta_{\perp} \Psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}$	$\Delta \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi) + \frac{1}{r^3} \Delta_{\theta, \varphi} \Psi$ ; $\Delta_{\theta, \varphi} \Psi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}$



## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Гор. лин. – Телеком, 2007. – 558 с.
2. Фальковский О.И. Техническая электродинамика. – Изд. 2-е. – СПб.: Лань, 2009. – 432 с.
3. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1992. – 416 с.
4. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989. – 544 с.
5. Марков Г.Т., Сазонов Д.М. Антенны. – М.: Энергия, 1975. – 528 с.
6. Полухин Ю.Н. «Репетитор» по электродинамике: учеб. пособие. – Самара: Изд-во СГАУ, 2002. – 138 с.
7. Полухин Ю.Н. Электродинамика в вопросах и ответах: учеб. пособие. – Самара: Изд-во СГАУ, 2014. – 188 с.
8. Кочин, Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 426 с.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

*Полухин Юрий Николаевич*

## ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Учебное пособие

Редактор Н.С. Купринова  
Доверстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 30.03.2016. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Печ. л. 9,75.  
Тираж 100 экз. Заказ .

федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический  
университет имени академика С.П.Королева  
(национальный исследовательский университет)»  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во СГАУ. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.