

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЁВА
(национальный исследовательский университет)»

Ю.В. Скворцов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

САМАРА 2013

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 4 |
| 1 МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ..... | 5 |
| 1.1 Условные и действительные диаграммы растяжения материалов..... | 5 |
| 1.2 Диаграммы сжатия..... | 9 |
| 2 ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ..... | 11 |
| 2.1 Напряжённое состояние в точке тела..... | 11 |
| 2.2 Шаровой тензор и девиатор напряжений..... | 13 |
| 2.3 Интенсивность напряжений..... | 16 |
| 2.4 Геометрические интерпретации..... | 18 |
| 3 ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ..... | 22 |
| 3.1 Деформированное состояние в точке тела..... | 22 |
| 3.2 Разложение тензора деформаций..... | 24 |
| 3.3 Интенсивность деформаций..... | 25 |
| 3.4 Геометрические интерпретации..... | 27 |
| 3.5 Приращения и скорости деформаций..... | 29 |
| 4 УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ... 31 | 31 |
| 4.1 Физические соотношения для упругого изотропного тела..... | 31 |
| 4.2 Условия начала пластичности..... | 33 |
| 5 ДЕФОРМАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ..... | 37 |
| 5.1 Основные гипотезы и соотношения деформационной теории пластичности..... | 37 |
| 5.2 Построение диаграммы деформирования материала..... | 39 |
| 5.3 Коэффициент поперечной деформации за пределами упругости..... | 43 |
| 5.4 Теорема о простом нагружении..... | 44 |
| 5.5 Теорема о разгрузке..... | 44 |
| 5.6 Постановка задачи теории пластичности..... | 45 |
| 5.7 Решение задачи теории пластичности в перемещениях. Метод упругих решений Ильюшина..... | 47 |
| 6 ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЯ..... | 51 |
| 6.1 Поверхность пластичности..... | 51 |
| 6.2 Постулат Друкера..... | 53 |
| 6.3 Ассоциированный закон течения..... | 55 |
| 6.4 Основные гипотезы и соотношения теории течения..... | 57 |

| | | |
|-----|---|----|
| 7 | ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ..... | 61 |
| 7.1 | Обобщение теоремы Клапейрона | 61 |
| 7.2 | Вариационное уравнение Лагранжа. Принцип минимума полной энергии деформируемой системы | 63 |
| 7.3 | Вариационное уравнение Кастильяно. Принцип минимума полной дополнительной энергии деформируемой системы | 66 |
| 7.4 | Теорема Кастильяно | 70 |
| 8 | ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ | 72 |
| 8.1 | О расчётах на ползучесть..... | 72 |
| 8.2 | Механические модели деформируемого тела | 74 |
| 8.3 | Простейшие задачи линейной теории ползучести..... | 79 |

ВВЕДЕНИЕ

Теория пластичности является частью механики деформируемого твёрдого тела и очень близко примыкает к теории упругости, изучающей напряжения и деформации в идеально упругих телах. Теория пластичности ставит своей целью изучение напряжений и деформаций в пластически деформируемых телах. Пластически деформируемое тело – это тело, в котором под воздействием внешних сил возникают напряжения и деформации, не исчезающие полностью после снятия нагрузок, а остающиеся в теле в виде некоторой совокупности остаточных напряжений и деформаций. При этом связь между напряжениями и деформациями не является линейной, т.е. напряжения и деформации не подчиняются закону Гука, как это имеет место для идеально упругих тел в теории упругости. (Однако, несмотря на это, в теории пластичности используются многие соотношения, полученные в теории упругости.)

В дальнейшем мы будем изучать геометрически линейную теорию пластичности, когда перемещения точек деформируемого тела весьма малы по сравнению с размерами рассматриваемого тела. В этом случае связь между деформациями и перемещениями точек тела выражается соотношениями Коши.

В теории пластичности предполагается, что деформации и напряжения не зависят от времени. При длительном нагружении силовых элементов машин и сооружений, сопровождающимся повышенными температурами, возникают дополнительные деформации, в результате чего могут изменяться с течением времени и напряжения. Эти явления рассматриваются в теории ползучести.

1 МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

1.1 Условные и действительные диаграммы растяжения материалов

Расчёты за пределами упругости основываются на экспериментальном исследовании механических свойств материалов при одноосном растяжении. Результаты таких исследований обычно представляются в виде графиков зависимости напряжения от деформации. При этом силу P , растягивающую образец, относят к первоначальной площади поперечного сечения F_0 , а удлинение образца Δl – к первоначальной длине образца l_0 :

$$\sigma = \frac{P}{F_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (1.1)$$

т.е. не учитывают изменение площади поперечного сечения образца и предполагают равномерное деформирование образца по всей длине. Поэтому график зависимости напряжения от деформации (рисунок 1.1), построенный с использованием формул (1.1), называется условной диаграммой растяжения. Иногда его называют просто диаграммой растяжения.

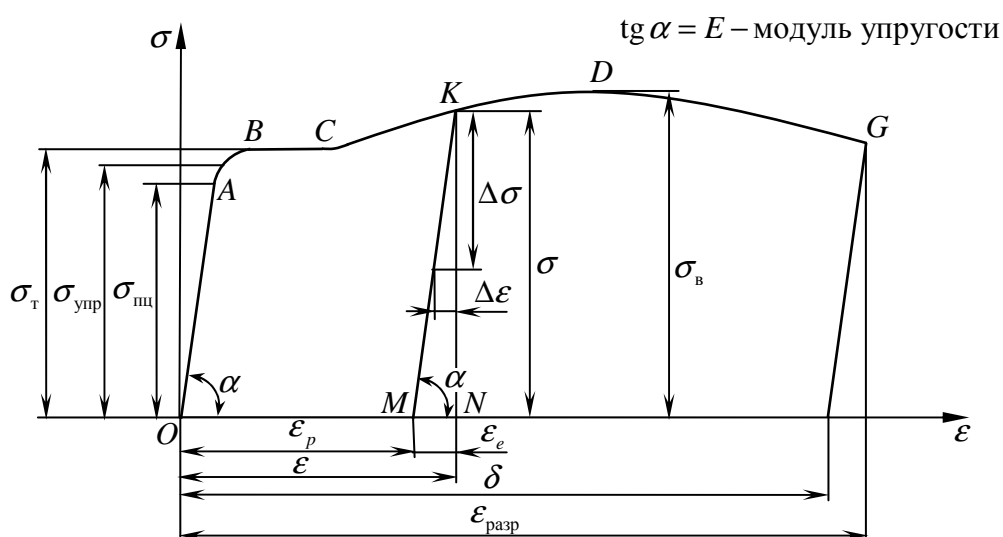


Рисунок 1.1 – Диаграмма растяжения материала

Поскольку в начальной стадии нагружения справедлив закон Гука, зависимость напряжения от деформации является линейной (участок OA на рисунке 1.1). При некотором напряжении $\sigma_{\text{пц}}$, называемом пределом пропорциональности материала, линейная зависимость нарушается (участок AB). До

напряжения $\sigma_{\text{упр}}$, называемого пределом упругости, материал остаётся упругим, т.е. после разгрузки будут отсутствовать остаточные деформации. На площадке текучести BC образец деформируется при постоянной силе (течёт). Соответствующее напряжение σ_T называется физическим пределом текучести материала.

Если на условной диаграмме растяжения материала площадка текучести отсутствует (как это имеет место для большинства легированных сталей), то вводится понятие условного предела текучести $\sigma_{0,2}$ как напряжения, соответствующего остаточной деформации 0,002, или 0,2% (рисунок 1.2).

Площадка текучести BC переходит в кривую CDG , называемую кривой упрочнения. Последняя имеет точку максимума D , ордината которой равна пределу прочности или временному сопротивлению σ_B . При напряжении, равном пределу прочности или несколько меньше его, на образце возникает местное утонение, называемое шейкой. Постепенное развитие её всё более и более ослабляет образец, и для его деформации нужны всё меньшие и меньшие силы. Поэтому процессу деформирования образца, ослабленного шейкой, соответствует ниспадающий участок DG до разрушения образца в точке G .

Если образец растянуть до некоторого напряжения $\sigma > \sigma_{\text{пл}}$ (точка K на рисунке 1.1), а затем постепенно его разгрузить, то диаграмма разгрузки KM не совпадёт с диаграммой первичного нагружения. Она представляет собой прямую, параллельную участку OA . В этом состоит так называемый закон разгрузки: уменьшение напряжения при разгрузке $\Delta\sigma$ прямо пропорционально уменьшению деформации $\Delta\varepsilon$, причём коэффициент пропорциональности тот же, что и в начальной стадии нагружения:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \quad (1.2)$$

Следовательно, полная деформация ε (отрезок ON) для некоторого напряжения σ , может быть представлена в виде суммы упругой деформации ε_e , исчезающей при полной разгрузке (отрезок MN), и остаточной или пла-

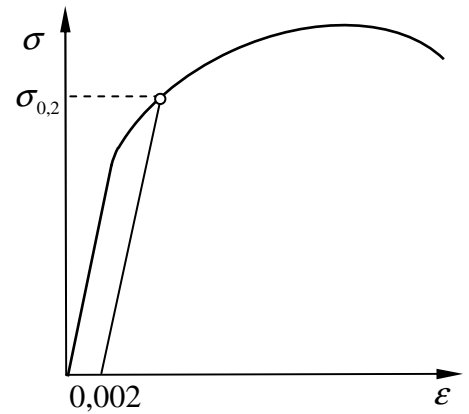


Рисунок 1.2 – К определению условного предела текучести

стической деформации ε_p , остающейся после полной разгрузки (отрезок OM).

Полную деформацию образца при разрыве $\varepsilon_{\text{разр}}$ можно также разделить на упругую и пластическую, которая обычно обозначается буквой δ и называется остаточным удлинением при разрыве. В момент разрыва образца происходит мгновенная его разгрузка. Поэтому, вычитая из суммы длин половинок образца его первоначальную длину, можно определить остаточное удлинение при разрыве $\Delta l_{\text{разр}}$. Отношение этого удлинения к первоначальной длине l_0 и равняется величине δ :

$$\delta = \frac{\Delta l_{\text{разр}}}{l_0}, \quad (1.3)$$

которая характеризует пластичность материала. Чем материал пластичнее, тем δ больше. Заметим, что остаточное удлинение при разрыве зависит от отношения расчётной длины образца к его диаметру. С увеличением этого отношения δ уменьшается. Обычно образцы имеют отношение l_0/d_0 , равное 10 (длинный образец) или 5 (короткий образец). Если у δ не стоит цифра 5 в индексе (δ_5), то это значит, что остаточное относительное удлинение при разрыве получено при испытании длинного образца.

В зависимости от величины δ материалы подразделяются на пластичные и хрупкие. Пластичные материалы могут иметь значительные остаточные удлинения (порядка 10...40%). Что касается хрупких материалов, то их остаточные удлинения бывают в пределах нескольких процентов и даже менее 1%. К числу весьма пластичных материалов относятся отожжённая медь, алюминий, латунь, малоуглеродистые стали. Менее пластичными являются дюраль, бронза, многие легированные стали. Примеры хрупких материалов: чугун, высокоуглеродистые инструментальные стали.

Пластичность материала может быть также оценена по величине остаточного относительного сужения площади поперечного сечения при разрыве:

$$\psi = \frac{F_0 - F}{F_0}, \quad (1.4)$$

где F – площадь минимального сечения шейки после разрыва.

При вторичном нагружении растяжением после разгрузки диаграмма растяжения приближённо совпадает с диаграммой разгрузки на всём её про-

тяжении, а затем она сливается с диаграммой первичного нагружения (рисунок 1.3). Таким образом, металл вследствие первоначальной вытяжки как бы приобретает упругие свойства и повышает предел упругости, теряя, правда, в значительной мере способность к пластической деформации.

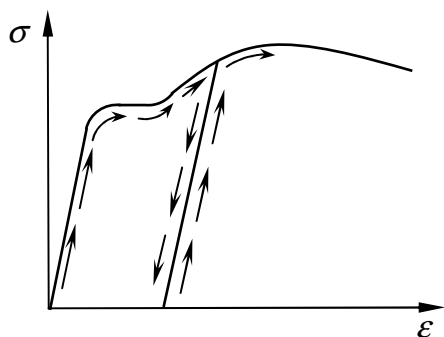


Рисунок 1.3 – Диаграммы растяжения, разгрузки и вторичного растяжения

Отметим, что деформирование материала при напряжениях выше предела текучести повышает его твёрдость. Принято говорить, что в результате пластического деформирования происходит упрочнение или наклёп материала. С течением времени наблюдается частичное снятие упрочнения. Это явление, называемое отдыхом материала, с увеличением температуры становится всё более заметным. При действии высокой

температуры приобретённое упрочнение исчезает (отжиг материала).

Упрочнение имеет обычно направленный характер. Поэтому в результате пластической деформации материал приобретает так называемую деформационную анизотропию. Одним из проявлений деформационной анизотропии является эффект Баушингера. Он заключается в том, что предварительная пластическая деформация одного знака ухудшает сопротивляемость материала в отношении последующей пластической деформации обратного знака. Так, пластическое растяжение стержня приводит к заметному снижению предела текучести при последующем сжатии того же стержня.

Иногда ошибочно утверждают, что основное отличие пластического деформирования от упругого состоит в том, что в пределах упругости связь между напряжениями и деформациями линейная, а за пределами упругости нелинейная. Как известно, существуют такие материалы, например резина, для которых в определённых границах деформирования имеет место взаимно однозначное соответствие между напряжениями и деформациями, поскольку диаграммы нагружения и разгрузки совпадают (рисунок 1.4), в то время как зависимость напряжений от деформаций является нелинейной. Такие материалы называются нелинейно упругими.

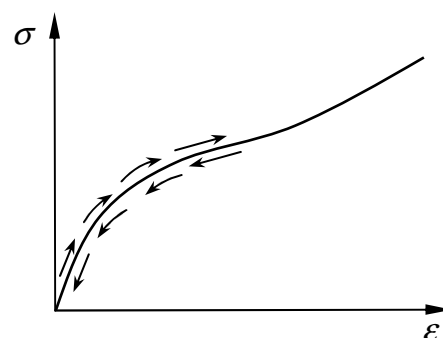


Рисунок 1.4 – Диаграмма нагружения и разгрузки нелинейно упругого материала

Следует отметить, что при анализе больших (и особенно конечных) деформаций необходимо располагать действительной (истинной) диаграммой растяжения. При этом растягивающую силу нужно относить к действительной площади поперечного сечения образца F :

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{F}. \quad (1.5)$$

Действительная площадь F может быть легко связана с первоначальной площадью F_0 , если приближённо принять, что объём элемента образца $F_0 dz$ при его деформации остаётся постоянным. Поскольку длина dz этого элемента после деформации равна $dz(1 + \varepsilon)$, а площадь поперечного сечения равна F , то согласно принятому допущению

$$F_0 dz = F dz(1 + \varepsilon),$$

откуда

$$F = \frac{F_0}{1 + \varepsilon}.$$

Подставляя эту величину в формулу (1.5), получаем зависимость действительного напряжения от условного

$$\bar{\sigma} = \sigma(1 + \varepsilon). \quad (1.6)$$

Кроме того, при нагружении образца приращения деформации необходимо вычислять по отношению к текущему (мгновенному) состоянию. Их суммирование приводит к так называемой логарифмической деформации (данная величина подробно описана в подразделе 3.5):

$$\bar{\varepsilon} = \ln(1 + \varepsilon). \quad (1.7)$$

Таким образом, действительная диаграмма растяжения материала выражает зависимость действительного напряжения $\bar{\sigma}$ от логарифмической деформации $\bar{\varepsilon}$. Следует отметить, что при $\varepsilon < 10\%$ различие между логарифмической и обычной деформациями незначительно (не превышает 5%).

1.2 Диаграммы сжатия

Экспериментальное осуществление одноосного сжатия более сложно, чем одноосного растяжение. Результаты экспериментального исследования сжатия также обычно представляются в виде графика зависимости напряжения от деформации, которые определяются по формулам (1.1). Таким образом, здесь не учитывается изменение площади поперечного сечения образца

в процессе деформирования. Поэтому рассматриваемый график называется условной диаграммой сжатия материала.

Образцы весьма пластичных материалов при испытании на сжатие не удаётся довести до разрушения (рисунок 1.5), т.е. для них не может быть определён предел прочности при сжатии. Это объясняется тем, что материал способен весьма сильно деформироваться без разрушения и образцы сплющиваются.

Диаграмма сжатия более хрупких материалов, которые удаётся разрушить при сжатии, изображена на рисунке 1.6. Точка максимума этой диаграммы соответствует возникновению первых трещин, которые при дальнейшем деформировании растут, и образец все более и более ослабляется, пока полностью не разрушится. Таким образом, физический смысл предела прочности при сжатии совершенно иной, чем предела прочности при растяжении.

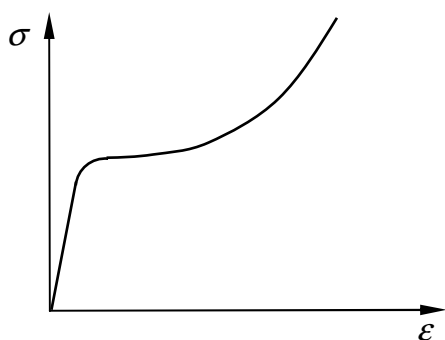


Рисунок 1.5 – Диаграмма сжатия пластичного материала

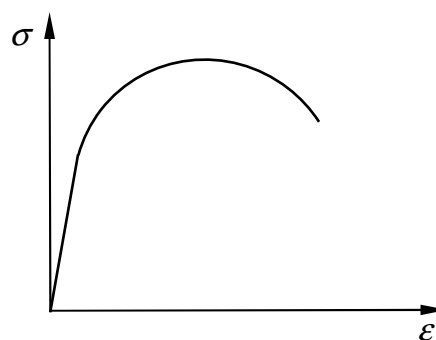


Рисунок 1.6 – Диаграмма сжатия хрупкого материала

Для металлов условные диаграммы сжатия располагаются, как правило, несколько выше условных диаграмм растяжения. Различие между диаграммами растяжения и сжатия для хрупких материалов значительно, чем для пластичных. Для большинства конструкционных материалов при сравнительно небольших деформациях можно приближённо считать диаграммы растяжения и сжатия совпадающими.

В заключение отметим, что в теории пластичности не делается различия между пределом пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$, пределом упругости $\sigma_{\text{упр}}$ и пределом текучести $\sigma_{\text{т}}$. Основным параметром считается $\sigma_{\text{т}}$.

2 ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

2.1 Напряжённое состояние в точке тела

Из курса теории упругости известно, что девять компонент напряжения в трёх взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через рассматриваемую точку, полностью характеризуют напряжённое состояние в данной точке и образуют симметричный тензор второго ранга, называемый тензором напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Располагая этими значениями, можно найти проекции на координатные оси вектора полного напряжения $\vec{\sigma}_n$ в произвольно ориентированной площадке с единичной нормалью \vec{n} :

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{zx}n_z; \\ \sigma_{ny} &= \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z; \\ \sigma_{nz} &= \sigma_{zx}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где n_x , n_y и n_z – составляющие вектора нормали \vec{n} , равные направляющим косинусам.

Проектирую вектор $\vec{\sigma}_n$ на направление нормали, получаем нормальное напряжение, действующее на рассматриваемой наклонной площадке:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx}n_x^2 + \sigma_{yy}n_y^2 + \sigma_{zz}n_z^2 + 2(\sigma_{xy}n_xn_y + \sigma_{yz}n_yn_z + \sigma_{zx}n_zn_x). \quad (2.3)$$

При этом величина касательного напряжения находится как

$$\sigma_{nt} = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2 - \sigma_{nn}^2}. \quad (2.4)$$

Отметим, что в дальнейшем будут использоваться также и тензорные обозначения, которые позволяют записывать формулы в более компактном виде. В этом случае декартовы координаты x , y , z обозначаются через x_1 , x_2 , x_3 или в общем виде x_i (где $i=1,2,3$). Под σ_{ij} будем понимать совокупность всех девяти компонент напряжения (т.е. тензор напряжений), а под n_i – составляющие вектора единичной нормали.

Тогда формулы (2.2) можно представить в виде

$$\sigma_{nj} = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} n_i.$$

Сокращённая запись суммирования состоит в том, что знак суммы опускается и по всякому дважды повторяющемуся в одночлене индексу проводится суммирование по значениям 1, 2, 3:

$$\sigma_{nj} = \sigma_{ij} n_i.$$

Повторяющийся индекс (в рассматриваемом случае i) называется *немым*, или *подставным*, а неповторяющийся (j) *свободным*.

Известно, что в каждой точке деформируемого тела существуют, по крайней мере, три взаимно перпендикулярные площадки, в которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называются *главными*, а нормальные напряжения в них – *главными напряжениями*. Направления нормалей к главным площадкам образуют *главные направления* (или *оси*) тензора напряжений и не зависят от исходной системы координат x, y, z .

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1(T_\sigma)\sigma^2 - I_2(T_\sigma)\sigma - I_3(T_\sigma) = 0. \quad (2.5)$$

Здесь коэффициенты определяются формулами

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}; \\ I_2(T_\sigma) &= -\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2; \\ I_3(T_\sigma) &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Доказано, что все три корня уравнения (2.1) вещественны. Эти корни обозначаются следующим образом:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (2.7)$$

Коэффициенты $I_1(T_\sigma)$, $I_2(T_\sigma)$, $I_3(T_\sigma)$ называются *инвариантами* тензора напряжений. Они через главные напряжения выражаются как

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2(T_\sigma) &= -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1; \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отметим, что касательные напряжения принимают экстремальные значения в сечениях, делящих пополам прямые углы между главными площадками. Они называются главными касательными напряжениями и определяются формулами

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (2.9)$$

Если условие (2.7) выполняется, то наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = -\tau_2.$$

2.2 Шаровой тензор и девиатор напряжений

Общий случай напряжённого состояния может быть представлен в виде суммы двух напряжённых состояний (рисунок 2.1).

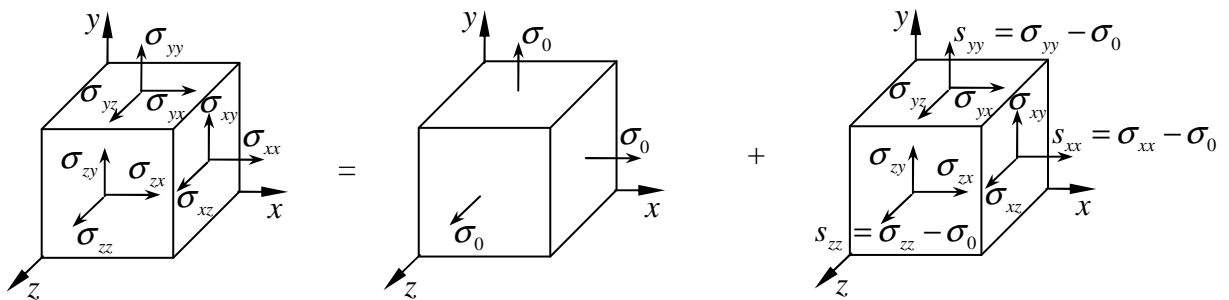


Рисунок 2.1 – Разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор

Тензор напряжений первого напряжённого состояния называется шаровым и обозначается

$$T_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Здесь $\sigma_0 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ – так называемое среднее (или гидростатическое) давление.

Тензор напряжений второго напряжённого состояния называется девиатором напряжений:

$$D_{\sigma} = \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

причём

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Отсюда следует, что $s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 0$.

Представление на рисунке 2.1 разложения общего случая напряжённого состояния на два равносильно разложению тензора на шаровой тензор и девиатор напряжений:

$$T_\sigma = T_{\sigma_0} + D_\sigma. \quad (2.12)$$

Очевидно, что в первом напряжённом состоянии форма элемента не изменяется, а изменяется только его объём. Во втором напряжённом состоянии изменение объёма равно нулю и искажается только форма элемента.

Как показывают опыты, при всесторонних равных растяжениях или сжатиях пластические деформации не возникают. Образование их связано с искажением формы элемента. Поэтому произведённое разложение общего случая напряжённого состояния на два физически оправдано.

Девиатор напряжений показывает, насколько заданное напряжённое состояние отличается от всестороннего растяжения или сжатия напряжениями σ_0 .

Главные направления девиатора напряжений D_σ и тензора напряжений T_σ совпадают, а главные значения s_1, s_2, s_3 отличаются от $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на величину среднего давления и определяются, очевидно, кубическим уравнением

$$s^3 - I_2(D_\sigma)s - I_3(D_\sigma) = 0, \quad (2.13)$$

корни которого также вещественны.

Инварианты девиатора напряжений легко получить из (2.6):

$$\begin{aligned} I_1(D_\sigma) &= s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = (\sigma_{xx} - \sigma_0) + (\sigma_{yy} - \sigma_0) + (\sigma_{zz} - \sigma_0) = 0; \\ I_2(D_\sigma) &= -s_{xx}s_{yy} - s_{yy}s_{zz} - s_{zz}s_{xx} + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 = \\ &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \right]; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$I_3(D_\sigma) = \begin{vmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_0 \end{vmatrix}.$$

Выразим инварианты девиатора напряжений через его главные напряжения s_1 , s_2 и s_3 :

$$\begin{aligned} I_1(D_\sigma) &= s_1 + s_2 + s_3 = 0; \\ I_2(D_\sigma) &= -s_1s_2 - s_2s_3 - s_3s_1; \\ I_3(D_\sigma) &= s_1s_2s_3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Возводя первое равенство (2.15) в квадрат, получим

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 0,$$

откуда

$$-s_1s_2 - s_2s_3 - s_3s_1 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2).$$

Поэтому согласно второй формуле (2.15) устанавливаем

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2). \quad (2.16)$$

Возведём теперь первое равенство (2.15) в куб:

$$(s_1 + s_2 + s_3)^3 = 0$$

и, следовательно,

$$s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 + 3s_1^2s_2 + 3s_2^2s_1 + 3s_1^2s_3 + 3s_3^2s_1 + 3s_2^2s_3 + 3s_3^2s_2 + 6s_1s_2s_3 = 0.$$

Группируя слагаемые, имеем

$$s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 + 3s_1s_2(s_1 + s_2 + s_3) + 3s_2s_3(s_1 + s_2 + s_3) + 3s_3s_1(s_1 + s_2 + s_3) - 3s_1s_2s_3 = 0.$$

Используя первое соотношение (2.15), устанавливаем, что

$$s_1s_2s_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3).$$

Поэтому согласно третьей формуле (2.15) получаем

$$I_3(D_\sigma) = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3). \quad (2.17)$$

В сокращённой тензорной записи имеем

$$\begin{aligned} I_2(D_\sigma) &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}; \\ I_3(D_\sigma) &= \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.3 Интенсивность напряжений

Интенсивностью напряжений называют величину, пропорциональную квадратному корню из второго инварианта девиатора напряжения. В зависимости от принятого коэффициента пропорциональности различают понятия интенсивности нормальных напряжений или просто интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)}, \quad (2.19)$$

и интенсивности касательных напряжений

$$T = \sqrt{I_2(D_\sigma)}. \quad (2.20)$$

Сопоставляя выражения (2.19) и (2.20), заключаем, что

$$\sigma_i = \sqrt{3}T. \quad (2.21)$$

Подставляя в (2.19) второе соотношение (2.14), получим

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}. \quad (2.22)$$

В сокращённых обозначениях согласно формулам (2.18) и (2.19) имеем

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{ij} s_{ij}. \quad (2.23)$$

Зависимость интенсивности напряжений от главных напряжений записывается как

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (2.24)$$

Для частного случая одноосного растяжения ($\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) из формулы (2.24) имеем

$$\sigma_i = \sigma.$$

Таким образом, коэффициент пропорциональности $\sqrt{3}$ в формуле (2.19) был выбран для того, чтобы в простейшем случае одноосного растяжения интенсивность напряжений совпала с величиной наибольшего главного напряжения.

В случае чистого сдвига ($\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$) согласно формулам (2.24) и (2.21)

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau; \quad T = \tau.$$

Таким образом, при чистом сдвиге интенсивность касательных напряжений совпадает с величиной наибольшего касательного напряжения.

Поскольку кубическое уравнение (2.13) имеет вещественные корни, его решение можно записать в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{3} \sigma_i \cos \psi_\sigma; \\ s_2 &= \frac{2}{3} \sigma_i \cos \left(\psi_\sigma + \frac{4}{3} \pi \right); \\ s_3 &= \frac{2}{3} \sigma_i \cos \left(\psi_\sigma + \frac{2}{3} \pi \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь так называемый угол вида напряжённого состояния ψ_σ определяется из уравнения

$$\cos 3\psi_\sigma = \frac{27I_3(D_\sigma)}{2\sigma_i^3}.$$

Выразим теперь через угол вида напряжённого состояния главные касательные напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{s_2 - s_3}{2} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \sin \psi_\sigma; \\ \tau_2 &= \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{s_3 - s_1}{2} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \sin \left(\psi_\sigma + \frac{4}{3} \pi \right); \\ \tau_3 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{s_1 - s_2}{2} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \sin \left(\psi_\sigma + \frac{2}{3} \pi \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Формулы (2.25) и (2.26) имеют наглядное графическое представление (рисунок 2.2).

Если условие (2.7) выполняется, то $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \leq 0$, $\tau_3 \geq 0$, т.е. $\sin \psi_\sigma \geq 0$, $\sin \left(\psi_\sigma + \frac{4}{3} \pi \right) \leq 0$, $\sin \left(\psi_\sigma + \frac{2}{3} \pi \right) \geq 0$.

Из этих неравенств устанавливаем пределы изменения угла вида напря-

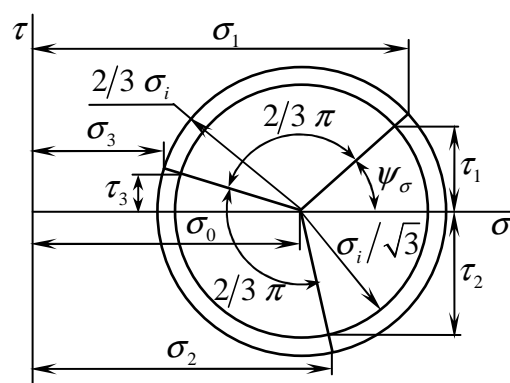


Рисунок 2.2 – Звезда Пелчинского для напряжений

жённого состояния:

$$0 \leq \psi_\sigma \leq \frac{\pi}{3}.$$

Поскольку $\tau_{\max} = -\tau_2$, отсюда вытекает неравенство

$$\sqrt{3} \leq \frac{\sigma_i}{\tau_{\max}} \leq 2.$$

Таким образом, пределы изменения σ_i/τ_{\max} весьма невелики. Среднее значение составляет $(2 + \sqrt{3})/2 = 1,87$; оно отличается от крайних значений примерно на 7%.

С достаточной степенью точности можно принять

$$\sigma_i \approx \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \tau_{\max} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} (\sigma_1 - \sigma_3) = 0,933 (\sigma_1 - \sigma_3). \quad (2.27)$$

Это выражение устанавливает приближённую зависимость интенсивности напряжений от главных напряжений.

Отсюда следует, что

$$T \approx 1,08 \tau_{\max},$$

т.е. интенсивность касательных напряжений и максимальное касательное напряжение незначительно отличаются друг от друга.

2.4 Геометрические интерпретации

Введём пространство главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. В рассматриваемом пространстве напряжённое состояние в данной точке можно представить вектором \overline{OP} , компоненты которого равны $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рисунок 2.3):

$$\overline{OP} = \sigma_1 \vec{i}_1 + \sigma_2 \vec{i}_2 + \sigma_3 \vec{i}_3,$$

где $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ – единичные векторы по осям координат.

Плоскость

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (2.28)$$

проходит через начало координат и одинаково наклонена к осям. Единичный вектор нормали к этой плоскости равен

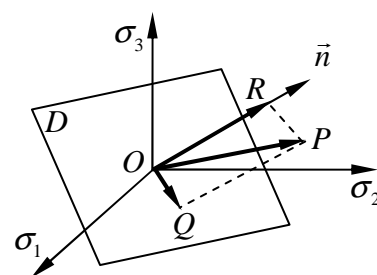


Рисунок 2.3 – Пространство главных напряжений

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3),$$

поскольку сумма квадратов направляющих косинусов нормали равна единице.

Прямая линия

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

проходит через начало координат и перпендикулярна рассматриваемой плоскости. Точки этой линии, называемой гидростатической осью, отвечают гидростатическим напряжённым состояниям.

Проекция вектора \overline{OP} на нормаль пропорциональна среднему давлению:

$$\overline{OR} = \sqrt{3} \sigma_0 \vec{n},$$

так как

$$\overline{OP} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sqrt{3} \sigma_0.$$

Введём теперь вектор

$$\overline{OQ} = s_1 \vec{i}_1 + s_2 \vec{i}_2 + s_3 \vec{i}_3,$$

изображающий девиатор D_σ . Поскольку

$$\sigma_1 = \sigma_0 + s_1; \quad \sigma_2 = \sigma_0 + s_2; \quad \sigma_3 = \sigma_0 + s_3,$$

имеем

$$\overline{OP} = \overline{OR} + \overline{OQ}.$$

Заметим, что

$$\overline{OQ} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(s_1 + s_2 + s_3) = 0,$$

т.е. вектор \overline{OQ} лежит в плоскости (2.28). В связи с этим последнюю принято называть девиаторной плоскостью.

Длина вектора \overline{OQ} пропорциональна интенсивности напряжений. Действительно, используя формулы (2.16) и (2.19), получим

$$|\overline{OQ}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2I_2(D_\sigma)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i.$$

Угол вида напряжённого состояния ψ_σ определяет положение вектора \overline{OQ} на девиаторной плоскости D . Действительно, пусть оси $1', 2', 3'$ суть проекции осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на плоскость D (рисунок 2.4). Поскольку

$$\cos(\sigma_1, 1') = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \cos(\sigma_2, 1') = -\frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos(\sigma_3, 1') = -\frac{1}{\sqrt{6}},$$

то проекция вектора \overline{OQ} на ось $1'$ с учётом (2.25) будет равна

$$s_1 \cos(\sigma_1, 1') + s_2 \cos(\sigma_2, 1') + s_3 \cos(\sigma_3, 1') = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i \cos \psi_\sigma.$$

Таким образом, угол между вектором \overline{OQ} и осью $1'$ составляет ψ_σ . Вектор \overline{OQ} не может отклониться от оси $1'$ больше чем на 60° .

Если на девиаторной плоскости в направлении осей $1', 2', 3'$ отложить главные напряжения, то замыкающая ломаной линии, отрезки которой равны главным напряжениям, является интенсивностью напряжений σ_i (см. рисунок 2.4). Это построение называют диаграммой Марциняка.

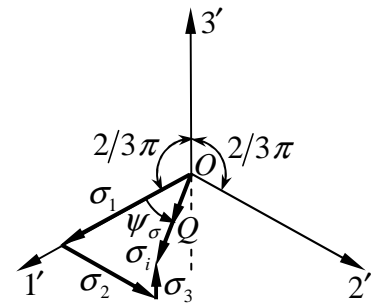


Рисунок 2.4 – Диаграмма Марциняка для напряжений

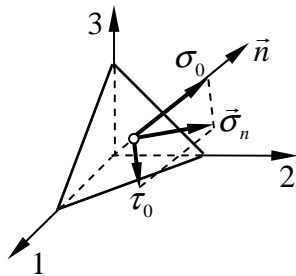


Рисунок 2.5 – Октаэдрическая площадка

Рассмотрим теперь в данной точке среды площадку, одинаково наклонённую к главным осям. Такую площадку называют октаэдрической, так как она является гранью правильного октаэдра (рисунок 2.5). Проекции вектора напряжения $\vec{\sigma}_n$, действующего на октаэдрической площадке, по формулам (2.2) соответственно равны $\sigma_1/\sqrt{3}, \sigma_2/\sqrt{3}, \sigma_3/\sqrt{3}$. Следовательно, согласно (2.3) и (2.4) нормальное напряжение на этой площадке равно среднему давлению σ_0 , а касательное напряжение, называемое октаэдрическим, пропорционально интенсивности напряжений:

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i. \quad (2.29)$$

Наглядное представление о напряжениях в различных сечениях, проходящих через данную точку, даёт круговая диаграмма Мора. Она состоит из трёх полуокружностей, диаметрами которых являются разности главных напряжений (рисунок 2.6). Координаты точек, лежащих в заштрихованной области между полуокружностями, представляют собой нормальное и касательное напряжение в произвольно ориентированных площадках. При наложении на тело дополнительного всестороннего давления радиусы окружностей, очевидно, не изменяются, и вся фигура лишь смещается вдоль горизонтальной оси σ .

Вид напряжённого состояния с точностью до равноосного растяжения или сжатия можно оценить так называемым параметром Надаи-Лоде

$$\chi_\sigma = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1, \quad (2.30)$$

который изменяется от -1 до 1.

Для одних и тех же величин χ_σ диаграммы Мора подобны.

Используя (2.25) и (2.30), можно установить, что данный параметр связан с углом вида напряжённого состояния:

$$\chi_\sigma = -\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\psi_\sigma + \frac{4}{3} \pi \right). \quad (2.31)$$

Согласно формулам (2.30) и (2.31) для одноосного растяжения $\chi_\sigma = -1$ и $\psi_\sigma = 0$; для одноосного сжатия $\chi_\sigma = 1$ и $\psi_\sigma = \pi/3$; для чистого сдвига $\chi_\sigma = 0$ и $\psi_\sigma = \pi/6$.

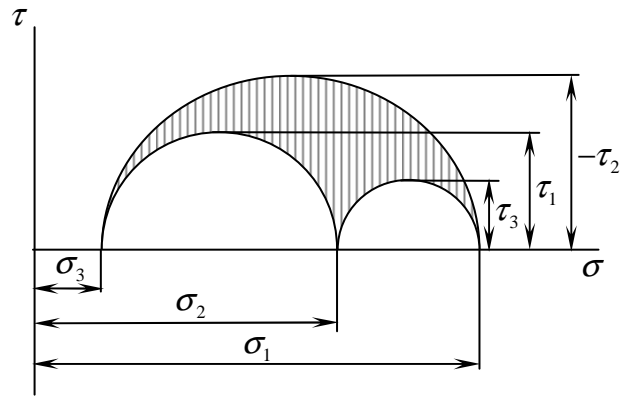


Рисунок 2.6 – Круговая диаграмма Мора

3 ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

3.1 Деформированное состояние в точке тела

Предположим, что некоторая точка M (рисунок 3.1) тела в результате его деформации перемещается в положение M_1 . Обозначим проекции перемещения этой точки на оси координат через u_x , u_y и u_z . В случае, когда перемещения малы по сравнению с размерами тела, компоненты деформаций связаны с компонентами перемещения линейными зависимостями:

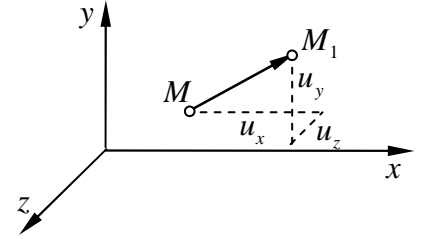


Рисунок 3.1 – Перемещение точки тела

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Шесть компонент деформаций образуют симметричный тензор деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

При использовании тензорной символики общая компонента тензора деформаций имеет вид ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), причём

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx}; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy}; \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{zz}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{xy}}{2}; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\gamma_{yz}}{2}; \quad \varepsilon_{31} = \frac{\gamma_{zx}}{2}.$$

Зависимости компонент деформаций от компонент перемещения (3.1) в сокращённой тензорной форме имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.3)$$

Из соотношений (3.1) следует, что шесть компонент деформаций выражаются через три компоненты перемещения. Следовательно, они не могут

быть независимыми, между ними должны существовать какие-то зависимости, которые называются условиями совместности деформаций. Для их получения необходимо из уравнений (3.1) исключить перемещения.

Отметим, что в каждой точке деформированного тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, для которых компоненты угловой деформации равны нулю и, следовательно, угол между этими осями при деформации не изменяется. Эти оси называются главными осями деформации и обозначаются 1, 2, 3. Линейные деформации в направлении этих осей называются главными линейными деформациями и обозначаются $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Главные линейные деформации являются корнями кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - I_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 - I_2(T_\varepsilon)\varepsilon - I_3(T_\varepsilon) = 0. \quad (3.4)$$

Три корня этого уравнения являются вещественными. Поскольку главные деформации не могут зависеть от выбора системы координат, то коэффициенты кубического уравнения также не изменяются при повороте осей координат, т.е. являются инвариантами. Их называют соответственно первым, вторым и третьим инвариантами тензора деформаций и определяют следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}; \\ I_2(T_\varepsilon) &= -\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} + \frac{\gamma_{xy}^2}{4} + \frac{\gamma_{yz}^2}{4} + \frac{\gamma_{zx}^2}{4}; \\ I_3(T_\varepsilon) &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Очевидно, что выражения инвариантов тензора деформаций через главные деформации имеют вид

$$\begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ I_2(T_\varepsilon) &= -\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1; \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Следует отметить, что угловые деформации принимают экстремальные значения для направлений, лежащих в главных плоскостях и составляющих угол 45° с главными осями. Они называются главными сдвигами и равны разности главных линейных деформаций:

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1; \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (3.7)$$

Наибольший по величине сдвиг в данной точке будем называть максимальным сдвигом $\gamma_{\max} = -\gamma_2$.

3.2 Разложение тензора деформаций

Аналогично напряжённому состоянию общий случай деформированного состояния, характеризуемый тензором T_ε , можно представить в виде суммы двух деформированных состояний.

Первое деформированное состояние характеризуется шаровым тензором

$$T_{\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{3} = \frac{\varepsilon_{ii}}{3} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (3.8)$$

а второе – девиатором

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix},$$

причём

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0. \quad (3.9)$$

Таким образом,

$$T_\varepsilon = T_{\varepsilon_0} + D_\varepsilon.$$

Из (3.9) следует, что

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0, \quad (3.10)$$

т.е. во втором деформированном состоянии изменение объёма равно нулю.

Таким образом, в первом деформированном состоянии изменяется объём (форма не изменяется), а во втором – форма (изменение объёма равно ну-

лю). Данное разделение деформированного состояния имеет определённый физический смысл, поскольку возникновение пластических деформаций в материале связано с образованием сдвигов и, следовательно, с изменением формы элементарного объёма. При всесторонних равных растяжениях или сжатиях пластические деформации не возникают.

Девиатор деформаций показывает, насколько исследуемое деформированное состояние уклоняется от всестороннего равного растяжения с деформациями ε_0 .

Получим второй и третий инварианты девиатора деформаций (первый инвариант согласно (3.10) равен нулю). Для этого подставим в формулы (3.5) компоненты девиатора деформаций (3.9). Тогда с учётом (3.8) получим

$$I_2(D_\varepsilon) = -e_{xx}e_{yy} - e_{yy}e_{zz} - e_{zz}e_{xx} + e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2 = \\ = \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]; \quad (3.11)$$

$$I_3(D_\varepsilon) = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_0 & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_0 & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_0 \end{vmatrix}.$$

В сокращённой тензорной записи имеем

$$I_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}; \\ I_3(D_\varepsilon) = \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{ki}. \quad (3.12)$$

3.3 Интенсивность деформаций

По аналогии с напряжениями интенсивностью деформаций называется величина, пропорциональная квадратному корню из второго инварианта девиатора деформаций. В зависимости от принятого коэффициента пропорциональности различают понятия интенсивности линейных деформаций или просто интенсивности деформаций

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{4}{3} I_2(D_\varepsilon)} \quad (3.13)$$

и интенсивности угловых деформаций (или деформаций сдвига)

$$\Gamma = \sqrt{4I_2(D_\varepsilon)}. \quad (3.14)$$

Сопоставляя (3.13) и (3.14), заключаем, что

$$\varepsilon_i = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}}. \quad (3.15)$$

Подставляя формулу (3.11) в (3.13), получим

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (3.16)$$

Используя (3.12), можно получить сокращённую запись интенсивности деформаций:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}. \quad (3.17)$$

Зависимость интенсивности деформаций от главных линейных деформаций записывается как

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (3.18)$$

Для частного случая растяжения изотропного материала, поскольку $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, имеем

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_2);$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon - 3\varepsilon_0}{2}.$$

Тогда по формуле (3.18) получаем

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Если принять условие несжимаемости материала (т.е. коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$), тогда $\varepsilon_0 = 0$ и $\varepsilon_i = \varepsilon$.

Для случая чистого сдвига изотропного материала ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$, $\gamma_{xy} = \gamma$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) из формулы (3.16) имеем

$$\varepsilon_i = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}.$$

Из (3.15) следует, что при чистом сдвиге интенсивность сдвиговых деформаций совпадает с величиной наибольшей угловой деформации:

$$\Gamma = \gamma.$$

Можно доказать, что средняя линейная деформация ε_0 равна линейной деформации в направлении, составляющем равные углы с тремя главными осями, а интенсивность деформаций пропорциональна максимальной угловой деформации между этим направлением и направлением, перпендикулярным к нему:

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Данную величину называют октаэдрической деформацией сдвига.

3.4 Геометрические интерпретации

Рассмотренные выше геометрические интерпретации тензора напряжений могут быть развиты для любого симметричного тензора, в частности, и для тензора деформаций.

Подобно предыдущему для главных значений девиатора деформаций получим

$$\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_i \cos \psi_\varepsilon; \\ e_2 &= \varepsilon_i \cos \left(\psi_\varepsilon + \frac{4}{3} \pi \right); \\ e_3 &= \varepsilon_i \cos \left(\psi_\varepsilon + \frac{2}{3} \pi \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где угол вида деформированного состояния ψ_ε определяется формулой

$$\cos 3\psi_\varepsilon = \frac{4I_3(D_\varepsilon)}{\varepsilon_i^3}.$$

Величины главных деформаций сдвига можно выразить через угол ψ_ε при помощи следующих зависимостей:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{3} \varepsilon_i \sin \psi_\varepsilon; \\ \gamma_2 &= \sqrt{3} \varepsilon_i \sin \left(\psi_\varepsilon + \frac{4}{3} \pi \right); \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\gamma_3 = \sqrt{3} \varepsilon_i \sin\left(\psi_\varepsilon + \frac{2}{3}\pi\right).$$

Пределы изменения угла вида деформированного состояния такие же, как и у ψ_σ , т.е.

$$0 \leq \psi_\varepsilon \leq \frac{\pi}{3}.$$

Поскольку $\gamma_{\max} = -\gamma_2$, отсюда вытекает неравенство

$$\frac{2}{3} \leq \frac{\varepsilon_i}{\gamma_{\max}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Взяв среднее значение этого отношения, получаем

$$\varepsilon_i \approx \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \gamma_{\max} = 0,622(\varepsilon_1 - \varepsilon_3). \quad (3.21)$$

Оно отличается от крайних значений примерно на 7%.

Отсюда следует, что

$$\Gamma \approx 1,08 \gamma_{\max},$$

т.е. интенсивность деформаций сдвига и максимальная деформация сдвига незначительно отличаются друг от друга.

Для деформаций сохраняет смысл и диаграмма Мора. При этом по оси абсцисс откладывают линейные деформации, а по оси ординат – половины угловых деформаций.

По аналогии с соответствующей величиной для напряжений параметр Надаи-Лоде для деформаций определяется как

$$\chi_\varepsilon = 2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} - 1; \quad (3.21)$$

он характеризует вид деформированного состояния с точностью до равноосного растяжения или сжатия, изменяется от -1 до 1 и связан с углом вида ψ_ε соотношением

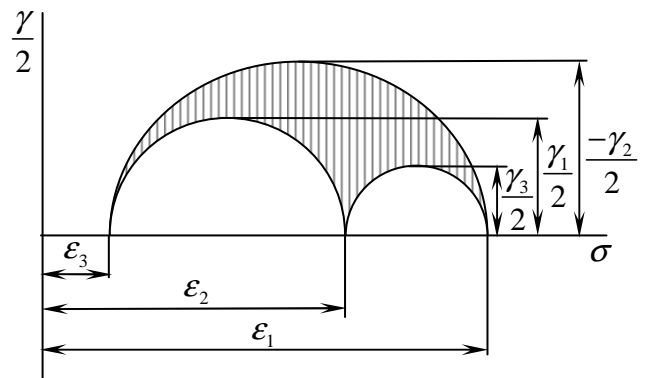


Рисунок 3.2 – Диаграмма Мора для деформаций

$$\chi_\varepsilon = -\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\psi_\varepsilon + \frac{4}{3} \pi \right). \quad (3.22)$$

Следует отметить, что для одноосного растяжения, сжатия и чистого сдвига значения параметров Надаи-Люде и углов вида для напряжений и деформаций совпадают.

Формулы (3.19) и (3.20) могут быть графически интерпретированы при помощи построения, называемого звездой Пелчинского, которое аналогично изображению на рисунке 2.2. Можно также построить диаграмму Марциняка.

3.5 Приращения и скорости деформаций

Предположим, что в течение бесконечно малого промежутка времени dt компоненты перемещения u_i некоторой точки тела возрастают на величину

$$du_i = v_i dt, \quad (3.23)$$

где v_i – компоненты скорости перемещения точки.

Вычислим по формулам (3.3) бесконечно малые приращения компонент деформаций:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (du_j) \right). \quad (3.24)$$

Эти величины образуют тензор бесконечно малых приращений деформаций $T_{d\varepsilon}$. Аналогично тому, как было сделано для деформаций, можно определить интенсивность приращений деформаций:

$$\overline{d\varepsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{xx} - d\varepsilon_{yy})^2 + (d\varepsilon_{yy} - d\varepsilon_{zz})^2 + (d\varepsilon_{zz} - d\varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2)} \quad (3.25)$$

или в сокращённой тензорной записи

$$\overline{d\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3} de_{ij} de_{ij}}. \quad (3.26)$$

Интенсивность приращений деформаций $\overline{d\varepsilon}_i$ не равняется приращению интенсивности $d\varepsilon_i$, чем и объясняется введение чёрточки в обозначение для интенсивности приращений деформаций.

В формулах (3.24) приращения компонент деформаций вычисляется по отношению к текущему (мгновенному) состоянию. Например, в частном слу-

чае одноосного растяжения стержня приращение осевой деформации находится как

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l},$$

где l – текущая длина стержня; dl – бесконечно малое её изменение. Суммирование приращений деформаций приводит к так называемой логарифмической деформации (или натуральному удлинению):

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l + \Delta l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon), \quad (3.27)$$

где l_0 – длина стержня до деформации; Δl – удлинение; $\varepsilon = \Delta l/l$ – обычная деформация стержня.

Следует отметить, что при $\varepsilon < 20\%$ различие между логарифмической и обычной деформациями незначительно (при $\varepsilon = 20\%$ оно составляет 10%).

Если главные оси при деформации не поворачиваются, интегралы $\int d\varepsilon_{ij}$ имеют простой физический смысл, равняясь соответствующим натуральным удлинениям. Очевидно, что при этом справедлив простой закон сложения деформаций: сумма последовательных натуральных удлинений равна суммарному натуральному удлинению. В общем случае интегралы $\int d\varepsilon_{ij}$ не имеют физического смысла. Их можно вычислить, если известен путь деформирования, т.е. если известны компоненты приращений деформаций в функции некоторого параметра, характеризующего процесс деформирования.

Подставив (3.23) в (3.24), приходим к заключению, что компоненты бесконечно малых приращений деформаций имеют общий множитель dt . Разделив их на данный множитель, получим компоненты скоростей деформаций:

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.28)$$

Эти величины образуют тензор скоростей деформаций T_ξ . Здесь также можно определить интенсивность скоростей деформаций:

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{ij} \xi_{ij}}. \quad (3.29)$$

4 УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

4.1 Физические соотношения для упругого изотропного тела

В пределах упругости зависимости компонент деформаций от напряжений для изотропного тела описываются обобщённым законом Гука:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right]; & \gamma_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \right]; & \gamma_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right]; & \gamma_{zx} &= \frac{\sigma_{zx}}{G},\end{aligned}\quad (4.1)$$

где E и G – модули упругости и сдвига материала; μ – коэффициент Пуассона. Между этими упругими постоянными существует следующая связь:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (4.2)$$

Объёмная деформация θ , равная при малых деформациях сумме линейных деформаций, пропорциональна сумме нормальных напряжений:

$$\theta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (4.3)$$

где

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \quad (4.4)$$

– объёмный модуль упругости.

Если принять $\mu = 0,3$, то согласно формуле (4.4) $K = E/1,2$. Если же $\mu = 1/3$, то $K = E$.

Решая уравнения (4.1) относительно компонент напряжений, получаем закон Гука в форме Ламе:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\theta = 2G \left(\varepsilon_{xx} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \theta \right); & \sigma_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda\theta = 2G \left(\varepsilon_{yy} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \theta \right); & \sigma_{yz} &= G\gamma_{yz};\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\theta = 2G\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta\right); \quad \sigma_{zx} = G\gamma_{zx},$$

где

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{2\mu G}{1-2\mu}.$$

Напомним, что в теории упругости G и μ называются упругими постоянными Ламе.

Установим связь между компонентами девиаторов напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} e_{xx} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_0 &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] - \frac{1-2\mu}{3E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \\ &= \frac{1+\mu}{E} (\sigma_{xx} - \sigma_0) = \frac{1}{2G} (\sigma_{xx} - \sigma_0) = \frac{s_{xx}}{2G}. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$e_{yy} = \frac{s_{yy}}{2G}; \quad e_{zz} = \frac{s_{zz}}{2G}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} e_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2}; & e_{yz} &= \frac{\gamma_{yz}}{2}; & e_{zx} &= \frac{\gamma_{zx}}{2}; \\ s_{xy} &= \sigma_{xy}; & s_{yz} &= \sigma_{yz}; & s_{zx} &= \sigma_{zx}, \end{aligned}$$

получим

$$e_{xy} = \frac{s_{xy}}{2G}; \quad e_{yz} = \frac{s_{yz}}{2G}; \quad e_{zx} = \frac{s_{zx}}{2G}.$$

Таким образом, в пределах упругости компоненты девиатора напряжений пропорциональны компонентам девиатора деформаций:

$$s_{ij} = 2G e_{ij} \quad \text{или} \quad D_\sigma = 2G D_\varepsilon. \quad (4.6)$$

Выясним связь между интенсивностями напряжений и деформаций в пределах упругости. Для этого подставим (4.6) в формулу (2.23):

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = 2G \sqrt{\frac{3}{2} e_{ij} e_{ij}}.$$

Тогда с учётом (3.17) получим

$$\sigma_i = 3G \varepsilon_i. \quad (4.7)$$

или на основании соотношений (2.21) и (3.15)

$$T = G\Gamma. \quad (4.8)$$

Аналогично связаны октаэдрические касательное напряжение и деформация сдвига:

$$\tau_0 = G\gamma_0. \quad (4.9)$$

Таким образом, в пределах упругости интенсивность напряжений пропорциональна интенсивности деформаций.

4.2 Условия начала пластичности

На начальном этапе нагружения в деформируемом теле возникают лишь упругие деформации. Однако по мере роста внешней нагрузки в некоторых точках тела могут появиться такие деформации, которые не исчезают после снятия нагрузки. Эти деформации называются пластическими, а момент их появления – началом перехода тела в пластическое состояние. Так, в случае простого растяжения пластические деформации появляются при $\sigma_1 = \sigma_T$. Возникает вопрос о возможной форме условия, характеризующего переход за пределы упругости при сложном напряжённом состоянии. Это условие называется условием начала пластичности (или текучести).

Поскольку в начальной стадии нагружения справедлив закон Гука, возникновение пластических деформаций однозначно определяется напряжениями. Следовательно, условие начала пластичности может быть представлено в виде

$$f_T(\sigma_{ij}) = 0. \quad (4.10)$$

В это уравнение входят также механические характеристики материала, характеризующие возникновение пластических деформаций при простейших напряжённых состояниях, например, пределы текучести при одноосных растяжении и сжатии.

В шестимерном пространстве компонент напряжений σ_{ij} уравнение (4.10) описывает некоторую гиперповерхность начала пластичности, т.е. пластические деформации возникают в тот момент, когда вектор $\vec{\sigma}_{ij}$, составляющие которого равны компонентам тензора напряжений, достигает этой поверхности (рисунок 4.1).

Для изотропного тела значения функции $f_T(\sigma_{ij})$ не должны зависеть от выбора системы координат, т.е. условие начала пластичности может быть записано в виде функции инвариантов тензора напряжений:

$$f_T[I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)] = 0.$$

Как отмечалось ранее, при всесторонних равных растяжениях или сжатиях пластические деформации не возникают. Поэтому условие начала пластичности может быть представлено в виде функции второго и третьего инвариантов девиатора напряжений (так как его первый инвариант равен нулю):

$$f_T[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = 0. \quad (4.11)$$

В системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (см. рисунок 2.3) уравнение (4.11) описывает цилиндр, образующие которого перпендикулярны девиаторной плоскости, поскольку среднее давление не входит в данное уравнение. Поэтому достаточно рассмотреть след цилиндра на девиаторной плоскости. Эта кривая C должна обладать следующими свойствами: 1) она не должна проходить через начало координат, так как пластические деформации возникают лишь при значительных напряжениях; 2) луч из начала координат должен пересекать кривую только один раз (иначе существовало бы два условия начала пластичности); 3) кривая должна быть симметричной относительно осей $1', 2', 3'$, так как они равноправны вследствие изотропности тела; 4) кривая должна быть симметричной относительно прямых, перпендикулярных к осям $1', 2', 3'$, поскольку предполагается, что механические свойства материала при растяжении и сжатии одинаковы.

На основании изложенного заключаем, что кривая C состоит из 12 одинаковых дуг (рисунок 4.2). В дальнейшем будет показано, что она должна быть выпуклой. Очевидно также, что данная кривая должна проходить через точки на осях $1', 2', 3'$ с координатами $\sqrt{2/3}\sigma_T$, поскольку косинусы углов между осями σ_1 и $1'$, σ_2 и $2'$, σ_3 и $3'$ равны $\sqrt{2/3}$, а точки на осях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, изображающие одноосные напряжённые состояния, имеют координаты σ_T .

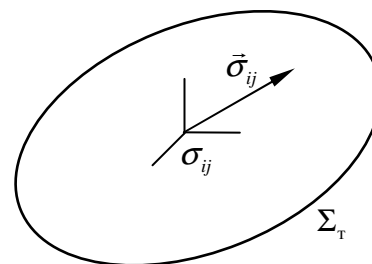


Рисунок 4.1 – Поверхность начала пластичности

В 1871 г. Сен-Венан, основываясь на опытах Треска (1868 г.) по истечению металлов через отверстие, высказал предположение, что тело переходит в пластическое состояние в тот момент, когда максимальное касательное напряжение τ_{\max} достигает предела текучести материала при чистом сдвиге τ_T .

Поскольку

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

данное условие начала пластичности может быть записано как

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_T. \quad (4.12)$$

Очевидно, что условие начала пластичности не должно зависеть от вида напряжённого состояния. Так, для одноосного растяжения ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) пластические деформации возникают при $\sigma_1 = \sigma_T$. Подставляя последнее равенство в (4.12), получаем

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{2}. \quad (4.13)$$

Данный результат позволяет переписать уравнение (4.12) в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (4.14)$$

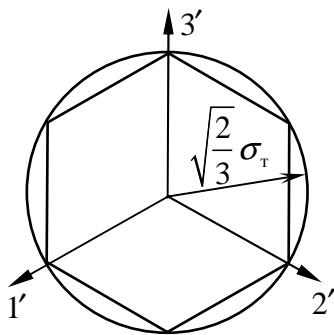


Рисунок 4.3 – Следы поверхностей пластичности Треска–Сен-Венана и Мизеса

В курсе сопротивления материалов условие (4.14) является следствием теории прочности наибольших касательных напряжений. Его часто называют условием пластичности Треска–Сен-Венана. В системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ это условие определяет шестигранную призму с осью, перпендикулярной девиаторной плоскости, которая в пересечении с последней даёт правильный шестиугольник, вписанный в круг радиуса $\sqrt{2/3} \sigma_T$ (рисунок 4.3).

Недостатком рассмотренного условия начала пластичности является то, что оно не учитывает влияния промежуточного главного напряжения σ_2 на возникновение пластических деформаций.

В 1913 г. Мизес предложил приближённо заменить шестигранную призму в координатах $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ круговым цилиндром, уравнение которого

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (4.15)$$

Пересечение этого цилиндра с девиаторной плоскостью даст окружность, описанную вокруг шестиугольника (см. рисунок 4.3). Мизес считал условие (4.14) точным, а (4.15) приближённым. Однако произведённая в дальнейшем экспериментальная проверка показала, что условие (4.15) лучше согласуется с результатами опытов, нежели (4.14). В курсе сопротивления материалов условие (4.15) обычно выводится путём рассмотрения потенциальной энергии изменения формы.

Заметим, что согласно уравнению (2.24) условие (4.15) может быть представлено в виде

$$\sigma_i = \sigma_T, \quad (4.16)$$

т.е. пластические деформации возникают тогда, когда интенсивность напряжений достигает величины предела текучести материала при растяжении. Это условие называют условием пластичности Мизеса (или Хубера–Мизеса).

Рассмотрим случай чистого сдвига ($\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$), для которого условие возникновения пластических деформаций имеет вид $\tau = \tau_T$. Подставляя данные значения в уравнение (4.15), получим

$$\tau_T^2 + \tau_T^2 + (-\tau_T - \tau_T)^2 = 6\tau_T^2 = 2\sigma_T^2.$$

Тогда

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} = 0,577\sigma_T, \quad (4.17)$$

что несколько отличается от значения (4.13). Как показывают экспериментальные исследования, $\tau_T = (0,5 \dots 0,6)\sigma_T$.

5 ДЕФОРМАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Существующие в настоящее время теории пластичности можно разбить на две группы. В первой группе теорий, которые называются деформационными, устанавливаются зависимости между напряжениями и деформациями. Во второй группе рассматриваются связи между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений. В частном случае получают зависимости скоростей деформаций от напряжений. В теориях второй группы пластическая деформация рассматривается как процесс пластического течения материала. Поэтому они называются теориями течения.

5.1 Основные гипотезы и соотношения деформационной теории пластичности

В основу деформационной теории пластичности положены следующие гипотезы:

1. Объёмная деформация прямо пропорциональна среднему нормальному напряжению (давлению), причём коэффициент пропорциональности тот же, что и в пределах упругости.
2. Компоненты девиатора напряжений пропорциональны компонентам девиатора деформаций.
3. Интенсивность напряжений является функцией интенсивности деформаций, не зависящей от вида напряжённого состояния.

Согласно первой гипотезе

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (5.1)$$

где K – объёмный модуль упругости, определяемый формулой (4.4).

Заметим, что возможна и иная формулировка первой гипотезы: за счёт пластической деформации изменение объёма не происходит. Экспериментально установлено, что упругое изменение объёма невелико и поэтому им можно пренебречь ($\theta = 0$). В таком случае принято говорить, что материал несжимаем. При этом $K = \infty$, а $\mu = 0,5$.

Согласно второй гипотезе

$$D_\sigma = \psi D_\varepsilon \quad (5.2)$$

или в развёрнутом виде

$$\sigma_{xx} - \sigma_0 = \psi(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0); \quad \sigma_{xy} = \psi\varepsilon_{xy};$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} - \sigma_0 &= \psi(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_0); & \sigma_{yz} &= \psi\varepsilon_{yz}; \\ \sigma_{zz} - \sigma_0 &= \psi(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0); & \sigma_{zx} &= \psi\varepsilon_{zx}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

В пределах упругости $\psi = 2G$ – постоянная величина. Для определения коэффициента ψ за пределами упругости запишем соотношения (5.3) в главных напряжениях и деформациях:

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_0 &= \psi(\varepsilon_1 - \varepsilon_0); \\ \sigma_2 - \sigma_0 &= \psi(\varepsilon_2 - \varepsilon_0); \\ \sigma_3 - \sigma_0 &= \psi(\varepsilon_3 - \varepsilon_0).\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \psi(\varepsilon_1 - \varepsilon_2); \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \psi(\varepsilon_2 - \varepsilon_3); \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \psi(\varepsilon_3 - \varepsilon_1).\end{aligned}$$

Далее записываем

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \psi^2 \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right]$$

или с учётом (2.24) и (3.18)

$$2\sigma_i^2 = \psi^2 \cdot \frac{9}{2} \varepsilon_i^2.$$

Тогда

$$\psi = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}. \quad (5.4)$$

Внося (5.4) в (5.3), получим

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0); & \sigma_{xy} &= \frac{2\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{xy}; \\ \sigma_{yy} - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_0); & \sigma_{yz} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{yz}; \\ \sigma_{zz} - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0); & \sigma_{zx} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{zx}.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$, выводим формулы для вычисления напряжений через деформации

$$\sigma_{xx} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0) + 3K\varepsilon_0; \quad \sigma_{xy} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{xy};$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_0) + 3K\varepsilon_0; & \sigma_{yz} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{yz}; \\ \sigma_{zz} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0) + 3K\varepsilon_0; & \sigma_{zx} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{zx}\end{aligned}\quad (5.5)$$

и обратные выражения

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_{xx} - \sigma_0) + \frac{\sigma_0}{3K}; & \varepsilon_{xy} &= \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} \sigma_{xy}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_{yy} - \sigma_0) + \frac{\sigma_0}{3K}; & \varepsilon_{yz} &= \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} \sigma_{yz}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_{zz} - \sigma_0) + \frac{\sigma_0}{3K}; & \varepsilon_{zx} &= \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} \sigma_{zx}.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Отметим, что деформации можно разделить на упругие, связанные с напряжениями законом Гука (4.1), и пластические:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xxe} + \varepsilon_{xxp}; \quad \dots; \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zxe} + \varepsilon_{zxp}.$$

При этом легко доказать, что интенсивности полных, упругих и пластических деформаций так же обладают аддитивными свойствами, как и сами деформации, т.е.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ie} + \varepsilon_{ip}.$$

Рассмотрим третью гипотезу деформационной теории. В соответствии с формулировкой этой гипотезы для определения зависимости $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ можно воспользоваться результатами испытаний на растяжение. Проведение последних, как правило, проще, чем при иных типах нагружения.

График зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций будем называть диаграммой деформирования материала.

5.2 Построение диаграммы деформирования материала

При простом растяжении изотропного тела $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu\varepsilon$. Для данного случая выражения для интенсивностей напряжений и деформаций были получены в подразделах 2.3 и 3.3. Они имеют вид

$$\sigma_i = \sigma; \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \varepsilon_0. \quad (5.8)$$

Учитывая, что при одноосном растяжении $\sigma_0 = \sigma/3$, и используя соотношения (4.3) и (4.4), получим

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \frac{1-2\mu}{3E} \sigma. \quad (5.9)$$

Таким образом, при помощи формул (5.7) и (5.9) можно по диаграмме растяжения материала подсчитать величины σ_i и ε_i , определяющие диаграмму деформирования. Геометрическая иллюстрация данного преобразования представлена на рисунке 5.1.

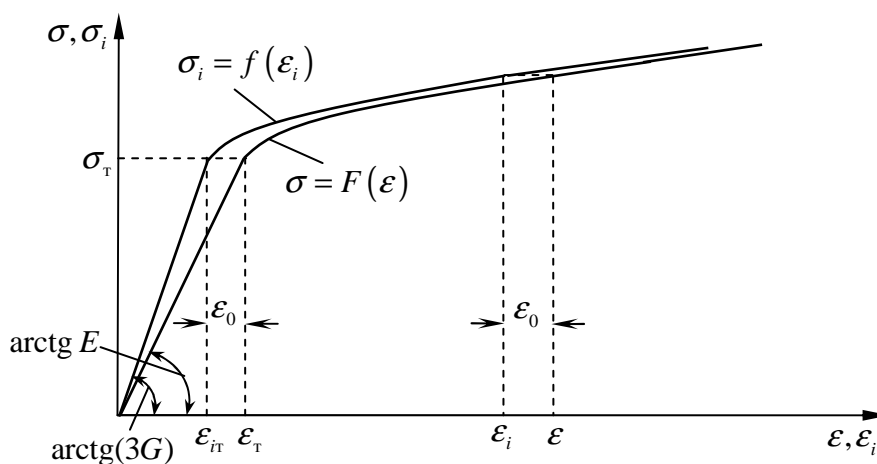


Рисунок 5.1 – Построение диаграммы деформирования по диаграмме растяжения материала

Если принять условие несжимаемости материала, то

$$\varepsilon_0 = 0; \quad \mu = 0,5; \quad 3G = E$$

и диаграмма деформирования материала совпадёт с диаграммой растяжения.

Зависимость $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ можно получить и из опыта на кручение тонкостенной трубки. При кручении трубка находится в состоянии чистого сдвига (рисунок 5.2):

$$\tau = \frac{M}{2\pi R^2 h},$$

где R – радиус трубки; h – толщина стенки.

При чистом сдвиге выражения для интенсивностей касательных напряжений и сдвиговых деформаций были получены в подразделах 2.3 и 3.3:

$$T = \tau; \quad \Gamma = \gamma, \quad (5.10)$$

Здесь γ – деформация сдвига трубки.

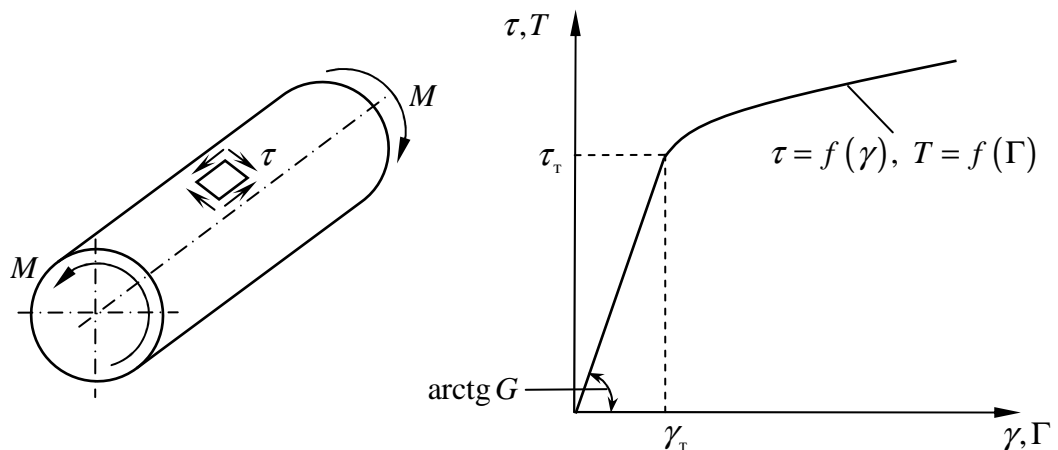


Рисунок 5.2 – Кручение трубки

Следствием этого является совпадение зависимостей $\tau = f(\gamma)$ и $T = f(\Gamma)$.

Далее, используя связь интенсивностей нормальных и касательных напряжений, а также интенсивностей линейных и сдвиговых деформаций

$$T = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}; \quad \Gamma = \sqrt{3} \varepsilon_i,$$

получаем диаграмму деформирования материала:

$$\sigma_i = \sqrt{3} f(\sqrt{3} \varepsilon_i). \quad (5.11)$$

Иногда уравнение диаграммы деформирования удобно записывать в форме, предложенной А.А. Ильюшиным и позволяющей выделять линейную и нелинейную части. Для этого представим интенсивность напряжений σ_i , соответствующую интенсивности деформаций ε_i , в виде разности (рисунок 5.3):

$$\sigma_i = \sigma'_i - (\sigma'_i - \sigma_i) = \sigma'_i \left(1 - \frac{\sigma'_i - \sigma_i}{\sigma'_i} \right),$$

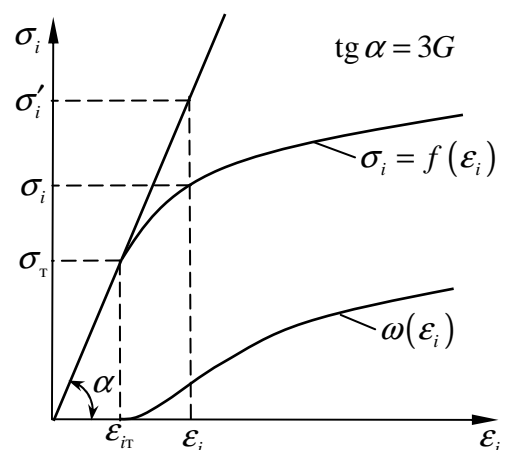


Рисунок 5.3 – К определению функции Ильюшина

где $\sigma'_i = 3G\varepsilon_i$ – интенсивность напряжений, соответствующая идеально упругому материалу.

Отношение

$$\omega = \frac{\sigma'_i - \sigma_i}{\sigma'_i}$$

представляет собой безразмерную функцию деформации, которую будем называть функцией Ильюшина.

Таким образом,

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i(1 - \omega). \quad (5.12)$$

Очевидно, что ω изменяется в пределах $0 \leq \omega < 1$. Если интенсивность напряжений меньше σ_T , то $\omega = 0$.

Рассмотрим материал с линейным упрочнением (рисунок 5.4). Для него модуль упрочнения H_T и модуль упрочнения при растяжении E_T определяются следующими формулами:

$$H_T = \frac{\sigma_i - \sigma_T}{\varepsilon_i - \varepsilon_{iT}}; \quad E_T = \frac{\sigma - \sigma_T}{\varepsilon - \varepsilon_T}.$$

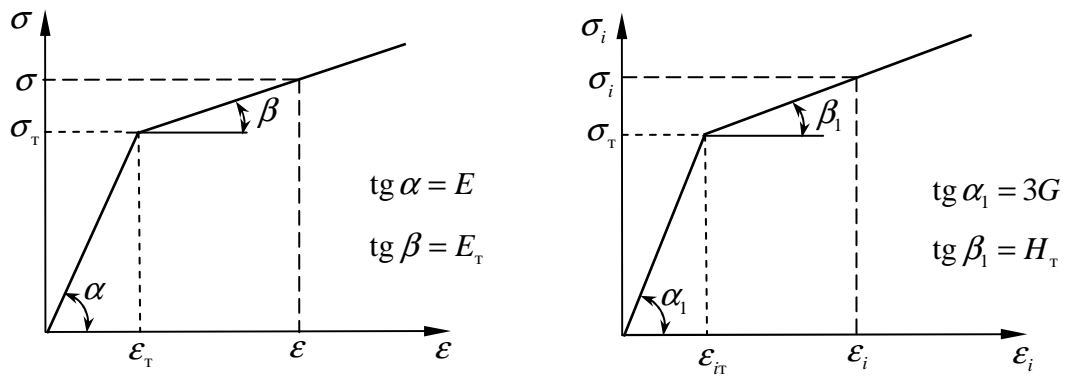


Рисунок 5.4 – Диаграммы растяжения и деформирования материала с линейным упрочнением

Согласно (5.7) и (5.9) эти величины связаны соотношением

$$H_T = \frac{E_T}{1 - \frac{1-2\mu}{3} \cdot \frac{E_T}{E}}. \quad (5.13)$$

При $0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{iT}$

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i; \quad \omega = 0.$$

При $\varepsilon_i > \varepsilon_{iT}$

$$\sigma_i = \sigma_T + H_T (\varepsilon_i - \varepsilon_{iT}) = \lambda \sigma_T + H_T \varepsilon_i,$$

где

$$\lambda = 1 - \frac{H_T}{3G}$$

– параметр упрочнения.

Тогда согласно (5.12)

$$\omega = \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_{iT}}{\varepsilon_i} \right).$$

Отметим, что для материала без упрочнения ($E_T = H_T = 0$):

$$\lambda = 1; \quad \omega = 1 - \frac{\varepsilon_{iT}}{\varepsilon_i}.$$

5.3 Коэффициент поперечной деформации за пределами упругости

Как известно, для определённого материала при определённой температуре испытания отношение поперечной деформации к продольной при одноосном растяжении в пределах упругости является постоянной величиной. Абсолютная величина этого отношения называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона. Деформационная теория пластичности позволяет установить данную величину и за пределами упругости.

Из уравнений (5.6) для одноосного растяжения ($\sigma_{xx} = \sigma$; $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$; $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$; $\sigma_0 = \sigma/3$) получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma + \frac{\sigma}{9K};$$

$$\varepsilon_{\text{поп}} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} \sigma + \frac{\sigma}{9K}.$$

Исключая из этих двух выражений $\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma$, имеем

$$2\varepsilon_{\text{поп}} + \varepsilon = \frac{\sigma}{3K}.$$

Используя это равенство и соотношение (4.4), можно определить коэффициент поперечной деформации за пределами упругости:

$$\mu_p = \left| \frac{\varepsilon_{\text{поп}}}{\varepsilon} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{6K} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{2E} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (5.14)$$

Таким образом, за пределами упругости коэффициент поперечной деформации не постоянен, а возрастает с увеличением деформаций, стремясь к 0,5, поскольку напряжения увеличиваются медленнее деформаций (т.е. в пределе $\frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow 0$).

5.4 Теорема о простом нагружении

Уравнения деформационной теории пластичности являются по сути дела уравнениями нелинейно-упругого тела. Естественно, что их использование для описания пластических деформаций при сложных зигзагообразных путях нагружения может привести к неудовлетворительным результатам.

А.А. Ильюшиным было установлено, что основные законы деформационной теории справедливы тогда, когда в каждой точке тела компоненты напряжений (или в ослабленной формулировке компоненты девиатора напряжений) возрастают пропорционально некоторому параметру. Такое нагружение называется простым. При однородном напряжённом состоянии нагружение будет простым, если внешние силы будут возрастать пропорционально одному параметру.

Для общего случая неоднородного напряжённого состояния А.А. Ильюшин сформулировал и доказал следующую теорему о простом нагружении: для того чтобы нагружение в каждой точке несжимаемого тела произвольной формы при пропорциональном возрастании внешних сил было простым, достаточно, чтобы зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций могла быть представлена в виде степенной функции

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m, \quad (5.15)$$

где A и m – постоянные величины.

5.5 Теорема о разгрузке

В подразделе 1.1 был сформулирован закон разгрузки при одноосном нагружении. Согласно этому закону уменьшение напряжений при разгрузке прямо пропорционально уменьшению деформаций, причём коэффициент пропорциональности тот же, что и в начальной стадии нагружения. Выше отмечалось, что интенсивность деформаций может быть представлена в виде

суммы интенсивностей упругих и пластических деформаций. Поэтому диаграмма деформирования материала имеет тот же вид, что и диаграмма растяжения не только при нагружении, но и при разгрузке. Следовательно, диаграмма разгрузки на графике $\sigma_i - \varepsilon_i$ является прямой, параллельной начальной прямой нагружения (рисунок 5.5).

Уменьшение интенсивности напряжений $\Delta\sigma_i$ при разгрузке прямо пропорционально снижению интенсивности деформаций $\Delta\varepsilon_i$, причём коэффициент пропорциональности тот же, что и в пределах упругости:

$$\Delta\sigma_i = 3G \Delta\varepsilon_i. \quad (5.16)$$

Сформулируем теорему о разгрузке А.А. Ильюшина. Пусть при простом нагружении в деформируемом теле возникают напряжения $\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{zx}$, лежащие за пределами упругости, деформации $\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{zx}$ и соответствующие перемещения u_x, u_y, u_z . После полной разгрузки в теле будут остаточные напряжения $\sigma'_{xx}, \dots, \sigma'_{zx}$, остаточные деформации $\varepsilon'_{xx}, \dots, \varepsilon'_{zx}$ и остаточные перемещения u_x, u_y, u_z , равные

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} &= \sigma_{xx} - \sigma_{xx}^0; & \dots; & & \sigma'_{zx} &= \sigma_{zx} - \sigma_{zx}^0; \\ \varepsilon'_{xx} &= \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^0; & \dots; & & \varepsilon'_{zx} &= \varepsilon_{zx} - \varepsilon_{zx}^0; \\ u'_x &= u_x - u_x^0; & \dots; & & u'_z &= u_z - u_z^0. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{xx}^0, \dots, \sigma_{zx}^0$; $\varepsilon_{xx}^0, \dots, \varepsilon_{zx}^0$; u_x^0, u_y^0, u_z^0 – напряжения, деформации и перемещения, полученные в результате решения задачи теории упругости для заданного тела с заданной нагрузкой.

5.6 Постановка задачи теории пластичности

Пусть имеется некоторое деформируемое тело, находящееся в равновесии под действием заданных поверхностных p_x, p_y, p_z и объёмных R_x, R_y, R_z сил. Механические свойства тела определяются его упругими характеристиками E, μ и зависимостью $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$. Требуется найти распределение напряжений, деформаций и перемещений в данном теле.

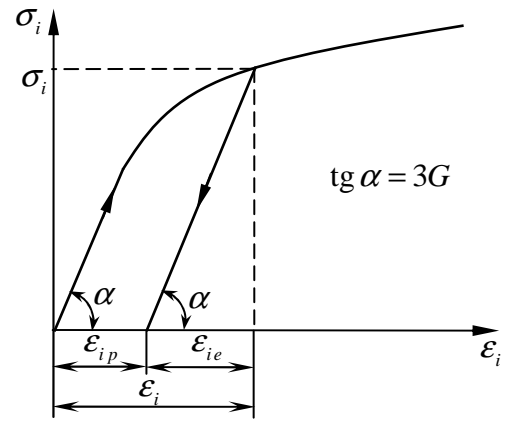


Рисунок 5.5 – Разгрузка

Для решения этой задачи имеем следующую совокупность уравнений:

1. Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + R_x &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + R_y &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + R_z &= 0.\end{aligned}\tag{5.17}$$

2. Геометрические соотношения Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{zx}.\end{aligned}\tag{5.18}$$

3. Зависимости между напряжениями и деформациями

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0) + 3K\varepsilon_0; & \sigma_{xy} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_0) + 3K\varepsilon_0; & \sigma_{yz} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{yz}; \\ \sigma_{zz} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0) + 3K\varepsilon_0; & \sigma_{zx} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{zx},\end{aligned}\tag{5.19}$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{\theta}{3}; \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.\tag{5.20}$$

В итоге имеем 15 уравнений с 15-ю неизвестными:

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}; \quad \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}; \quad u_x, u_y, u_z.$$

Таким образом, система уравнений является замкнутой. С целью получения конкретного решения к приведённым выше соотношениям необходимо добавить граничные условия (статические и кинематические). Для этого разделим поверхность тела на две части: $S = S_p + S_u$, причём S_p и S_u – части по-

верхности тела, где заданы поверхностные нагрузки и перемещения соответственно.

В заключение отметим, что как и задачу теории упругости, задачу теории пластичности можно решать либо в перемещениях, либо в напряжениях.

5.7 Решение задачи теории пластичности в перемещениях. Метод упругих решений Ильюшина

Зависимость $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ представим в форме, предложенной А.А. Ильюшиным:

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i(1 - \omega). \quad (5.21)$$

Тогда

$$\frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} = \frac{2}{3\varepsilon_i} \cdot 3G\varepsilon_i(1 - \omega) = 2G(1 - \omega). \quad (5.22)$$

При этом в выражении для напряжения σ_{xx} можно выделить линейную и нелинейную части:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0) + 3K\varepsilon_0 = 2G(1 - \omega) (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0) + 3K\varepsilon_0 = \\ &= 2G(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0) + 3K\varepsilon_0 + \sigma_{xxp}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\sigma_{xxp} = -2G\omega(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0) \quad (5.23)$$

– нелинейное слагаемое.

Используя (5.20), линейную часть выражения для σ_{xx} можно представить в форме Ламе:

$$2G(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0) + 3K\varepsilon_0 = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\theta,$$

где

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}.$$

Таким образом,

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\theta + \sigma_{xxp}. \quad (5.24)$$

Далее

$$\sigma_{xy} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{xy} = 2G(1 - \omega)\varepsilon_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} + \sigma_{xyp}, \quad (5.25)$$

причём

$$\sigma_{xyp} = -2G\omega\varepsilon_{xy}.$$

Аналогично можно представить и напряжение σ_{zx} .

Выпишем первое дифференциальное уравнение равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} + R_x = 0. \quad (5.26)$$

Используя соотношения Коши (5.18), в формулах для напряжений выразим деформации через перемещения:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\theta + \sigma_{xxp}; \\ \sigma_{xy} &= G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \sigma_{xyp}; \\ \sigma_{zx} &= G\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) + \sigma_{zxp}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Подставляя (5.27) в (5.26), имеем

$$\begin{aligned} 2G\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xxp}}{\partial x} + G\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial x}\right) + \frac{\partial\sigma_{xyp}}{\partial y} + \\ + G\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\sigma_{zxp}}{\partial z} + R_x = 0; \\ G\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + G\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \\ + \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xxp}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xyp}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zxp}}{\partial z} + R_x = 0. \end{aligned}$$

И, наконец, окончательно запишем

$$G\nabla^2 u_x + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial x} + R_x + R_{xp} = 0. \quad (5.28)$$

Таким же образом могут быть получены ещё два уравнения:

$$G\nabla^2 u_y + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial y} + R_y + R_{yp} = 0; \quad (5.29)$$

$$G\nabla^2 u_z + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial z} + R_z + R_{zp} = 0. \quad (5.30)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
R_{xp} &= \frac{\partial \sigma_{xxp}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xyp}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zxp}}{\partial z}; \\
R_{yp} &= \frac{\partial \sigma_{xyp}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy p}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yzp}}{\partial z}; \\
R_{zp} &= \frac{\partial \sigma_{zxp}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yzp}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zzp}}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{5.31}$$

В системе уравнений (5.28)...(5.30) пластическое поведение тела полностью описывается дополнительными нагрузками R_{xp} , R_{yp} и R_{zp} . Для определения произвольных постоянных, появляющихся при интегрировании данных уравнений, здесь следует воспользоваться на части поверхности тела S_p статическими, а на S_u кинематическими граничными условиями.

Отметим, что решение данной системы уравнений сопряжено со значительными трудностями. Поэтому в теории пластичности ещё в большей степени, нежели в теории упругости, имеют значение приближённые методы решения. Наиболее распространёнными из них являются вариационные методы, а также методы, в которых упругопластическая задача сводится к последовательности упругих задач в результате применения процесса последовательных приближений. Последние могут быть названы методами упругих решений.

Впервые один из вариантов такого метода был предложен А.А. Ильюшиным, суть которого заключается в следующем.

Полагаем сначала $\omega = \omega^{(0)} = 0$. Решаем уравнения (5.28)...(5.30) и получаем перемещения $u_x^{(0)}$, $u_y^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ в нулевом приближении. Далее вычисляем в каждой точке деформируемого тела интенсивность деформаций $\varepsilon_i^{(0)}$ и по диаграмме зависимости $\omega = \omega(\varepsilon_i)$ определяем $\omega^{(1)}$ (рисунок 5.6). Наконец,

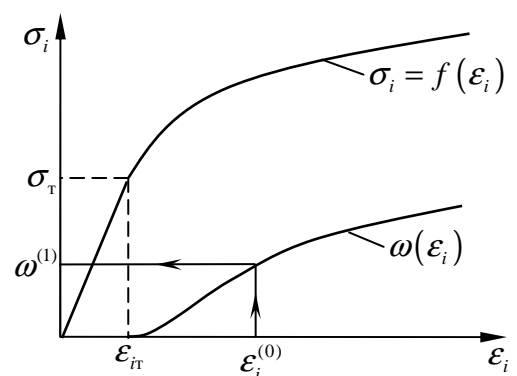


Рисунок 5.6 – Определение $\omega^{(1)}$

вычисляем дополнительные нагрузки $R_{xp}^{(1)}$, $R_{yp}^{(1)}$ и $R_{zp}^{(1)}$ первого приближения. Подставляя эти нагрузки в (5.28)...(5.30), получаем систему уравнений для определения перемещений $u_x^{(1)}$, $u_y^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ уже в первом приближении. Найдя

их, вычисляем дополнительные нагрузки $R_{xp}^{(2)}$, $R_{yp}^{(2)}$ и $R_{zp}^{(2)}$ второго приближения и т.д. Расчёт продолжается до тех пор, пока результаты в некотором приближении не будут близки к соответствующим результатам в предыдущем приближении.

Отметим, что рассмотренный метод хорошо сходится при слабо развитых пластических деформациях.

6 ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЯ

Процесс пластической деформации является необратимым, большая часть работы деформации переходит в тепло. Напряжения в конечном состоянии зависят от пути деформирования. В связи с этим уравнения, описывающие пластические деформации, в принципе не могут быть конечными соотношениями, связывающими компоненты напряжений и деформаций (аналогично формулам закона Гука), а должны быть дифференциальными (и при этом неинтегрируемыми) зависимостями.

6.1 Поверхность пластичности

В случае одноосного растяжения пластические деформации возникают, когда напряжение достигает величины предела текучести материала σ_T (точка A на рисунке 6.1). Если напряжение меньше σ_T (точка B), материал деформируется упруго, а если больше (точка C) – упругопластически. При неоднородном напряжённом состоянии пределы применимости закона Гука определяются условием начала пластичности (см. подраздел 4.2).

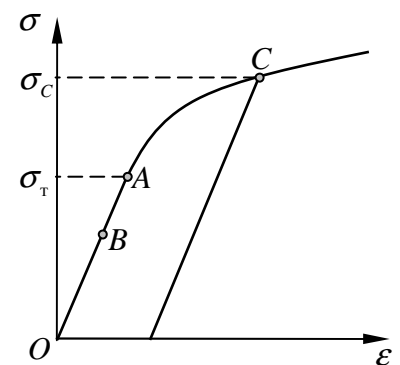


Рисунок 6.1 – Диаграмма растяжения

При дальнейшем деформировании упрочняющегося материала его предел текучести увеличивается. Так, при нагружении до точки C предел текучести увеличивается до σ_C . Теперь при нагружении в пределах от 0 до σ_C соблюдается закон Гука. Напряжение σ_C является текущим пределом текучести, разграничивающим упругую разгрузку и нагружение, сопровождающееся дальнейшей пластической деформацией.

Для разграничения упругого и пластического деформирования упрочняющегося материала в общем случае напряжённого состояния введём условие пластичности

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (6.1)$$

которое обычно принимают совпадающим по виду с условием начала пластичности (4.10). Существенное отличие между ними заключается в том, что в условие (4.10) входят постоянные для материала механические характеристики (например, σ_T), а в условие (6.1) должна входить ещё и некоторая мера

упрочнения. В качестве меры упрочнения q обычно принимают либо работу пластических деформаций

$$q = A_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ijp}, \quad (6.2)$$

либо так называемый параметр Удквиста

$$q = \int \overline{d\varepsilon}_{ip}. \quad (6.3)$$

Интегралы здесь берутся по пути деформирования. В первом случае предполагается, что упрочнение материала определяется только работой пластических деформаций. Во втором считают, что мера упрочнения должна отражать накопленную пластическую деформацию. Отметим, что для изотропных материалов использование двух рассмотренных мер упрочнения в случае условия пластичности Мизеса приводит к одинаковым результатам.

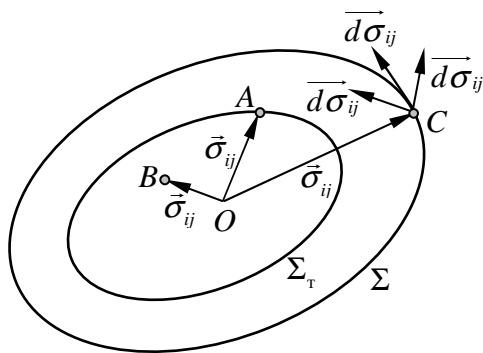


Рисунок 6.2 – Поверхность пластичности

Уравнение (6.1) является уравнением гиперповерхности пластичности Σ в шестимерном пространстве компонент напряжений (рисунок 6.2), которая разделяет области упругого и пластического деформирования. Так же, как и поверхность начала пластичности Σ_τ , она может быть изображена в трёхмерном пространстве главных напряжений.

Размеры, форма и положение поверхности пластичности зависят не только от конечного деформированного состояния, но и от всей истории деформирования. Если компоненты тензора напряжений σ_{ij} получают приращения $d\sigma_{ij}$, то это догружение может привести либо к упругой разгрузке, если вектор $\overline{d\sigma}_{ij}$ направлен внутрь поверхности пластичности, либо к нагружению, при котором развиваются пластические деформации, если $\overline{d\sigma}_{ij}$ направлен наружу поверхности, либо к так называемому нейтральному нагружению, если $\overline{d\sigma}_{ij}$ лежит в касательной плоскости к поверхности, при этом материал деформируется упруго.

В общем случае поверхность пластичности расширяется и смещается по мере развития упрочнения, которое изменяет предел текучести (и притом различным образом в разных направлениях). Обычно различают три вида упрочнения: изотропное, кинематическое и комбинированное.

При изотропном упрочнении поверхность пластичности с ростом пластических деформаций равномерно расширяется, оставаясь подобной самой себе (рисунок 6.3,а). Эффект Баушингера при этом, разумеется, не описывается, поскольку пределы текучести в прямом (OM^+) и обратном (OM^-) направлениях нагружения равны по величине.

При кинематическом упрочнении поверхность пластичности испытывает жёсткое смещение в направлении деформирования (рисунок 6.3,б). Если теперь вновь нагрузить материал, то предел текучести в направлении предыдущей деформации (OM^+) возрастает – произошло упрочнение, в обратном же направлении (OM^-) предел текучести падает (разупрочнение). Эта схема, по крайней мере качественно, описывает эффект Баушингера.

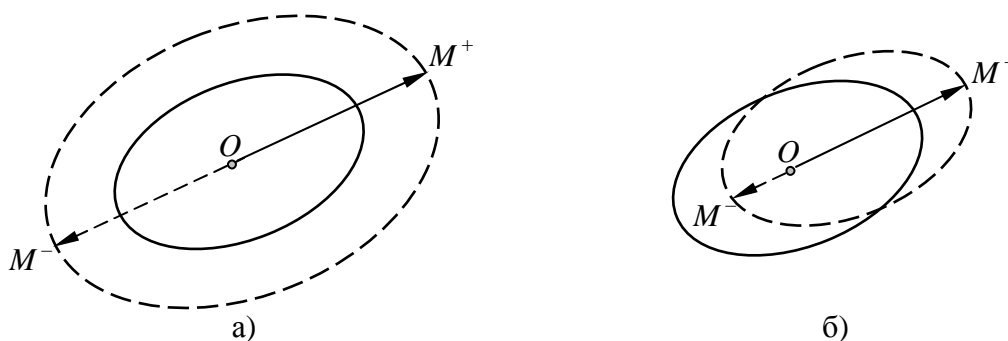


Рисунок 6.3 – Изотропное (а) и кинематическое (б) упрочнения

При комбинированном упрочнении поверхность пластичности испытывает перенос и одновременно расширяется во всех направлениях, т.е. сохраняет форму.

Отметим, что существуют и более общие уравнения поверхности пластичности, учитывающие начальную анизотропию среды и содержащие не один, а несколько параметров упрочнения.

6.2 Постулат Друкера

Простые примеры убеждают нас в необходимости более чёткого определения упрочняющегося материала. Рассмотрим различные кривые, символизирующие связь между напряжениями и деформациями (рисунок 6.4).

В случае (а) материал действительно упрочняется. Здесь дополнительное нагружение $\Delta\sigma > 0$ вызывает дополнительную деформацию $\Delta\varepsilon > 0$, причём произведение $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon > 0$. Таким образом, дополнительное напряжение выполняет на дополнительной деформации положительную работу, пред-

ставленную на рисунке заштрихованным треугольником. Подобный материал условимся называть устойчивым.

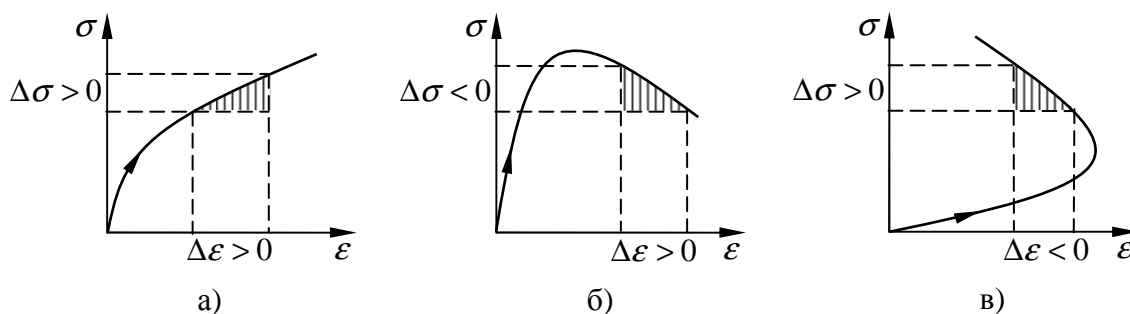


Рисунок 6.4 – К формулировке постулата Друкера при одноосном растяжении

В случае (б) кривая имеет нисходящую ветвь, деформация продолжается при снижающемся напряжении. На этом участке дополнительное напряжение $\Delta\sigma < 0$ выполняет отрицательную работу, т.е. $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon < 0$. Такое поведение материала называется неустойчивым. Оно обусловлено, например, образованием шейки на образце.

В случае (в) с ростом напряжения деформация убывает, при этом также $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon < 0$. Данный случай противоречит закону сохранения энергии, позволяя «бесплатно» извлекать полезную работу.

Таким образом, устойчивое деформирование материала за пределами упругости соответствует только первому из этих случаев. Постулат Друкера обобщает приведённые соображения и даёт надлежащее определение упрочнения.

Рассмотрим элемент упрочняющейся среды, находящийся в некотором исходном напряжённом состоянии σ_{ij}^0 . Приложим теперь к этому элементу добавочные напряжения. Предполагается, что изменения происходят достаточно медленно. Тогда постулируется, что

1) в процессе нагружения добавочные напряжения производят положительную работу;

2) за весь цикл дополнительного нагружения и разгрузки добавочные напряжения выполняют положительную работу, если имели место пластические деформации (при чисто упругих изменениях работа будет равна нулю).

Согласно постулату Друкера продолжение пластической деформации упрочняющегося тела требует приложения дополнительных усилий. Данный постулат приводит к важным неравенствам.

Пусть Σ – текущее положение поверхности пластичности (рисунок 6.5). Рассмотрим некоторый путь нагружения $A \rightarrow B \rightarrow C$. Начальной точке A соответствует исходное напряжённое состояние σ_{ij}^0 , лежащее внутри или на поверхности Σ . Точка B (напряжённое состояние σ_{ij}) находится на поверхности Σ . Из точки B производится бесконечно малое догружение $d\sigma_{ij}$, вызывающее соответствующие упругую $d\varepsilon_{ije}$ и пластическую $d\varepsilon_{ijp}$ деформации. Через Σ' обозначим новое близкое положение поверхности пластичности. Вернёмся теперь в точку A каким-нибудь путём $C \rightarrow A$. Согласно постулату Друкера работа добавочных напряжений за весь цикл положительна, т.е.

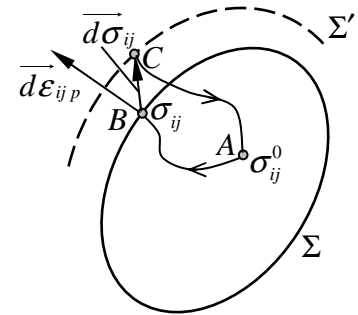


Рисунок 6.5 – Цикл нагружения

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij} > 0.$$

Для замкнутого пути $ABCA$ работа добавочных напряжений на упругих деформациях $d\varepsilon_{ije}$ равна нулю, следовательно,

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ijp} > 0.$$

Так как пластическая деформация происходит только на бесконечно малом участке $B \rightarrow C$, последнее неравенство принимает вид

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ijp} > 0. \quad (6.4)$$

Для упрочняющегося материала равенство нулю здесь может быть только при отсутствии пластических деформаций.

6.3 Ассоциированный закон течения

Согласно неравенству (6.4) скалярное произведение вектора добавочных напряжений $\vec{\sigma}_{ij} - \vec{\sigma}_{ij}^0$ и вектора приращений пластических деформаций $\vec{d\varepsilon}_{ijp}$ положительно (рисунок 6.6). Следовательно, в любом случае эти векто-

ры образуют между собой острый угол. Отсюда вытекает выпуклость поверхности пластичности и нормальность вектора $\overline{d\varepsilon_{ijp}}$ к поверхности Σ .

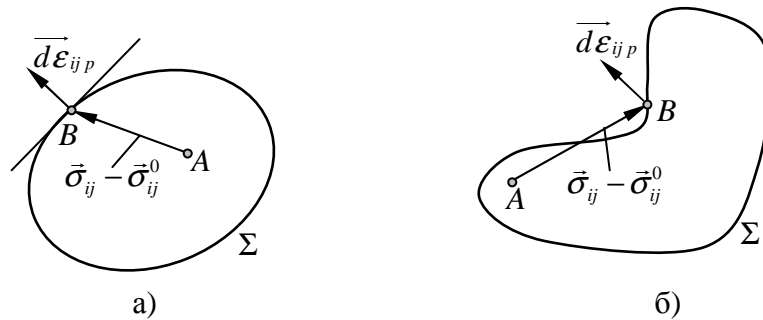


Рисунок 6.6 – К выводу ассоциированного закона течения

В самом деле, пусть поверхность пластичности Σ выпукла, т.е. лежит по одну сторону касательной плоскости (рисунок 6.6,а). Условие (6.4) будет выполнено, только если вектор $\overline{d\varepsilon_{ijp}}$ нормален к Σ ; иначе всегда найдётся вектор $\vec{\sigma}_{ij} - \vec{\sigma}_{ij}^0$, образующий тупой угол с $\overline{d\varepsilon_{ijp}}$. Заметим, что $\overline{d\varepsilon_{ijp}}$ зависит от вида поверхности пластичности, но не от выбора точки A внутри Σ .

Если же поверхность Σ невыпуклая (рисунок 6.6,б), то независимо от наклона вектора $\overline{d\varepsilon_{ijp}}$ к Σ всегда можно так подобрать точку A , что условие (6.4) будет нарушено.

Известно, что направляющие косинусы нормали к поверхности пропорциональны частным производным от уравнения поверхности по координатам. Таким образом, приходим к формуле

$$d\varepsilon_{ijp} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (6.5)$$

где $d\lambda \geq 0$ – некоторый неопределённый бесконечно малый скалярный множитель.

Соотношение (6.5) является математическим выражением так называемого ассоциированного (с условием пластичности) закона течения.

Отметим, что условие (6.4) налагает также определённые ограничения на пластическое течение вдоль рёбер поверхности Σ (представляющей, например, шестигранную призму Треска–Сен-Венана). Течение на ребре является линейной комбинацией течений слева и справа от ребра, т.е. вектор $\overline{d\varepsilon_{ijp}}$ перпендикулярен к ребру и лежит внутри угла, образованного нормалью к Σ по обе стороны от ребра.

6.4 Основные гипотезы и соотношения теории течения

В зависимости от принятого закона изменения размеров и формы поверхности пластичности (т.е. закона упрочнения) можно получить различные теории пластичности.

Рассмотрим теорию течения с изотропным упрочнением, которую часто называют просто теорией течения.

В основу данной теории положены следующие гипотезы:

1. Объёмная деформация прямо пропорциональна среднему давлению, причём связывающий их коэффициент тот же, что и в пределах упругости.
2. Компоненты девиатора приращений пластических деформаций прямо пропорциональны компонентам девиатора напряжений.
3. Интенсивность напряжений является функцией интеграла от интенсивности приращений пластических деформаций, не зависящей от типа напряжённого состояния.

Первая гипотеза теории течения совпадает с первой гипотезой деформационной теории пластичности, согласно которой

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K} \quad \text{или} \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K}. \quad (6.6)$$

Дифференцируя последнее соотношение, получим

$$d\varepsilon_0 = \frac{d\sigma_0}{3K}. \quad (6.7)$$

Приращение средней линейной деформации складывается из упругой и пластической частей:

$$d\varepsilon_0 = d\varepsilon_{0e} + d\varepsilon_{0p}.$$

Очевидно, что упругая часть приращения подчиняется закону Гука:

$$d\varepsilon_{0e} = \frac{d\sigma_0}{3K}. \quad (6.8)$$

Сопоставляя (6.7) и (6.8), приходим к равенству

$$d\varepsilon_{0p} = 0. \quad (6.9)$$

Согласно второй гипотезе

$$D_{d\varepsilon_p} = d\lambda' D_\sigma, \quad (6.10)$$

где $d\lambda'$ – некоторый бесконечно малый скалярный множитель.

Из (6.9) вытекает то, что за счёт пластических деформаций изменение объёма не происходит. Следовательно, тензор приращений пластических деформаций представляет собой девиатор, и выражение (6.10) можно представить в виде

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xxp} &= d\lambda'(\sigma_{xx} - \sigma_0); \dots; \\ d\varepsilon_{zxp} &= d\lambda' \sigma_{zx}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Определим величину $d\lambda'$. Для этого из (6.11) находим

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xxp} - d\varepsilon_{yy p} &= d\lambda'(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}); \dots; \\ d\varepsilon_{zxp} &= d\lambda' \sigma_{zx}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Используя (3.25), введём понятие интенсивности приращений пластических деформаций:

$$\overline{d\varepsilon_{ip}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{xxp} - d\varepsilon_{yy p})^2 + \dots + 6(d\varepsilon_{xyp}^2 + \dots)}. \quad (6.13)$$

Тогда

$$(\overline{d\varepsilon_{ip}})^2 = \frac{2}{9} \left[(d\varepsilon_{xxp} - d\varepsilon_{yy p})^2 + \dots + 6(d\varepsilon_{xyp}^2 + \dots) \right].$$

Подставляя в последнее равенство выражения (6.12), получим

$$(\overline{d\varepsilon_{ip}})^2 = \frac{2}{9} (d\lambda')^2 \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \dots + 6(\sigma_{xy}^2 + \dots) \right] = \frac{2}{9} (d\lambda')^2 \cdot 2\sigma_i^2.$$

Таким образом,

$$d\lambda' = \frac{3 \overline{d\varepsilon_{ip}}}{2 \sigma_i}. \quad (6.14)$$

При этом соотношения (6.11) примут вид

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xxp} &= \frac{3 \overline{d\varepsilon_{ip}}}{2 \sigma_i} (\sigma_{xx} - \sigma_0); \dots; \\ d\varepsilon_{zxp} &= \frac{3 \overline{d\varepsilon_{ip}}}{2 \sigma_i} \sigma_{zx}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Дифференцируя формулы закона Гука (4.1), имеем

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xxe} &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_{xx} - \mu(d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz}) \right]; \dots; \\ d\varepsilon_{zxe} &= \frac{d\sigma_{zx}}{2G}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Складывая (6.15) и (6.16), окончательно получим основные уравнения теории течения:

$$d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[d\sigma_{xx} - \mu (d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz}) \right] + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_{ip}}}{\sigma_i} (\sigma_{xx} - \sigma_0); \dots; \quad (6.17)$$

$$d\varepsilon_{zx} = \frac{d\sigma_{zx}}{2G} + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_{ip}}}{\sigma_i} \sigma_{zx}.$$

Третья гипотеза теории течения математически записывается следующим образом:

$$\sigma_i = \Phi \left(\int \overline{d\varepsilon_{ip}} \right). \quad (6.18)$$

Согласно этой гипотезе зависимость (6.18) остаётся одинаковой для всех типов напряжённого состояния. Таким образом, функция Φ может быть определена по диаграмме растяжения образца из данного материала.

Для одноосного растяжения имеем

$$\sigma_{xx} = \sigma; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0;$$

$$d\varepsilon_{xxp} = d\varepsilon_p; \quad d\varepsilon_{xyp} = d\varepsilon_{yzp} = d\varepsilon_{zxp} = 0;$$

$$d\varepsilon_{yyp} = d\varepsilon_{yyp} = -\frac{1}{2} d\varepsilon_p,$$

так как

$$3d\varepsilon_{0p} = d\varepsilon_{xyp} + d\varepsilon_{yyp} + d\varepsilon_{zyp} = 0.$$

Поэтому по формулам (2.22) и (6.13) имеем

$$\sigma_i = \sigma; \quad \overline{d\varepsilon_{ip}} = d\varepsilon_p$$

и, следовательно,

$$\int \overline{d\varepsilon_{ip}} = \int d\varepsilon_p = \varepsilon_p.$$

Итак, в случае одноосного растяжения из формулы (6.18) получаем

$$\sigma = \Phi(\varepsilon_p).$$

Таким образом, для определения функции Φ по диаграмме растяжения материала необходимо построить график зависимости напряжения от пластической деформации. Возьмём некоторую точку A на диаграмме растяжения (рисунок 6.7) и проведём через неё линию AB , параллельную первоначальной прямой нагружения. Из точки B пересечения этой линии с осью абсцисс восстановим перпендикуляр до пересечения в точке C с горизонтальной

линией, проведённой через точку A. Абсцисса точки C равна пластической деформации, а ордината – соответствующему её напряжению.

Следует отметить, что рассмотренная теория течения соответствует выбору условия пластичности Мизеса с изотропным упрочнением:

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_i^2 - [\Phi(q)]^2 = 0, \quad (6.19)$$

где в качестве меры упрочнения q используется параметр Удквиста, определяемый формулой (6.3).

Из (6.19) непосредственно следует третья гипотеза теории течения, т.е. зависимость (6.18). При использовании соотношения (6.19) поверхность пластичности в трёхмерном пространстве главных напряжений представляет собой круговой цилиндр (цилиндр Мизеса). В процессе нагружения радиус цилиндра непрерывно увеличивается. Величина его согласно (6.18) зависит от истории деформирования. Следы цилиндров на девиаторной плоскости являются окружности радиусов $\sqrt{2/3} \sigma_i$. При этом поверхность начала пластичности имеет наименьший радиус, равный $\sqrt{2/3} \sigma_T$.

Подстановка выражения (6.19) в ассоциированный закон течения (6.5) позволяет установить также, что компоненты тензора приращений пластических деформаций пропорциональны компонентам девиатора напряжений (вторая гипотеза теории течения с учётом равенства (6.9)).

Действительно, при использовании условия пластичности (6.19)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = 3s_{ij}.$$

Подставляя эти производные в (6.5), получим

$$d\varepsilon_{ijp} = 3d\lambda s_{ij}.$$

Отсюда вытекают соотношения (6.11), причём $d\lambda' = 3d\lambda$.

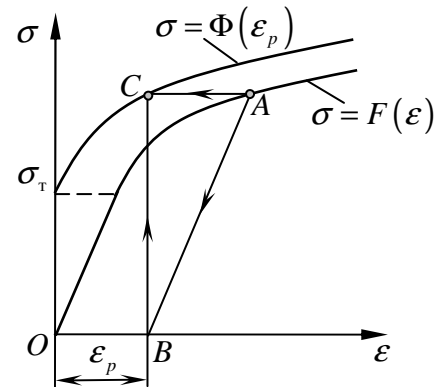


Рисунок 6.7 – Построение графика зависимости σ от ε_p

7 ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

7.1 Обобщение теоремы Клапейрона

В теории упругости известна теорема Клапейрона, выражаемая формулой

$$U = \frac{1}{2} \left[\int_V (R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z) dV + \int_S (p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) dS \right], \quad (7.1)$$

где первый интеграл в квадратных скобках берётся по объёму тела, а второй – по его поверхности.

Здесь U – потенциальная энергия деформации упругого тела:

$$U = \int_V W dV, \quad (7.2)$$

причём

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{zx} \gamma_{zx}) \quad (7.3)$$

– удельная энергия деформации.

Величину

$$A = \int_V (R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z) dV + \int_S (p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) dS \quad (7.4)$$

будем называть работой внешних сил на соответствующих им перемещениях.

Отметим, что формула (7.1) получена в предположении статического приложения внешних сил к упругому телу.

Подставляя (7.2) и (7.3) в соотношение (7.1), устанавливаем

$$\begin{aligned} & \int_V (R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z) dV + \int_S (p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) dS = \\ & = \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{zx} \gamma_{zx}) dV. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Покажем, что равенство (7.5) будет справедливым для любого деформируемого тела вне зависимости от того, как оно работает, в пределах упругости или за её пределами.

Пусть нам дано некоторое деформируемое тело, находящееся в равновесии под действием статически приложенной нагрузки. При этом напряже-

ния удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (5.17) и в точках поверхности тела S статическим граничным условиям:

$$\begin{aligned} p_x &= n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} + n_z \sigma_{zx}; \\ p_y &= n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{yz}; \\ p_z &= n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Будем считать, что связь между деформациями и перемещениями выражается соотношениями Коши (5.18).

Согласно (7.6) имеем

$$\begin{aligned} \int_S (p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) dS &= \int_S \left[u_x (n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} + n_z \sigma_{zx}) + u_y (n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{yz}) + \right. \\ &\quad \left. + u_z (n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz}) \right] dS = \int_S \left[n_x (\sigma_{xx} u_x + \sigma_{xy} u_y + \sigma_{zx} u_z) + \right. \\ &\quad \left. + n_y (\sigma_{xy} u_x + \sigma_{yy} u_y + \sigma_{yz} u_z) + n_z (\sigma_{zx} u_x + \sigma_{yz} u_y + \sigma_{zz} u_z) \right] dS. \end{aligned}$$

Для преобразования последнего интеграла воспользуемся формулой Гаусса–Остроградского

$$\int_S (n_x Q_x + n_y Q_y + n_z Q_z) dS = \int_V \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) dV.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_S (p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) dS &= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} u_x + \sigma_{xy} u_y + \sigma_{zx} u_z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy} u_x + \sigma_{yy} u_y + \sigma_{yz} u_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zx} u_x + \sigma_{yz} u_y + \sigma_{zz} u_z) \right] dS = \\ &= \int_V \left[u_x \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) + u_y \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + u_z \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \sigma_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \sigma_{yz} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \sigma_{zx} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] dV. \end{aligned}$$

Полученный результат подставим в (7.4). Используя формулы (5.18), получим

$$A = \int_V \left[u_x \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + R_x \right) + u_y \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + R_y \right) + u_z \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + R_z \right) + \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{zx} \gamma_{zx} \right] dV.$$

Согласно уравнениям равновесия (5.17) выражения, стоящие в круглых скобках, равны нулю. Таким образом, приходим к соотношению (7.5), т.е. мы доказали, что оно справедливо для любого состояния тела.

Соотношение (7.5) можно переписать в следующем виде:

$$A = R, \quad (7.7)$$

где

$$R = \int_V \left(\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{zx} \gamma_{zx} \right) dV. \quad (7.8)$$

7.2 Вариационное уравнение Лагранжа. Принцип минимума полной энергии деформируемой системы

Пусть некоторое деформируемое тело находится в равновесии под действием приложенной к нему нагрузки. Дадим точкам тела бесконечно малые перемещения $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$, согласующиеся с наложенными на него связями.

Работа всех внешних сил на этих перемещениях будет равна

$$\delta A = \int_V \left(R_x \delta u_x + R_y \delta u_y + R_z \delta u_z \right) dV + \int_S \left(p_x \delta u_x + p_y \delta u_y + p_z \delta u_z \right) dS. \quad (7.9)$$

Так же как и выражение для работы A в обобщение теоремы Клапейрона, формулу (7.9) можно представить в следующем виде:

$$\delta A = \delta R, \quad (7.10)$$

где

$$\delta R = \int_V \left(\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{zx} \delta \gamma_{zx} \right) dV. \quad (7.11)$$

Равенство (7.10) называется вариационным уравнением Лагранжа.

Введём в рассмотрение функционал Π , называемый потенциалом внешних сил:

$$\Pi = - \left[\int_V \left(R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z \right) dV + \int_S \left(p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z \right) dS \right]. \quad (7.12)$$

Полагая, что при сообщении телу возможных перемещений внешние силы остаются неизменными, получим

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= -\delta \left[\int_V (R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z) dV + \int_S (p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) dS \right] = \\ &= - \left[\int_V (R_x \delta u_x + R_y \delta u_y + R_z \delta u_z) dV + \int_S (p_x \delta u_x + p_y \delta u_y + p_z \delta u_z) dS \right]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Сопоставление (7.9) с (7.13) даёт

$$\delta A = -\delta\Pi. \quad (7.14)$$

Внося (7.14) в (7.10), получим другое представление вариационного уравнения Лагранжа:

$$\delta\Pi + \delta R = 0. \quad (7.15)$$

Преобразуем формулу (7.11) для δR . Подынтегральное выражение в этой формуле можно представить как полный дифференциал некоторой функции Φ шести аргументов $\varepsilon_{xx}, \dots, \gamma_{zx}$, т.е. можно записать

$$\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + \dots + \sigma_{zx} \delta\gamma_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{xx}} \delta\varepsilon_{xx} + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{zx}} \delta\gamma_{zx} = \delta\Phi.$$

Тогда

$$\delta R = \int_V \delta\Phi dV = \delta \int_V \Phi dV \quad \text{и} \quad R = \int_V \Phi dV. \quad (7.16)$$

Отсюда следует, что должны иметь место равенства

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{xx}}; \quad \dots; \quad \sigma_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{zx}} = \frac{1}{2} \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{zx}}. \quad (7.17)$$

Величину R обычно называют работой, затраченной на деформацию тела.

Свойствами, описанными формулами (7.17), обладает следующая функция:

$$\Phi = \frac{\sigma_0 \theta}{2} + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i = \frac{9}{2} K \varepsilon_0^2 + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i. \quad (7.18)$$

Заметим, что первое слагаемое здесь представляет собой удельную потенциальную энергию изменения объёма тела, а второе слагаемое – удельную

потенциальную энергию изменения формы. Геометрическая иллюстрация данного выражения представлена на рисунке 7.1.

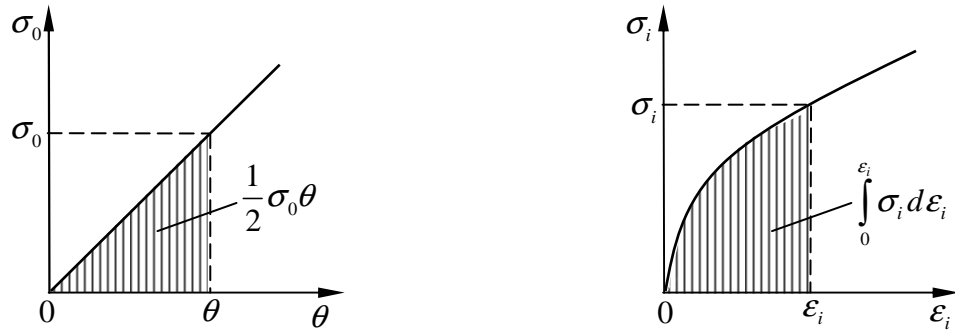


Рисунок 7.1 – К определению функции Φ

Покажем, что выражение (7.18) приводит к соотношениям (7.17).

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xx}} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{xx}} \left(\frac{9}{2} K \varepsilon_0^2 \right) + \frac{d}{d \varepsilon_i} \left(\int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d \varepsilon_i \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{xx}} = \frac{9}{2} K \cdot 2 \varepsilon_0 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \varepsilon_{xx}} + \sigma_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{xx}} = \\ &= 9 K \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{3} + \sigma_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{xx}} = \sigma_0 + \sigma_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{xx}}. \end{aligned}$$

Согласно (3.16)

$$\varepsilon_i^2 = \frac{2}{9} \left[(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \varepsilon_i^2}{\partial \varepsilon_{xx}} = 2 \varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{xx}} = \frac{2}{9} [2(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) - 2(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})] = \frac{4}{3} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0).$$

Тогда

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{xx}} = \frac{2}{3 \varepsilon_i} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0)$$

и с учётом (5.5)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xx}} = \sigma_0 + \frac{2 \sigma_i}{3 \varepsilon_i} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0) = \sigma_{xx}.$$

Аналогично вычисляются и остальные производные.

Теперь вернёмся к уравнению (7.15). Его можно записать следующим образом:

$$\delta(\Pi + R) = 0$$

или

$$\delta\mathcal{E} = 0, \quad (7.19)$$

где

$$\mathcal{E} = \Pi + R. \quad (7.20)$$

Величина \mathcal{E} носит название полной энергии деформируемой системы. Равенство (7.19) говорит о том, что в состоянии равновесия полная энергия системы имеет стационарное значение.

Можно доказать, что если материал обладает упрочнением (т.е. $\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} > 0$), то

$$\delta^2\mathcal{E} > 0.$$

Отсюда вытекает принцип минимума полной энергии деформируемой системы: действительная форма равновесия деформируемого тела отличается от всех возможных форм тем, что для неё полная энергия системы принимает минимальное значение \mathcal{E}_{\min} .

Таким образом, вариационное уравнение Лагранжа позволяет свести задачу теории пластичности к отысканию непосредственно минимума полной энергии системы, не прибегая к интегрированию сложной системы дифференциальных уравнений.

7.3 Вариационное уравнение Кастильяно. Принцип минимума полной дополнительной энергии деформируемой системы

Пусть некоторое деформируемое тело находится в равновесии под действием приложенных к нему объёмных и поверхностных сил. Для него будут справедливы уравнения равновесия (5.17) и статические граничные условия (7.6). Предположим, что объёмные и поверхностные силы получили малые приращения $\delta R_x, \delta R_y, \delta R_z$ и $\delta p_x, \delta p_y, \delta p_z$. При этом внутри тела изменятся напряжения: $\sigma_{xx} + \delta\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{zx} + \delta\sigma_{zx}$. Будем полагать, что новое напряжённое состояние также является равновесным, т.е. имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial(\sigma_{xx} + \delta\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xy} + \delta\sigma_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{zx} + \delta\sigma_{zx})}{\partial z} + R_x + \delta R_x = 0; \quad (7.21)$$

..... ;

$$p_x + \delta p_x = n_x (\sigma_{xx} + \delta\sigma_{xx}) + n_y (\sigma_{xy} + \delta\sigma_{xy}) + n_z (\sigma_{zx} + \delta\sigma_{zx}); \quad (7.22)$$

Вычитая из (7.21) и (7.22) равенства (5.17) и (7.6), получим зависимости, которым должны удовлетворять вариации напряжений:

$$\frac{\partial \delta\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta\sigma_{zx}}{\partial z} + \delta R_x = 0; \quad (7.23)$$

$$\delta p_x = n_x \delta\sigma_{xx} + n_y \delta\sigma_{xy} + n_z \delta\sigma_{zx}; \quad (7.24)$$

Найдем работу вариаций внешних сил на действительных перемещениях точек тела:

$$\delta A^* = \int_V (u_x \delta R_x + u_y \delta R_y + u_z \delta R_z) dV + \int_S (u_x \delta p_x + u_y \delta p_y + u_z \delta p_z) dS. \quad (7.25)$$

Поступая так же, как и в обобщение теоремы Клапейрона, данное выражение можно преобразовать к виду

$$\delta A^* = \delta R^*, \quad (7.26)$$

где

$$\delta R^* = \int_V (\varepsilon_{xx} \delta\sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \delta\sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} \delta\sigma_{zz} + \gamma_{xy} \delta\sigma_{xy} + \gamma_{yz} \delta\sigma_{yz} + \gamma_{zx} \delta\sigma_{zx}) dV. \quad (7.27)$$

Равенство (7.26) представляет собой вариационное уравнение Кастильяно. Введём для дальнейшего рассмотрения функционал Π^* , называемый дополнительным потенциалом внешних сил:

$$\Pi^* = - \left[\int_V (R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z) dV + \int_S (p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) dS \right]. \quad (7.28)$$

Полагая перемещения постоянными, имеем

$$\begin{aligned} \delta \Pi^* &= - \delta \left[\int_V (R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z) dV + \int_S (p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) dS \right] = \\ &= - \left[\int_V (u_x \delta R_x + u_y \delta R_y + u_z \delta R_z) dV + \int_S (u_x \delta p_x + u_y \delta p_y + u_z \delta p_z) dS \right]. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Сопоставляя (7.25) с (7.29), получаем

$$\delta A^* = -\delta \Pi^* . \quad (7.30)$$

Подстановка (7.30) в (7.26) даёт следующее представление вариационного уравнения Кастильяно:

$$\delta \Pi^* + \delta R^* = 0 . \quad (7.31)$$

Подынтегральное выражение в (7.27) можно представить в виде полного дифференциала некоторой функции Φ^* шести аргументов $\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{zx}$:

$$\varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} + \dots + \gamma_{zx} \delta \sigma_{zx} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{xx}} \delta \sigma_{xx} + \dots + \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{zx}} \delta \sigma_{zx} = \delta \Phi^* .$$

Тогда

$$\delta R^* = \int_V \delta \Phi^* dV = \delta \int_V \Phi^* dV \quad \text{и} \quad R^* = \int_V \Phi^* dV . \quad (7.32)$$

Отсюда следует, что должны иметь место равенства

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{xx}} ; \quad \dots ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{zx}} . \quad (7.33)$$

Величину R^* обычно называют дополнительной работой деформации тела.

Соотношениям (7.33) удовлетворяет следующая функция:

$$\Phi^* = \frac{\sigma_0 \theta}{2} + \int_0^{\sigma_i} \varepsilon_i d\sigma_i = \frac{\sigma_0^2}{2K} + \int_0^{\sigma_i} \varepsilon_i d\sigma_i . \quad (7.34)$$

Слагаемые в этой формуле равны площадям, заштрихованным на рисунке 7.2 горизонтальными линиями.

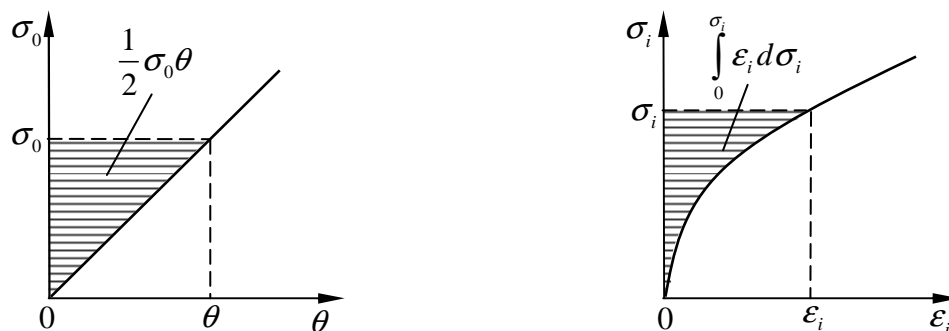


Рисунок 7.2 – К определению функции Φ^*

Убедимся в том, что выражение (7.34) приводит к соотношениям (7.33).

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{xx}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{xx}} \left(\frac{\sigma_0^2}{2K} \right) + \frac{d}{d\sigma_i} \left(\int_0^{\sigma_i} \varepsilon_i d\sigma_i \right) \cdot \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{1}{2K} \cdot 2\sigma_0 \frac{\partial \sigma_0}{\partial \sigma_{xx}} + \varepsilon_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{xx}} = \\ &= \frac{\sigma_0}{3K} + \varepsilon_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{xx}} = \varepsilon_0 + \varepsilon_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{xx}}.\end{aligned}$$

Согласно (2.22)

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \right]$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \sigma_i^2}{\partial \sigma_{xx}} = 2\sigma_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{1}{2} \left[2(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) - 2(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) \right] = \frac{3}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_0).$$

Тогда

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{3}{2\sigma_i} (\sigma_{xx} - \sigma_0)$$

и с учётом (5.6)

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{xx}} = \varepsilon_0 + \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_{xx} - \sigma_0) = \varepsilon_{xx}.$$

Аналогично вычисляются и остальные производные.

Вернёмся теперь к уравнению (7.31), которое можно представить следующим образом:

$$\delta(\Pi^* + R^*) = 0$$

или

$$\delta \mathcal{E}^* = 0, \quad (7.35)$$

где

$$\mathcal{E}^* = \Pi^* + R^*. \quad (7.36)$$

Величину \mathcal{E}^* принято называть полной дополнительной энергией деформируемой системы. Соотношение (7.35) говорит о том, что в состоянии равновесия полная дополнительная энергия системы \mathcal{E}^* имеет стационарное значение. Можно показать, что в случае упрочняющегося материала вторая вариация функционала \mathcal{E}^* положительна:

$$\delta^2 \mathcal{E}^* > 0.$$

Отсюда вытекает принцип минимума полной дополнительной энергии деформируемой системы: из всех статически возможных напряжённых состояния в действительности осуществляется такое состояние, которое даёт минимум полной дополнительной энергии деформируемой системы \mathcal{E}_{\min}^* .

Рассмотрим случай, когда объёмные силы отсутствуют. Тогда согласно (7.25)

$$\begin{aligned} \delta A^* &= \int_S (u_x \delta p_x + u_y \delta p_y + u_z \delta p_z) dS = \\ &= \int_{S_p} (u_x \delta p_x + u_y \delta p_y + u_z \delta p_z) dS + \int_{S_u} (u_x \delta p_x + u_y \delta p_y + u_z \delta p_z) dS. \end{aligned}$$

Предположим, далее, что поверхностные силы на S_p остаются неизменными. Кроме того, примем, что на части поверхности тела S_u перемещения заданы равными нулю. Тогда δA^* будет равна нулю, и в соответствии с (7.26) получим

$$\delta R^* = 0. \quad (7.37)$$

Равенство (7.37) вместе с условием $\delta^2 R^* > 0$ приводит к выводу о том, что при высказанных предположениях относительно объёмных сил, а также поверхностных нагрузок на S_p и перемещений на S_u в состоянии равновесия дополнительная работа деформации R^* имеет минимальное значение R_{\min}^* .

7.4 Теорема Кастильяно

Рассмотрим деформируемое тело, нагруженное системой m сосредоточенных сил P_i (рисунок 7.3). Найдём перемещения u_i точек приложения сил P_i в направлении этих сил. Для этого воспользуемся вариационным уравнением Кастильяно (7.26).

В рассматриваемом случае

$$\delta A^* = u_1 \delta P_1 + \dots + u_i \delta P_i + \dots + u_m \delta P_m. \quad (7.38)$$

С другой стороны

$$\delta R^* = \delta \int_V \Phi^* dV,$$

где

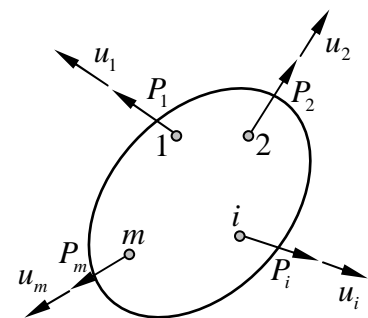


Рисунок 7.3 – Тело под действием системы сосредоточенных сил

$$\Phi^* = \Phi^*(\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{zx}).$$

Поскольку $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(P_1, \dots, P_i, \dots, P_m), \dots, \sigma_{zx} = \sigma_{zx}(P_1, \dots, P_i, \dots, P_m)$, то

$$\Phi^* = f(P_1, \dots, P_i, \dots, P_m)$$

и, следовательно,

$$R^* = \int_V \Phi^* dV = f_1(P_1, \dots, P_i, \dots, P_m).$$

Учитывая это, можно записать

$$\delta R^* = \frac{\partial R^*}{\partial P_1} \delta P_1 + \dots + \frac{\partial R^*}{\partial P_i} \delta P_i + \dots + \frac{\partial R^*}{\partial P_m} \delta P_m.$$

Сопоставляя данное выражение с (7.38), получим

$$u_1 = \frac{\partial R^*}{\partial P_1}; \quad \dots; \quad u_i = \frac{\partial R^*}{\partial P_i}; \quad \dots; \quad u_m = \frac{\partial R^*}{\partial P_m}. \quad (7.39)$$

Соотношения (7.39) выражают собой теорему Кастильяно: частная производная дополнительной работы деформации по величине любой из приложенных к телу внешних сил равна проекции перемещения точки приложения этой силы на направление её действия.

8 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

8.1 О расчётах на ползучесть

Ранее предполагалось, что при неизменных во времени воздействиях напряжённо-деформированное состояние рассматриваемых тел остаётся также неизменным. Однако многие материалы даже при невысоких температурах обладают способностью медленно деформироваться во времени при постоянных напряжениях (нагрузках). Это свойство материала называется ползучестью или вязкоупругостью.

Более общее определение ползучести дано А.А. Ильюшиным: ползучестью называется явление изменения во времени деформаций и напряжений, возникших в результате нагружения деформируемого тела. Изменение деформаций принято называть последствием (или собственно ползучестью), а изменение напряжений – релаксацией.

Для деталей, изготовленных из сталей и чугунов, явление ползучести существенно при повышенных температурах (например, после 300°C). При невысоких температурах изменение деформаций и напряжений во времени незначительно, и им можно пренебречь. Для цветных металлов (свинец, алюминий, дюралюминий и др.), а также для резины, каучука и пластмасс явление ползучести весьма заметно и при комнатной температуре.

Для изучения ползучести материалов проводятся длительные испытания на растяжение или сжатие образцов при разных напряжениях и температурах. По результатам этих опытов строятся кривые ползучести, т.е. зависимости деформации от времени (рисунок 8.1). Здесь на кривой:

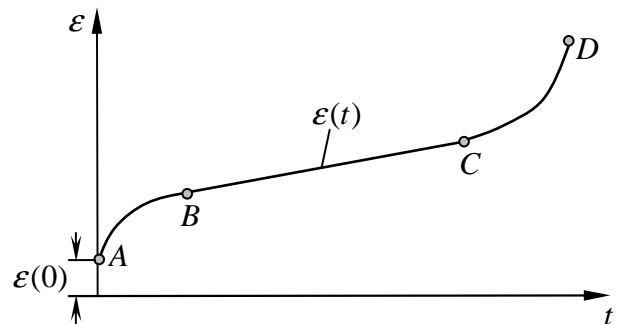


Рисунок 8.1 – Кривая ползучести

AB – первый период ползучести (переходный период);

BC – второй период ползучести (период установившейся ползучести);

CD – третий период (период большой скорости деформаций). Заканчивается либо хрупким изломом вблизи точки *C*, либо вязким разрушением с образованием шейки.

Вид кривой $ABCD$ зависит от напряжения σ , при котором проводятся испытания (рисунок 8.2). При одном и том же напряжении характер зависимости $\varepsilon(t)$ определяется температурой образца T (рисунок 8.3).

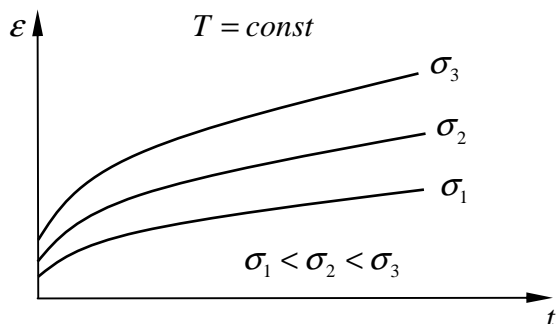


Рисунок 8.2 – Влияние напряжения

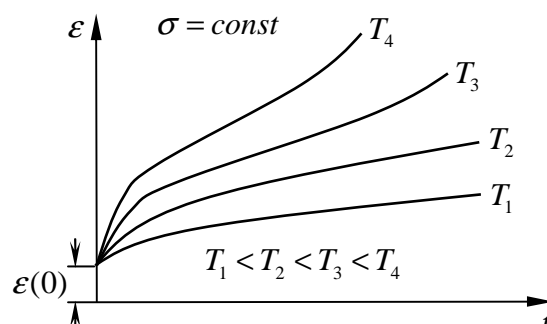


Рисунок 8.3 – Влияние температуры

Если деформация растягиваемого стержня поддерживается постоянной, то с течением времени напряжение в данном стержне убывает. Это явление, как было отмечено выше, называется релаксацией напряжения. Релаксация характеризуется резким спадом напряжения в начальной стадии процесса (рисунок 8.4).

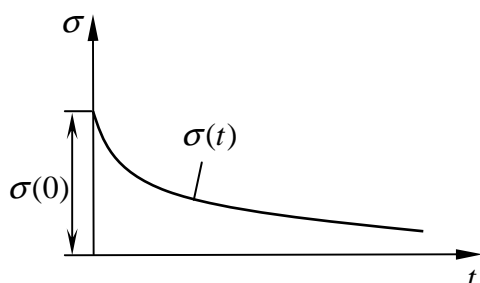


Рисунок 8.4 – Кривая релаксации

Для изучения ползучести и прочности металлов, используемых в стационарных энергетических машинах (паровых котлах, паровых и газовых турбинах, двигателях внутреннего сгорания) и в химических установках, проводятся весьма длительные испытания. Например, опыты Е. Робинсона по ползучести стали продолжались 100 000 часов (с 27 марта 1931 г. до 8 октября 1942 г.).

В дальнейшем мы будем рассматривать решения задач ползучести для одноосного напряжённого состояния. Если зависимости между напряжениями, деформациями и их производными по времени линейны, то исследуемое тело принято называть линейным вязкоупругим. В противном случае оно будет нелинейным вязкоупругим. Неустановившейся ползучестью называется процесс ползучести, протекающий при изменяющихся во времени напряжениях. Если напряжения во времени постоянны, то этот процесс называют установившейся ползучестью.

8.2 Механические модели деформируемого тела

Для решения простейших одномерных задач теории ползучести деформируемое тело моделируется или представляется в виде совокупности простых механических элементов. Основными здесь являются упругий и вязкий элементы.

Конструктивно упругий элемент можно представить в виде пружины (рисунок 8.5). Удлинение пружины δ_1 пропорционально приложенной силе P :

$$\delta_1 = k_1 P, \quad (8.1)$$

где k_1 – коэффициент пропорциональности (податливость пружины).



Рисунок 8.5 – Упругий элемент

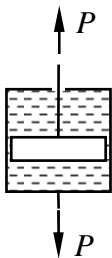


Рисунок 8.6 – Вязкий элемент

Вязкий элемент может быть принят в виде цилиндра, заполненного вязкой жидкостью, внутри которого перемещается поршень так, что жидкость перетекает из одной полости в другую через малый зазор между цилиндром и поршнем (рисунок 8.6). Здесь скорость перемещения поршня $d\delta_2/dt$ относительно цилиндра пропорциональна силе P :

$$\frac{d\delta_2}{dt} = k_2 P, \quad (8.2)$$

где k_2 – коэффициент пропорциональности.

При последовательном соединении упругого и вязкого элементов изменение расстояния между точками приложения сил P будет равно сумме удлинения пружины и перемещения поршня относительно цилиндра (рисунок 8.7):

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Дифференцирование данного выражения даёт

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta_1}{dt} + \frac{d\delta_2}{dt}$$

или с учётом (8.1) и (8.2)

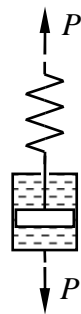


Рисунок 8.7 – Модель тела Максвелла

$$\frac{d\delta}{dt} = k_1 \frac{dP}{dt} + k_2 P.$$

Переходя от перемещения δ и силы P к деформации ε и напряжению σ и заменяя коэффициенты k_1 и k_2 на $1/E$ и $1/\eta$ соответственно (где E – модуль упругости; η – коэффициент вязкости), получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma. \quad (8.3)$$

Последнее уравнение описывает так называемое вязкоупругое тело Максвелла. Рассмотрим некоторые свойства этого тела.

При постоянной деформации из уравнения (8.3) следует, что

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{n} \sigma = 0,$$

где

$$n = \frac{\eta}{E}.$$

Интегрируя данное уравнение и используя начальное условие при $t = 0$ $\sigma = \sigma_0$, получим решение

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t}{n}}.$$

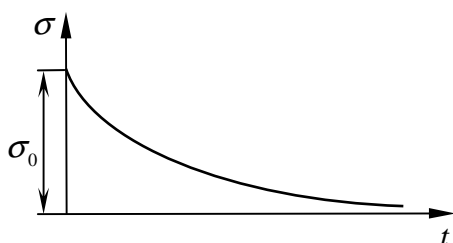


Рисунок 8.8 – Кривая релаксации в теле Максвелла

начальное напряжение σ_0 уменьшается в $e = 2,718$ раз. Эту величину называют временем релаксации.

При постоянном напряжении согласно (8.3) деформация растёт пропорционально времени. Этот результат, однако, не подтверждается экспериментом.

Следующей моделью вязкоупругой среды может быть параллельное соединение упругого и вязкого элементов (рисунок 8.9). Здесь, очевидно, си-

ла P равна сумме сил P_1 и P_2 , действующих соответственно на упругий и вязкий элементы:

$$P = P_1 + P_2.$$

При этом $\delta = \delta_1 = \delta_2$. Используя выражения (8.1) и (8.2), имеем

$$P = \frac{\delta}{k_1} + \frac{1}{k_2} \frac{d\delta}{dt}.$$

Перейдём к напряжениям и деформациям:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (8.4)$$

Это уравнение описывает так называемое вязкоупругое тело Фойгта.

Пусть в (8.4) $\sigma = \sigma_0 = const$. Тогда

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta}.$$

Интегрируя данное уравнение и используя начальное условие при $t = 0$ $\varepsilon = 0$, получим решение

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\eta}} \right).$$

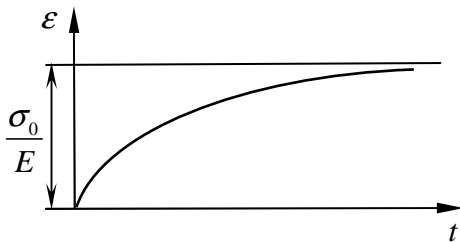


Рисунок 8.10 – Кривая последствия в теле Фойгта

Отсюда заключаем, что деформация растёт по экспоненциальному закону, стремясь к величине σ_0/E (рисунок 8.10).

Модель Фойгта имеет недостаток. Из (8.4) следует, что при постоянной деформации напряжение также постоянно, т.е. это уравнение не отражает релаксации напряжения.

В заключение рассмотрим более сложную модель, состоящую из упругого элемента 1, последовательно соединённого с двумя параллельно соединёнными упругим элементом 2 и вязким элементом 3 (рисунок 8.11).

В этом случае изменение расстояния между точками приложения сил P будет равно сумме

$$\delta = \delta_1 + \delta_2,$$

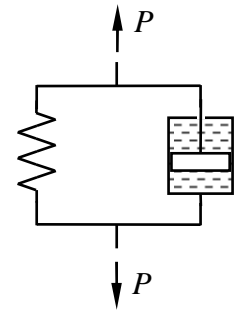


Рисунок 8.9 – Модель тела Фойгта

где δ_1 – удлинение пружины 1; δ_2 – удлинение пружины 2, равное перемещению поршня относительно цилиндра.

Дифференцируя последнее соотношение по времени, получим

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta_1}{dt} + \frac{d\delta_2}{dt}. \quad (8.5)$$

Зависимости между перемещениями δ_1 , δ_2 и силами P , P_2 , P_3 , действующими соответственно на модель (пружину 1), пружину 2 и поршень 3, имеют вид

$$\delta_1 = k_1 P; \quad \delta_2 = k_2 P_2; \quad \frac{d\delta_2}{dt} = k_3 P_3, \quad (8.6)$$

причём

$$P = P_2 + P_3. \quad (8.7)$$

Подставим соотношения (8.6) в выражение (8.5), используя при этом равенство (8.7). Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P_3 = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 (P - P_2) = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} \delta_2 = \\ &= k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} (\delta - \delta_1) = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} \delta + \frac{k_3 k_1}{k_2} P, \end{aligned}$$

откуда

$$P + \frac{k_1 k_2}{k_3 (k_1 + k_2)} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{k_1 + k_2} \delta + \frac{k_2}{k_3 (k_1 + k_2)} \frac{d\delta}{dt}.$$

Переходя от перемещения δ и силы P к деформации ε и напряжению σ и заменяя коэффициенты k_1 и k_2 соответственно на $1/E_1$ и $1/E_2$, а k_3 на $1/\eta$, получим

$$\sigma + n \frac{d\sigma}{dt} = H \varepsilon + nE \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (8.8)$$

где

$$n = \frac{\eta}{E_1 + E_2}; \quad H = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}; \quad E = E_1.$$

Уравнение (8.8) описывает вязкоупругое тело Кельвина.

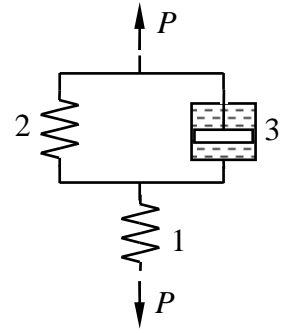


Рисунок 8.11 – Модель тела Кельвина

Выясним физический смысл величин E и H . В частном случае очень быстрого приложения нагрузки, когда производные по времени от напряжений и деформаций достаточно велики и первыми слагаемыми в правой и левой частях равенства (8.8) по сравнению со вторыми можно пренебречь, имеем

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt}$$

и, следовательно,

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Таким образом, величина E представляет собой мгновенный модуль упругости. В другом частном случае очень медленного приложения нагрузки, когда производные малы и ими по сравнению с первыми слагаемыми можно пренебречь, получаем

$$\sigma = H\varepsilon.$$

Следовательно, величину H можно назвать длительным модулем упругости. Поскольку

$$H = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} = \frac{E_1}{1 + \frac{E_1}{E_2}} < E_1 = E,$$

длительный модуль упругости меньше мгновенного.

Например, для стали $E = 2,2 \cdot 10^5$ МПа; $H = 1,9 \cdot 10^5$ МПа; $n = 10^8$ суток, т.е. время релаксации составляет около 274000 лет.

Рассмотрим частные случаи уравнения Кельвина. Пусть $E_2 = 0$, тогда $H = 0$ и приходим к уравнению Максвелла (8.3).

Если пружина 1 отсутствует, т.е. $E_1 \rightarrow \infty$, то

$$H = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} = \frac{E_2}{1 + \frac{E_2}{E_1}} \rightarrow E_2;$$

$$n = \frac{\eta}{E_1 + E_2} \rightarrow 0; \quad nE_1 = \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} = \frac{\eta}{1 + \frac{E_2}{E_1}} \rightarrow \eta$$

и, полагая $E_2 = E$, получаем уравнение Фойгта (8.4).

8.3 Простейшие задачи линейной теории ползучести

Для решения задач теории ползучести воспользуемся уравнением Кельвина (8.8):

$$\sigma + n\dot{\sigma} = H\varepsilon + nE\dot{\varepsilon}, \quad (8.9)$$

где E – мгновенный модуль упругости; H – длительный модуль упругости (причём $H < E$); n – время релаксации. Здесь точкой обозначена производная по времени.

Задача №1: Прямолинейный стержень растягивается силой, не изменяющейся с течением времени, т.е. $\sigma = \sigma_0 = const$. При $t=0$ начальная деформация стержня $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = \sigma_0/E$. Определить изменение деформации во времени.

Поскольку напряжение постоянно, то $\dot{\sigma} = 0$ и уравнение (8.9) примет вид

$$\sigma_0 = H\varepsilon + nE\dot{\varepsilon}$$

или

$$\dot{\varepsilon} + \frac{H}{nE}\varepsilon = \frac{\sigma_0}{nE}. \quad (8.10)$$

Общее решение неоднородного уравнения (8.10) можно записать в виде суммы общего решения однородного уравнения ε^0 и частного решения неоднородного уравнения ε :

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon = const$, из (8.10) сразу находим

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{H}.$$

Решение однородного уравнения

$$\dot{\varepsilon}^0 + \frac{H}{nE}\varepsilon^0 = 0$$

будем отыскивать в виде e^{kt} .

Тогда

$$ke^{kt} + \frac{H}{nE}e^{kt} = 0 \quad \text{и} \quad k = -\frac{H}{nE}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^0 = C e^{-\frac{H}{nE}t},$$

где C – постоянная интегрирования.

Таким образом, решение уравнения (8.10) примет вид

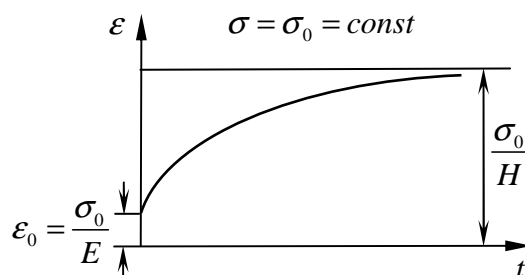
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{H} + C e^{-\frac{H}{nE}t}.$$

Для отыскания постоянной C воспользуемся начальным условием (при $t = 0$: $\varepsilon(0) = \sigma_0/E$):

$$\frac{\sigma_0}{E} = \frac{\sigma_0}{H} + C; \quad C = -\sigma_0 \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{E} \right).$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{H} - \sigma_0 \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{E} \right) e^{-\frac{H}{nE}t} = \\ &= \frac{\sigma_0}{H} \left[1 - \left(1 - \frac{H}{E} \right) e^{-\frac{H}{nE}t} \right]. \end{aligned} \quad (8.11)$$



Данное решение представлено на рисунке 8.12. Видно, что при $t \rightarrow \infty$ относительное удлинение стержня $\varepsilon(t) \rightarrow \sigma_0/H$.

Рисунок 8.12 – Решение задачи №1

Задача №2: Прямолинейный стержень растягивается постоянной силой. При $t = t_0$ производится разгрузка, т.е. снимается напряжение σ_0 . При этом деформация стержня мгновенно уменьшается на величину $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ и становится равной $\varepsilon^* = \varepsilon(t_0) - \varepsilon_0$. Исследовать дальнейшее поведение деформации.

После разгрузки поведение деформации можно определить из однородного уравнения

$$\dot{\varepsilon} + \frac{H}{nE} \varepsilon = 0. \quad (8.12)$$

Его решение имеет вид

$$\varepsilon = C_1 e^{-\frac{H}{nE}t}.$$

Постоянную интегрирования находим из условия, что при $t = t_0 + 0$ деформация $\varepsilon = \varepsilon^*$:

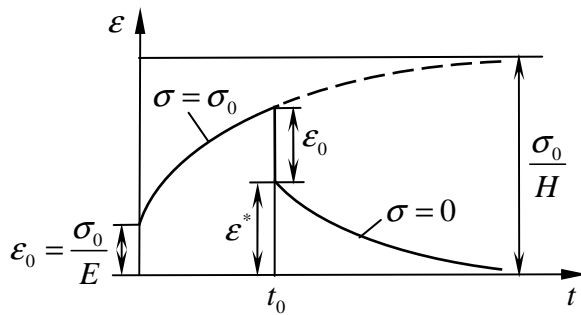


Рисунок 8.13 – Решение задачи №2

$$\varepsilon^* = C_1 e^{-\frac{H}{nE}t_0} \quad \text{и} \quad C_1 = \varepsilon^* e^{\frac{H}{nE}t_0}.$$

Таким образом, имеем

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^* e^{-\frac{H}{nE}(t-t_0)}. \quad (8.13)$$

Здесь при $t \rightarrow \infty$ деформация стремится к нулю (рисунок 8.13).

Задача №3: Прямолинейный стержень при $t = 0$ получил начальную деформацию ε_0 , которая затем с течением времени не изменяется. Определить закон изменения во времени напряжения.

При $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$ производная $\dot{\varepsilon} = 0$ и уравнение (8.9) будет иметь следующий вид:

$$\sigma + n\dot{\sigma} = H\varepsilon_0$$

или

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{n}\sigma = \frac{H}{n}\varepsilon_0. \quad (8.14)$$

Полагая частное решения неоднородного уравнения $\mathcal{E} = const$, из (8.14) находим

$$\mathcal{E} = H\varepsilon_0.$$

Решение однородного уравнения

$$\dot{\sigma}^0 + \frac{1}{n}\sigma^0 = 0$$

будем искать в виде e^{kt} :

$$ke^{kt} + \frac{1}{n}e^{kt} = 0 \quad \text{и} \quad k = -\frac{1}{n}.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения запишется как

$$\sigma^0 = C e^{-\frac{t}{n}}.$$

Суммируя данные решения, получим

$$\sigma(t) = H\varepsilon_0 + C e^{-\frac{t}{n}}.$$

Из начального условия (при $t = 0$: $\sigma(0) = \sigma_0 = E\varepsilon_0$) находим

$$\sigma_0 = H\varepsilon_0 + C; \quad C = \sigma_0 - H\varepsilon_0.$$

Окончательно получим

$$\sigma(t) = H\varepsilon_0 + (\sigma_0 - H\varepsilon_0)e^{-\frac{t}{n}}. \quad (8.15)$$

Видно, что при $t \rightarrow \infty$ напряжение $\sigma \rightarrow H\varepsilon_0$ (рисунок 8.14).

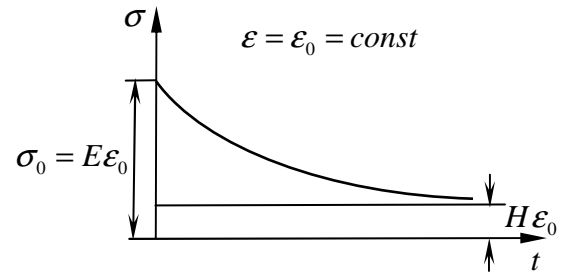


Рисунок 8.14 – Решение задачи №3

Задача №4: Прямолинейный стержень деформируется с постоянной скоростью $\varepsilon(t) = at$, где $a = const$. Определить изменение напряжения с течением времени.

Учитывая, что $\dot{\varepsilon} = a$, уравнение (8.9) преобразуется к следующему виду:

$$\sigma + n\dot{\sigma} = Hat + nEa$$

или

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{n}\sigma = \frac{Ha}{n}t + Ea. \quad (8.16)$$

Имеем

$$\sigma = \sigma^0 + \mathfrak{E},$$

где, как и в предыдущей задаче,

$$\sigma^0 = Ce^{-\frac{t}{n}}.$$

Предположим, что частное решение неоднородного уравнения является линейной функции:

$$\mathfrak{E} = At + B.$$

Подставляя данную функцию в (8.16), получим

$$A + \frac{A}{n}t + \frac{B}{n} = \frac{Ha}{n}t + Ea,$$

откуда

$$\frac{A}{n} = \frac{Ha}{n} \quad \text{и} \quad A = Ha;$$

$$\frac{B}{n} = Ea - A = a(E - H) \quad \text{и} \quad B = na(E - H);$$

$$\mathfrak{E} = Hat + na(E - H).$$

Суммируя данные решения, имеем

$$\sigma(t) = C e^{-\frac{t}{n}} + Hat + na(E - H).$$

Поскольку при $t = 0$: $\varepsilon = 0$ и $\sigma = 0$, то

$$0 = C + na(E - H) \quad \text{и} \quad C = -na(E - H).$$

В итоге получаем следующее решение:

$$\sigma(t) = Hat + na(E - H) \left(1 - e^{-\frac{t}{n}} \right). \quad (8.17)$$

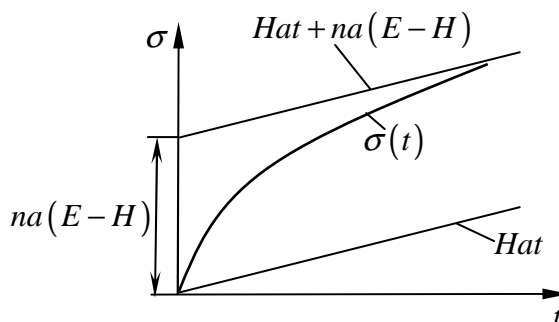


Рисунок 8.15 – Решение задачи №4

График полученной таким образом зависимости $\sigma(t)$ представлен на рисунке 8.15.

Аналогичным образом можно рассмотреть случай нагружения стержня, при котором напряжения изменяются пропорционально времени $\sigma(t) = bt$.

Задача №5: Задан закон изменения напряжения $\sigma(t) = f(t)$. Определить зависимость деформации от времени.

Перепишем уравнение (8.9):

$$\dot{\varepsilon} + \frac{H}{nE} \varepsilon = \frac{\sigma}{nE} + \frac{1}{E} \dot{\sigma}. \quad (8.18)$$

Имеем

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \mathfrak{E},$$

где, как и в задаче №1,

$$\varepsilon^0 = C e^{-\frac{H}{nE} t}.$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде, аналогичном общему решению однородного уравнения, полагая $C = D(t)$:

$$\mathfrak{E} = D(t) e^{-\frac{H}{nE} t};$$

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = -\frac{H}{nE} D e^{-\frac{H}{nE} t} + \frac{dD}{dt} e^{-\frac{H}{nE} t}.$$

Подставим эти выражения в дифференциальное уравнение (8.18):

$$-\frac{H}{nE} D e^{-\frac{H}{nE}t} + \frac{dD}{dt} e^{-\frac{H}{nE}t} + \frac{H}{nE} D e^{-\frac{H}{nE}t} = \frac{\sigma}{nE} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt};$$

$$\frac{dD}{dt} = \left(\frac{\sigma}{nE} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \right) e^{\frac{H}{nE}t},$$

откуда

$$D(t) = \int_0^t \left(\frac{\sigma}{nE} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\tau} \right) e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau.$$

Выполним интегрирование по частям:

$$\int_0^t \overbrace{e^{\frac{H}{nE}\tau}}^U \underbrace{\frac{d\sigma}{d\tau}}_{dV} d\tau = \left[\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU \right] = \sigma(\tau) e^{\frac{H}{nE}\tau} \Big|_0^t - \frac{H}{nE} \int_0^t \sigma(\tau) e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau =$$

$$= \sigma(t) e^{\frac{H}{nE}t} - \sigma(0) - \frac{H}{nE} \int_0^t \sigma(\tau) e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau.$$

Тогда

$$D(t) = \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{nE} e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau - \frac{H}{nE^2} \int_0^t \sigma(\tau) e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau + \frac{\sigma(t)}{E} e^{\frac{H}{nE}t} - \frac{\sigma(0)}{E} =$$

$$= \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{nE} \left(1 - \frac{H}{E} \right) e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau + \frac{\sigma(t)}{E} e^{\frac{H}{nE}t} - \frac{\sigma(0)}{E}.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения записывается как

$$\varepsilon = \frac{\sigma(t)}{E} - \frac{\sigma(0)}{E} e^{-\frac{H}{nE}t} + e^{-\frac{H}{nE}t} \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{nE} \left(1 - \frac{H}{E} \right) e^{\frac{H}{nE}\tau} d\tau.$$

Складывая его с общим решением однородного уравнения, получим

$$\varepsilon(t) = C e^{-\frac{H}{nE}t} + \frac{\sigma(t)}{E} - \frac{\sigma(0)}{E} e^{-\frac{H}{nE}t} + \frac{1}{nE} \left(1 - \frac{H}{E} \right) \int_0^t \sigma(\tau) e^{-\frac{H}{nE}(t-\tau)} d\tau.$$

Ввиду произвольности C третье слагаемое здесь можно опустить. В итоге получим

$$\varepsilon(t) = C e^{-\frac{H}{nE}t} + \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (8.19)$$

где

$$K(t - \tau) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{H}{E} \right) e^{-\frac{H}{nE}(t-\tau)}.$$

Здесь $K(t - \tau)$ – так называемое ядро ползучести.

Выражение (8.19) позволяет определять закон изменения деформации $\varepsilon(t)$ в зависимости от характера изменения напряжения $\sigma(t)$. Его можно также рассматривать как интегральное уравнение относительно функции $\sigma(t)$ в предположении, что функция $\varepsilon(t)$ известна. Действительно, если задан закон изменения деформации $\varepsilon = \varphi(t)$, то из уравнения (8.19) можно получить

$$\sigma(t) = C e^{-\frac{t}{n}} + E\varepsilon(t) - E \int_0^t T(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (8.20)$$

где

$$T(t - \tau) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{H}{E} \right) e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)}.$$

Здесь $T(t - \tau)$ – так называемое ядро релаксации.