

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
(СГАУ)**

Факультет летательных аппаратов

Л.М. Савельев, С.А. Чернякин

Курс лекций по дисциплине

Нелинейные механически колебания

Электронный ресурс

Самара 2013г.

УДК 534

С 49

Автор-составитель: **Савельев Леонид Макарович**
Чернякин Сергей Алексеевич

Нелинейные механические колебания [Электронный ресурс]: электрон. курс лекций / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост: Л. М. Савельев, С.А. Чернякин. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

1 Кинематика колебаний	6
1.1 Основные определения.....	6
1.2 Векторная интерпретация колебаний	9
1.3 Биения	13
1.4 Колебания трубопровода водяной турбины.....	16
1.5 Метод комплексных чисел.....	20
1.6 Работа, совершаемая при гармоническом движении	24
1.7 Негармоническое периодическое движение	32
2 Две степени свободы	38
2.1 Свободные колебания. Главные колебания	38
2.2 Динамический поглотитель колебаний без затухания.....	51
2.3 Поглотитель колебаний с затуханием.....	62
2.4 Успокоение качки корабля.....	82
2.5 Поглотители толчков на автомобилях	93
2.6 Виброизоляция нежестких оснований.....	100
3 Системы с произвольным числом степеней свободы	106
3.1 Свободные колебания без затухания	106
3.2 Вынужденные колебания без затухания.....	113
3.3 Свободные и вынужденные колебания с затуханием	119
3.4 Струны и органные трубы. Продольные и поперечные колебания однородных балок	128
3.5 Метод Релея.....	139
3.6 Колебания изгиба однородных балок	148
3.7 Балки переменного поперечного сечения	161

3.8	Нормальные функции и их применение	167
3.9	Метод Стодолы для высших типов колебаний	174
3.10	Кольца, мембраны и пластинки	176
4	Автоколебания	183
4.1	Общие замечания	183
4.2	Математический критерий устойчивости	189
4.3	Неустойчивость вследствие трения	196
4.4	Внутренний гистерезис валов и масляные плёнки от смазки подшипников как причины неустойчивости	206
4.5	Галопирование линией электропередачи	214
4.6	Вихри Кармана	226
4.7	Колебания регулятора паровой машины	233
4.8	Форсунки двигателей Дизеля	240
4.9	Колебания турбин, вызванные просачиванием пара	246
4.10	Явление флаттера в крыльях самолёта	253
4.11	Явление шимми в колёсах автомобилей	266
5	Квазигармонические и нелинейные колебания систем	276
5.1	Принцип вложения	276
5.2	Примеры систем с изменяющейся жёсткостью	279
5.3	Решение уравнения	291
5.4	Интерпретация результата	299
5.5	Примеры нелинейных систем	306
5.6	Свободные колебания систем с нелинейными характеристиками	311
5.7	Релаксационные колебания	329

5.8 Вынужденные колебания при нелинейной восстанавливающей силе	342
5.9 Вынужденные колебания при нелинейном затухании.....	349
5.10 Субгармонический резонанс.....	354

1 Кинематика колебаний

1.1 Основные определения

Колебанием мы вообще называем периодическое движение, т.е. такое движение, которое повторяется по истечении некоторого промежутка времени, называемого периодом колебания; период колебания обыкновенно обозначается буквой T . График перемещений x в зависимости от времени t часто может изображаться достаточно сложной кривой. В качестве примера на рисунок 1,а изображен график колебаний станины паровой турбины. Строго говоря, колебание, во-первых, не обязательно движение (подразумевается механическое) и, во-вторых, не обязательно является периодическим процессом. Вообще колебательный процесс, в частности механическое колебание, характеризуется чередованием возрастания и убывания некоторой величины, например, отклонения движущейся точки от некоторого фиксированного положения.

Простейшим типом периодического движения является гармоническое движение; в этом случае зависимость между перемещением x и временем t может быть выражена уравнением

$$x = x_0 \sin \omega t. \quad (1.1)$$

Это уравнение имеет место для малых колебаний математического маятника, график которых представлен на рисунке 1,б. Наибольшее значение x_0 отклонения называется амплитудой колебания.

Период T обычно измеряется в секундах. Величина, обратная периоду

$$f = \frac{1}{T}$$

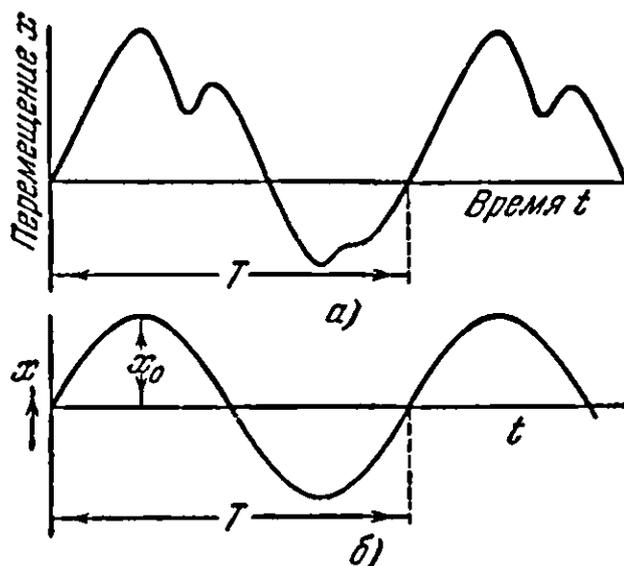


Рисунок 1 – Графики периодической и гармонической функций периода T и амплитуды x_0

называется частотой колебания и измеряется числом колебаний в одну секунду. Для единицы частоты предложено название герц — в честь Генриха Герца, первого экспериментатора в области электрических колебаний и волн.

В уравнение (1.1) входит величина ω , известная под названием угловой, круговой или циклической частоты; измеряется она числом радианов в секунду. Такое, может быть несколько неудачное, название получила эта величина на основании векторной интерпретации гармонического колебания, о чем будет речь в следующем параграфе. Установим соотношения между ω , f и T . Из уравнения (1.1), а также из рисунка 1,б ясно, что полный цикл колебания завершается при изменении \cos на 360° или, в радианной мере, на 2π , так как после этого синус принимает свое прежнее значение. Тогда, если $\cos = 2\pi$, то промежуток времени t равен периоду T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ сек.} \quad (1.2)$$

Но величина f обратна величине T . Поэтому

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ колеб/сек.} \quad (1.3)$$

Для вращающихся машин частота нередко выражается числом N колебаний в минуту:

$$N \frac{\text{колеб}}{\text{мин}} = \frac{30\omega}{\pi}.$$

Найдём скорость гармонического движения. Зная, что закон движения выражается уравнением

$$x = x_0 \sin \omega t,$$

находим, дифференцируя его по времени,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x_0 \omega \cos \omega t. \quad (1.4)$$

Отсюда видно, что скорость является также гармонической функцией времени и имеет максимум $x_0 \omega$.

Аналогично находим ускорение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -x_0 \omega^2 \sin \omega t. \quad (1.5)$$

Это – также гармоническая функция, принимающая наибольшее значение $x_0 \omega^2$.

Рассмотрим теперь два колебательных движения, определяемых уравнениями

$$x_1 = a \sin \omega t,$$

$$x_2 = b \sin(\omega t + \varphi).$$

Графики этих колебаний представлены на рисунке 2, где по оси абсцисс отложена величина ωt . Благодаря присутствию величины φ , смещения, вызванные соответствующими колебаниями, достигают своего наибольшего значения не в один и тот же момент времени, а через φ/ω секунд одно после

другого. Величина φ известна под названием угла сдвига фазы, или разности фаз. Если рассматривается только одно уравнение колебаний, то φ называется просто начальной фазой. Совершенно очевидно, что оба колебания имеют одну и ту же частоту f , так как в обоих случаях величина ω одна и та же. Заметим, что сдвиг фазы имеет значение лишь в случае двух колебательных движений равной частоты, если же частоты различны, то эта величина не существенна.

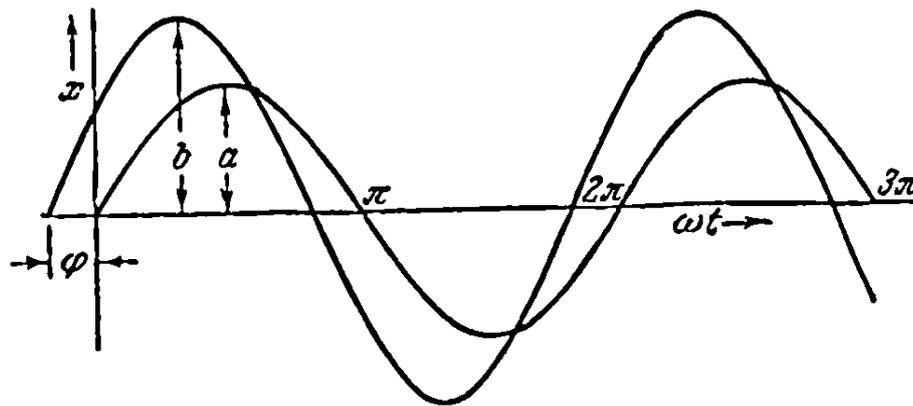


Рисунок 2 – Два гармонических движения, имеющих разность фаз φ

1.2 Векторная интерпретация колебаний

Движение колеблющейся частицы может быть представлено помощью вращающегося вектора. Пусть некоторый вектор a (рисунок 3) вращается против часовой стрелки с некоторой постоянной угловой скоростью ω . Если мы будем отсчитывать время от того момента, когда вектор находился в горизонтальном положении, то горизонтальная (OA) и вертикальная (OB) проекции вращающегося вектора будут соответственно равны

$$a\omega\cos\omega t \text{ и } a\omega\sin\omega t.$$

Каждая из этих проекций может служить для представления возвратно-поступательного движения, но в дальнейшем мы будем пользоваться для этой цели лишь горизонтальной проекцией.

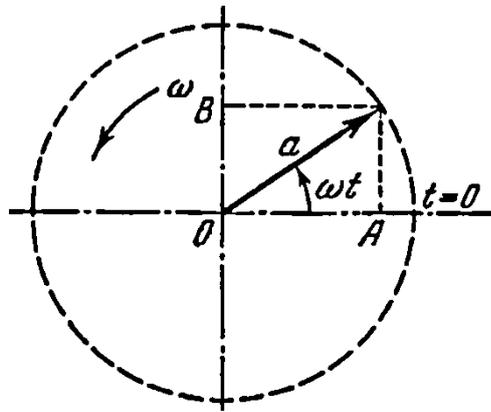


Рисунок 3 – Гармоническое движение, изображаемое горизонтальной проекцией вращающегося вектора.

Приведенная здесь интерпретация колебательного движения послужила поводом для введения термина «круговая частота». Величина ω , являясь угловой скоростью вектора, измеряется в радианах в секунду, а частота f , очевидно, в оборотах в секунду. Отсюда сейчас же следует равенство

$$\omega = 2\pi f.$$

Скорость движения, происходящего по закону

$$x = a\omega \cos \omega t,$$

будет

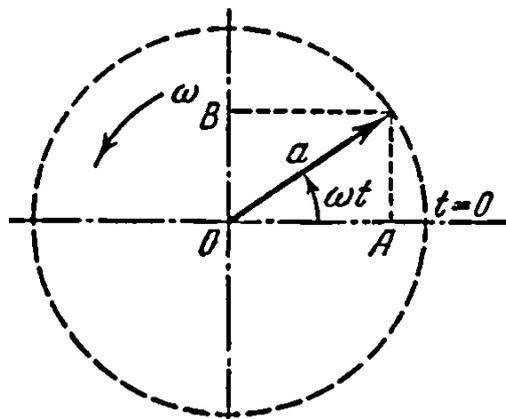
$$\dot{x} = -a\omega^2 \sin \omega t$$

и может быть представлена как горизонтальная проекция вектора длины $a\omega$, вращающегося с той же угловой скоростью ω , что и предыдущий вектор, определяющий смещение точки, но повернутого относительно него на 90° в сторону вращения. Ускорение будет

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t$$

и, подобно скорости, может быть представлено как горизонтальная проекция вектора длины $a\omega^2$, вращающегося опять с такой же угловой скоростью ω , но уже повернутого на 180° относительно вектора смещения или на 90° относительно вектора скорости в сторону движения (рисунок 4). В справедливо-

сти сказанного легко убедиться, проследив последовательные положения всех векторов за один оборот.



Перемещение, скорость и ускорение изображаются тремя взаимно перпендикулярными векторами.

Рисунок 4

Изложенный векторный метод представления возвратно-поступательного движения чрезвычайно удобен. Пусть, например, имеем точку, совершающую одновременно два гармонических движения равной частоты, но имеющих разность фаз φ , определяемых именно выражениями $a\cos\omega t$ и $b\cos(\omega t - \varphi)$. Сложение этих выражений по правилам тригонометрии связано с излишней затратой времени. Однако очень легко построить два соответствующих вектора, геометрическая сумма которых определит полное движение, как это видно из верхней части рисунок 5. Для этого заставим параллелограмм (a, b) вращаться с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки; тогда горизонтальные проекции векторов будут перемещениями в функции времени. Все это показано на нижней части рисунок 5, где линия $a a$ изображает тот момент времени, для которого построена векторная диаграмма. Из чертежа сразу видно, что перемещение суммы векторов $a + b$ равно сумме перемещений векторов a и b , и, следовательно, перемещение проекции суммы векторов, показанное на графике пунктиром, действительно равно сумме перемещений проекции векторов a и b .

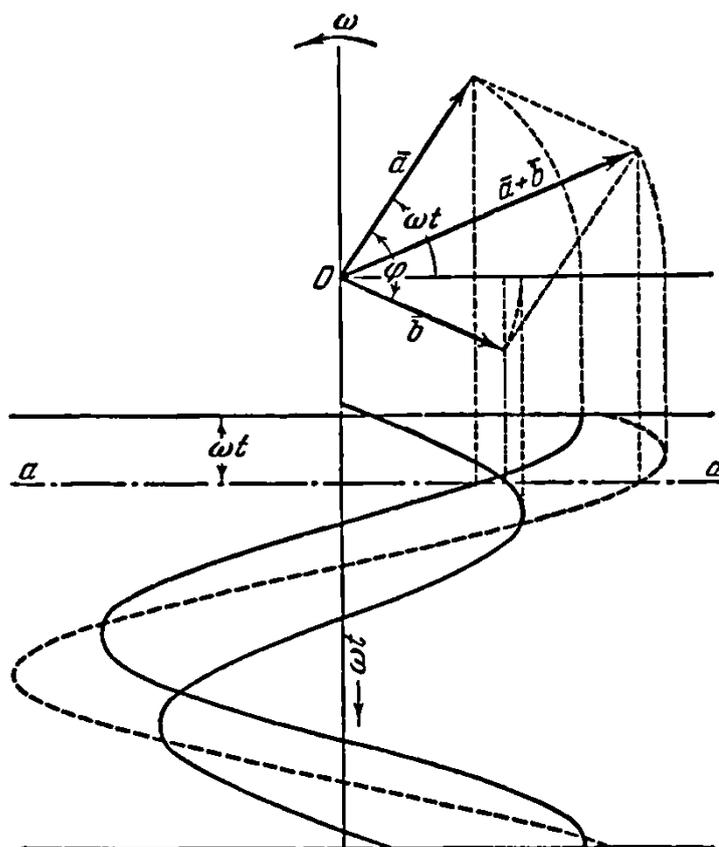


Рисунок 5 – Сложение двух колебаний посредством сложения векторов, изображающих эти колебания

Совершенно очевидно, что указанное сложение векторов приводит к верному результату. В самом деле, $a\omega\cos\omega t$ есть горизонтальная проекция вектора a , а $b\cos(\omega t - \varphi)$ — горизонтальная проекция вектора b ; но горизонтальная проекция суммы двух векторов равна, как известно, сумме, горизонтальных проекций составляющих векторов, а это и есть то, что мы хотели показать.

Такое сложение векторов допустимо лишь в том случае, когда оба колебания имеют одинаковые частоты. Колебательные движения, определяемые выражениями $a\sin\omega t$ и $a\sin 2\omega t$, могут быть представлены двумя векторами, первый из которых вращается с угловой скоростью ω , а второй — вдвое быстрее, т. е. с угловой скоростью 2ω . Так как взаимное расположение этих векторов на диаграмме непрерывно изменяется, то геометрическое сложение в данном случае не имеет смысла.

В заключение остановимся на одном особом случае векторного сложения, который довольно часто будет встречаться в последующих главах, а именно, на случае, когда складываемые колебания имеют разные амплитуды и происходят: одно по закону синуса, а другое по закону косинуса, т. е. соответственно

$$a \sin \omega t \text{ и } a \cos \omega t.$$

В этом случае оба вектора взаимно перпендикулярны и, как легко видеть из рисунка 6,

$$a \sin \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.6)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

1.3 Биения

Если точка движется взад и вперёд по некоторой прямой таким образом, что её смещение во всякий момент времени может быть представлено в виде суммы двух членов

$$a \sin \omega_1 t + b \sin \omega_2 t,$$

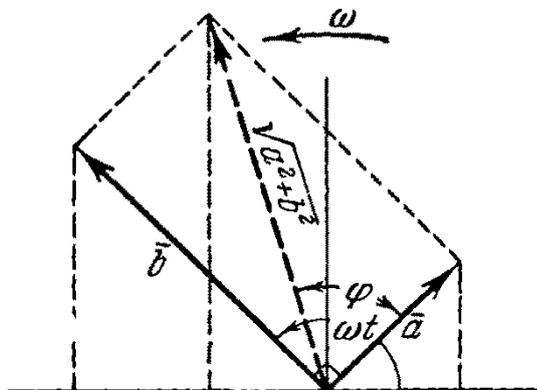


Рисунок 6 – Сложение двух колебаний различной амплитуды, из которых одно происходит по закону синуса, а другое – по закону косинуса

где $\omega_1 \neq \omega_2$, то мы получаем движение, которое называется «наложением» двух колебаний различных частот. Очевидно, что это движение уже не будет синусоидальным. Здесь интересен тот особый случай, когда обе частоты ω_1 и ω_2 почти равны друг другу. Тогда первое составляющее колебание может быть представлено посредством вектора \mathbf{a} , вращающегося с угловой скоростью ω_1 , в то время, как вектор \mathbf{b} , определяющий второе колебание, вращается с угловой скоростью ω_2 . Если ω_1 почти равно ω_2 , то оба вектора приблизительно сохраняют взаимное расположение в течение одного оборота, т. е. угол, заключенный между ними, изменяется очень незначительно. Вследствие этого мы можем оба вектора сложить, и тогда результирующее движение за время одного оборота векторов может практически считаться происходящим по закону синуса с частотой $\omega_1 \approx \omega_2$ и амплитудой c (рисунок 7). Однако вследствие неполного совпадения величин ω_1 и ω_2 относительное положение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} по истечении некоторого, достаточно значительного, числа оборотов все же изменится, что повлечет за собой изменение и результирующего вектора \mathbf{c} . Поэтому получаемое движение приближенно может быть представлено как колебание по закону синуса с частотой ω_1 и амплитудой, медленно изменяющейся между ее крайними значениями $(a + b)$ и $(b - a)$, или, если $b = a$, то между $2a$ и 0 (рисунок 7 и 8).

Описанное явление носит название биений. Частота биений есть число, показывающее, сколько раз в секунду амплитуда изменяется от одного минимума A до ближайшего следующего B , проходя при этом через максимум (рисунок 8). Период одного биения, очевидно, соответствует времени, необходимому для полного оборота вектора \mathbf{b} по отношению к вектору \mathbf{a} . Круговая частота биений, как легко видеть, равна $\omega_1 - \omega_2$.

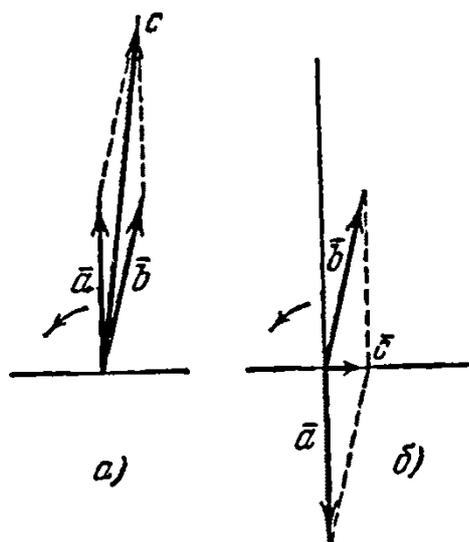


Рисунок 7 – Векторные диаграммы, иллюстрирующие биения

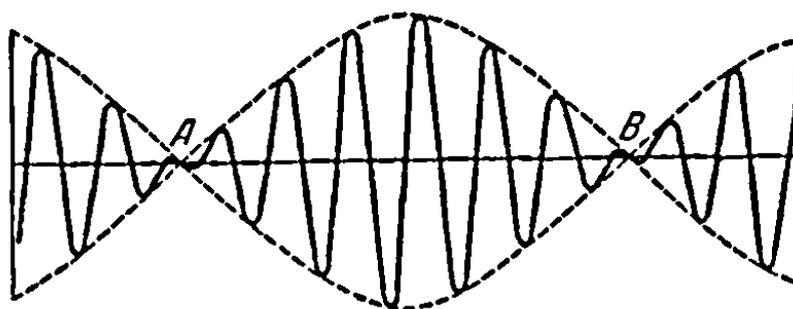


Рисунок 8 - Биения

Явление биений можно наблюдать во многих случаях. Биение особенно заметно при звуковых колебаниях. Два тона одинаковой силы, но незначительно отличающиеся по высоте, вызывают колебания в силе получающегося звука, частота которых равна разности частот обоих составляющих тонов. Биение можно слышать, например, на электрических станциях во время пуска генераторов. Динамомашина обладает «магнитным жужжанием», основной тон которого соответствует удвоенной частоте электрического тока, обычно 120 колебаниям в секунду. В момент включения генератора в линию частота электрического тока генератора несколько отличается от частоты тока в цепи. Вследствие этого жужжание генератора и жужжание в остальной цепи (другие генераторы или трансформаторы) имеют различную высоту тона, что и дает возможность услышать биение.

1.4 Колебания трубопровода водяной турбины

Непосредственное применение векторного метода к изучению колебаний рассмотрим на примере, имеющем большое практическое значение.

На одной гидростанции обнаружили столь сильные колебания труб, подводящих воду к водяным турбинам, что возник даже вопрос об опасности разрушения турбинного здания. Частота колебаний оказалась равной $113\frac{1}{3}$ колебаниям в секунду, что как раз совпало с произведением числа оборотов в секунду (400:60) на число лопаток (17) вращающейся части турбины Фрэнсиса. Трубы издавали такое громкое жужжание, что оно было слышно на расстоянии нескольких километров. Случайно в непосредственной близости от трансформаторов электростанции были обнаружены биения с частотой $62\frac{2}{3}$ колебания в секунду, которые были вызваны совместным действием шума трубопровода и трансформаторов; эти биения можно было ясно слышать.

На рисунке 9 изображена в горизонтальной проекции схема турбины с вертикальным валом. Вода поступает через трубу *I* в спиральную камеру или «улитку» *II*, в которой основной поток воды разбивается на 18 отдельных потоков при помощи неподвижных лопаток направляющего аппарата. Далее вода попадает на 17 лопаток вращающегося турбинного колеса и, проходя между лопатками, изменяет направление своего движения на 90° . Наконец, вода вытекает через вертикальную отводную трубу *III*.

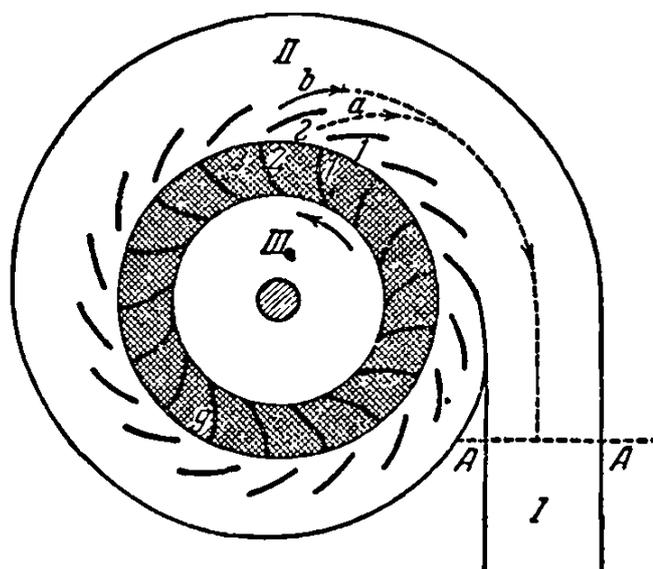


Рисунок 9 –Объяснение колебаний трубопровода турбины Фрэнсиса

На рисунке 9 показаны две из 18 струй, на которые разбивается главный поток воды. Остановив свое внимание на одной из них, мы видим, что за каждый оборот колеса мимо струи проходят 17 лопаток, которые тем самым сообщают ей 17 импульсов. Всего за 1 секунду проходит $113\frac{1}{3}$ лопатки, сообщаящих через воду такое же количество импульсов трубопроводу. Все это происходит не только со струей *a*, но и с любой другой струей, а следовательно, подводящая воду труба получает 18 импульсов, имеющих, так сказать, различные источники, но обладающих одной и той же частотой, а именно, $113\frac{1}{3}$ колебания в секунду. Если бы все эти импульсы были одной и той же фазы, то они, складываясь арифметически, разрушающе подействовали бы на турбинную установку.

Условимся считать, что струя *a* испытывает наибольшее значение импульса в тот момент, когда лопатки *1—1* приходятся одна против другой. Тогда максимальное значение импульса в струе *b* наступит несколько раньше, чем в струе *a* (более точно, ранее на $\frac{1}{17 \cdot 18}$ оборота турбины вследствие того, что возникновение максимального импульса в струе *b* наступит в момент, когда лопатки *2—2* расположатся друг против друга).

Импульс от струи *a* движется к подводящей трубе со скоростью звука (скорость звука в воде ≈ 1400 м/сек); то же самое относится и к струе *b*. Так

как общая скорость водяного потока мала по сравнению со скоростью звука, то влиянием последней мы пренебрегаем. Заметим, однако, что путь, пройденный импульсом от струи **b**, во всяком случае длиннее, чем соответствующий путь от струи **a**, причем разница здесь составляет примерно $1/18$ длины осевой линии улитки. Вследствие указанного обстоятельства импульс от **b** должен прийти в трубу позднее, чем импульс от **a**.

Оказалось, что в исследуемой турбине упомянутые два явления погасали друг друга, вследствие чего импульсы от **a** и от **b** приходили к сечению *AA* трубы одновременно, т. е. в одной и той же фазе. Это обстоятельство имело место, конечно, не только для струй **a** и **b**, но и для всех остальных 18 струй. В таком случае, если воспользоваться векторным методом, то импульсы должны расположиться так, как указано на рисунке 10, а и тогда результирующий импульс в сечении *AA* оказывается очень большим.

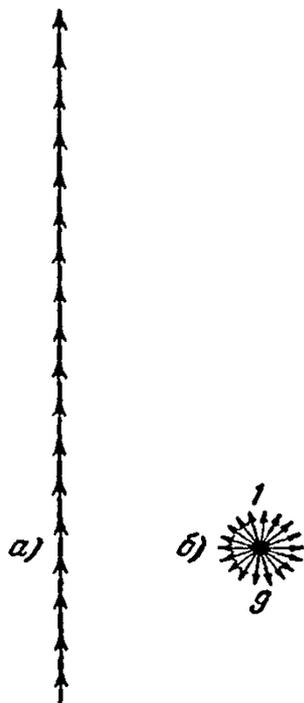


Рисунок 10 – 18 параллельных импульсов в сечении *AA* для колеса с 17 лопатками (а) и 16 лопатками (б)

Чтобы избавиться от указанного недостатка, колесо, имеющее 17 лопаток, было из турбины удалено и заменено колесом с 16 лопатками. Такая за-

мена, конечно, не повлияла на величины разностей времен прихода импульсов в рассматриваемое сечение AA , получающихся вследствие разностей длин путей a , b и т. д. Но зато она должна была изменить интервалы времени между импульсами от каждых двух соседних лопаток направляющего аппарата, обусловленные изменением расстояний по окружности между лопатками колеса турбины. И вот теперь в тот момент, когда вращающаяся лопатка I посылает свой импульс, лопатка 9 также посылает свой импульс, в то время, как в прежней конструкции лопатка 9 находилась в этот момент посередине между двумя неподвижными лопатками (рисунок 9).

Благодаря счастливой случайности половина длины улитки проходила звуковой волной приблизительно в $1/2 \cdot 1/113$ секунды, вследствие чего два импульса от лопаток I и 9 приходили в поперечное сечение AA , имея противоположные фазы (рисунок 10). Что касается разности фаз импульсов от каждых двух соседних струй, то она составляла, таким образом, одну девятую от 180° , вследствие чего 18 отдельных импульсов располагались на векторной диаграмме по окружности и при своем геометрическом сложении давали в результате нуль.

Произведенный анализ приводит, казалось бы, к выводу, что после описанной замены колеса колебания должны совершенно исчезнуть. Однако такого эффекта ожидать все же не приходится, так как наш расчет выполнен лишь приближенно и многие обстоятельства при этом вовсе не были приняты во внимание; (прежде всего спиральная камера была заменена узким каналом, далее, не были приняты во внимание кривизна поверхности волны, отражение волн от различных препятствий и действие затухания). В действительности амплитуда колебаний трубы была понижена до одной трети своего первоначального значения, и это уже можно рассматривать как достаточно удовлетворительное решение задачи.

1.5 Метод комплексных чисел

В предыдущих параграфах было показано, что гармонические движения можно представлять посредством вращающихся векторов, что сложение двух векторов соответствует сложению двух гармонических движений одинаковой частоты и, наконец, что дифференцирование уравнений таких движений по времени можно понимать как умножение изображающего вектора на ω с одновременным поворотом его на 90° по направлению движения. Если немного напрактиковаться в пользовании этими векторами, то тем самым мы получаем достаточно наглядный метод изучения гармонических движений, который является более простым, чем непосредственное изучение синусоидальных колебаний.

Несмотря на указанную наглядность, все же векторный метод мало пригоден для числовых расчетов, поскольку приходится раскладывать векторы на вертикальные и горизонтальные составляющие. Так, например, если нужно сложить два движения, согласно рисунок 5, то мы пишем

$$c = a + b,$$

подразумевая здесь геометрическое сложение. Для вычисления длины вектора c , т.е. амплитуды результирующего движения, надо ещё написать равенство

$$a = a_x + a_y,$$

которое выражает, что a есть геометрическая сумма своих компонентов, a_x и a_y соответственно по осям x и y . В таком случае имеем

$$c = a_x + a_y + b_x + b_y = (a_x + b_x) + (a_y + b_y).$$

Тогда длина вектора c или его модуль будет

$$c = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2}.$$

Итак, этот метод оказывается довольно длинным, вследствие чего в значительной мере теряется то преимущество, которое мы получаем путем использования векторной интерпретации гармонического движения.

Однако существует простой метод числовых расчетов с помощью векторов, а именно метод комплексных чисел. Как известно, всякое комплексное число может быть представлено графически точкой на плоскости, где действительные числа 1, 2, 3, ... наносятся на горизонтальной оси, а мнимые — на вертикальной. Если ввести обозначение

$$i = \sqrt{-1}$$

то эти мнимые числа представляются как $i, 2i, 3i, \dots$. В качестве примера на рисунке 11 изображена точка, соответствующая комплексному числу $3 + 2i$. Соединяя эту точку с началом координат, мы видим, что комплексное число может быть представлено также посредством вектора. Если буквой α обозначить угол, образованный вектором с горизонтальной осью, и буквой a — длину вектора, то комплексное число можно написать в виде выражения

$$a(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

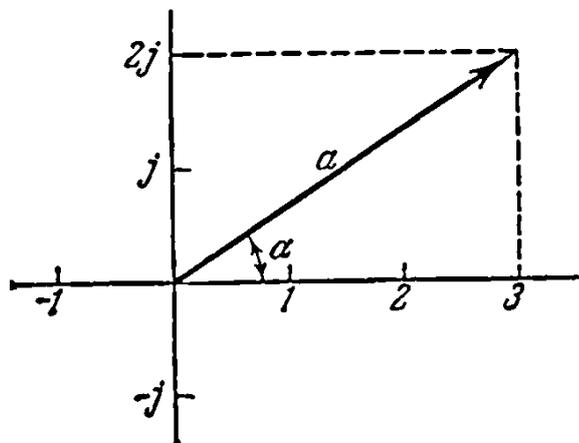


Рисунок 11 – Изображение векторов точкой в комплексной плоскости

Вспомним теперь, что гармоническое движение изображается посредством вращающегося вектора. В таком случае, подставляя в последнее выра-

жение вместо фиксированного значения угла α переменную величину ωt , мы приведем выражение для вектора к виду

$$\alpha(\cos\omega t + i\sin\omega t), \quad (1.7)$$

представляющему уже вращающийся вектор, горизонтальная проекция которого определяет собою гармоническое движение. Но эта горизонтальная проекция есть не что иное, как действительная часть выражения (1.7). Поэтому если мы говорим, что «вектор изображает «гармоническое движение», то мы подразумеваем, что горизонтальная проекция вращающегося вектора изображает это движение. Подобным же образом, когда мы утверждаем, что «комплексное число изображает «гармоническое движение», мы имеем в виду, что указанное движение представляется действительной частью такого числа, написанного в виде выражения (1.7).

Дифференцируя выражение (1.7) и вспоминая, что, по определению $i^2 = -1$, имеем

$$\alpha(-\omega\sin\omega t + i\omega\cos\omega t) = i\omega \cdot \alpha(\cos\omega t + i\sin\omega t).$$

Таким образом, мы видим, что дифференцирование комплексного выражения (1.7) равносильно его умножению на $i\omega$.

Итак, в векторном изображении при дифференцировании вектор умножается на ω и поворачивается в сторону движения на угол 90° . Отсюда мы приходим к заключению, что умножение комплексного числа на i равносильно повороту соответствующего вектора в положительную сторону на четверть оборота без изменения его длины. Последнее утверждение легко может быть проверено непосредственно. В самом деле,

$$i(a + ib) = -b + ia.$$

Указанное действие представлено графически на рисунке 12. Здесь имеется в виду вращение в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Производя всевозможные вычисления с упомянутыми комплексными числами, необходимо придерживаться обычных правил алгебры, помня лишь на каждом этапе расчета, что движение представляется только действительной частью этих чисел. Правда, последнее требование обычно не соблюдается: алгебраические действия выполняются без того, чтобы особенно задумываться над их физическим смыслом, и лишь окончательный результат интерпретируется путем рассмотрения действительной части полученного выражения.

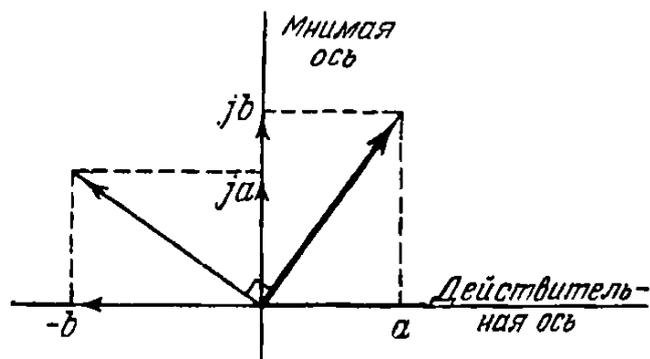


Рисунок 12 – Умножение комплексного числа на i равносильно повороту соответствующего вектора на прямой угол в сторону вращения

Для разрешения простых задач навряд ли стоило бы заниматься изучением комплексного метода, так как и без него решение получается достаточно просто. Напротив, при решении многих задач значительно более сложного характера облегчение, приносимое указанным методом, весьма существенно.

Выражение 1.7 иногда пишут в иной форме, а именно

$$\alpha(\cos\omega t + i\sin\omega t) = \alpha e^{i\omega t}$$

или, если для простоты положим $\alpha = 1$ и $\omega t = \alpha$, то

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha. \quad (1.8)$$

Правая часть написанного равенства есть обыкновенное комплексное число; что касается левой части, то она нуждается в пояснении. Разложим e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

и положим здесь $x = i\alpha$; тогда находим

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= 1 + i\alpha - \frac{i\alpha^2}{2!} - i\frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{i\alpha^4}{4!} + i\frac{i\alpha^5}{5!} \dots = \\ &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots\right). \end{aligned}$$

Правая часть полученного равенства является комплексным числом, которое, как видим, должно быть равно $e^{i\alpha}$. С другой стороны, всматриваясь в выражения, стоящие в скобках, мы узнаем в них разложения в ряды Маклорена $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, а тогда немедленно приходим к формуле (1.8).

Полученный результат может быть очень просто интерпретирован графически в комплексной плоскости рисунке 11 или 12. Для этого рассмотрим в указанной плоскости окружность единичного радиуса. Каждая точка этой окружности имеет горизонтальную проекцию $\cos\alpha$ и вертикальную проекцию $\sin\alpha$, представляя таким образом комплексное число $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$. Следовательно, число $e^{i\alpha}$ изображается точкой на единичной окружности в угловом расстоянии α радианов от точки +1. Если теперь α приравнять ωt , то легко видеть, что $e^{i\omega t}$ представит собой вращающийся единичный вектор, горизонтальная проекция которого изобразит гармоническое движение с единичной амплитудой и с круговой частотой ω .

1.6 Работа, совершаемая при гармоническом движении

Во многих приложениях чрезвычайно важным является вопрос о работе силы, изменяющейся по гармоническому закону, которая совершается ею при гармоническом движении, имеющем ту же частоту, что и сила. Пусть сила

$$P = P_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

действует на тело, движение которого происходит по закону

$$x = x_0 \sin \omega t.$$

Работа, совершаемая этой силой на малом перемещении dx равна Pdx , что может быть написано также в виде $P \frac{dx}{dt} dt$.

За время одного полного колебания фаза ωt изменяется от 0 до 2π , и, следовательно, t изменяется от 0 до $2\pi/\omega$. Работа, совершаемая за время одного колебания, т.е. за один период, равна

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P \frac{dx}{dt} dt &= \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} P \frac{dx}{dt} d(\omega t) = P_0 x_0 \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t d(\omega t) = \\ &= P_0 x_0 \int_0^{2\pi} \cos \omega t [\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi] d(\omega t) = \\ &= P_0 x_0 \cos \varphi \int_0^{2\pi} \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t) + P_0 x_0 \sin \varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t d(\omega t). \end{aligned}$$

Пользуясь таблицей интегралов, мы видим, что первый интеграл равен нулю, в то время как величина второго есть π . Таким образом, работа за один период равна

$$W = \pi P_0 x_0 \sin \varphi. \quad (1.9)$$

Этот результат мог быть получен также графическим путем, который, как сейчас увидим, интерпретирует весь произведенный расчет.

Силу и гармоническое движение можно представить векторами, соответственно \bar{P}_0 и \bar{x}_0 (рисунок 13). Следует вспомнить, что геометрическая интерпретация связана с вращающимися векторами. Разложим теперь силу на ее компоненты $P_0 \cos \varphi$ с той же фазой, что и движение, и $P_0 \sin \varphi$ с фазой, опережающей фазу движения на 90° . Эта операция вполне допустима на тех

же основаниях, что и сложение векторов, которое пояснялось в пункте 1.2. Вследствие указанного разложения работа, совершаемая всей силой, распадается на две части, одну из которых совершает сила, находящаяся в одной фазе с движением, а другую — сила, опережающая это движение по фазе на 90° .

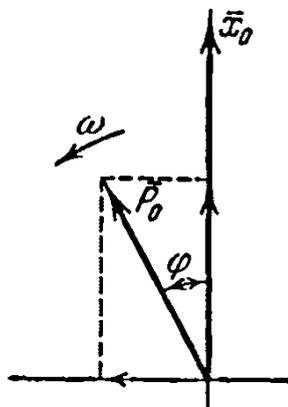


Рисунок 13 – Сила и движение, имеющие одну и ту же частоту

Займемся сначала рассмотрением первой части, для чего обратимся к рисунку 14,а, на котором ординаты показывают смещение x и находящуюся в той же фазе составляющую силы. Между точками A и B перемещение направлено вверх. Сила направлена в ту же сторону, и поэтому ее работа положительная. Далее, между точками B и C тело движется вниз по направлению к положению равновесия, в то время, как сила, хотя и уменьшается постепенно по величине, остается направленной вверх. Поэтому здесь ее работа уже отрицательная. Таким образом, работа между A и B и работа между B и C взаимно уничтожаются, вследствие чего вся работа за полный период равняется нулю. Итак, если сила, изменяющаяся по гармоническому закону, действует на тело, совершающее гармоническое колебательное движение с той же частотой, то составляющая силы, находящаяся в одной фазе с перемещением, работы не совершает.

Припомним, что, как это было показано в пункте 1.2, скорость изображается вектором, повернутым в сторону вращения на 90° относительно вектора смещения; тогда предыдущее положение можно выразить такими сло-

вами: работу совершает лишь та составляющая силы, которая находится в одной фазе со скоростью.

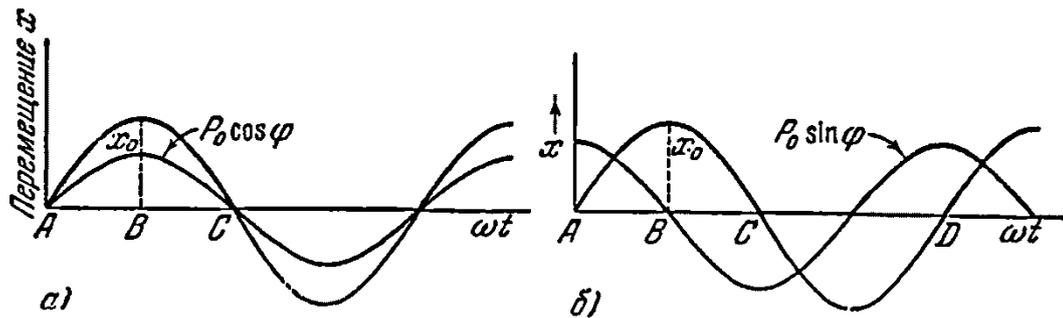


Рисунок 14 - Сила, совпадающая по фазе с перемещением, за полный период колебания никакой работы не совершает; сила, отличающаяся по фазе на 90° от перемещения, совершает наибольшую работу

Рассмотрим теперь другую составляющую силы, обратившись к рисунку 14,б. В промежутке AB перемещение возрастает, так что движение направлено вверх, при этом сила положительна, следовательно, направлена также вверх, а тогда положительна и работа. В промежутке BC движение происходит вниз, но вниз оказывается направленной и сила, вследствие чего совершаемая работа опять положительна. Так как вся диаграмма симметрична относительно вертикальной прямой, проведенной через точку B , то ясно, что работа, совершенная на протяжении AB , равняется работе, совершенной на протяжении BC . Наконец, отсюда следует, что полная работа, произведенная за весь период колебания AD , равна учетверенной работе, произведенной за время AB .

Для вычисления этой величины необходимо обратиться к самому определению работы, причем мы можем последовательно написать

$$W = \int P dx = \int P \frac{dx}{dt} dt = \int P v \cdot dt.$$

Отсюда видно, что работа, совершенная за один полный период колебания, представляется в виде интеграла по времени от произведения силы на скорость. Так как (рисунок 14,б) сила и скорость соответственно имеют вид

$$P = P_0 \sin\varphi \cdot \cos\omega t,$$

$$v = x_0 \omega \cos\omega t,$$

то работа за один период равна

$$\int_0^T P_0 \sin\varphi \cdot \cos\omega t \cdot x_0 \omega \cos\omega t \cdot dt = P_0 x_0 \sin\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t \cdot d(\omega t).$$

Величина определенного интеграла, стоящего справа, может быть вычислена посредством рисунка 15, на котором кривая *I* изображает $\cos\omega t$, а кривая *II* — соответственно $\cos^2\omega t$. Кривая, построенная для $\cos^2\omega t$, представляет собой синусоиду, имеющую своей осью пунктирную прямую *AA*; частота $\cos^2\omega t$ вдвое больше частоты $\cos\omega t$, что легко проверить с помощью тригонометрической формулы

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Рассмотрим прямоугольник *1—2—3—4*, разделенный пунктирной кривой *II* на две части, и заметим, что обе полученные части имеют одинаковую форму и равные площади. Расстояние *1—4* равно единице, а расстояние *3—4* есть $\pi/2$ или соответственно 90° . Таким образом, площадь всего прямоугольника равна $\pi/2$, а площадь его части, лежащей ниже кривой *II*, должна быть равна половине найденной величины.

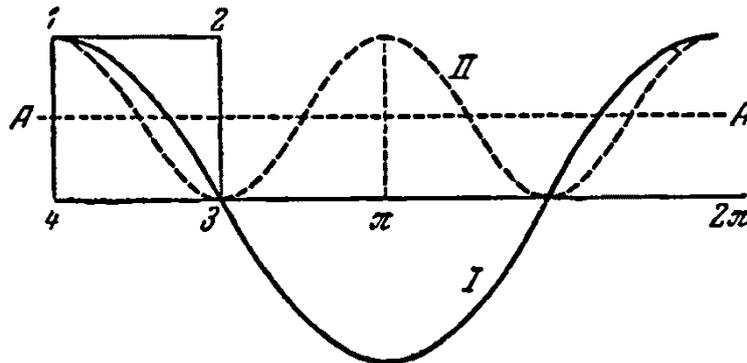


Рисунок 15 – Геометрическое доказательство равенства $\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \pi$

Следовательно, величина нашего определённого интеграла, взятого в пределах от 0 до $T/4$, есть $\pi/4$, а величина этого же интеграла, но взятого в пределах от 0 до T , должна быть равна π . Итак, работа, совершённая за время одного полного колебания, будет

$$W = \pi P_0 x_0 \sin \varphi. \quad (1.9)$$

В следующем пункте будет показано, что периодическая сила а также периодическое движение могут не быть чисто гармоническими, т. е. могут содержать так называемые «гармоники высших порядков», налагающиеся на «основную гармонику». По этой причине чрезвычайно важно уметь определить работу гармонической силы на перемещении, подчиняющемся опять-таки гармоническому закону, но уже с частотой, отличной от частоты изменения силы. Пусть сила изменяется с частотой, кратной ω , например $n\omega$, и пусть частота колебательного движения есть другое кратное числу ω , например $m\omega$. Мы сейчас покажем, что работа указанной силы на таком перемещении за полный период колебания с частотой ω равна нулю.

В самом деле, допустим, что сила изменяется по закону $P = P_0 \sin n\omega t$, а перемещение есть $x = x_0 \sin(m\omega t + \varphi)$. Тогда работа за один период равна

$$\int P dx = \int_0^T P \frac{dx}{dt} dt = \int_0^T P_0 \sin n\omega t \cdot x_0 m\omega \cos(m\omega t + \varphi) dt.$$

Пользуясь преобразованием

$$\cos(m\omega t + \varphi) = \cos m\omega t \cos \varphi - \sin m\omega t \sin \varphi$$

и принимая во внимание, что угол φ не зависит от времени, а потому его функция может быть вынесена за знак интеграла, мы можем разбить определённый интеграл на два интеграла такого вида

$$\int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t dt \quad \text{и} \quad \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt.$$

Легко показать, что при n , отличном от m , оба эти интеграла равны нулю. Для этой цели преобразуем подынтегральные функции

$$\sin n\omega t \sin m\omega t = \frac{1}{2} \cos(n - m)\omega t - \frac{1}{2} \cos(n + m)\omega t,$$

$$\sin n\omega t \cos m\omega t = \frac{1}{2} \sin(n + m)\omega t + \frac{1}{2} \sin(n - m)\omega t.$$

Так как промежуток интегрирования есть $T = 2\pi/\omega$, то синус и косинус интегрируются в промежутках, кратных 2π , вследствие чего интегралы действительно равны нулю.

Для наглядности рассмотрим хотя бы первый интеграл, положив в нем, например, $n = 4$, $m = 5$. Этот случай представлен на рисунке 16, где амплитуды обеих волн отложены по оси ординат в различных масштабах, чтобы таким образом сделать яснее различие между ними. Промежуток времени, на который распространяется интегрирование, изображен на нашем рисунке в виде отрезка AB . Соответственные ординаты обеих кривых должны перемножаться между собой, после чего уже выполняется интегрирование. Рассмотрим две точки, из которых одна взята несколько правее точки A , а другая — на таком же расстоянии влево от точки C . Вблизи точки A обе волны положительны, но вблизи точки C — одна положительна, а другая отрицательна, имея, однако, ординаты, равные по абсолютной величине соответственным ординатам вблизи точки A . Следовательно, та часть интеграла, куда входят элементы, ближайšie к точке A , взаимно уничтожаются с той его частью, в которую входят соответственные элементы, ближайšie к точке C . Такое приведение имеет место не только для элементов, расположенных очень близко к точкам A и C , но и для любых двух элементов, один из которых удален влево от точки C настолько же, насколько другой удален вправо от точки A . Вследствие этого интеграл, распространенный на область AD , уничтожается с интегралом, распространенным на область CD . Таким же об-

разом можно показать, что интеграл, распространенный на область CB , равен нулю.

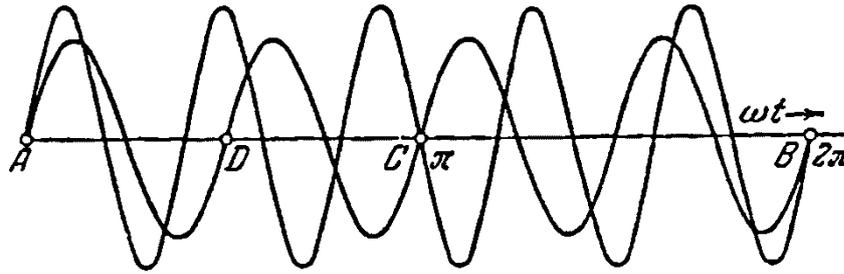


Рисунок 16 – Геометрическое доказательство равенства

$$\int_0^{2\pi} \sin n\alpha \sin m\alpha d\alpha = 0$$

Необходимо иметь в виду, что работа равна нулю только за время одного полного колебания. После отправления от точки A ординаты обеих кривых (силы и скорости) положительны, так что совершаемая работа также положительна; эта работа во всяком случае отдается обратно, но уже позднее, при последующем движении, а до этого времени она должна накопиться в виде потенциальной или кинетической энергии.

Эта графическая интерпретация явления может быть повторена и для всякой иной совокупности целых чисел m и n , а также и для интегралов, содержащих косинус в интегрируемой функции. Когда m делается равным n , мы имеем рассмотренный выше случай равных частот. В этом случае работа опять равна нулю, если сила и перемещение находятся в одной фазе. В случае $m = n$ и разности фаз в 90° работа за одно колебание n -й гармоники равна, как мы уже знаем, $\pi P_0 x_0$, и тогда, поскольку в одном полном колебании основной частоты ω содержится n упомянутых колебаний, работа за время одного основного колебания равна $n\pi P_0 x_0$.

Сделаем краткую сводку полученных результатов.

1. Работа, совершаемая гармонической силой при гармоническом движении ее точки приложения с частотой, отличной от частоты изменения силы, равна нулю, если промежуток времени, в течение которого работа из-

меряется, содержит некоторое целое число периодов изменения силы и отличное от него целое число периодов колебания или периодов изменения скорости.

2. Работа, совершаемая за один период гармонической силой, отличающейся по фазе на 90° от гармонической скорости той же частоты, равна нулю.

3. Работа, совершаемая за один период гармонической силой с амплитудой P_0 и частотой ω , находящейся в одной фазе с гармонической скоростью $v_0 = x_0\omega$ той же частоты, равна $\pi P_0 v_0 / \omega = \pi P_0 x_0$.

1.7 Негармоническое периодическое движение

Периодическое движение обладает тем свойством, что оно полностью воспроизводится по истечении некоторого промежутка времени, называемого периодом движения. Всякое гармоническое движение есть движение периодическое, но не всякое периодическое движение является гармоническим. Например, на рисунке 17 изображено движение

$$x = a \sin \omega t + \frac{a}{2} \sin 2\omega t,$$

представляющее собой наложение двух колебаний, совершающихся по закону синуса, но имеющих различные частоты.

Это движение является периодическим, но не гармоническим.

Из математики известно, что периодическая кривая $f(t)$ с частотой ω может быть разложена на ряд синусоид с частотами $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega$ и т.д., а именно

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots, \quad (1.10)$$

где предполагается, что $f(t)$ повторяет свои значения по истечении каждого промежутка $T = 2\pi/\omega$.

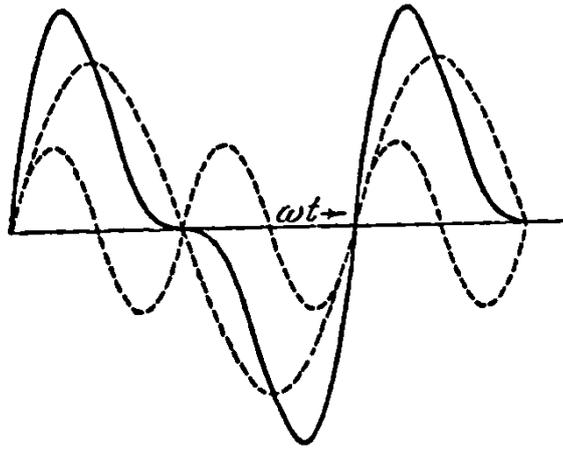


Рисунок 17 – Сложение двух гармонических движений различных частот приводит к движению, которое не является гармоническим

Амплитуды различных колебаний A_1, A_2, \dots и их начальные фазы $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ могут быть определены аналитически, если вид функции $f(t)$ задан. Написанный ряд (1.10) известен под названием ряда Фурье. Следует заметить, что не всякая периодическая функция $f(t)$ может быть разложена в ряд Фурье, а лишь такая, которая удовлетворяет условиям Дирихле, т.е. которая в рассматриваемом промежутке ограничена, причём промежуток может быть разбит на конечное число частей, в каждой из которых данная функция непрерывна и монотонна.

Второй член называется основной или первой гармоникой функции $f(t)$ и вообще $(n + 1)$ -й член с частотой $n\omega$ называется n -й гармоникой функции $f(t)$.

Так как

$$\sin(n\omega t + \varphi_n) = \sin n\omega t \cos \varphi_n + \cos n\omega t \sin \varphi_n,$$

то написанный ряд можно представить ещё так:

$$f(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + \dots + a_n \sin n\omega t + \dots + b_0 b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots + b_n \cos n\omega t + \dots \quad (1.11)$$

Постоянный член b_0 представляет собою «среднюю» высоту кривой $f(t)$ за время одного колебания. Для кривой, которая на протяжении одного периода

отклоняется от нулевой линии на одинаковое расстояние в ту и другую сторону, член b_0 равен нулю. Амплитуды $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ могут быть определены с помощью доказанных теорем о работе.

Чтобы убедиться в сказанном, предположим, что $f(t)$ есть сила, и положим далее, что эта сила, не являющаяся, вообще говоря, гармонической, действует на точку, скорость которой изменяется по гармоническому закону, будучи равной, например, $\sin \omega t$. Представим теперь силу $f(t)$ как сумму всех членов соответствующего ряда Фурье и определим работу, совершаемую каждой гармоникой отдельно. Все члены, входящие в разложение силы, кроме $a_n \sin n\omega t$ и $b_n \cos n\omega t$, имеют частоты, отличные от частоты скорости $\sin n\omega t$, а поэтому их работа за время одного полного колебания равна нулю. Кроме того, член $b_n \cos n\omega t$ отличается по фазе от скорости на 90° , вследствие чего и его работа обращается в нуль. Таким образом, вся работа силы совершается лишь за счет члена $a_n \sin n\omega t$ при скорости движения $\sin n\omega t$ и равна $\pi a_n \cdot 1/n\omega$ за время одного колебания с частотой $n\omega$. Что касается работы за время одного основного колебания (которое в n раз больше предыдущего), то она, очевидно, равна $\pi/n\omega$.

На основании сказанного амплитуда a_n оказывается в ω/π раз больше работы, совершаемой всей негармонической силой $f(t)$ за время ее периода изменения при скорости точки приложения $\sin n\omega t$. Сказанное может быть выражено посредством формулы

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \sin n\omega t dt. \quad (1.12a)$$

Предполагая, что скорость изменяется по закону $\cos n\omega t$ вместо $\sin n\omega t$, и повторяя все приведённые рассуждения, приходим к выражению коэффициента b_n :

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \cos n\omega t dt. \quad (1.12b)$$

Соотношения между величинами a_n и b_n , с одной стороны, и величинами A_n и φ_n , входящими в уравнение (1.10) с другой, находятся на основании (1.6)

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}.$$

Таким образом, работа, совершаемая негармонической силой $f(t)$ с частотой ω на перемещении с гармонической скоростью, имеющей частоту $n\omega$, есть просто работа, совершаемая одной только составляющей n -й гармоники силы, находящейся в одной фазе со скоростью; работа же всех остальных гармоник силы за время, равное ее полному периоду изменения, обращается в нуль

С помощью формул (1.12) мы имеем возможность найти a_n и b_n для некоторой заданной периодической кривой. Та отрасль математического анализа, которая занимается подобными задачами, называется гармоническим анализом.

Вычисление интегралов (1.12) может быть выполнено в точном виде лишь для очень немногочисленных видов функций $f(t)$. Когда $f(t)$ является кривой, полученной путем записи действительного колебания или же взятой с индикаторной диаграммы, мы не в состоянии даже указать для нее аналитическую форму. Однако все же, располагая кривой, полученной таким образом, мы можем найти значения соответствующих интегралов либо графически, либо путем численного интегрирования, либо, наконец, с помощью прибора, называемого гармоническим анализатором.

Действие такого гармонического анализатора основано на том же принципе, что и действие индикатора Уатта для паровой машины. Индикатор вычерчивает замкнутую кривую, ордината каждой точки которой представляет

собой давление пара (или силу, приложенную к поршню), а абсцисса — перемещение поршня. Площадь полученной замкнутой кривой выражает работу, совершаемую силой, приложенной к поршню, за один оборот машины. Но ведь формулы (1.12) показывают, что коэффициенты a_n и b_n являются величинами, в ω/π раз большими работы, совершаемой силой $f(t)$ за один период на определенном перемещении, скорость которого равняется $\sin n\omega t$. Чтобы получить полное соответствие между обоими случаями, заметим, что $\sin n\omega t$ есть скорость перемещения — $(1/n\omega) \cos n\omega t$, вследствие чего равенство (1.12а) может быть написано в несколько измененном виде, а именно:

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int f(t) d(\cos n\omega t) = -\frac{1}{n\pi} \oint P ds.$$

Здесь символ \oint указывает, что интегрирование производится по всей замкнутой кривой, описываемой силой $f(t)$ за один период.

Прибор схематически показан на рисунке 18.

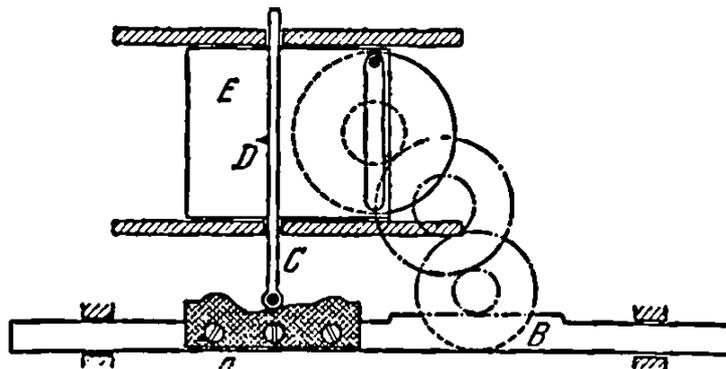


Рисунок 18 — Гармонический анализатор — прибор, работающий по тому же принципу, что и индикатор Уатта для паровой машины

Выходом прибора является точка D , где укреплено перо, описывающее кривую на куске бумаги, укрепленной на столике E . По аналогии с индикатором Уатта вертикальное движение пера D должно следовать за изменением силы $f(t)$, тогда как горизонтальное движение — за скоростью $\cos n\omega t$. Вертикальное движение пера D достигается показанной связью с лекалом, изоб-

ражающим анализируемую кривую $f(t)$ за один период. Лекало A прикрепляется к рейке, сцепленной с шестеренкой B , приводимой во вращение посредством электромотора. Стержень C так установлен в направляющем приспособлении, что он может перемещаться лишь в продольном направлении, прижимаясь слегка к лекалу посредством пружины. Таким образом, вертикальное движение пера D , прикрепленного к стержню C , выражается функцией $f(t)$. Столик E перемещается горизонтально и приводится в движение кулисой Вольфа и зубчатым колесом, связанным соответственным передаточным механизмом с колесом B таким образом, что столик E совершает n гармонических колебаний в то время, как лекало A перемещается на полную длину диаграммы. К прибору прилагается ящик с набором запасных колес, чтобы можно было получать, путем их замены, различные передаточные числа n от 1 до 30.

Горизонтальное движение столика E выражается функцией $\sin n\omega t$ или $\cos n\omega t$, в зависимости от того, как сцеплены зубчатые колеса. Точка D описывает тогда на столике замкнутую кривую, площадь которой равна a_n или b_n (по умножении, конечно, на постоянный множитель $1/\pi n$). Вместо того, чтобы в действительности вычерчивать указанную кривую, инструмент дает возможность непосредственно находить ее площадь с помощью присоединенного к нему планиметра, точка вращения которого прикреплена к E , а обводный штифт к D ; на этом планиметре, которым снабжен анализатор, площадь может быть считана непосредственно, без изображения самой кривой.

Гармонические анализаторы конструируются также и на основе других принципов. Интересный оптический метод, основанный на использовании звуковой записи кинофильмов, был изобретен Уэнтом и конструктивно осуществлен Монтгомери в Телефонной лаборатории Белла (Bell Telephone Laboratories).

Для практических целей вполне приемлемы имеющиеся электрические гармонические анализаторы, дающие чрезвычайно быстро значение полной

амплитуды гармоники $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ [уравнения (1.10) и (1.11)], но не дающие никаких указаний на фазовые углы φ_n (или на отношения a_n/b_n в тех же уравнениях).

Они разработаны Западной электрической компанией (Western Electric Company) для анализа звука или шума. Эти анализаторы требуют существования исходной кривой в виде закона изменения электрического напряжения, подобно тому, как это имеет место в электрическом датчике при исследовании колебаний или в микрофоне. Это напряжение, после соответствующего усиления, поступает в электрическую цепь, известную под названием «полосового фильтра частот». Фильтр гасит все частоты, за исключением тех, которые лежат в узкой полосе шириною в пять колебаний в секунду. Полоса пропускания частот может быть назначена где угодно в диапазоне от 10 до 10 000 колебаний в секунду. Для того чтобы проанализировать по методу Фурье периодическое (установившееся) колебание или шум, имеется небольшой мотор, который автоматически перемещает полосу пропускания через весь спектр. При этом результат записывается штифтом на полоске проволочной бумаги. Это дает возможность в несколько минут получить амплитуды гармонических колебаний для частот, лежащих в интервале от 10 до 10 000 колебаний в секунду. Запись сейчас же может быть считана.

Другой электрический анализатор, работающий почти на том же принципе, но без графической регистрации, выпускается Всеобщей Компанией Радио (General Radio Company, Cambridge Mass.).

2 Две степени свободы

2.1 Свободные колебания. Главные колебания

Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, что позволит дать объяснение действия большинства поглотителей колебаний, или виброгасителей, различных приспособлений для успокоения качки корабля на волнах, а также амортизаторов или поглотителей толчков на автомобилях.

В самом общем виде система с двумя степенями свободы без затухания может быть приведена к системе, изображенной на рисунок 19, которая состоит из двух масс m_1 и m_2 , подвешенных на пружинах k_1 и k_2 и связанных между собою посредством соединительной пружины. Предполагая, что массы могут иметь лишь вертикальные перемещения, мы имеем, очевидно, две степени свободы, поскольку обе массы могут двигаться независимо друг от друга. Если задать их положения на вертикали величинами x_1 и x_2 , то тем самым положение системы вполне определяется.

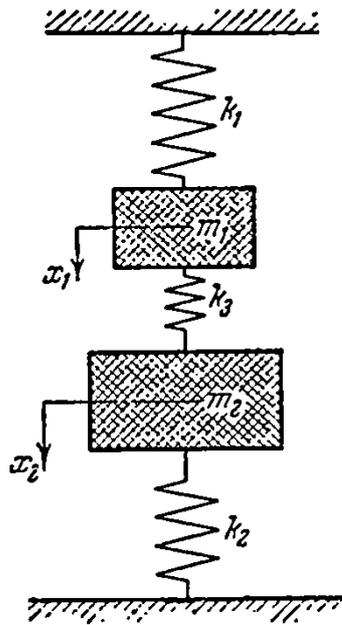


Рисунок 19 – Незатухающая система с двумя степенями свободы с пружинами

Как и в случае системы с одной степенью свободы, здесь мы сможем привести большое количество примеров систем с двумя степенями свободы из области крутильных колебаний, электротехники и т. п., которые вполне эквивалентны системе, представленной на рисунок 19.

Приступая к нахождению свободных колебаний, мы замечаем, что имеются две различные силы, действующие на массу m , а именно: сила упругости главной пружины k_1 и сила упругости соединительной пружины k_3 . Первая из них равна $k_1 x_1$ и действует вниз (в направлении положительных значений x_1 если предположить, что первая пружина сжата). Укорочение соеди-

нительной пружины равно $x_1 - x_2$, вследствие чего соответствующая сила упругости будет $k_3(x_1 - x_2)$. Эта пружина, будучи сжата, толкает массу m_1 вверх, а поэтому указанная сила должна быть взята тоже со знаком минус. Фактически мы имеем дело только с двумя силами, действующими на массу m_1 и тогда дифференциальное уравнение ее движения напишется в таком виде:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_3(x_1 - x_2),$$

или

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_3)x_1 - k_3 x_2 = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение движения второй массы может быть получено совершенно таким же путем. Но мы можем для этой цели перевернуть рисунок 19, изменив при этом направления x_1 и x_2 ; тогда m_2 и k_2 станут на место m_1 и k_1 , вследствие чего получим

$$m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_1 = 0. \quad (2.2)$$

Допустим теперь, что массы m_1 и m_2 совершают гармонические движения одной и той же частоты ω (пока неизвестной), но с различными амплитудами a_1 и a_2 (также неизвестными), т. е.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin \omega t, \\ x_2 &= a_2 \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Это лишь предположение; мы даже не знаем, возможно ли такое движение в действительности. Подставляя написанные выражения в наши дифференциальные уравнения, мы сможем быстро разрешить этот вопрос. Итак, имеем

$$[-m_1 a_1 \omega^2 + (k_1 + k_3)a_1 - k_3 a_2] \sin \omega t = 0,$$

$$[-m_2 a_2 \omega^2 + (k_2 + k_3)a_2 - k_3 a_1] \sin \omega t = 0.$$

Полученные уравнения должны удовлетворяться тождественно в любой момент времени, но выражения, стоящие в левой части каждого написанного

уравнения, представляют собой гармонические движения, и для того, чтобы они обращались в нуль при всех значениях времени, должны быть равны нулю амплитуды, стоящие в скобках, т. е.

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } a_1(-m_1\omega^2 + k_1 + k_3) - k_3a_2 = 0, \\ \text{б) } -k_3a_1 + a_2(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3) = 0. \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

Если предположение, что колебания выражены уравнениями (2.3), правильно, то необходимо должны быть удовлетворены уравнения (2.4). Вообще это, конечно, не имеет места, но мы должны вспомнить, что в уравнениях (2.3) как на амплитуды a_1 и a_2 , так и на частоту ω не было наложено никаких ограничительных условий. Поэтому вполне возможно выбрать величины a_1/a_2 и со так, чтобы уравнения (2.4) удовлетворялись, а при таких значениях a_1/a_2 и ω уравнения (2.3) становятся решением. Для нахождения значений a_1/a_2 и ω нам надо разрешить относительно этих величин уравнения (2.4). Так, из уравнения (2.4 а) имеем

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{-k_3}{m_1\omega^3 - k_1 - k_3}, \quad (2.5)$$

в то время как из второго уравнения получаем

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2\omega^3 - k_2 - k_3}{-k_3}. \quad (2.6)$$

Для совместимости должно выполняться равенство

$$\frac{-k_3}{m_1\omega^3 - k_1 - k_3} = \frac{m_2\omega^3 - k_2 - k_3}{-k_3},$$

или

$$\omega^4 - \omega^2 \left\{ \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} + \frac{k_1k_2 + k_2k_3 + k_1k_3}{m_1m_2} \right\} = 0. \quad (2.7)$$

Это уравнение, называемое «уравнением частот», приводит к двум значениям ω^2 . Каждое из них, будучи подставлено в равенства (2.5) или (2.6),

дает соответствующее значение для a_1/a_2 . Это значит, во-первых, что функции (2.3) могут являться решением задачи, а во-вторых, что таких решений существует два.

Используя круг Мора определим собственные частоты системы. Пусть на рисунке 20

$$\omega_a^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad \omega_b^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}, \quad \omega_{ab}^2 = \frac{k_3}{\sqrt{m_1 m_2}}.$$

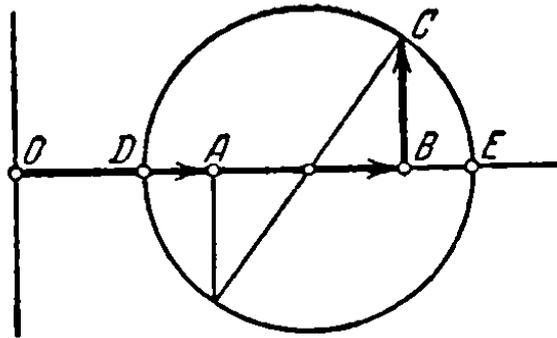


Рисунок 20 – Круг Мора для определения

Величины ω_a и ω_b являются частотами системы, когда одна из масс удерживается в неподвижном состоянии, в то время как ω_{ab} характеризует жёсткость соединения. В таких обозначениях уравнение (2.7) примет вид

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_a^2 + \omega_b^2) + (\omega_a^2 \omega_b^2 - \omega_{ab}^4) = 0.$$

Обратимся теперь к рисунку 20, на котором отложим такие расстояния:

$$OA = \omega_a^2, \quad OB = \omega_b^2, \quad BC = \omega_{ab}^2.$$

После этого опишем около середины расстояния между A и B , как около центра, окружность, проходящую через точку C . Полученные при таком построении новые точки D и E определяют собою частоты собственных колебаний системы, а именно:

$$\omega_1^2 = OD \text{ и } \omega_2^2 = OE,$$

что может быть легко подтверждено уравнением. В частном случае, при отсутствии связи между грузами ($BC = 0$), точки D и E совпадают соответственно с A и B , и тогда ω_a и ω_b оказываются частотами собственных колебаний.

Для дальнейших рассуждений упростим нашу систему, сделав ее симметричной, для чего положим

$$k_1 = k_2 = k \text{ и } m_1 = m_2 = m.$$

Уравнение частот примет тогда вид

$$\omega^4 - 2\omega^2 \frac{k + k_3}{m} + \frac{k(k + 2k_3)}{m^2} = 0 \quad (2.8)$$

с решениями

$$\omega^2 = \frac{k + k_3}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{k + k_3}{m}\right)^2 - \frac{k(k + 2k_3)}{m^2}},$$

или

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k + 2k_3}{m},$$

определяющими две частоты собственных колебаний системы, которые мы будем для краткости называть просто собственными частотами. Подставляя эти частоты в уравнения (2.5) или (2.6), имеем

$$\frac{a_1}{a_2} = +1 \text{ и } \frac{a_2}{a_1} = -1.$$

Физическое значение такого результата очевидно. Равенство $a_1/a_2 = 1$ означает [см. уравнение (2.3)], что обе массы перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Соединительная пружина при этом не растянута и не сжата. Тогда вполне естественно, что частота колебаний определяется равенством $\omega^2 = k/m$, поскольку система приводится к

двум независимым системам, каждая из которых имеет одну степень свободы. Что касается равенства $a_1/a_2 = -1$, то оно означает, что обе массы перемещаются на одно и то же расстояние, но двигаются в противоположных направлениях. Последнее движение вполне симметрично, так что средняя точка соединительной пружины k_3 совершенно не перемещается. Если бы эта средняя точка была закреплена неподвижно, то не произошло бы никакого изменения в характере движения. Таким образом, и в этом случае система распадается на две независимые системы с одной степенью свободы каждая. Однако теперь каждая масса оказывается связанной с неподвижной частью уже двумя пружинами, одна из которых имеет коэффициент жесткости k , а другая — $2k_3$, вследствие чего частота определится равенством

$$\omega^2 = \frac{k + 2k_3}{m}.$$

Итак, мы имеем здесь два «главных колебания», каждому из которых соответствует определенная собственная частота. Решение показывает, что если системе дать начальное отклонение, определяемое координатами $x_1 = +1$ и $x_2 = +1$ (рисунок 20) и затем ее отпустить, то полученное движение будет чисто синусоидальным с частотой

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

причем мы имеем здесь первое главное колебание. С другой стороны, если начальное отклонение определяется координатами $x_1 = +1$ и $x_2 = -1$, то, хотя движение будет опять чисто синусоидальное, частота будет уже

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_3}{m}},$$

Это есть второе главное колебание.

Пусть теперь начальное отклонение, из которого система свободно отпускается, определяется координатами $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$. Для такого случая мы пока еще решения не имели. Но укачанное начальное отклонение может рассматриваться как состоящее из двух частей: первая определяется координатами $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{1}{2}$, а вторая — координатами $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$; решения для каждого из этих отклонений мы знаем.

Предположим, что полученное в результате этого движение является «наложением» двух таких частных решений, а именно:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} \cos \omega_2 t, \\ x_2 &= \frac{1}{2} \cos \omega_1 t - \frac{1}{2} \cos \omega_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Что это есть действительно решение, можно убедиться подстановкой написанных выражений в уравнения (2.1) и (2.2), которые при этом удовлетворяются. Кроме того, легко видеть, что начальные условия при $t = 0$ также удовлетворяются.

Уравнения (2.9) показывают, что полученное движение будет первым главным колебанием с амплитудой $1/2$ и частотой ω_1 , наложенным на второе главное колебание с амплитудой $1/2$ и частотой ω_2 . Алгебраическое значение отношения отклонений масс в каком-либо главном колебании в любой момент времени определяет собою форму колебания. Легко видеть, что, пока имеется соединительная пружина k_3 , частоты ω_1 и ω_2 отличны друг от друга. Таким образом, сложное движение каждой массы уже не может быть вообще синусоидальным, а должно состоять из двух колебаний с различными частотами. Очевидно, что если частоты мало отличаются одна от другой, то возникнут биения.

Это случится, когда k_3 значительно меньше, чем k ($k_3 \ll k$), или, иными словами, когда соединительная пружина значительно мягче главных пружин.

При начальном отклонении $x_1 = 1, x_2 = 0$ правая масса m_1 будет колебаться с амплитудой, равной 1, тогда как масса m_2 будет почти неподвижной. Однако по истечении некоторого времени разница обеих частот изменит разность фаз обеих колебаний на 180° , или π . Тогда вместо значений

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} \text{ (первое главное колебание)}$$

и

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2} \text{ (второе главное колебание)}$$

мы имеем

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} \text{ (первое главное колебание)}$$

и

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = +\frac{1}{2} \text{ (второе главное колебание)}.$$

Итак, теперь уже первая масса остается в покое, а вторая совершает колебания с амплитудой, равной 1. Это явление должно быть периодическим» так что движение будет непрерывно передаваться от одной массы к другой.

Изложение может быть проиллюстрировано на многих разнообразных опытах, о которых дает представление рисунке 21. В первом случае мы имеем два маятника, которые могут качаться в плоскости чертежа. Роль основных пружин здесь играет вес, но соединительная пружина оставлена; она представляет собою очень мягкую винтовую пружину. Для малых колебаний (с амплитудой, примерно меньшей 30°) тяжелый маятник может быть уподоблен нашей основной системе с пружиной и массой. Квазиупругий коэффициент пружины k_1 , являющийся восстанавливающей силой при единичном отклонении, здесь равен mg/l , вследствие чего для простого маятника

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{l}.$$

При сравнении рисунка 21,а и 19 мы видим, что квазиупругий коэффициент k_3 соединительной пружины, изображенной на рисунке 19, в данном случае есть сила, действующая на массы со стороны соединительной пружины, при увеличении расстояния между массами на единицу длины. Применяя такую интерпретацию к рисунку 21,а, мы находим, что при отсутствии веса сила, равная $k a^2/l^2$ и приложенная к одной массе, отодвигает одну массу от другой на 1 см. Итак, величиной, эквивалентной k_3 , здесь является величина $k a^2/l^2$.

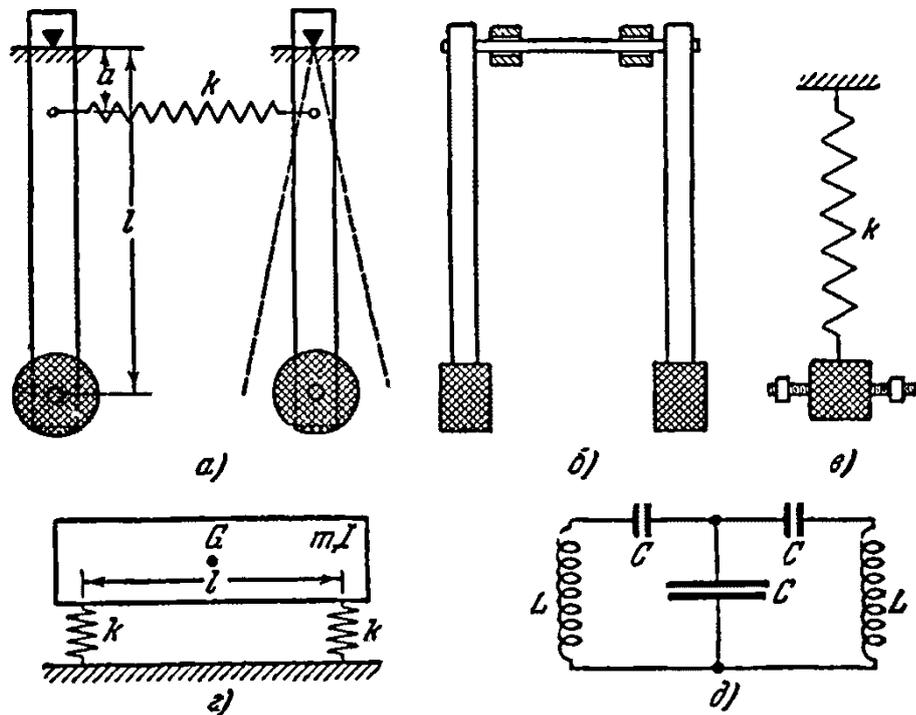


Рисунок 21 – Пять опытов, в которых можно наблюдать периодическое перемещение энергии из одной части системы в другую

Теперь уже легко найти оба главных колебания. Маятники должны качаться либо один вместе с другим, либо противоположно друг другу, причем соответственные частоты равны

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m} \cdot \frac{a^2}{l^2}}.$$

Отведя левый маятник на 1 см влево и удерживая правый на своём месте, мы имеем полное отклонение системы, эквивалентное сумме двух отклонений, показанных на рисунке 22,б и 22,в.

Если теперь отпустить левый маятник, то он будет совершать колебания, указанные на рисунке 22,а (правый маятник остается в покое). Полученное движение может рассматриваться как суммарное, происходящее в результате наложения двух других движений с частотами ω_1 и ω_2 , как указано на схеме. В течение нескольких первых периодов будет иметь место движение только одного маятника, так как частоты достаточно близки друг к другу, чтобы сохранить общую картину на некоторое короткое время. Однако второе главное колебание происходит несколько быстрее, чем первое, и опережает его, так как $\omega_2 > \omega_1$. По прошествии достаточного промежутка времени, например 20 периодов, второе главное колебание окажется по фазе на 180° впереди первого, что показано на рисунках 22,г и 22,д. Выполнив сложение, указанное на схеме, мы видим, что левый маятник теперь оказывается в покое, тогда как правый будет качаться с полной амплитудой. Указанное явление будет повторяться, причем амплитуда будет непрерывно передаваться от одного маятника к другому до тех пор, пока вследствие неизбежного трения вся система не придет в состояние покоя.

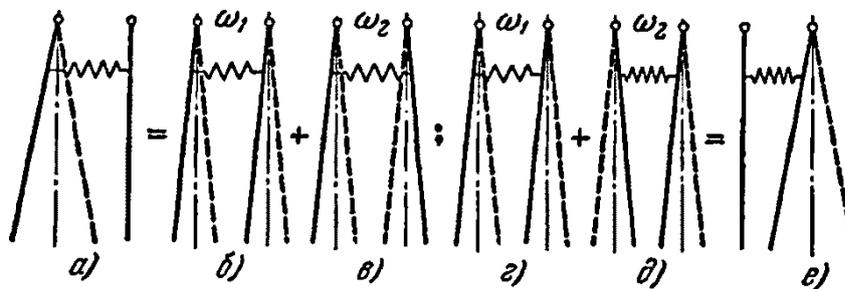


Рисунок 22 – Разложение колебательного движения системы с двумя степенями свободы на два главных колебания

На рисунке 21,б маятники качаются перпендикулярно к плоскости чертежа. Здесь возможны следующие два главных движения: 1) маятники качаются вместе, 2) маятники качаются навстречу друг другу, скручивая при этом

очень слабый соединительный вал, который вызывает некоторое увеличение частоты колебаний. Отклоняя один из маятников и удерживая другой на месте (тем самым скручивая слегка соединительный вал), а затем отпуская всю систему, мы приходим опять к тому же случаю непрерывной передачи движения одним маятником другому.

На рисунке 21, в представлена система, напоминающая шасси автомобиля на рессорах. Здесь для массы возможны два главных движения: 1) подпрыгивание по вертикали без вращения с частотой

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{m}},$$

2) продольная качка, или галопирование, т.е. вращение вокруг центра тяжести G в плоскости чертежа с частотой

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{kl^2}{2I}}.$$

Предположим теперь, что левый конец шасси приподнят на 1 см, в то время как правый удерживается на месте, после чего система предоставляется самой себе. В этом случае движение опять распадается на две части.

Если величины m , I , k и l таковы, что ω_1 и ω_2 почти равны друг другу, то движение, показанное на рисунке 23, а будет сохраняться без заметных изменений в продолжение нескольких периодов. Однако по истечении достаточно большого числа периодов одно из главных движений, например галопирование, опередит другое по фазе на 180° . Рассматривая теперь рисунок 23 справа налево, мы видим, что тело колеблется так, что остается неподвижным его левый конец. Конечно, по прошествии опять такого же промежутка времени будет иметь место первое движение и т. д. до тех пор, пока движение окончательно не прекратится вследствие затухания.

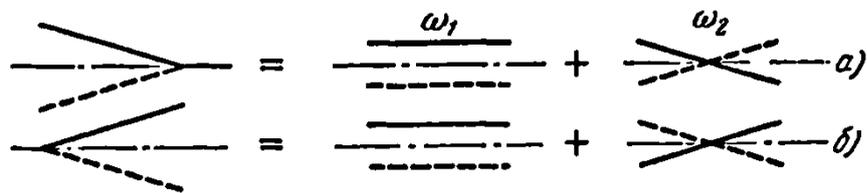


Рисунок 23 – Иллюстрация передачи энергии в опыте рисунка 21,в

В то время как соединительная пружина видна в том или ином виде на рисунках 21,а и 21,б, где она изображена как отдельная часть системы, ее не видно на рисунке 21,в. Однако сейчас наиболее существенным требованием является у нас то, чтобы система имела две степени свободы с отличающимися друг от друга собственными частотами и совершенно неважно, можно ли указать соединительную пружину или нет.

Замечательный опыт можно проделать с так называемой пружиной Вильберфорса, изображенной на рисунке 21,г. Масса, подвешенная на винтовой пружине, имеет два выступающих винта с насаженными на них гайками. Две степени свободы обуславливаются здесь движением вверх и вниз и затем скручиванием. «Соединение» выражается в данном случае своеобразно, а именно: в виде того факта, что оба движения связаны друг с другом, и оттягивание груза на пружине влечет за собою некоторое ее скручивание и обратно, закручивая пружину, мы видим, что она слегка изменяет свою длину. При изменении положения гаек момент инерции I изменяется, в то время как масса m остается постоянной. Таким образом, соответственной установкой гаек можно добиться того, что обе частоты будут приблизительно равны друг другу. Тогда, если оттянуть груз вниз и отпустить его, то вначале возникнут вертикальные колебания массы без закручивания. Однако по истечении некоторого времени будут иметь место только крутильные колебания без вертикальных и т. д.

Последний случай, проиллюстрированный на рисунке 21,д, это — электрическая аналогия изучаемого нами явления. Две равные массы (индуктивности) L , присоединенные к одинаковым главным или основным пружинам (конденсаторам) C , связаны между собой слабой соединительной пружиной

(промежуточным конденсатором C большой емкости, так как к эквивалентно $1/C$). Электрический ток, начавшись в одной петле контура, по истечении некоторого времени весь перейдет в другую петлю и т. д.

2.2 Динамический поглотитель колебаний без затухания

Машина или какая-либо ее часть, находящаяся непрерывно под действием переменной силы постоянной частоты изменения, может испытывать вредные колебания, особенно вблизи резонанса. Чтобы устранить таковые, мы можем попытаться прежде всего освободиться от этой силы, что, однако, очень часто с практической стороны бывает неудобно или даже невозможно. В таком случае, стремясь удалиться от условий резонанса, можно изменить в нашей системе массу или упругую постоянную. Но бывают случаи, когда и это также оказывается непрактичным, и тогда в качестве третьей возможности остается прибегнуть к помощи динамического поглотителя колебаний, называемого также антивибратором или виброгасителем и изобретенного Фрамом в 1909 г.

Пусть совокупность K, M на рисунке 24 схематически представляет собою рассматриваемую часть машины, на которую действует возмущающая сила $P_0 \sin \omega t$. Поглотитель колебаний состоит из малой, по сравнению с первой, колеблющейся системы k, m , связанной с главной массой M . Собственная частота $\sqrt{k/m}$ присоединенного поглотителя подбирается так, чтобы она равнялась частоте ω изменения возмущающей силы. Покажем, что в таком случае главная масса M вовсе не будет колебаться и что малая система k, m будет колебаться так, что упругая сила ее пружины во всякий момент времени будет равна и противоположно направлена силе $P_0 \sin \omega t$. Поскольку на массу M не будет действовать никакая результирующая сила, то ясно, что масса не должна колебаться.

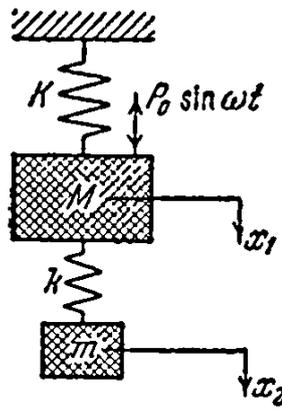


Рисунок 24 – Поглотитель колебаний

Для доказательства высказанного утверждения напишем уравнения движения. Это сделать очень легко, поскольку рисунок 24 есть частный случай рисунка 19, где k_2 равняется нулю. В нашем случае надо добавить только внешнюю силу $P_0 \sin \omega t$, действующую на первую массу M . Уравнения (2.1) и (2.2) при этом несколько изменят свой вид, а именно вместо них получим:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_1 + (K + k)x_1 - kx_2 &= P_0 \sin \omega t, \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Вынужденные колебания системы определяются, очевидно, следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin \omega t, \\ x_2 &= a_2 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Это очевидно, поскольку (2.10) содержат только x_1 , \ddot{x}_1 и x_2 , \ddot{x}_2 но не содержат первых производных \dot{x}_1 и \dot{x}_2 . После двукратного дифференцирования синуса получается опять синус, а следовательно, если принять выражения (2.11) в качестве решений, то все члены в уравнениях (2.10) оказываются пропорциональными величине $\sin \omega t$. Посредством деления на $\sin \omega t$ мы преобразуем наши дифференциальные уравнения в уравнения алгебраические, подобно тому, как мы поступали с уравнениями (2.1) и (2.2) при получении уравнений (2.4). Итак, имеем:

$$\left. \begin{aligned} a_1(-M\omega^2 + K + k) - ka_2 &= P_0, \\ -ka_1 + a_2(-m\omega^2 + k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Для упрощения приведём эти уравнения к безразмерному виду, введя для этой цели следующие обозначения:

$$x_{cr} = \frac{P_0}{K} - \text{статическая деформация главной системы;}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}} - \text{собственная частота поглотителя;}$$

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{K}{M}} - \text{собственная частота главной системы;}$$

$$\mu = \frac{m}{M} - \text{отношение масс (массы поглотителя к главной массе).}$$

Тогда уравнения (2.12) примут вид

$$\left. \begin{aligned} a_1 \left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_c^2} \right) - a_2 \frac{k}{K} &= x_{cr}, \\ a_1 &= a_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

или, если разрешить их относительно a_1 и a_2 , то

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{x_{cr}} &= \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2} \right) \left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_c^2} \right) + \frac{k}{K}}, \\ \frac{a_2}{x_{cr}} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2} \right) \left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_c^2} \right) + \frac{k}{K}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Первое из написанных уравнений сейчас же подтверждает справедливость наших соображений. В самом деле, амплитуда a_1 колебаний главной массы равняется нулю, если только числитель $1 - \omega^2/\omega_a^2$ равен нулю, а это имеет место в том случае, когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний поглотителя.

Рассмотрим теперь второе из уравнений (2.14) для случая $\omega = \omega_1$. Поскольку первый множитель в знаменателе обращается в нуль, уравнение приводится к виду

$$a_2 = -\frac{K}{k} x_{cr} = -\frac{P_0}{k}.$$

При спокойном состоянии главной массы и при движении массы поглотителя по закону $-(P_0/k) \sin \omega t$ сила упругости пружины поглотителя изменяется по закону $-P_0 \sin \omega t$, а это и есть сила, равная возмущающей силе и направленная противоположно ей.

Наши выводы остаются справедливыми для любого значения отношения ω/Ω_c . Однако мы видели, что присоединение поглотителя не имеет особого смысла, если основная система не находится в состоянии резонанса, или по крайней мере не близка к нему. Поэтому сейчас мы рассмотрим случай, когда

$$\omega_a = \Omega_c,$$

или

$$\frac{k}{m} = \frac{K}{M'}$$

или же

$$\frac{k}{K} = \frac{m}{M'}$$

Отношение

$$\mu = \frac{m}{M}$$

определит в таком случае размеры поглотителя по сравнению с размерами главной системы. Для этого особого случая уравнения (2.14) могут быть написаны в таком виде:

$$\frac{x_1}{x_{cr}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)\left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) + \mu} \sin \omega t, \quad (2.15a)$$

$$\frac{x_2}{x_{cr}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)\left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) - \mu} \sin \omega t. \quad (2.15b)$$

Как в полученном результате, так и в уравнениях (2.14) нам сразу бросается в глаза то обстоятельство, что оба знаменателя оказываются равными между собою. Это является далеко не случайностью, а имеет определенный физический смысл. В самом деле, выполняя перемножение в знаменателе, мы видим, что знаменатель содержит члены, пропорциональные величинам $(\omega^2/\omega_a^2)^2$ и (ω^2/ω_a^2) , а также член, не зависящий от этого отношения. Таким образом, приравнивая знаменатель нулю, мы получаем квадратное уравнение относительно ω^2/ω_a^2 , которое должно иметь два корня. Следовательно, для двух этих значений частоты знаменатели уравнений (2.15) обращаются в нуль, а тогда x_1 и x_2 делаются бесконечно большими. Найденные таким образом две частоты являются резонансными, или собственными, частотами нашей системы. Если бы оба знаменателя в уравнениях (2.15) не были равны между собой, то могло бы случиться, что при некотором определенном значении ω один из них равнялся бы нулю, в то время как другой был бы отличен от нуля. Это означало бы, что, например, x_1 обращается в бесконечность, тогда как x_2 сохраняет конечное значение. Но если бы x_1 равнялось бесконечности, то удлинения и сжатия пружины поглотителя k становились бы бесконечно большими, что неизбежно приводит к такому же заключению и относительно силы упругости пружины. Таким образом, мы приходим к невероятному выводу, а именно: размахи x_2 массы m поглотителя были бы конечными при действии на нее бесконечно большой силы $k(x_1 - x_2)$. Итак, становится совершенно ясным, что если одна из амплитуд делается бесконечной, то такое же заключение необходимо сделать и относительно другой

амплитуды; следовательно, оба знаменателя в уравнениях (2.15) должны быть одинаковыми.

Собственные частоты мы можем определить, приравняв знаменатель нулю, а именно:

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) \left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) - \mu = 0, \text{ или } \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^4 - \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 (2 + \mu) + 1 = 0;$$

решая это уравнение, находим:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \pm \sqrt{\mu + \frac{\mu^2}{4}}. \quad (2.16)$$

Это соотношение графически изображено на рисунке 25, из которого мы находим, например, что поглотитель с массой, равной одной десятой массы главной системы, вызывает две собственные частоты всей системы в целом, соответственно равные 1,17 и 0,85 частоты собственных колебаний первоначальной системы.

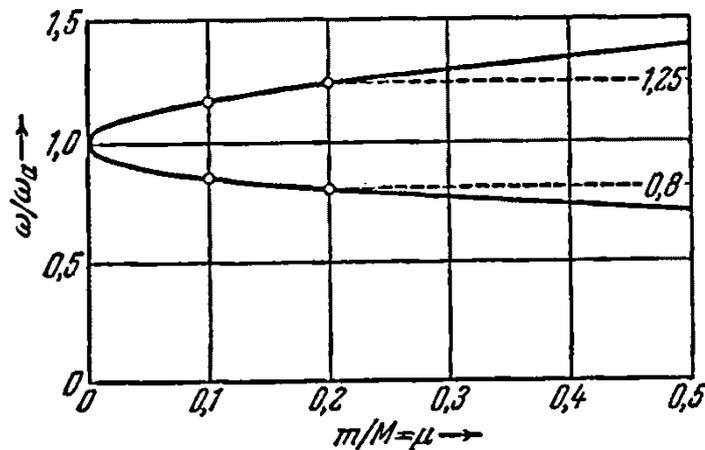
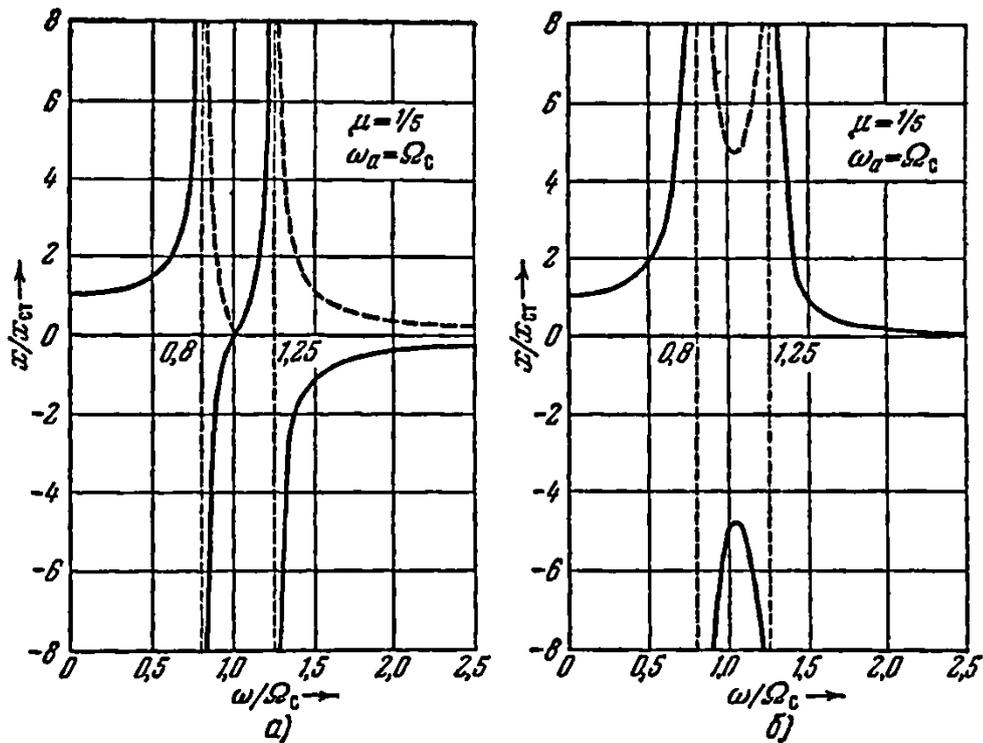


Рисунок 25 – Две собственные частоты системы

Основной результат, выражаемый уравнениями (2.15), представлен на рисунке 26,а и 26,б для случая $\mu = 1/5$, т.е. при массе поглотителя, равной одной пятой массы главной системы.

Проследим ход кривой на рисунок 26,а для возрастающего отношения частот $\omega/\Omega_c = \omega/\omega_2$. Легко видеть, что $x_1/x_{cr} = 1$ при $\omega = 0$, тогда как для значений ω , несколько больших нуля, x_1 должно быть обязательно положительным, поскольку в уравнениях (2.15а) как числитель, так и знаменатель положительны. При наступлении первого резонанса знаменатель проходит через нуль от положительных значений к отрицательным, вследствие чего отношение x_1/x_{cr} становится отрицательным. Далее, при $\omega = \Omega_c = \omega_a$ становится отрицательным также и знаменатель, а поэтому дробь x_1/x_{cr} получает опять положительные значения (числитель и знаменатель отрицательны, т. е. одного знака). В момент второго резонанса знаменатель еще раз меняет знак, вследствие чего x_1 делается вновь отрицательным.

Подобные, но не идентичные изменения претерпевает также кривая для отношения x_2/x_{cr} ; однако здесь числитель остается все время положительным, так что изменение знака происходит лишь в моменты резонанса. Такая перемена знака означает просто изменение фазы на 180° , что в данном случае для нас не существенно. По этой причине на рисунке 26, а и 26,б нанесены соответственные пунктирные линии, и мы можем в дальнейших рассуждениях смотреть на эти линии как на кривые, определяющие амплитуду, отбросив при этом нижние части диаграммы.



- а) Амплитуда x_1 главной массы,
 б) амплитуда x_2 поглотителя;

Рисунок 26 – Амплитуды главной массы и поглотителя для различных
 возмущающих частот ω

Полученные результаты могут быть интерпретированы еще иным образом, что оказывается полезным в некоторых приложениях. Пусть изображенный на рисунке 24 поглотитель Фрама с массой m и пружиной k заменен некоторой массой $m_{\text{экр.}}$, жестко связанной с главной массой M , и пусть эта эквивалентная масса подобрана так, что движение x_1 главной массы получается такое же, как и при поглотителе. Вследствие того, что поглотитель представляет собою систему, более сложную, чем просто масса (добавлена пружина), то ясно, что эквивалентная масса $m_{\text{экр.}}$ не может быть постоянной, а должна быть различной для различных возмущающих частот ω . Сила, действующая со стороны поглотителя на главную массу M системы, есть сила упругости пружины $k(x_2 - x_1)$, которая на основании второго уравнения (2.10) равна $-m\ddot{x}_2$. Но если бы масса $m_{\text{экр.}}$ была жестко связана с массой M , то соответствующая сила, действующая на M , была бы не чем иным, как силой инерции $-m_{\text{экр.}}\ddot{x}_1$. Для эквивалентности обеих систем ни две силы должны быть

равны друг другу, а тогда на основании уравнений (2.11) и второго уравнения (2.13) мы имеем

$$\frac{m_{\text{экв.}}}{m} = \frac{\ddot{x}_2}{\ddot{x}_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}.$$

Итак, мы видим, что система динамического поглотителя Фрама может быть заменена эквивалентной массой, жестко связанной с главной массой, причем эквивалентная масса должна быть положительной для медленных возмущений, бесконечно большой при равенстве частот возмущающей силы и поглотителя и отрицательной для быстрых возмущений. Такая точка зрения на действие поглотителя нам понадобится в дальнейшем.

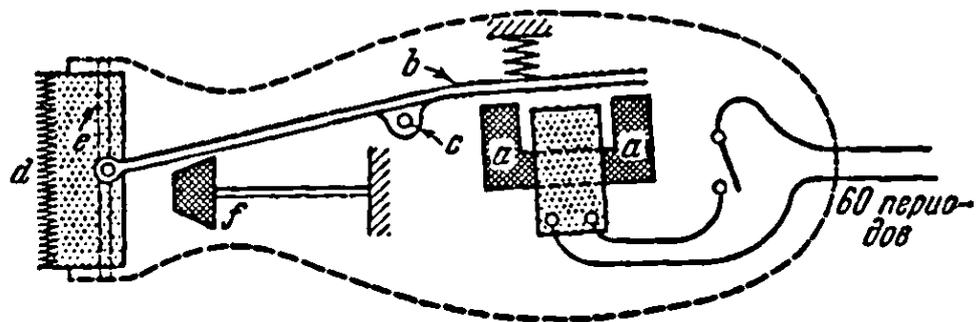
Из рассмотрения рисунка 26,а, который представляет колебания главной массы, становится ясным, что динамический поглотитель колебаний без затухания оказывается полезным лишь тогда, когда частота изменения возмущающей силы приблизительно постоянна. В этих случаях нам представляется возможность при $\omega/\omega_a = \omega/\Omega_c = 1$ иметь дело с очень незначительной (почти равной нулю) амплитудой. Таково положение, например, во всех машинах, непосредственно соединенных с синхронными электромоторами или генераторами. Однако в машинах, работающих при переменном скоростном режиме, как, например, в двигателях внутреннего сгорания, применяемых в автомобильной технике и авиации, применение подобных поглотителей бесполезно, так как, в сущности, мы заменяем нашу основную систему с одной резонансной скоростью (при $\omega/\Omega_c = 1$) другой системой с двумя резонансными скоростями. В этих случаях бывает все же выгодно воспользоваться поглотителем, снабдив его пружину определенным затуханием, о чем будет идти речь в следующем параграфе.

Интересное применение поглотителя колебаний сделано в недавно появившихся электрических машинках для стрижки волос. Такая машинка, изображенная на рисунке 27, состоит из электромагнита a , питаемого пере-

менным током в 60 периодов. Электромагнит действует переменной силой в 120 периодов на колеблющуюся систему b . Система b настроена на частоту, отличающуюся примерно на 20% от частоты в 120 периодов, с тем, чтобы сохранить в определенных границах амплитуду стригущего лезвия d , которое колеблется с достаточно малым затуханием. Таким образом, лезвие d должно колебаться примерно с одной и той же амплитудой, независимо от того, снимает ли машинка много волос или волос нет совершенно.

Весь механизм, рассматриваемый как свободное тело в пространстве, лишенное действия внешних сил, должен иметь неподвижными центр тяжести и главные оси инерции. Так как части b и d прибора находятся в движении, то должен двигаться самый кожух и притом в противоположные стороны, чтобы удовлетворились указанные два условия. Однако колебания кожуха действуют на руки парикмахера, создавая крайне неприятное ощущение. Это нежелательное явление в значительной мере преодолевается динамическим поглотителем колебаний f , настроенным в точности на 120 периодов в секунду и предотвращающим таким образом всякое движение кожуха в месте расположения массы f . Наблюдая массы d и f в стробоскопическом освещении, мы действительно отчетливо видим их колеблющимися в противоположных фазах.

Необходимо заметить, что описанный прибор в таком именно осуществлении не является совершенным по причине неправильного расположения массы f . В самом деле, в некоторый момент времени колеблющееся лезвие d имеет большую силу инерции, направленную вверх, в то время как расположенный на весу конец рычага b имеет малую силу инерции, направленную вниз. Поэтому равнодействующей сил инерции движущихся частей b и d будет переменная сила, расположенная слева от стригущей части d на рисунке 27.



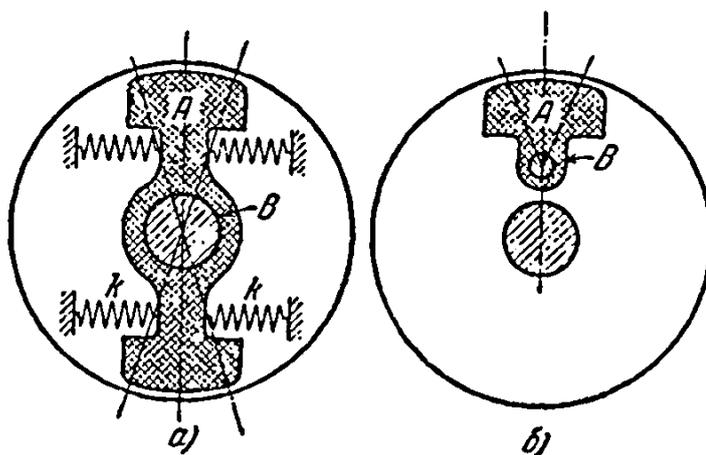
- a) электромагнит,
- b) якорь,
- c) ось вращения якоря,
- d) нож,
- e) направляющая ножа,
- f) поглотитель колебаний

Рисунок 27 – Электрическая машина для стрижки волос с поглотителем

Эффектом поглотителя является полное снятие 120-периодного колебания точки кожуха непосредственно в месте установки массы f поглотителя, однако поглотитель не может предотвратить вращения кожуха вокруг этой неподвижной точки. Полное исключение 120-периодного движения кожуха может быть осуществлено установкой в приборе двух поглотителей f на некотором расстоянии друг от друга, причем так, чтобы прямая, соединяющая их центры тяжести, была перпендикулярна к направлению движения лезвия. Тогда эти же массы будут автоматически колебаться с такими амплитудами, чтобы их силы инерции противодействовали силе и моменту сил инерции системы d, b , иными словами, указанные две массы приведут к неподвижному состоянию две точки кожуха машинки.

Для гашения крутильных колебаний вращающихся систем, как, например, коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания, динамический поглотитель Фрама принимает форму маховичка A , могущего свободно вращаться на шейке B вала, с которым он связан пружинами k (рисунок 28,а). Так как вращательные импульсы в таком двигателе имеют периодичность вспышек в цилиндрах, т.е. действуют с частотой, пропорциональной угловой скорости

машины, то прибор может работать только на одном скоростном режиме, в то время как для такой системы имеют место две близлежащие скорости, при которых наступает состояние резонанса (рисунок 26,а). Чтобы преодолеть это затруднение, недавно было предложено заменить пружинный поглотитель, изображенный на рисунке 28,а, центробежным маятниковым поглотителем, представленным на рисунке 28,б. Здесь маятник в центробежном силовом поле действует так же, как и обычный маятник в гравитационном поле, но в котором вместо напряжения поля тяжести g надо взять напряжение поля центробежных сил $r\omega^2$.



а) пружинный,

б) центробежный

Рисунок 28 – Поглотители крутильных колебаний

Так как частота гравитационного маятника равна $\sqrt{g/l}$, то частота центробежного маятника получается равной $\omega\sqrt{r/l}$, т. е. она пропорциональна угловой скорости машины. Благодаря этому, центробежный маятник действует как динамический поглотитель Фрама, настраивающийся в точности на все скорости.

2.3 Поглотитель колебаний с затуханием

Рассмотрим систему, представленную на рисунке 24, в которую между массами M и m включен параллельно пружине поглотителя k амортизатор. Главная пружина K остается без амортизатора.

Применяя закон Ньютона к массе M , имеем

$$M\ddot{x}_1 + Kx_1 + k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = P_0 \sin \omega t \quad (2.17)$$

и аналогично для массы m

$$m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0. \quad (2.18)$$

Рекомендуется вывести самостоятельно эти уравнения и убедиться в правильности знаков у отдельных членов. Четыре члена в левой части уравнения (2.17) обозначают соответственно силу инерции массы M , силу упругости главной пружины, силу упругости пружины поглотителя и силу сопротивления амортизатора. Нас интересует лишь решение, соответствующее вынужденным колебаниям; что же касается затухающих собственных колебаний в переходном процессе, то рассматривать их мы не будем. Тогда обе величины x_1 и x_2 представляют гармонические движения с частотой ω и могут быть изображены посредством векторов. Каждый член в уравнениях (2.17) и (2.18) может быть представлен с помощью такого вектора, вращающегося с угловой скоростью ω . Простейший способ решения этих уравнений — это применение комплексных чисел для изображения векторов. В этом случае наши уравнения примут вид

$$-M\omega^2 x_1 + Kx_1 + k(x_1 - x_2) + i\omega c(x_1 - x_2) = P_0,$$

$$-m\omega^2 x_2 + k(x_2 - x_1) + i\omega c(x_2 - x_1) = 0,$$

где x_1 и x_2 — неизвестные пока комплексные числа; остальные же величины действительные.

Группируя члены x_1 и x_2 , имеем

$$\left. \begin{aligned} (-M\omega^2 + K + k + i\omega c)x_1 - (k + i\omega c)x_2 &= P_0, \\ -(k + i\omega c)x_1 + (-m\omega^2 + k + i\omega c)x_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Эти уравнения могут быть разрешены относительно x_1 и x_2 . Мы интересуемся прежде всего движением главной массы, а чтобы его найти, выразим x че-

рез x_1 посредством второго уравнения (2.19) и подставим в первое. Тогда получим:

$$x_1 = P_0 \frac{(k - m\omega^2) + i\omega c}{[(-M\omega^2 + K)(k - m\omega^2) - m\omega^2 k] + i\omega c(-M\omega^2 + K - m\omega^2)}. \quad (2.20)$$

Результат может быть получен посредством рассмотрения эквивалентной схемы электрического контура, показанной на рисунке 29. Эта эквивалентность может быть установлена путем написания уравнений для напряжения тока и сравнения их с уравнениями (2.17) и (2.18) или же непосредственно из рассмотрения схемы следующим образом. Растяжение (или скорость) пружины K , смещение (или скорость) груза M и перемещение (или скорость) точки приложения силы P_0 — все равны x_1 (или \dot{x}_1). Следовательно, соответствующие элементы электрического контура $1/C$, L и E_0 должны пропускать ток одной и той же силы i_1 , а поэтому они должны быть включены последовательно. Скорости ($\dot{x}_1 - \dot{x}_2$) в пружине k и в амортизаторе также равны между собой, вследствие чего соответствующие и электрические эквиваленты $1/c$ и r должны быть в последовательном соединении, но в то же время они должны пропускать ток, уже отличный от тока в главных элементах L , C и E_0 . Скорость \dot{x}_2 массы m равна разности скорости \dot{x}_1 массы M и скорости ($\dot{x}_1 - \dot{x}_2$) пружины амортизатора. Отсюда следует, что сила тока i_2 , в l должна быть равна разности ($i_1 - i_2$). Таким образом, эквивалентность электрического контура и механической системы можно считать установленной.

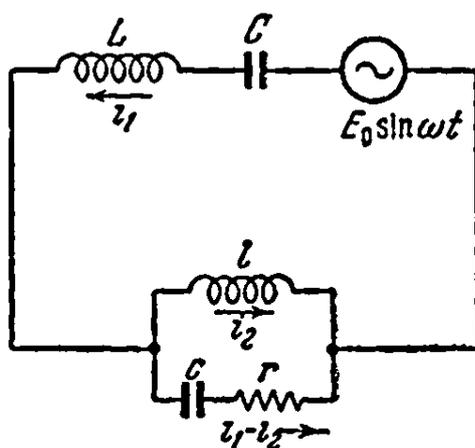


Рисунок 29 – Эквивалентный электрический контур l - c - r соответствует поглотителю

Мы интересуемся главным током i . Кажущееся сопротивление спирали, или, как говорят, ее импеданс, равно $i\omega L$, а конденсатора $-1/i\omega C$; омическое сопротивление равно R . Сопротивления, включенные последовательно при их комплексном представлении, складываются непосредственно; если же сопротивления включены параллельно, то складываются их обратные величины. Импеданс в ветви c, r равен $r + 1/i\omega c$ и соответственно в ветви l он равен $i\omega l$. Поэтому для полного импеданса кажущегося сопротивления в параллельно включенных ветвях имеем выражение

$$\frac{1}{r + \frac{1}{i\omega c} + \frac{1}{i\omega l}}$$

Эту величину нам надо прибавить к импедансу других элементов цепи, и мы получим

$$Z = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{r + \frac{1}{i\omega c}} + \frac{1}{i\omega l}} = \frac{E}{i_1}$$

Выполняя здесь алгебраические преобразования и переходя обратно к механической схеме, получим уравнение (2.20).

Комплексно выражение (2.20) может быть приведено к виду

$$x_1 = P_0 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}. \quad (2.21)$$

Однако пока ещё уравнение (2.20) не имеет формы уравнения (2.21), а имеет форму:

$$x_1 = P_0 \frac{A + iB}{C + iD},$$

что можно преобразовать ещё так:

$$x_1 = P_0 \frac{(A + iB)(C - iD)}{(C + iD)(C - iD)} = P_0 \frac{(AC + BD) + i(BC - AD)}{C^2 + D^2}.$$

Отсюда можно получить длину x_1 вектора таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{P_0} &= \sqrt{\left(\frac{AC + BD}{C^2 + D^2}\right)^2 + \left(\frac{BC - AD}{C^2 + D^2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{A^2 C^2 + B^2 D^2 + B^2 C^2 + A^2 D^2}{(C^2 + D^2)^2}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}}. \end{aligned}$$

Применяя этот вывод к уравнению (2.20), мы можем написать

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2}{P_0^2} &= \\ &= \frac{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}{[(-M\omega^2 + K)(-m\omega^2 + k) - m\omega^2 k^2]^2 + \omega^2 c^2 (-M\omega^2 + K - m\omega^2)^2}. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Это уравнение определяет амплитуду колебаний главной массы M .

Очень полезно проверить полученный результат для нескольких частных случаев и убедиться, что он приводит к уже известным результатам, полученным выше. Рекомендуется проделать это для нескольких случаев из числа следующих:

1. $k = \infty$.

$$2. k = 0; c = 0.$$

$$3. c = \infty.$$

$$4. c = 0; \omega = \Omega_c = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

$$5. m = 0.$$

Таким образом, теперь мы можем вычислять амплитуду во всех случаях. В уравнении (2.22), есть функция семи переменных: P_0 , ω , c , K , k , M и m . Однако, как сейчас будет показано, число переменных может быть понижено. Пусть, например, P_0 получает удвоенное значение, в то время как все остальные величины остаются теми же самыми. Тогда очевидно, что x_1 также удваивается. Кроме указанного, мы можем установить еще целый ряд аналогичных соотношений. Чтобы вскрыть их, полезно написать уравнение (2.22) в безразмерной форме, для чего вводятся следующие обозначения:

$$\mu = \frac{m}{M} = \text{отношение масс} = \frac{\text{масса поглотителя}}{\text{главная масса}};$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{собственная частота поглотителя};$$

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{K}{M}} = \text{собственная частота главной системы};$$

$$f = \frac{\omega_a}{\Omega_c} = \text{отношение частот (собственных)};$$

$$g = \frac{\omega}{\Omega_c} = \text{отношение частоты вынужденных колебаний к}$$

собственной частоте главной системы;

$$x_{cr} = \frac{P_0}{K} = \text{статическая деформация системы};$$

$$c_k = 2m\Omega_c = \text{коэффициент критического затухания.} \quad (2.23)$$

После выполнения некоторых алгебраических преобразований уравнение (2.22) примет вид:

$$\frac{x_1}{x_{cr}} = \sqrt{\frac{\left(2 \frac{c}{c_k} g\right)^2 (g^2 - f^2)^2}{\left(2 \frac{c}{c_k} g\right)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + [\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}}. \quad (2.24)$$

Таким образом, мы видим, что отношение отклонений x_1/x_{cr} главной массы есть функция четырех переменных величин: μ , c/c_k , f и g . На рисунке 30 дана диаграмма отношения x_1/x_{cr} , как функции отношения частот g для некоторой определенной системы при $f=1$, $\mu = 1/20$, но для различных значений отношения затуханий c/c_k . Иначе говоря, диаграмма показывает поведение системы, когда главная масса в 20 раз больше массы поглотителя, в то время как частота колебаний поглотителя равна частоте колебаний главной системы ($f=1$).

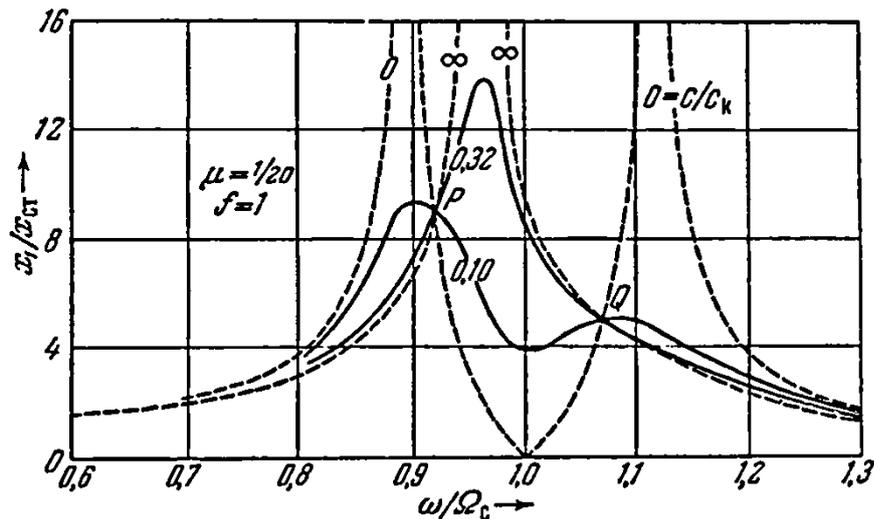


Рисунок 30 – Амплитуды колебаний главной массы системы для различных значений затухания в поглотителе

Интересно проследить за тем, что получается при возрастании затухания. При $c = 0$ мы имеем тот же самый случай, что и на рисунке 26, а т. е. уже известный результат. Когда коэффициент затухания становится равным бесконечности, обе массы фактически оказываются жестко связанными между

собой, и поэтому мы имеем случай системы с одной степенью свободы, причем масса системы равна $21/20 M$. Две другие кривые, построенные на рисунке 30, соответствуют значениям c/c_k , равным 0,10 и 0,32.

Присоединением к системе поглотителя мы достигаем того, что наибольшая величина амплитуды при резонансе приводится к ее наименьшему возможному значению. При $c = 0$ амплитуда бесконечна; аналогичный случай мы имеем и при $c = \infty$. Тогда где-то между этими предельными значениями затухания c должно быть такое его значение, при котором резонансная амплитуда имеет минимум.

Указанное обстоятельство может быть истолковано также и физически. Мы уже знаем, что резонансная амплитуда системы с одной степенью свободы ограничивается только сопротивлением, вызывающим затухание. Мы видели также, что энергия затухания рассеивается, обращаясь в теплоту. Если погашающая сила совершает значительную работу, то амплитуда при резонансе остается малой. Эти соображения сохраняют свою силу и в случае более сложных систем. Работа, совершаемая погашающей силой, равна этой силе, умноженной на перемещение, на котором она действует. В нашем случае перемещение определяется относительным движением обеих масс или изменением длины пружины поглотителя. При $c = 0$ погашающая сила равна нулю, поэтому никакой работы нет, а следовательно, резонансная амплитуда делается бесконечно большой. Когда же $c = \infty$, обе массы так связаны друг с другом, что их относительное перемещение равно нулю, а поэтому работа опять-таки отсутствует. Где-нибудь между 0 и ∞ имеет место такое затухание, при котором произведение силы затухания на ее перемещение делается наибольшим, а тогда резонансная амплитуда должна приобрести наименьшее значение.

Прежде чем приступать к вычислению такого оптимального затухания, мы обратим внимание на одно замечательное свойство кривых, изображенных на рисунке 30, а именно, что все четыре кривые пересекаются в двух

точках P и Q . То, что нам сейчас предстоит установить, ни в какой мере не является случайностью и вообще все кривые проходят через эти две точки, независимо от затухания. Если бы мы смогли определить их положение, то наша задача была бы решена, так как наиболее благоприятная кривая есть та, которая имеет горизонтальную касательную в наивысшей из двух точек P и Q . Тогда наилучшей возможной резонансной амплитудой (при наилучшем затухании) будет ордината этой точки.

Однако это еще не все, что мы можем сделать. При изменении относительной настройки, т.е. отношения $f = \omega_a/\Omega_c$ частот поглотителя и главной системы, две отмеченные нами точки P и Q будут перемещаться вверх и вниз по кривой, соответствующей $c = 0$. При изменении f одна из точек пойдет вверх, а другая вниз. Очевидно, что наиболее желательным является тот случай, когда, во-первых, путем соответствующего выбора отношения f точки P и Q будут установлены на одной высоте и, во-вторых, когда благодаря соответствующему подбору отношения c/c_k кривая будет иметь горизонтальную касательную в одной из этих точек. Оказывается практически безразличным, в какой именно из этих точек (рисунок 31) кривая будет обладать горизонтальной касательной, что будет показано ниже.

Возвратимся опять к уравнению (2.24) и посмотрим, нет ли таких значений g , при которых отношение x_1/x_{cr} делается независимым от отношения c/c_k . Упомянутое уравнение может быть написано в виде;

$$\frac{x_1}{x_{cr}} = \sqrt{\frac{A \left(\frac{c}{c_k}\right)^2 + B}{C \left(\frac{c}{c_k}\right)^2 + D}}$$

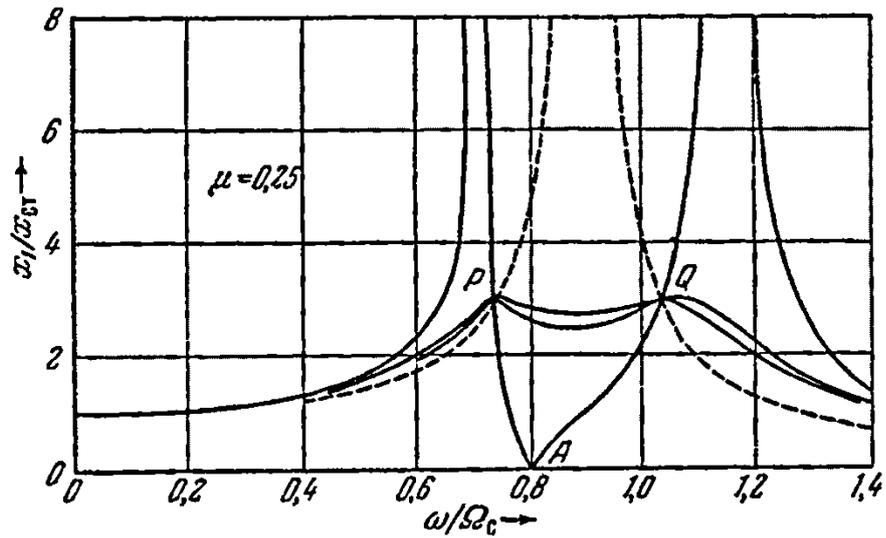


Рисунок 31 – Резонансные кривые для движения главной массы
Очевидно, покорённое выражение не будет зависеть от затухания, если положить

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{D},$$

или, в развёрнутом виде

$$\left(\frac{1}{g^2 - 1 + \mu g^2} \right)^2 = \left[\frac{g^2 - f^2}{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)} \right]^2.$$

Здесь мы можем отбросить показатели степени при больших скобках в обеих частях равенства, приписав, однако, двойной знак \pm правой его части. Возьмём сперва знак минус, тогда, перемножая крест-накрест, имеем

$$\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2) = -(g^2 - f^2)(g^2 - 1 + \mu g^2). \quad (2.25)$$

Легко видеть, что после соответствующих преобразований получаем

$$\mu f^2 g^2 = -\mu g^2 (g^2 - f^2),$$

или

$$f^2 = -g^2 + f^2,$$

откуда

$$g^2 = 0.$$

Мы пришли к тривиальному (однако, верному) решению. При $g = 0$ (т. е. $\omega = 0$) отклонение равно x_{cr} , и оно не зависит от величины затухания; этот факт имеет очень простое объяснение. В этом случае тело движется столь медленно, что нет причины для возникновения силы сопротивления (мы предполагаем, что эта сила пропорциональна скорости).

Возьмем теперь перед правой частью уравнения (2.25) знак плюс. После простых преобразований уравнение примет вид

$$g^4 - 2g^2 \frac{1 + f^2 + \mu f^2}{2 + \mu} + \frac{f^2}{2 + \mu} = 0. \quad (2.26)$$

Мы получили квадратное уравнение g^2 , имеющее два корня, которые определяют собою искомые «постоянные точки». Пусть эти корни будут соответственно g_1^2 и g_2^2 . Легко видеть, что g_1 и g_2 (абсциссы точек P и Q) должны быть функциями от μ и f .

Нашей ближайшей задачей будет построить систему (а именно, подобрать f) так, чтобы ординаты x_1/x_{cr} точек P и Q сделались одинаковыми. Решать уравнение (2.26) для определения g_1 и g_2 , подставлять эти величины в равенство (2.24), затем приравнивать одно к другому полученные выражения — все это представляет собою весьма длительную операцию. К счастью для нас, это и не является необходимым. В самом деле, прежде всего вспомним, что отношение x_1/x_{cr} как в точке P , так и в точке Q не зависит от величины затухания, а поэтому мы можем подобрать такое отношение c/c_k , чтобы уравнение (2.24) приняло наиболее простой вид. Это имеет место при $c = \infty$, когда уравнение (2.24) обращается в следующее:

$$\frac{x_1}{x_{cr}} = \frac{1}{1 - g^2(1 + \mu)}. \quad (2.27)$$

Подставляя сюда g_1 и g_2 и приравнивая выражения, имеем

$$\frac{1}{1 - g_1^2(1 + \mu)} = \frac{1}{1 - g_2^2(1 + \mu)}. \quad (2.28)$$

Однако написанное уравнение не вполне справедливо по следующей причине. Уравнение (2.27) в действительности изображается на рисунке 30 не кривой $c = \infty$, а кривой, имеющей отрицательные ординаты для значений g , больших, чем $1/\sqrt{1 + \mu}$. Так как точки P и Q лежат по разные стороны от этого значения g , то ордината точки P положительна, а ордината точки Q отрицательна; следовательно, уравнение (2.28) должно быть исправлено посредством изменения знака перед одной из его частей. Сделав такое исправление и выполнив простые алгебраические преобразования, мы приведем это уравнение к следующему виду:

$$g_1^2 + g_2^2 = \frac{2}{1 + \mu}. \quad (2.29)$$

Теперь даже не потребуется решать уравнение (2.26) для получения g_1 и g_2 , если мы вспомним, что коэффициент в среднем члене квадратного уравнения, взятый с обратным знаком, равен сумме корней этого уравнения. В уравнении (2.26) эта сумма есть

$$g_1^2 + g_2^2 = \frac{2(1 + f^2 + \mu f^2)}{2 + \mu}.$$

Подставляя это в уравнение (2.29), мы приходим к следующему результату:

$$f = \frac{1}{1 + \mu}. \quad (2.30)$$

Полученная очень простая формула дает правильное значение «настройки» для любой величины поглотителя. В случае очень малого поглотителя ($\mu = 0$) настройка определяется величиной $f \approx 1$, т. е. собственная частота поглотителя должна быть такая же, как и собственная частота главной или основной системы. При массе поглотителя, составляющей одну пятую часть

главной массы $f = 5/6$, т. е. поглотитель должен быть изготовлен так, чтобы его частота была на 17% меньше частоты основной системы.

Итак, теперь мы знаем, как надо настроить нашу систему, но зато мы еще не знаем, какую амплитуду x_1/x_{cr} мы получим. На рисунке 31 представлен случай такой настройки для $\mu = 1/4$. Здесь построены две кривые, из которых одна имеет горизонтальную касательную в точке P , но не горизонтальную в точке Q , а другая, напротив, горизонтальную в точке Q и не горизонтальную в точке P . Легко видеть из чертежа, что без большой практической ошибки амплитуду в какой-либо из этих точек можно считать за наибольшую амплитуду кривой. Эту амплитуду легко вычислить, для чего следует только подставить корень уравнения (2.26) в выражение для x_1/x_{cr} , причем, так как в данной точке (P или Q) отношение x_1/x_{cr} не зависит от величины затухания, то для этого отношения можно взять выражение (2.27). Выполнив указанную подстановку, приходим к такому результату:

$$\frac{x_1}{x_{cr}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}}. \quad (2.31)$$

Таково решение задачи, если собственная частота поглотителя отличается от собственной частоты главной системы в соответствии с формулой (2.30).

Интересно теперь сравнить результат, выражаемый уравнением (2.31), с другими случаями, с которыми приходится иногда встречаться на практике в машиностроении (рисунок 32). Характеристики построены для следующих случаев: 1 – поглотитель с наилучшей настройкой и наилучшим затуханием; 2 – поглотитель с наилучшим затуханием, настроенный на частоту главной системы; 3 – вязкий демпфер Ланчестера с наилучшим затуханием; 4 – демпфер Ланчестера с кулоновым трением и наилучшим затуханием.

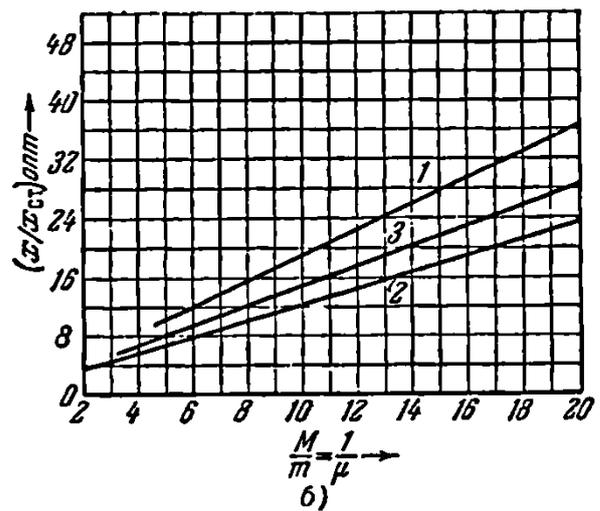
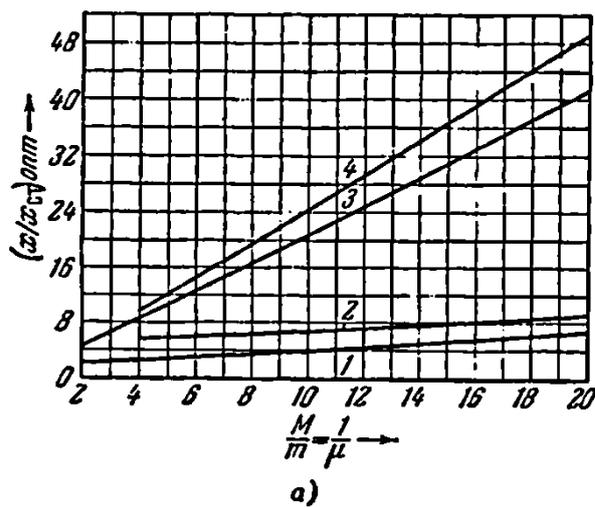
Прежде всего рассмотрим поглотитель колебаний с постоянной настройкой при $f = 1$, когда небольшой поглотитель настроен на такую же частоту, что и главная система, независимо от размеров такого. Тогда уравнение (2.26), служащее для определения; положения обеих постоянных точек P и Q , примет вид

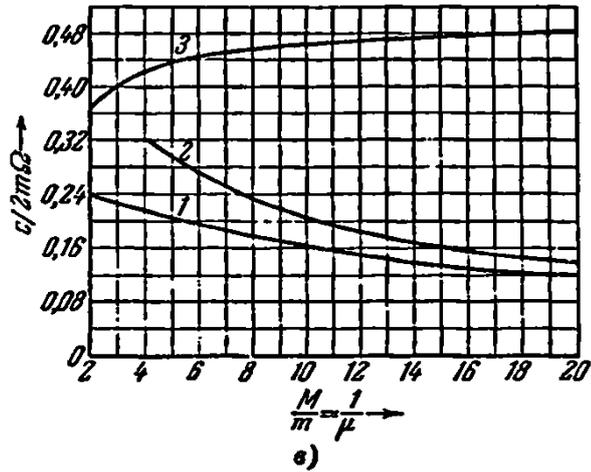
$$g^4 - 2g^2 + \frac{2}{2 + \mu} = 0,$$

откуда

$$g^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}}.$$

Для обычных размеров поглотителя максимальная амплитуда при меньших значениях g больше, чем при больших значениях g . Возьмём поэтому





- а) кривые амплитуды главной массы в функции отношения $\frac{m}{M}$ для различных типов поглотителей, присоединённых к главной массе;
- б) кривые относительных амплитуд колебаний масс M и m для различных типов поглотителей;
- в) кривые постоянных затухания, удовлетворяющих условиям наилучшего поглотителя.

Рисунок 32 – Характеристики амплитуд и постоянных затухания

$$g^2 = 1 - \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}}$$

и подставим это значение в уравнение (2.27). Получим

$$\frac{x_1}{x_{cr}} = \frac{1}{-\mu + (1 + \mu)\sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}}}. \quad (2.32)$$

Далее, рассмотрим прибор, известный под названием «демпфера Ланчестера», с вязким сопротивлением. Он представляет собою систему, изображённую на рисунок 24, в которой пружина поглотителя заменена амортизатором с линейным сопротивлением. Следовательно, $k = 0$ и, кроме того, как видно из уравнения (2.23), ω_a и f также равны нулю. Поэтому уравнение (2.26) для определения точек P и Q примет вид

$$g^4 - 2g^2 \frac{1}{2 + \mu} = 0,$$

откуда следует, что одна из этих точек всегда остаётся в точке $g_P = 0$, а положение другой определяется уравнением

$$g_Q^2 = \frac{2}{2 + \mu}. \quad (2.33)$$

Приборы без затухания и с бесконечно большим затуханием приводятся к системам с одной степенью свободы, так как в первом случае масса поглотителя освобождается, а во втором случае она оказывается жёстко связанной с главной массой. Всё это ясно видно из рисунка 33, на основании которого мы также заключаем, что наилучшая резонансная амплитуда получается в точке Q . Подставляя значение (2.33) в уравнение (2.27), мы найдём это наилучшее значение амплитуды, а именно:

$$\frac{x_1}{x_{cr}} = 1 + \frac{2}{\mu}. \quad (2.34)$$

В некоторых конструкциях демпфера Ланчестера вязкое сопротивление заменено сухим, т. е. кулоновым трением. Исследование этого случая достаточно сложно и здесь не приводится. Расчет показывает, что для наилучшего значения резонансной амплитуды в таком поглотителе мы имеем следующее приближенное значение:

$$\frac{x_1}{x_{cr}} = \frac{\pi^2}{4\mu} = \frac{2,46}{\mu}. \quad (2.25)$$

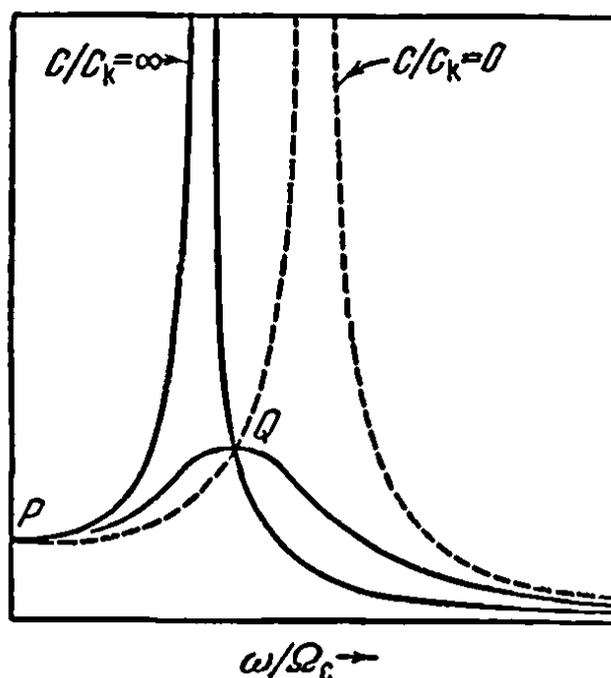


Рисунок 33 – Резонансные кривые простой системы, снабжённой демпфером Ланчестера с вязким сопротивлением для различных случаев затухания.

Четыре только что рассмотренных случая показаны на рисунке 32,а. Наиболее выгодные размеры поглотителя определяются значениями $\mu = 1/10$ или $1/12$. Мы видим из диаграммы, что беспружинный поглотитель, или демпфер Ланчестера, является менее эффективным, чем пружинные или динамические поглотители с затуханием. Однако проектирование пружины динамического поглотителя бывает часто очень затруднительно, так как малые амплитуды главной массы получаются за счет больших деформаций, а следовательно, и больших напряжений пружины поглотителя.

Прежде чем вычислять напряжение в пружине поглотителя, необходимо найти оптимальное значение затухания $(c/c_k)_{\text{опт}}$. Оптимальное значение амплитуды было найдено просто посредством установления того положения, что должно быть такое значение отношения c/c_k , при котором кривая в точке P или Q обладает горизонтальной касательной, как это изображено на рисунке 31. Правда, величина затухания до сего времени еще не была определена, и вот здесь-то мы впервые встречаемся с трудностями.

Отправляясь от уравнения (2.24), воспользуемся формулой (2.30) для получения случая «оптимальной настройки» $(c/c_k)_{\text{опт}}$. Продифференцируем полученное видоизмененное уравнение (2.24) по g , найдя тем самым наклон кривой, который приравняем нулю для точки P . Из полученного таким образом уравнения можно определить c/c_k .

Этот трудоемкий расчет, как показал Брок приводит к результату

$$\left(\frac{c}{c_k}\right)^2 = \frac{\mu \left(3 - \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}}\right)}{8(1+\mu)^3}.$$

С другой стороны, если dx/dg приравнять нулю не в точке P , а в точке Q и полученное уравнение относительно c/c_k , то получим;

$$\left(\frac{c}{c_k}\right)^2 = \frac{\mu \left(3 + \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}}\right)}{8(1+\mu)^3}.$$

Среднее из полученных значений даёт оптимальное затухание для случаев оптимальной настройки соответственно уравнению

$$\left(\frac{c}{c_k}\right)^2 = \frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}. \quad (2.36)$$

Такой же расчёт в применении к поглотителю с постоянно настройкой $f = 1$ при нулевом наклоне в точке P даёт

$$\left(\frac{c}{c_k}\right)^2 = \frac{\mu(\mu+3) \left(1 + \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}}\right)}{8(1+\mu)}. \quad (2.37)$$

Аналогично для демпфера Ланчестера (рисунок 33) при $f = 0$ нулевое затухание в точке Q имеет место при

$$\left(\frac{c}{c_k}\right)^2 = \frac{1}{2(2+\mu)(1+\mu)}. \quad (2.38)$$

Эти результаты представлены на рисунке 32,в.

Теперь мы уже можем приступить к нахождению относительного движения двух масс M и m , определяющего напряжение в пружине поглотителя. Точный расчет здесь очень сложен, так как пришлось бы вернуться к исходным дифференциальным уравнениям. Поэтому мы удовлетворимся приближенным решением задачи, используя результат, полученный ранее; там мы нашли, что вблизи наибольшей или резонансной амплитуды разность фаз между силой и перемещением составляет 90° или $\pi/2$.

На основании указанных соображений работа, совершаемая силой P_0 за один период, равна

$$W = \pi P_0 x_1 \sin 90^\circ = \pi P_0 x_1.$$

Это есть приближение, но приближение довольно хорошее, так как, если даже φ отличается более или менее значительно от $\pi/2$, то $\sin \varphi$ отличается от единицы достаточно мало.

С другой стороны, работа, рассеиваемая за один период вследствие затухания, согласно той же формуле равна произведению и на силу сопротивления и на относительную амплитуду x_r так как эта сила, будучи в одной фазе со скоростью, отличается по фазе от смещения точно на $\pi/2$. Итак, для рассеиваемой работы имеем

$$W_{\text{дис}} = \pi(c\omega x_r) \cdot x_r = \pi c\omega x_r^2.$$

Приравнявая эти два выражения, находим

$$\pi P_0 x_1 = \pi c\omega x_r^2,$$

или

$$x_r^2 = \frac{P_0 x_1}{c\omega}.$$

В безразмерной форме это равенство принимает вид

$$\left(\frac{x_r}{x_{cr}}\right)^2 = \frac{x_1}{x_{cr}} \frac{1}{2\mu g \frac{c}{c_c}}. \quad (2.39)$$

Написанная формула определяет относительное движение, а следовательно, и напряжение в пружине поглотителя. После подстановки соответствующих значений μ , g и т. д. она может применяться как к вязкому поглотителю Ланчестера так и « двум типам динамического поглотителя.

Кривые, изображенные на рисунке 32,б, показывают результаты указанных вычислений. Мы видим, что относительные движения, т. е. растяжения пружины, достаточно велики, а именно: их амплитуды в три или четыре раза больше амплитуды движения главной системы. Если пружины могут быть рассчитаны так, что они противостоят усталости при таких повторяющихся напряжениях, то все обстоит хорошо, но часто выполнить это весьма трудно, а иной раз и невозможно из-за отсутствия места для соответствующих пружин. В этом-то и заключается причина того, что поглотитель Ланчестера, несмотря на его меньшую эффективность по сравнению с пружинными поглотителями, получил большое распространение.

Демпферы и поглотители описанного типа нашли себе применение, главным образом, на линиях электропередачи, в двигателях внутреннего сгорания и на кораблях, о чем будет идти речь в следующем параграфе. Заметим, что в сооружении или в машине «поглотитель» может оказаться осуществленным таким образом, что его очень трудно распознать.

Пример упомянутого сейчас устройства мы имеем в зубчатой передаче, которая, если не принять соответствующих предосторожностей, издавала бы звон наподобие колокольного. Было установлено экспериментально, что этот шум может быть в значительной мере устранен посредством прижатия двух чугунных колец a, a (рисунок 34) к внутренней стороне обода колеса. Но если кольца прижаты слишком слабо или, наоборот, слишком туго, то они не производят никакого амортизирующего действия; однако есть какое-то сред-

нее значение давления колец, при котором эффект получается наиболее полный. Для опыта можно взять два одинаковых зубчатых колеса, из которых одно снабжено упомянутыми кольцами, а другие без них, поставить их вертикально и по ободу каждого из них ударить молотком. Тогда первое колесо издаст очень короткий звук, причем звук этот будет подобен звуку удара о кусок свинца, а второе колесо будет звучать в течение примерно десяти секунд или даже дольше. Очевидно, что чугунные вставки действуют подобно амортизатору Ланчестера.

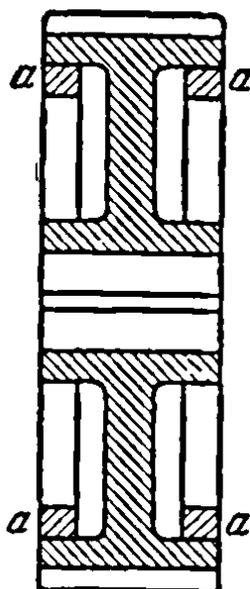


Рисунок 34 – Зубчатое колесо с звукопоглощающими кольцами

2.4 Успокоение качки корабля

Одно из наиболее интересных применений теории, изложенной в предыдущем параграфе, это — предупреждение качки корабля в беспокойном море посредством специальных приспособлений, установленных на борту корабля.

Прежде всего рассмотрим боковую качку самого корабля, снабженного амортизирующим устройством. Пусть корабль плавает на спокойной воде (рисунок 35, а), тогда его вес W и полное давление воды (поддерживающая сила) B являются двумя равными и противоположно направленными силами, проходящими через центр тяжести O . Положим теперь, что корабль слегка отклонен от своего первоначального положения посредством некоторой

внешней пары (рисунок 35,б). Сила тяжести W опять проходит через точку G , но равнодействующая всех давлений уже оказывается несколько смещенной влево. Линия действия этой силы пересекает осевую линию сечения корабля в некоторой точке M , которая известна в технике под названием метацентра. Совершенно очевидно, что положение этой точки определяется геометрической формой корпуса корабля. Расстояние h между точками M и G называется метацентрической высотой.

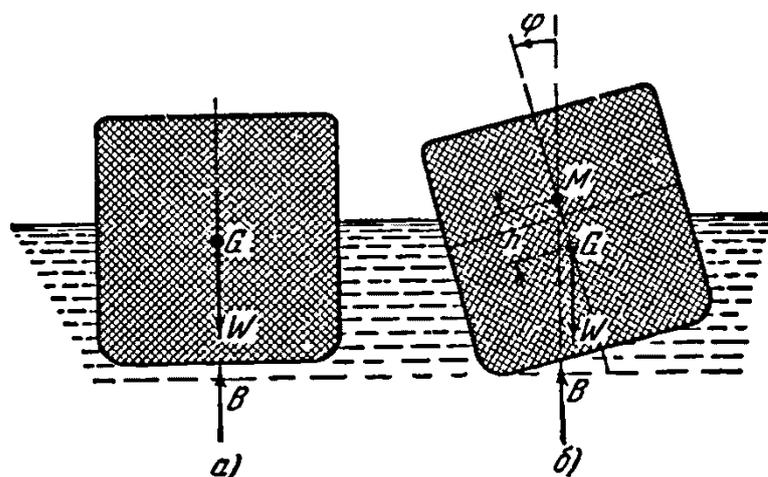


Рисунок 35 – Подъёмная сила и сила веса, действующие на корабль

Определение этой величины по чертежу корабля является весьма важной обязанностью конструктора, так как от нее зависит устойчивость корабля против боковой качки, называемая и кораблестроительной техникой остойчивостью. На рисунке 35,б мы видим, что силы W и B образуют пару, стремящуюся возвратить корабль в его вертикальное положение. Это имеет место тогда, если только метацентр лежит выше центра тяжести или если метацентрическая высота h положительна. В случае же отрицательного значения h пара W, B (рисунок 35,б) будет увеличивать наклон корабля, и равновесие будет уже неустойчивым.

Корабль представляет собою колеблющуюся систему, так как, если его вывести из своего положения равновесия, то он стремится вернуться обратно. Для малых углов φ положение точки M не зависит от φ . Момент восстанавливающей пары равен $-Wh \sin \varphi$ или, для достаточно малых значений угла φ , $-Wh\varphi$. Под действием этой пары корабль будет поворачиваться обратно»

качаясь вокруг некоторой горизонтальной оси. Пусть момент инерции корабля относительно этой оси равен I_s ; тогда дифференциальное уравнение вращательного движения будет

$$I_s \ddot{\varphi} = -Wh\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{Wh}{I_s} \varphi = 0, \quad (2.40)$$

а это уравнение такого же типа, что и уравнение для незатухающих колебаний системы с одной степенью свободы. Следовательно, качка корабля представляет собою гармоническое колебание с собственной частотой

$$\omega_c = \sqrt{\frac{Wh}{I_s}}. \quad (2.41)$$

Представим себе теперь, что корабль находится в волнующемся море. Волны ударяют по корпусу корабля более или менее периодически, вызывая при этом переменную пару, действующую на корабль. Хотя это действие и не отличается правильной закономерностью в смысле его периодичности, все же приближенно мы можем считать, что имеем дело с гармоническим возмущающим моментом $T_0 \sin \omega t$, который и должен быть написан в правой части уравнения (2.40). В том случае, когда частота волны близка к собственной частоте ω_c колебаний корабля при боковой качке, вынужденные колебания могут получиться весьма значительными.

Как показали наблюдения, значения угла φ при волнении достигают 20° .

Уравнения (3.40) и (3.41) показывают нам, что поскольку речь идет о колебательных свойствах, то система, представленная на рисунке 35, эквивалентна системе, изображенной на рисунке 24 верхней части системы. Отсюда мы можем сделать заключение, что делу можно помочь введением поглоти-

теля аналогично показанному на рисунке 24. Это и было сделано в 1902 г. Фрамом, который сконструировал внутри корабля систему, состоящую из двух цистерн (рисунок 36), наполовину наполненных водой и соединенных между собою водяным трубопроводом внизу и воздушным трубопроводом с вентилем *V* наверху.

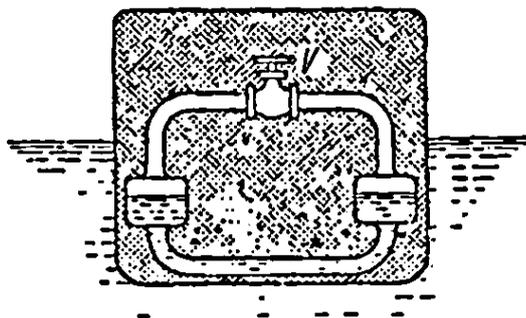


Рисунок 36 – Стабилизирующие цистерны Фрама старого типа

В других конструкциях нижний соединительный трубопровод упразднен, а его роль непосредственно играет океан, как это показано на рисунке 37. Воздушные цистерны занимают примерно две трети длины судна и разделяются вертикальными перегородками на три или большее число отсеков. Эти конструкции в действительности значительно сложнее по сравнению с системой, изображенной на рисунке 28, хотя старая конструкция (рисунок 36), подходит к ней достаточно близко.

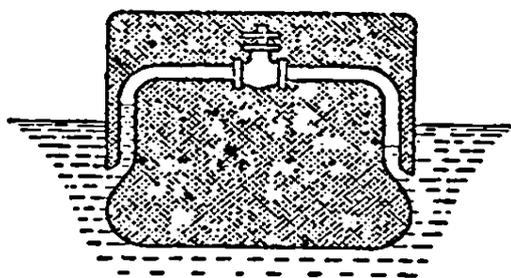
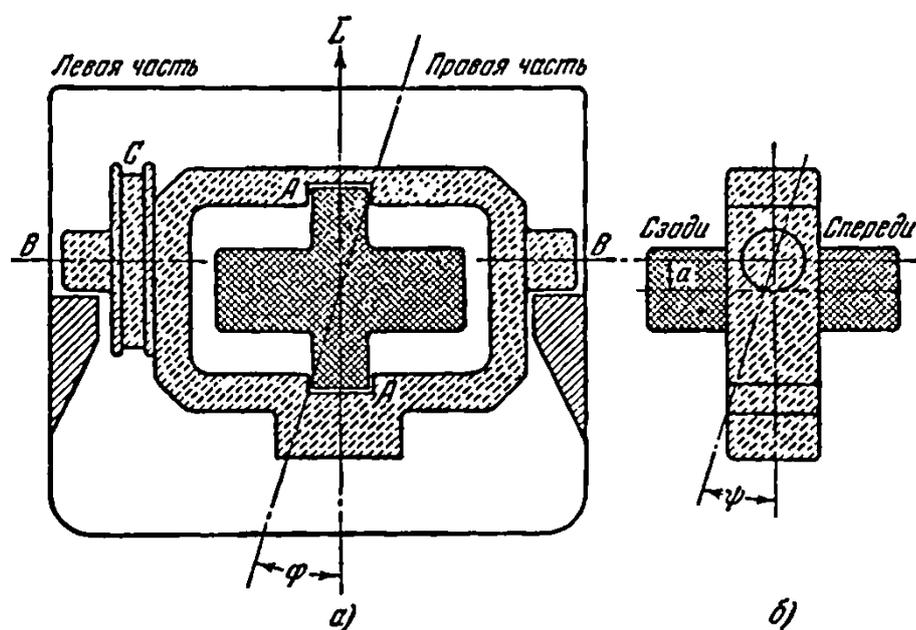


Рисунок 37 – Современная конструкция стабилизирующей установки

Фрама



а) Вид сзади

б) Вид справа

Рисунок 38 – Схема гироскопического стабилизатора Шлика, действующего вследствие рассеяния энергии в тормозном барабане С

Для уяснения действия этого прибора необходимо вспомнить основное свойство гироскопа, а именно, что вектор, изображающий главный момент сил, действующих на гироскоп, геометрически равен скорости конца главного момента количества движения, или, как его еще называют, кинетического момента.

Пусть вращение ротора направлено против часовой стрелки, если смотреть на него сверху; тогда вектор L , изображающий кинетический момент, должен быть направлен вверх. Пусть, далее, корабль поворачивается вокруг продольной оси по часовой стрелке (если смотреть с кормы) с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ в таком случае скорость изменения вектора L , т. е. скорость его конца, представляет собою вектор длины $L\dot{\varphi}$, направленный поперек корабля вправо. Этот вектор и будет главным моментом всех сил, действующих на ротор со стороны рамы. Что же касается итвного момента сил действия ротора на раму, то вектор, его изображающий, равен предыдущему по величине, но направлен противоположно, вследствие чего рама получит угловое уско-

рение в направлении возрастания угла ψ (таким образом, нижняя часть рамы будет стремиться двигаться к корме корабля).

С другой стороны, если рама ротора при своем качании вращается в данный момент времени с положительной угловой скоростью $\dot{\psi}$, то вектор-момент L возрастает в каждую секунду на величину $L\dot{\psi}$ в сторону носа корабля. Этот вектор, определяющий возрастание предыдущего, есть момент, стремящийся вращать ротор по часовой стрелке, а самый корабль против часовой стрелки, если смотреть с кормы на нос.

Таким образом, корабль оказывается связанным с гироскопом и том же смысле, как он бывает связан с успокоителем Фрама, хотя действия той и другой установки носят совершенно различный характер.

Если не вводить затухание в колебательное движение рамы ротора, то действие гироскопа скажется лишь в том, что вместо одной собственной частоты корабля при его качке у него появляются две, уже другие, собственные частоты. Резонанс с морской волной приведет к безграничному увеличению амплитуды φ колебаний корабля. Если же, напротив того, ввести бесконечно большое затухание, то рама ротора фактически оказывается жестко связанной с кораблем. Поэтому боковая качка корабля приводит к возникновению момента, стремящегося дать наклон килю корабля, и, наоборот, связанный с кораблем гироскоп превращает такое вращение вокруг поперечной оси корабля во вращение вокруг его продольной оси. При резонансе морской волны с одной из собственных частот корабля при боковой качке в результате мы опять получаем беспредельное увеличение амплитуды при этой качке. Однако есть какое-то промежуточное значение затухания, когда обе резонансные амплитуды существенно уменьшаются.

Активные стабилизаторы корабля. Движение воды в резервуаре Фрама, так же, как и прецессия гироскопа Шлика, вызывается самой качкой корабля и в обоих случаях задерживается тормозящим устройством. Таким об-

разом, здесь мы не имеем совершенного решения задачи, поскольку регулировка наилучших тормозов различна для различных частот и прочих условий. Подобные системы называются «пассивными системами» в отличие от более современных «активных систем», когда в системе Фрама вода перекачивается из одного резервуара в другой, а в системе Шлика прецессия гироскопа вынуждается. Здесь уже нет тормоза, но зато имеется регулятор или прибор, который чувствует качку корабля и который дает соответствующие сигналы, управляющие насосом в системе Фрама или прецессией гироскопа в системе Шлика, причём так, что фаза реактивного момента всегда оказывается правильной.

Первым из таких активных устройств, достигших практического совершенства, явился гироскопический судовой стабилизатор Сперри, схематически показанный на рисунке 39. Он состоит из главного гироскопа, отличающегося от гироскопа Шлика лишь тем, что его ось BB проходит через центр тяжести и что тормозной барабан C заменен зубчатой дугой, сцепленной с шестерней, насаженной на вал сервомотора постоянного тока D . Помимо главного гироскопа, здесь имеется еще малый направляющий гироскоп (рисунок 39,б, в), который имеет габаритные размеры порядка 13 см и представляет собою почти точную копию главного 1 гироскопа. Единственное отличие заключается в том, что этот гироскоп не имеет зубчатки C , а вместо нее он снабжен двумя электрическими контактами d_1 и d_2 , один из которых расположен впереди, а другой позади рамки ротора.

Действие стабилизатора происходит следующим образом. Когда корабль имеет угловую скорость качки φ , направленную по часовой стрелке (если смотреть с кормы), верхняя часть ротора направляющего гироскопа начинает перемещаться в сторону носа корабля и замыкает контакт d_2 . Это замыкание включает специальное электрическое реле, которое приводит в действие сервомотор D , вращающий раму главного гироскопа вокруг оси BB и в том же направлении, в котором вращается рамка малого гироскопа. Иначе говоря,

верхняя часть главной рамы перемещается в сторону носа корабля. Вследствие этого в главном роторе возникает момент, изменяющий угол φ и направленный по часовой стрелке. Он вызывает, в свою очередь, появление реактивного момента, действующего на раму главного ротора, а, следовательно, и на корабль. Таким образом, главный гироскоп создает вращающий момент, действующий на корабль в направлении, противоположном угловой скорости качки, и тем самым наиболее эффективно противодействующий этой качке. Как только скорость качки корабля обращается в нуль, момент в направляющем гироскопе исчезает, а его ротор возвращается назад к нейтральному положению посредством двух пружин ϵ , показанных на рисунке 39,в.

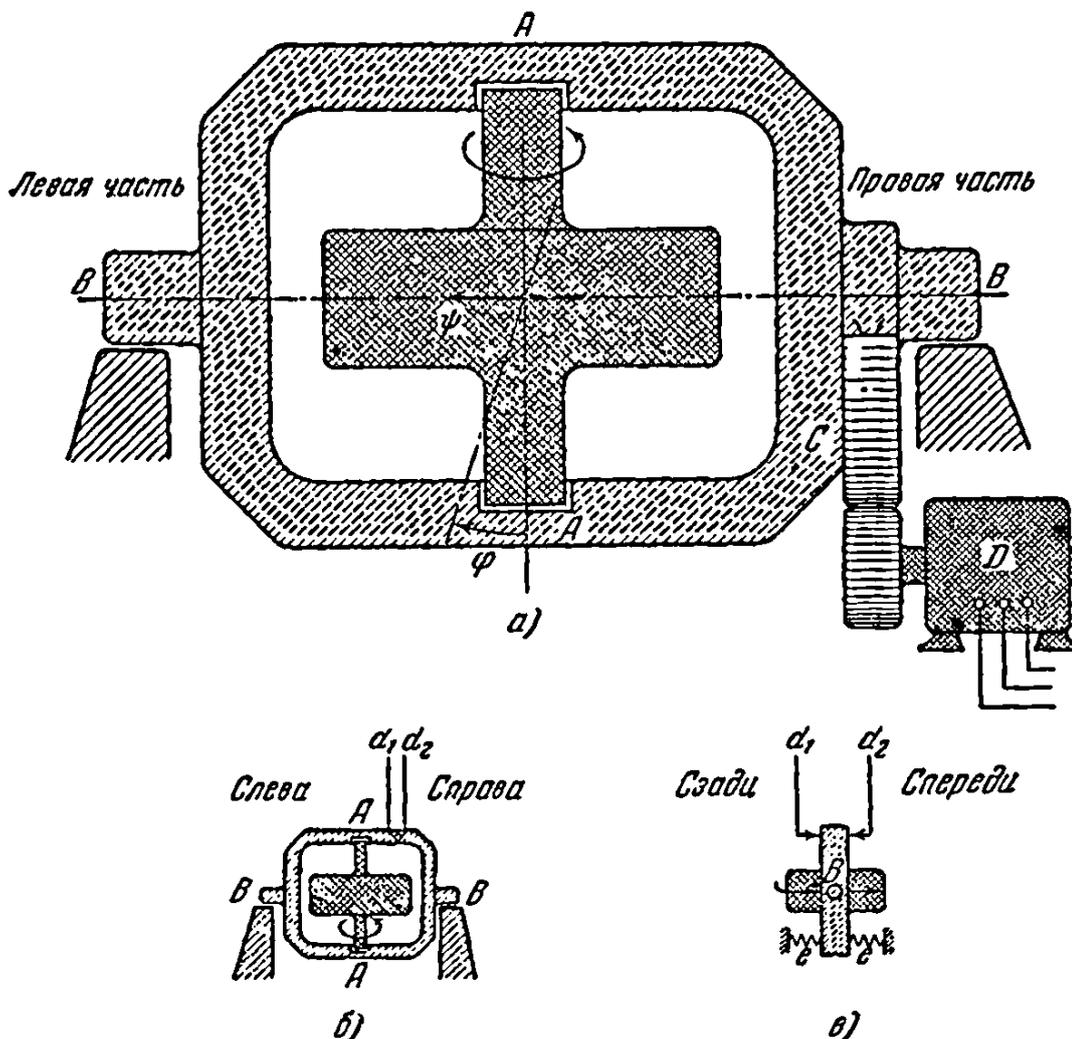


Рисунок 39 – Гироскопическая установка Сперри для успокоения качки корабля

Но лишь только скорость качки получает противоположное направление, малый гироскоп опять выводится из своего равновесного положения и замыкает уже контакт d_1 благодаря чему сервомотор начинает вращаться в противоположном направлении. Таким образом, всегда возникает момент, действующий на корабль противоположно мгновенному вращению его при качке. Так как этот момент направлен против угловой скорости корабля, то тем самым для корабля пропадает наибольшее количество энергии качки.

Направление желаемого прецессионного движения ψ главного гироскопа, как это видно из предыдущего, таково же, что и для свободного вспомогательного гироскопа. Это означает, что мотор D вращает раму главного гироскопа в ту же сторону, в какую она сама стала бы вращаться, если бы она получила возможность свободного вращения в подшипниках B . Однако легко показать, что при такой возможности прецессия главного гироскопа происходила бы весьма быстро и притом ускоренным образом: за ничтожную долю периода качки угол ψ достиг бы 90° , а из этого наложения гироскоп не может быть выведен качкой. Отсюда следует, что мотор D не должен толкать главный гироскоп (за исключением самого начала прецессии), а должен оказывать тормозящее воздействие, понижая скорость прецессии до должной величины. Были даже предложения совсем отказаться от мотора D и вернуться к старой системе Шлика с тормозным барабаном, с той лишь разницей, что нажатие тормоза должно управляться опять вспомогательным гироскопом посредством электричества.

В конструкциях, имеющих место в действительности, ось AA направляющего гироскопа горизонтальна и расположена поперек корабля, тогда как ось его рамы BB вертикальна. Прямая, соединяющая контакты d_1 и d_2 , остается, как и прежде, параллельной продольной оси корабля. Читателю предлагается убедиться, что при указанном расположении действие стабилизатора получается такое же, как и в случае, изображенном на рис. 39.

Гироскопические стабилизаторы Сперри установлены и успешно действуют на многих яхтах. Их применение на итальянском трансатлантическом пароходе «Conte di Savoia» показало, что они весьма эффективно погашают даже сильную качку. Однако во время больших штормов на Атлантическом океане отдельные волны бывают таковы, что они способны раскачивать судно до 17° . В то же время мощность гироскопической установки достаточна для раскачивания корабля лишь на 2° за каждый размах. Отсюда следует, что наибольшие углы отклонения при такой качке мало зависят от того, установлен ли гироскопический стабилизатор или нет. Гироскоп, который в состоянии успокаивать корабль даже при наиболее бурной погоде, должен был бы иметь недопустимо большие размеры и обладать весом около 5% веса всего корабля.

Подобный недостаток присущ также активным цистернам Фрама, в которых вода подается насосом с одного борта судна к другому, причем насос управляется направляющим гироскопом.

Испытания, произведенные с этой системой на истребителе, показали, что она может быть эффективна в широких пределах.

Третье стабилизирующее устройство основано на использовании принципа подъемной силы крыла самолета. Представим себе такое крыло размахом примерно 6 м при выросшем фюзеляже самолета до размеров океанского парохода. Эти крылья расположены ниже ватерлинии. При движении корабля в воде возникает подъемная сила этих крыльев или боковых рулей. Они могут поворачиваться на малый угол вокруг их продольной оси (поперечной по отношению к кораблю), и таким образом может измениться угол атаки, а следовательно, и гидродинамическая подъемная сила. Пусть, например, левый боковой руль имеет большой положительный угол атаки и подъемную силу, направленную вверх, в то время как правый боковой руль имеет отрицательный угол атаки и силу, направленную вниз; тогда возникает гидродинамический вращающий момент, направленный по часовой стрелке, если

смотреть сзади. Если теперь углы атаки непрерывно изменяются сервомотором (под влиянием направляющего гироскопа) таким образом, что упомянутый момент, действующий на корабль, противоположен угловой скорости боковой качки, эта качка гасится. Подобная система была в действии на некоторых британских истребителях во время последней войны. Вес ее мал по сравнению с весом судна, но она имеет тот недостаток, что несколько увеличивает сопротивление движению, а следовательно, требует большего расхода топлива за рейс корабля, что является отрицательным фактором. Указанный недостаток в последнее время устраняется тем, что боковые рули делаются выдвигаемыми, так что они вводятся в действие только в бурную погоду. А в таком случае в настоящее время это есть наилучшее решение вопроса. Необходимо заметить, что цистерны и гироскопические стабилизаторы действуют и при стоящем корабле, что не имеет места для боковых рулей, действие которых зависит от скорости судна.

Пассивный вариант системы боковых рулей, применявшийся и течение нескольких лет, это — боковые кили, представляющие собою примитивную форму боковых рулей, неизбежно связанных с бортами судна (рисунок 40). При движении корабля вперед никакой подъемной силы в этих киях не возникает, поскольку угол атаки равен нулю. Однако, как только корабль попадает в боковую качку, его вращательное движение создает кажущийся угол атаки, вызывающий подъемные силы, которые образуют момент, направленный против угловой скорости качки. Боковые кили совершенно неэффективны в смысле прекращения качки корабля, стоящего на месте, но становятся эффективными при его движении, причем эта эффективность, грубо говоря, пропорциональна квадрату скорости поступательного движения корабля.

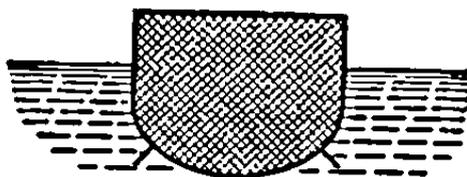


Рисунок 40 – Боковые кили

2.5 Поглотители толчков на автомобилях

Автомобиль обычного типа на рессорах и пневматиках представляет собою чрезвычайно сложную колебательную систему. Здесь мы имеем три различные «массы», а именно: надрессорное строение автомобиля, переднюю ось и заднюю ось; кроме того, здесь имеются восемь различных «пружин»: четыре рессоры и четыре пневматика (рисунок 41). Свободное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы. Так, оно может подпрыгивать, перемещаясь при этом вверх и вниз, раскачиваться в одну и в другую сторону, затем двигаться вперёд и назад; это – три поступательных перемещения. Кроме того, могут иметь место три вращательных перемещения, которые в технике известны под следующими названиями:

- 1) боковая качка, т.е. колебания вокруг продольной оси;
- 2) галопирование или продольная качка, т.е. колебания вокруг поперечной оси;
- 3) виляние, т.е. колебания вокруг вертикальной оси.

Так как автомобиль представляет собою совокупность трех твердых тел, то в действительности он должен иметь 18 степеней свободы. Однако значительная часть таких перемещений не имеет почти никакого значения. Наиболее важными перемещениями являются следующие:

- 1) подпрыгивание надрессорного строения или корпуса автомобиля при достаточно устойчивом положении осей;
- 2) продольная качка корпуса при почти устойчивом положении осей;

3) подпрыгивание каждой оси, вследствие упругости пневматиков, при практически невозмущенном состоянии остова;

4) боковая качка осей, сопровождающаяся незначительным движением корпуса.

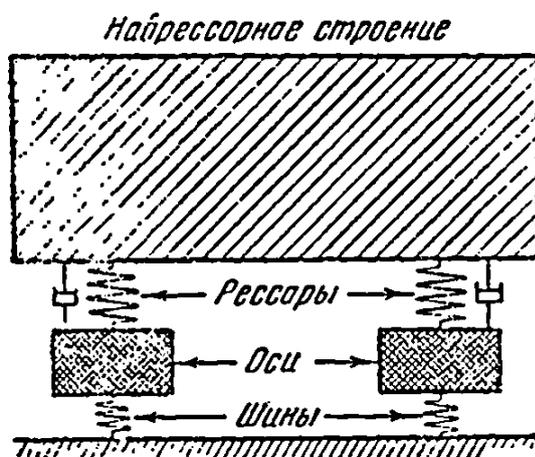


Рисунок 41 – Идеализированная схема обычного автомобиля с передней и задней осями и поглотителями толчков (амортизаторами)

Первые два движения были рассмотрены ранее. Для вполне симметричного автомобиля (которого в действительности нет) двумя главными колебаниями должны быть, во-первых, вертикальное поступательное движение, во-вторых, галопирование, или продольная качка около оси, проходящей через центр тяжести; в действительности же при отсутствии такой симметрии каждое колебательное движение является совокупностью двух главных колебаний. На практике собственные частоты двух первых главных колебаний очень близки друг к другу, оказываясь в современных машинах иногда даже меньше одного колебания в секунду. Колебания третьего и четвертого типов имеют частоты, приблизительно равные между собою, но более высокие, чем предыдущие, относящиеся к наддресорному строению. В старых моделях собственные частоты для осей были более высокими, доходя до 6 или 8 колебаний в секунду. В современных же автомобилях, снабженных баллонами и более тяжелыми осями, по причине установки тормозных барабанов на передних осях, эти частоты уже ниже. Вследствие того, что частота колебаний корпуса и частота колебаний осей столь далеки друг от друга, одно движение

(первое или второе) может существовать независимо от другого (третьего или четвертого). Так, если наддресорное строение перемещается вверх и вниз, совершая одно колебание в секунду, то изменение возмущающей силы в рессорах будет примерно в шесть раз медленнее собственных колебаний массы оси на пневматиках, и, таким образом, ось не будет реагировать на переменную силу.

Подобно этому, когда ось колеблется со скоростью шесть периодов в секунду, рессоры должны испытывать действие переменной силы с такой же самой частотой ее изменения, которая, однако, слишком высока, чтобы оказать заметное действие на корпус автомобиля.

Резонанс с колебаниями каждой из упомянутых частот возникает довольно часто и может быть легко наблюдаем не только в машинах старых моделей, но также и в новейших автомобилях, если у них удалить поглотители толчков (амортизаторы). Явление резонанса при галопировании наддресорной части автомобиля наблюдается при езде со средней скоростью по неровной дороге с волнистым профилем. Так, например, в автомобилях с недостаточно мощными амортизаторами наблюдается обычно сильное галопирование при движении со скоростью около 48 км в час по бетонированной дороге старого типа с плитами, стыки которых чередуются через каждые 12 м. Колебания с другой собственной частотой оказываются в состоянии резонанса на достаточно низких скоростях при движении по дороге, вымощенной булыжником. В этом случае оси могут испытывать столь сильные колебания, что шины отделяются от дороги при каждом полном колебании.

Наихудшие из описанных явлений могут быть устранены посредством установки на рессорах поглотителей толчков, которые служат для гашения колебаний так же, как и успокоители колебаний. Прежде чем приступать к изучению их действия, обратимся сейчас к рассмотрению влияния самих рессор и пневматиков на «качество езды» или «комфортабельность езды».

Пусть автомобиль движется вперед с постоянной скоростью. Спрашивается, какой величиной надо измерять степень комфортабельности? Такой величиной может быть хотя бы вертикальное перемещение кузова или какая-нибудь производная от этого перемещения. Такой характеристикой не должна быть величина амплитуды перемещения, так как переезд через гору, представляющий собою тоже своего рода «колебание» с амплитудой, положим, в 1000 м и частотой в одно колебание в час, может быть весьма приятным. То же самое следует сказать и о вертикальной скорости, поскольку нет никаких препятствий к езде с большой скоростью по круто поднимающейся дороге. Аналогично обстоит и с вертикальным ускорением, так как установившееся ускорение ощущается в виде непрерывно действующей силы, создающей лишь кажущееся изменение величины g , что может быть даже нечувствительно. Однако внезапные толчки производят чрезвычайно неприятное ощущение. Вот по этой причине критерием комфортабельности является производная ускорения d^2y/dx^2 , что мы и будем считать мерою толчка.

На рисунке 42 представлено схематически колесо или ось на пружинящем пневматике. Пусть колесо катится по дороге с синусоидальным профилем. Если автомобиль движется с постоянной скоростью, то точка касания пневматика с дорогой совершает колебания по закону $a_0 \sin \omega t$. Рассмотрим различные колеса одинаковой массы m , катящиеся с одинаковой скоростью по одной и той же дороге $a_0 \sin \omega t$, причем предположим, что эти колеса отличаются друг от друга только величиной k , характеризующей упругие свойства пневматиков, т. е. коэффициентом жесткости. Сила F , передающаяся посредством пневматика от дороги на колесо (ось), должна быть тогда в k раз больше относительного перемещения. Тогда получим

$$F = ky_0 = \frac{m\omega^2 a_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

или, в безразмерной форме,

$$-\frac{F}{m\omega^2 a_0} = \frac{\left(\sqrt{\frac{k}{m\omega^2}}\right)^2}{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{m\omega^2}}\right)^2}. \quad (2.24)$$

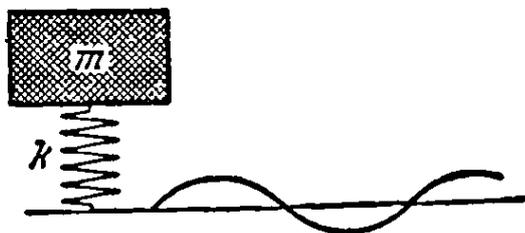


Рисунок 42 – Движение автомобиля по волнистой дороге

Легко видеть, что жесткие пружины (большие значения k , например, для колес, снабженных стальными ободьями) отображаются точками в правой части диаграммы, которые означают передачу больших сил. Передача малых сил имеет место в слабых пружинах (в нашем случае это относится к баллонам), соответственно чему получаем точки около начала координат.

К этим выводам можно прийти также из других соображений. Рассмотрим данную нам «синусоидальную» дорогу или же ровную дорогу с одним единственным холмиком на ней и положим, что мы имеем абсолютно жесткие колеса со стальными ободьями. В таком случае вертикальные ускорения колеса увеличиваются пропорционально квадрату скорости, что может быть показано следующим образом. Пусть сечение холмика на дороге представляется уравнением $y = f(x)$ (рисунок 43). Для всякой повозки, движущейся с постоянной скоростью v , мы имеем $x = vt$. Тогда вертикальная скорость будет

$$\frac{dy}{dt} = v \frac{dy}{d(vt)} = v \frac{dy}{dx}$$

и соответственно вертикальное ускорение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = v \frac{d}{d(vt)} \left(\frac{dy}{dt} \right) = v \frac{d}{dx} \left(v \frac{dy}{dx} \right) = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

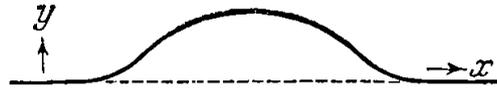


Рисунок 43 – Препятствие на дороге

Так как вторая производная определяется лишь формой холмика и не зависит от скорости, то легко видеть, что вертикальные ускорения действительно возрастают пропорционально квадрату скорости. Если колесо вполне жестко (без пневматика), то силы, действующие как на колесо, так и на дорогу, представляют собою произведение массы колеса на указанное ускорение. Поэтому сила, действующая на дорогу, также увеличивается вместе с квадратом скорости, делая, таким образом, применение резиновых шин абсолютно неизбежным даже для умеренных скоростей, о которых обычно идет речь.

Пневматики предназначены, прежде всего, для предохранения дороги и колес, тогда как рессоры служат для создания «комфортабельности».

Итак, теперь мы можем задаться вопросом: как рассчитать рессоры, чтобы при заданном движении осей получить наибольшую комфортабельность, т. е. наименьшие толчки, определяемые третьей производной d^2y/dt^2 ?

Из дифференциального уравнения движения с одной степенью свободы имеем

$$\ddot{y} = \frac{\omega^2 a_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \sin \omega t,$$

откуда дифференцированием находим

$$\frac{\dot{y}}{\omega^2 a_0} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \cos \omega t. \quad (2.43)$$

Итак, рессоры должны обладать наименьшей возможной жесткостью в вертикальном направлении. Толчки на дороге в большинстве случаев будут происходить быстрее, чем это соответствовало бы собственной частоте коле-

баний надрессорного строения, и поэтому они не дадут более или менее заметного вертикального ускорения. Введение затухания на таких больших частотах дорожных толчков не является желательным. Однако, если случай резонанса не исключен, то тогда затухание очень желательно.

В действительности, установившиеся вынужденные колебания, т. е. колебания в предположении правильного чередования дорожных толчков, встречаются не часто, так как неровности дороги, вообще говоря, распределяются неравномерно. Вследствие этого движение окажется состоящим из какой-то комбинации вынужденных и свободных колебаний, и вот тогда-то затухание весьма желательно, чтобы возможно скорее свести на-нет свободные колебания после прекращения действия соответственной силы, а именно, когда дорога станет опять гладкой.

Поглотители толчков в большинстве автомобилей делаются гидравлическими и действуют по принципу амортизаторов. Каждое относительное движение между осью и корпусом автомобиля приводит в действие поршень, перемещающийся в цилиндре, наполненном маслом. Это масло должно протекать сквозь маленькие отверстия или же проходить через клапан, установленный на пружине так, что он может открываться лишь в том случае, когда имеется разность давлений по обеим сторонам поршня. Таким образом, упомянутому относительному движению, связанному с просадкой рессор, противодействует значительная сила, которая, грубо говоря, пропорциональна скорости относительного движения на рессорах.

Наиболее желательная величина затухания в таких поглотителях зависит, вообще говоря, от условий дороги. Так, при езде по гладкой дороге с пологими выступами и чередующимися с ними впадинами, когда, например, встречается один выступ в секунду, наиболее желательным является, очевидно, критическое затухание. Напротив того, если по дороге встречаются короткие резкие неровности, желательно уже малое затухание.

Некоторые поглотители толчков имеют односторонние клапаны, благодаря чему имеет место различное сопротивление при взаимном удалении и сближении надрессорного строения и осей. Это сопротивление вызывается путем нагнетания масла через различные системы отверстий посредством контрольных клапанов. Обычно при удалении корпуса автомобиля от оси затухание мало, тогда как при сближении возникают большие силы сопротивления, действующие со стороны поглотителей. Нужно, однако, заметить, что предлагаемые теории и доводы в качестве оправдания таких конструкций далеко не всегда убедительны.

2.6 Виброизоляция нежёстких оснований

Подходящим средством защиты основания от вибраций, вызванных помещённой на нём неуравновешенной машиной, является введение мягких пружин между машиной и основанием. Пружины должны быть рассчитаны так, чтобы собственная частота колебаний подвешенной на них машины была в несколько раз, например в три раза, меньше частоты возмущающих колебаний. При получении этого результата предполагалось, что основание жесткое. Это вполне оправдано для многочисленных случаев, когда машина монтируется на основании, непосредственно связанном с грунтом. Однако когда мы имеем дело с большими двигателями Дизеля, установленными в корпусе судна, или с мощным авиационным двигателем, монтированным на крыле, то указанное допущение уже несправедливо, поскольку вес прилегающих частей «основания» значительно меньше веса самой машины.

Для изучения таких случаев в первом приближении мы представим себе основание в виде только массы m_2 (рисунок 44), обозначив при этом массу машины через m_1 .

Дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = P_0 \sin \omega t.$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0.$$

Задаваясь решением

$$x_1 = x_{1m} \sin \omega t,$$

$$x_2 = x_{2m} \sin \omega t,$$

подстановкой находим

$$x_1(-m_1\omega^2 + k) + x_2(-k) = P_0,$$

$$x_1(-k) + x_2(-m_2\omega^2 + k) = 0.$$

Состояние самой машины нас не интересует, а потому мы не заботимся о величине x_1 , мы интересуемся движением x_2 основания. Из второго уравнения получаем

$$x_1 = x_2 \left(1 - \frac{m_2\omega^2}{k} \right)$$

и подставляем в первое уравнение, после чего имеем

$$x_2 = \frac{P_0 k}{m_1 m_2 \omega^4 - k(m_1 + m_2)\omega^2}.$$

Это выражение может быть написано также в других формах. Подходящая форма для нашего случая такова:

$$\omega_c^2 = \frac{k}{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}. \quad (2.44)$$

Сила, передаваемая основанию, может быть найдена очень просто, если заметить, что это есть сила инерции самого основания $m_2\omega^2 x_2$, иначе говоря, передаваемая сила равна

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{P_0}{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}. \quad (2.45)$$

Уравнение (2.45) может быть представлено простой резонансной диаграммой. Если предполагать, что основание жёсткое то частота колебаний будет определяться по формуле

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Здесь же собственная частота определяется из уравнения (2.44). Для всякого рода оснований защитные пружины должны быть рассчитаны так, чтобы сделать собственную частоту равной примерно одной трети возмущающей частоты. Согласно этому утверждению нет как будто разницы между легким и тяжелым основанием, что может ввести в заблуждение.

Возьмем ют случай, когда машина в 10 раз тяжелее основания. Тогда из уравнения (2.44) имеем:

$$\omega_c^2 = \frac{k}{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} = \frac{k}{m_1} \frac{m_1 + m_2}{m_2} = \frac{k}{m_1} \frac{10 + 1}{1} = 11 \frac{k}{m_1}.$$

Собственная частота при легком основании оказывается в $\sqrt{11}$ раз больше, чем при очень тяжелом, а поэтому для получения той же степени защиты необходимо соответствующие пружины сделать в 11 раз мягче.

Допустим, что возмущающая частота машины примерно равна 1200 колеб/мин. Тогда для массивного основания следует взять защитные пружины с собственной частотой около 400 колеб/мин, что равносильно статической осадке порядка 6 мм. Если ту же машину установить на корабле с легким основанием при $m_2/m_1 = 0,1$, то статическая осадка пружин должна быть в 11 раз больше, т.е. должна равняться приблизительно 6,5 см.

Прежде всего, это вообще очень трудно сделать, и, кроме того, такая машина на корабле, подвергающемся бортовой и килевой качке, была бы совершенно невозможна. Отсюда видно, что защита корпуса судна от вибраций, обусловленных действием машин, есть очень трудная задача. Вибрации

корпуса излучают подводный шум, который нарушает спокойствие рыб, а иногда бывает нежелательным и по другим причинам.

Идеализация основания или корпуса посредством массы достаточно груба. То место корпуса, где прикреплена машина, действует отчасти, как пружина, отчасти, как масса, и отчасти, как амортизатор, поскольку радиация вибрации оказывает демпфирующее воздействие. Пытаться определить по чертежу соответствующие значения жесткости пружины, массы и демпфирования является безнадежной задачей; но в то же время для построенного корабля или самолета можно все это найти экспериментально без особых трудностей. Для этой цели мы связываем с интересующим нас местом вибратор, создающий гармоническую возмущающую силу, частоту которой мы можем постепенно менять. Затем измеряем силу, амплитуду колебаний и фазовый каждой частоты. Результат может быть представлен в виде отношения Z — механического импеданса, являющегося функцией циклической частоты

$$Z(\omega) = \frac{\text{амплитуда силы}}{\text{амплитуда смещения}}. \quad (2.46)$$

В качестве примера рассмотрим простую пружину, нижний конец которой закреплен неподвижно, а верхний конец возбуждается вибратором. Пусть перемещение верхнего конца есть $a \sin \omega t$. Тогда сила равна $ka \sin \omega t$, и, следовательно, для пружины механический импеданс $Z = k$ независимо от частоты. В качестве второго примера возьмем массу как таковую. Если вибратор действует на нее, то движение определяется выражением $a \sin \omega t$, и сила равна $ma\omega^2 \sin \omega t$, вследствие чего $Z = -m\omega^2$.

Третий пример — демпфер, цилиндр «которого прикреплен к неподвижному основанию, а поршень приводится в действие. Если движение поршня происходит по закону $a \sin \omega t$, то сила действует по закону $ca\omega \cos \omega t$, отличаясь по фазе на 90° от перемещения. Обращаясь к комплексной интерпретации, мы можем сказать, что перемещение есть a , а сила — $ica\omega$. Тогда $Z = ic\omega$, т. е. мнимая величина. Если мы знаем систему, то мы

можем вычислить ее импеданс, но все же мы не знаем свойств интересующей нас точки корабля. Тем не менее мы можем измерить импеданс в этой точке.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из машины m_1 , к которой приложена возмущающая сила $P_0 \sin \omega t$ и которая связана через посредство пружины k с основанием, имеющим импеданс $Z(\omega)$. Таким образом, масса m_2 на рисунке 44 заменена более общим видом основания, характеризуемым функцией $Z(\omega)$, являющейся вообще комплексной величиной. Дифференциальные уравнения имеют вид:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = P_0 \sin \omega t,$$

$$k(x_1 - x_2) = x_2 Z.$$

Предполагая, что движение есть гармоническое колебание с частотой ω , мы должны иметь для перемещений x_1 и x_2 комплексные значения, если Z есть комплексная или чисто мнимая величина. Итак,

$$-m_1 \omega^2 x_1 + k(x_1 - x_2) = P_0 \sin \omega t,$$

$$k(x_1 - x_2) = x_2 Z,$$

или после преобразования

$$x_1(-m_1 \omega^2 + k) + x_2(-k) = P_0,$$

$$x_1(-k) + x_2(k + Z) = 0.$$

Разрешая второе уравнение относительно x_1 :

$$x_1 = x_2 \left(1 + \frac{Z}{k} \right).$$

Подставляем найденное значение в первое уравнение, которое разрешаем относительно x_2 :

$$x_2 = \frac{P_0}{Z \left(1 - \frac{m_1 \omega^2}{k}\right) - m_1 \omega^2}. \quad (2.47)$$

Сила, передаваемая грунту, есть Zx_2 , в то время как возмущающая сила, действующая на машину, определяется амплитудой P_0 . Таким образом, отношение этих сил есть коэффициент передачи равный

$$\frac{Z}{Z \left(1 - \frac{m_1 \omega^2}{k}\right) - m_1 \omega^2}. \quad (2.48)$$

Эта общая формула содержит все возможные характеристики основания. В качестве первого примера возьмем рисунок 44, где $Z = -m_1 \omega^2$. Подстановка этой величины в уравнение (2.48) приводит к результату, уже полученному ранее для этого случая. Во втором примере пусть основание состоит из простой пружины K , так что машина опирается на основание через посредство пружин k и K , включенных последовательно или же через посредство эквивалентной пружины с коэффициентом жесткости $kK/(k + K)$. Подставляя $Z = K$ в равенство (2.48), имеем:

$$\begin{aligned} \text{коэффициент передачи} &= \frac{K}{K - m_1 \omega^2 \left(1 + \frac{K}{k}\right)} = \\ &= \frac{1}{1 - \omega^2 \frac{m_1(k + K)}{kK}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}. \end{aligned}$$

Для случая демпфера c , включённого вместе с пружиной k (рисунок 45), расчёт производится аналогично. В результате получаем:

$$\text{коэффициент передачи} = \frac{Z}{Z \left(1 - \frac{m_1 \omega^2}{k + i\omega c}\right) - m_1 \omega^2}. \quad (2.49)$$

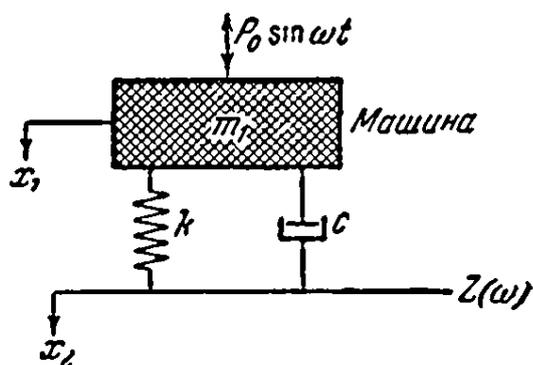


Рисунок 45 – Двигатель, установленный на основание с импедансом Z посредством пружины с демпфером

В реальных случаях, когда величина Z , характеризующая основание, известна из эксперимента, эта формула может быть использована для изучения поведения системы с различными защитными элементами k и c и, таким образом, может быть найдено наилучшее компромиссное решение.

3 Системы с произвольным числом степеней свободы

3.1 Свободные колебания без затухания

Когда число степеней свободы системы становится больше двух, ничего принципиально нового в задаче мы не имеем. Мы при этом получаем лишь столько типов колебательных движений, сколько в системе имеется степеней свободы. Общее изучение метода мы дадим в нескольких ближайших параграфах для систем с тремя степенями свободы; для четырех и большего числа степеней свободы рассуждения совершенно аналогичны.

Рассмотрим, например, рисунок 45, представляющий невесомую балку на двух жестких опорах, несущую массы m_1 , m_2 и m_3 . Если вертикальные прогибы балки в точках прикрепления масс, направленные вверх, обозначить соответственно через x_1 , x_2 и x_3 , то первое из дифференциальных уравнений движения может быть получено, если приравнять произведение $m_1 \ddot{x}_1$ величине силы упругости, действующей на первую массу. Эта сила представляет собою разность двух перерезывающих сил, действующих на балку слева и справа от массы m_1 и является величиной, зависящей от всех трех прогибов

x_1 , x_2 и x_3 , а потому сложной по своей структуре и весьма неудобной для вычисления.

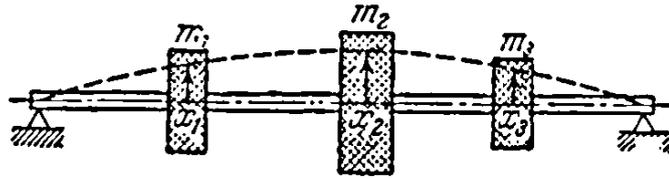


Рисунок 45 – Круглый вал с тремя дисками, установленный на жёстких подшипниках

В данном частном случае задачи более естественным является описание упругого состояния при помощи так называемых коэффициентов влияния. Коэффициент влияния α_{12} определяется как «прогиб под грузом x_1 , вызванный силой, равной 1 кГ, приложенной в том месте, где помещен груз x_2 ». Мы имеем, таким образом, три коэффициента прямого влияния α_{11} , α_{22} , α_{33} соответствующих единичным силам и прогибам, измеряемым в точках приложения этих же сил, и шесть коэффициентов сопряженного влияния α_{12} , α_{13} , α_{31} , α_{23} , α_{32} соответствующих различным точкам приложения единичных сил и измеряемых прогибов. По теореме Максвелла о взаимности перемещений

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}.$$

Это можно выразить словами: деформация упругой системы в какой-либо точке, вызванная единичной нагрузкой, помещенной в другой ее точке, равна деформации во второй точке под действием единичной нагрузки, помещенной в первой точке. Коэффициенты влияния для какой-либо упругой системы вычисляются по методам, излагаемым в курсах сопротивления материалов.

Обратимся к составлению уравнений движения. В точках с абсциссами x_1 , x_2 и x_3 (рисунок 45) массы имеют ускорения \ddot{x}_1 , \ddot{x}_2 и \ddot{x}_3 и, следовательно, испытывают действие сил $m_1\ddot{x}_1$, $m_2\ddot{x}_2$ и $m_3\ddot{x}_3$. Эти силы представляют собою действие балки на массы. По закону равенства действия и противодействия массы действуют на балку с силами $-m_1\ddot{x}_1$, $-m_2\ddot{x}_2$ и $-m_3\ddot{x}_3$, являющимися

силами инерции. Прогиб под действием этих сил в месте прикрепления первой массы равен

$$x_1 = -\alpha_{11}m_1\ddot{x}_1 - \alpha_{12}m_2\ddot{x}_2 - \alpha_{13}m_3\ddot{x}_3. \quad (3.1a)$$

Аналогично имеем для второй и третьей массы:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -\alpha_{21}m_1\ddot{x}_1 - \alpha_{22}m_2\ddot{x}_2 - \alpha_{23}m_3\ddot{x}_3, \\ x_3 &= -\alpha_{31}m_1\ddot{x}_1 - \alpha_{32}m_2\ddot{x}_2 - \alpha_{33}m_3\ddot{x}_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.1b)$$

Хотя эти уравнения и не являются простым следствием второго закона Ньютона для каждой массы, тем не менее взятые вместе они определяют неизвестное движение системы посредством координат x_1 , x_2 и x_3 .

Решение написанных дифференциальных уравнений мы можем свести к решению алгебраических уравнений, для чего следует только положить

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin \omega t, \\ x_2 &= a_2 \sin \omega t, \\ x_3 &= a_3 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

После подстановки получим:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \alpha_{11}m_1\omega^2 a_1 + \alpha_{12}m_2\omega^2 a_2 + \alpha_{13}m_3\omega^2 a_3, \\ a_2 &= \alpha_{21}m_1\omega^2 a_1 + \alpha_{22}m_2\omega^2 a_2 + \alpha_{23}m_3\omega^2 a_3, \\ a_3 &= \alpha_{31}m_1\omega^2 a_1 + \alpha_{32}m_2\omega^2 a_2 + \alpha_{33}m_3\omega^2 a_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Эти уравнения однородны относительно a_1 , a_2 , a_3 , что можно легче видеть после соответственной перегруппировки членов и деления обеих частей каждого уравнения на ω^2 :

$$\left. \begin{aligned} \left(m_1\alpha_{11} - \frac{1}{\omega^2}\right)a_1 + m_2\alpha_{12}a_2 + m_3\alpha_{13}a_3 &= 0, \\ m_1\alpha_{21}a_1 + \left(m_2\alpha_{22} - \frac{1}{\omega^2}\right)a_2 + m_3\alpha_{23}a_3 &= 0, \\ m_1\alpha_{31}a_1 + m_2\alpha_{32}a_2 + \left(m_3\alpha_{33} - \frac{1}{\omega^2}\right)a_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Если такие однородные уравнения разделить, например, на a_1 то мы получим систему трех уравнений с двумя неизвестными a_2/a_1 и a_3/a_1 . Разрешив хотя бы первые два из уравнений (3.4) относительно этих неизвестных и подставляя найденные решения в третье, мы, вообще говоря, ему не удовлетворим, т. е. получим в левой части выражение, отличное от нуля. Решение системы (3.4) может существовать лишь в том случае, когда имеет место определенное соотношение между коэффициентами при неизвестных a_1, a_2, a_3 . Из теории определителей известно, что это соотношение имеет вид

$$\begin{vmatrix} m_1\alpha_{11} - \frac{1}{\omega^2} & m_2\alpha_{12} & m_3\alpha_{13} \\ m_1\alpha_{21} & m_2\alpha_{22} - \frac{1}{\omega^2} & m_3\alpha_{23} \\ m_1\alpha_{31} & m_2\alpha_{32} & m_3\alpha_{33} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.5)$$

Разлагая написанный определитель, получаем кубическое уравнение относительно $1/\omega^2$, известное под названием «уравнения частот», которое имеет три корня, определяющих три собственные частоты. Каждому из этих решений соответствует система значений a_2/a_1 и a_3/a_1 , которые определяют конфигурацию системы при колебании. Таким образом, мы имеем три вида собственных колебаний.

Выполним подробно вычисления для простейшего случая, который получим, полагая все массы равными между собой, т. е. полагая $m_1 = m_2 = m_3 = m$ и заменяя балку струною длины $4l$ с натяжением T (рисунок 46,а). Груз в 1 кг , помещенный в положение l , вызывает деформацию, показанную на рисунке 46,б. Если натяжение струны равно T , то вертикальная составляющая этого натяжения, действующего слева от m_1 равна $(\delta/l)T$, тогда как справа от m_1 она равна $(\delta/3l)T$. Так как сумма этих вертикальных составляющих должна быть равна 1 кг , то $\delta = (3/4)l/T$. Это и есть деформация в точке l под действием груза в 1 кг , приложенного также в точке l , иначе говоря, $\alpha_{11} = (3/4)l/T$.

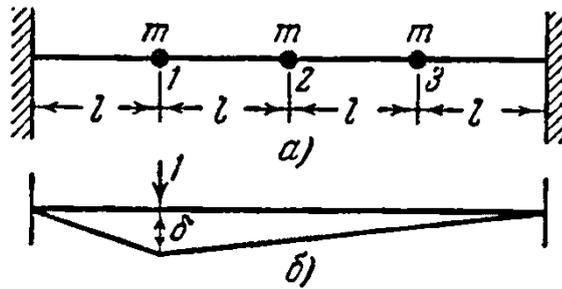


Рисунок 46 –Иллюстрация определения коэффициентов влияния для струны с тремя массами

Деформации в точках 2 и 3 прикрепления двух других масс под действием того же самого груза могут быть также легко найдены из рисунка 46,б. Для них получаем такие значения:

$$\alpha_{21} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{T}$$

$$\alpha_{31} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{T} = \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{T}$$

Остальные коэффициенты влияния находятся совершенно таким же образом.

Итак, окончательно имеем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{22} &= \frac{l}{T}, \\ \alpha_{11} &= \alpha_{33} = \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{T} \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{23} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{T}, \\ \alpha_{31} &= \alpha_{13} = \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{T}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Между прочим, среди написанных соотношений мы можем усмотреть также соотношение, выражающее теорему Максвелла о взаимности перемещений.

Уравнения движения мы получим, подставляя найденные выше значения коэффициентов влияния в уравнения (3.1). Так как почти все члены этих уравнений оказываются пропорциональными дроби $m l/T$, то мы можем раз-

делить на нее эти уравнения и при этом ввести для сокращения новую величину, называемую функцией частоты и имеющую вид:

$$\frac{T}{ml\omega^2} = F. \quad (3.7)$$

Тогда уравнения (3.4) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3}{4} - F\right) a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_3 &= 0, \\ \frac{1}{2} a_1 + (1 - F) a_2 + \frac{1}{2} a_3 &= 0, \\ \frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \left(\frac{3}{4} - F\right) a_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Делим первое из этих уравнений на a_1 , второе на a_2 и вычитая почленно одно из другого, находим

$$\frac{a_2}{a_1} = 2 - \frac{1}{F}. \quad (3.9)$$

Подставляя эту величину в первое из уравнений (3.8) и разрешая его относительно a_3/a_1 , получаем

$$\frac{a_3}{a_1} = -7 + 4F + \frac{2}{F}. \quad (3.10)$$

Наконец, подстановка обоих найденных отношений в третье уравнение (3.8) приводит к следующему уравнению относительно F (уравнение частот):

$$F^3 - \frac{5}{2}F^2 + \frac{3}{2}F - \frac{1}{4} = 0. \quad (3.11)$$

Конечно, это же самое уравнение можно было бы получить, развернув определитель в уравнении (3.5). Очевидно, что уравнение (3.11) имеет три корня для F . Заметим, что ни один из этих корней не может быть отрицательным, так как при любом отрицательном значении F все члены слева отрицательны, а поэтому их сумма не может быть равна нулю. Как видно из формулы (3.7) отрицательное значение F соответствует мнимому значению

ω . Отсюда очевидно, что наша система с тремя степенями свободы должна иметь три действительные собственные частоты. Это верно не только для изучаемого нами частного случая. Можно вообще показать, что всякая колеблющаяся система с n степенями свободы без затухания или с затуханием, пропорциональным первой степени скорости, имеет n действительных собственных частот т. е. корни уравнений частот таких, как (2.7), (3.5) или (3.11), всегда действительны и положительны.

Кубическое уравнение (3.11) решается путем подбора значений F . Так, мы видим, что $F = 0$ делает его левую часть равной $-(1/4)$, тогда как $F = 2$ делает ее равной $+(3/4)$. Очевидно, что один из корней этого уравнения должен заключаться, во всяком случае, между 0 и 2. Несколькими такими пробами мы убеждаемся, что $F = 1/2$ есть корень уравнения (3.11), которое теперь может быть написано в виде

$$\left(F - \frac{1}{2}\right)\left(F^2 - 2F + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

откуда следует, что три корня этого уравнения таковы:

$$F_2 = \frac{1}{2}, \quad F_{1,3} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Пользуясь равенствами (3.7), (3.9) и (3.10), мы можем сделать окончательную сводку результатов в следующем виде:

$$F_1 = 1.707; \quad \omega_1^2 = 0,59 \frac{T}{ml}; \quad \frac{a_2}{a_1} = 1,41; \quad \frac{a_3}{a_1} = 1.$$

$$F_2 = 0,500; \quad \omega_2^2 = 2 \frac{T}{ml}; \quad \frac{a_2}{a_1} = 0; \quad \frac{a_3}{a_1} = -1.$$

$$F_3 = 0,293; \quad \omega_3^2 = 3,41 \frac{T}{ml}; \quad \frac{a_2}{a_1} = -1,41; \quad \frac{a_3}{a_1} = 1.$$

Эти соотношения определяют собою различные виды колебаний системы, или так называемые «главные или нормальные формы колебания», показанные на рисунке 47. Итак, имеют место только три конфигурации, в которых система может быть в равновесии под действием сил, пропорциональных перемещениям x (такowymi являются силы инерции). Второе главное колебание особенно интересно, потому что средняя масса совершенно не движется. Если бы это обстоятельство было известно заранее, то частоту можно было бы найти очень просто, рассмотрев только одну, например левую, часть системы, которая была бы системой с одной степенью свободы с коэффициентом жесткости $k = 2T/l$.

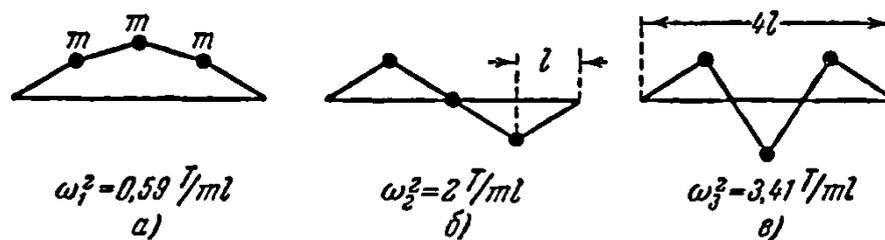


Рисунок 47 – Три главных формы колебаний струны с тремя степенями и равноудалёнными массами

3.2 Вынужденные колебания без затухания

Положим, что на первую массу в предыдущем примере действует переменная сила $P_0 \sin \omega t$ (рисунок 48,а). Эта сила $P_0 \sin \omega t$ сама по себе должны вызвать статические деформации в точках 1, 2, 3, величины которых соответственно равны $\alpha_{11} P_0 \sin \omega t$, $\alpha_{21} P_0 \sin \omega t$, $\alpha_{31} P_0 \sin \omega t$. Уравнения вынужденных колебаний мы получим из уравнений (3.1), прибавляя к правым частям этих уравнений только что написанные величины. Предполагая, что решения имеют вид (3.2), мы приведём эти уравнения движения к следующей алгебраической форме:

$$\left. \begin{aligned} \left(m_1 \alpha_{11} - \frac{1}{\omega^2}\right) a_1 + m_2 \alpha_{12} a_2 + m_3 \alpha_{13} a_3 &= -\alpha_{11} \frac{P_0}{\omega^2}, \\ m_1 \alpha_{21} a_1 + \left(m_2 \alpha_{22} - \frac{1}{\omega^2}\right) a_2 + m_3 \alpha_{23} a_3 &= -\alpha_{21} \frac{P_0}{\omega^2}, \\ m_1 \alpha_{31} a_1 + m_2 \alpha_{32} a_2 + \left(m_3 \alpha_{33} - \frac{1}{\omega^2}\right) a_3 &= -\alpha_{31} \frac{P_0}{\omega^2}. \end{aligned} \right\}$$

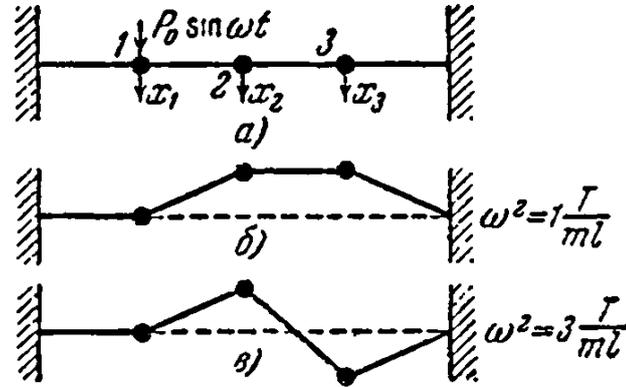


Рисунок 48 – Вынужденные колебания струны с тремя массами

С помощью коэффициентов влияния (3.6) и функции частоты F , определяемой равенством (3.7), мы можем эти уравнения переписать ещё в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3}{4} - F\right) a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_3 &= -\frac{3}{4} \frac{P_0}{m\omega^2}, \\ \frac{1}{2} a_1 + (1 - F) a_2 + \frac{1}{2} a_3 &= -\frac{1}{2} \frac{P_0}{m\omega^2}, \\ \frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \left(\frac{3}{4} - F\right) a_3 &= -\frac{1}{4} \frac{P_0}{m\omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Полученные уравнения уже не являются однородными относительно a_1 , a_2 , a_3 , как это было с соответствующими им уравнениями (3.8) для свободных колебаний. В самом деле, здесь мы имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными, которая решается по обычным правилам алгебры. В наших вычислениях выражение, стоящее в левой части кубического уравнения (3.11), появляется в знаменателях, так что оно сможет быть разложено на три линейных сомножителя, в результате чего имеем

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{P_0}{m\omega^2} \frac{\frac{3}{4}F^2 - F + \frac{1}{4}}{(F - 1,707)(F - 0,500)(F - 0,293)}, \\ a_2 &= \frac{P_0}{m\omega^2} \frac{\frac{1}{2}F \left(F - \frac{1}{2}\right)}{(F - 1,707)(F - 0,500)(F - 0,293)}, \\ a_3 &= \frac{P_0}{m\omega^2} \frac{\frac{1}{4}F^2}{(F - 1,707)(F - 0,500)(F - 0,293)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Предварительно заметим, что для этой цели величина F , будучи пропорциональна величине $1/\omega^2$, не является подходящей переменной. В качестве ординаты y для наших диаграмм мы возьмем

$$y_{1,2,3} = \frac{a_{1,2,3}}{\frac{P_0 l}{T}}.$$

Так как знаменатель $P_0 l/T$ представляет собою «статическую деформацию» середины струны, если бы в ней была помещены постоянная нагрузка P_0 при коэффициенте влияния

$$\alpha_{22} = \frac{l}{T},$$

то величина y является «безразмерной амплитудой». За абсциссу примем

$$x = \frac{1}{F} = \frac{\omega^2}{\frac{T}{ml}}.$$

В этом выражении знаменатель может быть интерпретирован как ω^2 , т.е. как квадрат частоты массы m , подвешенной на пружине с коэффициентов жёсткости T/l , вследствие чего \sqrt{x} есть «безразмерная частота». С помощью этих двух переменных уравнения (3.13) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x - 0,59)(x - 2)(x - 3,41)}, \\ y_2 &= \frac{x - 2}{(x - 0,59)(x - 2)(x - 3,41)}, \\ y_3 &= \frac{-1}{(x - 0,59)(x - 2)(x - 3,41)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Соответствующие построения выполнены на рисунках 49, 50 и 51. Предлагается убедиться, что в статическом случае при $x = 0$ все три выражения (3.14) дают собственно статическую деформацию. Интересно отметить одно свойство уравнений (3.14), а именно то, что второе из них может быть сокращено на множитель $(x - 2)$. Этот факт легко интерпретируется физически: дело в том, что средняя масса не должна иметь бесконечных размахов при втором резонансе, тогда как первая и третья массы обе должны иметь безгранично возрастающие амплитуды. Чтобы убедиться в этом, достаточно только взглянуть на второй тип колебания, который изображен на рисунке 47.

В то время как числители в выражениях для y_2 и y_3 не представляют никаких особенностей, мы видим, что числитель для y_1 является функцией второй степени, а поэтому он должен обращаться в нуль при двух частотах, а именно при частотах, соответствующих значениям $x = 1$ и $x = 3$ (рисунок 49). При таких значениях частот первая масса, находящаяся под действием возмущающей силы, остается в покое, тогда как две другие массы колеблются. Таким образом, мы имеем здесь перед собою обобщение динамического поглотителя колебаний. Но если первая масса не движется, то мы можем рассматривать ее как закрепленную, и тогда система приводится к одной из систем с двумя степенями свободы (рисунок 48). Такая система имеет две собственные частоты, которые легко могут быть вычислены, причем они оказываются соответствующими абсциссам $x = 1$ и $x = 3$.

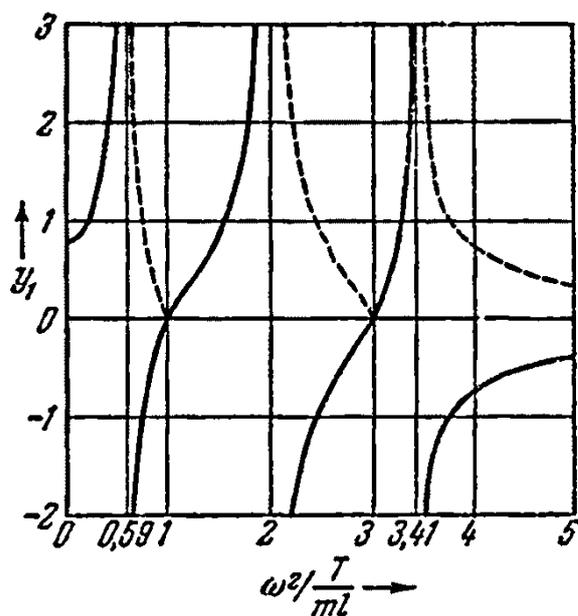


Рисунок 49

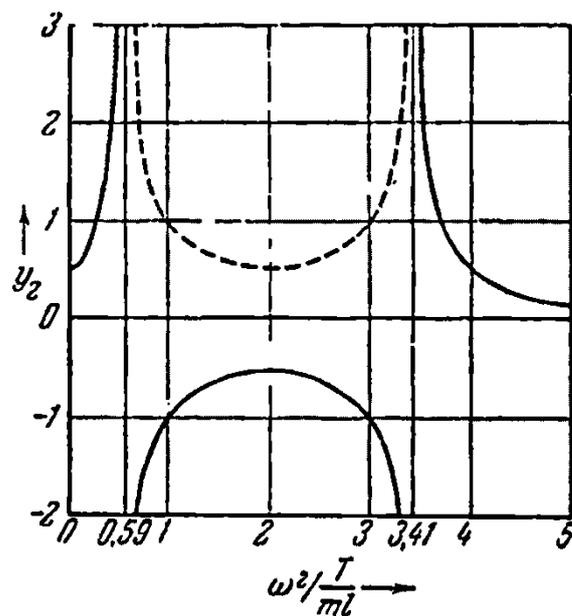


Рисунок 50

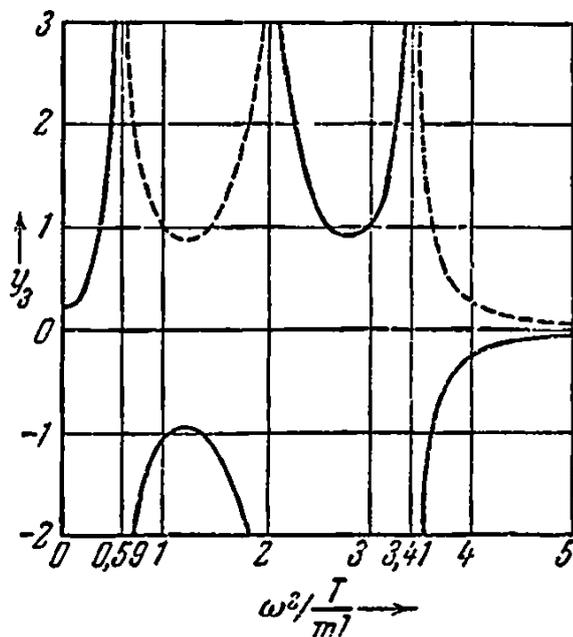


Рисунок 51

Действие системы может тогда представляться следующим образом. При двух полученных выше резонансных частотах система с двумя степенями свободы может быть выведена из состояния покоя бесконечно малой возмущающей силой, и при этом могут быть получены колебания конечной амплитуды; в нашем случае это может произойти вследствие бесконечно малого колебательного движения массы l . На массу l (рисунок 48,б или 48, в) действуют две переменные силы, одна из которых является вертикальной со-

ставляющей натяжения струны справа от массы, а другая есть внешняя сила $P_0 \sin \omega t$. Эти две силы должны быть все время равны друг другу по величине и противоположны по направлению, поскольку никакого движения массы нет.

С целью обобщения мы можем попытаться высказать такое положение: если переменная сила действует на массу в системе с n степенями свободы, то существует $n - 1$ частот, при которых эта масса остается в покое, тогда как остальная часть системы колеблется. Однако необходимо быть осторожным в таком слишком смелом обобщении. В самом деле, мы можем сейчас же указать пример, который будет являться исключением из этого правила. Это будет тот случай, когда мы действуем возбуждающим образом на среднюю массу нашей системы. Так как эта масса расположена в узле при втором резонансе (рисунок 47), то сила не может совершать работы при этой частоте, а поэтому не могут получиться и бесконечные амплитуды. В данном случае «резонансная частота» оказывается совпадающей с «частотой поглотителя колебаний». Если мы хотим наметить форму трех резонансных кривых при возбуждении средней массы, то необходимо иметь в виду, что система симметрична, а поэтому диаграммы для y_1 и для y_3 должны, быть одинаковыми. Не производя подробных расчетов, мы все же можем заключить, что в общих чертах результат должен получиться такой, какой представлен на рисунке 52.

При значениях x , меньших 2, все три массы находятся в одной фазе, подобно тому, как это изображено на рисунке 47,а; при больших значениях частоты они оказываются в противоположных фазах, как на рисунке 47,в. Для второй же собственной частоты расположение, вследствие симметрии, должно быть в соответствии с рисунке 53. Амплитуда колебаний масс 1 и 3 должна быть определена посредством возмущающей силы, причем сумма вертикальных составляющих натяжений двух участков струны слева и справа от m_2 должна быть равна по величине и противоположна по направлению возмущающей силе.

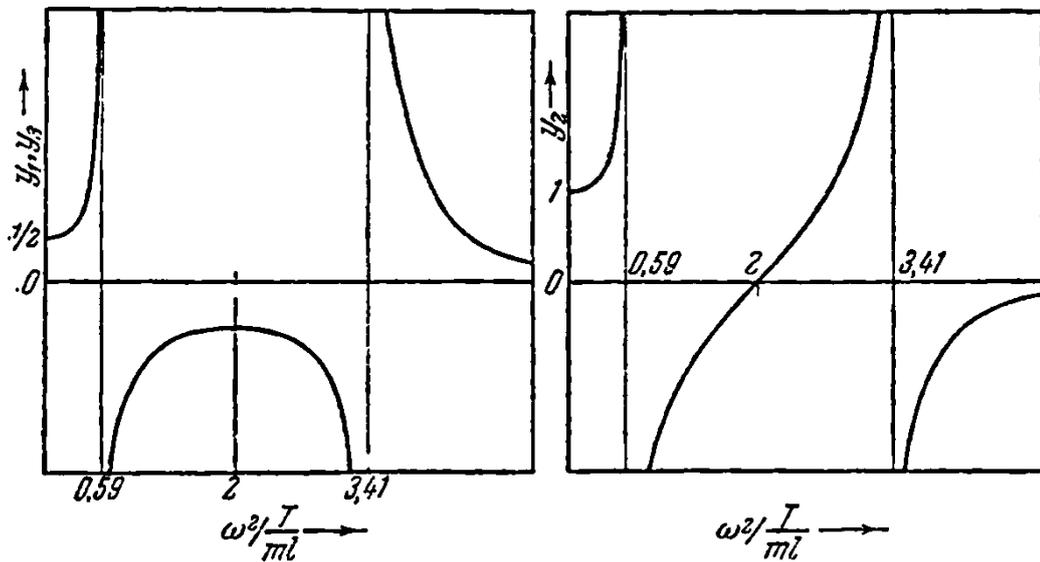


Рисунок 52 – Резонансные диаграммы для симметричной струны с тремя массами, из которых средняя возбуждается переменной силой

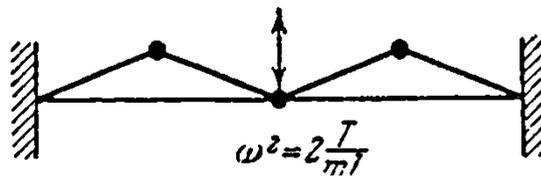


Рисунок 53 – Эффект виброгасителя с тремя массами, из которых средняя подвергается возбуждению

3.3 Свободные и вынужденные колебания с затуханием

В случае системы со многими степенями свободы, обладающей затуханием, нас, с практической точки зрения, интересуют два следующих вопроса: а) быстрота убывания амплитуды свободных колебаний и б) величина амплитуды вынужденных колебаний при резонансе.

Метод исследования, применяемый в точной классической теории колебаний, мы продемонстрируем на примере струны с тремя равными и равноудаленными друг от друга массами.

Пусть сила затухания $-c\dot{x}_2$ действует на среднюю массу (рисунок 54). Эта сила вызывает деформации в трёх точках прикрепления масс, значения

которых соответственно будут $-\alpha_{12}c\dot{x}_2$, $-\alpha_{22}c\dot{x}_2$ и $-\alpha_{32}c\dot{x}_2$. Дифференциальные уравнения (3.1) свободных колебаний принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\alpha_{11}m\ddot{x}_1 - \alpha_{11}m\ddot{x}_2 - \alpha_{11}m\ddot{x}_3 - \alpha_{12}c\dot{x}_2, \\ x_2 &= -\alpha_{12}m\ddot{x}_1 - \alpha_{22}m\ddot{x}_2 - \alpha_{23}m\ddot{x}_3 - \alpha_{23}c\dot{x}_2, \\ x_3 &= -\alpha_{31}m\ddot{x}_1 - \alpha_{32}m\ddot{x}_2 - \alpha_{33}m\ddot{x}_3 - \alpha_{32}c\dot{x}_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

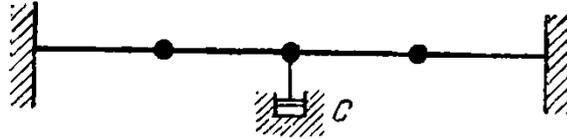


Рисунок 54 – Затухание в средней массе струны

Входящие сюда различные коэффициенты влияния определяются по формулам (3.6). Подставляя значения этих коэффициентов и комбинируя уравнения между собою, мы можем после простых алгебраических выкладок преобразовать их к более удобному для нас виду:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \frac{T}{l}x_1 + \frac{T}{l}(x_1 - x_2) &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + \frac{T}{l}(x_2 - x_1) + \frac{T}{l}(x_2 - x_3) + c\dot{x}_2 &= 0, \\ m\ddot{x}_3 + \frac{T}{l}(x_3 - x_2) + \frac{T}{l}x_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Первое из уравнений (3.16) получено путем вычитания второго уравнения системы (3.15) из удвоенного первого уравнения той же системы, т. е. путем составления разности $2x_1 - x_2$. Второе из уравнений (3.16) составлено посредством вычисления выражения $x_1 + x_3 - 2x_2$ и, наконец, третье — образованием разности $x_2 - x_3$. Физический смысл уравнений (3.16) очевиден: они представляют собою уравнения, вытекающие из второго закона Ньютона для различных масс, причем первый член в каждом уравнении выражает собою силу инерции, второй — вертикальную составляющую натяжения струны слева от массы, третий — такую же составляющую, но справа от массы, и, наконец, четвертый — силу затухания.

В данном случае можно (и это было бы гораздо проще) прямо написать уравнения в последней форме, не пользуясь коэффициентами влияния. Однако в случае балки, с рассмотрения которой мы начали нашу главу (рисунок 45), коэффициенты влияния позволяют быстрее и проще подойти к решению задачи.

Прежде чем приступать к решению уравнений (3.16), следует обратить внимание на то обстоятельство, что эти уравнения могут относиться также в полной мере и к системам, изображенным на рисунках 55, 56. На рисунке 55 массы установлены так, что они могут совершать лишь вертикальные перемещения, причем для полной аналогии с рисунком 3.10 следует постоянную пружины k (коэффициент жесткости) положить равной T/l . Другой пример, представленный на рисунке 56, относится к крутильным колебаниям. Рекомендуется интерпретировать результаты, данные на рисунках 46-53, применительно к указанным двум случаям.

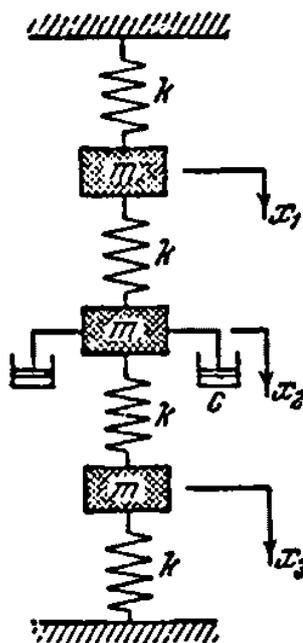


Рисунок 55 – Продольные колебания системы

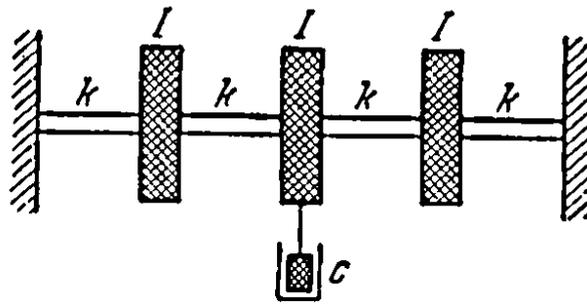


Рисунок 56 – Крутильные колебания системы

Величина p есть показатель степени, характеризующий быстроту убывания амплитуды, а q есть собственная частота колебаний. Подставляя значение (3.17) в уравнения (3.16), имеем

$$\left. \begin{aligned} \left(ms^2 + 2\frac{T}{l} \right) a_1 - \frac{T}{l} a_2 + 0 &= 0, \\ -\frac{T}{l} a_1 + \left(ms^2 + cs + 2\frac{T}{l} \right) a_2 - \frac{T}{l} a_3 &= 0, \\ 0 - \frac{T}{l} a_2 + \left(ms^2 + 2\frac{T}{l} \right) a_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Мы получим систему однородных линейных уравнений относительно a_1, a_2, a_3 , которая может иметь отличные от нуля решения лишь в том случае, когда определитель системы обращается в нуль, т.е. когда

$$\begin{vmatrix} ms^2 + 2\frac{T}{l} & -\frac{T}{l} & 0 \\ -\frac{T}{l} & ms^2 + cs + 2\frac{T}{l} & -\frac{T}{l} \\ 0 & -\frac{T}{l} & ms^2 + 2\frac{T}{l} \end{vmatrix} = 0.$$

По раскрытии определителя, имеем

$$\left(ms^2 + 2\frac{T}{l} \right) \left[\left(ms^2 + 2\frac{T}{l} \right) \left(ms^2 + cs + 2\frac{T}{l} \right) - \left(\frac{T}{l} \right)^2 \right] = 0. \quad (3.18)$$

Это уравнение шестой степени относительно s известно также под названием «уравнения частот» (обычно это уравнение называется характеристическим), хотя в данном случае s уже не является частотой в собственном

смысле слова, а представляет собою комплексное число, характеризующее одновременно как частоту, так и убывание амплитуды. Поэтому величина s называется «комплексной частотой».

В нашем частном случае уравнение частот распадается на два множителя, из которых первый приводит к выражению

$$s^2 = -\frac{2T}{ml'}$$

или

$$s_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{2T}{ml'}}$$

вследствие чего получается решение вида

$$Ae^{i\sqrt{\frac{2T}{ml'}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{2T}{ml'}}t},$$

которое, в свою очередь, может быть преобразовано к виду:

$$C_1 \cos \sqrt{\frac{2T}{ml'}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{2T}{ml'}}t.$$

Таким образом, из этого решения получаем частоту

$$\omega = \sqrt{\frac{2T}{ml'}}$$

тогда как быстрота убывания амплитуды равна нулю вследствие того, что s здесь не содержит действительной части. Эта частота совпадает с частотой в случае, изображенном на рисунке 47,б для незатухающих колебаний, когда средняя масса является узлом. Следовательно, сила затухания может не совершать работы, что является причиной отсутствия убывания амплитуды в

этом втором типе колебания; это также объясняет тот факт, что собственная частота совершенно не искажается затуханием.

Другой множитель уравнения (4.18) после преобразований приводится к виду

$$s^4 + \frac{c}{m}s^2 + 4\frac{T}{ml}s^2 + 2\frac{T}{ml} \cdot \frac{c}{m}s + 2\left(\frac{T}{ml}\right)^2 = 0.$$

Это уравнение содержит четыре корня для s , в которых мы должны ожидать наличие действительных частей, так как в двух типах колебаний, представленных на рисунках 47, а и 47, в, сила затухания должна совершать работу. Корни полученного уравнения напишутся в форме

$$s_3 = -p_1 + iq_1,$$

$$s_4 = -p_1 - iq_1,$$

$$s_5 = -p_2 + iq_2,$$

$$s_6 = -p_2 - iq_2,$$

так как комплексные корни алгебраического уравнения с действительными коэффициентами являются всегда попарно сопряжёнными.

Вычисление этих корней по численным значениям m, c, T и l весьма обременительно даже для сравнительно простого уравнения четвертой степени. Таким образом, этот классический метод оказывается непригодным для практического решения задачи. Он рассмотрен здесь просто по той причине, что позднее, в главе 4, нам придется иметь дело со случаями, в которых действительная часть s становится положительной. Это значит, что функция, характеризующая убывание амплитуды, имеет вид e^{+pi} , т. е. мы имеем дело не с убыванием, а с нарастанием колебаний. Такое движение носит поэтому название «автоколебательного».

В практических случаях затухание обычно так мало, что собственная частота, а также характер колебательных движений искажаются им очень мало. Поэтому интенсивность затухания свободных колебаний может быть найдена при допущении, что конфигурация и частоты системы таковы, как если бы затухания не было. К этому мы сейчас и перейдем.

Если амплитуда колебаний средней массы равна a_2 и частота равна ω , то из уравнения

$$\pi P_0 x_0 = \pi c \omega x_0^2$$

получаем для величины работы, рассеянной за одно колебание вследствие затухания, следующее значение:

$$W = \pi c \omega a_2^2.$$

Кинетическая энергия системы при прохождении через среднее положение равна

$$\frac{1}{2} (m\omega^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = \frac{1}{2} m\omega^2 f a_2^2, \quad (3.19)$$

где множитель f зависит от конфигурации системы. Эта энергия за время каждого колебания (период) уменьшается на величину $\pi c \omega a_2^2$, которая получается из следующих преобразований

$$d\left(\frac{1}{2} m\omega^2 f a_2^2\right) = m\omega^2 f a_2 da_2 = \pi c \omega a_2^2,$$

откуда

$$\frac{da_2}{a_2} = \frac{\pi c}{m\omega f}.$$

Здесь символ d условно относится к одному периоду. Если при каком-либо главном колебании амплитуда одной из масс уменьшается вдвое, то это же самое происходит и с прочими массами, следовательно,

$$\frac{da_1}{a_1} = \frac{da_2}{a_2} = \frac{da_3}{a_3} = \frac{\pi c}{m\omega f}$$

В первом главном колебании (рисунок 47, а) множитель f , определяемый уравнением (3.19), очевидно, равен 2, тогда как

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{0,59 \frac{T}{ml}}$$

а поэтому относительное убывание амплитуды за один период определится соотношением

$$\frac{da_1}{a_1} = 2,04c \sqrt{\frac{l}{Tm}}$$

В третьем главном колебании величина f также равна 2, но для частоты мы имеем значение

$$\omega_3 = \sqrt{3,41 \frac{T}{ml}}$$

вследствие чего

$$\frac{da_1}{a_1} = 0,85c \sqrt{\frac{l}{Tm}}$$

Изложенный метод дает удовлетворительные результаты для обычных значений коэффициента затухания. Но если только затухание составляет значительную долю его критического значения c_k , то, конечно, предыдущие рассуждения перестают быть применимыми.

Для вынужденных колебаний с затуханием «классический» метод еще более сложен, чем для свободных колебаний, причем в этом случае он оказывается настолько запутанным, что для практических числовых расчетов дела-

ется совершенно бесполезным. В то же время для технически важных значений затухания изложенный энергетический метод дает нам для амплитуды при резонансе, которую мы особенно интересуемся, очень хорошие приближения.

Будем считать, как и прежде, что при резонансе сила затухания и возмущающая сила столь малы, по сравнению с силами инерции и упругими силами, что характер движения оказывается практически неискаженным. Тогда рассеяние энергии при затухании за один период может быть вычислено совершенно таким же образом, как это делалось для свободных колебаний. В случае установившегося режима это рассеяние должно быть равно работе, совершаемой за один период приложенной к системе возмущающей силой или силами. Между этой силой и перемещением, вообще говоря, имеется некоторая разность фаз. Фазовый угол в момент резонанса становится равным $\pi/2$, а при этой разности фаз энергия, сообщаемая системе, при данном движении и данной силе имеет наибольшее значение.

В качестве примера объединим рисунок 48, а и 54. Работа, совершаемая приложенной силой за один период, равна $\pi P_0 a_1$. Тогда резонансная амплитуда вычисляется из равенства

$$\pi P_0 a_1 = \pi c \omega a_2^2,$$

или

$$\pi P_0 = \pi c \omega \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 a_1,$$

откуда

$$(a_1)_{\text{рез.}} = \frac{P_0}{c \omega} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2.$$

Для первого главного колебания мы имели

$$\frac{a_2}{a_1} = 1,41 \text{ и } \omega = \sqrt{0,59 \frac{T}{ml}};$$

следовательно,

$$(a_1)_{\text{рез.}} = 0,65 \frac{P_0}{c} \sqrt{\frac{ml}{T}}.$$

Для двух других главных колебаний мы находим

$$(a_1)_{\text{рез.}} = \infty \text{ (второе колебание),}$$

$$(a_1)_{\text{рез.}} = 0,27 \frac{P_0}{c} \sqrt{\frac{ml}{T}} \text{ (третье колебание).}$$

3.4 Струны и органные трубы. Продольные и поперечные колебания однородных балок

Задачи этих четырех типов мы будем изучать совместно, так как их математическая и физическая интерпретации тождественны.

В предыдущих параграфах мы рассматривали струну с тремя массами, причем сама струна предполагалась невесомой, а массы считались сосредоточенными в нескольких отдельных точках. Если мы вообразим теперь, что число масс неограниченно возрастает, то от дискретного распределения масс придем к понятию струны с равномерно распределенной массой. Уравнение движения мы можем получить, если напишем уравнение, выражающее второй закон Ньютона, для малого элемента ds струны, для которого опять будем считать натяжение T постоянным. Пусть деформированная ось струны во время колебания изображается функцией $y(x, t)$, причем ордината кривой изменяется как с перемещением вдоль струны, так и с течением времени. Вертикальная составляющая натяжения T струны, действующего влево в некоторой точке x (рисунок 57, а), равна

$$-T \frac{\partial y}{\partial x},$$

причем эта величина отрицательна, так как составляющая направлена вниз, в то время как положительные значения y откладываются вверх. Производная берется здесь частная вследствие того, что струна рассматривается в некоторый определенный момент времени, т. е. время t достается постоянным при дифференцировании. На правую часть взятого элемента dx действует вертикальная составляющая натяжения, равная

$$+T \frac{\partial y}{\partial x} + \partial \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) = T \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = T \frac{\partial y}{\partial x} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

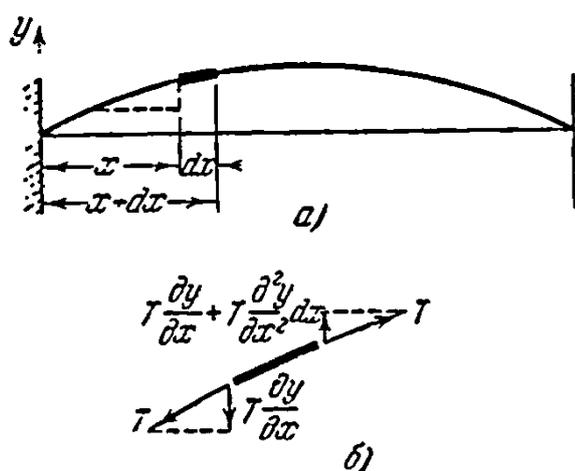


Рисунок 57 – Вертикальные составляющие натяжения, действующего на элемент dx натянутой струны

Эта величина уже положительная, так как составляющая направлена вверх. Множитель $(\partial^2 y / \partial x^2) dx$ выражает собой возрастание наклона кривой вдоль dx . Так как эти две вертикальные силы, действующие на элемент dx между собою не равны (рисунок 57, б), то получается некоторая равнодействующая

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx,$$

направленная вверх, которая должна сообщить элементу ускорение в этом направлении. Если мы обозначим массу единицы длины струны через ρ , то масса элемента dx будет равна ρdx , и тогда по закону Ньютона имеем

$$\mu_1 dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Деля на dx , мы получим дифференциальное уравнение колебаний струны:

$$\mu_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (3.20)$$

являющееся уравнением с частными производными.

Предлагается сравнить структуру этого уравнения с первым уравнением (3.16) и установить физический смысл каждого члена.

Задача о продольных колебаниях стержня совершенно аналогична задаче о колебаниях струны и представляет собою обобщение задачи, схема которой дана на рисунке 55 (только без затухания), причем здесь мы берем большее число меньших масс и большее число меньших пружин. Теперь мы уже не будем обозначать массы номерами 1, 2, 3, как на рисунке 55, а будем характеризовать их положение абсциссой x вдоль стержня (рисунок 58). Пусть продольное перемещение каждой точки x обозначено греческой буквой ξ , являющейся как бы эквивалентом буквы x . Тогда состояние движения стержня можно считать известным, если мы знаем величину $\xi(x, t)$ опять как функцию двух переменных.

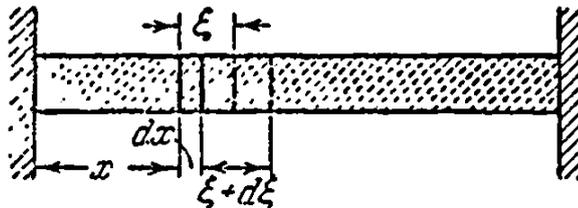


Рисунок 58 – Продольные колебания бруса

Поперечное сечение x переходит в $x + \xi$ сечение $x + dx$ переходит в $(x + dx) + (\xi + d\xi)$. В некоторый момент времени t длина dx делается равной

$$dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx,$$

где производная $\partial \xi / \partial x$, как видим, является удлинением единицы длины стержня (относительное удлинение). Это удлинение вызывает возникновение растягивающего напряжения

$$E \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

где E модуль упругости (модуль Юнга).

Если бы стержень был равномерно растянут по всей своей длине, то величина $E(\partial \xi / \partial x)$ была бы постоянной вдоль длины стержня, и какой-нибудь элемент dx подвергался бы совершенно одинаковому действию как слева, так и справа. Однако, если напряжение $E(\partial \xi / \partial x)$ изменяется от точки к точке, то должна появиться некоторая избыточная сила, действующая на элемент и сообщающая ему продольное ускорение.

На рисунке 59 элемент dx изображен вместе с действующими на него силами, каждая из которых равна соответственному напряжению, умноженному на поперечное сечение S . Сила, действующая на левую часть элемента, равна $ES(\partial \xi / \partial x)$ тогда как на правую часть должна действовать сила, равная $ES(\partial \xi / \partial x)$ плюс еще некоторое приращение, вызванное возрастанием dx абсциссы. Это приращение равно

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx,$$

откуда избыток силы в правую сторону будет

$$ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx.$$

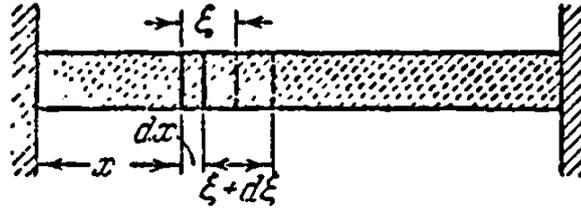


Рисунок 59 – Продольные упругие силы, действующие на элемент бруса

Пусть масса, приходящаяся на единицу длины стержня, равна

$$(\mu_1 dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx,$$

или

$$\mu_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (3.21)$$

где ES есть жёсткость стержня на удлинение. Итак, мы получили такое же дифференциальное уравнение, что и уравнение (3.20).

Видоизменение рассмотренного случая представляет собою органная труба, в которой вместо стального бруса совершает продольные колебания столб воздуха. Уравнение (3.21), очевидно, должно быть такое же самое: μ_1 обозначает массу воздуха на единицу длины трубы, E — модуль упругости. Взамен напряжения в предыдущем смысле слова мы здесь имеем давление. Для упругих тел имеет место следующая зависимость:

$$\frac{\text{напряжение}}{E} = \frac{\text{удлинение}}{\text{начальная длина}}.$$

Для газов имеем

$$\frac{\text{увеличение давления}}{E} = \frac{\text{увеличение объёма}}{\text{начальный объём}}$$

или

$$E = -r \frac{\partial p}{\partial v}.$$

Для газов так же, как и для упругих тел, E измеряется в килограммах на квадратный сантиметр.

Наконец, рассматривая рисунки 54, 55 и 56, мы приходим к убеждению, что изучение крутильных колебаний однородного вала с распределенным по длине моментом инерции приводит опять к тому же дифференциальному уравнению. В данном случае переменной величиной является угол закручивания $\varphi(x, t)$, а само дифференциальное уравнение имеет вид

$$\mu_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = GI_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (3.22)$$

где μ_1 есть момент инерции вала на единицу его длины, а GI_p — жесткость вала на кручение.

Приступая к решению уравнения (3.20), (3.21) или (3.22), мы сделаем предположение, что струна колеблется гармонически с некоторой собственной частотой, обладая при этом некоторой определенной формой (назовем ее собственной или нормальной конфигурацией). Остается посмотреть, правильно ли такое допущение. На математическом языке это значит, что мы принимаем

$$y(x, t) = y(x) \sin \omega t. \quad (3.23)$$

Подставляя это значение (3.20), мы приведем его к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\mu_1 \omega^2}{T} y = 0, \quad (3.24)$$

а это есть обыкновенное дифференциальное уравнение. Итак, в предыдущих задачах подобные допущения упрощали обыкновенные дифференциальные уравнения, приводя их к алгебраическим. Здесь же мы имеем упрощение дифференциального уравнения с частными производными, которое приводится указанной подстановкой к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Амплитуда струны, как функция пространства, ведет себя совершенно таким же образом, как и амплитуда системы с одной степенью свободы, рассматриваемая как функция времени.

Таким образом, общее решение уравнения (3.24) имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin x \sqrt{\frac{\mu_1 \omega^2}{T}} + C_2 \cos x \sqrt{\frac{\mu_1 \omega^2}{T}}, \quad (3.25)$$

что определяет форму струны в момент её наибольшей деформации. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 могут быть определены из того условия, что на концах струны её отклонения должны быть равны нулю, т.е.

$$y = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l.$$

Подставляя $x = 0$, получаем

$$y(0) = 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1;$$

следовательно, $C_2 = 0$. При $x = l$ получаем

$$y(l) = 0 = C_1 \sin l \sqrt{\frac{\mu_1 \omega^2}{T}}. \quad (3.26)$$

Это равенство удовлетворяется при $C_1 = 0$, что является верным, но лишенным интереса решением, которое означает, что струна остается в покое. Однако уравнению (3.26) можно удовлетворить также, если сделать аргумент синуса числом, кратным числу π , а именно, полагая,

$$l \sqrt{\frac{\mu_1 \omega^2}{T}} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad (3.27)$$

Отсюда мы определяем собственные частоты, тогда как соответствующие главные типы колебаний могут быть найдены немедленно по подстановке

значений ω^2 из уравнений (3.27) в уравнение (3.25). Результаты подобных расчетов проиллюстрированы на рисунок 60.

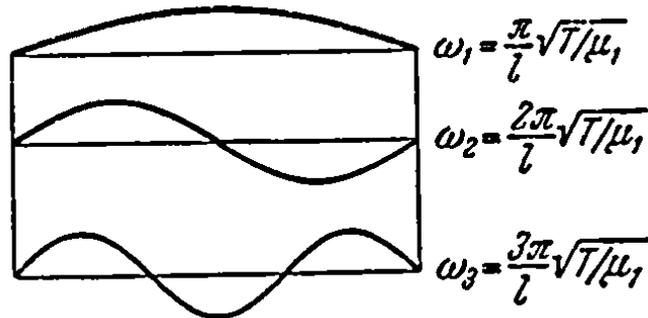


Рисунок 60 – Три первых главных типа поперечных колебаний однородной струны, а также продольные и крутильные колебания однородного бруса, заделанного обоими своими концами

Существует бесконечное число нормальных кривых и соответственно бесконечное число собственных частот. В каждом из этих главных колебаний движение происходит так, что отклонение каждой точки струны изменяется с течением времени по гармоническому закону, и следовательно, нормальная кривая остается подобной самой себе. Поэтому, если струну вывести из положения равновесия и придать ей одну из форм, изображённых на рисунке 60, а затем предоставить ее самой себе, то она возвратится в свое исходное положение по истечении времени, определяемого периодом собственного колебания. При такой частоте и форме сила инерции и упругая сила находятся в равновесии в каждый момент времени и для каждого элемента dx струны.

Если струне дается начальное отклонение, форма которого отличается от изображенных на рисунок 60, например, такое, как на рисунке 61, то такая форма может быть представлена как состоящая из ряда нормальных форм. Каждый член ряда Фурье определяет соответствующее ему колебание, но при этом каждое из таких колебаний происходит только с одной, свойственной ему частотой. Таким образом, по истечении одной восьмой периода основного типа колебаний отклонение основной составляющей уменьшится до

0,707 его первоначального значения, отклонение составляющей при втором главном колебании обращается в нуль, а отклонение четвертой составляющей получает значение, равное по величине первоначальному, но обратное по знаку. Следовательно, сложная форма (рисунок 61) не сохраняется во время движения. Однако по истечении полного периода основного колебания начальная форма восстанавливается.

Формы рисунке 60 сохраняются также для продольных (и для крутильных) колебаний стержня с заделанными концами или для колебаний органной трубы с закрытыми концами. Тогда только ординаты условно означают перемещение вдоль стержня. Очевидно, что частоты будут теми же, только взамен натяжения T придется поставить жесткость ES на растяжение.

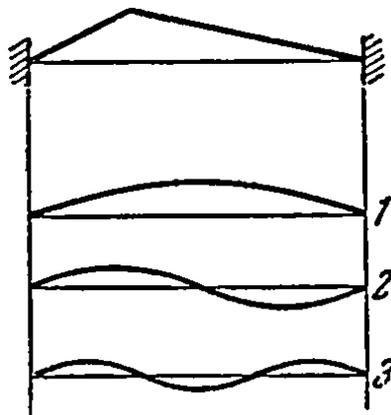


Рисунок 61 – Форма «ущиплённой» струны и трёх первых составляющих её гармоник ряда Фурье

Для продольных (или крутильных) колебаний стержня с одним заделанным концом или для органной трубы с одним открытым концом общие выражения (3.25), определяющие форму колебаний, остаются в силе; однако условия на концах, служащие для определения постоянных C_1 и C_2 , будут в этих случаях иными.

В закрытом конце трубы $x = 0$ мы опять имеем $y = 0$, так как воздух не может проникать сквозь твердую стенку в этом конце. Однако в открытом конце смещение уже возможно, но зато здесь не может быть напряжения (в случае стержня) или избытка давления (в случае органной трубы). При выво-

де дифференциального уравнения это напряжение, как мы видели, пропорционально производной $\partial \xi / \partial x$ (или в обозначениях для струны $\partial u / \partial x$). Поэтому граничные условия оказываются такими:

$$x = 0, \quad y = 0;$$

$$x = l, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Первое из этих условий дает $C_2 = 0$ в уравнении (3.25), тогда как второе удовлетворяется, если положить длину стержня равной $1/4, 3/4, 5/4$, и т. д. длины волны/ как это показано на рисунок 62.

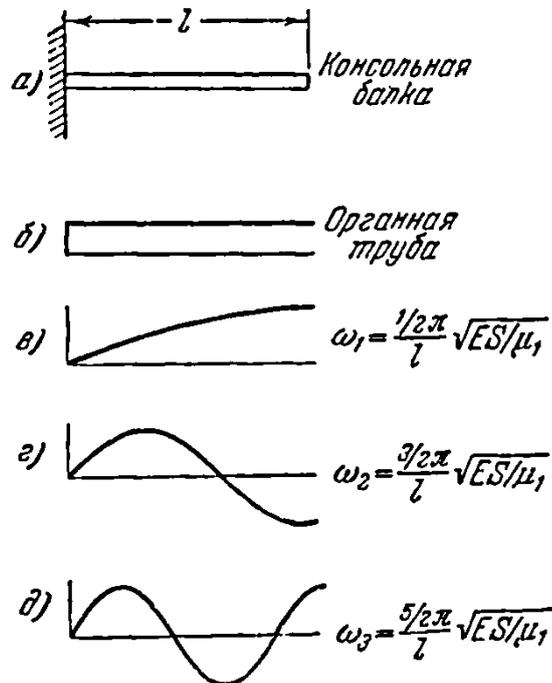


Рисунок 62 – Продольные колебания стального бруса или столба воздуха в трубе при одном заделанном и другом свободном конце

В заключение некоторые из полученных выше результатов представлены совместно на рисунке 63.

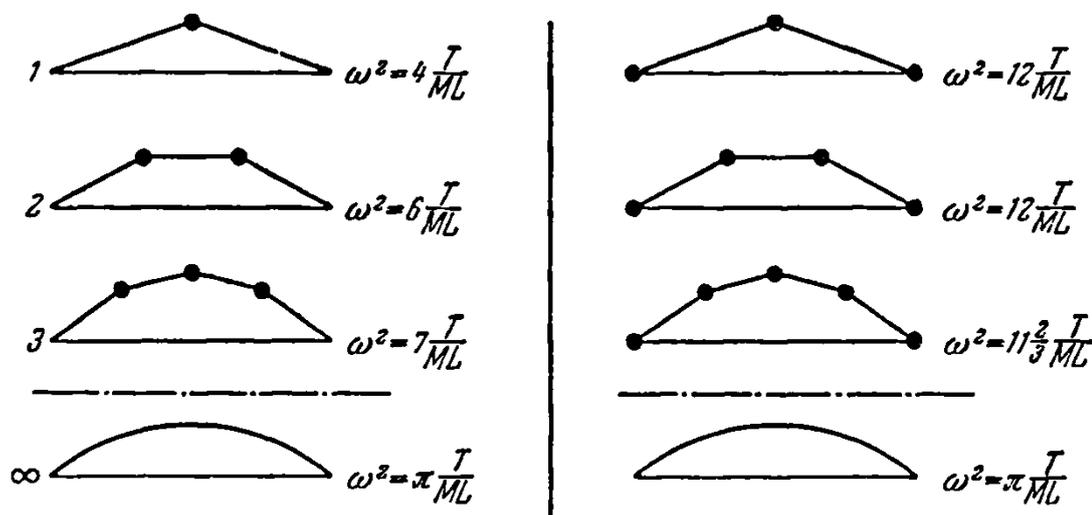


Рисунок 63

Первая из этих схем является половиной схемы, изображенной на рисунке 47, б. вторая – часть схемы на рисунке 48, б и третья есть то же, что и рисунок 47, а. Обозначенные на указанных схемах частоты взяты из тех же фигур, с той только разницей, что здесь M обозначает общую массу всех колеблющихся грузов, а L — всю длину струны.

В правой части рисунка 63 к струне присоединены еще две массы, помещенные в закрепленных концах. Так как эти массы не движутся, то они не влияют на частоту, но зато изменяют величину M , которая является всей массой системы. При увеличении числа масс от 1 до 2, 3 и т. д. мы должны в конце концов подойти к частоте основного типа колебаний непрерывной струны. В левой части рисунка мы приближаемся к истинному значению частоты колебаний непрерывной струны, как к верхнему пределу, идя снизу, поскольку массы оказываются более тесно расположенными к середине струны, где их инерция более эффективна

Напротив того, в правой половине рисунка массы ближе подходят к неподвижным концам, а поэтому их суммарная кинетическая энергия получается меньшей, чем при непрерывном распределении. Вследствие этого частоты должны быть слишком большими.

Легко видеть, что идя таким путём, мы приближаемся к точному значению множителя $\pi^2 = 9,87$ очень медленно, а поэтому указанный приближённый метод определения собственно частоты с помощью смещения масс с практической точки зрения не может быть признан удовлетворительным.

3.5 Метод Рэлея

Задача о колебании струны является простейшей среди задач подобного рода для систем с бесконечным числом степеней свободы. Хотя в данном случае и может быть получено точное решение, по все же мы здесь еще очень далеки от возможности получить точное решение общей задачи о колебаниях системы в том случае, когда ее масса и гибкость распределены вообще по какому-то закону. Вследствие этого чрезвычайно важно иметь такой приближенный метод для определения наинизшей или основной частоты колебаний, которым можно было бы пользоваться всегда. Подобный метод был развит Рэлеем; он является обобщением энергетического метода.

Кратко говоря, сущность этого метода сводится к тому, что мы заранее задаемся формой упругой кривой при первом или основном виде колебания; после этого вычисляются наибольшие значения потенциальной и кинетической энергии системы, которые затем приравниваются друг другу. Конечно, если бы в основу расчетов мы положили точную форму кривой, то получили бы точное значение также и для частоты. Но для формы, так или иначе отклоняющейся от точной, получается лишь практически полезное достаточно близкое приближение. Так как точное решение задачи для струны нам уже известно, то для изложения метода Рэлея мы возьмем именно эту задачу, что нам поможет к тому же оценить погрешность приближенного результата.

Для вычисления потенциальной энергии мы заметим, что деформированная струна имеет большую длину по сравнению с прямой. Так как она все время подвергается действию натяжения T , то для ее перевода в деформированное состояние надо совершить работу, равную $T\Delta l$. Эта работа поглощается струной в виде потенциальной энергии. Для определения приращения

длины струны воспользуемся известным из дифференциальной геометрии выражением элемента длины ds (рисунок 64)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \approx \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx.$$

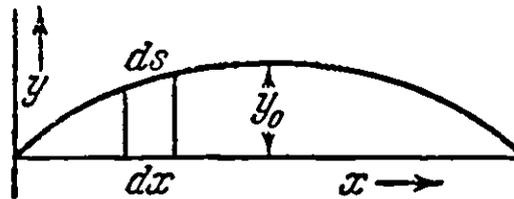


Рисунок 64 – Вычисление потенциальной энергии струны

Так как приращение длины этого элемента равно

$$ds - dx = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

то потенциальная энергия этого выразится так:

$$U = \frac{T}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \quad (3.28)$$

Этот результат можно получить также другим путем, что мы сейчас и сделаем. При выводе уравнения (3.20) мы видели, что его правая часть $T(\partial^2 y / \partial x^2)$ обозначает вертикальную силу, действующую на единицу длины струны. Представим себе теперь, что струна приведена в деформированное состояние статической нагрузкой $q(x)$, возрастающей пропорционально деформации $y(x)$. Тогда работа, совершаемая нагрузкой $q(x)$, при перемещении элемента dx из первоначального положения в данное, определяемое полной деформацией $y(x)$, должна быть равна

$$\frac{1}{2} q(x) \cdot y(x) \cdot dx,$$

вследствие чего для потенциальной энергии имеем выражение

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l q(x) y(x) dx.$$

Но так как

$$q(x) = -T \frac{d^2 y}{dx^2},$$

то

$$U = -\frac{T}{2} \int_0^l y \frac{d^2 y}{dx^2} dx. \quad (3.29)$$

Первый член справа здесь равен нулю, так как $y = 0$ при $x = 0$ и при $x = l$.

Что же касается интеграла во втором члене, то он может быть написан так:

$$-\int_0^l \frac{dy}{dx} \frac{dy}{dx} dx = -\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Полная кинетическая энергия есть сумма кинетических энергий $(1/2)mv^2 = (1/2)(\mu_1 dx)(y\omega)^2$ отдельных элементов:

$$T = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 \int_0^l y^2 dx. \quad (3.30)$$

Как и в случае системы с одной степенью свободы выражения (3.28) и (3.30) определяют максимум той и другой энергии, причем максимум потенциальной энергии имеет место в наиболее деформированном состоянии системы, тогда как максимум кинетической энергии получается в недеформированном состоянии, когда скорость наибольшая. Приравнивая обе энергии друг другу, находим формулу для частоты

$$\omega^2 = \frac{T \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}{\mu_1 \int_0^l y^2 dx}. \quad (3.31)$$

Величина ω^2 , определяемая по этой формуле, зависит от формы $y(x)$, которую мы положили в основу расчёта.

Рассмотрим сначала точную форму кривой

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

По уравнению (3.28) получаем потенциальную энергию в виде

$$U = \frac{T}{2} \int_0^l \left(y_0 \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{T}{2} y_0^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Подобным же образом находим кинетическую энергию

$$T = \frac{\mu_1 \omega^2}{2} y_0^2 \cdot \frac{l}{2}.$$

Тогда для частоты имеем

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \frac{3,142}{l} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}. \quad (3.32)$$

Мы получили точное значение.

Далее предположим, что струна имеет форму дуги параболы. В системе координат xu уравнение параболы, изображённой на рисунке 65, имеет вид

$$y = px^2.$$

Параболу можно заставить пройти через две точки ($y = y_0, x = \pm l/2$), давая величине p значение $4y_0/l^2$. Уравнение

$$y = 4y_0 \frac{x^2}{l^2}$$

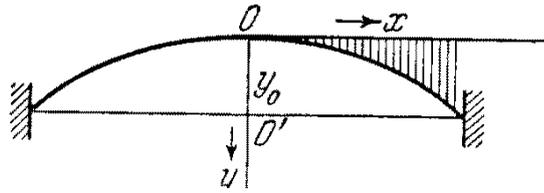


Рисунок 65 – Дуга параболы как приближённая форма колеблющейся струны

определяет совокупность ординат, образующих на рисунке 65 штриховку фигуры.

Прогиб струны в какой-либо точке равен y_0 минус соответственная ордината, т.е.

$$y = y_0 \left(1 - \frac{4x^2}{l^2} \right).$$

Воспользовавшись этим значением y для уравнений (3.28) и (3.30) и выполнив достаточно простое интегрирование, имеем

$$U = \frac{8}{3} T \frac{y_0^2}{l}, \quad T = \frac{4}{15} \mu_1 \omega^2 l y_0^2.$$

Тогда

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{10}}{l} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \frac{3,162}{l} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}},$$

т. е. частота получилась всего лишь на 0,7% больше своего точного значения. Погрешность оказалась удивительно малой, причем уже с физической точки зрения ясно, что изогнутая струна не может иметь точную форму параболы. В самом деле, пружинящее действие струны, вследствие которого любая частица dx стремится возвратиться в положение равновесия, определяется кривизной струны или величиной d^2y/dx^2 . Но в крайних точках струны ее частицы не двигаются, а поэтому там, очевидно, нет ни силы упругости, ни силы инерции. Следовательно, точная форма кривой должна быть такой, чтобы

кривизна в крайних точках отсутствовала. Это условие и нарушается параболой.

Чтобы испытать мощность метода Рэлея, мы применим его теперь к наиболее неправдоподобной форме кривой, по которой, по нашему предположению, изгибается струна, а именно: положим, что эта кривая (рисунок бб) состоит из двух прямолинейных отрезков, причем уравнение левого отрезка имеет вид

$$y = y_0 \frac{x}{\frac{l}{2}} \left(\text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right).$$

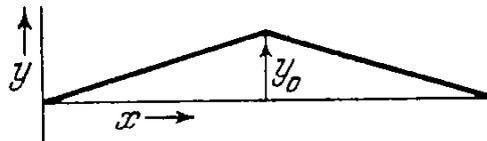


Рисунок бб – Рэлеевская приближённая форма для половины синусоидальной волны

Для энергии находим

$$U = 2T \frac{y_0^2}{l}, \quad T = \mu_1 \omega^2 l y_0^2,$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{12}}{l} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \frac{3,162}{l} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}},$$

т.е. частота оказалась на 10% больше своего точного значения (3.32).

Приближенный метод Рэлея всегда дает для наименьшей собственной частоты более высокое значение, по сравнению с истинным. Среди того или иного количества результатов, полученных этим методом, наименьшее значение частоты является и наилучшим ее приближением.

В заключение мы решим комбинированную задачу о колебаниях тяжелой струны массы M , в середине которой помещен сосредоточенный груз такой же массы M . Эта задача опять эквивалентна задаче о продольных (или крутильных) колебаниях стержня с заделанными концами, имеющего посередине сосредоточенный груз, например, в виде диска, масса которого (или момент инерции) равняется массе (моменту инерции) самого стержня.

Обращаясь к рассмотрению упругой линии деформированной струны, мы можем сказать, что если средняя масса отсутствует, то эта линия должна быть синусоидальной, а если отсутствует масса струны, то она должна иметь форму, показанную на рисунке 66. В действительности же кривая будет иметь какую-то промежуточную форму между двумя указанными. Заметим, что, в предположении синусоидальной формы, присутствие средней массы остается без влияния на потенциальную энергию. Однако кинетическая энергия благодаря этой массе увеличивается на $M\omega^2 y_0^2/2$, что составляет удвоенное значение кинетической энергии самой струны, так как $M = \mu_1 l$. Таким образом, полная кинетическая энергия системы оказывается в три раза больше ее значения для струны без средней массы, вследствие чего частота будет в $\sqrt{3}$ раза меньше частоты для одной струны, т. е.

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{l} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = 1,81 \sqrt{\frac{T}{Ml}}$$

Если мы теперь предположим, что струна в деформированном состоянии имеет форму, показанную на рисунке 66, то для потенциальной энергии остается в силе найденное для этого случая ее значение, тогда как кинетическая энергия увеличивается на $M\omega^2 y_0^2/2$, т. е. ее новое значение становится больше предыдущего в $(1/2+1/6):1/6 = 4$ раза. Поэтому частота оказывается равной

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{12}}{l} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = 1,73 \sqrt{\frac{T}{Ml}}.$$

Так как найденное сейчас значение для частоты меньше найденной выше, то оно является лучшим приближением. Решая задачу точно, получим

$$\omega_1 = 1,721 \sqrt{\frac{T}{Ml}}.$$

Уравнение (3.25) является уравнением общей формы колеблющейся струны, и это уравнение мы применим теперь к левой половине струны. Условие неподвижности левого конца остается в силе. Поэтому, как и прежде, $C_2 = 0$, вследствие чего форма левой половины струны определяется уравнением

$$y = C \sin x \sqrt{\frac{\mu_1 \omega^2}{T}}, \quad (3.33)$$

где C и ω пока неизвестны. Амплитуда C для нас здесь существенного значения не имеет, что же касается частоты ω , то она определяется из «длины волны» синусоиды. На рисунке 67 показана форма этой кривой, причем правая половина струны дана как зеркальное изображение ее левой половины. К средней массе M приложены сила инерции $M\omega^2 y_0$ и упругая сила $2T \operatorname{tg} \alpha$. Так как эти две силы должны быть в равновесии, то

$$2T \operatorname{tg} \alpha = M\omega^2 y_0. \quad (3.34)$$

Величины y_0 и $\operatorname{tg} \alpha$ представляют собою соответственно ординату кривой (3.33) в той её точке, где $x = l/2$, и угловой коэффициент касательной к ней в той же точке, или

$$y_0 = C \sin \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\mu_1 \omega^2}{T}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = C \sqrt{\frac{\mu_1 \omega^2}{T}} \cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\mu_1 \omega^2}{T}}.$$

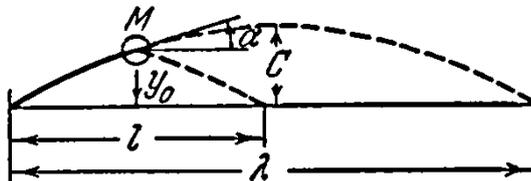


Рисунок 67 – Точное исследование движений тяжёлой струны с центральной массой

Но так как $\mu_1 l = M$, то, подставляя эти значения в уравнение (3.34), получаем

$$\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{Ml}{T}} = \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{Ml}{T}}.$$

Таким образом, нам предстоит найти такой угол, величина которого, выраженная в радианах, равняется его котангенсу. Для угла 0° его величина в радианах также равна нулю, а котангенс имеет бесконечно большое значение; для угла 90° его величина в радианах равна 1,6, а котангенс равен нулю. Очевидно, что равенство имеет место где-то между 0 и 90° . При помощи тригонометрических таблиц мы находим, что искомый угол равен $49^\circ,3$ или же, в радианах, $0,8603$. Таким образом,

$$\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{Ml}{T}} = 0,8603,$$

или

$$\omega_1 = 1,721 \sqrt{\frac{T}{Ml}}.$$

Так как наименьшее полученное значение для частоты есть в то же время ее наилучшее значение, то, следуя Рэлею, иногда пишут аналитическое выражение формы кривой, которое, однако, не определяет ее вполне, так как содержит произвольный параметр. С помощью этой формулы обычным путем находят частоту, в выражение которой входит также этот параметр. Если теперь давать ему различные значения, то и частота будет принимать различные значения. Но наилучшим из последних является наименьшее, а поэтому частота отыскивается как минимум функции от введенного параметра. Полученное таким путем приближение значительно лучше, чем при пользовании обычным методом Рэлея.

Ритц обобщил указанный метод, распространив его на большее число параметров. Метод Ритца определения собственных частот очень точен, но в то же время, к сожалению, требует исключительно кропотливых вычислений.

3.6 Колебания изгиба однородных балок

В руководствах по сопротивлению материалов дифференциальное уравнение упругой линии балки обыкновенно пишется в одном из следующих видов:

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (3.35a)$$

или

$$q = \frac{d^2 M}{dx^2}, \quad (3.35b)$$

где M – изгибающий момент. После исключения M получим

$$q = \frac{d^2}{dx^2} EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right). \quad (3.35b)$$

Здесь q есть погонная нагрузка, приходящаяся на единицу длины балки.

Если поперечное сечение балки постоянно по её длине, то множитель EI не зависит от x , а поэтому последнее уравнение упрощается, принимая вид

$$q = EI \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right). \quad (3.36)$$

На рисунке 68 показаны различные эпюры для балки, лежащей на двух опорах и несущей одновременно две равномерно распределенные нагрузки, каждая из которых распространяется на часть балки. Заметим, однако, что уравнения (3.35) и (3.36) остаются верными вообще, а в частности и для других видов закрепления балок, например в случае консольных балок.

Если балка находится в состоянии установившегося колебания, происходящего с некоторой собственной частотой, то действующей на нее «нагрузкой» являются переменные силы инерции. Чтобы дать физический смысл такого утверждения, заметим, что в положении наибольшего отклонения вниз упругой линии балки (рисунок 68, б) к каждой ее частице приложено наибольшее ускорение, направленное вверх. Умножим его на массу частицы; мы получим силу инерции, направленную вверх. Это есть та сила, с которой балка действует на выделенную частицу. Обратное, по закону равенства действия и противодействия, частица должна действовать на балку с силой, такой же по величине, но направленной вниз. Все эти направленные вниз силы, являющиеся результатом действия отдельных частиц, которые составляют балку, образуют нагрузку q , вследствие которой происходит деформация балки, причем зависимость между нагрузкой и деформацией определяется уравнениями (3.35) или (3.36). Очевидно, что, когда балка проходит через положение равновесия, ускорения ее частиц, а следовательно, и нагрузки обращаются в нуль, но в этом случае равны нулю также и прогибы.

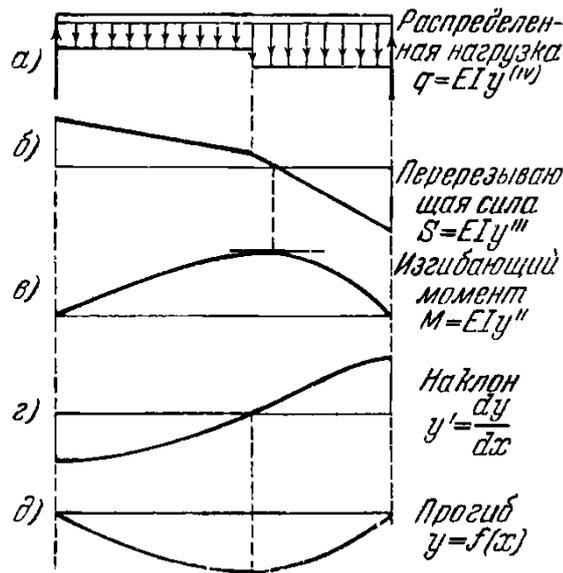


Рисунок 68 – Иллюстрация дифференциальных уравнений изгиба балки

Таким образом, дифференциальное уравнение колебаний балки постоянного поперечного сечения принимает вид

$$EI \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right) = -\mu_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (3.37)$$

где μ_1 есть масса балки, приходящаяся на единицу её длины. Следует отметить, что данное дифференциальное уравнение справедливо лишь в том случае, когда действием статической нагрузки в виде распределённого веса балки пренебрегают. Иначе в уравнение (3.37), исходя из принципа Даламбера, пришлось бы добавить вес балки, приходящийся на единицу её длины – $q = \mu_1 g$.

Предполагая, что происходят установившиеся колебания с частотой ω , мы имеем

$$y(x, t) = y(x) \sin \omega t, \quad (3.23)$$

вследствие чего уравнение (3.37) принимает вид:

$$EI \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right) = \mu_1 \omega^2 y. \quad (3.38)$$

Левая часть этого уравнения является выражением нагрузки через величины, характеризующие упругое состояние балки, в то время как правая часть есть наибольшее значение инерционной нагрузки. Отсюда мы видим, что с физической точки зрения «нормальная упругая линия» характеризуется тем, что грузовая линия для q должна иметь такую же форму, как кривая прогибов, т. е. как упругая линия. Всякая нагрузка, которая способна вызвать деформацию с упругой линией, подобной грузовой линии, может рассматриваться как инерционная нагрузка при колебании. Собственная частота входит здесь в постоянный множитель $\mu_1 \omega^2$, связывающий ординаты обеих кривых.

Функция, удовлетворяющая уравнению (4.38), должна обладать тем свойством, что после четырехкратного дифференцирования она должна принимать прежнюю форму, умноженную лишь на постоянную положительную величину $\mu_1 \omega^2 / EI$. Вспомним, что это свойство имеют четыре функции, а именно:

$$e^{ax}, e^{-ax}, \sin ax, \cos ax,$$

где коэффициент a определяется равенством

$$a = \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \omega^2}{EI}}. \quad (3.39)$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (3.38), содержащее четыре постоянных интегрирования, может быть написано так:

$$y(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \sin ax + C_4 \cos ax. \quad (3.40)$$

Это выражение определяет форму различных нормальных упругих кривых. Четыре постоянных интегрирования C должны быть определены из граничных условий. Для каждого конца балки мы располагаем двумя условиями, а поэтому для двух концов получаем всего четыре требуемых условия.

Таковыми условиями являются:

для опертого конца $y = 0$, $y'' = 0$ (нулю равны прогиб и изгибающий момент);

для свободного конца $y'' = 0$, $y''' = 0$ (нулю равны изгибающий момент и перерезывающая сила);

для заделанного конца $y = 0$, $y' = 0$ (нулю равны прогиб и угол наклона).

Все эти условия становятся очевидными из рассмотрения физического смысла производных различных порядков, как это показано на рисунке 68. Пользуясь для какого-либо частного случая закрепления концов балки соответствующими граничными условиями, из уравнения (3.40) приходим к четырем однородным алгебраическим уравнениям относительно четырех постоянных C . Если определитель этой системы приравнять нулю, то получим уравнение относительно a , являющееся, на основании формулы (3.39) уравнением частот. Эти вычисления выполняются для различных случаев закрепления балки (балка с двумя опертыми концами, консольная балка или балка с одним заделанным и другим свободным концом, балка с двумя заделанными концами и т. п.). Однако мы предпочтем в дальнейшем находить приближенные решения, пользуясь методом Рэлея. Лишь для балки, свободно опертой своими концами, точное решение легко может быть найдено из выражения (3.40).

В этом случае мы можем написать граничные условия таким образом:

$$x = 0, \quad y = y'' = 0;$$

$$x = l, \quad y = y'' = 0.$$

Мы видим сейчас же, что указанным условиям удовлетворяет функция, изменяющаяся по закону синуса; что же касается остальных функций, т. е. косинуса и степеней e , то они здесь оказываются непригодными. Таким обра-

зом, для балки, лежащей на двух опорах, уравнение (3.40) упрощается, принимая вид

$$y(x) = C \sin ax,$$

и следовательно, упругие линии для прогибов однородной балки на двух опорах получаются такие же, как и в случае струны, показанные на рисунке 60, с той лишь разницей, что здесь частоты другие. Эти частоты могут быть найдены, если приравнять аргумент синуса числу, кратному числу π , а именно:

$$al = l \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \omega^2}{EI}} = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}, \omega_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}, \omega_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}, \dots,$$

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}. \quad (3.41)$$

Итак, в то время, как собственные частоты колебаний струны возрастают пропорционально числам натурального ряда 1, 2, 3, 4, и т. д., частоты колебаний балки на двух опорах возрастают пропорционально квадратам этих чисел, т. е. пропорционально числам 1, 4, 9, 16, и т. д.

Мы видели, что в каждом главном колебании однородной балки грузовая линия сил инерции подобна кривой прогибов, так как в каждой точке сила инерции $\mu_1 dx \omega^2 u$ пропорциональна прогибу u . Следовательно, каждой форме колебания соответствует своя грузовая линия $\mu_1 \omega^2 u$. Такая точка зрения оказывается полезной при разрешении многих задач, из которых мы сейчас возьмем для рассмотрения один типичный пример.

Балка на двух опорах находилась в покое. В некоторый момент к ней в середине прилагают внезапно нагрузку P , удерживаемую в течение t_0 секунд, после чего нагрузка снимается. Найти последующее движение балки.

Сосредоточенная нагрузка не принадлежит к числу «нормальных» в том смысле, что она вызывает не одно нормальное или главное колебание, а множество таких колебаний. Для решения задачи следовало бы заданную нагрузку разложить на нормальные нагрузки, т. е. соответствующую функцию разложить в ряд Фурье. Однако дело осложняется тем, что мы имеем сосредоточенную нагрузку. Заменяем ее равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q , приложенной на коротком расстоянии δ , так что $q\delta = P$. Тогда, пользуясь уравнением

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^l F(x) \sin n \frac{\pi x}{l} d \frac{\pi x}{l},$$

находим коэффициент Фурье:

$$a_n = \pm \frac{2P}{l},$$

где знак $+$ надо брать для $n = 1, 5, 9, \dots$, а знак $-$ для $n = 3, 7, 11, \dots$. Таким образом, сосредоточенная сила P , приложенная в середине балки, эквивалентна ряду синусоидальных нагрузок одной и той же интенсивности $2P/l$. Несколько первых гармоник разложения представлено на рисунок 69.

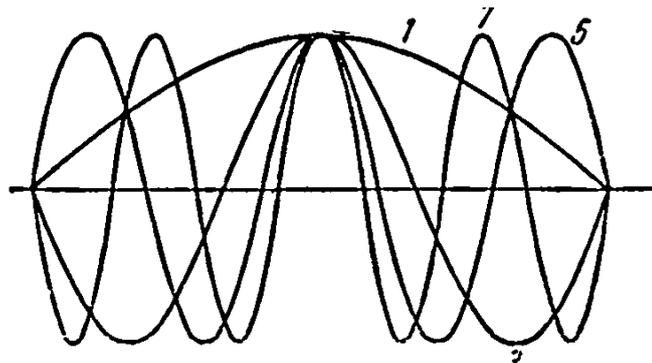


Рисунок 69 – Гармоники сосредоточенной нагрузки

Мы должны исследовать влияние на движение балки каждой такой нормальной нагрузки в отдельности. Каждая из них влияет лишь на то главное колебание, к которому она относится. Под действием любой из этих составляющих нагрузок система ведет себя так, как если бы она имела одну степень свободы. Итак, для первой составляющей полной нагрузки имеем

$$y = y_{ст} [\cos \omega_1 (t - t_0) - \cos \omega_1 t].$$

Кривая статических прогибов под действием нагрузки $q = (2P/l) \sin(n\pi x/l)$ находится посредством четырёхкратного интегрирования уравнения (3.36):

$$(y_{ст})_n = \frac{2Pl^3}{n^4 \pi^4 EI} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Полное движение определяется как результат наложения отдельных движений, соответствующих каждой гармонике; итак, можно написать

$$y(x, t) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1,3,5}^{n=\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4} [\cos \omega_n (t - t_0) - \cos \omega_n t],$$

причём значения ω_c находятся из уравнения (3.41).

Пусть нагрузка действует в течение промежутка времени t_0 , кратного периоду первой гармоники и, следовательно, кратного периодам всех высших гармоник. Тогда

$$\cos \omega_c (t - t_0) = \cos \omega_n t \text{ и решение } y(x, t)$$

обращается в нуль; после прекращения действия нагрузки никакого движения нет.

Рассмотрим теперь случай, когда нагрузка удерживается в течение $1/2$ периода основной гармоники (следовательно $9/2$ периода третьей гармоники, $25/2$ периода пятой гармоники и т.д.). Тогда $\cos \omega_c (t - t_0) = -\cos \omega_c t$ и квадратная скобка делается равной $-2 \cos \omega_c t$. Решение имеет вид

$$y(x, t) = \frac{4Pl^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1,3,5}^{n=\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \omega_c t.$$

Это движение содержит все гармоники, но их амплитуды пропорциональны $1/n^2$. Таким образом, если первая гармоника имеет в середине пролета амплитуду $2Pl^3/n^4 EI$, то соответствующая амплитуда третьей гармоники составляет $1/81$ от нее пятой — $1/625$ и т. д.

При пользовании методом Рэлея выражение (3.30) кинетической энергии, выведенное для струны, сохраняет свою силу также и для балки. Однако выражение (3.28) потенциальной энергии, которое относилось к струне, уже оказывается непригодным для случая балки. Выражение потенциальной энергии балки должно отличаться от выражения потенциальной энергии струны вследствие того, что упругий эффект в случае балки происходит в значительно большей степени вследствие сопротивления изгибу, определяемого жесткостью EI , чем вследствие натяжения T . Из сопротивления материалов мы имеем следующие формулы, определяющие величину потенциальной энергии, поглощаемой элементом длины dx балки:

$$dU = \frac{M^2}{2EI} dx,$$

или

$$dU = \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Написанные формулы могут быть весьма просто выведены следующим образом. Рассмотрим элемент dx балки, находящейся под действием изгибающего момента M (рисунок 70). Пусть этот элемент первоначально имел прямолинейные очертания, а затем был изогнут на угол $d\varphi$ моментами M . Если левый конец элемента предположить заделанным, то момент M поворачивает на угол $d\varphi$ его правый конец. Работа, совершаемая моментом M , дей-

ствующим на балку, равняется $1/2 M d\varphi$, где множитель $1/2$ появляется вследствие совместного возрастания от нуля до своих значений как момента M , так и угла $d\varphi$. Эта работа поглощается элементом балки в виде потенциальной энергии. Вычислим теперь угол $d\varphi$. Положим, что угол наклона левого конца элемента с абсциссой x определяется производной dy/dx ; тогда соответственно для правого конца имеем

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) dx.$$

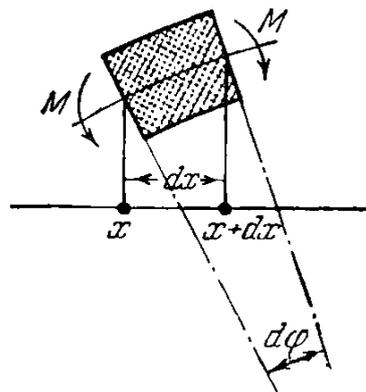


Рисунок 70 – Потенциальная энергия изгиба элемента балки

Отсюда находим разность углов:

$$d\varphi = \frac{d^2y}{dx^2} dx,$$

и тогда

$$dU = \frac{1}{2} M y'' dx.$$

Пользуясь теперь дифференциальным уравнением изогнутой оси балки

$$M = EI y'',$$

сейчас же приходим к обоим написанным выражениям.

Таким образом, полная потенциальная энергия балки будет

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (3.42)$$

Вычислим теперь основную собственную частоту консоли, т. е. балки, заделанной одним концом в стену и имеющей другой конец свободным. Здесь нам необходимо выбрать такую кривую для изогнутой оси (рисунок 71), которая горизонтальна при $x = 0$ и не имеет кривизны (а следовательно, и изгибающего момента) y'' при $x = l$. Двум поставленным требованиям удовлетворяет четверть косинусоиды:

$$y = y_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right). \quad (3.43)$$

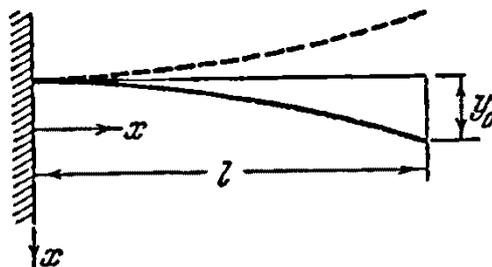


Рисунок 71 – Четверть волны косинусоиды, как рэлеевская форма изогнутой оси унсоли

Так как это выражение не может быть приведено к форме (3.40) путем того или иного использования множителей C , то поэтому форма кривой, определяемая уравнением (3.43), не является точной формой нормальной кривой. Подставляя написанное значение для y в выражения (3.42) и (3.30) и пользуясь формулой интегрирования, мы получим

$$U = \frac{\pi^4 EI}{64 l^3} y_0^2,$$

$$T = \mu_1 \omega^2 y_0^2 l \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi} \right).$$

Приравнивая друг к другу эти два выражения, мы найдём частоту

$$\omega = \frac{\pi^2}{8\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi}}} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1 l^4}} = \frac{3,66}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}. \quad (3.44)$$

Точное решение содержит множитель 3,52, который на 4% меньше полученного 3,66. На рисунке 72 изображена точная форма кривой для основного второго типа колебаний. Нормальная упругая кривая для балки с обоими заделанными концами должна иметь форму, симметричную относительно середины, с горизонтальными касательными на концах (рисунок 73). Простейшей кривой, удовлетворяющей этим условиям, является полная волна косинусоиды, смещённая вверх на y_0 :

$$y = y_0 \left[1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right].$$

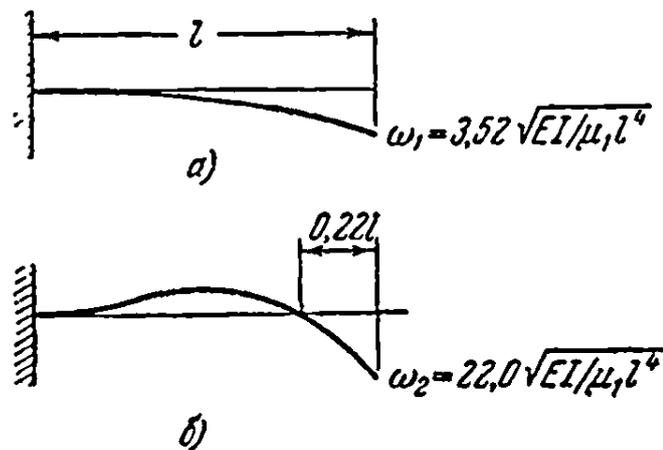


Рисунок 72 – Первые два главных колебания изгиба балки, заделанной одним концом (консоли)

Последовательно находим

$$U = \frac{EI}{2} y_0^2 \frac{16\pi^4 l}{l^4} \frac{l}{2},$$

$$T = \frac{\mu_1}{2} y_0^2 \omega^2 l \left(1 + \frac{1}{2} \right),$$

$$\omega = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1 l^4}} = \frac{22,7}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}. \quad (3.45)$$

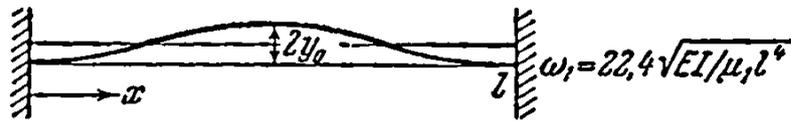


Рисунок 73 – Нормальная упругая кривая балки с заделанными концами
Точное решение задачи получается, если взять множитель 22,4, который на 1,3% меньше, чем 22,7.

Рассмотрим, наконец, балку со свободными концами, т. е. балку, подвешенную, например, на одной или нескольких нитях или же плавающую в жидкости. При простейшем типе колебаний (рисунок 74) здесь должно быть два узла и должна отсутствовать кривизна y'' на каждом конце. Простейшей пригодной формой изгиба может быть половина волны синусоиды, смещенной по вертикали на некоторое небольшое расстояние a

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{l} - a.$$

Величина a вертикального смещения имеет важное значение, так как она определяет положение двух узлов. При $a = 0$ они находятся на концах балки, а при $a = y_0$ оба узла совпадают, находясь в ее середине.

Истинное значение a , лежащее между 0 и y_0 , может быть найдено из тех соображений, что, поскольку на балку не действуют внешние силы, сумма проекций количеств движения всех ее частиц на вертикальную ось должна быть равна нулю. Когда балка при колебаниях проходит через положение равновесия, скорости ее концов равны soy и направлены вниз, в то время как скорость середины равна тоже soy , но уже направлена вверх. Так как балка однородна, т.е. все её частицы dx имеют одинаковую массу, то эти величины ωy пропорциональны соответственным количествам движений. Сумма количеств движения равна нулю, если площади фигур, получающихся выше и ниже осевой линии на рисунке 74, равны между собой, т.е., если имеем равенство

$$0 = \int_0^l y dx = y_0 \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx - \int_0^l a dx = \frac{2}{\pi} y_0 l - al,$$

откуда

$$a = \frac{2y_0}{\pi}.$$

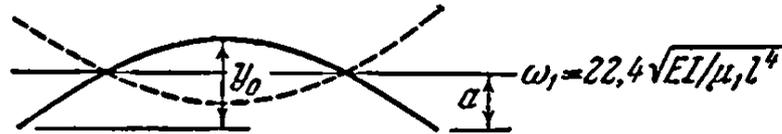


Рисунок 74 – Нормальная упругая кривая балки со свободными концами
Зная теперь форму кривой при колебаниях, мы находим:

$$U = y_0^2 \frac{\pi^4 EI}{4 l^3},$$

$$T = \mu_1 y_0^2 \omega^2 l \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right),$$

$$\omega = \frac{\pi^2}{2 \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}}} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1 l^4}} = \frac{22,72}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}. \quad (3.46)$$

Точный результат здесь такой же, как и в случае балки с заделанными концами, т. е. множитель получается равным 22,4, что на 1% меньше, чем 22,72.

3.7 Балки переменного поперечного сечения

Во многих практических случаях поперечное сечение балки не является постоянным по ее длине. Наиболее обычным примером подобной балки, лежащей на двух опорах, может служить вал, установленный на подшипниках: в самом деле, в средней своей части вал обыкновенно имеет большее поперечное сечение, чем вблизи концов. Стальной корабль, плавающий на воде, испытывает иногда колебания, как балка со свободными концами, подобно рисунку 74. Эти колебания достигают большой величины, если неуравновешенные силы двигателей имеют такую же частоту, как и частота собствен-

ных колебаний корабля. При этом надо заметить, что жесткость корабля на изгиб ни в какой мере не может считаться постоянной по его длине.

Метод Рэлея может быть применен также к случаю такой неоднородной балки, поскольку всегда возможно так или иначе наметить форму упругой линии. Вычисления здесь выполняются совершенно таким же образом, как и для балки постоянного сечения, с тем лишь очевидным исключением, что необходимо видоизменить выражение (3.42) для потенциальной энергии путем введения переменной жесткости EI под знак интеграла. Если жесткость изменяется вдоль длины x по более или менее сложному закону, то вычисление интеграла для потенциальной энергии может представить значительные трудности; однако, если даже такое точное вычисление невозможно, величина интеграла всегда может быть найдена графическим путем.

Стодола дал несколько иной метод определения частоты собственных колебаний, применив его впервые к роторам турбин. В этом методе расчет повторяется несколько раз, и после каждого повторения получаются все лучшие и лучшие результаты. Кратко говоря, здесь дело сводится к тому, что первоначально задают упругую линию изучаемого вала. Умножая ординаты упругой линии на соответственные массы и на квадрат неизвестной пока частоты, т. е. на $\mu_1(x)\omega^2$, мы получаем предполагаемую кривую инерционной нагрузки (грузовую линию). Так как величина ω^2 еще не известна, то в качестве исходного значения принимают ее равной единице. После этого, располагая инерционной нагрузкой $y_I(x)\mu_1(x)$ и пользуясь обычными методами графической статики, строят кривую прогибов, т. е. упругую линию $y_{II}(x)$. Очевидно, что эта вторая упругая линия $y_{II}(x)$ совпадает с предположенной вначале упругой линией $y_I(x)$ лишь тогда, когда:

- 1) $y_I(x)$ есть в точности нормальная упругая линия,
- 2) собственная частота ω точно равняется единице.

Первое из этих условий приблизительно выполняется, что же касается второго, то оно, вообще говоря, далеко от истины. Кривая прогибов $y_{II}(x)$ в большей или меньшей степени имеет такую же форму, как та, которую мы положили в основу расчета, т. е. $y(x)$, но ее ординаты могут оказаться, например, в 10000 раз меньше. Если это так, то нам следует попытаться получить хотя бы приблизительно равные ординаты $y_{II}(x)$ и $y_I(x)$, предположив, что $\omega^2 = 10000$. В таком случае первоначальная инерционная нагрузка должна быть в 10 000 раз больше, и конечные прогибы $y_{II}(x)$ тоже должны быть в 10000 раз больше, т. е. примерно должны равняться предположенным вначале. Таким образом, отношение ординат $y_I(x)$ и $y_{II}(x)$ является первым приближением для квадрата частоты ω^2 .

Если мы сделаем достаточно близкое к истине предположение о форме упругой линии, то указанным методом мы достигнем очень хорошего результата. Когда же требуется еще большая точность, то построение можно повторить, принимая уже $y_{II}(x)$ за исходную кривую и находя третью кривую $y_{III}(x)$. Далее будет показано, что этот процесс определения основного типа колебаний сходится, т. е. всякая последующая кривая ближе к истинной форме упругой линии, чем предыдущая. При этом в действительности указанная сходимость оказывается столь быстрой, что обычно даже нельзя обнаружить разницу между формами кривых $y_{III}(x)$ и $y_{II}(x)$.

Детали описанного построения относятся скорее к области графической статики, чем к динамике колебаний.

В качестве примера рассмотрим изображенный на рисунке 75, I вал длиной 1830 мм, покоящийся на двух подшипниках. Этот вал мы мысленно разделим на шесть участков равной длины, массы которых, а также жесткости на изгиб EI приведены в нижеследующей таблице, причем модуль упругости E мы полагаем равным $2,1 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2$. Предполагаемая кривая прогибов (упругая линия) обозначена римской цифрой II, Эта кривая имеет до-

вольно пологую форму в своей средней части по причине значительно большей жесткости этой части вала по сравнению с остальными. Чтобы получить инерционную нагрузку

$$y\mu_1\omega^2 = y\mu_1 \cdot I,$$

необходимо умножить ординаты y данной кривой на массу μ_1 , приходящуюся на каждый сантиметр длины вала, т. е. на числа второго столбца нашей таблицы. Таким образом, мы получаем кривую *III*, которая построена так, что каждый «сантиметр» представляет собою 0,00173 кГ/см. Все длины на чертеже измерены в сантиметрах, указанных на масштабе сверху схемы *I*.

Ордината кривой *II* в центре вала равна 38 см, а средняя ордината кривой *III* есть 0,152кГ/см (= 38 см · 0,004 (кГ сек²/см²) · 1/сек²).

Чтобы получить кривую прогиба под этой нагрузкой, необходимо выполнить четыре интегрирования, разбивающихся на две группы, по два интегрирования в каждой. Обращаясь к первой группе, мы видим, что из уравнения

$$q = \frac{d^2 M}{dx^2} \quad (3.35b)$$

путём двукратного интегрирования можно получить изгибающий момент M .

Здесь первое интегрирование выполняется графически посредством вычисления площадей фигур, ограниченных осью абсцисс, шестью участками кривой *III* и соответственными ординатами. Так, например, площадь первой из них, очень близкой по своей форме к треугольнику, равна

$$\frac{1}{2} \cdot 30,5\text{см} \cdot 0,0246 \frac{\text{кГ}}{\text{см}} = 0,376 \text{ кГ}.$$

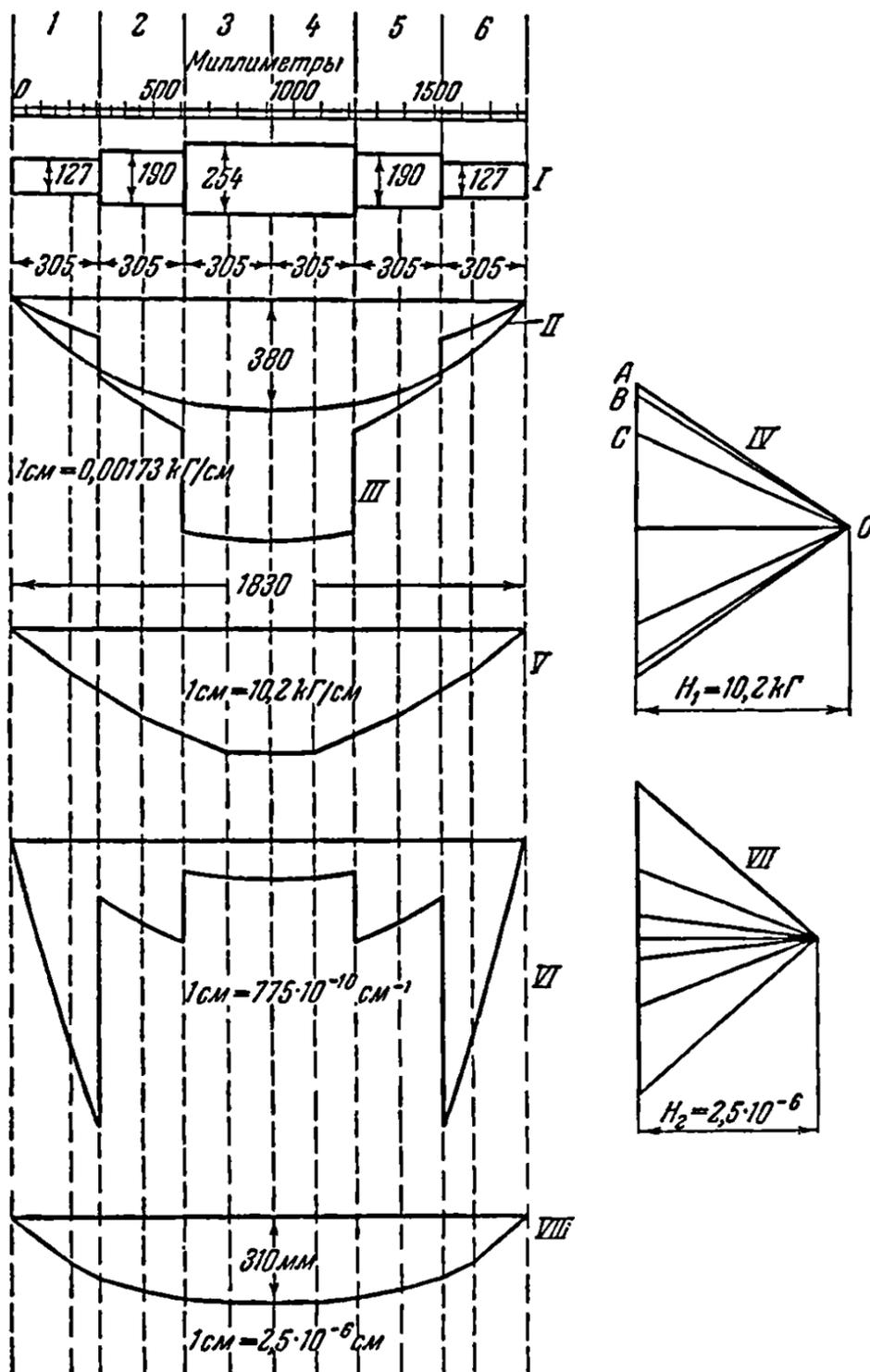


Рисунок 75 – Графическое определение основной частоты собственных колебаний ротора

Таблица 1

Номера участков	Масса на погонный сантиметр кГ сек ² /см ³	Масса всего участка кГ сек ² /см	EI кГ см ²
1	0,00100	0,0305	$26,8 \cdot 10^8$
2	0,00225	0,0686	$135,6 \cdot 10^8$
3	0,00400	0,1220	$428,0 \cdot 10^8$
4	0,00400	0,1220	$428,0 \cdot 10^8$
5	0,00225	0,0686	$135,6 \cdot 10^8$
6	0,00100	0,0305	$26,8 \cdot 10^8$

Это есть уже полная центробежная сила (при $\omega = 1/\text{сек}^2$) всего первого участка вала, а следовательно, эта величина представляет собою также и разность перерезывающих сил, действующих на левый и правый концы соответствующего участка 1. Шесть площадей кривой *III* отложены последовательно по вертикали сверху вниз на силовом плане *IV*, где, например, AB есть 0,376 кГ; на этом же плане имеем BC — 2,00 кГ, а именно, площадь участка 2 кривой *III* и т. д. Таким образом, вертикальная прямая на плане слева равна значению перерезывающих сил и является результатом первого интегрирования. Возьмем теперь произвольное горизонтальное расстояние H_1 (полюсное расстояние), которое положим здесь равным 10,2 кГ и соединим полюс O с точками A, B, C и т. д. Далее, строим кривую F , проводя линии, параллельные лучам *IV*, так, чтобы, например, прямая, параллельная прямой OB (которая отделяет участок 1 от участка 2), проходила между вертикальными пунктирными линиями, проведенными через центры тяжести площадей 1 и 2 на кривой *III* и т. д. Полученная таким образом эпюра V дает значения изгибающих моментов. Так, например, изгибающий момент в середине вала оказывается равным 454 кГ см.

Чтобы перейти, наконец, от эпюры моментов V к упругой линии *VIII*, мы должны выполнить еще два интегрирования, а именно, должны проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Это уравнение имеет совершенно такой же вид, как и уравнение (3.35b). Итак, кривая прогибов y может рассматриваться как «эпюра изгибающих моментов для балки с нагрузкой M/EI ». Значения жесткости EI для различных участков вала даны в последнем столбце таблицы, а кривая VI представляет собой диаграмму для величин M/EI . Мы можем повторить весь предыдущий процесс, посредством которого мы перешли от кривой III к кривой V при помощи плана IV . В данном случае мы переходим от кривой VI к кривой $VIII$ посредством плана VII . Ординаты кривой III были измерены в кГ/см, тогда как на кривой VI они измеряются в см^{-1} , следовательно, размерности на диаграммах VI , VII , $VIII$ получаются из размерностей на соответствующих им диаграммах III , IV , V посредством деления на килограммы. В частности, плюсное расстояние H_2 на плане VII оказывается величиной безразмерной, т. е. это есть отвлеченное число.

Упругая линия $VIII$ по своей форме может быть более или менее сходной с первоначально предположенной линией II , однако ее средняя ордината (стрела прогиба) теперь уже равна

$$31 \text{ см} \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} = 77,5 \cdot 10^{-6} \text{ см} = 0,000775 \text{ мм},$$

тогда как прежде на кривой II мы для нее имели 38 см. Отсюда находим первое приближение для собственной частоты поперечных колебаний вала:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{38}{77,5 \cdot 10^{-6}}} = 700 \frac{1}{\text{сек}}.$$

3.8 Нормальные функции и их применение

Обратимся теперь к доказательствам минимальной теоремы Релея и сходимости процесса Стодолы.

Мы уже видели, что в случаях струны и балки на двух опорах различные нормальные упругие линии представляют собою синусоиды:

$$y_1 = \sin \frac{\pi x}{l}, y_2 = \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, y_n = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

В этих выражениях амплитуды колебаний произвольно положены равными единице, т. е. такими, чтобы максимальные прогибы равнялись 1 см.

С другой стороны, оказалось, что в случае консоли, а также в случае балки с изменяющимся поперечным сечением упругие линии представляют собою уже кривые с более сложной структурой.

Мы знаем также, что какая-либо произвольная кривая между 0 и l может быть разложена на ряд кривых соответственно разложению изображающей ее функции в тригонометрический ряд или в ряд Фурье, причём одно из наиболее важных свойств таких рядов заключается в том, что

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad (m \neq n).$$

В примечании к частному случаю колебаний струны это означает то, что всякая упругая линия $y(x)$, форму которой можно придать струне посредством некоторой внешней нагрузки, может распадаться на ряд «нормальных» составляющих кривых. Это положение остается верным не только для струны с ее синусоидами, но и вообще для всякой упругой системы.

Пусть будут $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — нормальные упругие кривые для некоторой системы длины l , тогда какая-либо произвольная упругая линия $y(x)$ этой системы может быть разложена в ряд

$$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_n y_n(x) + \dots \quad (3.47)$$

Больше того, здесь имеет место соотношение

$$\int_0^l \mu_1(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0 \quad (m \neq n), \quad (3.48)$$

а поэтому любой коэффициент a_n в разложении (3.47) может быть найден как

$$a_n = \frac{\int_0^l \mu_1(x) y_n(x) y_m(x) dx}{\int_0^l \mu_1(x) y_n^2(x) dx}. \quad (3.49)$$

Все это дает нам широкое обобщение понятия рядов Фурье.

Для доказательства равенства (3.48) рассмотрим упругую систему (балку) длиной l , упругие свойства которой определяются так называемой «функцией влияния» $I(x, x_1)$, представляющей собою (рисунок 7б) величину прогиба балки в точке x , вызванного нагрузкой, равной 1 кГ, помещенной в точке x_1 . В выражении функции как x , так и x_1 являются переменными, изменяющимися в пределах от 0 до l .

Теорема Максвелла о взаимности перемещений, доказываемая в курсах сопротивления материалов, утверждает, что прогиб в точке вызванный единичной нагрузкой, приложенной в точке 2, равняется прогибу в точке 2 под действием единичной нагрузки в точке 1. Вследствие этого функция влияния удовлетворяет соотношению

$$I(x, x_1) = I(x_1, x).$$

Положим, что балка колеблется с одной из ее собственных частот, имея форму $y_n(x)$. Тогда наибольшая сила инерции, действующая на участок dx_1 балки с единичной массой (массой, приходящейся па единицу длины) μ_1 , есть

$$\mu_1(x_1) dx_1 \omega_n^2 y_n(x),$$

а прогиб в точке x , вызванный этой нагрузкой, равен

$$\omega_n^2 y_n(x_1) I(x, x_1) \mu_1(x_1) dx_1.$$

Но так как указанная инерционная нагрузка действует па каждый элемент dx_1 балки между 0 и l , то действительная упругая линия должна получиться в результате суммирования всех таких функций, выражающих собою отдельные упругие линии, являющиеся результатом действия элементарных нагрузок, а именно:

$$y_n(x) = \omega_n^2 \int_0^l y_n(x_1) I(x, x_1) \mu_1(x_1) dx_1. \quad (3.50)$$

Это соотношение имеет место лишь в том случае, когда $y_n(x)$ определяет собою один из главных типов колебаний, так как только тогда балка может находиться в равновесии под действием нагрузок, пропорциональных соответственным перемещениям.

Чтобы теперь доказать справедливость равенства (3.48), умножим обе части уравнения (3.50) на $\mu_1(x) y_m(x) dx$ и проинтегрируем в пределах от 0 до l :

$$\begin{aligned} & \int_0^l \mu_1(x) y_n(x) y_m(x) dx = \\ & = \omega_m^2 \int_0^l \int_0^l y_n(x_1) y_m(x) I(x, x_1) \mu_1(x_1) \mu_1(x) dx dx_1. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Но так как уравнение (3.50) имеет место для любой собственной частоты, то мы можем заменить n значком m и наоборот. После этого опять умножим обе части полученного уравнения, но теперь уже на $\mu_1(x) y_n(x) dx$ и опять проинтегрируем. Получим

$$\int_0^l \mu_1(x) y_n(x) y_m(x) dx = \omega_m^2 \int_0^l \int_0^l y_m(x_1) y_n(x) I(x, x_1) \mu_1(x_1) \mu_1(x) dx_1 dx .$$

В последнем двойном интеграле мы можем изменить порядок интегрирования, т.е. поменять местами x и x_1 . Тогда

$$\int_0^l \mu_1(x) y_m(x) y_n(x) dx = \omega_m^2 \int_0^l \int_0^l y_m(x) y_n(x_1) I(x_1, x) \mu_1(x) \mu_1(x_1) dx dx_1 .$$

Так как по теореме Максвелла

$$I(x, x_1) = I(x_1, x),$$

то легко видеть, что написанный сейчас двойной интеграл оказывается таким же самым, как и в уравнении (3.51). Пусть его величина есть A ; тогда, вычитая почленно последнее уравнение из уравнения (3.51), получим

$$0 = (\omega_n^2 - \omega_m^2)A.$$

Это значит, что $\omega_m \neq \omega_n$ двойной интеграл A равен нулю, вследствие чего обращается в нуль также левая часть (3.51) и, таким образом, соотношение (3.38) доказано.

Доказательство минимальной теоремы Рэлея. Приближённая кривая $y(x)$, принимаемая в методу Рэлея, сама по себе не является нормальной упругой кривой, но может быть разложена в ряд таких кривых:

$$y(x) = y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) + \dots + a_n y_n(x) + \dots$$

Чтобы выразить то обстоятельство, что $y(x)$ есть приближение $y_1(x)$, соответствующий коэффициент должен быть положен равным единице, в то время как остальные коэффициенты a_2, a_3 и т.д. могут быть малыми числами. Нормальная упругая линия $y_n(x)$ является кривой, по которой изгибается балка под действием статической нагрузки $\mu_1 \omega_n^2 y_n(x)$.

Тогда статическая нагрузка $p(x)$, вызывающая изгиб по предположенной кривой $y(x)$, представится так:

$$p(x) = \mu_1 [\omega_1^2 y_1(x) + a_2 \omega_2^2 y_2(x) + a_3 \omega_3^2 y_3(x) + \dots + a_n \omega_n^2 y_n(x) + \dots].$$

Потенциальная энергия элемента dx есть

$$\frac{1}{2}y(x)p(x)dx,$$

а тогда полная потенциальная энергия выразится интегралом

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \mu_1 [\omega_1^2 y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) + \dots + a_n y_n(x) + \dots] \times \\ \times [\dots + a_n \omega_n^2 y_n(x) + \dots] dx.$$

Но по уравнению (3.48) все интегралы от произведений, где $m \neq n$, равны нулю. Поэтому

$$U = \frac{1}{2} \left(\omega_1^2 \int_0^l \mu_1 y_1^2 dx + \dots + a_n \omega_n^2 \int_0^l \mu_1 y_n^2 dx + \dots \right).$$

Кинетическая энергия элемента dx , проходящего при колебании через своё равновесное положение со скоростью $\omega y(x)$, равна

$$\frac{1}{2} \omega^2 y^2 \mu_1 dx,$$

а тогда полная кинетическая энергия будет

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \mu_1 y^2 dx = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\int_0^l \mu_1 y_1^2 dx + \dots + a_n \int_0^l \mu_1 y_n^2 dx \right),$$

где опять пропадают все члены с произведениями $y_m y_n$.

Легко видеть, что как потенциальная, так и кинетическая энергии состоят из сумм отдельных энергий, присущих компонентам y_1, y_2, y_3 и т.д. Это положение имеет место лишь в том случае, когда y_1, y_2, y_3 определяют главные или нормальные типы колебаний, если же этого нет, то необходимо включить в рассмотрение также произведения $y_m y_n$.

Пользуясь методом Рэлея, мы приравниваем эти две энергии друг другу и разрешаем полученное уравнение относительно ω^2 . Получаем

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 \int_0^l \mu_1 y_1^2 dx + \dots + a_n \int_0^l \mu_1 y_n^2 dx + \dots}{\int_0^l \mu_1 y_1^2 dx + \dots + a_n \int_0^l \mu_1 y_n^2 dx + \dots},$$

или

$$\omega^2 = \omega_1^2 \frac{1 + \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} a_2^2 \binom{2}{1} + \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2} a_3^2 \binom{3}{1} + \dots}{1 + a_2^2 \binom{2}{1} + a_3^2 \binom{3}{1} + \dots}, \quad (3.52)$$

где символ $\binom{n}{1}$, при $n=1, 2, 3, \dots$ обозначает следующее выражение:

$$\binom{n}{1} = \frac{\int_0^l \mu_1 y_n^2 dx}{\int_0^l \mu_1 y_1^2 dx}.$$

Так как $\omega_2 > \omega_1, \omega_3 > \omega_2$ и т.д., то из формулы (3.52) легко видеть, что все члены в числителе, начиная со второго, больше соответствующих членов знаменателя, а поэтому дробь, входящая в эту формулу, является неправильной, откуда следует, что

$$\omega > \omega_1,$$

т.е. частота ω , найденная с помощью метода Рэлея, получается больше, чем первая собственная частота ω_1 , что и требовалось доказать.

Доказательство сходимости процесса Стодолы. Положим, что первая допущенная нами кривая прогибов выражается функцией $y_1(x)$, где

$$y(x) = y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) + \dots + a_n y_n(x) + \dots$$

Пусть масса распределяется по закону $\mu_1(x)$, а произвольная частота $\omega = 1$; тогда инерционная нагрузка имеет вид

$$\mu_1 y = \mu_1 y_1 + a_2 \mu_1 y_2 + a_3 \mu_1 y_3 + \dots + a_n \mu_1 y_n + \dots$$

Упругая линия для нагрузки $\mu_1 \omega^2 y_n$ определяется кривой y_n . Следовательно, под нагрузкой $a_n \mu_1 y_n$ получаются прогибом по закону $a_n y_n / \omega_n^2$, а поэтому вторая упругая линия в данном процессе определяется функцией

$$y_{II}(x) = \frac{y_1(x)}{\omega_1^2} + \dots + \frac{a_n y_n(x)}{\omega_n^2} + \dots,$$

которая отличается от функции, выражающей первую кривую тем, что каждый член ряда делится на квадрат соответствующий частоты.

Поступая таким же образом и дальше, мы находим для $(n + 1)$ – й

$$y_{n+1} = \frac{1}{\omega_1^{2n}} \left[y_1 + \left[\frac{\omega_1}{\omega_2} \right]^{2n} a_2 y_2 + \left[\frac{\omega_1}{\omega_3} \right]^{2n} a_3 y_3 + \dots \right].$$

Также как $\omega_1 < \omega_2, \omega_1 < \omega_3$ и т.д., то легко видеть, что с возрастанием числа n члены, содержащие y_2, y_3, \dots и искажающие основное колебание, уменьшаются, а тогда первое (основное) главное колебание не y_1 проявляется всё в более и более чистом виде.

3.9 Метод Стодолы для высших типов колебаний

Приведенное доказательство показывает, что попытка построить вторую нормальную упругую кривую с помощью метода Стодолы, обречена на неудачу, так как всякое искажение основной упругой кривой, содержащейся в пробной форме второй кривой, будет увеличиваться и превзойдет ординаты самой кривой. После большого числа повторных построений мы найдем, что второй тип колебаний исчезает совершенно, и остается опять лишь первый тип. Тем не менее все же возможно найти колебания второго типа, если перед каждой операцией упругую кривую «очищать» от компонента первого типа. Для этого, прежде всего, необходимо достаточно точно знать форму первого типа колебания.

Пусть $y(x)$ есть предположенная форма второго типа, которая, к несчастью, содержит какую-то долю «гармонической примеси» $Ay_1(x)$, Тогда нам желательно найти выражение

$$y(x) - Ay_1(x),$$

свободное от такого «гармонического засорения». Для нахождения величины A подставим это выражение в уравнение (3.48). Получим

$$\int_0^l \mu_1(x) [y(x) - Ay_1(x)]y_1(x)dx = 0$$

или

$$\int_0^l \mu_1(x)y(x)y_1(x)dx = A \int_0^l \mu_1(x)y_1^2(x)dx,$$

откуда

$$A = \frac{\int_0^l \mu_1(x)y(x)y_1(x)dx}{\int_0^l \mu_1(x)y_1^2(x)dx}. \quad (3.53)$$

Подставляя эти числа в уравнения (3.54) и умножая на постоянные так, чтобы было $a_1 = 1,000$, находим

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = 0,116, \quad a_3 = -1,181, \quad (II)$$

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = 0,051, \quad a_3 = -1,125, \quad (III)$$

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = -0,024, \quad a_3 = -1,148. \quad (IV)$$

В этом процессе всё же в решении оказалась ошибка вследствие значительной доли первой гармоники; поэтому опять необходимо произвести очищение с помощью уравнения (3.53).

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = 0,038, \quad a_3 = -1,058. \quad (IV, \text{очищенн.})$$

Продолжаем вычисления

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = 0,018, \quad a_3 = -1,035, \quad (V)$$

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = 0,000, \quad a_3 = -1,034. \quad (VI)$$

Снова оказывается необходимым освободиться от вошедшей доли первой гармоники.

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = 0,012, \quad a_3 = -1,018, \quad (VI, \text{очищенн.})$$

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = 0,006, \quad a_3 = -1,012, \quad (VII)$$

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = 0,000, \quad a_3 = -1,012, \quad (VIII)$$

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = 0,004, \quad a_3 = -1,006, \quad (VIII, \text{очищенн.})$$

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = 0,002, \quad a_3 = -1,004, \quad (IX)$$

$$a_1 = 1,000, \quad a_2 = 0,000, \quad a_3 = -1,004. \quad (X)$$

Отсюда видно, что сходимость очень медленная, и что первая гармоника непрерывно «пробивается» в расчёт, и поэтому от неё необходимо избавляться почти на каждом этапе расчёта.

3.10 Кольца, мембраны и пластинки

Очень часто при изучении какой-либо сложной конструкции или машины для предварительных расчетов бывает вполне достаточно применить полученные данные, касающиеся колебаний струн и балок. При этом мы получаем удовлетворительную точность отображения действительного явления при помощи выбранной нами схемы. Когда это оказывается невозможным, наша схематизация может быть осуществлена путем использования более сложных элементов, как-то: колец (кривых брусьев) мембран и пластинок. Однако вычисление собственных частот колебаний этих элементов значительно более сложно, чем в рассмотренных выше случаях. Поэтому здесь мы

приведем лишь готовые результаты, выводы которых указаны к книге С. П. Тимошенко. «Колебания в инженерном деле».

Полное кольцо. Из всех возможных движений полного кольца наибольшее значение имеют колебания изгиба. Можно показать, что если кольцо имеет равномерно распределенную массу и постоянную жесткость, то тонная форма колебаний является синусоидальной. Основные формы колебаний с четырьмя, шестью и восемью узлами, или, что то же, с двумя, тремя или четырьмя полными волнами по окружности, показаны на рисунке 77.

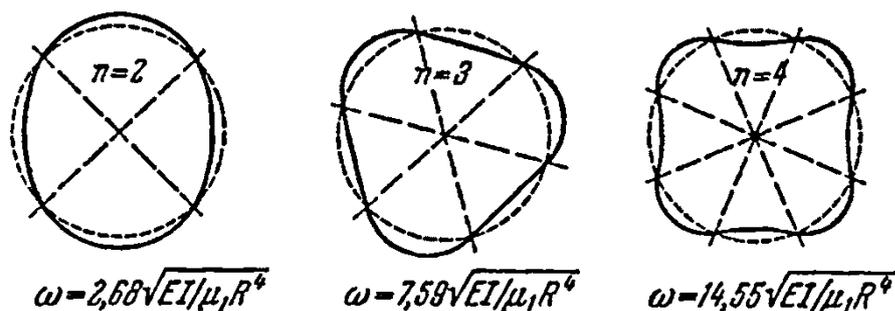


Рисунок 77 – Нормальные формы колебаний изгиба кольца в своей плоскости
Точная формула для собственной частоты имеет вид

$$\omega_c = \frac{n(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1 R^4}}, \quad (3.55)$$

где n есть число полных волн, μ_1 – масса, приходящаяся на единицу длины кольца, EI – жёсткость на изгиб и R – радиус.

Одно из наиболее важных применений приведенного результата имеет место в колебаниях статоров электрических машин. Так как эти машины часто несут выступающие полюсы, играющие роль сосредоточенных масс, то точная форма изогнутой оси уже не будет, вообще говоря, синусоидальной. Тем не менее, если обратиться к методу Рэлея, мы можем в качестве приближенной формы взять также и синусоиду. Потенциальная энергия системы не изменяется от добавления полюсов, зато кинетическая энергия систем изменится, перейдя от значения T_k к значению $T_k + T_{\Pi}$, где индекс «к» относится к

кольцу, а индекс «п» — к полюсам. Таким образом, формула (3.55) для частоты должна быть исправлена введением множителя

$$\sqrt{\frac{T_k}{T_k + T_p}}. \quad (3.56)$$

В том случае, когда число полюсов есть $2n$, т. е. равно числу полуволн вдоль конца, и когда эти полюсы располагаются в пучностях волн, обладая вследствие этого лишь поступательным движением, то поправочный множитель (3.56) принимает здесь особый вид

$$\sqrt{\frac{M_k}{M_k + M_p \frac{2n^2}{n^2 + 1}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2n^2}{n^2 + 1} \frac{M_p}{M_k}}}, \quad (3.57)$$

где M_k есть масса полного кольца и M_p — общая масса всех полюсов, вследствие чего M_p/M_k представляет собою отношение массы одного полюса к массе части кольца, приходящейся на один полюс.

С другим важным случаем мы встречаемся тогда, когда $2n$ полюсов расположены в узлах радиальных колебаний и испытывают поэтому колебательные движения вокруг осей соответствующих узлов. Для этого случая поправочный множитель имеет вид

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{n^5}{n^2 + 1} \frac{4I_p}{M_k R^2}}}, \quad (3.58)$$

где I_p есть момент инерции одного полюса относительно оси, вокруг которой он вращается при колебании. Истинное положение этой оси иное, и точно определить его довольно трудно (так как «узел» кольца, о котором идет речь, есть узел лишь для радиальных движений, и в то же время он может переме-

щаться взад и вперед по касательной). Однако без большой ошибки можно считать, что эта ось пересекает в узловой точке осевую линию кольца.

Часть кольца. Очень часто статоры электромоторов или генераторов прикрепляются болтами к фундаменту так, как показано на рисунке 78, а. Если фундамент или опорная плита имеет очень большую жесткость, то статор можно рассматривать как часть кольца с углом α , заделанную обоими концами. Основная форма колебаний подобного кольца в его плоскости будет примерно такая, как это помечено на рисунке 78, б. Собственный период такого колебания, вычисленный по методу Рэлея, выражается формулой такого же самого типа, что и формула (3.55), с той лишь разницей, что числовой множитель, стоящий перед радикалом, уже оказывается зависящим от центрального угла α . Обозначая его через $f(\alpha)$, имеем

$$\omega = f(\alpha) \sqrt{\frac{EI}{\mu_1 R^4}}. \quad (3.59)$$

Значения коэффициента $f(\alpha)$ для различных значений угла α от $\alpha = 180^\circ$ (половина кольца) до $\alpha = 360^\circ$ (полный круг кольца, заделанного в одной точке) даны на диаграмме рисунка 79.

В том случае, когда статор несёт выступающие полюсы, следует и здесь применять поправочный множитель (3.56). Так как различные точки, где помещены полюсы (рисунок 78, б), перемещаются, грубо говоря, с одинаковой амплитудой (в этом отношении рассматриваемый случай коренным образом отличается от случаев, представленных на рисунке 77), то без большой ошибки мы можем считать, что массы полюсов равномерно распределяются вдоль кольца.

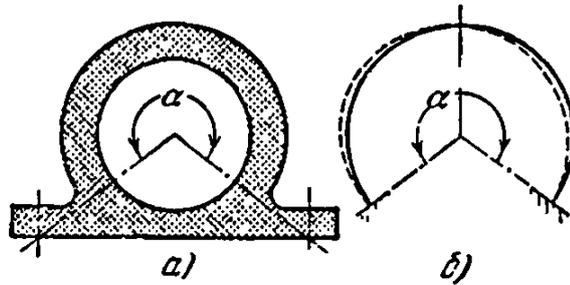


Рисунок 78 – Основная форма колебаний изгиба части кольца в своей плоскости

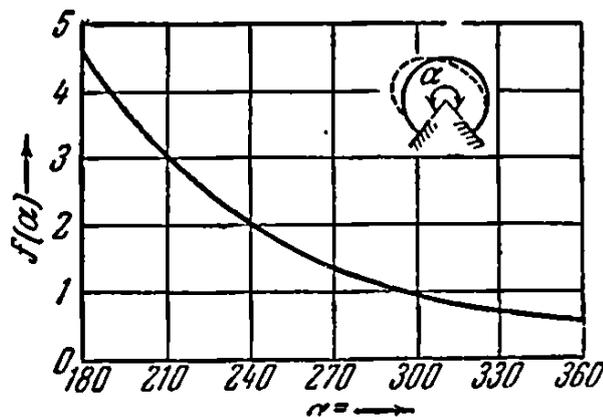


Рисунок 79 – Коэффициент $f(\alpha)$ в уравнении (3.59) для частоты системы на рисунке 78

Собственная частота, вычисленная по формуле (3.59) и по рисунку 79, обычно оказывается несколько более высокой (примерно на 10%) вследствие того, что основание статора в действительности не является вполне заделанным, а допускает некоторые угловые перемещения.

Если кольцо, изображенное на рисунке 78, имеет малые размеры в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа (т.е. в направлении оси цилиндра), то мы встречаемся с появлением еще иного движения, которое в этих случаях нежелательно. Именно, здесь получаются колебания, перпендикулярные к плоскости чертежа. Если посмотреть сбоку на систему, изображенную на рисунке 78, то она представится нам в виде балки высотой A , заделанной своим нижним концом. Поперечные колебания такой балки будут иметь форму наподобие изображенной на рисунке 72, а.

В этом случае упругое сопротивление кольца состоит из совокупности сопротивления изгибу и сопротивления скручиванию, которое определяется величинами: EI_2 — жесткости на изгиб теперь уже в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа, т. е. под углом 90° к плоскости, где жесткость равна той жесткости EI , которая входит в уравнения (3.55) и (3.59); C — жесткости на кручение (которая равна GI_p для бруса кругового поперечного сечения).

Частота может быть написана в таком виде:

$$\omega = f\left(\alpha, \frac{EI_2}{C}\right) \sqrt{\frac{EI_2}{\mu_1 R^4}}, \quad (3.60)$$

где числовой коэффициент перед радикалом определяется по диаграмме, представленной на рисунке 80. Эта диаграмма была построена с помощью видоизмененного метода Рэлея и затем подвергнута проверке лабораторными испытаниями, которые подтвердили в существенных чертах справедливость результатов расчета.

Мембрана представляет собою сильно натянутую пленку, совершенно не имеющую жесткости на изгиб. Ее, следовательно, можно рассматривать как двухмерное обобщение струны. Круглая мембрана, например кожа барабана, имеет бесконечное число типов колебаний, причем узловыми линиями служат ее диаметры, а также концентрические окружности, меньшие, чем окружность заделки. Однако в нашем рассмотрении мы ограничимся лишь основным типом колебаний, когда нет никаких узловых линий, за исключением контура, Форма мембраны при колебании практически представляет собою холм, образованный вращением синусоиды (рисунок 81). Частота таких колебаний равна

$$\omega = 2,40 \sqrt{\frac{T}{\mu_1 R^2}} = 4,26 \sqrt{\frac{T}{\mu_1 S}}, \quad (3.61)$$

где T есть натяжение, отнесённое к 1 см длины какого-либо сечения мембраны, μ_1 – масса единицы площади и S – вся площадь мембраны, равная πR^2 .

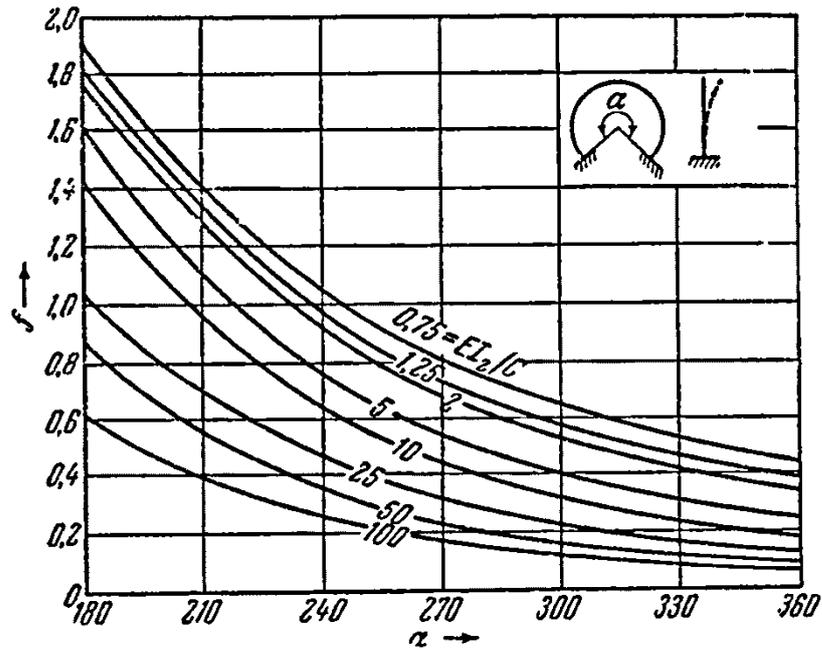


Рисунок 80 – Коэффициенты $f\left(\alpha, \frac{EI_2}{c}\right)$ в уравнении (3.60) для частоты части кольца, колеблющегося перпендикулярно к своей плоскости

Второй вид написанной формулы является пригодным для использования в тех случаях, когда мембрана уже не круглая, а имеет контур какой-либо иной формы, хотя бы в самой отдаленной степени напоминающей окружность (например, квадрат, треугольник, половина или четверть круга и т. п.). Даже в этих случаях формула (3.61) остается приблизительно верной, если только величину 8 положить равной площади данной некруговой мембраны. В подобных случаях числовой множитель перед радикалом оказывается несколько большим, чем $4,26$. Чтобы дать понятие о вводимой погрешности, упомянем, что для квадратной мембраны множитель $4,26$ в уравнении (3.61) становится равным $4,44$, для прямоугольной мембраны со сторонами 2×1 он равен $4,97$, а для прямоугольной мембраны со сторонами 3×1 он уже равняется $5,74$.

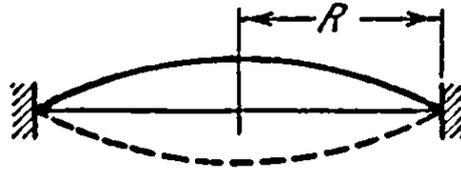


Рисунок 81 – Основная форма колебаний барабанной кожи

Совершенно таким же образом, как мы считали мембрану двухмерной струной, можно рассматривать пластинку как двухмерную «балку». Теория колебаний пластинок (даже в приближенной форме Рэлея—Ритца) является весьма сложной. Результаты этой теории известны для круглой и прямоугольной пластинок со свободными, с заделанными и со свободно опертыми краями.

4 Автоколебания

4.1 Общие замечания

Явления, которыми мы занимались до сих пор, относились либо к свободным колебаниям, либо к вынужденным, причем мы сосредоточивали свое внимание на тех из них, которые являлись наиболее опасными в практике. Однако во многих случаях наблюдались такие возмущенные состояния системы, которые относятся к совершенно иному классу явлений, известных под названием самовозбуждающихся колебаний, или автоколебаний. Сущность отличия этих последних от предыдущих лучше всего может быть выяснена на примерах.

Рассмотрим, прежде всего, обыкновенную одноцилиндровую паровую машину, поршень которой совершает возвратно-поступательное движение. Это движение можно рассматривать как своего рода колебание. Очевидно, что сила, поддерживающая такое колебательное движение, получается вследствие давления пара, действующего попеременно то на одну, то на другую сторону поршня.

Далее рассмотрим неуравновешенный диск, укрепленный на гибком валу, вращающемся в двух подшипниках (рисунок 82). Центр диска совершает колебательное движение, причем это движение поддерживается неуравновешенной центробежной силой, толкающей диск попеременно то вверх, то вниз.

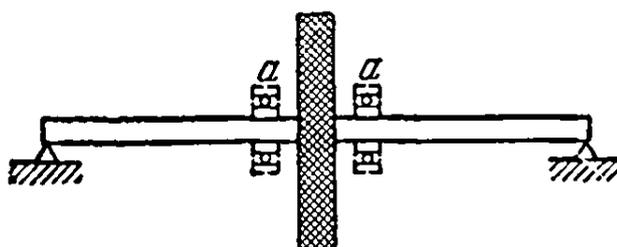


Рисунок 82 – Неуравновешенный вал

В случае паровой машины мы имеем дело с автоколебаниями, тогда как диск испытывает обыкновенные вынужденные колебания. Допустим, что закреплением крейцкопфа или маховика мы предотвратили движение поршня. Тогда тем самым будут лишены движения парораспределительные клапаны, а вследствие этого не будет также переменной силы давления пара на поршень.

С другой стороны, предположим, что мы предотвратили колебания диска, установив, например, на валу около диска два шаровых подшипника а, а и прикрепив их внешние кольца к неподвижному фундаменту, Тогда колебания диска отпадают, и его вращательное движение становится невозмущенным. Однако, в этом случае все же остается вращение неуравновешенных масс, вследствие чего остается и переменная сила.

Таким образом, мы можем отметить следующее различие.

В автоколебаниях переменная сила, поддерживающая движение, создается или управляется самим движением, и при прекращении движения эта переменная сила исчезает.

В вынужденных колебаниях поддерживающая движение переменная сила существует независимо от движения и остается даже в том случае, когда колебательное движение прекращается.

Существует еще другой взгляд на автоколебания, согласно которому они рассматриваются как свободные колебания с отрицательным затуханием. Следует отдать себе отчет в том, что эта новая точка зрения не противоречит предыдущей. Дело в том, что обычная сила вязкости, вызывающая затухание, есть сила, пропорциональная скорости колебания и направленная против нее. Отрицательная же сила затухания также пропорциональна скорости, но направлена в сторону скорости. Поэтому вместо уменьшения амплитуд при свободных колебаниях в данном случае вследствие отрицательного затухания мы имеем их увеличения. Так как сила затухания, будь она положительна или отрицательна, исчезает при остановке движения, то второе определение находится в согласии с первым.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение движения системы, имеющей одну степень свободы, при отрицательном затухании:

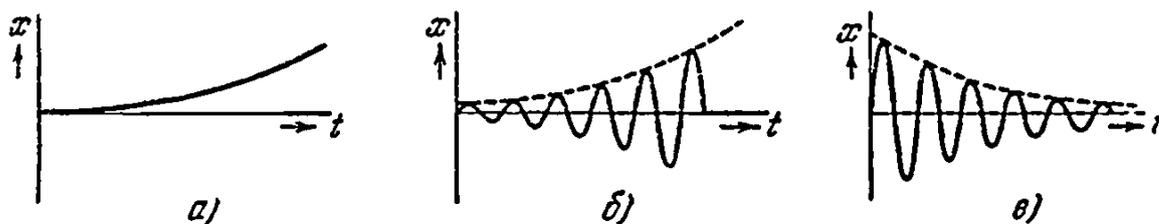
$$\ddot{x} - c\dot{x} + k = 0. \quad (4.1)$$

Решение данного уравнения может быть записано в виде

$$x = e^{+\frac{c}{2m}t}(A \cos qt + B \sin qt), \quad (4.2)$$

откуда ясно, что мы имеем дело с колебаниями, амплитуда которых возрастает, как показательная функция (рисунок 83).

Система с положительным затуханием иногда называется динамически устойчивой, тогда как в случае отрицательного затухания она называется динамически неустойчивой. Между устойчивостью статической и устойчивостью динамической имеется разница. Механическая система статически устойчива, если при ее отклонении от положения равновесия возникает сила (или пара), стремящаяся возвратить ее в равновесное положение.



- а) статически неустойчивое;
 б) статически устойчивое, но динамически неустойчивое;
 в) статически и динамически устойчивое.

Рисунок 83 – Свободные движения системы

Она статически неустойчива, если возникающая в таком случае сила стремится увеличить отклонение. Таким образом, при статической неустойчивости мы имеем отрицательное значение коэффициента жесткости (лучше сказать, квазиупругого коэффициента) k или, выражаясь более обще, отрицательное значение квадрата одной из собственных частот ω^2 .

На рисунке 83 представлено поведение системы в различных ее состояниях в смысле устойчивости. Необходимо заметить, что динамическая устойчивость уже предполагает устойчивость статическую (рисунок 83, в), но обратное утверждение неверно; статически устойчивая система может быть динамически неустойчивой (рисунок 83, б).

Обращаясь к частоте автоколебаний, следует сказать, что в большинстве случаев, встречающихся на практике, отрицательная сила затухания очень мала по сравнению с силами упругости и с силами инерции. Если сила затухания равна нулю, то частота колебаний есть собственная частота системы. Сила затухания как положительная, так и отрицательная, несколько понижает собственную частоту, как это было выяснено выше. Однако в большинстве случаев, встречающихся в машиностроении, эта разница пренебрежимо мала, а потому частота автоколебаний есть в то же время собственная частота системы. Только если сила отрицательного затухания велика по сравнению с

силами упругости или с силами инерции, то частота автоколебаний значительно отличается от частоты собственных колебаний. Такие колебания известны под названием релаксационных колебаний. Они будут рассмотрены ниже. Паровая машина является примером, где сила отрицательного затухания (давление пара) очень велика в сравнении с упругой силой (которая здесь вообще отсутствует). Следовательно, для такой машины частота ее колебаний значительно отличается от собственной частоты (равной нулю).

Мы можем лучше уяснить себе явление, если обратимся к энергетическим соотношениям. В случае положительного затухания, будучи все время направлена против скорости, совершает отрицательную работу. Механическая энергия переходит в тепло, что происходит обычно в масле демпфера. Таким образом, энергия отнимается от колеблющейся системы. Каждое последующее колебание обладает меньшей амплитудой и меньшей кинетической энергией, причем потерянная кинетическая энергия поглощается вследствие затухания. В случае отрицательного затухания сила затухания, которая является теперь движущей силой, совершает положительную работу, причем работа, производимая за каждый период колебаний, дает увеличение кинетической энергии системы и идет на возрастание колебаний. Совершенно очевидно, что автоколебания не могут существовать без внешнего источника энергии, каковым является хотя бы паровой котел в нашем первом примере. Частота изменения этой энергии не должна совпадать с частотой рассматриваемого колебательного движения. Напротив того, как раз в большинстве случаев энергия получается от источника без каких-либо переменных свойств, как, например, резервуар с паром или с водой под давлением, установившийся ветер, установившийся крутящий момент машины и т. п. Однако есть все же несколько случаев, где источник обладает колебательными свойствами, частота изменений которых много выше, чем частота возбуждаемых им колебаний.

В случае строго линейной самовозбуждающейся системы амплитуда с течением времени должна расти безгранично, так как с каждым периодом энергия системы становится все больше и больше (рисунок 83, б). Однако такие бесконечно большие амплитуды противоречат наблюдениям. Дело в том, что в большинстве систем механизмы самовозбуждения и затухания существуют одновременно и независимо друг от друга. На рисунке 84 отложены значения энергии за один период соответственно различным значениям амплитуды колебаний. Для линейной системы энергия затухания образует параболу вследствие того, что величина рассеяния энергии за один период равна $\pi\omega x_0^2$. Если сила отрицательного затухания также линейна, то мы получим другую параболу, соответствующую энергии, получаемой системой за один период. Система будет находиться в состоянии самовозбуждения или затухания, смотря по тому, какая из двух парабол окажется выше. Нужно, однако, заметить, что во всех практических случаях оказывается, что либо самовозбуждение, либо затухание, а может быть и то и другое не подчиняются линейному закону, вследствие чего кривые, соответствующие получению энергии и её рассеянию, пересекаются. Так, например, если на рисунке 84 амплитуда равняется OA , то система больше получает энергии, чем рассеивает ее, а потому амплитуда растет. Напротив того, если амплитуда оказывается равной OC , то затухание преобладает над самовозбуждением, и колебания убывают. В обоих случаях амплитуда стремится к своему значению OB где обе энергии уравниваются. Получаемое таким образом движение является не затухающим, а установившимся свободным колебанием.

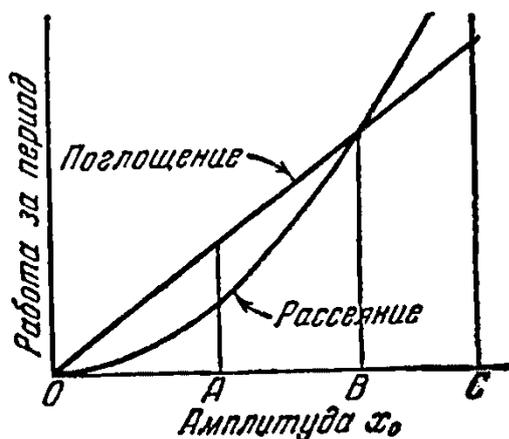


Рисунок 84 – Величина работы, совершаемой за один период гармонической силой и вязким сопротивлением при разных амплитудах

Так как нелинейность сил затухания или возбуждения создает большие математические трудности, то мы обычно вводим допущение линейности системы при очень малых амплитудах и определяем, какая энергия преобладает: энергия затухания или энергия возбуждения. Если окажется, что система неустойчива, то это значит только, что амплитуда начнет возрастать, а сколько далеко пойдет это возрастание, зависит исключительно от нелинейных свойств системы.

В электротехнике автоколебания имеют еще большее значение, чем в области механики. В качестве электрической аналогии вынужденных колебаний мы имели электрическую цепь, в которую включены последовательно самоиндукция, емкость и источники переменного тока. Примером электрической самовозбуждающейся системы может служить цепь, в которую включена электронная лампа. Батарея B является источником энергии постоянного тока. Что касается частоты, то она определяется значениями индуктивности L и емкости C цепи и отрицательным затуханием, вызванным периодическим запирающим сеткой лампы потоком электронов.

4.2 Математический критерий устойчивости

Для систем с одной степенью свободы, подобно тем, которые будут рассмотрены в дальнейшем, обычно бывает достаточно разобрать явления с физической стороны, чтобы показать отрицательность коэффициента затухания c .

Таким образом, критерий динамической устойчивости может быть получен скорее физическим анализом, чем математическим исследованием.

Однако в случаях систем с двумя, тремя и т. д. степенями свободы физическое представление хотя и является всегда очень полезным, тем не менее оно все-таки не может дать полной интерпретации того, что происходит. Поэтому необходим математический подход к явлению, а это значит, что прежде всего надо составить систему дифференциальных уравнений для каждой данной задачи. Коль скоро мы имеем дело с малыми колебаниями (не обращая поэтому внимания на могущие быть нелинейные характеристики движения), мы получаем все уравнения линейные 2-го порядка, наподобие уравнений (2.18) или (3.16). Решение этих уравнений найдем, как обычно, положив:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_{1max} e^{st}, \\ x_2 &= x_{2max} e^{st}, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= x_{nmax} e^{st}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где s есть комплексное число, действительная часть которого определяет затухание, а мнимая часть — собственную частоту. Подставляя значения (4.3) в дифференциальные уравнения свободных колебаний, мы преобразуем эти уравнения в систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно комплексных неизвестных $x_{1max}, x_{2max}, \dots, x_{nmax}$. В процессе исключения неизвестных мы придем к одному уравнению, не содержащему во все этих неизвестных. Такое уравнение носит название «уравнения частот» и имеет вообще степень $2n$ относительно s . Строго говоря, это есть характеристическое уравнение, которое переходит в уравнение частот при чисто малых корнях s , если положить $s = iq$. Так, в случае системы с двумя степенями свободы получаем уравнение четвертой степени; в случае системы с тремя степенями свободы — уравнение шестой степени и т. д.

Алгебраическое уравнение степени $2n$ относительно величины s имеет $2n$ корней, т. е. определяет $2n$ значений величины s . Действительные значе-

ния величины s приводят нас к величинам e^{st} в решении уравнений, которые редко встречаются в реальных случаях колебательных систем. Корни s обыкновенно бывают комплексными и притом всегда попарно сопряженными

$$s_1 = p_1 + iq_1,$$

$$s_2 = p_1 - iq_1,$$

$$s_3 = p_2 + iq_2,$$

$$s_4 = p_2 - iq_2,$$

.....,

.....

Решение относящееся к одной из искомым функций совокупных дифференциальных уравнений движения системы, имеет вид:

$$x_1 = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + C_3 e^{s_3 t} + \dots$$

Мы знаем, что члены, входящие в это решение могут быть скомбинированы попарно в выражения вида

$$C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} = e^{p_1 t} (A \sin q_1 t + B \cos q_1 t),$$

где мнимая часть числа s есть частота, а его действительная часть определяет собою быстроту затухания. Таким образом, если действительная часть всех значений s отрицательна, то система является динамически устойчивой; если действительная часть хотя бы одного значения числа s положительна, то система динамически неустойчива.

Итак, вопрос об устойчивости системы может быть решен из рассмотрения знаков действительных частей решений уравнения частот. При этом нет необходимости в действительности выполнять решение, так как существуют правила, согласно которым можно сделать заключение об устойчивости или неустойчивости только на основании изучения коэффициентов уравнения ча-

стот. Эти правила, данные Раусом (Routh) в 1877 г., являются достаточно сложными для уравнений частот высших степеней, но в большинстве практических случаев (в случае уравнений третьей или четвертой степени) они очень просты. Рассмотрим сперва кубическое уравнение

$$s^3 + A_1s^2 + A_2s + A_0 = 0, \quad (4.4)$$

которое встречается в случае системы с двумя степенями свободы, когда одна масса или один коэффициент жесткости обращается в нуль (в условном смысле мы тогда говорим, что имеем полторы степени свободы). Если корнями этого уравнения являются s_1, s_2, s_3 , то уравнение может быть написано так:

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = 0,$$

или

$$s^3 - (s_1 + s_2 + s_3)s^2 + (s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3)s - s_1s_2s_3 = 0, \quad (4.5)$$

Сравнивая с уравнением (4.4), находим:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -(s_1 + s_2 + s_3), \\ A_1 &= s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3, \\ A_0 &= -s_1s_2s_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Один из трех корней кубического уравнения должен быть непременно действительным, а два других либо действительными, либо комплексными сопряженными. Отделяя в корнях s_1, s_2, s_3 действительные части от мнимых, мы можем написать

$$\begin{aligned} s_1 &= p_1, \\ s_2 &= p_2 + iq_2, \\ s_3 &= p_2 - iq_2. \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в формулы (4.6) приводит нас к соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -(p_1 + 2p_2), \\ A_1 &= 2p_1p_2 + p_2^2 + q_2^2, \\ A_0 &= -p_1(p_2^2 + q_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Признак или критерий устойчивости заключается в том, что обе величины, как p_1 , так и p_2 , должны быть отрицательными. Итак, мы прежде всего видим, что все коэффициенты A_2 , A_1 , A_0 должны быть положительными, так как, если бы оказалось, что один из них отрицательный, то из равенств (4.7) следует, что либо p_1 либо p_2 , либо, наконец, обе величины p_1 и p_2 должны быть положительными. Можно доказать, что это требование сохраняет свою силу и для уравнений высших степеней. Таким образом, уравнение частот любой степени, имеющее один или большее число отрицательных коэффициентов, определяет собою неустойчивое движение.

Допустим, что все коэффициенты A_2 , A_1 , A_0 положительны. Тогда третье из уравнений (4.7) требует, чтобы p_1 было отрицательным. Однако из этих уравнений мы еще не получаем никакого указания относительно знака p_2 . Следует заметить, что на границе устойчивости при переходе от неустойчивого состояния системы к устойчивому величина p_2 должна менять знак, переходя через нуль от положительного значения к отрицательному. Положим $p_2 = 0$. Тогда уравнения (4.7) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -p_1, \\ A_1 &= q_2^2, \\ A_0 &= -p_1q_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Эти соотношения выполняются на границе устойчивости. Исключая p_1 и p_2 , мы находим

$$A_0 = A_1A_2.$$

Мы пока еще не знаем, с какой стороны этого равенства имеет место устойчивость. Этот вопрос проще всего решить путем испытания каких-либо

частных значений s . Пусть, например, $s_1 = -1$, $s_{2,3} = -1 \pm i$, что, очевидно, соответствует устойчивости. Подставляя в равенства (4.7), получаем

$$A_2 = 3, \quad A_1 = 4, \quad A_0 = 2,$$

т.е.

$$A_0 < A_1 A_2.$$

Итак, полный критерий устойчивости системы, имеющей кубическое уравнение частот (4.4), заключается в том, чтобы все коэффициенты A были положительны и чтобы выполнялось неравенство

$$A_1 A_2 > A_0. \tag{4.9}$$

Рассмотрим теперь уравнение четвертой степени

$$s^4 + A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0 = 0, \tag{4.10}$$

с которым поступим аналогичным образом. Так как целая рациональная алгебраическая функция четвертой степени может быть разложена на произведение двух многочленов второй степени, то мы можем написать для корней выражения:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= p_1 + iq_1, \\ s_2 &= p_1 - iq_1, \\ s_3 &= p_2 + iq_2, \\ s_4 &= p_2 - iq_2 \end{aligned} \right\} \tag{4.11}$$

и подставить их в уравнение (4.10), разложенное предварительно на произведение четырех множителей по известному правилу алгебры. Тогда путем сравнения находим

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= -2(p_1 + p_2), \\ A_2 &= p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 + 4p_1p_2, \\ A_1 &= -2p_1(p_2^2 + q_2^2) - 2p_2(p_1^2 + q_1^2), \\ A_0 &= (p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

В случае устойчивости обе величины как p_1 , так и p_2 , должны быть отрицательны. Подставляя отрицательные значения p_1 и p_2 , мы видим из уравнений (4.12), что все значения A получаются положительными, откуда следует первое требование для устойчивости, а именно, чтобы все коэффициенты A были положительными. Допустим, что это условие выполнено. Тогда из первого уравнения (4.12) вытекает, что, по крайней мере, одна из величин p_1 или p_2 отрицательна. Пусть отрицательно p_1 . Нам необходимо установить критерий отрицательности также для p_2 . На границе между устойчивостью и неустойчивостью $p_2 = 0$. Подставляя это значение в уравнения (4.12), получаем:

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= -2p_1, \\ A_2 &= p_1^2 + q_1^2 + q_2^2, \\ A_1 &= -2p_1q_2^2, \\ A_0 &= (p_1^2 + q_1^2)q_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

т.е. четыре уравнения с тремя неизвестными p_1 , q_1 и q_2 . Исключая эти неизвестные, получаем условие совместности в виде соотношения между коэффициентами A :

$$A_1A_2A_3 = A_1^2 + A_3^2A_0.$$

Чтобы определить, с какой стороны этого равенства имеет место устойчивость, мы опять прибегнем к испытанию некоторых простых значений s , заведомо соответствующих устойчивому состоянию. Положим, например:

$$s_{1,2} = -1 \pm i, \quad s_{3,1} = -2 \pm 2i.$$

Тогда из уравнений (4.12) находим

$$A_2 = 6, \quad A_2 = 18, \quad A_1 = 24, \quad A_0 = 16,$$

т.е.

$$A_1 A_2 A_3 > A_1^2 + A_3^2 A_0.$$

Следовательно, полный критерий устойчивости системы, имеющей уравнение частот четвертой степени (4.10), заключается в том, чтобы все коэффициенты A были положительны и чтобы выполнялось неравенство

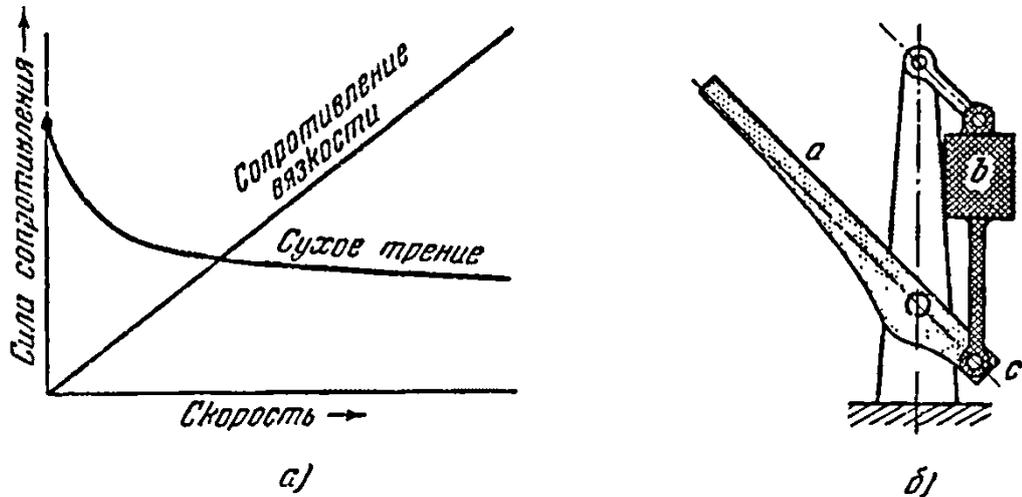
$$A_1 A_2 A_3 > A_1^2 + A_3^2 A_0. \quad (4.14)$$

Системы с тремя степенями свободы имеют вообще уравнение частот шестой степени и в случаях вырождения — пятой степени. Тогда мы имеем три действительные части корней s и, помимо требования положительности всех коэффициентов A , имеются еще два других требования, каждое из которых оказывается более сложным, чем предыдущие. За подробностями в этой области читателю следует обратиться к оригинальной работе Рауса.

4.3 Неустойчивость вследствие трения

Во многих случаях сила трения, вместо того, чтобы способствовать положительному затуханию, является причиной возникновения отрицательного затухания. Одним из наиболее известных случаев является тот, когда струна скрипки приводится смычком в колебательное движение. Здесь струна представляет собою колеблющуюся систему, а непрерывное воздействие на нее смычка, увлекающего струну за собою, равносильно неперiodическому источнику энергии. Трение между струной и смычком имеет то свойство, что для малых скоростей скольжения оно больше и, наоборот, для больших скоростей — меньше. В этом отношении сухое трение прямо противоположно сопротивлению вязкости (рисунок 85, а). Рассмотрим смычок,двигающийся с постоянной скоростью по колеблющейся струне. Так как струна двигается попеременно то в одну сторону, то в другую, то относительная скорость, или скорость скольжения смычка по струне, все время меняется. Абсолютная скорость смычка всегда больше, чем абсолютная скорость струны при ее колебании. Вследствие этого направление скольжения остается всегда одно и

то же. С другой стороны, при согласном направлении движения струны и смычка скорость такого скольжения мала и, следовательно, сила трения велика. И, наоборот, при обратном движении струны скорость скольжения велика, а поэтому трение мало.



- а) характеристики сил сопротивления, обуславливающих затухание, с положительным и отрицательным наклоном;
- б) часть подъёмного моста, обрушившегося вследствие отрицательного наклона характеристики трения в подшипнике *c*

Рисунок 85

Мы замечаем, что большая сила трения действует в направлении движения струны, тогда как меньшая сила трения действует против ее движения. Так как струна совершает гармоническое движение, то работа, совершаемая силой трения за полпериода колебания струны при ее перемещении в одном и том же направлении, равна $2Fx_0$, где F есть среднее значение силы трения, а x_0 — амплитуда колебания. Но сила F имеет большее значение в течение полного размаха струны вперед (когда сила трения, приложенная к струне, совершает положительную работу), чем при обратном размахе (когда совершается отрицательная работа), а поэтому полная работа, совершаемая трением в течение всего периода колебания, положительна, вследствие чего должно быть нарастание колебаний.

Некоторые колебания в машинах, относящиеся к «дрожаниям», могут быть объяснены подобным же образом. Дрожание можно наблюдать, например, в резце токарного станка, в ведущих колесах паровоза или вообще локомотива. Так, при отправлении со станции тяжелого поезда мы нередко видим, как ведущие колеса паровоза буксуют, скользя по рельсам. Если такое буксование происходит более или менее равномерно, то иногда можно наблюдать сопровождающее его дрожание. Кроме этого главного вращения со скольжением, колеса испытывают также крутильные колебания, могущие, в свою очередь, вызвать большие переменные по величине и знаку напряжения в цапфах кривошипов и спарников. Отрицательный наклон кривой трения между колесами и рельсами в зависимости от скорости (рисунок 85, а) типичен для такого рода явления.

Подобного рода явления могут наблюдаться в чрезвычайно распространенных и весьма простых случаях. Так, дверь, заедающая в петлях, издает характерный скрипящий звук при открывании; аналогичное явление мы имеем, когда пишем на доске, держа мел перпендикулярно к ней. Приведем еще случай, который служит также предметом демонстрации на занятиях по физике: обычный чайный стакан издает звук, если его края протирать влажными пальцами. Крутильные колебания такого типа наблюдались в приводных валах корабельных гребных винтов при очень малых скоростях вращения. Такой вал обычно поддерживается двумя отдельными подшипниками из материала типа бакаута или эбонита, который смачивается водой. При малых скоростях водяная пленка еще не может образоваться, и подшипники оказываются «сухими», вследствие чего возникают крутильные колебания вала с одной из собственных частот, обычно в диапазоне слышимости. Лопасти гребного винта имеют собственные частоты, не слишком удаленные от этих частот, и действуют наподобие громкоговорителя, издавая своеобразное пение, обнаруживаемое под водой даже на большом расстоянии.

Яркий технический пример автоколебаний, вызванных сухим трением, представляет собою система большого подъемного моста, изображенная на рисунке 85, б. Полотно a моста уравнивается большим бетонным противовесом b , который вместе с направляющим механизмом и поддерживающей башней образует параллелограмм, как это мы и видим на рисунке.

Здесь будет описан случай, когда одна из башен моста после его годичной работы обрушилась, причем осмотр показал, что несомненной причиной разрушения была усталость материала. Испытания, произведенные над другой, уцелевшей, половиной моста, установили, что при подъеме и опускании полотна возникали сильные колебания всего сооружения, частота которых оказалась весьма низкой, всего около шести колебаний в течение времени одного подъема. Объяснение было найдено в подшипнике c , которому приходилось выдерживать колоссальную нагрузку от противовеса b . Тавот, введенный в подшипник в начале эксплуатации моста, очень скоро был весь выдавлен оттуда по причине большой нагрузки, и подшипник оказался совершенно сухим. Колебания, вызванные сухим трением, были вполне достаточны, чтобы привести в конце концов к разрушению.

Очевидным средством против такой возможности разрушения являются штауферы с тавотом, помещаемые на подшипниках, которые должны содержаться в полной исправности и подвергаться ежедневному осмотру.

Приведем еще интересный пример явления, причиной которого служит «отрицательная характеристика» затухания (рисунки 86 и 87). В камеру A достаточно больших размеров вдувается воздух посредством вентилятора. Из камеры он выходит через определенные отверстия B . Практическим случаем, для которого рисунок 86 представляет упрощенную схему, является котельная на пароходе. В ней поддерживается вентилятором небольшое давление, и воздух вынужден вытекать из нее через топки и дымовые трубы, играющие здесь роль отверстий B . Установлено, что при определенном режиме потока в отверстиях B , т. е. при определенной паропроизводительности, в котельной

начинались сильные колебания давления с частотой, примерно равной одному периоду в секунду.

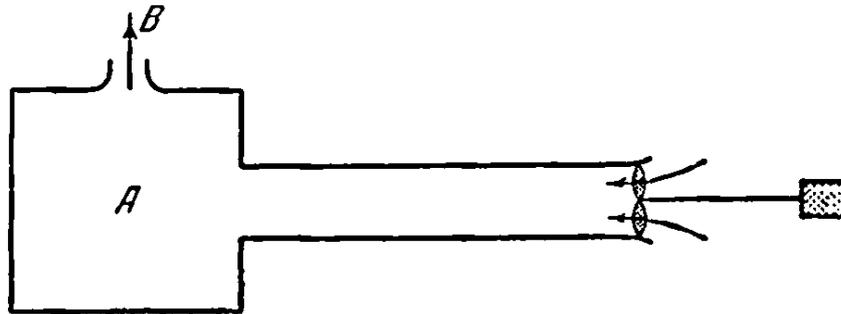


Рисунок 86 – Вентилятор, вдувающий воздух через длинную трубу в камеру А

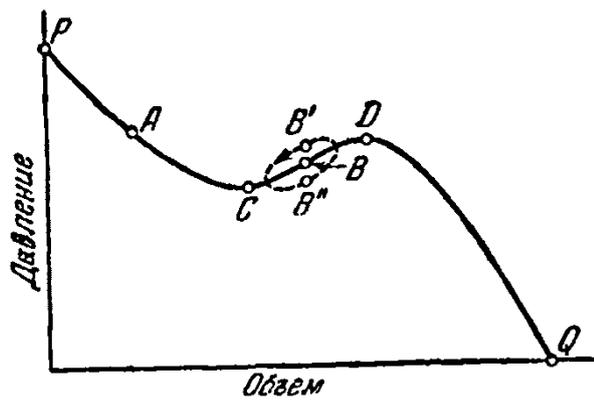


Рисунок 87 – Характеристика вентилятора

Частичное объяснение описанного явления можно получить с помощью рисунка 87, на котором представлена характеристика вентилятора. Здесь нагнетаемый объём отложен по оси абсцисс, а развиваемое им давление – по оси ординат. Точка P очевидно, соответствует тому состоянию, когда отверстие B закрыто все, и поэтому воздух не выходит из камеры, в которой поддерживается, таким образом, максимальное давление. Точка Q соответствует действию вентилятора в свободную атмосферу, где уже никакого избытка давления нет и в то же время вентилятор непрерывно посылает большие количества воздуха. При изменении величины отверстия B на рисунке 86 мы можем получить непрерывную последовательность различных режимов работы вентилятора, отображаемых на рисунке 87 точкой, перемещающейся по характеристике от B почти до Q . Как видим из чертежа, большая часть кривой имеет нисходящий наклон по направлению от точки P до точки Q . Одна-

ко на участке от C до D наклон становится обратным. Такова характеристика вентилятора, которую мы можем считать относящейся к определенной конструкции. Заметим, что чрезвычайно трудно построить такой вентилятор, для которого характеристика давала бы монотонное убывание от P до Q , т. е. все время с наклоном одного знака, и при этом был бы большой коэффициент полезного действия в области между Q и D для которой, собственно говоря, и рассчитывается вентилятор.

Легко показать, что действие установки вблизи точки A на рисунке 87 устойчиво, тогда как около точки B оно неустойчиво и приводит к описанному выше колебательному процессу. Предположим, что действие системы отображается точкой A или точкой, близкой к ней, и положим, далее, что давление в камере на рисунке 86 немного выше нормального. Как видно из рисунка 87, это означает некоторое уменьшение объема воздуха, нагнетаемого вентилятором. Следовательно, когда отдача вентилятора ниже нормальной, она вызывает понижение давления в камере, а так как оно было выше нормы, то равновесие будет восстанавливаться. Подобным же образом если давление в камере случайно окажется ниже нормального, то отдача вентилятора возрастет, увеличив тем самым давление, и равновесие опять будет восстановлено.

С другой стороны, рассмотрим действие системы вблизи точки B на рисунке 85. Пусть на мгновение давление в камере оказалось выше нормального. Тогда вентилятор будет посылать еще большие объемы воздуха, чем при нормальных условиях, а поэтому давление в камере будет увеличиваться. Таким образом, случайное повышение давления в камере приводит сейчас же к форсированию работы вентилятора, а отсюда и получается неустойчивое состояние.

Еще важный случай возбуждения колебаний сухим трением мы имеем в автоколебаниях вала, вызванных слишком свободной направляющей цапфой, или слишком недостаточной смазкой подшипника при чрезмерном зазоре.

Пусть на рисунке 88 круг A обозначает внутреннюю часть подшипника или цапфы, а B — поперечное сечение вертикального вала, вращающегося в этом подшипнике, например, в направлении часовой стрелки. Пусть, далее, этот вал получил случайное отклонение из своего равновесного положения, концентрического с кругом A , так что он стал тереться о левую часть A . Вследствие вращения вала должны возникнуть силы трения F и F' , из которых есть сила, действующая на вал, а $F' = -F$ есть сила, действующая на цапфу или на подшипник. Сила F может быть заменена параллельной силой такой же величины, но проходящей через центр вала B и парой с моментом Fr . Действие пары на вал, который мы предполагаем вращающимся с постоянной скоростью, является только тормозящим, а поэтому он скажется лишь в том, что потребует некоторого увеличения крутящего момента, что, в сущности говоря, не повлечёт за собою каких-либо последствий.

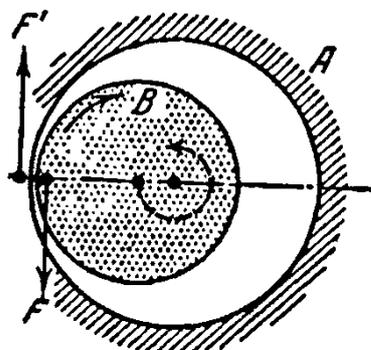


Рисунок 88 – Прецессия вала, вызванная сухим трением к нему

Что касается силы F , приложенной к центру вала, то эта сила будет стремиться переместить вал по нашей схеме вниз, или, говоря точнее, в направлении касательной к кругу A . Так как направление силы F изменяется вместе с изменением положения сечения B в круге A , то вал будет вынужден двигаться вокруг среднего положения в направлении, указанном на чертеже круговой пунктирной стрелкой. Следует заметить, что вал будет двигаться вокруг зазора в направлении, противоположном собственному вращению вала. Если вал вращается, оставаясь в середине цапфы или подшипника, не касаясь его, то он находится в устойчивом состоянии. Но стоит только ему вслед-

ствие какой-либо причин коснуться цапфы, как он начинает интенсивно прецессировать.

Указанный эффект проявляется во многих видоизменениях. Для его демонстрации можно предложить следующую очень простую модель. Возьмем коническую чашку с очень большим углом раствора (рисунок 89) и стальной шарик диаметром 2—3 см. Положим шарик на дно чашки, закрутив его в этот момент пальцами. Такое положение вращающегося шарика оказывается неустойчивым, так как при случайном отклонении его на очень малое расстояние из средней части чашки точка соприкосновения шарика с чашкой уже не будет больше лежать на его вертикальной оси вращения. Поэтому начнется скольжение шарика, а следовательно, возникнет также сила трения, перпендикулярная к плоскости чертежа, которая погонит шарик вокруг чашки. Направление такого перекатывания шарика противоположно направлению сообщенного ему вращения.

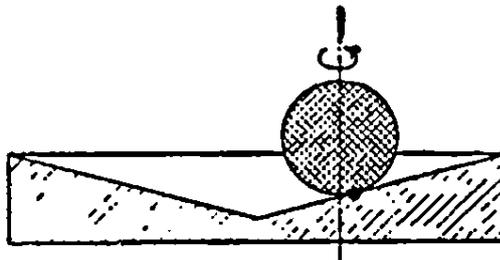


Рисунок 89 – Трение в точке соприкосновения с опорной поверхностью вызывает кручение этого шара

Описанное явление не ограничивается цилиндрическими цапфами или подшипниками, но наблюдается также и в упорных подшипниках. На рисунке 90 изображен схематически упорный подшипник и часть вала, равновесное положение которого определяется проведенной на чертеже вертикальной осевой линией.

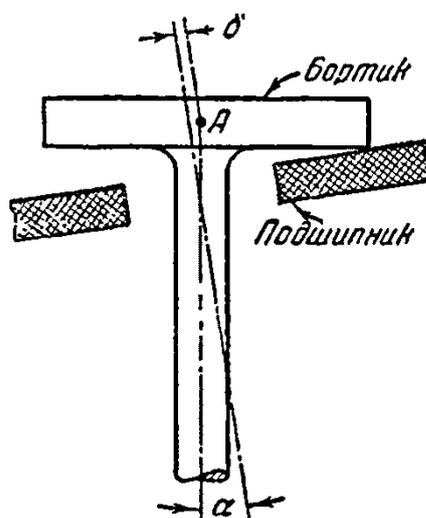
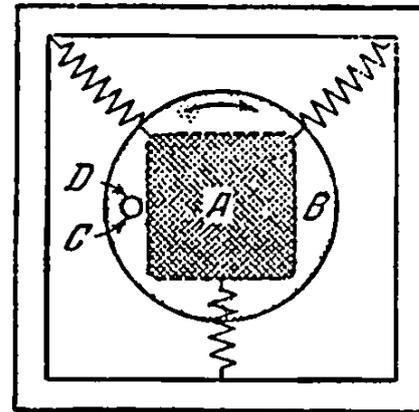


Рисунок 90 – Прецессия оси вала вследствие трения в опорном подшипнике

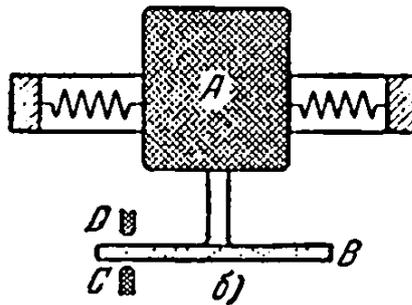
Допустим, что упругая система, частью которой является вал, способна совершать собственные колебания определенного типа, при которых осевая линия вала прецессирует вокруг вертикали, имея эксцентриситет δ и угол отклонения α . Тогда центр A бортика, представляющего собою диск, описывает окружность радиуса δ , а вал описывает конус с углом при вершине 2α . Этот тип движения является самовозбуждающимся благодаря трению, так как при колебании бортик прилегает к подшипнику только одной своей стороной. Вследствие этого, на той же самой стороне возникает сила трения, заставляющая точку A двигаться в направлении, противоположном направлению вращения бортика. Очевидный способ предупреждения такого рода возмущения движения — это сделать опору подшипника настолько гибкой, чтобы, несмотря на угловое отклонение, давление на различные части подшипника распределялось равномерно.

Очень поучительная модель, демонстрирующая этот эффект, может быть построена следующим образом (рисунок 91). Небольшой мотор A , несущий на конце своего горизонтального вала диск B поддерживается тремя очень гибкими пружинами, лежащими в плоскости, проходящей через центр тяжести мотора и перпендикулярной к оси вала. При вращении мотор может совершать собственные колебания многих типов, два из которых особенно интересны. Эти последние изображены на рисунок 91, б. Здесь вал описывает

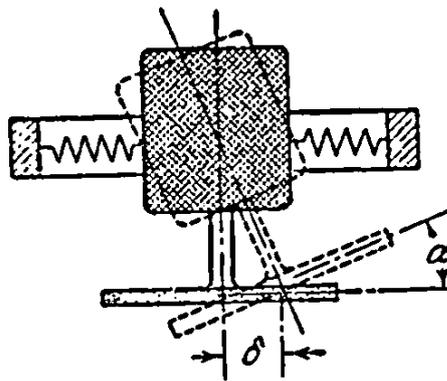
конус, определяемый величинами δ и α , причем ось его прецессирует либо в направлении собственного вращения вала, либо противоположно ему.



a)



б)



в)

Рисунок 91 – Самовозбуждающееся вращение, вызываемое трением B

Положим, что кусок войлока или бумаги C поднесён к краю внешней стороны диска. Об этот кусок будет ударяться диск (или плотно прижиматься к нему) при величине угла α (а следовательно, и δ), изображенного на рисунке 91, в. Пусть на рисунке 91, а диск B вращается по часовой стрелке. Тогда препятствие C вызовет силу трения, стремящуюся толкать диск вниз. На основании, тех же рассуждений, что и в случае рисунке 88, мы можем эту силу

трения заменить замедляющей парой и силой, проходящей через центр. Действие пары сводится только к небольшому замедлению движения. Зато сила, приложенная в центре диска, будет толкать этот центр вниз, т. е. в направлении вращения оси по часовой стрелке. Таким образом, трение на лицевой стороне C диска способствует возникновению прецессионного движения в том же самом направлении, что и собственное вращение.

Напротив того, если кусок D прижимается к задней стороне вращающегося диска B , то он будет ударять и вызывать трение, когда α и δ определяют положение, как раз противоположное изображенному на рисунке 91, в. Трение опять отталкивает диск вниз, потому что вращение направлено по-прежнему по часовой стрелке. Однако эта сила, направленная вниз, теперь уже вызывает прецессию оси в направлении, обратном вращению часовой стрелки, поскольку отклонение δ сейчас противоположно тому, которое показано на рисунке 91, в.

Опыт состоит в том, что помещают трущий предмет у лицевой стороны диска и отмечают самовозбуждение высокочастотного типа колебаний с прецессионным движением в направлении вращения. Затем этот предмет переносят на обратную сторону диска, вызывая здесь трение, при этом констатируют очень быстрое затухание прежнего типа движения и возникновение нового (прецессия против вращения), быстро нарастающего и имеющего частоту, которая много ниже предыдущей. Это последнее движение опять может быть энергично погашено трением с лицевой стороны диска. Различие двух частот указанных движений вызывается гироскопическим действием диска.

4.4 Внутренний гистерезис валов и масляные плёнки от смазки подшипников как причины неустойчивости

Другой весьма интересный случай самовозбуждающихся колебаний обуславливается внутренним гистерезисом в металле, из которого изготовлен вал. Гистерезис есть отклонение от закона Гука, устанавливающего линейную зависимость между напряжением и деформацией. Он имеет место в

большинстве материалов, подвергающихся воздействию знакопеременных усилий. На диаграмме рисунке 92, а закон Гука должен быть изображен прямой линией a , тогда точка, отображающая напряженное состояние волокна колеблющегося вала, испытывающего попеременно действие растяжения и сжатия, должна была бы двигаться вверх и вниз вдоль этой прямой между точками P_1 и P_3 . В действительности же зависимость между напряжением и деформацией изображается длинной узкой фигурой, весьма похожей на эллипс, которую точка обходит всегда по часовой стрелке. Эллипс, изображенный на рисунке 92, имеет сильно преувеличенную ширину. На самом деле он настолько узок, что его едва можно отличить от прямолинейного отрезка P_1P_3 .

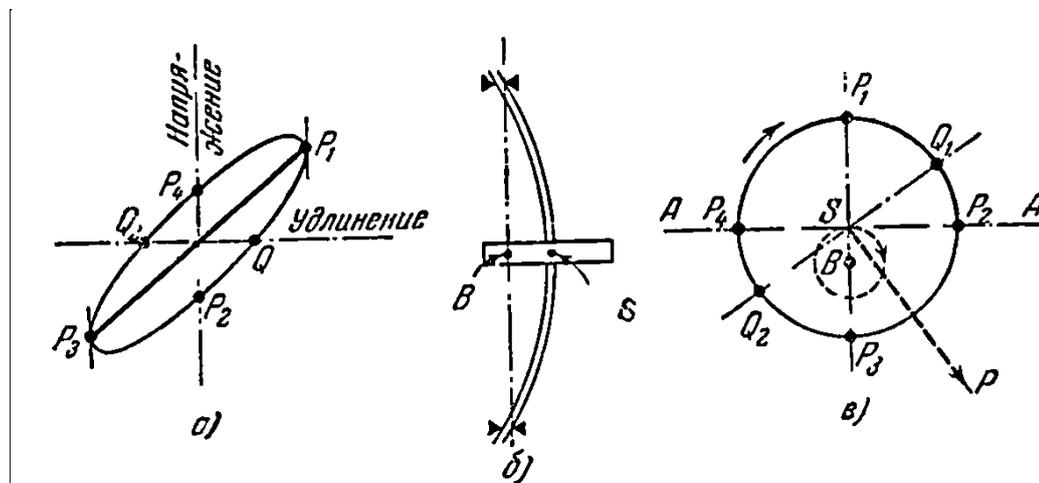


Рисунок 92 – Вращение оси вала, вызванное гистерезисом материала

Рассмотрим вертикальный вал с центральным диском, вращающийся в двух подшипниках, как показано на рисунке 92, б. Во время вращательного движения изогнутой оси вала ее центр S описывает окружность вокруг точки B на осевой линии подшипников. Точка B представляет собою нормальное или равновесное положение точки S при отсутствии вращения самой оси вала. На рисунке 92, в дано поперечное сечение середины вала, причем $P_1Q_1P_2P_3P_4$ есть контур сечения, а пунктирная окружность обозначает траекторию точки S при вращательном движении изогнутой оси вала. Практически возможным является прогиб BS , изображенный на рисунке 92, в. Что касается рисунку 92, б, то здесь он утрирован.

Мы полагаем, что как вращение вала вокруг своей оси, так и вращение самой оси происходит по часовой стрелке, как показано на рисунке. Вал изгибается, и прямая AA делит его на две части так, что волокна вала выше линии AA растянуты, а волокна ниже линии AA сжаты. Линия AA может быть названа нейтральной осью деформации, которая вследствие отклонения от закона Гука не совпадает с нейтральной осью напряжений.

Чтобы уяснить сказанное, рассмотрим точку P_1 на рисунке 92, в. которую мы можем представить себе как некоторую отметку, сделанную, например, красным цветом на вале. Во время вращения вала эта отметка последовательно проходит через положения Q_1, P_2, P_3 и т. д., но в то же время происходит вращение изогнутой оси вала, при котором точка S и линия AA двигаются вокруг пунктирной окружности. Скорости обоих вращений совершенно не зависят друг от друга. В случае равенства этих скоростей отметка P_1 будет всегда находиться на продолжении отрезка BS , иными словами, P_1 будет всегда лежать на наиболее удлиненном волокне. Если вращение вала вокруг своей оси происходит быстрее, чем вращение самой оси, то точка P_1 обгоняет точку S и, следовательно, достигает положения P_2 (где нет ни удлинения, ни сжатия), P_3 (наибольшее сжатие) и т. д. И, наоборот, если вращение вала оказывается более медленным, по сравнению с вращением его оси, то точка P_1 должна пойти другим путем (отставая от S) и должна занимать последовательно положения P_1, P_2, P_3, P_4 и т.д.

Рассмотрим прежде всего тот случай, когда вращение вала быстрее вращения его оси. Деформированное состояние волокон вала в различных точках P_1, P_2, P_3, P_4 рисунка 92, в отмечено такими же буквами на диаграмме рисунка 92, а. На этой последней точка Q_1 показывающая отсутствие напряжения, лежит между P_1 и P_2 . Соответствующая ей точка показана на рисунке 92, в, и то же самое сделано с точкой Q_2 между P_3 и P_4 . Таким образом, прямая Q_1Q_2 является линией отсутствия напряжений (нейтральная ось напряжений), причем все волокна выше Q_1Q_2 имеют растягивающие напряжения, тогда как

волокна ниже Q_1Q_2 имеют сжимающие напряжения. Такая система напряжений дает в результате упругую силу P . Эта сила P имеет не только составляющую, направленную к B (обычная упругая сила), но также небольшую составляющую, направленную вправо и стремящуюся поворачивать весь вал по пути вращения его изогнутой оси. Следовательно, мы имеем здесь самовозбуждающееся вращение оси вала. Предлагаем читателю самому убедиться в том, что, если вращение вала происходит медленнее, чем вращение его оси, то наклон прямой Q_1Q_2 будет обратный, и упругая сила будет вызывать торможение (вместо того, чтобы дать движущую составляющую, как в предыдущем случае).

Вращательное движение изогнутой оси вала определяется прежде всего упругой силой вала, направленной к центру B , в совокупности с силой инерции диска, вследствие чего оно происходит с собственной частотой вала. Незначительная по величине движущая составляющая упругой силы, направленная по касательной, лишь преодолевает затухание. Внутренний гистерезис вала действует как затухание при скорости, ниже критической, тогда как выше этой скорости может происходить нарастание само возбуждающегося вращения оси вала, соответствующее критической скорости. Внутренний гистерезис в материале вала обычно очень мал. Однако встречаются случаи, где петля гистерезиса бывает выражена более резко, что происходит именно там, где в самом деле имеет место скольжение, как, например, в случаях горячей свободной посадки, а также и в других случаях соединений. Так, вал с достаточно свободно насаженным па него диском почти наверное вызовет вращение своей оси с частотой, превышающей критическую угловую скорость.

Автоколебания имеют место также в случае вала, лежащего в обильно смазанных втулочных подшипниках, где они обусловлены некоторыми свойствами масляной пленки. Для уяснения этого явления необходимо заметить, что горизонтальный вал, вращающийся в направлении против часовой стрелки в подшипнике, покрытом внутри масляной пленкой, не стремится занять

среднего положения, а несколько отклоняется от него вправо (рисунок 93). Мы можем легко сообразить, куда должно быть направлено это отклонение, если заметить, что оно противоположно тому направлению, по которому, на первый взгляд, следовало бы ожидать взбегаия шипа. Так как на этот шип действует вес W , как указано на чертеже, то результирующая сила R всех давлений масла на шип должна быть равна силе G и должна образовать некоторый угол α с прямой OA , соединяющей центр подшипника с центром шипа.

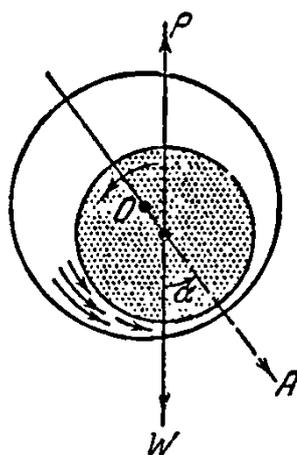


Рисунок 93 – Масляная плёнка в подшипнике вызывает прецессию шипа вала вследствие того, что направления силы тяжести и оси симметрии OA не совпадают

Рассмотрим теперь вертикальный направляющий подшипник с валом. Если нет никаких боковых нагрузок на вал, то он будет стремиться занять середину подшипника. Однако, если по каким-либо причинам вал начнет бежать внутри подшипника, то в какой-либо произвольный момент времени он займет эксцентричное положение. Больше того, если во время такого обеган и я давление масла будет такое, как показано на рисунке 93 (где сила W должна быть заменена теперь центробежной силой в направлении OA), то равновесие между силой R и центробежной нагрузкой нарушится, причем получится некоторая небольшая результирующая сила, стремящаяся двигать шип внутри подшипника против часовой стрелки. Таким образом, давление масла, распределяющееся по определенному закону, приводит к возникнове-

нию самовозбуждающейся прецессии оси вала в направлении его вращения, погашая в то же время прецессию в направлении, противоположном вращению, если она почему-либо возникнет.

Остается рассмотреть условия, при которых давление масляной пленки во время вращения оси вала оказывается таким же, как и в случае установившегося движения вала в горизонтальных подшипниках при весовой нагрузке. Мы изучим два крайних случая, когда отношение угловых скоростей вращения оси и вала вокруг этой оси либо очень мало, либо очень велико.

Положим, что, в первом случае вал делает, например, 100 оборотов, тогда как его ось за то же время перемещается вокруг оси подшипника всего лишь на 5° . Очевидно, что такое медленное движение оси не повлечет за собой изменения в распределении давлений, а именно: при медленном вращении оси возникает масляная пленка, вызывающая автоколебания. Во втором случае центр шипа быстро двигается вокруг своего среднего положения, тогда как сам шип почти не вращается. Следовательно, при таком движении масляная пленка не образуется, и просто получается колебание как бы в масляном резервуаре, что, очевидно, ведет к сильному затуханию колебаний.

Итак, мы видим, что при малых частотах движения оси вала, по сравнению с угловой скоростью вращения, возникают колебания, в то время как в обратном случае все колебательные движения гасятся. Отношение угловой скорости вращения вала к угловой скорости прецессии его оси, при котором затухание переходит от положительного значения к отрицательному, может быть определено только экспериментальным путем.

Из опытов было найдено, что при угловой скорости прецессии оси вала, равной угловой скорости его вращения или меньшей ее половины (т. е. когда вал вращается быстрее, чем это соответствовало бы его удвоенной критической скорости), возникают автоколебания. Указанное обстоятельство приво-

дит к серьезным затруднениям в случаях быстроходных машин с вертикальными валами. Преодолеть в этих случаях колебания бывает весьма трудно. Описанное явление было теоретически исследовано Хэггом (Hagg). Пусть на рисунке 94 радиальный зазор равен ε , радиус вращения оси шипа — δ и диаметр шипа — D . В случае медленной прецессии распределение скоростей в масляной пленке линейное, и, если скорость периферии шипа есть V , то объем масла (отнесённый к единице длины), переносимого через A , равен $V/2 (\varepsilon - \delta)$, в то время как объем, протекающий через B , равен $V/2 (\varepsilon + \delta)$.

Если предложить отсутствие утечки в концах, то оказывается, что количество масла, втекающего в нижнюю часть подшипника, равно $V\delta$. Пусть теперь шип прецессирует с частотой (угловой скоростью) f . При этом скорость v центра шипа оказывается равной

$$v = f \cdot 2\pi\delta.$$

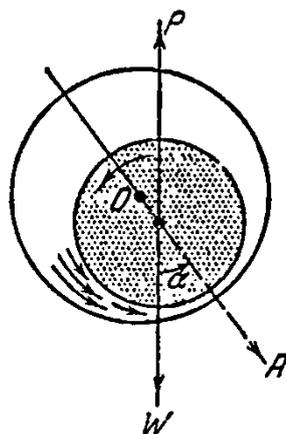


Рисунок 94 – Распределение скоростей в масляной плёнке

Площадь нижней половины масляной пленки возрастает со скоростью $vD = f \cdot 2\pi\delta$. Если прецессия происходит медленно, то вал при вращении подает в нижнюю половину количество масла, достаточное для заполнения пустот, образующихся вследствие движения вала вверх при его прецессии. При большей скорости прецессии вращением вала не будет переноситься достаточное количество масла, и пленка разорвется. Это происходит тогда, когда имеет место равенство

$$V\delta = f \cdot 2\pi\delta D.$$

Окружная скорость V связана с угловой скоростью равенством

$$V = \pi D n_{\text{сек}},$$

где $n_{\text{сек}}$ – число оборотов в секунду. Подстановкой находим

$$f = \frac{n_{\text{сек}}}{2}.$$

Отсюда видно, что если скорость прецессии не больше чем половина скорости вала, то масляная пленка разрывается, и самовозбуждения нет. Если по концам имеется утечка, то этот разрыв происходит уже при скорости прецессии, меньшей половины скорости вращения.

Сравнивая рисунок 94 с рисунком 88, мы замечаем, что, в то время как в случае сухого трения направления вращений самого вала и его оси противоположны друг другу, они оказываются одинаковыми при возбуждении движения оси посредством масляной пленки.

В случае горизонтальных подшипников при определенной нагрузке также возникают колебания, когда скорость вращения превосходит удвоенную критическую скорость. Объяснение этого явления выполняется тем же путем, что и для вертикального вала. При набегании шипа давление масла будет иметь не строго радиальное направление. Тангенциальные составляющие этого давления могут служить движущими силами лишь в течение части периода прецессии оси вала, тогда как в остальное время они будут оказывать замедляющее действие. Для того чтобы имело место возбуждение движения, необходимо, чтобы полная работа, совершаемая тангенциальными составляющими сил, была положительна за полный период вращения оси, т. е. чтобы была положительной средняя величина этой составляющей, которая только при этом условии может быть движущей силой.

4.5 Галопирование линией электропередачи

При определенных состояниях погоды наблюдались случаи колебаний линий электропередачи высокого напряжения, причем эти колебания происходили с большой амплитудой и очень малой частотой. Такая линия состоит из проволок более или менее правильного кругового сечения, натянутых между мачтами, находящимися друг от друга на расстоянии, примерно равном 100 м. Каждый пролет этой линии колеблется, образуя половину волны с частотой в один период в секунду и амплитудой около 3 м в средней части. Описанное явление вряд ли может быть отнесено к колебаниям в узком смысле слова, и обычно известно под названием «галопирования». Оно никогда не наблюдалось в странах с теплым климатом, но случается приблизительно один раз в течение зимы в северной части США и в Канаде, когда температура воздуха колеблется от 0° в ту или другую сторону и когда дует сильный порывистый ветер в поперечном к линии направлении. Кроме того, на этих проводах в таких случаях очень часто находили осевший на них мокрый снег. По грубому подсчету получается собственная частота колебаний пролета примерно той же величины, что и частота, действительно наблюдавшаяся. Установленный факт, что возбуждение колебаний, раз начавшись, непрерывно и с одинаковой, притом весьма значительной, интенсивностью поддерживается иногда в течение 24 часов, не позволяет объяснить это явление как вынужденные колебания. Такое объяснение должно предполагать существование регулярных порывов ветра, частота которых с поразительной степенью точности совпадает с собственной частотой линии. Так, например, положим период $T = 1$ сек. Тогда, если в течение 10 минут произойдет не 600 равноудаленных по времени друг от друга порывов ветра, а 601, то колебания за первые 5 мин. будут нарастать, а за последующие 5 мин. убывать. Чтобы поддержать колебания линии в течение 2 часов, требуется, чтобы ошибка в регулярности порывов ветра не превосходила $1 : 7200$. Итак, очевидно, что от подобного объяснения надо отказаться.

Мы имеем здесь случай автоколебаний, вызванных ветром, действующим на провод, который вследствие прилипшего к нему снега принял такую форму, что поперечное сечение получившегося тела уже не имеет очертания круга. Для объяснения явления нам придется обратиться к некоторым положениям аэродинамики.

Если поток воздуха, осуществляемый в данном случае ветром, натекает на круглый цилиндр (рисунок 95, а), то он воздействует на этот цилиндр силой, имеющей направление ветра, что вполне очевидно из соображений симметрии. Для стержня некруглого сечения (рисунок 95, б) такое положение уже не имеет места. В этом случае между направлением силы и направлением ветра образуется некоторый угол. Хорошо известным примером здесь может служить крыло, для которого направление силы почти перпендикулярно к направлению воздушного потока (рисунок 95, в).

Посмотрим теперь на линию электропередачи во время ее галопирования и сосредоточим свое внимание на ней в тот момент, когда провод перемещается по направлению вниз. Если бы не было ветра, то этот провод вследствие своего движения находился бы под действием потока воздуха, направленного снизу. Пусть теперь ветер дует сбоку со скоростью V . Тогда провод, перемещающийся вниз со скоростью v , должен испытывать действие ветра, дующего снизу под сравнительно небольшим углом к горизонту, равным $\arctg(v / V)$. Если бы провод имел круговое поперечное сечение, то сила, действующая на него под влиянием ветра, имела бы небольшую вертикальную составляющую, направленную вверх (рисунок 96). Но так как этот провод движется вниз, то указанная вертикальная составляющая оказывается направленной противоположно движению, а поэтому она должна его гасить. Однако в случае некругового сечения сила, возникающая от действия ветра, может иметь вертикальную составляющую, направленную вниз, вызывая тем самым отрицательное затухание (рисунок 95, б)

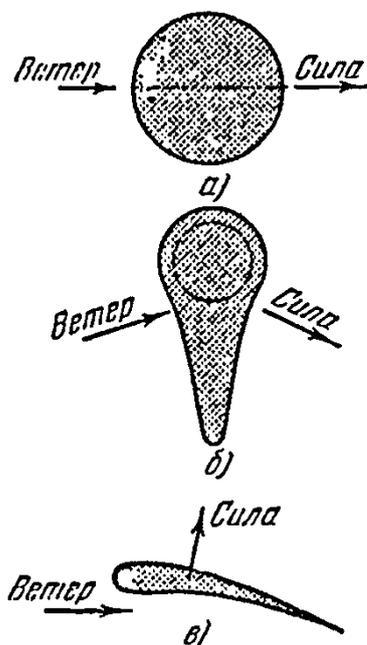


Рисунок 95 – Направления ветра и вызванной им силы образуют между собою некоторый угол в случае несимметричного сечения



Рисунок 96 – При движении провода вниз горизонтальный боковой ветер имеет кажущееся направление наклонно снизу

Рассматривая условия, имеющие место во время движения провода вверх при его колебании, мы можем видеть подобным же образом, что провод воспринимает поток воздуха, идущий на него наклонно сверху, причем вызываемая им сила в случае круглого провода имеет вертикальную составляющую, направленную вниз, которая должна вызвать затухание. Однако, если сечение некруглое, то упомянутая сила может иметь вертикальную составляющую, направленную вверх, а так как тогда она будет иметь то же направление, что и движение, то ее действие будет эквивалентно отрицательному затуханию.

Если прилипший к проводу снег будет иметь поперечное сечение, обуславливающее взаимное расположение направлений ветра и силы, показан-

ное на рисунке 95, б, то будет случай динамической неустойчивости. Пусть по какой-либо причине провод получил небольшую скорость, направленную вверх. Тогда ветер будет толкать его дальше по тому же направлению и при том до тех пор, пока возникающие в проводе упругие силы не приостановят такого движения. После этого те же упругие силы заставят провод двигаться вниз. Этому движению ветер будет опять помогать, вследствие чего малые колебания очень скоро вырастут в большие.

Остается определить, какие поперечные сечения являются динамически устойчивыми (как, например, круг) и какие неустойчивыми. В связи с этим вопросом мы вступаем уже в область аэродинамики и неправильных поперечных сечений, где наших общих знаний еще недостаточно. Единственное, что мы можем сделать — это произвести непосредственное испытание. Однако в некоторых типичных случаях мы можем получить ценные для нас указания на основании соображений качественного характера. Интересно отметить, что наиболее «неустойчивым» из известных сечений является полукруг, поставленный своей плоской частью навстречу ветру. На рисунке 97 представлено такое сечение, причем набегающий на него поток воздуха идет слегка сверху, что соответствует движению вверх галопирующего провода электропередачи. Внизу воздушный поток оставляет проводу нижнего острого края, а сверху он его обтекает вокруг верхнего края, перемещаясь еще на некоторое расстояние за этот край. Это происходит вследствие того, что поток имеет слегка наклонное направление.

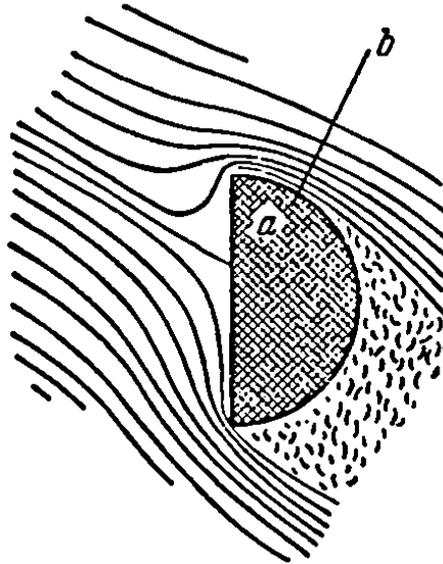


Рисунок 97 – Воздушный поток вокруг полукруглого цилиндра

Область, покрытая точками, заполнена завихрениями, находящимися в полном беспорядке и характеризующими собою турбулентное состояние воздуха, причем все, что мы знаем об этой области, это то, что здесь среднее давление приблизительно равно атмосферному. Говоря точнее, в нижней половине круговой поверхности цилиндра давление равно атмосферному, т. е. оно равно давлению воздуха в некотором удалении от его возмущенного состояния, вызванного проводом. Выше данного сечения линии тока воздуха загибаются к низу. Все это приводит к тому, что давление падает в направлении от a к b . В самом деле, рассмотрим частицу воздуха в потоке. Если бы никакие силы на данную частицу не действовали, то она двигалась бы по прямой, а так как в действительности ее траектория искривляется по направлению вниз, то на эту частицу должна действовать сила, толкающая ее сверху. Строго говоря, линии тока, т. е. кривые, в каждой точке которых скорость направлена по касательной, нельзя смешивать с траекториями. Те и другие кривые совпадают лишь в случае установившегося движения. Но эта сила может быть вызвана лишь избытком давления на частицу сверху по сравнению с давлением на нее снизу. Иначе говоря, давление в a должно быть больше, чем давление в b . Так как в точках a (которые достаточно удалены от возмущенного состояния) давление равно атмосферному, то, следовательно, в точках b оно должно быть ниже атмосферного. Таким образом,

вследствие разности давлений сверху и снизу полукруглое сечение испытывает действие силы, направленной вверх, причем эта сила обусловлена потоком воздуха, т. е. ветром, направленным вниз. На основании сказанного, случай, представленный на рисунке 97, должен быть охарактеризован как неустойчивый.

Все это может быть продемонстрировано на простом опыте. Возьмем очень легкий деревянный брусок полукруглого сечения (длины примерно 35 см и диаметра 5 см) и подвесим его с помощью четырех пружин таким образом, чтобы получить частоту собственных вертикальных колебаний, соответствующую примерно 6 колебаниям в секунду (рисунок 98). Если при укреплении пружин на бруске или на раме принять необходимые меры для того, чтобы свести затухание к минимуму, то прибор, будучи помещен перед обыкновенным настольным вентилятором, сможет вызвать такие нарастающие колебания бруска, амплитуда которых превысит его радиус. Брусок в этом приборе должен быть возможно более легким, благодаря чему при данных частоте и амплитуде как сила упругости, так и сила инерции получаются достаточно малыми. Заметим, что сила действия ветра определяется исключительно геометрическими размерами и формой бруска и не зависит от его веса. Поэтому, изготавливая брусок из легкого материала, мы тем самым делаем, возможно, большим отношение между силой ветра и упругой силой.

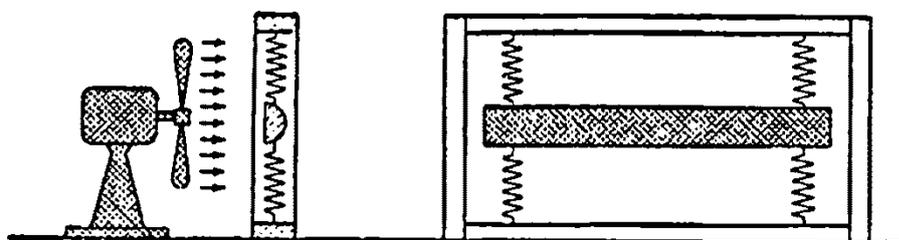


Рисунок 98 – Прибор для демонстрации галопирования линий электропередачи

Другой известный пример неустойчивого сечения — это сильно удлиненный прямоугольник, обращенный своей широкой стороной к направлению ветра (вообще потока, могущего быть потоком жидкости или газа). И

здесь объяснение остается тем же самым, как в случае полукруглого бруска (рисунок 99), с той лишь разницей, что в данном случае явление не так резко выражено. Это явление легко наблюдать, если взять плоскую пластинку, один конец которой держать в руке, а другой погрузить в вертикальном направлении в воду. Двигая пластинку в воде так, чтобы широкая сторона прямоугольного сечения была расположена перпендикулярно к направлению движения, мы увидим, что в действительности пластинка будет перемещаться зигзагообразно, и, наоборот, если пластинку толкать узкой стороной вперед, то именно это движение и будет осуществляться и притом достаточно устойчивым образом.

Если мы опять возьмем брусок с неустойчивым поперечным сечением и вместо того, чтобы подвешивать на пружинах, как показано на рисунке 98, закрепим его в середине на оси так, чтобы он мог вращаться вокруг нее (рисунок 100), то мы получим случай самовозбуждающегося вращения или автототации. Когда такой прибор находится в покое, то ветер, очевидно, не вызывает никакого крутящего момента, но стоит только сообщить бруску вращение, как от ветра возникает момент, усиливающий вращение в том же направлении. Направление вращения определяется направлением первоначального вращения, т. е., в сущности говоря, случаем.

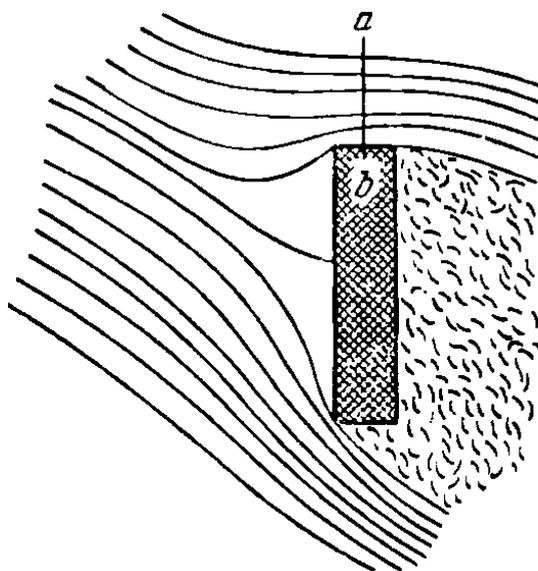


Рисунок 99 – Эффект потоку вокруг прямоугольного сечения является

Эта очень интересная игрушка известна под названием «воздушного вихря» Ланчестера.

В аэродинамике обычно принято раскладывать полную силу давления воздуха на две составляющие:

- а) на составляющую в направлении потока – лобовое сопротивление D ,
- б) на составляющую, перпендикулярную потоку – подъёмную силу L .

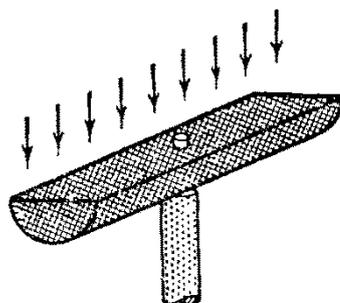


Рисунок 100 – Вихрь Ланчестера

Обе эти силы могут быть легко измерены посредством специальных инструментов (аэродинамические весы).

Положим, что на рисунке 101 изображено сечение, совершающее колебательное движение и перемещающееся в данный момент вниз, вследствие чего дующий ветер оказывается направленным несколько снижу под углом $\alpha = \arctg(v/V)$ к горизонту. Подъёмная сила L и лобовое сопротивление D имеют составляющие, направленные вертикально вверх (т.е. противоположно направлению движения) и равные соответственно $L \cos \alpha$ и $D \sin \alpha$. Тогда полная вертикально направленная сила F действия ветра, гасящая движение, будет:

$$F = L \cos \alpha + D \sin \alpha. \quad (4.15)$$

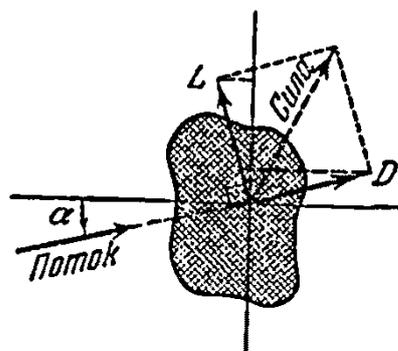


Рисунок 101 - Полная сила действия потока

Мы не так интересуемся самой силой F , как её производной $dF/d\alpha$, т.е. изменением этой силы, направленной вверх, при изменении угла α или, что то же, при изменении отношения v/V . Пусть сила F имеет большое значение, а производная $dF/d\alpha$ равна нулю. В таком случае некоторая часть веса провода воспринимается уже не мачтами, а самим ветром. Так как $dF/d\alpha = 0$, то колебание, или галопирование, линии не отразится на той части веса провода, которая поддерживается воздухом, а потому аэродинамический эффект не отразится на колебаниях. Затем предположим, что производная $dF/d\alpha$ отрицательная. Это значит, что сила F возрастает при переходе этого угла к положительным значениям. Тогда, очевидно, мы имеем тот случай, когда переменная сила действует на линию возбуждающим образом, как это уже выяснилось выше. Итак, имеем следующий критерий динамической устойчивости:

$$\frac{dF}{d\alpha} < 0 \text{ неустойчивость,}$$

$$\frac{dF}{d\alpha} > 0 \text{ устойчивость.}$$

Приступая к дифференцированию уравнения (4.15), необходимо заметить, что при малых колебаниях величина v мала, по сравнению с величиной V . Тогда α есть малый угол, и его косинус может быть принят равным единице, а его синус настолько мал по сравнению с единицей, что им можно пренебречь. Итак, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\alpha} &= \frac{dL}{d\alpha} \cos \alpha - L \sin \alpha + \frac{dD}{d\alpha} \sin \alpha + D \cos \alpha = \\ &= \sin \alpha \left(-L + \frac{dD}{d\alpha} \right) + \cos \alpha \left(\frac{dL}{d\alpha} + D \right) \approx \frac{dL}{d\alpha} + D. \end{aligned}$$

Таким образом, система неустойчива, если

$$\frac{dL}{d\alpha} + D < 0. \quad (4.16)$$

Значения подъемной силы и лобового сопротивления для произвольного поперечного сечения не могут быть вычислены теоретическим путем, а определяются на основании испытаний в аэродинамической трубе. Результаты таких испытаний обычно наносятся на диаграмму наподобие представленной на рисунке 102. Соотношение (4.16) мы можем выразить следующими словами: сечение динамически неустойчиво, если отрицательный наклон кривой подъемной силы больше ординаты кривой лобового сопротивления.

Из рисунка 102 видно, что продолговатое сечение всегда устойчиво, если держать его «вдоль» ветра ($\alpha = 0^\circ$), но если держать его «поперек» ветра ($\alpha = 90^\circ$), то оно неустойчиво. Если линия электропередачи покрывается мокрым снегом, примерно при температуре воздуха 0° , то очень легко могут получиться ледяные сосульки, более или менее вытянутые в вертикальном направлении, что и соответствует углу $\alpha = 90^\circ$ на диаграмме.

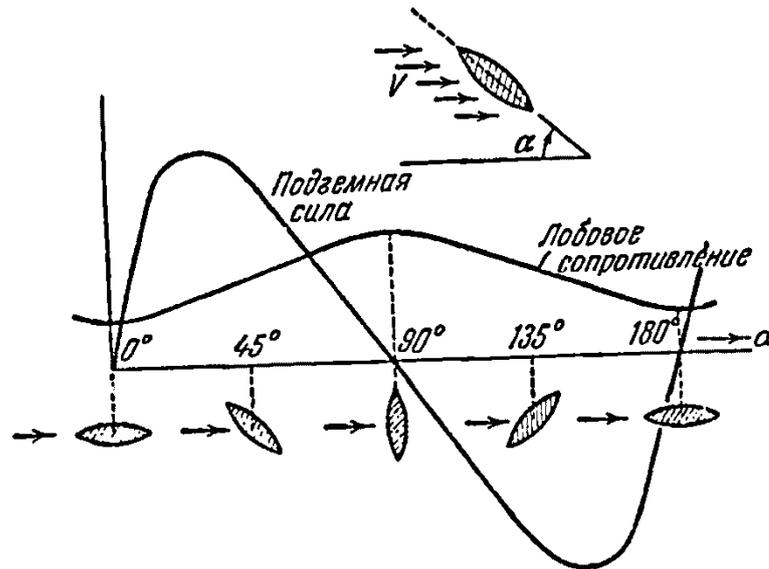


Рисунок 102 – Для продолговатого симметричного поперечного сечения подъёмная сила и лобовое сопротивление являются функциями угла атаки

При этом значении угла и при малых амплитудах колебания (когда угол изменяется, например между 89 и 91°) провод получает энергию в течение каждого периода колебания. Вследствие этого получается возрастание амплитуды, и это возрастание продолжается до тех пор, пока имеется избыток энергии, сообщаемой ветром. При некоторой, достаточно большой, амплитуде указанный избыток энергии обращается в нуль, вследствие чего мы имеем энергетическое равновесие, а тогда амплитуда достигает своего конечного значения. На рисунке 102 это имеет место, по-видимому, при изменении угла α от 30 до 150° . В середине каждого размаха провод получает энергию, а вблизи концов размаха энергия рассеивается вследствие затухания, так как в соответствующих фазах величина $(dL/d\alpha) + D$ оказывается больше нуля. Значение конечной амплитуды может быть найдено графическим или численным интегрированием по изображенным графикам, как об этом уже говорилось выше.

До сих пор мы предполагали, что система имеет одну степень свободы, чего, конечно, нет в действительности для пролета электропровода, каждая точка которого колеблется со своей амплитудой (в середине пролета амплитуда больше, а около мачт меньше). Следует заметить, что амплитуды раз-

личных точек провода могут быть различными также и в случае существования одной степени свободы. Так, например, это имеет место, если провод в любой момент времени образует полуволну синусоиды, все точки которой колеблются по одному закону, имея лишь разные амплитуды. В действительности же на эту волну» определяющую основной тон колебаний, накладываются волны, соответствующие обертонам, имеющие другие периоды. Строго говоря, здесь мы имеем бесконечно большое число степеней свободы. Так как сила, создаваемая действием ветра на провод, мала, по сравнению с силой упругости и силой инерции при колебании, то конфигурация колеблющейся системы должна быть такая же, как и в случае отсутствия ветра. Иными словами, провод будет колебаться с первой собственной частотой. Конечное значение амплитуды может быть определено, если найти величину энергии, поглощенной целым пролетом провода. Если для некоторой предварительно предположенной амплитуды эта энергия получается положительной, то амплитуда взята слишком малой и, наоборот, если энергия получается отрицательной (затухание), то амплитуда взята слишком большой. Определение величины энергии влечет за собою двойное графическое интегрирование: один раз по углу α каждой точки провода, а затем по координате x , определяющей положение точки на линии. Весь процесс не влечет за собою каких-либо принципиальных трудностей при выполнении, но все же требует много времени.

Рассмотренные сейчас колебания линии передачи характеризуются очень малой частотой и большой амплитудой, Это явление наблюдается довольно редко и зависит от метеорологических условий. Оно имеет место тогда, когда провода обволакиваются замерзшей снежной массой и подвергаются действию сильного бокового ветра. Однако существует еще разновидность колебательных движений линий передач, которые имеют большую частоту и малую амплитуду. Эти колебания встречаются чаще, и для их возникновения не требуется бокового ветра. Объяснением такого явления служит так называемая «вихревая дорожка Кармана».

4.6 Вихри Кармана

При обтекании цилиндра жидким потоком кильватерная область позади цилиндра уже не имеет правильного строения, а заполняется вихрями, образующими своеобразный узор, наподобие того, как это изображено на рисунке 103. Вихри идут в чередующемся порядке в смысле направления вращения по часовой стрелке и против нее. Они отрываются от цилиндра в правильной последовательности и связаны с поперечной силой переменного направления. Это явление было исследовано экспериментально, причем было найдено, что между частотой f сбегания вихрей, диаметром D цилиндра и скоростью V потока имеется определенное соотношение, выражаемое формулой

$$\frac{fD}{V} = 0,22. \quad (4.17)$$



Рисунок 103 – Зарождение вихрей Кармана

Иначе говоря, цилиндр перемещается вперед на 4,5 диаметра за время одного периода колебаний (т. е. сбегания). Мы видим, что эта дробь безразмерная, и поэтому число 0,22 не зависит от выбора единиц. Оно известно под названием числа Струхалья. Отделение вихрей на чередующихся сторонах цилиндра является причиной возникновения на нем гармонически изменяющейся силы, перпендикулярной к направлению потока. Наибольшая интенсивность этой силы может быть представлена в форме, обычно применяемой к аэродинамическим силам (таким, как подъемная сила и сила лобового сопротивления):

$$F_K = \left(C_K \cdot \frac{1}{2} \rho V^2 S \right) \sin \omega t. \quad (4.18)$$

Индекс K здесь поставлен в честь Кармана: F_K есть сила Кармана, C_K — безразмерный коэффициент Кармана, S — площадь. Достаточно точное численное значение коэффициента C_K неизвестно. Более или менее удовлетворительное его значение принимается равным единице ($C_K = 1$), что пригодно для большего диапазона чисел Рейнольдса — от 102 до 107. Это значит, что амплитуда переменной силы, действующей на единицу площади сечения, приближенно равна давлению стационарного потока.

Механизм отделения вихрей от цилиндра представляет собою чистое самовозбуждение, поскольку поток сам по себе не обладает колебательными свойствами, в то время как частота отделения вихрей определяется числом Струхалья. В то время как обусловленные самовозбуждением автоколебания, которые мы рассмотрели в этой главе, опасны сами по себе, этого нельзя сказать о самовозбуждении в данном случае. Нам мало интересуют то, что происходит в потоке; нас интересует только величина силы, действующей на цилиндр, определяемая формулой (4.18). Как правило, здесь никаких последствий ожидать не приходится. Мы можем встретиться с неприятностью лишь в том случае, когда частота самовозбуждения, т. е. отделения вихрей, стоящая в формуле (4.17), совпадает с собственной частотой конструкции, подвергающейся действию вихрей. Тогда имеет место резонанс, могущий привести к аварии. Объекты, где это наблюдалось, многочисленны и разнообразны: линии передач, перископы подводных лодок, фабричные трубы, висячий мост, нефтяной бак и маленькие капельки дождя.

Рассмотрим сначала линию передачи с проводом диаметра 2,5 см при скорости ветра 47 км/час. Число Струхалья по уравнению (4.17) дает 116 колебаний в секунду. Колебания линий при таких высоких частотах с малыми амплитудами часто наблюдались и неоднократно кончались усталостными разрывами. При этом очевидно, что резонанс имеет место на высших гармониках линий, получаемых для пролета, который подразделяется на несколько синусоидальных полуволн, количество которых может быть примерно от 20

до 30. Так как здесь мы имеем колебания большой частоты и малой амплитуды, то оказалось возможным и практичным применить здесь динамические виброгасители с затуханием. Простейшая и наиболее обычная конструкция, известная под названием «колодочного демпфера» (Stockbrldgedampfer), показана на рисунке 104. Здесь кусок стального кабеля с грузами на его концах наглухо прикреплен к проводу. Кабель действует, как пружина, причем настройка делается приблизительно на частоту ожидаемых колебаний. Всякое движение провода линии в точке A вызывает относительное движение в элементах кабеля, причем трение между его проволоками приводит к рассеянию энергии. Точка A прикрепления выбирается на линии так, чтобы она не совпадала с узлом колебаний. Иначе демпфер был бы бесполезен. Так как длина полуволны синусоиды варьирует от 2,4 м до 60 м, то помещение демпфера на расстоянии около 1,8 м от точки подвеса провода к мачте будет наиболее эффективным для гашения колебаний большинства частот и длин волн. Описанное сейчас приспособление показало себя весьма эффективным в смысле защиты линий от колебаний, обусловленных вихрями Кармана. Что же касается попытки рассчитать такие демпферы для галопирующих линий, где частота примерно в 100 раз меньше, а амплитуда в 100 раз больше, то это оказалось совершенно непрактичным, так как вес прибора получился бы равным нескольким тоннам.

Перископы подводных лодок, представляющие собой консоли длины 6 и более метров (в раздвинутом состоянии) и диаметра около 20 см оказываются в состоянии резонанса с вихрями Кармана при скорости примерно 8 км/час. Так как здесь жидкой средой является вода с большой плотностью ρ , то возмущающая сила, согласно уравнению (4.18), очень велика, и вибрация оказывается резко выраженной, что приводит к размытию изображения в приборе. Мерой против этого является замена кругового сечения трубы сечением обтекаемой формы. Однако перископ должен свободно поворачиваться во всех направлениях, необходимых для обозрения. Все это приводит к конструктив-

ным осложнениям, вследствие чего задача еще не может считаться решенной.

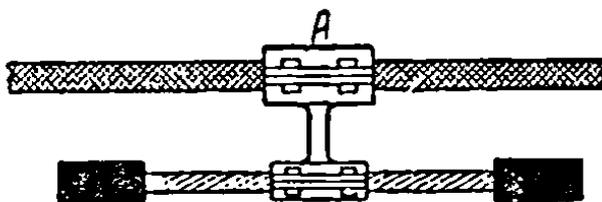


Рисунок 104 – Колодочный демпфер для линии передачи, состоящий из куска винтового стального кабеля длиной примерно 30см, несущего на каждом конце по чугунному грузу весом около 0,4 кг

Стальные фабричные трубы систематически показывают явление резонанса, вызванного вихрями Кармана, при скоростях ветра в пределах от 45 до 50 км/час. Кирпичные или бетонные трубы не подвержены этому явлению.

В стальных трубах дело ухудшается при замене клепки сваркой, так как тем самым понижается рассеяние энергии за счет внутренних сил. Недавно имел место случай, когда стальная труба диаметром 4,8 м и высотой 90 м оказалась в состоянии резонанса при собственной частоте, равной 1 колебанию в секунду (при скорости ветра примерно 80 км/час), причем колебания были столь сильны, что труба получила прогиб, и в материале образовалась трещина, простиравшаяся по окружности на 180°.

Угрожающая верхняя половина трубы была снята и сделана заново, причем новая труба была снабжена виброгасителями. Эти последние были поставлены в тросах, соединяющих вершину трубы с землей, как показано на рисунке 105, В качестве виброгасителя на каждом тросе были взяты две большие пружины А, имевшие достаточную длину, и вся система, состоявшая из пружин и троса, была подвергнута начальному натяжению так, что пружины были, примерно на 20 см длиннее, чем в ненапряженном состоянии. Между пружинами был помещен амортизатор такого типа, который применяется в больших грузовиках. Когда труба начинает колебаться, в амортиза-

торе происходит относительное движение, благодаря которому рассеивается энергия. При этом расчет производится так, чтобы количество энергии, рассеиваемой в демпфере, было приблизительно такое, какое рассеивается в самой трубе; этим естественное затухание удваивается, что достаточно для предотвращения повреждения трубы.

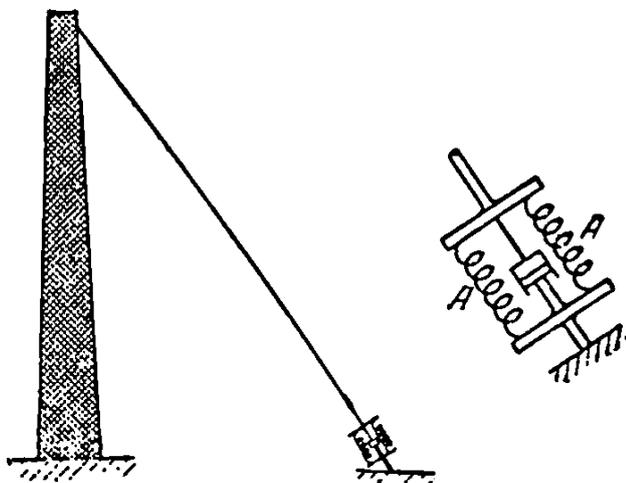


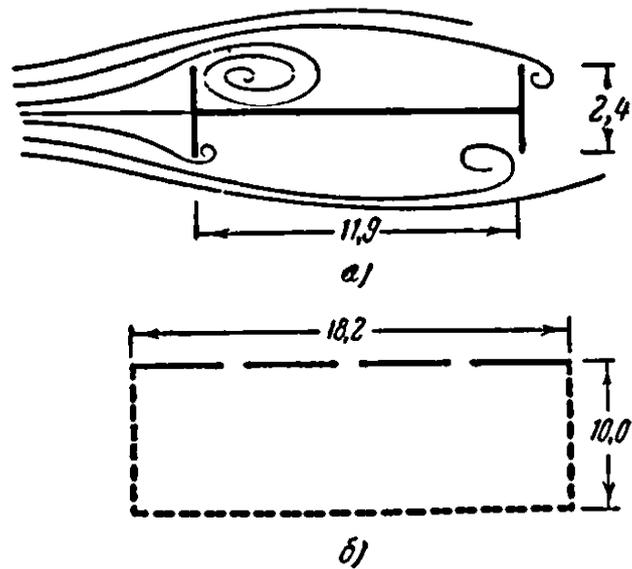
Рисунок 105 – Демпфер с трением, вмонтированный в проволочную оттяжку дымовой трубы

Осенью 1940 г. в штате Вашингтон произошла катастрофа с Такомским мостом (Tacoma Narrows): при умеренном ветре обрушился большой висячий мост через Такомское ущелье, бывший в эксплуатации всего лишь около года. В то время причина катастрофы с достаточной точностью не была установлена. Предлагались объяснения, основанные либо на вихрях Кармана, либо на явлении флаттера. Несколько лет спустя после катастрофы в Вашингтонском университете были осуществлены тщательно поставленные опыты в специально сконструированной аэродинамической трубе, после чего стало ясно, что причиной катастрофы была вихревая дорожка Кармана. На этот раз объектом изучения был не цилиндр, а двутавровый профиль. Исследуемое явление имеет место для всевозможных форм сечения. Формулы для частоты (4.17) и для интенсивности (4.18) сохраняют свою силу для различных сечений, отличаясь лишь значениями безразмерных коэффициентов Струхаля и Кармана. В данном случае ветер дул достаточно устойчиво в течение часа со скоростью 67 км/час. Частота схода вихрей совпала с частотой крутильных

колебаний полотна моста на растяжках, что в результате резонанса привело к поворотам полотна на угол до 45° по каждую сторону от горизонтали. Вдоль пролета укладывались при колебаниях две полуволны синусоиды. Это и вызвало разрушение моста. После тщательно проделанной исследовательской работы мост был восстановлен с тремя существенными изменениями в конструкции. Во-первых, боковые балки жесткости были заменены стержневой конструкцией, так что ветер мог дуть сквозь нее без образования больших вихрей. Во-вторых, в полотне моста были сделаны продольные щели (с решеткой между линиями движения), вследствие чего, если бы даже образовались большие вихри, то не было бы большой разности давлений с верхней и нижней стороны полотна. В-третьих, «открытое» сечение (рисунок 106, а) было заменено «закрытым» коробчатым сечением (рисунок 106, б), причем были смещены вниз боковые решетки, которые внизу были связаны между собой еще горизонтальной решеткой. Такое закрытое коробчатое сечение является примерно в 100 раз более жестким на кручение, чем открытое сечение. Благодаря этому собственная частота крутильных колебаний оказывалась за пределами резонанса со скоростью ветра.

Полотно Такоцкого моста" имело ширину 12 м (39 фут), но это соответствовало еще не наибольшему вихрю Кармана. Наибольший вихрь наблюдался в баке нефтехранилища в Венесуэле. Бак был без крыши, обычной цилиндрической формы, диаметром около 46 м и высотой 14,6 м. Когда он был еще новый, он был наполнен морской водой до уровня на 1,2 м ниже его верха. Под влиянием пассата, устойчиво дующего в этом месте со скоростью примерно 48 км/час, образовалась стоячая волна высотой около 2,4 м между верхом бака и его основанием. Частота волн не была определена. Однако имеется формула для скорости V распространения океанских тяжелых волн длины l :

$$V = \sqrt{\frac{gl}{2\pi}}$$



а) старый, обрушившийся мост имел сплошное полотно и сплошные боковые балки жёсткости;

б) новый мост имеет боковые решётки, щели в полотне и, кроме того, нижнюю решётку, замыкающую коробчатое сечение.

Рисунок 106 – Поперечное сечение проезжей части Такомоского моста

Фотографии вихревых цепей показали, что длина волны l равна диаметру, т. е. 46 м, а потому $V = 8.4$ м/сек. Полный период равен времени прохождения вершиной волны всего диаметра бака от одного его конца до другого, равного 46 м, что даёт для периода волны величину $46/8,4 = 5,5$ сек. Пользуясь формулой (4.17) и принимая высоту бака 14,6 м за «диаметр», мы находим скорость ветра, равную 12 м/сек или 44 км/час, что, может быть, несколько грубо, но все же подтверждалось произведенными на месте наблюдениями. Мерой против возникающих при этом сильных колебаний послужила установка в баке вертикальных перфорированных пластин параллельно его внешней стенке на расстоянии 30 см от нее.

В наименьшем масштабе вихри Кармана проявляются в водяных каплях диаметром примерно в 1 мм. Метеорологическими наблюдениями было установлено, что дождевые капли в спокойном воздухе падают вертикально, за исключением капель, диаметр которых равен точно 1 мм. Такие капли при падении относятся в разные стороны. Если подсчитать скорость падения та-

кой капли и применить уравнение (4.17), то будет определена частота вихря. Оказывается, что собственная частота колебаний капли такого размера при ее переходе от сферической формы к эллипсоидной, под влиянием поверхностного натяжения та же, что и частота схода вихрей. Таким образом, при падении капли пульсируют, и их траектория оказывается уже не вертикальной прямой, а линией неправильной формы.

4.7 Колебания регулятора паровой машины

Очень интересные автоколебательные явления наблюдаются в паровых машинах и турбинах, с которыми связаны центробежные регуляторы прямого действия. В этом случае части регулятора, являющиеся чувствительными к изменению скорости, т. е. его шары, находятся в непосредственном соединении с дроссельным клапаном. В очень больших паровых машинах или турбинах требуется слишком много энергии для непосредственного открывания и закрывания дросселя, благодаря чему в таких машинах регулятор действует непосредственно лишь на электрические контакты или масляные клапаны (реле), которые в свою очередь уже приводят в движение дроссельный клапан. Такой регулятор непрямого действия мы, однако, здесь рассматривать не будем.

На рисунке 107 изображена схема регулятора прямого действия. Пусть по какой-либо причине скорость машины a возросла. Тогда шары регулятора приподнимут муфту b , немного прикрыв тем самым вентиль с паропровода. Вследствие этого машина будет получать меньшее количество пара, и ее скорость понизится. Но так как вся система обладает инерцией, то скорость упадет ниже нормальной, в результате чего регулятор теперь уже откроет клапан сверх нормы. Таким образом, в машине возникнут колебания скорости, которые, смотря по обстоятельствам, могут быть как затухающими, так и самовозбуждающимися. Если машина с резко изменяющейся скоростью соединяется с генератором, то напряжение тока также должно колебаться, вследствие чего мы ясно увидим мигание света электрических лампочек.

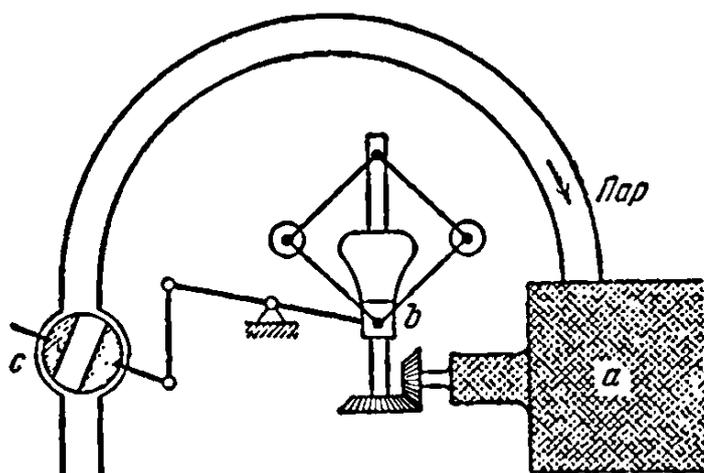


Рисунок 107 – Регулятор Уатта, непосредственно соединённый с дроссельным клапаном, регулирующим доступ пара в турбину

Чтобы легче уяснить описанное явление, лучше всего исходить из дифференциальных уравнений движения регулятора. Прежде всего мы видим, что регулятор представляет собою обыкновенную колеблющуюся систему, состоящую из массы, пружины и демпфера (катаракта). Вследствие этого мы должны получить три члена в дифференциальном уравнении. Кроме того, регулятор связан с машиной таким образом, что при возрастании угловой скорости ϕ машины на массу регулятора начинает действовать сила, направленная вверх и вызванная центробежными силами шаров. Отсюда получаем уравнение

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = C_1\dot{\phi}, \quad (4.19)$$

где x – вертикальное перемещение вверх муфты регулятора, отсчитываемое от её нормального положения при определённой нагрузке; m – эквивалентная масса муфты регулятора (приведённая масса); c – коэффициент жёсткости пружины; $\dot{\phi}$ – разность между мгновенной угловой скоростью машины и её нормальной или средней скоростью при определённой нагрузке; C_1 – величина возрастания силы, приложенной к муфте и направленной вверх (от действия центробежных сил шаров), вызванного увеличением угловой скорости машины на один радиан в секунду.

Мы видим, что, вводя две координаты x и φ , мы исходим из некоторых «нормальных» условий, которые имеют место, когда машина вращается с постоянной скоростью при постоянной нагрузке и при постоянно открытом дроссельном клапане, а муфта не движется по вертикали. При этих условиях $x = 0$, вследствие чего x принимает положительные значения, когда муфта регулятора оказывается выше своего нормального положения, и отрицательные значения, когда она ниже этого положения. Подобным же образом φ отрицательно, когда машина временно имеет скорость ниже нормальной.

Собственно говоря, машина сама по себе не является колебательной системой, так как в ней нет пружин (понимаемых в широком смысле), возвращающих ее в равновесное положение. Однако, с другой стороны, мы имеем здесь массу, или, вернее, момент инерции I . Действием момента сил затухания машины мы в нашем исследовании пренебрегаем. Машина связана с регулятором таким образом, что, когда его муфта ниже нормального положения (x отрицательно), клапан открыт больше обычного, вследствие чего получается избыток положительного или вращающего момента, действующего на машину. Поэтому дифференциальное уравнение движения машины принимает вид

$$I\ddot{\varphi} = -C_2x, \quad (4.20)$$

где I – эквивалентный момент инерции машины (приведенный момент инерции); C_2 – величина возрастания крутящего момента, действующего на машину вследствие давления пара, вызванного понижением муфты регулятора на 1 см.

Уравнения (4.19) и (4.20) определяют собою свободные колебания всей системы в целом (машина и регулятор), так как в этих уравнениях отсутствует периодическая сила. В этом случае решением должна быть функция вида

$$e^{pt} \cos qt, \quad (4.21)$$

где q есть частота собственных (притом затухающих) колебаний, а коэффициент p , который может быть как положительным, так и отрицательным, является мерой затухания. Вместо того, чтобы писать решение в форме (4.21), мы можем представить его в виде

$$e^{pt} \cos qt,$$

причём действительная часть этого выражения та же, что и в формуле (4.21); или, что будет ещё короче, можно положить

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{max} e^{st}, \\ \varphi &= \varphi_{max} e^{st}, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где s есть комплексное число («комплексная частота»).

Подставляя значения (4.3) в дифференциальные уравнения (4.19) и (4.20), деля затем эти уравнения на e^{st} , мы получаем

$$(ms^2 + cs + k)x_{max} - C_1 s \varphi_{max} = 0,$$

$$Cx_{max} + Is^2 \varphi_{max} = 0.$$

Итак, мы имеем систему однородных алгебраических уравнений, имеющих отличные от нуля решения x_{max} и φ_{max} лишь в том случае, если удовлетворяется уравнение

$$\frac{ms^2 + cs + k}{C_2} = -\frac{C_1 s}{Is^2},$$

или

$$s^3 + \frac{c}{m}s^2 + \frac{k}{m}s + \frac{C_1 C_2}{mI} = 0. \quad (4.22)$$

Уравнение (4.22) есть уравнение частот для системы (4.19) и (4.20). Это уравнение, вследствие отсутствия «пружины», в системе самой машины является кубическим, а не четвёртой степени, как это следовало бы ожидать для обычной системы с двумя степенями свободы.

Из двух признаков устойчивости, приведенных, удовлетворяется всегда лишь первый, требующий, чтобы все коэффициенты были положительными. Что касается второго, выражаемого неравенством (4.9), то здесь он принимает вид

$$\frac{c}{m} \frac{k}{m} > \frac{C_1 C_2}{m l},$$

или

$$c > \frac{m C_1 C_2}{k l}. \quad (4.23)$$

Если затухание в катаракте регулятора больше, чем указываемое этой формулой, то система возвратится к спокойному состоянию после внезапного изменения нагрузки, в противном случае, т. е. при затухании, меньшем требуемого, система регулятора окажется недействительной (рисунок 83, б).

В том случае, когда машина жестко связана с электрогенератором, питающим большую сеть, задача становится значительно более сложной. Дело в том, что здесь появляется своеобразная «пружина машины», так как сеть стремится удерживать ротор генератора в определенном положении, определяемом углом его поворота. Всякому отклонению от этого синхронного положения противодействует момент, вызванный магнитным полем, играющим роль пружины в воздушном пространстве генератора. В таких случаях в уравнение (4.20) войдет еще один добавочный член $k_e \varphi$, а если есть затухание также в генераторе, обеспечиваемое обмоткой электрического поглотителя, то в уравнении (4.20) оказываются даже два добавочных члена. Таким образом, система дифференциальных уравнений для нашей задачи принимает вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c_p \dot{x} + k_p x &= C_1 \dot{\varphi}, \\ I\ddot{\varphi} + c_M \dot{\varphi} + k_M \varphi &= -C_2 x, \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

где индекс «р» относится к регулятору, а индекс «м» — к машине. Очевидно, что I обозначает собою приведенный момент инерции всех вращающихся частей, т. е. системы машины и генератора.

Упомянутый сейчас катушечный гаситель как прибор, способствующий затуханию, был изобретен Лебланом в 1901 г. Этот прибор имеет своим назначением уменьшение неприятных явлений, связанных с колебаниями скорости. Он состоит из коротко замкнутой медной обмотки на внешних сторонах полюсов вращающейся части генератора. Пока генератор вращается с постоянной (синхронной) скоростью, в этой обмотке нет никаких токов, а поэтому нет и никаких препятствий к движению. Но как только скорость меняется, в обмотке возникают индуктивные токи, которые в совокупности с магнитным полем в воздушном пространстве генератора вызывают появление момента, пропорционального величине отклонения $\dot{\varphi}$ угловой скорости от нормального ее значения и направленного противоположно $\dot{\varphi}$, т. е. оказывающего тормозящее действие, если машина временно вращается слишком быстро, и, наоборот, ускоряющего вращение, если оно происходит слишком медленно.

Предполагая, что решение уравнения (4.24) имеет форму (4.3), подставим соответствующие значения x и φ в уравнение (4.24). Тогда уравнение частот примет вид

$$s^4 + s^3 \left(\frac{c_M}{I} + \frac{c_p}{m} \right) + s^2 \left(\frac{k_M}{I} + \frac{k_p}{m} + \frac{c_M c_p}{Im} \right) + s \left(\frac{c_p k_p}{m} + \frac{c_M k_p}{I} + \frac{C_1 C_2}{Im} \right) + \frac{k_M k_p}{Im} = 0,$$

где, как видно, все коэффициенты положительны. Критерий устойчивости (4.14) напишется так:

$$\left(\frac{c_M}{I} + \frac{c_p}{m} \right) \left(\frac{k_M}{I} + \frac{k_p}{m} + \frac{c_M c_p}{Im} \right) \left(\frac{c_p k_M}{m} + \frac{c_M k_p}{I} + \frac{C_1 C_2}{Im} \right) >$$

$$> \left(\frac{c_p k_M}{m I} + \frac{c_M k_p}{I m} + \frac{C_1 C_2}{I m} \right)^2 + \frac{k_M k_p}{I m} \left(\frac{c_M}{I} + \frac{c_p}{m} \right)^2. \quad (4.25)$$

Выполнение этого неравенства зависит от величин затухания c_p/m в регуляторе, затухания c_M/I в машине, собственных частот $\omega_M^2 = k_M/I$ и $\omega_p^2 = k_p/m$, а также от «коэффициента связи» $C_1 C_2/I m$. Единственное простое заключение, которое может быть сделано относительно неравенства (4.25), состоит в том, что при полном отсутствии затухания ($c_p = c_M = 0$) его левая часть обращается в нуль, тогда как правая часть есть $(C_1 C_2/I m)^2$, и неравенство нарушается. Следовательно, если никакого затухания нет, то колебания системы не успокаиваются.

Чтобы уяснить физический смысл неравенства (4.25), рассмотрим частный случай, когда отсутствует затухание в машине, т.е. $c_M = 0$. Это неравенство принимает тогда вид

$$c_p \frac{1}{C_1 C_2} (\omega_p^2 - \omega_M^2) > 1. \quad (4.26)$$

В случае, если частота регулятора ω_p меньше, чем частота машины ω_M , то левая часть получается отрицательной, и неравенство нарушается, что обозначает неустойчивое действие даже при очень большом c_p . Напротив того, если ω_p^2 больше, чем ω_M^2 то левая часть положительна, и тогда устойчивое действие будет преобладать, если только затухание регулятора удовлетворит неравенству

$$c_p > \frac{C_1 C_2}{I(\omega_p^2 - \omega_M^2)}.$$

Мы видим, таким образом, что неравенство (4.23) есть частный случай этого более общего результата.

Рассмотрим другой простой случай, когда затухание имеется только в машине, а в регуляторе отсутствует, т. е. когда $c_p = 0$. Неравенство (4.25) здесь также упрощается, принимая вид

$$c_M \frac{m}{C_1 C_2} (\omega_p^2 - \omega_M^2) > 1, \quad (4.27)$$

откуда видно, что неустойчивость безусловно имеет место, если частота регулятора больше, чем частота машины. В противном случае система может быть устойчива, если затухание в машине достаточно велико.

Подводя итоги, мы можем сказать, что если оказалось, что система, движение которой определяется уравнениями (4.24), неустойчива, то можно предпринять следующие меры:

- 1) когда частота регулятора больше частоты машины, необходимо усилить затухание в катаракте регулятора,
- 2) когда частота регулятора меньше частоты машины, необходимо ввести затухание в машину или в генератор.

4.8 Форсунки двигателей Дизеля

Обычное устройство топливного клапана или форсунки с соплом для двигателя Дизеля показано схематически на рисунке 108. Камера V непрерывно остается наполненной жидким топливом, имея соединение с топливным насосом посредством узкого канала B . Нормальным положением иглы A форсунки является ее положение на седле N . В тот момент, когда поршень двигателя должен начать свой рабочий ход, топливный насос подает определенное количество горючего в камеру F , где вследствие этого давление резко повышается. Поскольку диаметр стержня иглы сверху больше, чем снизу, то это давление стремится поднять её вверх. Как только давление делается достаточно большим, чтобы преодолеть восстанавливающую силу пружины S , стержень поднимется и произойдет вбрызгивание горючего через сопло N в

головку цилиндра. В конце хода топливного насоса давление в камере V падает, и пружина S опять закрывает клапан.

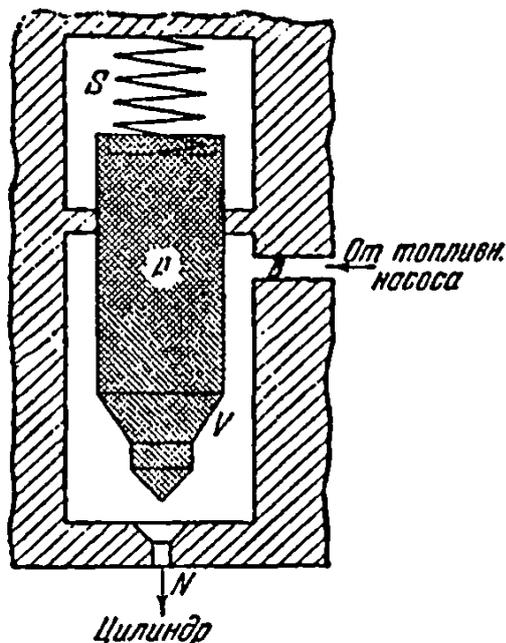


Рисунок 108 – Топливная форсунка дизеля. При отсутствии затухания игла форсунки динамически неустойчива

В таких форсунках наблюдались автоколебания иглы по типу, показанному на рисунке 109. На этих фигурах по горизонтали отложено время, а по вертикали — перемещение x иглы форсунки. Заштрихованная часть относится к периоду нагнетания горючего через канал B . Случай в) указывает положительное затухание, случай б) — отсутствие затухания, а случай а) — отрицательное затухание.

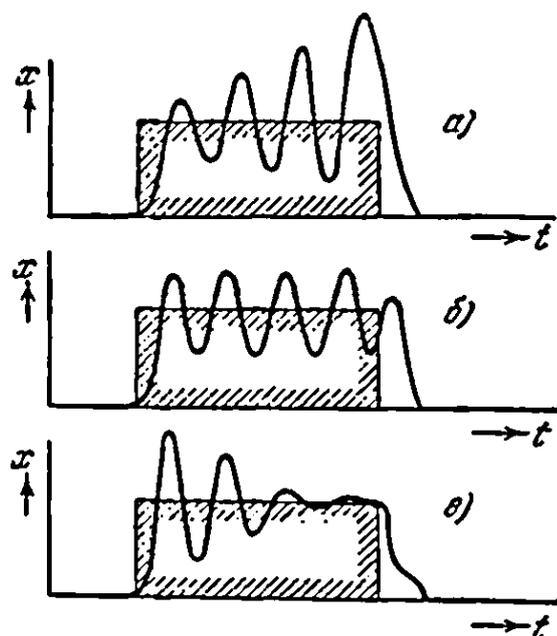


Рисунок 109 – Колебания иглы форсунки в состояниях: а) неустойчивом, б) безразличном, в) устойчивым

Рассмотрим физическую сторону явления. Во время колебаний часть иглы перемещается из камеры V вверх, горючее подается через канал B и выходит из камеры через сопло N , все это оказывает влияние на давление в камере. В случае, когда среднее давление имеет большее значение при движении иглы вверх, чем вниз, получается переход части энергии давления в энергию колебаний. Если эта энергия больше, чем ее рассеяние, вследствие трения в сальнике, то колебания будут самовозбуждающимися или автоколебаниями.

Легко убедиться, исходя из чисто физических соображений, что при отсутствии затухания в сальнике система оказывается неустойчивой. В самом деле, рассмотрим сейчас только тот промежуток времени, когда топливный насос действует, причем сделаем предположение, что через канал B горючее течет с постоянной скоростью. Что же касается истечения горючего через сопло, то его скорость изменяется в зависимости от положения иглы. Пусть эта игла колеблется около некоторого среднего положения. При этом среднем положении иглы количество вытекающего через сопло горючего равняется количеству притекающего через канал B ; если же игла находится выше

(ниже) среднего положения, то истечение больше (меньше), чем приток. Давление в камере V зависит от количества горючего в ней: чем больше горючего, тем больше давление. Рассмотрим иглу в ее среднем положении при ее движении вверх. В течение двух ближайших четвертей периода колебания истечение будет превосходить приток, и давление вследствие этого понизится. Таким образом, когда игла будет опять находиться в среднем положении, но уже при своем движении вниз, давление будет наименьшее. Совершенно таким же образом можно показать, что давление получается наибольшим при среднем положении иглы во время ее движения вверх. Итак, мы видим, что при колебаниях иглы давление совершает работу.

В наших рассуждениях не было упомянуто одно обстоятельство, а именно то, что игла, вследствие ее движения, изменяет объем горючего в камере V , вызывая тем самым изменения давления. Так как полное давление, имеющее место вследствие действия топливного насоса, очень велико, то мы предполагаем, что эти изменения не влияют на истечение горючего, т. е. на его подачу в цилиндр, которое зависит лишь от величины отверстия сопла. Кроме того, указанные изменения давления находятся в одной фазе с перемещением иглы, а поэтому они действуют не как фактор, вызывающий затухание, а как своего рода топливная пружина.

Рассуждая математически, мы придем к таким же самым заключениям. Дело в том, что двумя нашими зависимыми переменными являются вертикальное перемещение x (отсчитываемое вверх) иглы клапана и давление p в камере, причем отсчет x и p ведется от их средних значений за время одного колебания; независимой переменной является время. Таким образом, мы получаем три силы, действующие на иглу:

- 1) сила упругости $-F_0 - kx$;
- 2) сила затухания $-cx$;
- 3) сила давления $+pS + p_0S$

Здесь в первом выражении F_0 есть сила упругости пружины S при установке, а k — ее коэффициент жесткости; в третьем выражении S есть поперечное сечение иглы в сальнике и p_0 — среднее значение давления. Постоянные силы $-F_0$ и равны друг другу по величине и противоположны по направлению, а поэтому они взаимно уравниваются. Таким образом, дифференциальное уравнение движения иглы имеет вид

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} - pS = 0, \quad (4.28)$$

причём в это уравнение входят обе переменные, как x , так и p .

Второе уравнение мы найдем, рассматривая изменение объема горючего в камере V и сопоставляя его с изменением давления. Как уже допущено, приток горючего через канал B происходит с постоянной скоростью в течение одного хода насоса. Кроме того, было найдено, что с достаточной степенью точности скорость истечения горючего через сопло можно считать пропорциональной расстоянию от иглы до сопла. Это расстояние состоит из среднего расстояния x_0 , к которому добавляется переменная величина смещения иглы x . Количество топлива, вытекающего через сопло при среднем положении иглы, определяемом величиной x_0 , равняется количеству топлива, втекающего через канал B . Таким образом, избыточный объем топлива, поступившего в камеру за 1 сек, равен $-Cx$, где C есть полный объем горючего, протекающего через сопло за 1 сек., когда x_0 равняется единице длины. Однако, коль скоро игла перемещается, входя в камеру и частично выходя из нее, объем V этой камеры не остается постоянным. Изменение объема за секунду, вследствие такого движения иглы, равно $S\dot{x}$. Тогда выражение

$$-Cx - S\dot{x}$$

определяет собою скорость нарастания объема втекающей жидкости сверх постоянного объема V . Эта величина может быть представлена в виде производной $dV/dt = \dot{V}$. Модуль упругости жидкости при всестороннем сжатии определяется уравнением

$$\frac{dV}{V} = \frac{dp}{E},$$

откуда следует, что

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\dot{p}}{E}.$$

Вследствие этого второе дифференциальное уравнение принимает вид

$$\dot{p} = -\frac{E}{V}(Cx + S\dot{x}). \quad (4.29)$$

Переменная p может быть исключена из уравнений (4.28) и (4.29), если первое из них продифференцировать по времени, а затем подставить в него значение \dot{p} из второго. Тогда получим

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \left(k + \frac{S^2E}{V}\right)\dot{x} + \frac{SEC}{V}x = 0. \quad (4.30)$$

Подстановка решения типа (4.3) приводит нас к уравнению частот

$$s^3 + \frac{c}{m}s^2 + \left(\frac{k}{m} + \frac{S^2E}{mV}\right)s + \frac{SES}{mV} = 0, \quad (4.31)$$

в котором все коэффициенты положительны, вследствие чего условие устойчивости (4.9) принимает вид

$$\frac{c}{m} \left(\frac{k}{m} + \frac{S^2E}{mV} \right) > \frac{SEC}{mV},$$

или

$$c > \frac{CE}{V} \frac{mS}{\left(k + \frac{S^2E}{V}\right)}. \quad (4.32)$$

Отсюда мы видим, что движение будет устойчивым лишь тогда, когда затухание в сальнике или где-либо еще будет определяться коэффициентом, большим написанного значения.

Интересно отметить, что выражение, стоящее здесь в скобках в знаменателе, можно рассматривать как некоторый приведенный коэффициент жесткости пружины и жидкости в камере, тогда как дробь SE/V обозначает собою скорость увеличения давления горючего, вызванного отклонением иглы на 1 см от ее среднего положения. Таким образом, мы можем видеть, что уравнения частот (4.22) и (4.31), составленные казалось бы для совершенно различных задач (регулятор Уатта и форсунка Дизеля), имеют одинаковую структуру. Коэффициент A_2 является мерой затухания, A_1 — квадратом собственной частоты, A_0 определяет собой интенсивность перехода энергии, от которого зависит самовозбуждаемость системы.

4.9 Колебания турбин, вызванные просачиванием пара

Явления, сходные с описанными, наблюдались в некоторых паровых и водяных турбинах. Так, было обнаружено, что шпindel турбины и жестко связанный с ним ротор генератора колеблются в подшипниках в осевом направлении, имея частоту около 20 колебаний в секунду. Эти нежелательные колебания объясняются изменением давления в пространстве позади «уравновешивающего поршня», происходящим вследствие просачивания пара в это пространство. Так же, как и в форсунке Дизеля, интенсивность этого просачивания зависит от продольного положения шпинделя турбины.

В общих чертах конструкция показана на рисунке 110. Пар высокого давления вступает в отверстие A и проходит налево через лопатки в конденсатор. Вследствие разности давлений в котле и конденсаторе получается довольно значительная сила, приложенная к шпинделю и действующая влево, которую необходимо уравновесить. Это уравновешивание осуществляется частью уравновешивающим поршнем D , а частью упорным подшипником F .

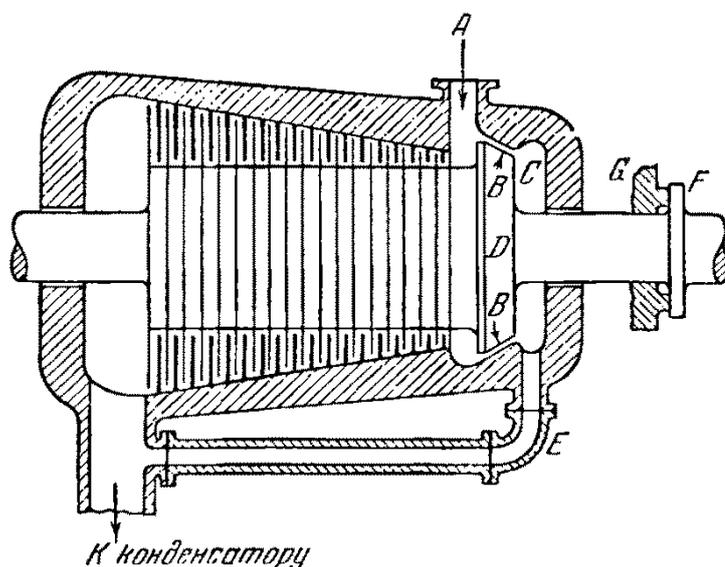


Рисунок 109 – Паровая турбина с уравнивающим поршнем D , лабиринтом B , упорным подшипником FG и уравнивающей трубой E

Очень небольшое количество пара высокого давления просачивается через лабиринт B в камеру C , которая соединяется посредством «уравнивающей трубы» E (общей длиной, достигающей до 5 м) с конденсатором. Таким образом, давление в C приблизительно равно (вернее, немного выше) вакууму в конденсаторе, вследствие чего возникает сила, прижимающая уравнивающий поршень D вправо, уменьшая тем самым осевую результирующую давлений пара. Детали устройства лабиринта B в различных конструкциях сильно разнятся между собой, но все же общей чертой их является то, что осевое перемещение ротора изменяет скорость утечки пара. Вследствие значительной длины трубы E продольные колебания столба пара в ней связаны с изменениями давления в камере C , что, в свою очередь, отражается на движении шпинделя. Для затухания осевых колебаний шпинделя необходимо, чтобы среднее давление пара в C во время движения шпинделя влево было меньше, чем при его движении вправо. Так как сила давления пара обычно мала по сравнению с упругими силами пружин G , входящих в систему упорного подшипника, то частота происходящих колебаний шпинделя практически оказывается равной частоте его собственных колебаний на упомянутых пружинах.

Если длина уравнивающей трубы E близка к четверти длины стоячей звуковой волны, имеющей ту же частоту, что и осевые колебания турбины, то закон колебаний столба пара в этой трубе получается достаточно сложным. Однако в большинстве случаев длина трубы бывает значительно меньше указанной критической длины, вследствие чего можно считать, что пар перемещается в трубе вперед и назад, как несжимаемое тело. Пружинящим телом, благодаря которому происходят колебания этой массы пара, является пар в камере C , где давление изменяется вследствие возвратно-поступательного перемещения столба пара в трубе E . Таким образом, мы приходим к схематическому изображению системы, представленной на рисунке 111, где на массу m можно смотреть как на поршень (состоящий из пара), скользящий взад и вперед в уравнивающей трубе. Заметим, что в трубе имеет место общий поток пара m , направленный вправо. Для нашего исследования необходимо вычесть из действительной скорости пара среднее значение скорости, иначе говоря, рассматривать лишь переменную часть скорости массы m .

В существующих конструкциях величина объема V очень мала, а поэтому представляется интересным рассмотреть с физической точки зрения поведение системы (рисунок 111) при объеме V , равном нулю. Пусть масса M (шпинделя турбины и ротора генератора) совершает прямолинейное колебание согласно рисунку 112. Так как объем V предполагается равным нулю, то движение массы m непосредственно определяется количеством пара, просачивающегося около M . Вследствие этого наибольшая скорость перемещения массы m вправо имеет место при наибольшей утечке пара, именно тогда, когда масса M занимает крайнее левое положение (точка A на рисунке 112). Когда же M находится в крайнем правом положении, утечка наименьшая, во всяком случае, ниже среднего значения, а поэтому m имеет наибольшую скорость, направленную влево (точка B на рисунке 112).

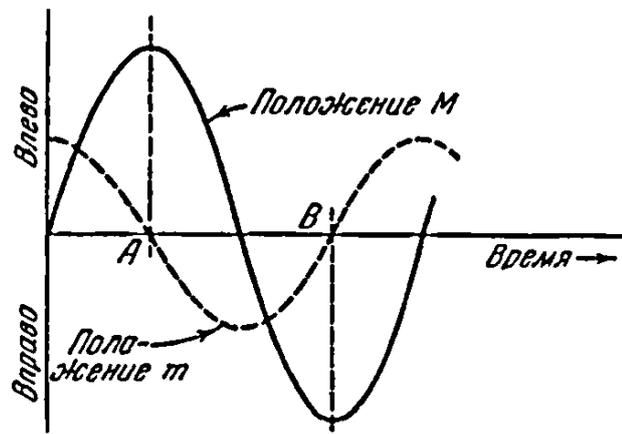


Рисунок 112 – Графики движения системы, изображённой на рисунке 111, в случае нулевого V

Таким образом,, находится кривая, определяющая положение массы га. Поскольку эта масса не подвергается действию пружины (понимаемой в широком смысле слова), то ее движение определяется давлением пара в малом объеме V . Между точками A и B столб пара получает ускорение, направленное влево, что означает, что давление в объеме V ниже среднего значения. А это, в свою очередь, значит, что между точками A и B сила давления пара в объеме V (где, как видим, создается некоторое разрежение) заставляет двигаться массу M вправо. Но поскольку в этом интервале масса M уже двигается вправо, то, следовательно, движение – самовозбуждающееся. Сделаем теперь обратное предположение, т. е., что объем V очень велик. Тогда изменение в величине утечки пара вряд ли повлияет на давление в объеме V , вследствие чего изменение суммарного действия давлений пара на массу M , будь оно положительное или отрицательное, очень мало. В таком случае даже легкое трение в системе поглотит отрицательное затухание, которое сможет возникнуть.

На самом деле, в машинах подобные осложнения предотвращаются путем введения камеры объемом около 50 дм^3 , помещаемой между пространством C и уравнительной трубой E (рисунок 110). Другой пример мы имеем на рисунке 113, где изображена биротативная паровая турбина шведской фирмы «Юнгстрем» (Ljungstrom). Здесь A и B — два одинаковых электриче-

ских генератора, приводимых в движение роторами A' и B' турбины, вращающимися с равными скоростями, но в противоположных направлениях. Пар из котла высокого давления поступает в центр турбины D и течет в радиальных направлениях в пространство E , непосредственно связанное с конденсатором. Турбинные лопатки расположены на роторах круглыми концентрическими рядами. Для предотвращения утечки пара из области D' высокого давления в область E низкого давления сделано лабиринтовое уплотнение F между роторами и кожухом турбины. Этот лабиринт состоит из множества очень узких проходов, сквозь которые должен просачиваться пар при утечке. Обнаруженные колебания относятся к типу прецессии, т. е. осевые линии системы вал—диск AA' и BB' изгибались и в таком деформированном состоянии вращались вокруг недеформированной осевой линии с угловой скоростью, равной собственной частоте, но не угловой скорости вращения валов. Гироскопический эффект дисков влияет на собственную частоту. Однако система симметрична в своих частях A и B , а потому, если обе половины прецессируют в том же направлении, что и их роторы (т. е. прецессия A противоположна прецессии B), то и собственные частоты частей A и B одинаковы. При таком движении диски A' и B' поворачиваются на малые углы в перпендикулярном к оси направлении то в одну сторону, то в другую, изменяя тем самым просветы в лабиринтах F , вследствие чего давление пара в F периодически изменяется. Фаза этих периодических изменений давления на диски оказывается такой, что их моменты действуют в направлении скорости указанных поворотов дисков, благодаря чему система получается неустойчивой. Здесь попытки борьбы с такими недостатками были предприняты в двух направлениях: путём изменения каналов лабиринта изменялись фазовые соотношения между изменениями давления на диск и его собственным движением; в другом случае эти же изменения осуществлялись так, что уменьшались самые изменения давления. Последнее мероприятие оказалось более эффективным.

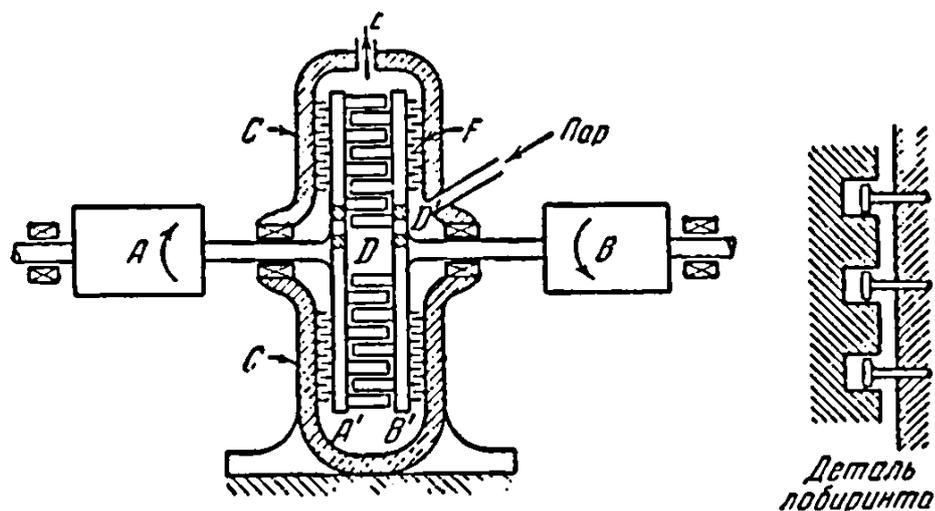


Рисунок 113 – Биротативная паровая турбина Юнгстрема, имеющая автоколебания типа прецессии с частотой, отличной от угловой скорости

Аналогичное явление наблюдалось несколько лет назад на одном гидравлическом турбогенераторе обычного типа с вертикальным валом, когда ротор генератора расположен над ротором турбины на том же самом валу, причем этот вал в верхнем своем конце подвешен к коренному подшипнику Кингсбери. Эта установка оказалась в состоянии интенсивных колебаний, как консоль, изогнутая ось которой совершает вращательное движение. При этом верхняя точка кожуха описывает круговую траекторию диаметром примерно 1,5 мм, тогда как нижние части машины вблизи основания остаются почти неподвижными. Такое движение, напоминающее прецессию, имеет частоту, совершенно отличную от угловой скорости машины и встречается только при нагрузках, больших половины тех, на которые рассчитана эксплуатационная мощность, причем частота этих колебаний уже не зависит от нагрузки.

Поскольку были замечены автоколебания, были предприняты многочисленные попытки нахождения причины самовозбуждения. Так, были сделаны различные видоизменения в упорном подшипнике Кингсбери, в ненагруженных направляющих подшипниках вертикального вала, в напряжении магнитного поля генератора и, наконец, в рабочем колесе. В конце концов было установлено, что причина лежит в рабочем колесе и именно в той его части, которая соответствует лабиринту (рисунок 113), На рисунке 114 буквой А

обозначено вращающееся колесо Френсиса, а буквой B — неподвижная часть. Вода проникает из части B на лопатки A и далее вниз, во всасывающую трубу. Давление воды в пространстве B и в прилегающих частях A высокое, тогда как во всасывающей трубе C и в соединительных частях C' — низкая. Большая часть воды течет из B в C через лопатки A , и только небольшая ее часть просачивается через кольцевые зазоры D , образующие своеобразное уплотнение между вращающейся и неподвижной частями. Размеры зазора примерно таковы: 1,5 мм (1/16 дюйма) ширины, 7,5 см (3 дюйма) высоты и $2,4\pi$ м (8π футов) длины. При боковом колебательном движении ротор A перемещается в боковом направлении по отношению к неподвижной части B , вызывая тем самым периодическое изменение ширины лабиринта. Вследствие малости этой ширины — всего лишь 1,5 мм (1/16 дюйма), даже очень малое абсолютное перемещение ротора вызывает значительные относительные изменения ширины, а вследствие этого и колебания давления в уплотненном кольце. К несчастью, эти изменения давления, как показали произведенные измерения, оказываются в фазе со скоростью боковых колебаний ротора, что приводит к неустойчивости.

Мерой против таких неприятностей является замена деталей D , а именно вместо схемы на рисунке 115, а принимается схема на рисунке 115, б. Дело в том, что в первом случае (рисунок 115, а) потеря напора обусловлена в значительной степени вязкостью и отчасти уменьшением кинетической энергии, тогда как во втором случае (рисунок 115, б) эта потеря происходит лишь в небольшой части вследствие вязкости, но зато с двукратным уменьшением кинетической энергии. Но в то время как в схеме на рисунке 115, а изменения давления действуют по всей поверхности уплотнительного кольца, высотой 7,5 см (3 дюйма), в схеме на рисунке 115, б во внутреннем кольцеобразном пространстве почти нет изменения давления, поскольку и относительные изменения ширины здесь почти равны нулю.

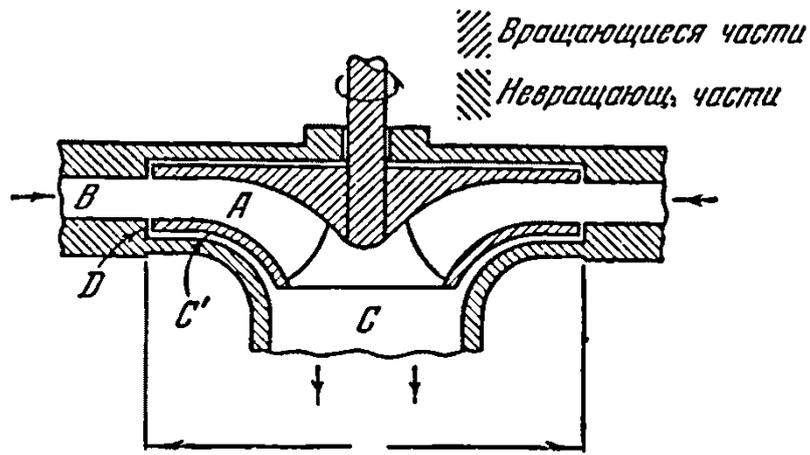
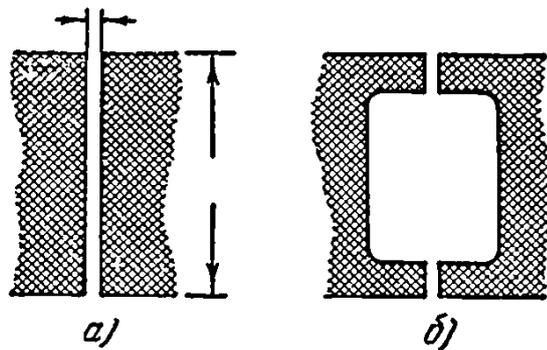


Рисунок 114



- а) зазоры, приводящие к автоколебаниям,
- б) зазоры, подавляющие прецессию

Рисунок 115 – Детали зазора *D* на рисунке 114

В практике эксплуатации турбин случаи автоколебаний, вызванных изменением утечки, чрезвычайно редки. Однако если они встречаются, то приведённое описание помогает быстро обнаружить их.

4.10 Явление флаттера в крыльях самолёта

В некоторых самолетах, летящих с очень большой скоростью, неоднократно наблюдались весьма значительные колебания крыльев, причем это явление получало особенно резко выраженный характер при попадании самолета в воздушную яму. Во многих случаях такие колебания, представляющие собою совокупность колебаний изгиба и кручения и называемые флаттером, были столь велики, что служили причиной поломки крыльев во время полета.

Посмотрим, нельзя ли объяснить флаттер с точки зрения явления, описанного в пункте 4.5. Для крыла самолета, теряющего равновесие, кривая подъемной силы имеет отрицательный наклон (рисунок 102), и тогда колебательное движение крыла вверх и вниз, рассматриваемого как балка, заделанная одним концом, неустойчиво. Это действительно и наблюдается. Однако допущенное здесь условие не соответствует истинным условиям полета, и зарегистрированные случаи флаттера имеют место при малых углах атаки крыла, когда наклон характеристики подъемной силы является безусловно положительным. Следовательно, интерпретация явления с помощью теории, изложенной в пункте 4.5, указывает на некоторое определенное положительное затухание.

Мы различаем два типа флаттера: срывной флаттер — с большими углами атаки ($\alpha > 15^\circ$) и классический флаттер — с малыми углами атаки. Первый из них имеет большое значение в лопатках турбомашин, в частности, в лопатках компрессоров реактивных двигателей, где борьба с ним является важной проблемой, не решенной еще до сих пор (1955 г.). В крыльях и рулях самолета имеет место классический флаттер, который наблюдается особенно в последнее время в связи с полетом на звуковых и сверхзвуковых скоростях. Вообще всякая попытка объяснить явление флаттера на базе системы с одной степенью свободы, например, при колебаниях крыла только вверх и вниз, наподобие консольной балки, обречена на неудачу. В действительности мы имеем здесь новый случай связанной системы с двумя степенями свободы, так как крыло при колебаниях не только перемещается вверх и вниз, но одновременно еще закручивается. И вот взаимодействие вертикальных и крутильных колебаний с потоком воздуха, как источником энергии, может привести к неустойчивости. Возможность такого случая легко объяснить с помощью простых рассуждений на основании физических соображений.

При каждом определенном значении угла атаки α (рисунок 116, б) крыло испытывает действие определенной аэродинамической подъемной силы, а

также и крутящего момента, направленного по часовой стрелке. Когда крыло совершает крутильные колебания, очевидно, угол α изменяется, вследствие чего нам интересно знать как зависят подъемная сила и крутящий момент от этого угла.

На рисунке 116, а и 116, б такие соотношения представлены графически на основании испытаний в аэродинамической трубе. Заметим, что для обычных значений угла α , при которых происходит полет (от 0 до 10°), графики могут быть вполне приняты за прямые.

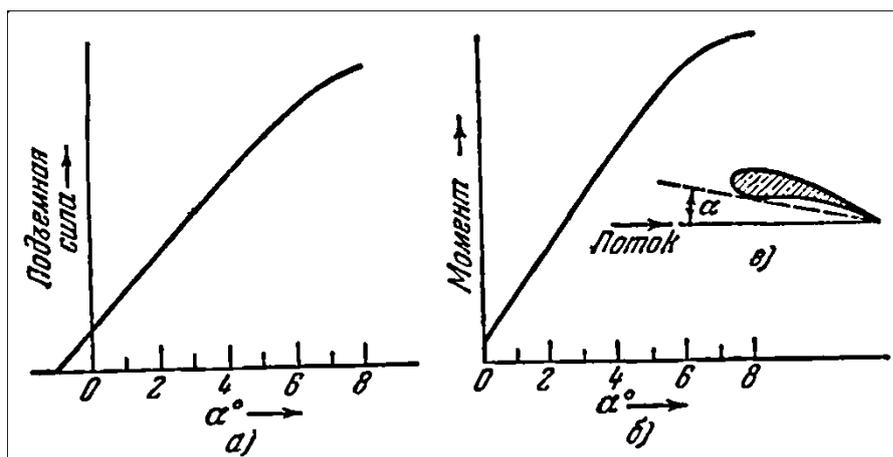


Рисунок 116 – Графики подъемной силы и момента для крыла самолёта в воздушном потоке имеют почти прямолинейную форму при малых углах атаки

Пусть вертикальные и крутильные колебания крыла связаны таким образом, что во время движения крыла вверх при его колебании угол α больше, чем при движении вниз. Тогда, согласно рисунку 116, а, подъемная сила при движении вверх должна быть также больше, чем при движении вниз, откуда, в свою очередь, следует, что ветер сообщает колебаниям энергию. Передача энергии возможна также и согласно диаграмме рисунка 116, б. Это следует из тех соображений, что угол атаки меняется при вертикальных колебаниях даже и без скручивания, как мы это уже видели на рисунке 96. Благодаря этому угол атаки, а следовательно и крутящий момент, становятся больше при движении вниз и меньше при движении вверх. Таким образом, если при

движении крыла вниз оно закручивается по часовой стрелке, энергия поглощается системой, и колебания растут.

Форма флаттера, обычно встречавшегося несколько лет тому назад, представляла собою изгибы крыла, связанные с колебаниями элеронов. Допустим, что элерон подвешен на оси, не проходящей через его центр тяжести, и допустим, что крыло совершает колебательное движение вверх и вниз. Даже независимо от аэродинамических сил вертикальное колебательное движение оси подвеса должно вызвать угловые движения элерона, поскольку его ось подвеса не проходит через его центр тяжести. Однако элерон ограничен в этих движениях, так как он управляется прикрепленными к нему проволочными тягами, действующими по причине неизбежной упругости наподобие пружины. Поэтому элерон становится своеобразным маятником, имеющим собственную частоту, которая может быть выше или ниже собственной частоты флаттера крыла. Таким образом, колебательное движение элерона по отношению к крылу может быть в той же фазе или в противоположной (если разница частот велика), но может случиться и так, что разность фаз колебаний элерона и крыла составляет около 90° . В последнем случае движение элерона отстает от силы вследствие чего в середине перемещения крыла вниз элерон оказывается наверху, вызывая тем самым направленную вниз силу давления воздуха на крыло. Это и приводит к неустойчивости. Такого рода явления своевременно узнаются, причем обычным средством борьбы служит такая установка элерона, при которой его ось подвеса проходит через центр тяжести элерона, для чего обязательно вводится противовес. Указанная мера сама по себе может быть еще недостаточна для предотвращения «инерционной пары». Чтобы уяснить себе это, рассмотрим однородный прямоугольный элерон, подвешенный около его оси симметрии, Добавим теперь к этому элерону два одинаковых груза, расположенных в противоположных углах прямоугольника, но так чтобы центр тяжести не сместился. При поступательном возмущении оси подвеса, когда она перемещается вверх и вниз, элерон остается уравновешенным и не проявляет тенденции вращаться. Однако если

этот элерон помещен на реальное крыло, совершающее, как консоль, колебания с большой амплитудой на конце и с меньшей в средней части, то силы инерции двух добавочных грузов, будут уже различаться между собой, а тогда на элерон будет действовать вращающий момент относительно его оси подвеса. Полное уравнивание относительно всех возможных движений может быть осуществлено лишь при выполнении требования, чтобы не только центр тяжести лежал на оси подвеса, но также, чтобы эта последняя была главной осью инерции (т. е. чтобы были равны нулю центробежный момент инерции элерона относительно оси-подвеса и относительно оси, ей перпендикулярной).

Было бы идеально, если бы конструктор смог удовлетворить одновременно как условиям проекта, так и условиям исключения флаттера. Все это относится не только к элеронам, но также и к другим движущимся поверхностям (рулям поворота и высоты), которые могут привести к возникновению флаттера во взаимодействии со всем фюзеляжем самолета.

Обратимся теперь к количественному анализу явления флаттера, как изгибно-крутильного колебания сплошного крыла без элерона, для чего составим дифференциальные уравнения движения. В действительности крыло ведет себя более или менее как балка, заделанная одним концом в фюзеляж, но для упрощения мы предположим его абсолютно твердым телом, подвешенным на пружинах таким образом, что оно может перемещаться вверх и вниз, а также вращаться вокруг своей продольной оси. На рисунке 117 начало координат O взято в средней точке размаха крыла в положении его равновесия. Отклонение крыла от этого положения определяется двумя величинами x и θ , как показано на чертеже. Кроме центральной точки размаха C , в изображенном положении крыла весьма важную роль играют еще две точки профиля, а именно центр тяжести G и «центр кручения» T . Первая из них связана с инерционными свойствами крыла. Что касается второй, то она характеризует упругие свойства подвешивания и определяется как точка приложения вер-

тикальной силы к крылу, вызывающей только его вертикальное перемещение, но не создающей вращения. Больше того, точка Тесть также такая точка крыла, которая остается на месте, если крыло подвергается чистому кручению, вызывающему лишь поворот сечения. Указанные два свойства точки T неразрывно связаны друг с другом, как это можно легко показать с помощью теоремы Максвелла о взаимности перемещений.

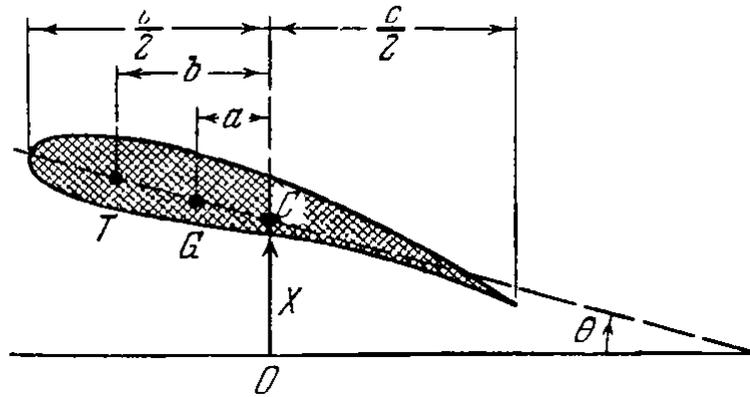


Рисунок 117 – Профиль крыла самолёта с двумя характерными точками: центр тяжести G и центр кручения T

Пусть k_x есть коэффициент жесткости для вертикальных перемещений крыла, а k_θ - коэффициент жесткости на кручение (отнесенные к единице длины крыла). Пусть, далее, L есть аэродинамическая подъемная сила, являющаяся функцией переменных x , θ и времени t , и M — момент всех аэродинамических сил относительно точки O , считаемый положительным в направлении часовой стрелки и зависящий от тех же величин x , θ , t (рассчитанных также на единицу длины). Тогда дифференциальные уравнения движения напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} m(x + a\ddot{\theta}) + k_x(\ddot{x} + b\ddot{\theta}) &= L, \\ I_G\ddot{\theta} + k_\theta\ddot{\theta} + k_x(x + b\ddot{\theta})(b - a) &= M - La. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Входящие в эти уравнения двучлены $x + a\theta$ и $x + b\theta$ представляют собою вертикальные перемещения точек G и T . Буквы m и I_G означают массу и момент инерции не только самого крыла, но и некоторой части воздуха, окружающего крыло. Обычно здесь берется воздушный цилиндр радиуса $c/2$.

Эффект этого воздуха, будучи несущественным для лопастей воздушного винта, имеет, однако, большое значение для крыла, которое весит не более чем в три раза больше окружающего его воздушного цилиндра.

Переменная аэродинамическая сила L , действующая на крыло, в действительности достаточно велика и имеет тот же порядок, что сила упругости и сила инерции. Во всех предшествующих случаях, рассмотренных в этой книге, возмущающие и демпфирующие силы были малы по сравнению с силами инерции и силами упругости, вследствие чего резонансная частота определялась только выражением k/m и не зависела от возмущающей силы. Здесь возмущающая сила L , будучи величиной того же порядка, что и сила упругости, воздействует на частоту, и поэтому частота флаттера значительно отличается от какой-либо собственной частоты самолета в спокойном воздухе.

Подъёмная сила L (отнесённая к единице длины) для установившегося состояния равна $(\rho V^2/2)cC_L$, причём её коэффициент C_L пропорционален углу атаки воздушного потока. Угол атаки равен $\theta - \dot{x}/V$. В этом выражении первый член уже нам встречался, во втором члене \dot{x} есть вертикальная составляющая скорости ветра, относительно крыла. Теория крыла устанавливает для коэффициента пропорциональности постоянную величину, равную 2π . Таким образом

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 c 2\pi \left(\theta - \frac{\dot{x}}{V} \right) = \pi \rho V^2 \left(\theta - \frac{\dot{x}}{V} \right).$$

Теория крыла в установившемся дозвуковом потоке показывает, что эта подъёмная сила приложена в точке, лежащей на одной четверти ширины крыла от его передней кромки, вследствие чего момент аэродинамических сил относительно центра тяжести равен

$$M = \frac{Lc}{4} = \frac{\pi \rho V^2 c^2}{4} \left(\theta - \frac{\dot{x}}{V} \right).$$

Подставляя полученные два выражения в уравнение (4.33), мы можем для оценки устойчивости применить критерий Рауса. Если задаться обычной формой решения, то уравнения (4.33) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 & x[ms^2 + k_x + \pi\rho Vcs] + \theta[mas^2 + k_x b - \pi\rho V^2 c] = 0, \\
 & x \left[k_x(b - a) + \pi\rho V \left(\frac{c^2}{4} - ca \right) s \right] + \\
 & + \theta \left[I_G s^2 + k_\theta + k_x b(b - a) + \pi\rho V^2 \left(ca - \frac{c^2}{4} \right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Исключая из этих двух уравнений x и θ (перемножением квадратных скобок по диагонали и вычитанием произведений), получим уравнение частот

$$\begin{aligned}
 & s^4 + s^2 \left[\frac{\pi\rho Vc}{mI_G} \left(I_G + ma^2 - \frac{mac}{4} \right) \right] + \\
 & + s^2 \left[\frac{k_\theta}{I_G} + \frac{k_x}{m} + \frac{k_x}{I_G} (b - a)^2 + \frac{\pi\rho V^2 c}{I_G} \left(a - \frac{c}{4} \right) \right] + \\
 & + s \frac{\pi\rho Vc}{mI_G} \left[k_\theta - k_x b \left(b - \frac{c}{4} \right) \right] + \left[\frac{k_x k_\theta}{mI_G} + \frac{\pi\rho V^2 k_x}{mI_G} c \left(b - \frac{c}{4} \right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения, очень сложно. В зависимости от размеров a и b некоторые коэффициенты могут оказаться отрицательными. Рассматривая прежде всего последнюю скобку, обозначаемую через A_0 , мы видим, что второй член становится отрицательным, если b меньше чем $c/4$, т. е., если центр кручения расположен близко к центру крыла, как это имеет место для случая тонкого симметричного профиля. Система делается неустойчивой, если A_0 принимает отрицательное значение, что имеет место, когда

$$\pi\rho V^2 c \theta \left(\frac{c}{4} - b \right) \geq k_\theta,$$

или

$$V^2 \geq \frac{4k_\theta}{\pi\rho c(c - 4b)}. \quad (4.34)$$

Это выражение имеет очень простой физический смысл: оно характеризует собою не флаттер, а просто статическую неустойчивость того типа, которому соответствует рисунку 83.

Представим себе неколеблущееся крыло в воздушном потоке при угле атаки, равном нулю, вследствие чего отсутствует подъемная сила. Теперь вообразим, что крыло подвергается закручиванию на угол атаки θ , что вводит в действие подъемную силу $\pi\rho V^2 c\theta$, приложенную в точке, лежащей на четверти хорды. Ее моментное плечо относительно центра кручения есть $c/4 - b$, вследствие чего крутящий момент аэродинамической пары, которому противодействует момент пары упругих сил $k_\theta\theta$, равен

$$\pi\rho V^2 c\theta \left(\frac{c}{4} - b\right).$$

При малых скоростях потока момент аэродинамических сил меньше, чем момент упругих сил, вследствие чего крыло будет стремиться возвратиться в положение $\theta = 0$. Однако при возрастании скорости потока до определенной величины оба момента уже при любом угле θ становятся равными друг другу, вследствие чего имеет место безразличное равновесие в любом положении, определяемом углом θ . Такое явление статически безразличного равновесия получило у аэродинамиков название дивергенции, а скорость, при которой оно наступает и которая определяется из уравнения (4.34), — скорости дивергенции.

Другой критерий неустойчивости связан с переходом в область отрицательных значений коэффициента A_2 в зависимости от его последнего члена. Это наступает тогда, когда размер a мал, т. е. когда центр тяжести близко подходит к центру крыла. Соответствующая этому критическая скорость определяется соотношением

$$V^2 \geq \frac{4k_\theta + 4k_x \left[(b-a)^2 + \frac{I_G}{m} \right]}{\pi \rho c (c-4a)}. \quad (4.35)$$

Эта скорость может быть как больше, так и меньше скорости, определяемой из неравенства (4.34). Если она меньше предыдущей, то имеет место классический флаттер при скорости более низкой, чем та, которая необходима для дивергенции.

Приведенный анализ имеет силу только для случая флаттера с низкими частотами (при малой жесткости крыла па кручение), так как выражение для подъемной силы L и аэродинамического момента M относились к установившемуся состоянию. При малых частотах колебаний подъемная сила следует за изменениями угла атаки, т. е. мы имеем «последовательность установившихся состояний», к которым и применим наш анализ. В случае быстрого флаттера (более 20 колебаний в секунду) эти рассуждения уже перестают быть справедливыми. В этом случае анализ становится настолько сложным, что исследование флаттера сделалось самостоятельной специальностью, которой некоторые инженеры посвящают все свое время.

Выражения для подъемной силы и момента, рассчитанных на единицу длины крыла, совершающего гармонические колебания при дозвуковой скорости, были получены Теодорсеном (1935) с помощью достаточно сложного анализа в его работе, ставшей теперь классической. В результате этих исследований получены выражения:

$$\left. \begin{aligned} L &= \pi \rho c V^2 \left[Y \left(\theta - \frac{\dot{x}}{V} \right) + (1+Y) \frac{\dot{\theta} c}{4V} \right], \\ M &= \pi \rho \frac{c^2}{4} V^2 \left[Y \left(\theta - \frac{\dot{x}}{V} \right) + (1-Y) \frac{\dot{\theta} c}{4V} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Здесь весьма осложняющим дело обстоятельством является то, что величина Y не только комплексная, но ещё зависит от частоты флаттера, а именно:

$$Y = F - iG, \quad (4.37)$$

где обе величины F и G суть функции отношения $\omega c/2V$ (здесь ω – угловая частота флаттера). Значения F и G представлены на рисунке 118, заимствованном из работы Теодорсена. При этом предполагается, что крыло уже находится в состоянии флаттера, т. е. на границе между положительным и отрицательным затуханиями и, следовательно, совершает чисто гармоническое движение. Величина s здесь предполагается не имеющей действительной части p , тогда как ее мнимая часть q может быть отождествлена с частотой ω флаттера. Все это делает неприемлемыми условия устойчивости, выражаемые соотношениями (4.9) или (4.14).

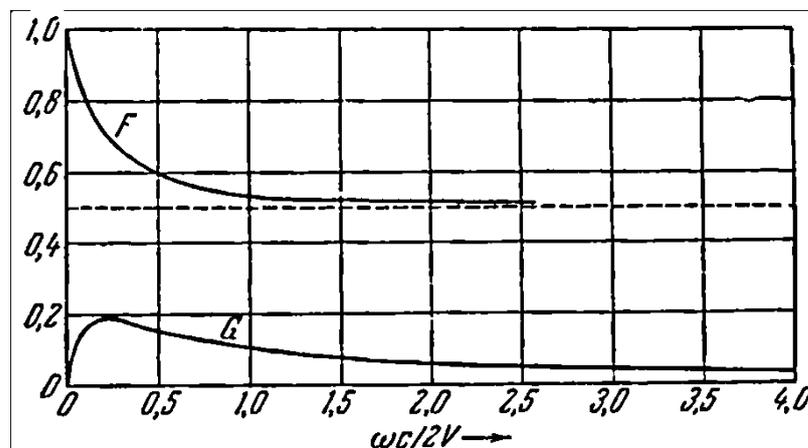


Рисунок 118 – Кривые функций F и G уравнения (4.37)

Если бы мы попытались теперь составить уравнение частот, то оказалось бы, что это уравнение содержит F и G , а следовательно, оно будет теперь иметь значительно более сложную структуру относительно s и ω , не являясь, во всяком случае, алгебраическим уравнением четвёртой степени. Теодорсен делает в уравнениях (4.33) подстановку

$$x = x_0 e^{i\omega t}, \quad \theta = \theta_0 e^{i\omega t}$$

и затем исключает x_0 и θ_0 , полагая определитель равным нулю, как и прежде. Тогда уравнение частот будет содержать действительную и мнимую части, каждая из которых должна быть в отдельности равна нулю. Таким образом, находятся два уравнения, которые должны удовлетворяться на границе меж-

ду положительным и отрицательным затуханиями. В этих двух уравнениях имеются две неизвестные величины, скорость V флаттера и частота ω флаттера. По эти уравнения нелинейны относительно V и ω , так как зависят от кривых на рисунке 118. Детали этого анализа слишком сложны, чтобы помещать их здесь, и читателю мы можем лишь рекомендовать обратиться к оригинальной работе Теодорсена. В опубликованной затем работе Касснера и Фингадо приводится номограмма, основанная на анализе, подобном анализу Теодорсена, по которой скорость флаттера отдельного крыла может быть определена в несколько минут, если только найдены все необходимые постоянные.

В другом методе, впервые предложенном Бликни и Хэммом (Bleakny and Hamin) и широко используемом в настоящее время, задаются численными значениями скорости V и частоты ω флаттера. Тогда по формулам (4.36) могут быть вычислены силы и подставлены в уравнения (4.33), которые, конечно, не будут удовлетворяться, поскольку для V и ω взяты неверные значения. Однако уравнения (4.33) могут быть удовлетворены, если подобрать соответствующие значения коэффициентов жесткости k_x и k_θ , которые входят в эти уравнения линейно, а потому легко могут быть вычислены. С физической точки зрения это означает, что произвольно выбранные V и ω являются истинными скоростью и частотой флаттера для крыла, жесткость которого отлична от жесткости исследуемого крыла. Результат расчета представлен на рисунке 119 в виде двух точек, отмеченных цифрой 1, из которых одна дана на графике $V - \omega$, а другая — на графике $k_x - k_\theta$. Далее весь расчет повторяется для другого значения частоты флаттера ω_0 , но той же скорости V (точка 2 на графике $V - \omega$). Результат расчета представлен точкой 2 на графике $k_x - k_\theta$. Третий расчет выполняется для точки 3. Действительная жесткость крыла отображается точкой A на графике $k_x - k_\theta$. Обращая внимание на относительное расположение точек, мы отмечаем на графике $V - \omega$ точку 4, как первое приближение. Это процесс продолжается до тех пор, пока мы не

найдем на плоскости $V - \omega$ такую точку, отображение которой на плоскости $k_x - k_\theta$ не будет достаточно близко подходить к желаемой точке A .

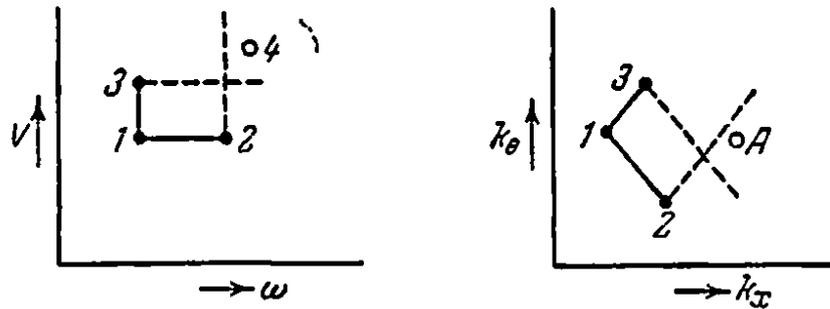


Рисунок 119 – Определение скорости V и частоты флаттера ω

До сих пор задача касалась крыла, как системы с двумя степенями свободы, иначе говоря, рассматривалось крыло, амплитуды колебаний которого не меняются по его размаху. Приближенное значение скорости флаттера получается заменой реального крыла другим крылом той же жесткости, но инерция которого сосредоточена в точке по размаху крыла на расстоянии 70% его длины, считая от места закрепления. Очевидно, в точке сосредотачивается масса, кроме которой должен быть принят во внимание также момент инерции. Тем самым система приводится к схеме, изображенной на рисунке 117. Лучший результат можно получить численным интегрированием по длине крыла. При этом, как в методе Рэлея, делается допущение наиболее вероятной формы деформированного крыла. Мы принимаем здесь формы колебаний изгиба и кручения крыла без аэродинамических сил, определяемых формулами (4.36), и предполагаем, что изгибные и крутильные колебания совершаются по одной и той же фазе с частотой ω флаттера. Далее, следуя Бликни и Хэмму, зададимся численными величинами V и ω . Тогда будут известны упомянутые аэродинамические силы и моменты, сила инерции $\omega^2 y dm$ и сила упругости $EIy^{(4)}$. Если предположенная форма колебаний окажется правильной, то будут равны нулю как сумма этих трех сил для каждого элемента крыла [согласно первому уравнению (4.33)], так и сумма моментов соответственно сил инерции, упругости и аэродинамических [согласно второму уравнению (4.33)]. Однако поскольку предположенная форма во-

обще не верна, равновесие будет нарушено для каждого, отдельно взятого элемента их. Тем не менее, следуя Рэлею, мы можем выполнить интегрирование по всей длине крыла и удовлетворить условиям равновесия в целом. Так, отдельные члены уравнений (4.33) приводят к интегралам, взятым по длине крыла

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \int_0^l y(x)\mu(x)dx + EI_0 \int_0^l \frac{EI(x)}{EI_0} \frac{d^4 y}{dx^4} dx &= \int_0^l L(x)dx, \\ \omega^2 \int_0^l \theta(x)l_G(x)dx + C_0 \int_0^l \frac{C(x)}{C_0} \frac{d^2 \theta}{dx^2} dx &= \int_0^l [M(x) - aL(x)]dx. \end{aligned} \right\} (4.38)$$

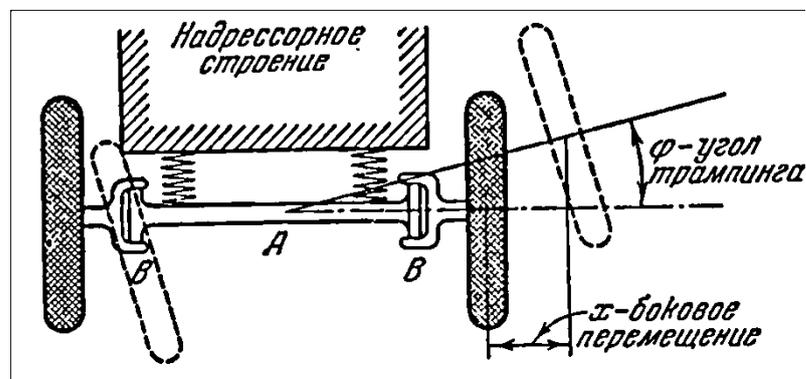
Эти уравнения написаны для крыла с изменяющимся поперечным сечением, для которого масса μ , жесткость на изгиб EI , жесткость на кручение C , перемещение центра тяжести $y = x + a\theta$, угол θ и расстояние a являются функциями координаты x , изменяющейся по длине крыла от 0 до L . В этих уравнениях жесткость EI_0 на изгиб у основания крыла и жесткость C_0 на кручение у основания крыла вынесены за знаки интегралов. На рисунке 119 вместо постоянных коэффициентов k_x и k_θ мы откладываем упомянутые жесткости EI и C . При вычислениях скорости флаттера, выполненных по этому способу, может получиться ошибка на 10%

4.11 Явление шимми в колёсах автомобилей

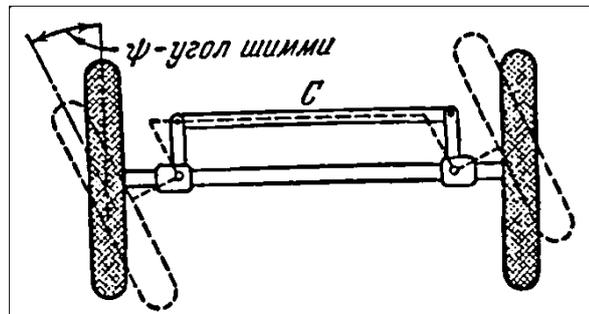
Примерно около 1930 года стали значительно уменьшать, по сравнению с прежним, давление в пневматиках автомобилей, что имело целью получить более плавные эксплуатационные характеристики. Такое изменение качества побочного эффекта повлекло за собой возникновение особого явления в передних колесах, названного шимми. Это явление доставляло в течение нескольких лет неприятности, пока с ними не научились бороться путем соответствующего поднятия параметров и при помощи независимой подвески передних колес.

Шимми представляет собою колебания вращения передних колес около вертикальных осей и большинстве случаев относится к автоколебаниям. Для правильного понимания и объяснения явления необходимо рассматривать три степени свободы в системе, вследствие чего эта задача является более сложной, чем любая из изученных выше.

На рисунке 120, а изображен вид автомобиля спереди, причем A есть передняя ось, а B — поворотные шкворни. Вследствие упругости пневматиков в вертикальном направлении эта ось может поворачиваться в вертикальной плоскости на некоторый угол φ по отношению к дороге. Кроме того, по причине боковой гибкости рессор, а также и пневматиков она может еще перемещаться в боковом направлении по отношению к кузову или к дороге (отклонение x). Посмотрим теперь на переднюю часть автомобиля сверху (рисунок 120, б). Мы видим, что колеса могут совершать также колебания, поворачиваясь на угол φ в горизонтальной плоскости. Вот это явление и представляет собою виляние колес, которое мы называем шимми. Так как оба колеса соединены между собою жесткой соединительной штангой C , то угол виляния ψ должен быть одинаковым для обоих колес. Заметим, что возможны также и некоторые другие движения, но, имея в виду настоящую цель (исследование шимми), мы можем ими пренебречь.



а)



б)

Рисунок 120 – Иллюстрирование связи между движениями

Итак, мы имеем систему с тремя степенями свободы, положение которой определяется параметрами φ , ψ , x . Чтобы показать возможность автоколебаний, необходимо установить, что, во-первых, движения, соответствующие этим трем параметрам, связаны между собою и, во-вторых, действует некоторый источник энергии

Приступая к исследованию, заметим, что масса передних колес и оси значительно меньше массы надрессорного строения автомобиля. Так как колебания типа шимми происходят при достаточно большой скорости, то корпус автомобиля (надрессорное строение) оказывается почти неспособным принять участие в этом движении. В последующем исследовании предполагается, что корпус автомобиля перемещается прямолинейно вперед вдоль дороги, тогда как передние колеса и ось совершают колебания.

Рассмотрим боковое колебательное движение колес по отношению к корпусу или к дороге, которое может быть выражено уравнением

$$x = x_0 \sin \omega t.$$

Такое движение имеет место при поперечном перекашивании рессор и приводит к возникновению переменной внешней силы, действующей на ось. Часть этой упругой силы идет на ускорение оси в направлении x -ов, а оставшаяся часть вызывает реакцию, которая может быть осуществлена только в виде сил трения, действующих со стороны дороги на шины. Далее эти реактивные силы дают пару в плоскости рисунка 120, а, стремящуюся вызвать

колебательные движения, определяемые переменным углом ϕ и называемые трампингом. С другой стороны, это последнее движение, вследствие гироскопического действия быстро вращающихся колес связано с явлением шимми, характеризуемым переменным углом ψ . Так, например, если колесо имеет угловую скорость $\dot{\phi}$ трампинга, то возникающий при этом гироскопический момент будет стремиться уменьшить угол ψ . Помимо этого, гироскопическим эффектом объясняется вращательное встряхивание рулевого штурвала, когда одно из колес переезжает через какое-либо препятствие на дороге.

Источник энергии можно найти довольно легко. Как мы уже видели, боковое движение x связано с боковыми силами трения на поверхности катания колес. В свою очередь, эти силы вызывают скольжение если не по всей поверхности соприкосновения шины с дорогой, то, по крайней мере, на некоторой ее части. Следовательно, боковое перемещение x боковая сила F , приложенная к шине, вообще говоря, уже не будут связаны между собой обычной простой зависимостью для упругих деформаций, т. е. зависимостью вида $F = kx$. Теперь эта зависимость должна быть более сложной.

Даже если не входить в технические детали, все же ясно, что при определенных фазовых соотношениях между перемещением x и силой F действия дороги эта последняя может совершать работу при колебаниях. Очевидно, что эта работа является результатом кинетической энергии движения автомобиля.

В случае, когда разность фаз перемещения и силы благоприятствует возникновению неустойчивости, колебания должны происходить тем интенсивнее, чем меньше гибкость системы и чем жестче соединения. Наиболее существенное изменение в конструкции передних колес автомобиля за последние несколько лет заключается в применении особых шин, называемых баллонами, большая мягкость которых делает возможными большие изменения угла ϕ . Широкое распространение сверхбаллонов, весьма желательных

для обеспечения комфортабельности езды, задержалось, однако, на много лет вследствие осложнений, связанных с их влиянием.

Математическое исследование задачи хотя и возможно, но даже в наиболее элементарных случаях (когда делаются многие значительные упрощения) оно приводит к уравнению частот шестой степени, тогда как при более полном анализе мы приходим к уравнению восьмой степени. Затруднения, связанные с подобными расчетами, в значительной степени обесценивают их.

Хотя в большинстве случаев шимми принадлежит к автоколебаниям, все же это еще не является правилом без исключения. В самом деле, периодическое возмущение может быть вызвано также неуравновешенностью колес, которая до некоторой степени существует всегда, особенно когда покрышки оказываются неравномерно изношенными.

Допустим, что неуравновешенный груз на левом колесе находится в наивысшем положении, в то время как на правом колесе он занимает наинизшее положение. В таком случае центробежные силы от этих неуравновешенностей вызовут явление трампинга с переменным углом φ , что, в свою очередь, приведет к возникновению шимми. Если угловая скорость вращения колес совпадает с собственной частотой шимми, то возмущение получается особенно большим, и тогда мы имеем дело с обычным явлением резонанса. Так как, по нашему предположению, диаметры обоих колес различны, то, если, например, они отличаются друг от друга на $1/500$ своей величины, неуравновешенности обоих колес окажутся совпадающими по направлению после 250 оборотов, причем в этом случае они возбуждают движение только вверх и вниз, не связанное с шимми. Типичные медленные биения подобного рода, наблюдаемые в действительности, показаны на рисунке 121.

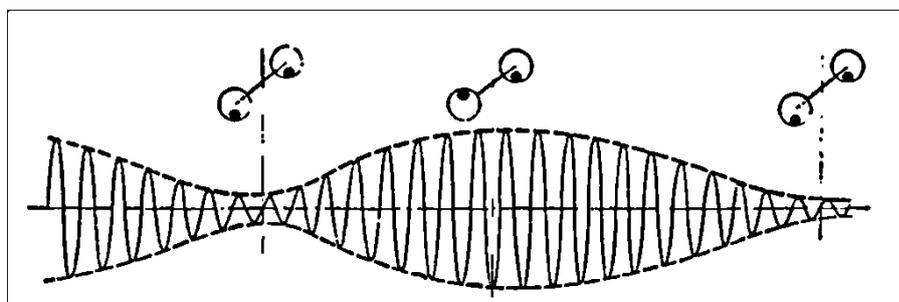


Рисунок 121 –Вынужденные колебания типа «шимми», вызванные неуравновешенностью колёс

Наиболее эффективный способ освобождения от колебаний типа шимми, как вынужденных, так и самовозбуждающихся, заключается в упразднении гироскопической связи, что и делается в некоторых автомобилях путем независимого подвешивания колес. В таких машинах передняя ось отсутствует совершенно, а колеса устанавливаются так, что они могут перемещаться лишь вверх и вниз параллельно самим себе, оставаясь в одной плоскости. Этим исключается вращение, определяемое углом φ . В таких системах можно ставить очень мягкие шины и мягкие передние рессоры, не рискуя получить при этом нежелательные результаты.

Интересно указать еще на одно явление автоколебаний, очень сходных с явлением шимми в колесах автомобиля, а именно па влияние трамвайных вагонов и электровозов. Подобного рода возмущения часто случаются вообще в повозках, установленных на тележках, обладающих некоторой боковой гибкостью, и проявляются в виде сильных боковых качаний с периодом, достигающим до нескольких секунд. Здесь очевидно лишь то, что мы имеем дело с автоколебаниями, энергия которых получается вследствие трения колес о рельсы. В данном случае нет той гироскопической связи, которая имеется в автомобилях. Следует заметить, однако, что механизм этого влияния в настоящее время еще нельзя считать изученным. Явление шимми наблюдается не только у двух колес на общей оси, как это изображено на рисунке 120, но и у одиночных колес. Так, ручные тележки, употребляемые в заводской практике, обычно имеют четыре колеса, два из которых, укрепленные в передней части тележки, имеют неподвижные оси, тогда как два задних колеса могут

поворачиваться вокруг вертикальных осей, причем между осью поворота и вертикалью, проходящей через точку опоры колеса, имеется некоторое расстояние, отличное от нуля. Замечено, что такие колеса, имеющие малый диаметр, совершают интересные колебания типа шимми, особенно если ось поворота хорошо связана и если пол, по которому катится тележка, твердый и гладкий. Надо сказать, что такое явление в тележках никого не беспокоит. Однако совершенно другое дело, если очень большие и очень дорогие самолеты терпят катастрофу по причине шимми колес шасси, что и случилось неоднократно. Шимми колес шасси самолета периодически причиняло неприятности и периодически здесь принимались соответствующие меры. Новейшие наиболее тяжелые самолеты с хвостовыми поворотными колесами доставляли в этом отношении много забот, пока не были найдены способы рационального конструирования этих колес. В последнее время, когда в современных тяжелых самолетах стали переходить к носовому колесу, вместо хвостового, трудности вновь возникли, и в настоящее время не представляется возможным предсказать теоретически, при какой скорости колеса данной конструкции начнется шимми. Эта проблема подвергается усиленному теоретическому и экспериментальному изучению, однако она очень сложная, и здесь дело обстоит пока столь же неудовлетворительно, как и в проблеме флаттера крыла.

Мы дадим сейчас весьма упрощенный анализ явлений, причем только для того, чтобы показать принцип исследования. Заметим еще раз, что этот анализ слишком упрощен, чтобы иметь большое практическое значение в реальном случае.

Предположим, что масса и жесткость самого самолета велики по сравнению с этими величинами для поворотного колеса шасси, вследствие чего можно считать, что точка прикрепления его оси к самолету движется вперед с постоянной скоростью V . Предположим далее, что шина является жесткой. На рисунке 122, где в плане представлено колесо, подвергающееся шимми,

точка C есть точка прикрепления стойки колеса к самолету. Эта точка движется вправо с постоянной скоростью V . Точка B есть нижняя точка стойки. Нормально точка B лежит как раз под точкой C , но при шимми стойка предполагается прогибающейся в сторону на расстояние x . Колесо находится позади точки B под углом φ , являющемся углом шимми, который равен нулю при нормальном идеальном функционировании шасси. Точка A есть центр колеса, а точка G — центр тяжести всего шасси. При шимми вследствие трения возникает реакция F грунта, действующая на опорную поверхность колеса. Далее, масса, колеблющаяся при поворотах стойки, испытывает в точке B со стороны стойки силу kx . Таким образом, для малых x и φ уравнения движения этой массы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x} + b\ddot{\varphi}) + kx + F &= 0, \\ kxb - Fa &= I_G\ddot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

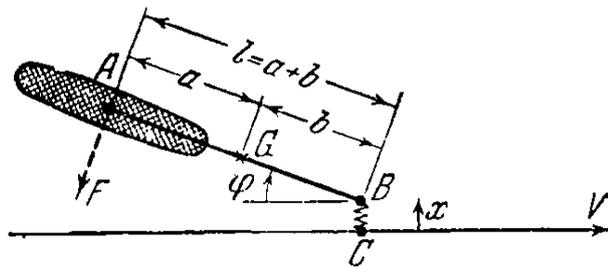


Рисунок 122 – Шимми поворотного колеса

Имеем два уравнения с тремя неизвестными: x , φ , F . Третье уравнение получается из геометрического условия отсутствия скольжения колеса. Это уравнение показывает, что касательная к траектории точки A должна иметь направление AB (точнее говоря, это условие есть кинематическое, связывающее производные от координат, и притом так называемое неголономное, т.е. не могущее быть проинтегрированным независимо от уравнений движения)

$$-\frac{\dot{x} + i\dot{\varphi}}{V} = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$$

или

$$\dot{x} + i\dot{\varphi} + V\varphi = 0. \quad (4.40)$$

Исключая силы F из уравнений (4.39), получаем

$$m(\ddot{x} + b\ddot{\varphi}) + kx + \frac{kb}{a}x - \frac{I_G}{a}\ddot{\varphi} = 0. \quad (4.41)$$

Если сделать обычные предположения

$$x = x_0 e^{st}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{st},$$

то получим

$$x_0 s + \varphi_0 (V + ls) = 0,$$

$$x_0 (ams^2 + kl) + \varphi_0 (-I_G s^2 + mabs^2) = 0.$$

Поскольку здесь все коэффициенты положительны, остаётся только одно условие Рауса, согласно которому будет иметь место устойчивость, если

$$mal > I_G + ma^2.$$

Полагая $I_G = m\rho_G^2$, мы можем условие устойчивости написать проще, а именно: система устойчива если

$$ab > \rho_G^2. \quad (4.42)$$

Почти во всех существующих конструкциях шасси это неравенство нарушается. Здесь говорится только об исчезновении или возникновении шимми. Но это имеет место лишь при таком изменении параметров системы, когда, например, совершается переход из области неустойчивости [неравенство (4.9) не удовлетворится] в область устойчивости [неравенство (4.9) удовлетворяется]. При противоположном изменении параметров совершается обратный переход, приводящий к возникновению шимми. На самой границе области устойчивости, когда неравенство (4.9) заменяется равенством, действительное поведение системы определяется нелинейными членами, не вошедшими в уравнение движения при их составлении. Если имеются две мас-

сы (рисунок 122), сосредоточенные в точках A и B , причем эти массы соединены невесомым стержнем, то $ab = \rho_G^2$ и система находится на границе возникновения или исчезновения шимми1)- Если A и B — точечные массы, соединенные стержнем, также имеющим массу, то $ab > \rho_G^2$.

В действительности колесо A имеет всегда большую массу, которая выходит влево за точку A , вследствие чего во всех практических случаях $ab < \rho_G^2$ т. е. имеет место неустойчивость в смысле возникновения шимми.

В большинстве существующих конструкций в точке B на рисунке 122 имеется демпфер, гасящий крутильные колебания, причем затухание в этом демпфере имеет существенное значение для правильного функционирования шасси. Другой способ введения затухания состоит в установке на общем валу двух параллельных друг другу колес, связанных между собою, вследствие чего они могут вращаться только вместе с одной и той же угловой скоростью. Это приводит к возникновению трения грунта, действующего как эффективное затухание. Что касается неравенства (4.42), то оно говорит нам о том, что момент инерции колеса следует брать малым, а расстояние $a + b = l$ большим. В большинстве конструкций имеет место обратное, а поэтому требуется введение мощного демпфера.

Анализ, приведенный выше, весьма схематичен. В более обстоятельном исследовании должны быть приняты во внимание два важных фактора: динамика резиновой шины и конечность фюзеляжа.

Заметим, что зависимость между боковой силой F шины (рисунок 122) и отклонением касательной к траектории в точке A от угла φ очень сложная, которая найдена экспериментальным путем лишь для низких частот, но которая далеко не достаточно известна для высоких частот, наблюдаемых в шимми (более 20 колебаний в секунду).

При таких высоких частотах точка C фюзеляжа (рисунок 122) уже не будет вести себя так, как если бы она имела бесконечную массу и бесконечную жесткость.

Фюзеляж представляет собою столь сложную систему, что целесообразно найти импеданс Z точки C экспериментальным путем. Для этого следует небольшой неуравновешенный мотор прикрепить в нижней точке C самолета, и тогда можно определить отношение боковой силы к боковому перемещению для целого ряда частот. Этот импеданс войдет тогда в дифференциальные уравнения движения вместо значения $Z = \infty$, как было прежде. В диапазоне частот, встречающихся на практике, кривая $Z = f(\omega)$ обычно имеет несколько пиков (очень больших, грубо говоря, бесконечных значений) и несколько нулей (точнее, очень малых значений).

5 Квазигармонические и нелинейные колебания систем

5.1 Принцип вложения

Математическое исследование всех задач, встречавшихся нам до сего времени, могло быть выполнено при посредстве линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. С физической точки зрения это означает, что все массы постоянны, все восстанавливающие силы пропорциональны соответствующим отклонениям и все силы затухания пропорциональны скорости. В настоящей главе предполагается рассмотреть случаи, где эти условия уже не выполняются, причем вследствие возникающих при этом значительных осложнений наше исследование будет ограничено лишь системами с одной степенью свободы. Отступления от классической задачи здесь будут двоякого рода. Прежде всего в пунктах 5.2—5.4 мы займемся дифференциальными уравнениями, которые остаются по-прежнему линейными, но в которых коэффициенты являются функциями времени; колебания, выражаемые такими уравнениями, называются квазигармоническими. В конце главы мы обратимся к нелинейным дифференциальным уравнениям:

колебания, выражаемые этими уравнениями, называются псевдогармоническими. Заметим сейчас же, что разница между теми и другими чрезвычайно большая.

Рассмотрим типичное линейное дифференциальное уравнение с переменным коэффициентом при x :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f(t)x = 0, \quad (5.1)$$

которые определяют движение системы, когда коэффициент жёсткости зависит от времени. Допустим, что мы знаем два частных решения этого уравнения, а именно:

$$x = \varphi_1(t) \text{ и } x = \varphi_2(t).$$

Тогда решением будет также $C_1\varphi_1(t)$, где C_1 – постоянная, а поэтому общее решение уравнения (5.1) представляются в виде

$$x = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t), \quad (5.2)$$

так как и здесь два частных решения могут быть сложены, давая при этом третье решение. Таким образом, имеем следующее положение: принцип наложения (или суперпозиции) сохраняет свою силу также для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Доказательство высказанного положения очень просто: мы имеем

$$m\ddot{\varphi}_1(t) + c\dot{\varphi}_1(t) + f(t) \cdot \varphi_1(t) = 0,$$

$$m\ddot{\varphi}_2(t) + c\dot{\varphi}_2(t) + f(t) \cdot \varphi_2(t) = 0.$$

Умножая первое уравнение на C_1 , а второе на C_2 и складывая, находим

$$m[C_1\ddot{\varphi}_1(t) + C_2\ddot{\varphi}_2(t)] + c[C_1\dot{\varphi}_1(t) + C_2\dot{\varphi}_2(t)] + f(t)[C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)] = 0.$$

Отсюда видно, что выражение

$$[C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)]$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.1) и поэтому является его решением.

В прикладных вопросах механики переменной величиной обычно бывает коэффициент жесткости, чему соответствует уравнение (5.1). Однако есть один важный случай, где переменной величиной оказывается масса. Этот случай может быть исследован на основе того же дифференциального уравнения, если только отсутствует затухание. В самом деле, в этом случае мы имеем

$$m(t) \cdot \ddot{x} + kx = 0, \quad (5.3)$$

где $m(t)$ есть переменная масса. Деля написанное уравнение на $m(t)$ получим уравнение

$$\ddot{x} + \frac{k}{m(t)} x = 0. \quad (5.4)$$

относящееся к случаю системы, масса которой равна единице и, следовательно, постоянная, а коэффициент жесткости зависит от времени

Нелинейное дифференциальное уравнение есть такое уравнение, в котором перемещение x или его производная входят нелинейным образом, т. е. не в первой степени, как, например, в уравнении

$$m(t) \cdot \ddot{x} + kx^2 = 0 \quad (5.5)$$

или в более общем виде

$$m\ddot{x} + kx^2 = 0. \quad (5.6)$$

Для нелинейных уравнений принцип наложения уже не имеет места, т. е. линейная комбинация частных решений не будет решением.

Высказанное утверждение легко проверить. В самом деле, пусть $x_1 = \varphi_1(t)$ и $x_2 = \varphi_2(t)$ являются решениями уравнения (5.5). Следовательно,

$$m\ddot{\varphi}_1 + k[\varphi_1(t)]^2 = 0,$$

$$m\ddot{\varphi}_2 + k[\varphi_2(t)]^2 = 0.$$

Отсюда сложением находим

$$m[\ddot{\varphi}_1(t) + \ddot{\varphi}_2(t)] + k\{[\varphi_1(t)]^2 + [\varphi_2(t)]^2\} = 0.$$

Если бы сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ была также решением, то последняя скобка должна бы равняться $(\varphi_1 + \varphi_2)^2$. В данном случае недостаёт члена $2\varphi_1\varphi_2$, вследствие чего выражение $\varphi_1 + \varphi_2$ не есть решение уравнения (5.5).

Несмотря на сделанные оговорки, все же общее решение уравнения (5.5) или (5.6) должно включать в себя две произвольные постоянные C_1 и C_2 , так как для его решения нам так или иначе необходимо выполнять два раза интегрирование. Однако в то время как в случае линейных уравнений знание двух частных решений немедленно приводит к общему решению в форме (5.2), этого, как мы видим, уже нет в случае нелинейных уравнений. Имеется только очень небольшое число нелинейных уравнений, общие решения которых известны, но, как правило, все, что мы здесь можем сделать, это ограничиться отысканием частных решений, да и то лишь приближенным путем.

5.2 Примеры систем с изменяющейся жёсткостью

В этом параграфе рассматриваются с физической точки зрения семь случаев, причем частично дается также объяснение соответствующих явлений. Более детальное исследование их должно быть выполнено безусловно с помощью математических выкладок, что нами и будет сделано в двух ближайших параграфах.

Первый случай. Рассмотрим систему, состоящую из диска, укрепленного в середине вертикального вала, вращающегося в двух подшипниках B , из которых только верхний показан на рисунке 123. Поперечное сечение вала не является кругом, и вообще оно таково, что имеет два главных направления с наибольшей и наименьшей жесткостью. Пусть это будет, например, прямо-

угольник. Положим, кроме того, что на валу, в непосредственной близости к диску, имеются две круговые заточки A, A . Эти заточки могут скользить в двух прямолинейных направляющих, ограничивающих движение вала одной плоскостью, например плоскостью, перпендикулярной к плоскости чертежа. Таким образом, диск, подчиненный упругому действию гибкого вала, представляет собою колеблющуюся систему с одной степенью свободы. Во время вращения вала его коэффициент жесткости изменяется в зависимости от времени, достигая дважды за один оборот наибольшего значения $k + \Delta k$, и дважды наименьшего $k - \Delta k$, вследствие чего дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + (k + \Delta k \sin \omega_k t)x = 0, \quad (5.7)$$

где ω_k есть удвоенная угловая скорость вращения вала, а индекс k поставлен для того, чтобы подчеркнуть, что здесь мы имеем дело с изменением величины k .

Далее, расположим тот же вал горизонтально в вертикальных направляющих A , благодаря чему колебания диска будут ограничены вертикальным направлением. В этом случае в качестве добавочной силы появится вес диска G , вследствие чего уравнение (5.7) изменится, приняв вид

$$m\ddot{x} + (k + \Delta k \sin \omega_k t)x = G. \quad (5.8)$$

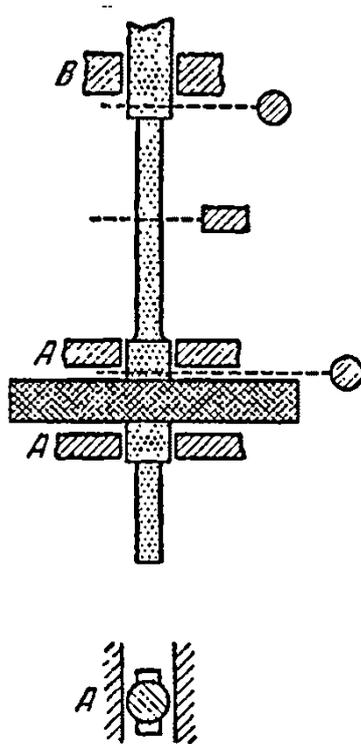


Рисунок 123 – Диск, укрепленный на валу, сечение которого имеет различную жёсткость по разным направлениям

Если бы упругие свойства вала не изменялись, то между уравнениями (5.7) и (5.8) не было бы никакой существенной разницы, так как второе из них переходит в первое при простом изменении начала отсчета x -ов (расстояние между прежним началом и новым должно быть равно статическому прогибу вала под диском). Однако переменный коэффициент жесткости меняет дело.

Введём новую переменную:

$$y = x + C,$$

где C есть постоянная, которую надлежит определить так, чтобы результат получился возможно проще. Подставляя в уравнение (5.8), имеем

$$m\ddot{y} + (k + \Delta k \sin \omega_k t)y = G + kC + C\Delta k \sin \omega_k t. \quad (5.9)$$

Если бы изменение коэффициента жесткости Δk было равно нулю, мы могли бы выбрать коэффициент C равным $-G/k$, приведя тем самым уравнение (5.9) к виду (5.7). Однако при $\Delta k \neq 0$ это уже невозможно. Интересно

отметить, что если вообразить, что в последнем уравнении $G = 0$, то в уравнении (5.7), при простом перемещении начала координат, появляется правая часть, которая может считаться внешней переменной силой частоты ω_k .

Итак, мы видим, что уравнения (5.7) и (5.8) не могут быть преобразованы одно в другое. Они являются принципиально различными, и с ними следует оперировать как с различными.

Сделаем предположение, что изменения величины k малы по сравнению с самой этой величиной (Δk не превышает 10% от k). Тогда упругая сила соответствует величине k , и колебания диска являются почти гармоническими с частотой $\omega_n = \sqrt{k/m}$.

При определенном соотношении между собственной частотой колебаний ω_n и частотой изменения жесткости ω_k , а также при соответствующей зависимости между фазами возможно большое нарастание колебаний. Рассмотрим две кривые на рисунках 124, а и 124, б, иллюстрирующие движение x диска с частотой ω_n . Рассмотрим также изменения коэффициента жесткости, происходящие с частотой, в два раза большей, чем собственная частота колебаний системы. Эти графики относятся к случаю вертикального вала (эффект силы тяжести отсутствует), так что прямая OA определяет равновесное положение при отсутствии изгибающих напряжений в вале. Таким образом, упругая сила представится произведением ординат рисунка 124, б и 124, а, отсчитываемых от линии OA . При том соотношении фаз, для которого построены графики, мы видим, что при движении диска от центрального положения (1—2 и 3—4) упругая сила меньше своего среднего значения, в то время как при движении диска по направлению к центральному положению (2—3 и 4—5) упругая сила больше среднего значения. Таким образом, упругая сила оказывается меньшей, когда она противодействует движению, и большей, когда она способствует движению. Следовательно, за весь полный цикл колебания упругая сила совершает положительную работу, увеличивая

тем самым энергию системы, и колебания нарастают. Мы имеем поэтому неустойчивое состояние.

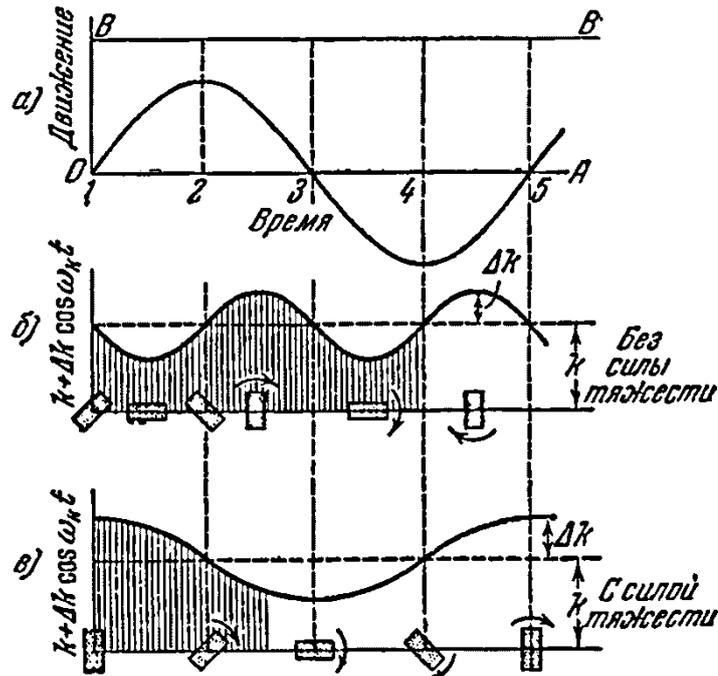


Рисунок 124 – Объяснения неустойчивости срезанного вала при половинной и полной критической скорости

При действии силы тяжести упругая сила по-прежнему будет выражаться произведением коэффициента k на отклонение (рисунок 124, а), но теперь ордината должна отсчитываться уже не от OA , а от другой прямой OB , находящейся от OA на расстоянии статического прогиба $\delta_{ст}$. Существование этой разницы $\delta_{ст}$ не нарушает предыдущих рассуждений, относящихся к изменениям коэффициента k в соответствии с рисунка 124, б, однако теперь уже оказывается возможным получить работу при другом изменении коэффициента k , представленном на рисунке 124, б, когда $2\omega = \omega_k$ (вал вращается со скоростью, равной половине критической). Это происходит по той причине, что упругая сила мала (при перемещении от положения 2 до положения 4), когда диск уходит от своего равновесного положения BB , и велика (при перемещении от положения 1 до положения 2 или от 3 до 4), когда он к нему приближается.

Работа, совершаемая за цикл, вообще равна

$$\int F dx = - \int kx dx,$$

где $x = \delta_{\text{ст}} - x_0 \sin \omega t$. Мы подставляем вместо k его варьированное значение $k - \Delta k \sin 2\omega t$ (рисунок 124, б). Предлагается подставить это значение в интеграл и показать, что работа равна $+(\pi/2)\Delta k x_0^2$, т.е. не зависит от $\delta_{\text{ст}}$. Для случая на рисунке 124, в мы подставляем $k + \Delta k \cos \omega t$ вместо k , и тогда работа оказывается равной $+\pi\Delta k x_0 \delta_{\text{ст}}$, т.е. она получается отличной от нуля только при действии силы тяжести. Таким образом, физический анализ приводит нас к нижеследующим заключениям.

1. В системе, движение которой выражается уравнением (5.7), т.е. в случае вертикального вала с плоскими срезами, всякие могущие быть малые колебания с собственной частотой $\omega_c = \sqrt{k/m}$ возрастают до больших амплитуд, если вал вращается со своей полной критической скоростью ($\omega_k = 2\omega_c$);

2. Для системы, движение которой выражается уравнением (5.8), т.е. в случае горизонтального вала с плоскими срезами, такой же тип неустойчивости имеет место как при полной критической скорости, так и при скорости, равной её половине.

Высказанные заключения являются лишь ориентировочными. Исследование уравнений в ближайших параграфах покажет нам, в какой мере они должны быть пополнены.

Валы, встречающиеся на практике, сечение которых отличается от кругового и для которых могут иметь место критические скорости, равные половине нормальной критической, изображены на рисунке 125. Здесь слева показан круглый вал со шпоночной канавкой. В данном случае вредное воздействие канавки может быть устранено, если вырезать еще две уравновешивающие, симметрично расположенные канавки, благодаря которым жесткость вала получается одинаковой по всем направлениям.

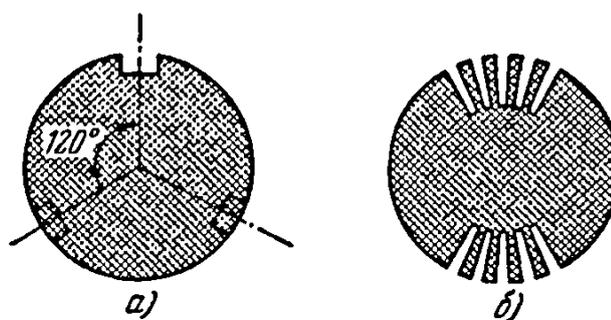


Рисунок 125 –Случаи неравномерной жёсткости вала и ротора

Другим примером может служить поперечное сечение двухполюсного ротора турбогенератора, в котором пропилены желобки для электрической обмотки, причем сплошные твердые части образуют лицевые стороны полюсов. В этом случае неравномерное распределение упругих свойств не может быть избегнуто, вследствие чего двухполюсный ротор всегда обладает неспокойным ходом на половине критической скорости.

Второй случай, весьма сходный с только что рассмотренным случаем вала, это — упругая нить или струна, несущая массу m в своей середине и имеющая переменное натяжение, изменяющееся с частотой сок от максимума $T + t$ до минимума $T - t$, что можно осуществить, если тянуть с переменной силой за один конец (рисунок 126). Если мы будем усиливать натяжение, когда масса m движется к центру, и ослаблять при ее движении от центра, то таким путем можно достигнуть значительного нарастания колебаний. За тот же промежуток времени, за который масса m совершает одно полное колебание, конец струны совершает два колебания. Здесь мы имеем случай, соответствующий случаю на рисунке 124, б. Если же взять горизонтальную струну, то вступает в действие еще сила тяжести, которая подводит нашу систему под случай, соответствующий уравнению (4.8) и рисунку 124, в. Периодическое изменение натяжения может быть вызвано также изменением температуры. Проволока, по которой течет переменный ток, имеет температурные изменения, а следовательно и изменения натяжения, происходящие с частотой, равной удвоенной частоте электрического тока. Нарастание боковых ко-

лебаний мы получим, если собственная частота окажется равной частоте тока или в два раза больше его.

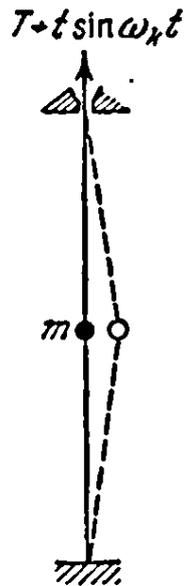


Рисунок 126 – Нить с изменяющимся натяжением, как второй пример применения уравнения (5.7)

Третий случай показан на рис. 8.5. Здесь мы имеем математический маятник, состоящий из грузика, подвешенного к одному концу нити, другой конец которой перемещается вверх и вниз по гармоническому закону. Так как квазиупругий коэффициент k (здесь с физической точки зрения было бы неправильно называть k коэффициентом жёсткости) математического маятника равен mg/l , то периодическое изменение длины l обозначает в то же время изменение этого квазиупругого коэффициента. Поэтому боковые перемещения грузика подчиняются уравнению (5.7). Для того чтобы колебания могли возрасти до большой величины при изменении длины с частотой $\omega_k = 2\omega_c = 2\sqrt{l/g}$, необходимо тянуть нить вверх в середине размаха и отпускать вниз при крайних положениях, вследствие чего грузик будет описывать фигуру наподобие восьмерки, как показано на рисунке 127. Натяжение нити оказывается больше при малых значениях угла φ и меньше при больших, что объясняется следующими причинами. В крайних положениях это натяжение равно весу грузика, умноженному на $\cos \varphi$. В этих положениях $\cos \varphi$ меньше

единицы. В середине, где $\cos \varphi$ равен единице, натяжение равно всему весу, да еще сложенному с центробежной силой грузика, движущегося по своей криволинейной траектории. Таким образом, втягивая нить в среднем положении, мы действуем против большого натяжения, тогда как при отпускании нити в крайних положениях натяжение мало. В конце концов сила, приложенная к системе и действующая непосредственно на нить, заставляя ее изменять свою свободную длину, производит некоторую положительную работу, которая увеличивает кинетическую и потенциальную энергию грузика, совершающего вследствие этого возрастающие колебания.

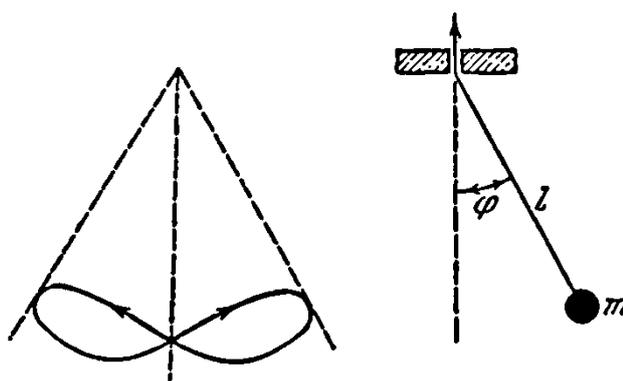


Рисунок 127 – Маятник переменной длины

Четвертый пример значительно труднее понять с физической точки зрения. Здесь мы имеем приблизительно то же, что и в предыдущем случае, с той лишь разницей, что маятник представляет собою жесткий стержень постоянной длины, но его точка опоры (вокруг которой он может свободно вращаться) совершает быстрые вертикальные гармонические колебания, осуществляемые посредством небольшого электромотора. Ниже будет показано, что такой маятник обладает поразительным свойством, а именно, он может стоять в вертикальном положении на своей точке опоры. Квазиупругий коэффициент такого физического маятника равен опять mg/λ , но λ здесь уже есть «приведенная длина». В этом опыте длина λ постоянна, зато периодически изменяется ускорение силы тяжести g . Такое изменение величины g легко можно понять, если рассмотреть давление человека на пол кабинки лифта. Когда лифт стоит на месте или движется с постоянной скоростью,

давление равно весу человека; если же ускорение лифта направлено вверх, то оно больше веса, а при ускорении, направленном вниз, меньше. Наблюдатель, находящийся в ускоренно движущемся лифте, может заметить, что значение g в этом случае отличается от его значения на земле. Также обстоит дело и с маятником: когда ему сообщается ускорение вверх, значение g становится, очевидно, больше. Таким образом, мы показали периодичность изменения квазиупругого коэффициента, а тем самым и применимость в данном случае уравнения (5.7).

Пятый случай, который нам предстоит рассмотреть, является наиболее важным с точки зрения технических приложений. Здесь дело заключается в том, что в ведущей системе электровозов с передачей движения спарниками наблюдаются сильные крутильные колебания в некоторых областях скоростей. Эти колебания вызываются периодическими изменениями или пульсациями, происходящими в коэффициенте жесткости системы, как это можно видеть на рисунке 128, изображающем одну из простейших конструкций подобного рода. Электромотор укреплен на раме и соединяется с ведущей осью посредством спарника с каждой стороны электровоза. Так как кривошипные концы обеих сторон расставлены под углом 90° между собой, то вся ведущая система в целом не имеет мертвых положений. При обычных условиях работы колеса сцепляются с рельсами силой трения, но в то же время, вследствие гибкости спарников, мотор имеет возможность несколько поворачиваться, не вызывая вращения колес. Когда какой-либо спарник оказывается в одной из своих мертвых точек, то он совершенно не может противодействовать мотору повернуться на некоторый малый угол, т. е. его доля в полном значении коэффициента жесткости к равна нулю. Напротив, при отклонении от мертвого положения на 90° этот же спарник при дает системе большую жесткость, так как для возможности малого поворота мотора либо должен удлиниться этот спарник, либо должен изогнуться палец кривошипа. Таким образом, коэффициент жесткости только одного спарника изменяется между некоторым максимумом и некоторым минимумом, практически равными нулю,

совершая два полных изменения за каждый оборот колеса. Изменение гибкости совокупности обоих спарников выражено менее резко и имеет четыре цикла за один оборот. Кривые 1 и 2 на рисунке 129 показывают величину крутящего момента на валу мотора, приходящегося на один радиан закручивания, когда включен только один спарник 1 или 2. Кривая 3, ординаты которой равны сумме ординат кривых 1 и 2, показывает изменение результирующего коэффициента жесткости k для всей системы.

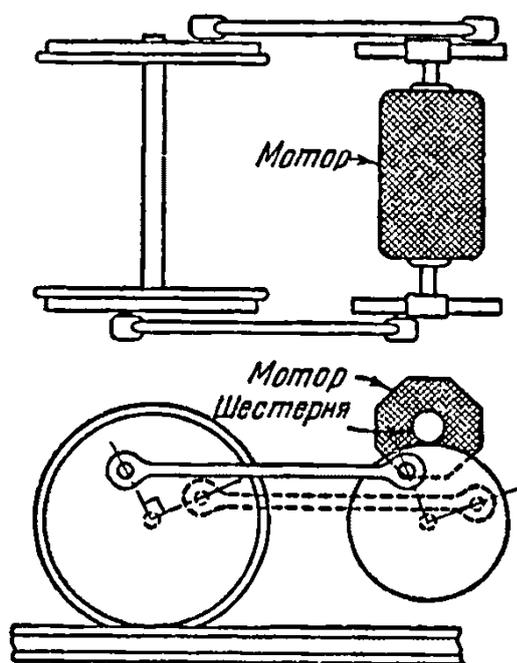


Рисунок 128 – Крутильные колебания ведущей системы электровоза с передачей движения спарниками

Крутильные колебания мотора под влиянием пружинящего действия спарников налагаются на основное его вращение. Описанное явление математически выражается уравнением (5.7), где величина ω_k в четыре раза больше угловой скорости колес. Следовательно, естественно ожидать возникновения значительных колебаний, когда

$$\omega_c = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\pi N,$$

где N – число оборотов в секунду.

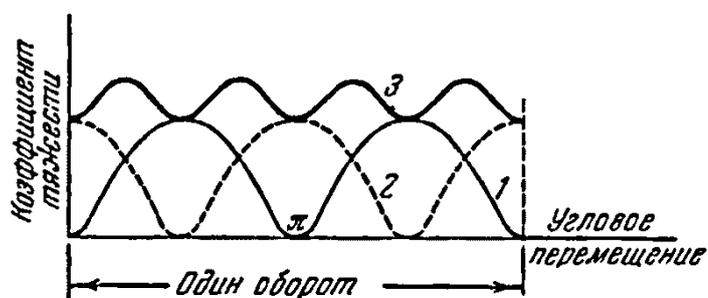


Рисунок 129 – Коэффициент жёсткости системы как функция угла поворота

Шестым примером может служить небольшой синхронный мотор в электрических часах (рисунок 130). Вращающаяся часть таких моторов обычно состоит из очень лёгкой металлической пластинки A , вращающейся вокруг полюсов B , по обмоткам которых течет переменный ток. Ротор может скользить в подшипниках вдоль оси, но в то же время удерживается в определенном положении магнитным полем полюсов B . Магнитное действие этих полюсов подобно действию пружины, причем, в случае тока в 60 периодов в секунду, напряжение ноля обращается в нуль 120 раз в секунду, вследствие чего изменение квазиупругого коэффициента здесь очень велико (100%). Нежелательные явления выражаются в виде продольных колебаний ротора, сопровождающихся шумом.

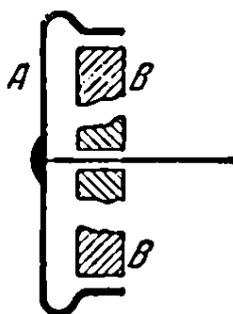


Рисунок 130 – Мотор электрических часов

Седьмая и последняя иллюстрация уравнений (5.7) это — электрическая аналогия. Здесь мы имеем дело с электрическим контуром, включающим в себя индуктивность L и емкость C , причем емкость конденсатора периодически изменяется, например, посредством кривошипного механизма, показанного на рисунке 131. Перемещению x в уравнении (5.7) в данном случае соответствует величина заряда Q пластинок конденсатора. Постоянная правая

часть уравнения (5.8) определяется источником постоянного тока — батареей, включенной в цепь. Рассмотрим сначала систему без-батареи. Две заряженные обкладки конденсатора находятся в механическом взаимодействии, притягивая друг друга. Электрический ток в контуре с L и C имеет колебательный характер с частотой $\omega_c = \sqrt{1/LC}$.

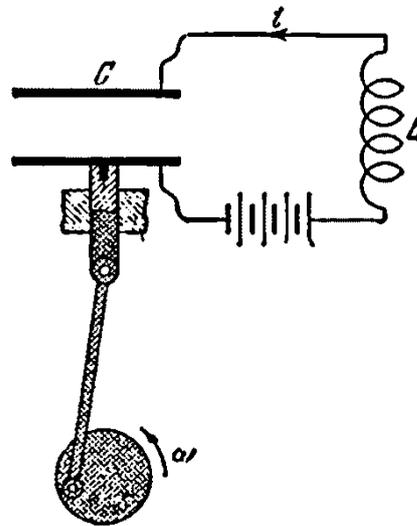


Рисунок 131 –Электрический контур с переменной ёмкостью

Положим, что действие кривошипного механизма рассчитано так, что пластинки удаляются, когда заряд Q большой, и сближаются, когда заряд Q , а вместе с ним и притягивающая сила малы. Таким образом, кривошипный механизм (угловая скорость вращения которого равна удвоенной частоте тока, т. е. $\omega_k = 2\omega_n$) совершает механическую работу, преобразующуюся в электрическую энергию системы. В случае мощной батареи и малых колебаний заряд каждой обкладки конденсатора совершенно не меняет знака, а поэтому действие системы при частоте $\omega_k = \omega_c$ происходит подобно тому, как это представлено на рисунке 124, в.

5.3 Решение уравнения

Решение большинства задач, рассмотренных в предыдущем параграфе, определяется решением дифференциального уравнения типа

$$m\ddot{x} = [k + \Delta k \cdot f(t)]x = 0, \quad (5.10)$$

где $f(t)$ есть периодическая функция времени, имеющая обычно вид:

$$f(t) = \sin \omega_k t.$$

Общее решение этого уравнения, известного под названием уравнения Матьё (Mathieu), содержащее две произвольные постоянные, до сих пор еще не найдено. В самом деле, существует лишь очень небольшое число уравнений с переменными коэффициентами, для которых решения известны. Однако здесь мы интересуемся не столько самим решением, т. е. отысканием точной формы движения, как вопросом о том, является ли решение «устойчивым» или «неустойчивым», иначе говоря, определяет ли оно устойчивое или неустойчивое движение. Простейшее решение уравнения (5.10) есть $x = 0$. Иными словами, система может оставаться в покое неопределенно долгое время. Если же было дано некоторое начальное возмущение ($x = x_0$ или $\dot{x} = v_0$), то система уже не может оставаться в покое, и тогда нашей задачей в данном случае является установление различия между движением устойчивым и неустойчивым. Под устойчивым движением мы будем подразумевать такое, когда возмущение с течением времени постепенно пропадает, подобно тому, как это имеет место в затухающих колебаниях, тогда как в случае неустойчивого движения амплитуды со временем нарастают. Возбуждение колебаний, обусловленное периодическим изменением коэффициента жесткости, являющегося одним из параметров, характеризующих систему, называется параметрическим возбуждением, а наступающий при определенных условиях рост амплитуд колебаний такой системы называется параметрическим резонансом.

Если «пульсация» $f(t)$ коэффициента жесткости или вообще квазиупругого коэффициента имеет частоту ω_k , то движение хотя может и не быть периодическим, все же обнаруживает какую-то закономерность по истечении каждого интервала $T = 2\pi/\omega_k$.

Пусть система приходит в движение в момент $t = 0$, имея отклонение $x = x_0$ и скорость $\dot{x} = v_0$. Пусть, далее, $x = F(t)$ представляет собою (пока неизвестное) решение уравнения. Сделаем, наконец, ещё предположение, что по истечении одного периода $T = 2\pi/\omega_k$ отклонение и скорость сделались равными своим начальным значениям, умноженным на некоторый множитель s (положительный или отрицательный):

$$(x)_{t=\frac{2\pi}{\omega_k}} = sx_0; \quad (\dot{x})_{t=\frac{2\pi}{\omega_k}} = sv_0. \quad (5.11)$$

Является ли последнее допущение справедливым, нам еще надо проверить. Если оно справедливо, то второй период колебания начинается при отклонении и скорости, соответственно в s раз больших своих значений в начале первого периода. Легко показать также, что и движение в течение всего второго периода происходит в s раз большем масштабе по сравнению с движением в соответствующие моменты в пределах первого периода и, в частности, что третий период начинается с отклонения s^2x_0 .

Доказательство выполняется следующим образом. Пусть $x = F(t)$ есть решение уравнения (5.10) с начальными условиями:

$$(x)_{t=0} = x_0 \text{ и } (\dot{x})_{t=0} = v_0. \quad (5.12)$$

Для перемещения в течение второго периода движения введём новую переменную $y = sx$, тогда дифференциальное уравнение, после умножения на s , примет вид

$$m\ddot{y} + [k + \Delta k \cdot f(t)]y = 0. \quad (5.13)$$

Если теперь отсчитывать время от момента начала второго периода, то начальные условия будут таковы:

$$(y)_{t=0} = sx_0 = y_0; \quad (\dot{y})_{t=0} = sv_0 = \dot{y}_0. \quad (5.14)$$

Таким образом, мы видим, что уравнения (5.13) и (5.14) совершенно такие же, как и уравнения (5.10) и (5.12), а поэтому $y = F(t)$ есть решение. Следо-

вательно, поведение величины $y = sx$ в течение второго периода таково же, как и поведение величины x в течение первого периода.

Итак, если предположение, выражаемое равенствами (5.11), правильно, то мы имеем решение, повторяющее собой значения после каждого периода, соответствующего частоте ω_k , только эти значения всякий раз умножаются на постоянный множитель. Если величина s меньше единицы, то движение затухает и оно устойчиво; если же s больше единицы, то движение неустойчиво. Для произвольной периодической функции $f(t)$ уравнение (5.10) не может быть разрешено. В то же время, когда мы имеем частный случай «прямоугольной пульсации», составляющей Δ_k коэффициента жесткости k (рисунок 132), решение получается сравнительно просто. Хотя в большинстве практических случаев эта пульсация происходит скорее по синусоидальному закону, чем по прямоугольному, тем не менее общее поведение системы почти одинаковое, будет ли пульсация происходить согласно рисунок 132 или по гармоническому закону.

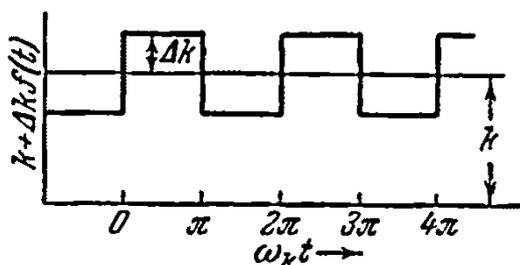


Рисунок 132 – Случай изменения коэффициента жёсткости, когда уравнение

(5.10) может быть решено

Если обозначить $k/m = \omega_c^2$ и $f(t) = \pm 1$, то дифференциальное уравнение (5.10) при $0 < \omega_k t < \pi$ примет вид

$$\ddot{x} + \left(\omega_c^2 + \frac{\Delta k}{m} \right) x = 0, \quad (5.15)$$

а при $\pi < \omega_k t < 2\pi$ или при $-\pi < \omega_k t < 0$ оно будет

$$\ddot{x} + \left(\omega_c^2 - \frac{\Delta k}{m} \right) x = 0. \quad (5.16)$$

Так как в этих уравнениях коэффициенты при x оказываются теперь постоянными, то они оба легко решаются. Решение для первой половины периода есть

$$x_1 = C_1 \sin p_1 t + C_2 \sin p_2 t, \quad (5.17)$$

где

$$p_1 = \sqrt{\omega_c^2 + \frac{\Delta k}{m}},$$

и для второй половины периода

$$x_2 = C_3 \sin p_1 t + C_4 \sin p_2 t, \quad (5.18)$$

где

$$p_2 = \sqrt{\omega_c^2 - \frac{\Delta k}{m}}.$$

Эти два решения должны находиться между собою в таком соответствии, чтобы при $\omega_k t = \pi$ они давали одинаковые отклонения и одинаковые скорости. Кроме того, они должны определять собою движение, линейные элементы которого в конце первого периода были бы в s раз больше соответствующих их значений в начале периода. Отсюда получаем условия в виде четырех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (x_1)_{\omega_k t=0} &= (x_2)_{\omega_k t=0}, \\ (\dot{x}_1)_{\omega_k t=0} &= (\dot{x}_2)_{\omega_k t=0}, \\ (x_2)_{\omega_k t=\pi} &= s(x_1)_{\omega_k t=-\pi}, \\ (\dot{x}_2)_{\omega_k t=\pi} &= s(\dot{x}_1)_{\omega_k t=-\pi}, \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

из которых могут быть определены четыре произвольные постоянные в уравнениях (5.17) и (5.18). Первые два из уравнений (5.19) приводят к простому результату:

$$C_4 = C_2, \quad C_3 = \frac{p_1 C_1}{p_2},$$

тогда как вторые приводят к более сложному результату:

$$C_3 \sin \frac{p_2 \pi}{\omega_k} + C_4 \cos \frac{p_2 \pi}{\omega_k} = -s C_1 \sin \frac{p_1 \pi}{\omega_k} + s C_2 \cos \frac{p_1 \pi}{\omega_k},$$

$$p_2 C_3 \cos \frac{p_2 \pi}{\omega_k} - p_2 C_4 \sin \frac{p_2 \pi}{\omega_k} = s p_1 C_1 \cos \frac{p_1 \pi}{\omega_k} + s p_1 C_2 \sin \frac{p_1 \pi}{\omega_k}$$

или после подстановки $C_4 = C_2$ и $C_3 = p_1 C_1 / p_2$ имеем

$$C_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \sin \frac{p_1 \pi}{\omega_k} + s \sin \frac{p_1 \pi}{\omega_k} \right) + C_2 \left(\cos \frac{p_2 \pi}{\omega_k} - s \cos \frac{p_2 \pi}{\omega_k} \right) = 0,$$

$$C_1 \left(p_1 \cos \frac{p_2 \pi}{\omega_k} - s p_1 \sin \frac{p_1 \pi}{\omega_k} \right) + C_2 \left(-p_2 \cos \frac{p_2 \pi}{\omega_k} - s p_1 \cos \frac{p_1 \pi}{\omega_k} \right) = 0.$$

Мы получим два однородных уравнения относительно C_1 и C_2 . Определяя из каждого уравнения отношение C_1/C_2 , приравнявая эти отношения друг другу и группируя члены нового уравнения по степеням s , окончательно получим

$$s^2 - 2s \left\{ \cos \frac{p_1 \pi}{\omega_k} \cos \frac{p_2 \pi}{\omega_k} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1 p_2} \sin \frac{p_1 \pi}{\omega_k} \sin \frac{p_2 \pi}{\omega_k} \right\} + 1 = 0. \quad (5.20)$$

Если для сокращения обозначить выражение в скобках через A , то решение уравнения (5.20) примет вид

$$s = A \pm \sqrt{A^2 - 1}. \quad (5.21)$$

В случае, когда $A > 1$, одно из двух возможных значений s больше единицы, и решение определяет собою неустойчивость. По истечении каждого периода колебания с частотой ω_k увеличившееся отклонение имеет то же самое направление, так что за каждый период колебания $2\pi/\omega_k$ — имеют место 1, или 2, или 3 и т. д. периодов свободных колебаний с частотой ω_c .

Если A оказывается между -1 и $+1$, то оба значения s становятся комплексными. Это указывает на то, что сделанное предположение, выражаемое равенствами (5.11), невозможно. В то же время, мы видим, что действительная часть s представляет собою правильную дробь. Следовательно, можно ожидать движение, которое не является регулярно возрастающим с течением времени, т. е. система устойчива.

Наконец, когда A меньше, чем -1 , одно из значений s будет также меньше, чем -1 . С физической точки зрения это значит, что после одного полного колебания с частотой ω_k отклонение, и скорость системы принимают обратные направления и становятся несколько больше по абсолютной величине. По истечении двух периодов они принимают прежние знаки, делаясь в то же время еще больше (так как перемещение и скорость умножаются на s^2 , а эта величина положительная и больше единицы). Опять мы имеем здесь неустойчивость, но течение каждого периода колебаний ω_k мы имеем $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ и т.д. периодов свободных колебаний.

Таким образом, система неустойчива, если $|A| > 1$ или если имеет место неравенство

$$\left| \cos \frac{\pi p_1}{\omega_k} \cos \frac{\pi p_2}{\omega_k} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1 p_2} \sin \frac{p_1 \pi}{\omega_k} \sin \frac{p_2 \pi}{\omega_k} \right| > 1, \quad (5.22)$$

где вертикальные прямые черточки указывают на абсолютную величину выражения. Что касается значений p_1 и p_2 , то они определяются формулами, данными непосредственно после уравнений (5.17) и 5.18). В написанном соотношении имеются две переменные величины p_1/ω_k и p_2/ω_k или, лучше сказать, ω_c/ω_k (отношение «свободной» и «упругой» частот) и $\Delta k/k$ (отношение амплитуды пульсации коэффициента жесткости к среднему значению последнего).

Результат (5.22) представлен графически на рисунке 133, где для удобства по оси абсцисс отложены значения $(\omega_c/\omega_k)^2$, а по оси ординат – произ-

ведения $\Delta k/k \cdot (\omega_c/\omega_k)^2$. Причина выбора за абсциссы квадратов отношения частот заключается в том, что мы желаем иметь возможность строить на график также и отрицательные квазиупругие коэффициенты, которые сейчас могут быть нанесены как отрицательные значения

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_k}\right)^2 = -\frac{k}{m\omega_k^2},$$

в то время как в случае откладывания первых степеней ω_c/ω_k абсциссы для отрицательного квазихрупкого коэффициента получились бы мнимыми. Далее, если бы мы приняли за ординаты отношение $\Delta k/k$, то в случае, когда постоянная часть этого коэффициента отсутствует, т.е. $k = 0$, мы получили бы для этого отношения бесконечное значение, такого неудобства можно избежать, если по ординатам строить

$$\frac{\Delta k}{k} \left(\frac{\omega_c}{\omega_k}\right)^2 = -\frac{k}{m\omega_k^2}.$$

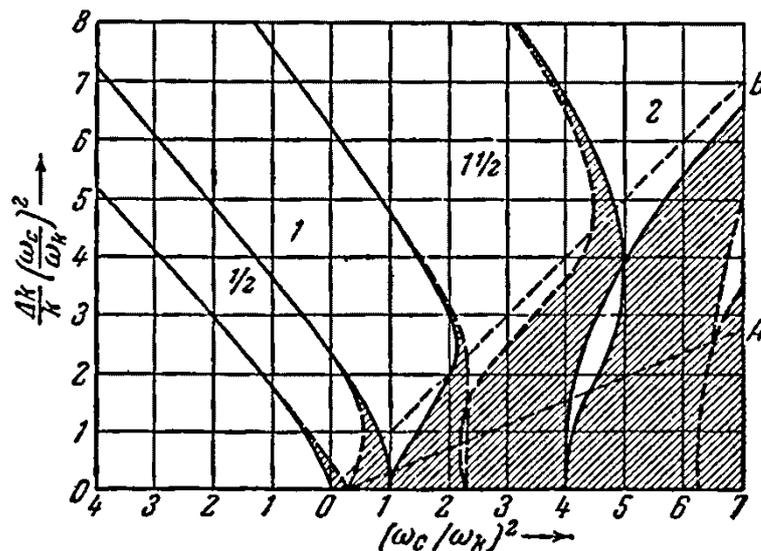


Рисунок 133 – Основная диаграмма, определяющая устойчивость системы с переменной упругостью. Заштрихованные области устойчивые, а белые - неустойчивые

На нашей диаграмме сплошные линии соответствуют значению левой части (5.22), равному +1, а пунктирные – значению, равному -1. В заштрихованных областях рисунка 133 левая часть неравенства (5.22) меньше единицы, что

указывает на устойчивость, тогда как в незаштрихованных областях значение этой части больше единицы. Следовательно, имеем неустойчивость. Числа $\frac{1}{2}$, 1 , $1\frac{1}{2}$ и т.д., поставленные в областях неустойчивости, показывают числа колебаний системы в течение одного периода изменения жёсткости (соответствующего частоте ω_k).

5.4 Интерпретация результата

На основании диаграммы, представленной на рисунке 133, мы можем более точно судить о поведении различных систем, рассмотренных в пункте 5.2, чем могли бы это сделать, опираясь на физические соображения, изложенные в пункте 5.2. Все приведенные примеры можно подразделить на три группы:

а) вал, проволока, электровоз и конденсатор переменной емкости; во всех этих случаях мы имеем частоту изменения пружинности ω_k , которая сама может меняться в довольно значительных пределах, причем относительные изменения квазиупругого квазихрупкого коэффициента (коэффициента жёсткости) малы, т.е. $\Delta k/k \ll 1$, и k положительно;

б) мотор электрических часов, имеющий постоянную частоту ω_k ; ему присущи большие изменения квазихрупкого коэффициента ($\Delta k/k = 1$) и также положительное значение k ;

в) маятник, стоящий на своём конце (а статический маятник), имеющий переменную частоту ω_k и отрицательное значение k , т.е. случай статической неустойчивости.

Прежде чем приступать к подробному исследованию какого-либо из упомянутых случаев, необходимо напомнить, что диаграмма на рисунке 133 построена в предположении «прямоугольного закона пульсации», а поэтому мы вправе ожидать от нее лишь приближенных результатов для большинства случаев, имеющих место в действительности, когда пульсация жесткости происходит почти по гармоническому закону. Тем не менее, приближение

оказывается достаточно хорошим. Кроме того, здесь мы не принимаем во внимание затухание.

Обратимся прежде всего к примерам группы (а). Здесь в каждом случае относительное изменение отношения $\Delta k/k$ и средняя собственная частота $\omega_c = \sqrt{k/m}$ постоянны. Единственной переменной в системе является частота изменения упругих свойств величины ω_k . На нашей диаграмме ординаты неизменно больше соответствующих абсцисс в $\Delta k/k$ раз. Вследствие этого всякая точка, изображающая положение системы, может двигаться только вдоль прямой линии, проходящей через начало координат (рисунок 133) и наклоненной под углом $\arctg(\Delta k/k)$ к горизонту. На диаграмме проведена прямая OA , соответствующая отношению $\Delta k/k = 0,4$ (т. е. относительное изменение составляет 40%). Медленные изменения жесткости с частотой ω_k соответствуют точке, лежащей далеко от начала O , тогда как точки вблизи начала имеют малое значение величины $(\omega_c/\omega_k)^2$, а поэтому соответствуют большому значению ω_k , т. е. быстрым изменениям жесткости. Мы видим, что громадное большинство точек линии OA оказывается в устойчивых областях, где не следует бояться колебания, но в то же время мы видим, что эта прямая пересекает большое число (теоретически бесконечно большое) областей неустойчивости, расположенных достаточно близко друг к другу. Это имеет место приблизительно при значениях $\omega_c/\omega_k = 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}$ и т.д.

Представим себе теперь, что электровоз очень медленно отправляется от места стоянки и постепенно увеличивает свою скорость до тех пор, пока, наконец, изменения упругих свойств движущейся системы (частота которых в 4 раза больше угловой скорости колес) не достигнут частоты, равной удвоенной частоте крутильных колебаний. На диаграмме рисунка 133 это соответствие движению по прямой OA из бесконечности до той точки, где $(\omega_c/\omega_k)^2 = \frac{1}{4}$, а тогда легко видеть, что при таком процессе приходится переходить через бесчисленное множество критических скоростей.

На основании изложенного в пункте 5.2, мы по-видимому, можем сделать заключение, что наибольшие значения имеют две скорости, при которых $\omega_c/\omega_k = 1$ и $\omega_c/\omega_k = \frac{1}{2}$. Что касается остальных критических скоростей, то они менее существенны. Однако избежать таких неустойчивых состояний на малых скоростях путем изменения конструкции невозможно, если, конечно, не добиться обращения в нуль изменения коэффициента жесткости Δk . Колебания такого рода причиняли большие неприятности в прошлом *В* настоящее время они преодолеваются главным образом посредством введения рессорных соединений для обеспечения гибкости на скручивание между зубчатым колесом мотора и его кривошипом или же между ведущим колесом электроваза и соответственным кривошипом. Эти соединения играют двоякую роль. Во-первых, они перемещают собственную частоту сап в сторону более низких ее значений, вследствие чего все критические области оказываются лежащими ниже достаточно малых скоростей, например, скоростей порядка 30 км в час, а при таких малых скоростях вряд ли можно ожидать большого поглощения энергии колеблющейся системой. Кроме того, рессоры, особенно если они листового типа, обладают некоторым внутренним трением, благодаря чему в систему вводится затухание.

Аналогичные результаты имеют место также и для всякого иного примера из группы а). В частности, вал с двумя плоскими гранями должен проходить через большое число областей критических скоростей. Однако в действительности при опыте с подобным валом эффективными оказываются только две из этих скоростей, одна из которых соответствует половине обычной критической скорости «первого рода», а другая — полной такой скорости.

В группе б) мы имеем осевые колебания мотора электрических часов, вызываемые периодическим исчезновением «упругости». Здесь $\Delta k/k = 1$, что для переменной скорости сок представится прямой линией, наклоненной к оси абсцисс под углом 45° (прямая *OB* на диаграмме). Легко видеть, что в

данном случае области неустойчивости шире, чем области устойчивости, а это создает больше возможностей для нежелательных явлений.

Последний случай, именно случай обращенного маятника, хотя и менее важен с технической точки зрения, все же является сам по себе наиболее интересным.

Прежде всего квазиупругий коэффициент k для такого маятника отрицателен. Это станет ясно, если мы вспомним определение величины k , которая представляет собою силу, возвращающую систему в положение равновесия при единичном отклонении от него. Однако в данном случае составляющая сила тяжести стремится удалить маятник от вертикали, вследствие чего k отрицательно, а тогда отрицательно также $\omega_c^2 = g/\lambda$, где λ есть приведенная длина (в случае однородного бруска, подвешенного своим концом, $\lambda = \frac{2}{3}$ полной его длины). Для обращенного маятника

$$\omega_c^2 = -\frac{g}{\lambda}.$$

Пусть движение точки опоры маятника определяется выражением $e \sin \omega_k t$, из которого получаем ускорение, равное $-e\omega_k^2 \sin \omega_k t$. Относительное изменение квазиупругого коэффициента будет

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta g}{g} = -\frac{e\omega_k^2}{g},$$

а тогда ордината на рисунке 133 становится равной

$$\frac{\Delta k}{k} \left(\frac{\omega_n}{\omega_k} \right)^2 = \frac{e}{\lambda},$$

являясь отношением амплитуды колебаний точки опоры к приведенной длине маятника. В то же время абсцисса

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_k} \right)^2 = -\frac{g}{\lambda\omega_k^2}$$

представляет собою отрицательную величину и притом малую при большой скорости колебаний точки опоры.

На рисунке 134 представлена деталь главной диаграммы, изображенной на рисунке 133, которая имеет важное значение для обращенного маятника. Заметим, что диаграмма на рисунке 134 построена для точного решения в случае синусоидального закона пульсации квазиупругого коэффициента (который не исследуется в настоящей книге), тогда как рисунок 133 относится к прямоугольному закону пульсации. Между прочим легко видеть, что разница между обоими случаями невелика.

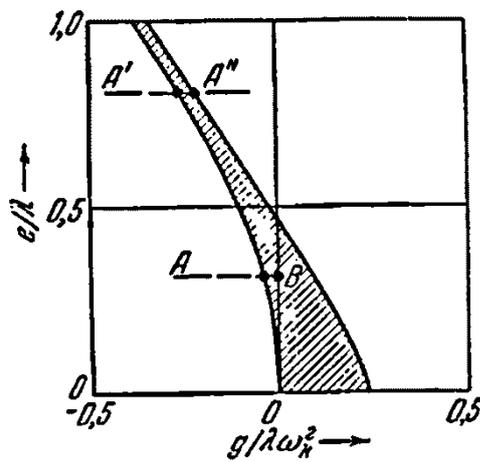


Рисунок 134 – Деталь, рисунка 133, дающая объяснение устойчивости обращенного маятника

Если маятник начинает колебаться при заданной амплитуде e точки опоры и при возрастающей частоте ω_k , то мы должны передвигаться вдоль горизонтальной прямой от A к B . Когда ω_k имеет малые значения, то система, очевидно, неустойчива, но в дальнейшем, при некоторой определённой скорости, она вступает в область устойчивости, в которой остаётся до тех пор, пока в точке B частота колебаний точки опоры ω_k не сделается бесконечно большой. Однако если отношение e/λ будет взято больше, чем, например, $0,5$, то существует также некоторая большая скорость колебаний опорной точки, при которой маятник вторично оказывается в неустойчивом

состоянии, что отмечено точкой A'' на прямой $A'A''$. Всё это подтверждено экспериментально.

Доказательство положения, что эффект движения точки опоры маятника эквивалентен изменению ускорения силы тяжести, можно выполнить, написав математическое выражение второго закона Ньютона, иначе говоря, написав дифференциальные уравнения движения.

Пусть на рисунке 135 будут:

a – расстояние точки опоры от центра тяжести G ; $s = e \sin \omega_k t$ – закон движения опорной точки; I – момент инерции относительно оси, проходящей через G ; θ – угол маятника с вертикалью x , y – вертикальное и горизонтальное перемещения точки G (первое из них отсчитывается вверх а второе – вправо); X , Y – вертикальная и горизонтальная составляющие реакции опоры маятника (отсчитываемые подобно предыдущему).

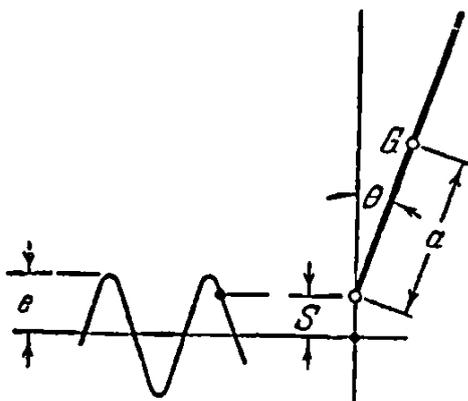


Рисунок 135 – Маятник, точка опоры которого совершает гармоническое движение

Тогда при малых значениях угла θ для перемещений точки G можно написать

$$x = s + a \cos \theta \approx s + a,$$

$$y = a \sin \theta \approx a\theta.$$

Три дифференциальных уравнения плоско-параллельного движения (два для перемещения точки G и одно для вращения вокруг этой точки) имеют вид

$$X - mg = m\ddot{x} \approx m\ddot{s},$$

$$Y = m\ddot{y} \approx ma\ddot{\theta},$$

$$Xa \sin \theta - Ya \cos \theta \approx Xa\theta - Ya = I\ddot{\theta}.$$

Исключая отсюда реакции X и Y , которые нужно определить из первых двух уравнений и подставить в третье, получаем уравнение

$$I\ddot{\theta} = m\ddot{s}a\theta + mga\theta - ma^2\ddot{\theta}$$

или

$$(I + ma^2)\ddot{\theta} - ma(g + \ddot{s})\theta = 0.$$

Выражение $I + ma^2$ есть момент инерции около точки опоры, а квазиупругим коэффициентом является выражение $-ma(g + \ddot{s})$. Эта величина отрицательна, и её изменения могут быть истолкованы как изменения ускорения силы тяжести g на величину \ddot{s} , представляющую собою ускорение опорной точки.

Исследуем, наконец, случай переменной массы. Рассмотрим простой кривошипный механизм, соединённый гибким валом k с маховиком бесконечного момента инерции (рисунок 136). Пусть маховик вращается с постоянной скоростью. Тогда мы получаем систему с одной степенью свободы, совершающую крутильные колебания и имеющую постоянный коэффициент жёсткости k , но переменный момент инерции (что эквивалентно переменной массе).

Раньше мы видели, что такая система математически эквивалентна системе с переменной упругостью и постоянной массой, а поэтому сюда можно применить диаграмму рисунка 133. Согласно этой диаграмме, система вступает в области критических скоростей, когда её средняя собственная частота $\omega_c = \sqrt{k/T}$ составляет $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \dots$ частоты ω_k изменения массы. Легко видеть, что главная или основная частота изменения массы в два раза больше

числа оборотов машины, вследствие чего критические скорости должны появляться при $\omega_c = 1, 2, 3, \dots$ угловой скорости вращения машины, тогда как простая приближённая теория даёт в случае бесконечно длинного шатуна только одну критическую скорость, соответствующую ω_c , равной удвоенной скорости вала машины.

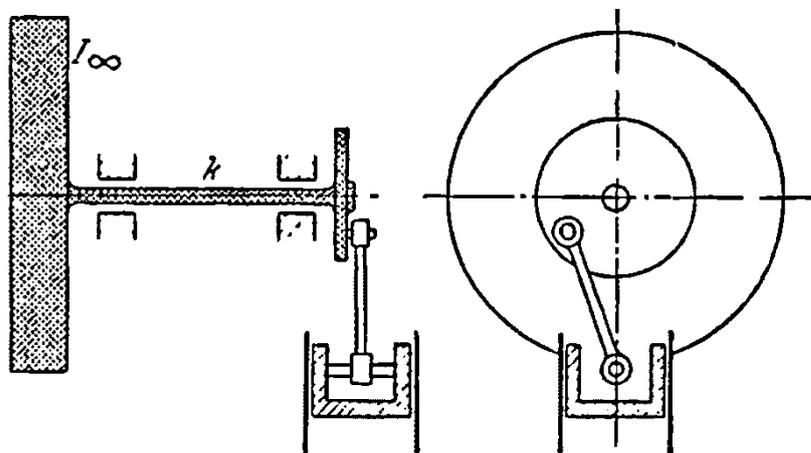


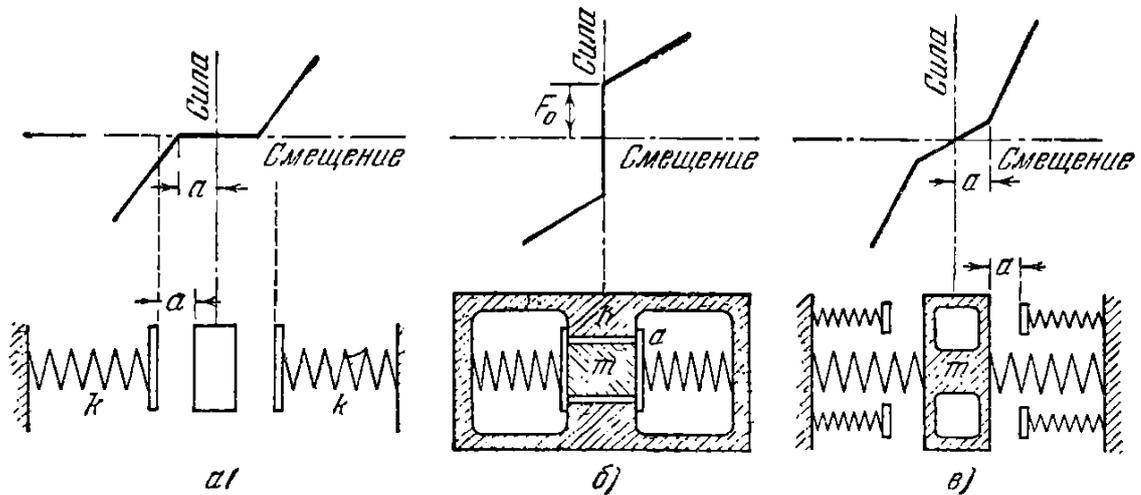
Рисунок 136 – Система с периодически изменяющейся инерцией

5.5 Примеры нелинейных систем

Нелинейность системы заключается в том, что один или несколько коэффициентов m, c или k зависят от перемещения x . В механических системах нелинейность главным образом встречается в вопросах, связанных с затуханием или с пружинящим эффектом, тогда как в электротехнике наиболее обычным является случай нелинейной индуктивности (которая соответствует массе).

Рассмотрим сперва несколько примеров, в которых нелинейность обусловлена пружинами. На рисунке 137 показаны три случая, когда восстанавливающая сила пружин не пропорциональна перемещению, в то время как каждая отдельно взятая пружина, входящая в систему, является самой обыкновенной витой пружиной с линейной зависимостью между силой и просадкой. Первый случай очень распространен в системах, имеющих зазоры. Здесь масса может беспрепятственно перемещаться внутри зазора, не испытывая действия пружин, но как только она выходит за пределы зазора, сейчас же

одна из пружин начинает сжиматься, подчиняясь при этом линейному закону, действующему лишь с момента соприкосновения тела с пружиной. Во втором случае пружины имеют начальное сжатие, причем их возвращение в ненапряженное состояние предотвращается тонкими шайбами a , упирающимися в выступы b .



- а) пружины с зазорами;
- б) пружины с упорами;
- в) пружины с ограничителями (два комплекта пружин, один из которых с зазорами)

Рисунок 137 – Три комбинации витых пружин с линейными характеристиками

Масса m не будучи связана с шайбами, не может все же перемещаться до тех пор, пока приложенная к ней сила не делается равной начальной сжимающей силе F пружин. Третьим примером могут служить пружины в упругих ограничителях. В данном случае система при малых перемещениях находится под влиянием только одной группы пружин, но затем, вступают в действие другие пружины, делающие таким образом, всю упругую систему много жестче. Вторая группа пружин часто осуществляется в виде упора, который практически можно считать вполне жестким, вследствие чего после удара тела об упор упругая характеристика идет почти вертикально.

Совершенно естественно, что все три случая рисунка 137 имеют свои аналоги в кручении. В частности, сюда относятся пружины, имеющие начальное закручивание (рисунок 137, б). Они широко применяются в соединениях, обеспечивающих известную гибкость на скручивание.

На рисунке 138 изображена пружина в виде консоли, которая, будучи изогнута, ложится на криволинейные жесткие направляющие, вследствие чего свободная длина пружины укорачивается, и пружина становится жестче. По этой причине ее характеристика становится более крутой для возрастающих прогибов. Такие более или менее искривленные характеристики пружин встречаются на практике очень часто. В самом деле, большинство применяющихся пружин имеет прямолинейные характеристики только для малых просядок, после чего они искривляются, образуя тем большие углы наклона, чем больше просядка.

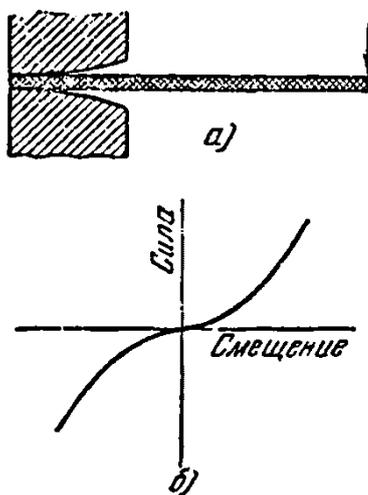
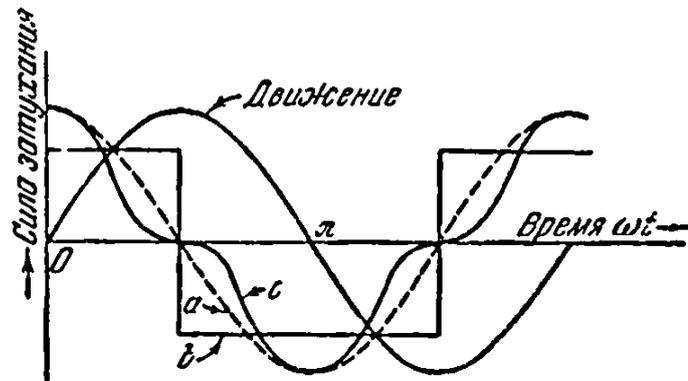


Рисунок 138 – Пружина с постепенно возрастающей жёсткостью

Рассмотрим теперь некоторые виды нелинейного затухания. Линейная сила затухания пропорциональна скорости, что может быть написано в виде $s\dot{x}$. Эта сила известна также под названием силы вязкости, поскольку она встречается в демпферах или амортизаторах с вязкой жидкостью.

Другими типами сопротивления, которые часто встречаются, являются сухое или кулоново трение и аэро- или гидродинамическое сопротивление воздуха или жидкости, объясняющееся турбулентным состоянием среды; эти

силы также вызывают затухание. Первая из них не зависит от величины скорости, но направлена всегда против движения. Аэро- или гидродинамическое сопротивление пропорционально квадрату скорости и направлено также противоположно скорости. На рисунке 139 построены кривые для различных сил, вызывающих затухание, причем за аргумент взято время, а движение предполагается по закону синуса.



- a) сопротивление вязкости $c\dot{x}$ (или линейное);
- b) кулоново трение $\pm F$ (постоянное);
- c) вихревое сопротивление $c\dot{x}^2$ (квадратичное).

Рисунок 139 – Различны типа силы затухания в случае гармонического движения

В практических задачах механики масса обычно бывает величиной постоянной. Однако мы можем также представить себе систему, в которой этот коэффициент меняется с перемещением. Обратимся для этого к рисунку 140, где положим, что поршень является очень легким и что количество воды в цилиндре очень мало, по сравнению с ее количеством в резервуаре. Очевидно, что здесь колеблющейся системой будет поршень с водяным столбом над ним, так как движение остальной части воды в резервуаре во время колебаний очень мало. Но высота водяного столба, а, следовательно, и его масса зависят от перемещения x . В то время как при малых колебаниях поршня массу, участвующую в движении, можно считать постоянной, это уже нельзя полагать для больших движений, вследствие чего мы получаем нелинейную систему с переменным коэффициентом инерции, т. е. с переменной массой.

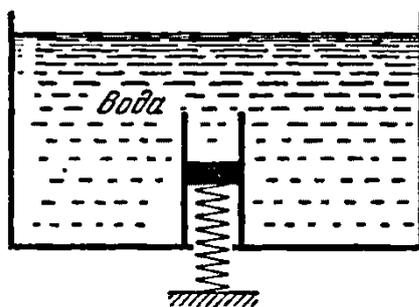


Рисунок 140 – Нелинейная система, масса которой зависит от перемещения

Приведенный пример не имеет практической ценности, а потому для нахождения более важных случаев, где масса зависит от x , мы обратимся к области электричества.

Рассмотрим простой контур на рисунке 141 с индуктивностью L и емкостью C , причем в этот контур может быть включен также генератор переменного тока, но он может и отсутствовать. Катушка содержит сердечник из мягкой стали, который становится магнитно насыщенным при определенном значении силы тока. Это показано на рисунке 142, где при заданной частоте по оси абсцисс отложены силы тока, а по оси ординат — напряжение. Из графика ясно видно, что для больших значений силы тока линейность не имеет места.

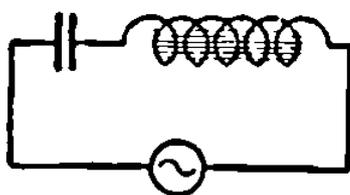


Рисунок 141 – Нелинейный электрический контур с насыщенным сердечником индуктивной катушки

Так как напряжение в индуктивной катушке есть электрический эквивалент механической силы инерции, то мы имеем перед собой случай зависимости массы от перемещения

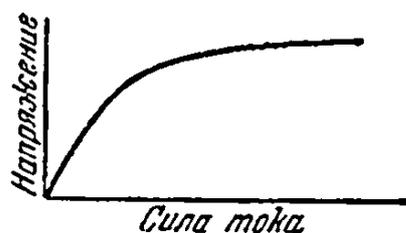


Рисунок 142 – Кривая насыщения индуктивной катушки

5.6 Свободные колебания систем с нелинейными характеристиками

Новое, наиболее существенное обстоятельство, с которым мы встречаемся в свободных колебаниях нелинейных систем, заключается в том, что при нелинейности упругой характеристики собственная частота колебаний уже не является независимой от амплитуды колебаний. В то же время при нелинейности затухания (если только затухание невелико) частота очень мало зависит от амплитуды. Причину этого легко уяснить. Действительно, квадрат собственной частоты в известном смысле есть отношение величины упругой силы к силе инерции, приходящейся на единицу частоты. В линейных колебаниях как упругая сила, так и сила инерции пропорциональны упругому перемещению, вследствие чего отношение этих величин не должно зависеть от перемещения, иначе говоря от деформации. С другой стороны, если упругая сила не пропорциональна перемещению, как в случае нелинейных систем, то собственная частота уже не может оставаться постоянной.

Обращаясь к затуханию, мы прежде всего должны заметить, что сила сопротивления, вызывающая затухание, отличается по фазе от перемещения на 90° , вследствие чего ее влияние на изменение частоты определяется малыми величинами второго порядка малости. Это положение остается справедливым, будет ли затухание линейно или нет. Таким образом, в случае нелинейного затухания амплитуда не влияет существенно на частоту.

Общий метод исследования нелинейных систем состоит в построении графика смещения-скорости, который носит название фазовой диаграммы.

Плоскость координат смещение-скорость, на которой производится это построение, называется фазовой плоскостью. Прежде всего, полезно посмотреть, как этот метод применяется к обычным линейным системам.

Ускорение \ddot{x} может быть представлено в следующем виде:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}. \quad (5.23)$$

Это преобразование позволяет нам выполнить одно интегрирование любого дифференциального уравнения второго порядка свободной системы, как линейной, так и нелинейной, т. е. описываемой линейным или нелинейным дифференциальным уравнением.

Применяя указанный метод к свободным незатухающим колебаниям линейной системы, имеем

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0, & m\dot{x} + kx &= 0, \\ m\dot{x}d\dot{x} + kxdx &= 0, & \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} &= const. \end{aligned}$$

Если мы отобразим этот результат на фазовой диаграмме, то получим семейство концентрических эллипсов, центр которых совпадает с началом координат. С помощью преобразования коэффициентов эти эллипсы целесообразно преобразовать в окружности. В самом деле, мы имеем

$$\frac{\dot{x}^2}{\frac{k}{m}} + x^2 = \frac{2}{k} \cdot const = const,$$

или

$$\left(\frac{\dot{x}}{\omega_c}\right)^2 + x^2 = const.$$

Принимая теперь \dot{x}/ω_c и x за координаты, как это сделано на рисунке 143, мы получаем семейство концентрических окружностей, представляю-

щих собою результат первого интегрирования. Прежде чем приступить ко второму интегрированию, из которого можно получить зависимость

$$x = f(t),$$

мы обратимся к другим случаям, поскольку это второе интегрирование выполняется по существу одинаково для всех систем.

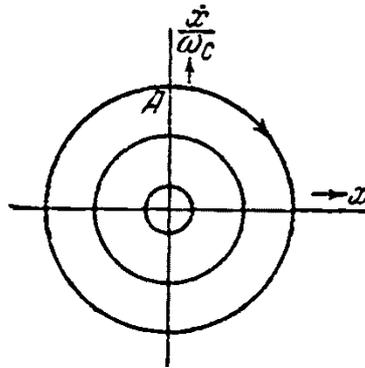


Рисунок 143 – Фазовая диаграмма для линейной незатухающей свободной системы

Итак, рассмотрим сейчас затухающие свободные колебания, для которых имеет место уравнение

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0,$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{c}{m} \frac{\dot{x}}{x} - \frac{k}{m} \frac{x}{\dot{x}}$$

или

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{x}}{\omega_c} \right) = -\frac{c}{m\omega_c} - \frac{x}{\frac{\dot{x}}{\omega_c}}. \quad (5.24)$$

На фазовой диаграмме левая часть этого уравнения определяет собою наклон к оси x кривой, выражающей зависимость величины (\dot{x}/ω_c) от x , тогда как правая часть может быть численно найдена для каждой точки этой диаграммы. Таким образом, написанное уравнение позволяет заполнить всю диаграмму короткими направляющими отрезками во всех точках, через которые должна проходить кривая (рисунок 144). Нанесение этих отрезков упрощает-

ся предварительным построением изоклин, т. е. линий, соединяющих точки диаграммы, имеющие один и тот же угловой коэффициент

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{x}}{\omega_c} \right).$$

Уравнение таких изоклин получается из уравнения (8.24) приравниванием правой части (которая является угловым коэффициентом) постоянной величине. Между прочим, в данном случае мы видим, что изоклины — это прямые, проходящие через начало координат. Для горизонтальной радиальной линии имеем $\dot{x} = 0$, т. е. правая часть уравнения (5.24) обращается в бесконечность и, следовательно, касательные вертикальны. На рисунке 144 направляющие отрезки построены для изоклин: горизонтальных, вертикальных и расположенных под углом 45° по отношению к ним.

Читателю рекомендуется выполнить построение для направлений, соответствующих 225° и $67^\circ,5$. После этого, исходя из какой-либо произвольной точки, можно построить интегральную кривую, следя за наклонами направляющих отрезков от точки к точке.

Посмотрим на рисунок 144, если затухание будет возрастать и перейдет через своё критическое значение. Прежде чем рассматривать этот вопрос, ответим на другой вопрос: имеются ли на рисунке 144 изоклины, на которых направляющие отрезки совпадают с самими изоклинами? Так как наклон радиальной изоклины в точке $(x, \dot{x}/\omega_c)$ определяется угловым коэффициентом $\dot{x}/\omega_c x$, то ответ на последний вопрос можно получить, рассмотрев уравнение

$$\frac{\dot{x}}{\omega_c} = -\frac{c}{m\omega_c} - \frac{x}{\frac{\dot{x}}{\omega_c}}, \quad \left(\frac{\dot{x}}{\omega_c} \right)^2 + \frac{c}{m\omega_c} \left(\frac{\dot{x}}{\omega_c} \right) + 1 = 0,$$

откуда

$$\frac{\dot{x}}{\omega_c} = -\frac{c}{2m\omega_c} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m\omega_c}\right)^2 - 1}.$$

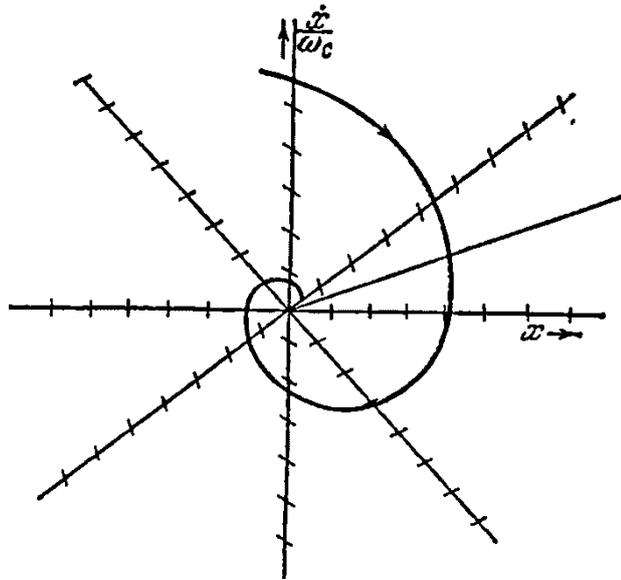


Рисунок 144 – Свободные затухающие колебания при $c/m\omega_c = 0$, т.е. при затухании, равном 5% критического

Отсюда видно, что при докритическом затухании радикал в правой части есть мнимый, а поэтому нет действительных изоклин, которые обладают тем свойством, что они направлены вдоль упоминавшихся отрезков. Однако при $c > 2m\omega_c$, т. е. для закритического сопротивления, радикал есть вещественный, и мы имеем две такие изоклины. Это показано на рисунке 145 для случая, когда $c/2m\omega_c = 1,25$. Здесь же нанесены интегральные кривые. Две особые изоклины сами являются интегральными кривыми. Другие интегральные кривые пересекать их не могут. Они касаются их в начале координат.

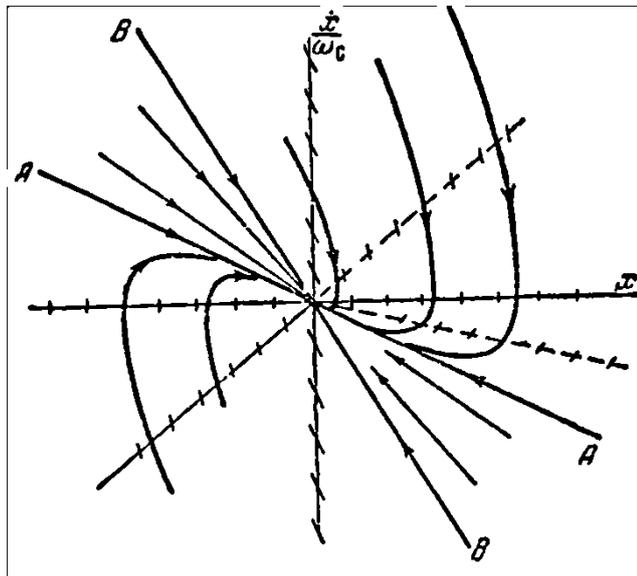


Рисунок 145 – Фазовая диаграмма для линейной системы с электрическим затуханием ($c/c_k = 1,25$).

Фазовые диаграммы на рисунке 144 и 145 могут быть использованы также для случая отрицательного затухания, так как член $c\dot{x}$ не меняет знака при одновременном изменении знаков у c и у \dot{x} . Таким образом, при отрицательном затухании $-c$ нам следует только изменить положительное направление вертикальной оси \dot{x} , что приведет к обращению направления движения по интегральным кривым, в результате чего мы получим раскручивающиеся спирали вместо закручивающихся.

В то же время для линейного отрицательного квазиупругого коэффициента k , например в случае малых отклонений обращенного маятника около его положения неустойчивого равновесия, фазовая диаграмма на рисунке 143 уже неприменима. Применяя обычный метод, находим последовательно

$$m\ddot{x} - kx = 0,$$

$$m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} - kx = 0,$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = +\omega_c^2 \frac{x}{\dot{x}},$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{x}}{\omega_c} \right) = + \frac{x}{\frac{\dot{x}}{\omega_c}}. \quad (5.25)$$

Приравнивая правую часть этого уравнения постоянной величине, найдём уравнения изоклин, которые опять оказываются радиальными прямыми.

Займёмся теперь вопросом об изоклинах, совпадающих с направляющими отрезками, когда

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{x}}{\omega_c} \right) = + \frac{\frac{\dot{x}}{\omega_c}}{x}.$$

Комбинируя это с последним уравнением, получаем

$$\frac{x}{\frac{\dot{x}}{\omega_c}} = \frac{\frac{\dot{x}}{\omega_c}}{x}$$

или

$$\left(\frac{\frac{\dot{x}}{\omega_c}}{x} \right)^2 = 1,$$

откуда

$$\frac{\frac{\dot{x}}{\omega_c}}{x} = \pm 1$$

т.е. два луча под углами $\pm 45^\circ$.

Диаграмма представлена на рисунке 146. Здесь мы имеем две особые изоклины, являющиеся интегральными кривыми. Все прочие интегральные кривые — гиперболы, получаемые интегрированием уравнения (5.25). В самом деле

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{\omega_c^2} = xdx,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{\omega_c}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2 + const,$$

или

$$\left(\frac{\dot{x}}{\omega_c}\right)^2 - x^2 = const,$$

т.е. гиперболы.

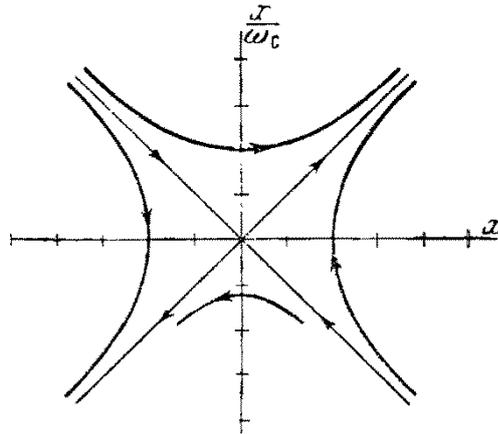


Рисунок 146 – Фазовая диаграмма для линейной незатухающей системы с отрицательным коэффициентом жёсткости

Рисунки 143—146 иллюстрируют изложенный общий метод применительно к простым линейным системам. При этом никаких новых результатов не получено, и обычный метод решения приводит к тем же результатам, но более простым путем. Единственный смысл введения нового метода заключается в том, что он в полной мере может быть распространён и на нелинейные системы. На указанных рисунках в начале координат O невозможно определить по дифференциальному уравнению направление касательной. Поэтому точка O носит название особой точки, которая в отдельных случаях имеет специальные наименования. Так, на рисунке 143 имеем центр, на рисунке 144 – фокус, на рисунке 145 – узел и на рисунке 146 – седло.

Начнем с системы с зазорами, для которой мы сейчас не сможем построить фазовую диаграмму (рисунке 147). Прежде всего строим две точки A_1 и A_2 на расстоянии в половину зазора от начала. Справа от A_2 и слева от A_1 мы имеем простую линейную $(k - m)$ - систему, (т.е. систему с массой m и жёсткостью k). Поэтому мы можем использовать рисунок 143 и построить на рисунке 147 соответствующие полуокружности. В области между A_1 и A_2 имеется зазор. Там на массу не действует ни какая-либо другая сила, вследствие чего масса движется с постоянной скоростью, т. е. вдоль горизонтальной прямой. Комбинируя две полуокружности с двумя горизонтальными прямолинейными отрезками, получим на рисунке 147 замкнутые кривые, изображающие периодическое движение.

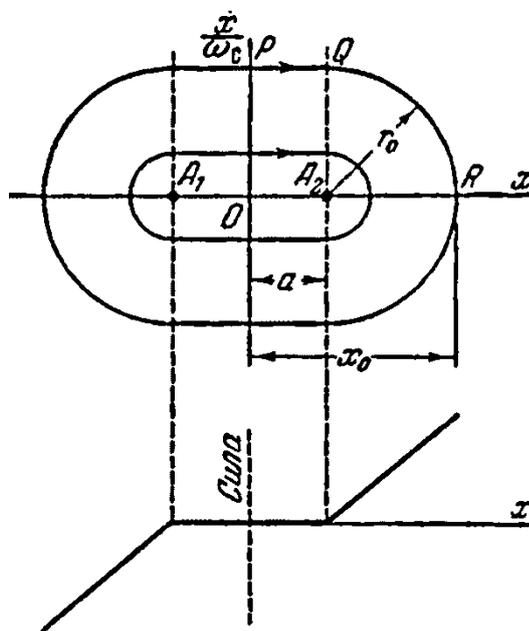


Рисунок 147 – Фазовая диаграмма для движения одной массы m между двумя пружинами k с зазорами a с каждой стороны от среднего положения

Рассмотрим теперь пружины с упорами (схема — рисунок 137,в, фазовая диаграмма — рисунок 148). Когда масса находится справа от центра O , она испытывает действие пружины, которая линейна, но в точке P , где экстраполированная сила должна быть равна нулю. Вследствие этого диаграмма справа от точки O состоит из кривых дуг с центром в точке P . Аналогично слева от точки O мы имеем круговые дуги с центром в точке Q .

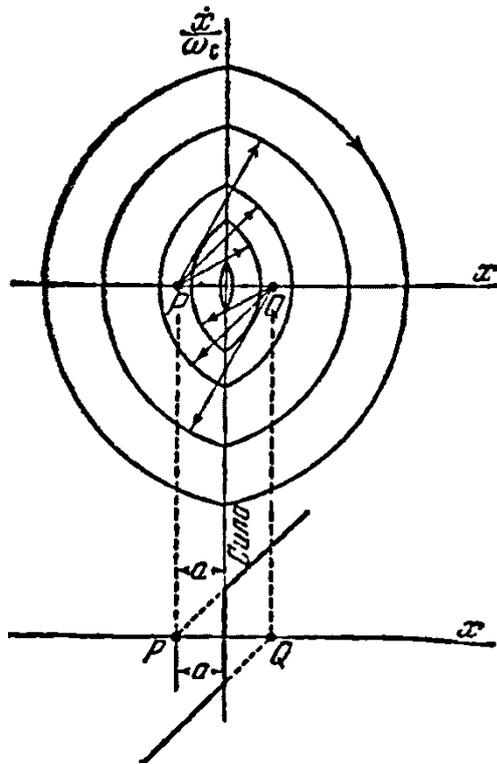


Рисунок 148 – Одна масса, зажата между двумя пружинами с упорами. Каждая пружина имеет предварительное сжатие на величину a

В случае, представленном на рисунке 147 и 149, дополнительная система пружин с жесткостью k_2 вступает в действие на расстоянии a от центра (имеем упругие ограничители при большом k_2).

Рассмотрим здесь области изменения x при x , меньшем чем a , и при x , большем чем a . Если $x < a$, то система строго линейна, и на диаграмме мы имеем концентрические окружности. Здесь должны быть именно окружности. Это следует из того, что по оси ординат мы откладываем

$$\frac{\dot{x}}{\omega_{n_1}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{k_1}{m}}},$$

где k_1 есть коэффициент жёсткости именно для тех пружин, которые находятся в действии.

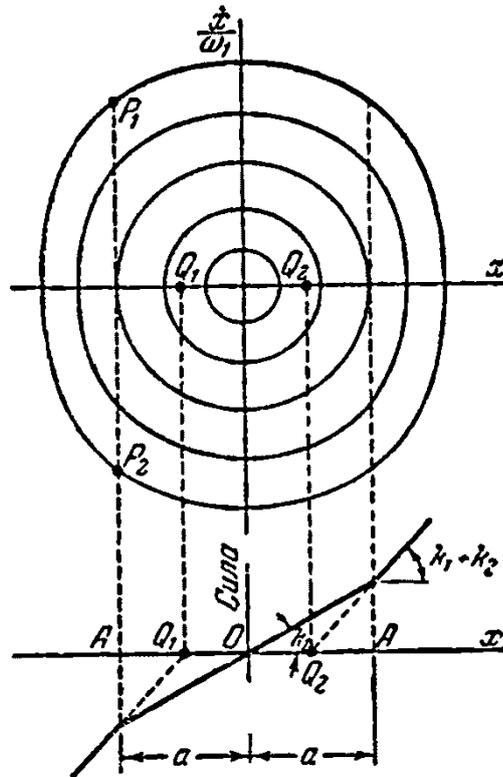


Рисунок 149 – Система с упругими ограничителями

Для областей вне интервала $-a < x < a$ мы опять имели бы окружности, если бы по ординатам были отложены величины

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m}}}$$

Но так как в действительности ординаты отличаются от этой величины на постоянный множитель, то кривые должны иметь форму вытянутых окружностей, т.е. эллипсов, имеющих центры в точках Q , являющихся центрами упругих сил внешней области. Эллипс, проходящий через точки P_1 и P_2 , обладает тем свойством, что в этих точках он имеет общие касательные с соприкасающимися с ним дугами окружности внутренней области.

В качестве последнего примера рассмотрим большие движения (перекрывающие 360°) математического маятника, имеющего два положения равновесия: одно устойчивое в нижней части (при $\varphi = \pi$ или 180°). Уравнение здесь нелинейное:

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

или

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -\frac{g \sin \varphi}{l \dot{\varphi}}.$$

Уравнение изоклин имеет вид

$$-\frac{g \sin \varphi}{l \dot{\varphi}} = \text{const}$$

или

$$\dot{\varphi} = C \sin \varphi.$$

Имеем синусоиды, изображённые на рисунке 150.

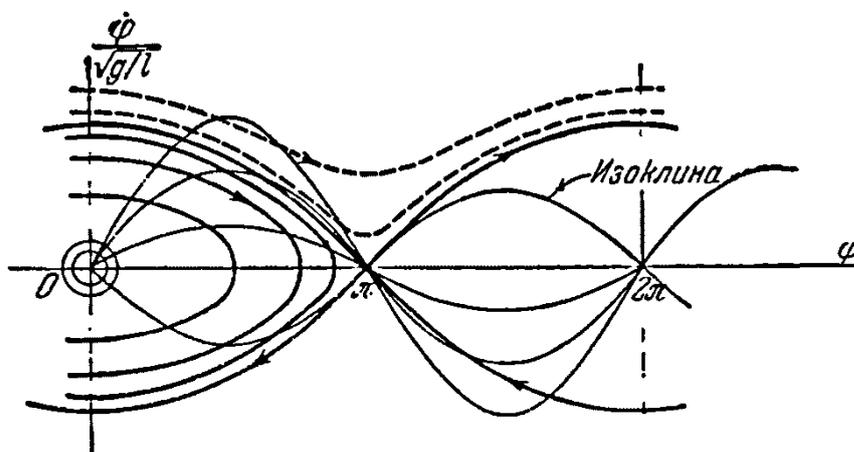


Рисунок 150 – Диаграмма зависимости угловой скорости от угла для больших движений математического маятника

Полагая в качестве ординат величины

$$\frac{\dot{\varphi}}{\omega_c} = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

изучим детали всей диаграммы для малых областей в окрестностях $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi \dots$, а также $\varphi = \pi, 3\pi, \dots$. При φ близком к нулю, мы имеем малые колебания линейного маятника, т. е. маятника, рассматриваемого как ли-

пе иная система (представленные на рисунке 143). При φ , близком к π , имеем движения линейного обращенного маятника с отрицательным квазиупругим коэффициентом (рисунок 146).

Таким образом, интегральные кривые вблизи $\varphi = 0$ являются окружностями, а вблизи $\varphi = \pi$ — равнобочными гиперболами. Рассматривая различные изоклины синусоид, исходящих из точки $\varphi = 0$, мы сейчас же замечаем характер изменения направлений касательных для интегральных кривых, начиная с малой окружности в окрестности $\varphi = 0$. Синусоиды с начальным наклоном в 45° приобретают большое значение для точки $\varphi = \pi$, поскольку здесь направление изоклины совпадает с направлением самой интегральной кривой. Если построить эти интегральные кривые (т.е. проходящие через точку $\varphi = \pi$ и аналогичные), то вся плоскость окажется разделенной на области. Кривые, оказавшиеся внутри таких разделяющих кривых, являются замкнутыми кривыми, окружающими точки $\varphi = 0, 2\pi$ и т. д. и приближающимися по форме к окружности, находящейся в непосредственной близости к точке $\varphi = 0$. Внешние кривые являются незамкнутыми волнообразными линиями, части которых и коло точек $\varphi = \pi$ и т. д. приближаются по форме к равнобочным гиперболам. Перемещение по всем кривым направлено вправо при положительных значениях $\dot{\varphi}$ и влево — при отрицательных. Речь идёт о перемещении так называемой изображённой точки, координаты которой равны φ и $\dot{\varphi}$, или же x и \dot{x} . Траектория этой точки называется фазовой траекторией.

С помощью общего метода изоклин на плоскости $x - \dot{x}$ мы всегда можем построить фазовую диаграмму для любого случая нелинейных колебаний системы с одной степенью свободы. Нам остается теперь, пользуясь этой диаграммой, выполнить второе интегрирование. Рассматривая элемент кривой, соответствующий приращению абсциссы dx (рисунок 151), мы имеем:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ или } dt = \frac{dx}{\dot{x}}. \quad (5.26)$$

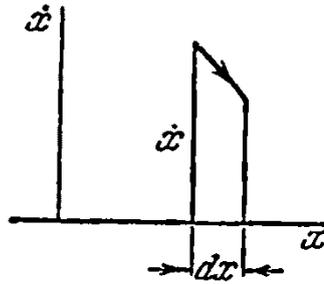


Рисунок 151

За один период незатухающего колебания соответствующая кривая (фазовая траектория) замыкается, а поэтому, перемещаясь один раз по такой замкнутой кривой, мы имеем для полного периода колебания

$$T = \oint \frac{dx}{\dot{x}}. \quad (5.26a)$$

Этот интеграл всегда может быть вычислен, хотя для ярко выраженных нелинейных случаев это обычно требует применения численных методов по отдельным участкам пути интегрирования. Для симметричных систем время, затрачиваемое на каждую четверть полного цикла движения, одно и то же, а поэтому интеграл упрощается, и для симметричной упругой силы мы имеем:

$$T = 4 \int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\dot{x}}. \quad (5.27)$$

В качестве примера рассмотрим сначала случай линейной системы без затухания (рисунок 143). В этом случае

$$(\omega_c \dot{x})^2 + x^2 = const = x_{max}^2,$$

или

$$\dot{x} = \frac{1}{\omega_c} \sqrt{x_{max}^2 - x^2}.$$

Подставляя это значение \dot{x} в уравнение (5.27), имеем

$$\begin{aligned}
T &= \frac{4}{\omega_c} \int_0^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{x_m^2 - x^2}} = \frac{4}{\omega_c} \int_0^{x_m} \frac{d \frac{x}{x_m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_m}\right)^2}} = \frac{4}{\omega_c} \int_0^{x_m} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \\
&= \frac{4}{\omega_c} \arcsin y \Big|_0^1 = \frac{4}{\omega_c} \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\omega_c},
\end{aligned}$$

т.е. уже известный результат.

В качестве второго примера возьмем систему с зазорами (рисунок 147). Интеграл (5.27) распадается на две части, первая из которых берется вдоль прямолинейного отрезка от P до Q , а вторая — вдоль четверти окружности от Q до R . Между P и Q скорость постоянна, $\dot{x} = \omega_c r_0$, где r_0 есть радиус рассматриваемой окружности. Таким образом, время, затрачиваемое для перехода из P в Q , согласно уравнению (5.26), равно

$$T_{PQ} = \int \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{a}{\omega_c r_0} = \frac{a}{x_0 - a} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Время, требуемое для перехода из Q в R , равно четверти периода свободных линейных колебаний. Однако формально нам следует опять обратиться к помощи уравнения (5.26), для чего предварительно находим

$$\left(\frac{\dot{x}}{\omega_c}\right)^2 + (x - a)^2 = \text{const} = (x_0 - a)^2 = r_0^2,$$

$$\dot{x} = \omega_c \sqrt{r_0^2 - (x - a)^2}.$$

Тогда

$$T_{QR} = \frac{1}{\omega_c} \int_0^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{r_0^2 - (x - a)^2}} = \frac{1}{\omega_c} \int_0^{x_m} \frac{d(x - a)}{\sqrt{r_0^2 - (x - a)^2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\omega_c} \int_0^{x_m} \frac{dy}{\sqrt{r_0^2 - y^2}} = \frac{1}{\omega_c} \int_0^{x_m} \frac{d\frac{y}{r_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_0}\right)^2}} = \\
&= \frac{1}{\omega_c} \int_0^{x_m} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{\omega_c} \arcsin z \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2\omega_c} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}.
\end{aligned}$$

Во время перехода от P к R (т.е. четверть периода) равно сумме двух предыдущих выражений

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \frac{a}{x_0 - a}\right)$$

и собственная частота ω колебаний системы с зазорами равна

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{2}{\pi} \frac{a}{x_0 - a}\right). \quad (5.28)$$

Отсюда видно, что частота зависит от амплитуды x_0 . Она приводится к обычному значению $\sqrt{k/m}$ в случае, когда зазор a обращается в нуль (рисунок 152).

Если нелинейность имеет место вследствие затухания в системе, то амплитуда не влияет на собственную частоту, которая остаётся приблизительно равной $\sqrt{k/m}$. Единственно интересным вопросом здесь является быстрота убывания амплитуды. Точнее решение такой задачи может быть получено методом графического или численного интегрирования уравнения движения по элементарным интервалам. Однако эта процедура чрезвычайно трудоемкая. Точное простое решение существует лишь для простого случая кулонова сухого трения. Достаточно хорошее для практических целей приближение получается посредством вычисления рассеяния энергии, вследствие действия сил сопротивления, и сравнения этой энергии с потерей кинетическом энер-

гии колебательного движения. Чтобы иметь возможность вычислить эту потерю, мы должны знать форму движения, которая, очевидно, теперь уже отлична от синусоидальной и приближается к ней лишь для малых значений затухания. Это сходство тем больше, чем меньше затухание, так как в случае гармонического движения большие силы упругости и инерции изменяются по гармоническому закону, и лишь малая сила затухания вызывает отклонение движения от гармонического. Итак, допустим, что движение гармоническое:

$$x = x_0 \sin \omega t.$$

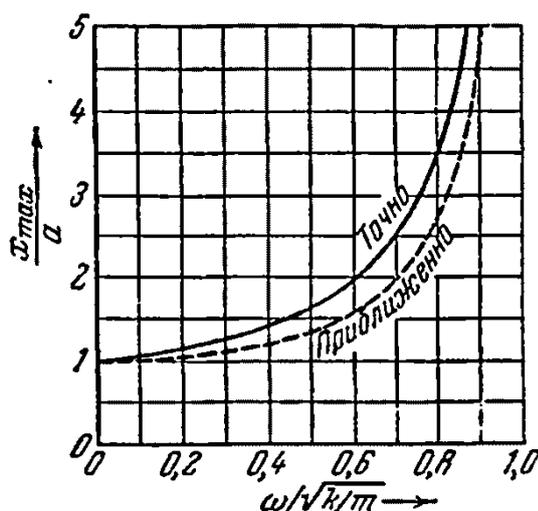


Рисунок 152 – График зависимости собственной частоты амплитуды колебаний системы с зазорами

Если сила затухания изображается функцией $f(x)$, то её работа за один период представится в виде

$$W = \int_0^T f(\dot{x}) dx = \int_0^T f(\dot{x}) \dot{x} dt = x_0 \int_0^{2\pi} f(\dot{x}) \cos \omega t d(\omega t).$$

Потеря кинетической энергии за тот же промежуток времени равна

$$\frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (x_0 - \Delta x)^2 =$$

$$= m\omega^2 x_0 \Delta x - \frac{1}{2} m\omega^2 (\Delta x)^2 \approx m\omega^2 x_0 \Delta x$$

Приравнивая друг другу написанные выражения, мы найдём величину убывания амплитуды за один период:

$$\Delta x = \frac{1}{m\omega^2} \int_0^{2\pi} f(\dot{x}) \cos \omega t d(\omega t) \quad (5.29)$$

Этот интеграл всегда может быть вычислен, и если не точно, то, по крайней мере, приближенно (например, графическим путем).

В качестве примера рассмотрим затухание вследствие кулонова трения, когда $f(\dot{x}) = \pm F$. Скорость и сила сопротивления для этого случая показаны на рисунке 153. Интеграл в уравнении (5.29), как видно, состоит из четырех равных частей:

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cos(\omega t) d(\omega t) = 4F$$

и тогда величины убывания амплитуды за каждый период равняется

$$\Delta x = \frac{4F}{m\omega^2} = 4 \frac{F}{k} \frac{k}{m} \frac{1}{\omega^2} = 4 \frac{F}{k}, \quad (5.30)$$

иначе говоря, она равна учетверенной статической деформации пружины под действием силы трения. Полученный результат замечателен тем, что амплитуды убывают все время па одну и ту же величину, т. е. подчиняются закону арифметической прогрессии, тогда как в случае сопротивления вязкости амплитуды убывают в геометрической прогрессии. Между прочим, интересно отметить, что результат, представленный формулой (5.30), совпадает с упомянутым выше точным решением.

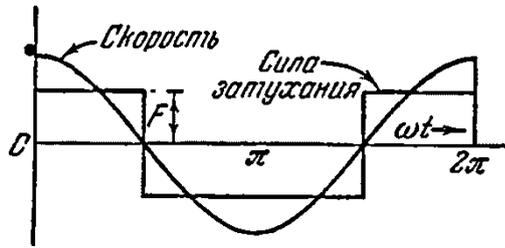


Рисунок 153 – Сила кулонова трения

5.7 Релаксационные колебания

В линейной колебательной системе с отрицательным затуханием теоретически должны получаться колебания бесконечной амплитуды. Однако с физической точки зрения, очевидно, что это невозможно, и, в действительности, в любой системе при достаточно больших амплитудах затухание опять становится положительным, тем самым ограничивая движение.

Хотя действительное соотношение между коэффициентом затухания и амплитудой изменяется от случая к случаю, все же для общего уяснения дела полезно задаться простейшим математическим выражением силы затухания, из которого получаем отрицательное значение этой силы для малых амплитуд x и положительное для больших. Пусть такое выражение имеет вид

$$\text{сила затухания} = -(C_1 - C_2 x^2)\dot{x}. \quad (5.31)$$

Здесь коэффициент затухания есть функция от x , что показано графически на рисунке 154. Легко видеть, что затухание обращается в нуль при отклонении

$$x = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}.$$

Дифференциальное уравнение для системы с одной степенью свободы, имеющей нелинейное затухание такого типа, есть

$$m\ddot{x} - (C_1 - C_2 x^2)\dot{x} + kx = 0. \quad (5.32)$$

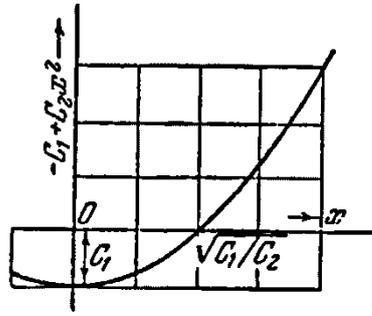


Рисунок 154 – Простейшее математическое выражение для коэффициента нелинейного затухания, который отрицателен при малых амплитудах и становится положительным при больших амплитудах

Так как сейчас нам предстоит дать общее исследование этого уравнения, то чрезвычайно важно упростить его насколько возможно, а для этой цели следует уменьшить число входящих в него коэффициентов, которых пока имеется четыре: m , C_1 , C_2 и k . Для этого мы разделим уравнение на m и введём обозначение $k/m = \omega_n^2$. Тогда получим

$$\ddot{x} - \left(\frac{C_1}{m} - \frac{C_2}{m} x^2 \right) \dot{x} + \omega_n^2 x = 0. \quad (5.33)$$

Далее, из оставшихся трёх постоянных C_1/m , C_2/m , ω_n^2 две могут быть поглощены переменными, если мы перейдем от прежних переменных x и к новым безразмерным. Для этой цели рассмотрим, прежде всего, время t , измеряемое в секундах. Вместо пользования этой общепринятой единицей, мы будем теперь измерять время в новых единицах, связанных с нашей системой. Пусть, например, такой единицей будет $T/2\pi$. Это значит, что для медленно колеблющихся систем новая единица получается большой, в то время как для систем, совершающих быстрые колебания, эта единица мала. Итак, мы будем предпочтительно измерять время не в секундах, а в периодах, деленных на 2π . Пусть будет t' — новая величина времени (измеренного в $T/2\pi$), тогда как прежняя величина есть t (в секундах). В таком случае имеем соотношение

$$t' = \frac{t}{T} = \omega_c t.$$

Вследствие такой замены производные примут вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt'^2} \frac{t'^2}{t^2} = \omega_c^2 \frac{d^2 x}{dt'^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \omega_c \frac{dx}{dt'}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (5.33) и деля его на ω_n^2 , имеем

$$\ddot{x} - \frac{C_1}{m\omega_c} \left(1 - \frac{C_2}{C_1} x^2\right) \dot{x} + x = 0,$$

где точки сверху обозначают уже дифференцирование по безразмерному t' .

Теперь у нас остаются только два параметра: $C_1/m\omega_c$ и C_1/C_2 . Перемещение x пока имеет размерность длины, а чтобы сделать его безразмерным, нам необходимо ввести новую единицу перемещения, опять связанную с уравнением. Подходящая единица указана на рис. 8.32. Это есть амплитуда $\sqrt{C_1/C_2}$, при которой силы положительного и отрицательного затухания уравновешиваются. Таким образом, новым «безразмерным перемещением» будет служить величина

$$y = \frac{x}{\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}},$$

вследствие чего дифференциальное уравнение принимает вид

$$\ddot{y} - \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = 0. \quad (5.34)$$

Итак, уравнение, наконец, приведено к одному параметру $\varepsilon = C_1/m\omega_n$, который имеет важное физическое значение, а именно, в случае гармонического движения это параметр представляет собою отношение наибольшей силы отрицательного затухания к наибольшей упругой силе, т.е.

$$\frac{C_1}{m\omega_c} = \varepsilon = \frac{\text{внешняя сила}}{\text{сила упругости}}. \quad (5.35)$$

Это положение легко может быть проверено. Пусть $x = x_0 \sin \omega_c t$. Отсюда $\dot{x} = x_0 \omega_c \sin \omega_c t$. На основании уравнения (5.31) наибольшая сила отрицательного затухания имеет место в середине размаха (при $x = 0$) и равна $C_1 \dot{x}_{max} = C_1 x_0 \omega_c$. С другой стороны, наибольшая сила есть $kx_{max} = kx_0 = \omega_c^2 m x_0$. Итак, высказанное утверждение, выражаемое уравнением (5.35), доказано.

Во всех случаях, рассмотренных нами до сего времени, приложенная к системе сила, вызывающая отрицательное затухание, была много меньше упругой силы, иначе говоря, величина ε была очень мала ($\varepsilon \ll 1$). При этом подразумевается, что движение происходит по гармоническому закону с собственной частотой ω_c . Конечное значение амплитуды, до которой должно происходить нарастание колебаний, может быть найдено из энергетических соотношений. Если амплитуды меньше предельной, то сила затухания $F = \varepsilon(1 - y^2)\dot{y}$ увеличивает энергию системы, если же амплитуды больше этой предельной величины, то затухание вызывает рассеяние энергии. Итак, для конечной амплитуды мы имеем за весь период

$$0 = \int F dy = \int_0^{2\pi} F \dot{y} dt = \int_0^{2\pi} \varepsilon(1 - y^2)\dot{y}^2 dt.$$

Так как движение предполагается гармоническим:

$$y = y_0 \sin \omega_c t = y_0 \sin t,$$

то

$$0 = \varepsilon \int_0^{2\pi} (1 - y_0^2 \sin^2 t) y_0^2 \cos^2 t dt,$$

или

$$y_0^2 = \frac{\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{4}} = 4.$$

Таким образом, для малых значений параметра ε амплитуда колебаний x есть

$$x_0 = 2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \quad (5.36)$$

т. е. эта амплитуда вдвое больше той, при которой сила затухания обращается в нуль. Из рисунка 154 мы видим, что полученный результат является вполне правдоподобным. В самом деле, в средней части размахов система поглощает энергию вследствие действия отрицательного затухания, а затем, вблизи концов, где затухание уже положительно, рассеивает ее. Таким образом, мы имеем своего рода нейтрализацию энергии.

До сих пор введение дифференциального уравнения (5.32) или (5.34) не дало нам ничего нового. Эти уравнения приобретают важное значение, главным образом, в том случае, когда приложенная извне сила, вызывающая отрицательное затухание, велика по сравнению с упругой силой, т. е. $\varepsilon \gg 1$.

Тогда в уравнении (5.34) наиболее важным из трех членов левой части является средний нелинейный, а поэтому предположение о гармоническом характере движения, вполне оправдываемое при малом среднем члене, сейчас делается незаконным. Следовательно, мы должны ожидать значительного искажения движения, содержащего теперь большое число гармоник высших порядков, а также надо ожидать и отклонения частоты от ω_c .

Применяя к уравнению (5.34) общий метод мы приходим к уравнению

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = \varepsilon(1 - y^2) - \frac{y}{\dot{y}}, \quad (5.37)$$

которое позволяет нам заполнить фазовую диаграмму в координатах y и \dot{y} короткими направляющими отрезками, построенными в различных точках. Имея такое полное поле касательных, мы можем получить решение, отправляясь от произвольной точки плоскости (соответствующей произвольным начальным значениям перемещения y и скорости \dot{y}) и строя кривую по касательным. Рисунок 155 (построенный для $\varepsilon = 10$) показывает, например, что, выходя из точки, где $\dot{y} = 15$ и $y = -2$, кривая идет сначала вниз, затем поворачивает вверх, потом опускается опять вниз и после этого образует непрерывную замкнутую фигуру. Таким же образом видно, что, отправляясь от положения покоя (т. е. от начала координат), мы, по истечении некоторого короткого времени движения, достигаем опять той же самой замкнутой кривой. Обычное установившееся гармоническое колебание отобразилось бы на этой диаграмме в виде эллипса, откуда видно, что при $\varepsilon = 10$ движение сильно отличается от гармонического.

Теперь мы можем преобразовать диаграмму на рисунке 155 в соответствующую ей диаграмму, которая представляла бы соотношение $y = f(t)$ как это показано на рисунке 156. Абсцисса любой точки кривой на рисунке 155 соответствует ординате кривой на рисунке 156, тогда как ордината той же точки на рисунке 155 определяет наклон кривой на рисунке 156. Таким образом, переход от рисунка 155 к рисунку 156 совершается посредством второго графического интегрирования.

Наши ожидания относительно природы движения вполне подтверждаются окончательным результатом, представленным графически на рисунке 156. Как видим, движение значительно отличается от гармонического. Период равен не 2π единицам «нового» времени (каждая единица равняется $T/2\pi$), а 2ε таких единиц, или $2\varepsilon \cdot (T/2\pi)$ сек. Отсюда, если принять во внимание соотношение (5.35), то следует, что

$$\text{период} = \frac{2\varepsilon}{\omega} = \frac{2C_1}{m\omega^2} = 2 \frac{C_1}{k} \text{ сек.}, \quad (5.38)$$

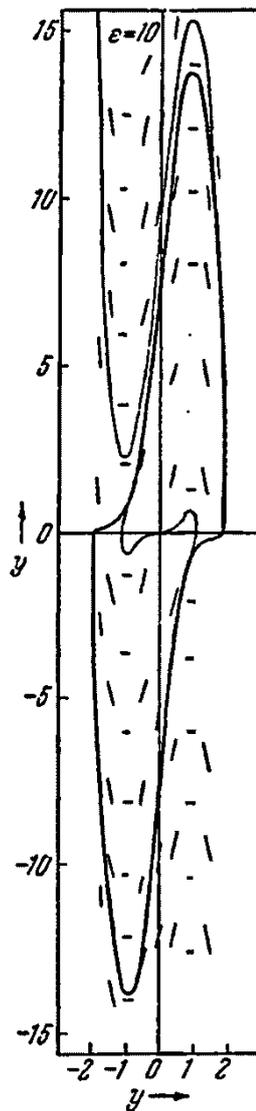


Рисунок 155 – Первое интегрирование уравнения (5.34) для релаксационных колебаний в случае $\varepsilon = 10$

т. е. период оказывается уже не зависящим от отношения массы к коэффициенту жесткости, а зависит от отношения коэффициента отрицательного затухания к коэффициенту жесткости. Выражение (5.38) равно удвоенному времени релаксации системы с положительным коэффициентом C_1 . По этой причине колебания такого типа, как представлено на рисунке 5.34, оказываются релаксационными колебаниями.

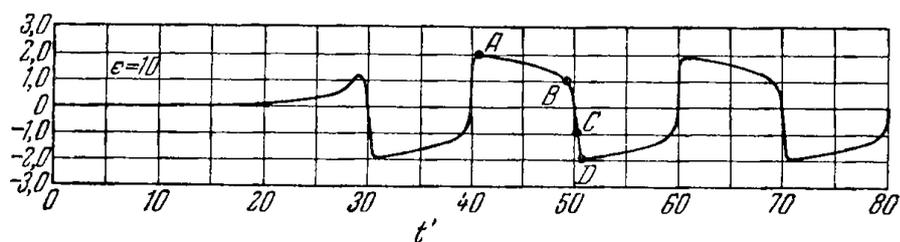


Рисунок 156 – Типичная форма релаксационных колебаний, полученная графическим интегрированием кривой рисунке 155

Для лучшего уяснения результата, выражаемого формулой (5.38), а также для уяснения общей формы колебаний, представленной на рисунке 5.34, полезно обратиться к следующему физическому анализу явления.

При $\varepsilon = 10$ действие затухания велико по сравнению с упругим действием пружины. Проследим за движением по рисунку 156, отправляясь от точки A , где отклонение $x = 2\sqrt{C_1/C_2}$. На основании рисунка 154, коэффициент затухания в точке A положительный и остаётся положительным до тех пор, пока отклонение не уменьшится до половинного своего значения (точка B). Между точками A и B скорость должна быть очень мала, так как сравнительно небольшой упругой силе противодействует сила затухания, коэффициент которой велик. Влияние инерции за это время, по-видимому, сводится к нулю. В точке B затухание меняет знак, становясь отрицательным и притом большим, вследствие чего масса перебрасывается с большой скоростью через точку C , где сила затухания опять меняет знак. Между точками B и C сила отрицательного затухания, приложенная к массе, должна совершать работу и, кроме того, должна давать телу достаточно большое количество движения. Это количество движения поглощается положительной силой затухания, начинающей действовать от точки C до тех пор, пока масса снова не остановится в точке D . Вполне естественно, что отклонение точки D приближенно может быть представлено, как

$$x = 2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

что следует из равенства (5.36), выведенного для случая гармонического движения.

Так как для перемещения точки из B и D время почти не затрачивается, то мы можем вычислить период, удвоив время движения от A до B . Полученный при этом ответ будет несколько мал.

Стремясь упростить весь расчёт, мы усматриваем из рисунка 154, что коэффициент затухания между $x = \sqrt{C_1/C_2}$ и $x = 2\sqrt{C_1/C_2}$ может быть удовлетворительно определён линейным соотношением:

$$\text{коэффициент затухания} = -3C_1 + \frac{3C_1}{\sqrt{C_2}}x,$$

$$\text{сила затухания} = \left(-3C_1 + \frac{3C_1x}{\sqrt{C_2}} \right) \dot{x}.$$

Этой силе противодействует только упругая сила $-kx$. Таким образом, дифференциальное уравнение такого медленного или релаксационного движения между точками A и B примет вид

$$\left(-3C_1 + \frac{3C_1x}{\sqrt{C_2}} \right) \frac{dx}{dt} = -kx,$$

или

$$\frac{3C_1}{k} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{C_2}} \right) dx = -dt.$$

При интегрировании этого уравнения мы должны иметь в виду, что при изменении времени t от 0 до $T/2$ (полпериода) величина x изменяется от $2\sqrt{C_1/C_2}$ до $\sqrt{C_1/C_2}$, а поэтому

$$\frac{3C_1}{k} \left(-\ln x + \frac{x}{\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}} \right) \Bigg|_{2\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}}^{\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}} = -t \Bigg|_0^{\frac{T}{2}}.$$

После подстановки пределов находим

$$\frac{3C_1}{k} (-\ln 2 + 1) = \frac{T}{2},$$

или

$$T = 6(1 - \ln 2) \frac{C_1}{k} = 1,84 \frac{C_1}{k}.$$

Если принять во внимание, что для движения от B до D все же потребуется некоторое время, то, как видно, равенство (5.38) подтверждается.

Соответствующие результаты графического интегрирования для более обычного случая, когда, например, $\varepsilon = 0,1$, показаны на рисунке 157 и 158.

С релаксационными колебаниями часто приходится встречаться в радиотехнике. За подробностями отсылаем читателя к оригинальным работам Ван-дер-Поля (Van der Pol), где дано большое число практических приложений в этой области. Что касается машиностроения, то здесь подобного рода явления имеют меньшее значение.

Рассмотрим случай, лежащий на границе между механикой и электротехникой, а именно, случай периодических изменений скорости постоянного тока с независимым возбуждением, питаемого серийно-генератором постоянного тока, вращающимся с постоянной скоростью (рисунок 159).

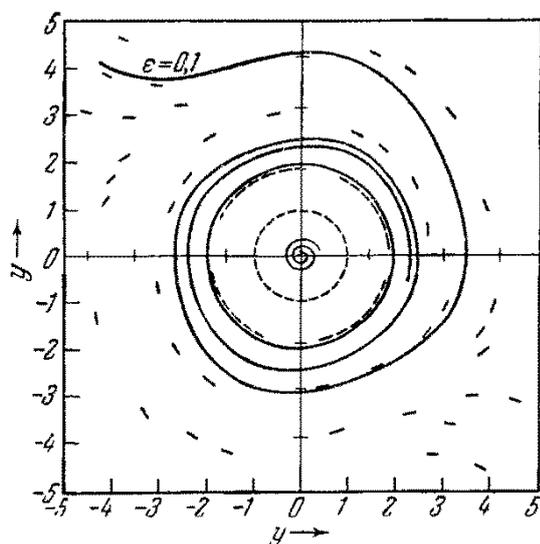


Рисунок 157 – Первое интегрирование уравнения (5.34) в случае малой силы затухания, когда $\varepsilon = 0,1$

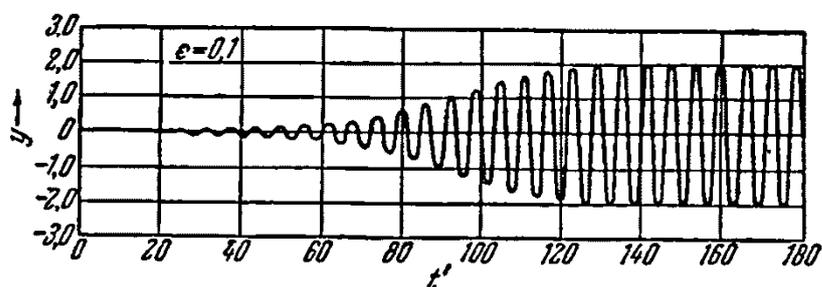


Рисунок 158 – Второе интегрирование

Напряжение тока, получаемое в равномерно вращающемся генераторе, пропорционально напряжению его магнитного поля. Если бы не было магнитного насыщения, то напряжение поля было бы пропорционально силе тока i , создающего поле, а в серии-машинах эта сила тока такова же, как и в магистрали. Влияние насыщения сказывается в понижении интенсивности роста напряжения поля, и характеристика генератора (рисунок 160) может быть приближённо выражена соотношением

$$E_g = C_1 i - C_2 i^3.$$

Это напряжение преодолевает, во-первых, индукцию обмоток своего же поля ($L di/dt$), во-вторых, сопротивление (Ri) цепи и, в-третьих, реакцию мотора. Мотор имеет постоянное магнитное поле и переменную угловую скорость ω . Его напряжение пропорционально скорости, т.е. равно $C_3 \omega$.

Насыщение не даёт здесь никакого эффекта, так как поле поддерживается постоянным. Тогда «уравнение равновесия напряжений» примет вид

$$C_1 i - C_2 i^3 = C_3 \omega + L \frac{di}{dt} + Ri \quad (5.39)$$

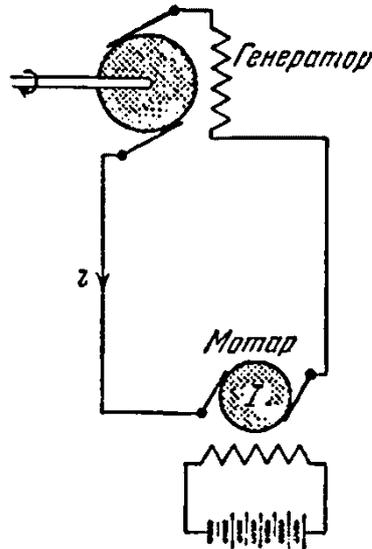


Рисунок 159 – Мотор с независимым возбуждением, приводимый в движение сериес-генератором, имеет периодические изменения скорости, соответствующие кривой на рисунке 156

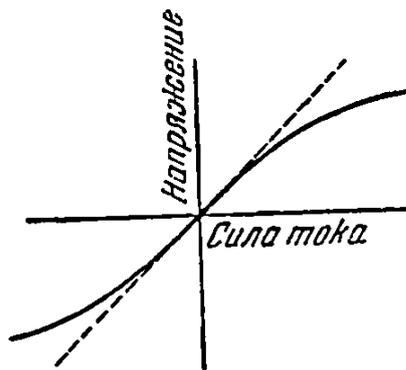


Рисунок 160 – Характеристика сериес-генератора, вращающегося с постоянной скоростью

Другое соотношение между i и ω можно получить на основании тех соображений, что энергия, поглощаемая мотором за одну секунду, определяется произведением его напряжения $C_3 \omega$ на силу тока i . Коль скоро этот мотор не имеет нагрузки, полученная им энергия идет на ускорение вращающихся ча-

стей, момент инерции которых обозначим через I . Кинетическая энергия мотора равна $\frac{1}{2}I\omega^2$, а тогда

$$C_3\omega i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = I\omega \frac{d\omega}{dt},$$

или

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{C_3 i}{I}. \quad (5.40)$$

Из уравнения (5.39) мы можем теперь исключить угловую скорость, для чего его надо продифференцировать по времени и в полученный результат подставить выражение (5.40):

$$C_1 \frac{di}{dt} - 3C_2 i^2 \frac{di}{dt} = C_3 \frac{d\omega}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt},$$

или

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} - (C_1 - R - 3C_2 i^2) \frac{di}{dt} + \frac{C_3^2}{I} i = 0.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (5.32). Кроме того, величины $C_1 - R$, C_3 и I в моторах обычно таковы, что параметр

$$\varepsilon = \frac{C_1 - R}{C_3} \sqrt{\frac{I}{L}}$$

значительно больше единицы. В таком случае мы получаем силу тока i , периодически изменяющуюся в соответствии с графиком на рисунке 156, а тогда, согласно уравнению (5.40), угловая скорость ω должна давать также периодические изменения. На основании уравнения (5.38) период таких изменений равен

$$T = 2 \frac{C_1 - R}{C_3^2} I.$$

Отсюда видно, что он пропорционален моменту инерции мотора. Если бы указанные колебания были гармоническими, то их период был бы пропорционален квадратному корню из момента инерции.

5.8 Вынужденные колебания при нелинейной восстанавливающей силе

Здесь мы ставим задачу о колебании незатухающей системы с криволинейной упругой характеристикой под действием гармонической возмущающей силы. Уравнение такого движения имеет вид

$$m\ddot{x} + f(x) = P_0 \sin \omega t. \quad (5.41)$$

Коль скоро точное решение этой задачи существует лишь в случае простейшей характеристики типа рисунка 137, б, и притом оно слишком сложно, то это решение почти лишено практической ценности. Сейчас мы имеем в виду дать приближенное решение, опираясь на допущение, что движение $x = f(t)$ имеет синусоидальный характер и происходит с частотой, равной частоте изменения возмущающей силы. Очевидно, что это предположение не вполне верно, причем о степени его точности можно судить только по величине отклонения действительного перемещения от перемещения, получающегося на основании указанного допущения. Итак, положим,

$$x = x_0 \cos \omega t. \quad (5.42)$$

Сила инерции $-m\ddot{x}$ равна $mx_0\omega^2 \cos \omega t$, причем эта сила достигает своего наибольшего значения $mx_0\omega^2$ в тот момент, когда достигают наибольшего, по абсолютной величине, значения как внешняя, так и восстанавливающая силы. Максимальное значение первой из них равно P_0 , а второй $f(x_0)$. Уравнение (5.41) эквивалентно условию равновесия этих трех сил в произвольный момент времени в процессе негармонического движения. Удовлетворим этому условию в случае гармонического движения (что можно сделать соответствующим выбором амплитуды x_0) для того момента времени, когда $x = x_0$. Принимая во внимание знаки, мы можем написать

$$-mx_0\omega^2 + f(x_0) = P_0,$$

или

$$f(x_0) = P_0 + mx_0\omega^2. \quad (5.43)$$

В тот момент, когда $x = 0$ (в середине размаха), все три силы обращаются в нуль, вследствие чего условия равновесия опять выполняются. В случае, когда $f(x)$ равняется kx все три члена уравнения (5.41) оказываются пропорциональными $\sin \omega t$, а поэтому из этого уравнения делением на $\sin \omega t$ получаем уравнение (5.43), где $f(x_0) = kx_0$ и тогда условие равновесия должно удовлетворяться при всех значениях x между 0 и x_0 . Однако, если $f(x) \neq kx$, то это уже не будет верно, и равновесие нарушится в большинстве точек между 0 и x_0 . Итак, все, что можно достичь при данных обстоятельствах, это — удовлетворить условию равновесия в двух точках $x = 0$ и $x = x_0$. Тогда амплитуду вынужденных колебаний можно приближенно найти из алгебраического уравнения (5.43),

Наиболее удобно и наглядно все это выполнить графически. Будем откладывать по оси абсцисс (рисунок 161) амплитуды x_0 , а по оси ординат — силы. Левая часть уравнения (5.43) представляет собою упругую характеристику, изображаемую на нашем чертеже некоторой кривой, тогда как правая часть определяет прямую линию, отсекающую на оси ординат отрезок и имеющую наклон, равный $\operatorname{arctg} m\omega^2$. В тех точках, где указанные линии пересекаются, сила, стоящая в левой части уравнения (5.43), равняется силе в правой части, вследствие чего имеет место равновесие (в копне размаха). Отсюда сейчас же находится сейчас же находится x_0 , как абсцисса точки пересечения. Для частот медленных колебаний (малые наклоны $m\omega^2$) имеется только одна такая точка пересечения A_1 . Но для больших частот при той же силе P_0 таких точек оказывается три: A_2, B_2, C_2 . Иными словами, мы имеем три возможных решения.

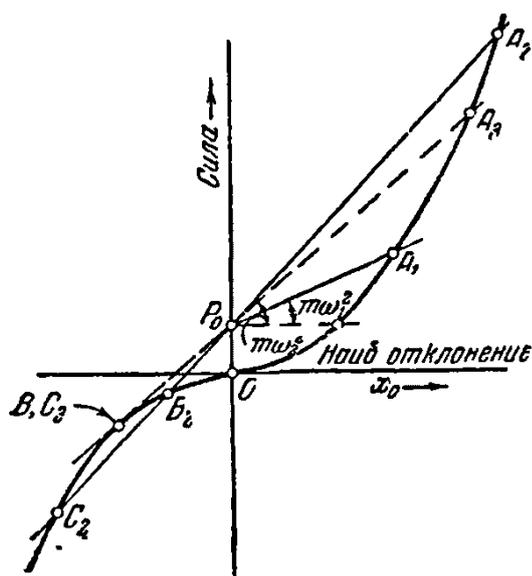


Рисунок 161 – Приближённое графическое определение амплитуд вынужденных нелинейных колебаний

Для большей наглядности мы приводим еще диаграмму (рисунок 162), где по оси абсцисс отложены значения ω , а по оси ординат — амплитуды x_0 . Это — резонансная диаграмма, соответствующая диаграмме, которая была построена для линейного случая. Кстати она может быть построена совершенно точно по точкам на основании рисунка 161, если взять характеристику в виде прямой. Предлагаем читателю изучить построение рисунка 162 на основании рисунка 161, и в особенности убедиться, что для частот ниже BC_3 существует только одно решение, а для частот выше BC_3 — три решения. Кроме того, следует убедиться еще в том, что ветвь A на диаграмме изображает движение, находящееся в одной фазе с силой $P_0 \sin \omega t$, тогда как ветвь B, C определяет движение, отличающееся по фазе на 180° от этой силы.

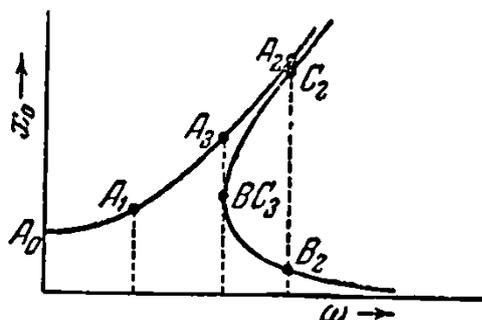


Рисунок 162 – Резонансная диаграмма для системы, жёсткость которой по-

степенно возрастает

Найдено, что из трех возможных движений типов *A*, *B* и *C* последнее, т. е. движение *C*, является неустойчивым, тогда как *A* и *B* представляют собою движения устойчивые, что можно проверить опытным путем. Для пояснения необходимо дополнить диаграмму на рисунке 162 кривыми, соответствующими другим значениям силы P_0 , что и сделано на рисунке 163. Средняя жирная кривая построена для $P_0 = 0$, или, иными словами, для свободных колебаний. Эта кривая найдена путем проведения на рисунке 161 через начало O прямых с различными наклонами, определяемыми углами $m\omega^2$, и путем определения их пересечений с характеристикой. Для частот ω , лежащих ниже некоторого значения ω_0 , эти наклоны на рисунке 161 слишком малы, чтобы можно было получить пересечение. Если наклон возрастает, то величины x_0 становятся все больше и больше. Для очень малого значения возмущающей силы P_0 мы получаем на рисунке 163 кривую 1, тогда как для больших значений P_0 имеем кривые 2 и 3.

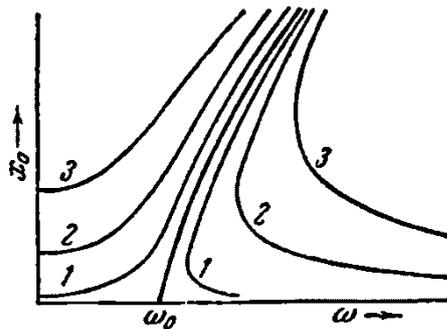


Рисунок 163 – Объяснение неустойчивости ветви *C* на рисунке 162

Рассмотрим какую-либо точку на ветви *A* одной из кривых на рисунке 163. Если при заданной частоте сила P_0 возрастает, то возрастает также и амплитуда x_0 (мы перемещаемся вдоль вертикальной линии на рисунке 163). То же самое остается справедливым и для всякой точки на ветви *B* кривых. Что касается ветви *C*, то здесь увеличение силы P_0 обозначает на рисунке 163 движение вниз (от кривой 1 по направлению к кривой 2), а это, в свою очередь, значит, что при возрастании силы получается убывание амплитуды. Правда, в действительности это не может случиться, и то, что имеет место на

самом деле, показано на рисунке 164, изображающем ту же самую кривую, что и на рисунке 162, но уже с учетом затухания. Как и в линейных системах, затухание здесь сглаживает резонансный пик. Если теперь амплитуду силы P_0 поддерживать постоянной, а частоту со постепенно увеличивать, то амплитуда x_0 внезапно перескакивает вниз от B к C , продолжая уменьшаться вдоль кривой в сторону D . При уменьшении со мы проходим последовательно точки D и C и попадаем в точку E , где амплитуда совершает мгновенный скачок в F затем продолжается до A . Неустойчивая ветвь BE представляет собою движения, не могущие существовать в действительности.

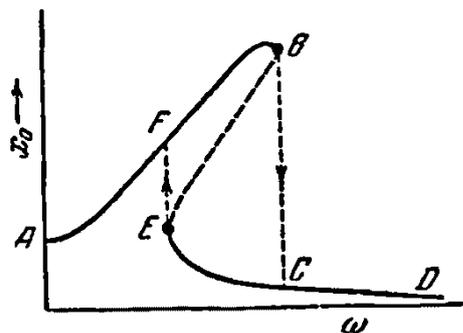


Рисунок 164 – Разрывы в амплитудной кривой нелинейной системы с постепенно увеличивающейся жёсткостью

Характеристика, изображенная на рисунке 161, относится к пружине, которая при возрастании амплитуды становится постепенно более жесткой. Вследствие этого вместе с амплитудой возрастает также собственная частота, как показано на рисунке 163 жирной кривой, загибающейся вправо. Для пружин с уменьшающейся жесткостью (как, например, рисунок 137, б) кривая собственных частот загибается влево, и неустойчивая ветвь C кривых лежит слева от средней кривой. Это показано на рисунке 165, где скачок амплитуды вверх происходит при возрастающей частоте.

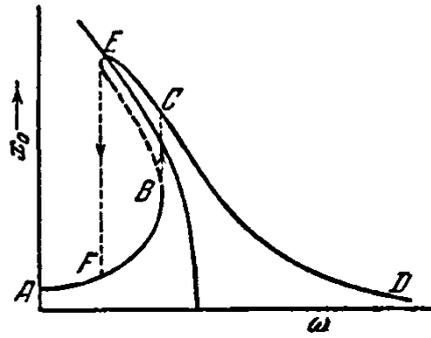


Рисунок 165 – Резонансная диаграмма для пружины, жёсткость которой убывает с амплитудой

Раушер (Rauscher) предложил интересный метод решения этой задачи, дающий высокую степень точности с помощью последовательных приближений для произвольной упругой характеристики. Вместо того, чтобы задаваться частотой и затем искать решение для амплитуды, как это показано на рисунке 161, Раушер исходит из отношения амплитуд x_0/P_0 , после чего отыскивает частоту. Итак, в уравнении (5.41) частота ω считается еще не найденной, и мы делаем лишь первое предположение о движении посредством уравнения (5.42), в котором величине x_0 дается определенное значение, в то время как частота ω изменений силы пока неизвестна. Тогда мы можем написать

$$P_0 \cos \omega t = \frac{P_0 x}{x_0},$$

преобразуя, таким образом, возмущающую силу из функции времени в функцию перемещения. Перенесем теперь возмущающую силу в левую часть уравнения (5.41) и объединим ее с восстанавливающей силой $f(x)$. Такой операцией мы сводим нашу задачу к задаче о свободных колебаниях, которая может быть решена с помощью фазовой диаграммы и последующего интегрирования. Хотя полученная таким образом кривая зависимости перемещения от времени не будет такой, какой она должна бы быть в соответствии с первой предположительной формой по уравнению (5.42), но она будет иметь ту же амплитуду x_0 . С этой новой функцией, выражающей перемещение, мы обращаемся опять к дифференциальному уравнению (5.41), преобразовываем

возмущающую силу из функции времени t в функцию расстояния x и переносим ее в левую часть, объединяя с восстанавливающей силой. Таким образом, получаем третье решение для $x = f(x)$. Эти последовательные решения для изучаемого движения быстро сходятся к точному решению.

Рассмотренный метод «итераций» очень близок к методу Стодолы. Здесь так же, как и там, если первое предположение о движении оказывается верным, то второе решение будет тождественно с первым. Справедливость этого лучше всего может быть продемонстрирована на применении метода Раушера к линейному случаю

$$m\ddot{x} + kx = P_0 \cos \omega t.$$

В качестве первого приближения предполагаем, что движение происходит по закону $x = x_0 \cos \omega t$. Но, как известно, при определенном значении амплитуды x_0 это уравнение выражает собою истинный закон движения с некоторой частотой ω . Тогда

$$P_0 \cos \omega t = \frac{P_0 x}{x_0}$$

и далее

$$m\ddot{x} + k \left(\frac{P_0}{x_0} \right) x = 0.$$

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение свободных колебаний линейной системы с решением по формуле (5.42), где частота ω определяется уравнением

$$\omega^2 = \frac{k - \frac{P_0}{x_0}}{m}.$$

Некоторое своеобразие метода Раушера заключается в том, что вместо того, чтобы искать на рисунке 163 пересечение кривых с вертикальной прямой (т.

е. искать решения для x_0 при заданном значении ω), определяется их пересечение с горизонтальной прямой (следовательно, задается x_0 и отыскивается ω). Конечно, такое изменение нисколько не ухудшает дела.

При исследовании электрической цепи на рисунке 141 мы получаем такие же линии, с той лишь разницей, что сила инерции (напряжение на концах индуктивной спирали) имеет криволинейную характеристику, тогда как характеристикой упругой силы (разности потенциалов на обкладках конденсатора) служит прямая.

В наших рассуждениях было принято, что движение происходит с частотой возмущающей силы. Это соответствует случаю линейных систем. Хотя это есть единственно возможное движение нелинейных систем, слегка отличающихся от линейных, все же мы увидим ниже, что при резко выраженной нелинейности возможно также возбуждение колебательных движений, происходящих в 1, 2, 3, 4, . . . раза медленнее по сравнению с изменением возмущающей силы, определяемой частотой ω .

5.9 Вынужденные колебания при нелинейном затухании

Дифференциальное уравнение, соответствующее такому движению, имеет вид

$$m\ddot{x} + f(\dot{x}) + kx = P_0 \sin \omega t, \quad (5.44)$$

где $f(\dot{x})$ уже не равняется $c\dot{x}$.

Поскольку член, выражающий затухание, является нелинейным, то движение негармоническое. Точное решение уравнения (5.44) известно только для случая кулонова трения, добавляющегося к линейному затуханию, т. е. когда $f(\dot{x}) = \pm F + c\dot{x}$, да и то лишь в пределах некоторой области частот.

В практических случаях затухание бывает обычно достаточно мало, а поэтому в основу приближенного исследования мы можем положить синусоидальный закон движения. Наиболее общий метод здесь состоит в замене

члена $f(\dot{x})$ эквивалентным членом $c\dot{x}$ с постоянным коэффициентом c , а затем определяют «эквивалентный коэффициент затухания» с таким образом, чтобы при гармоническом движении действительная сила сопротивления $f(x)$ совершала за один период такую же работу, что и эквивалентная сила $c\dot{x}$. Определяемая таким образом величина c не является в действительности постоянной, а представляет собою функцию частоты ω и амплитуды x_0 . Итак, система (5.44) при определенных значениях ω и x_0 может быть с известной степенью приближения заменена линейной системой, в которой, однако, коэффициент затухания c имеет различные численные значения для различных значений ω и x_0 .

Приступая к выполнению такого анализа, прежде всего, положим, что движение происходит по закону

$$x = x_0 \sin \omega t.$$

Работа, совершаемая за один период эквивалентной силой сопротивления $c\dot{x}$, равна $\pi c \omega x_0^2$. Что касается работы за тот же период действительной силы сопротивления, обозначаемой нами в общем виде через $f(\dot{x})$, то её выражение было уже найдено. Она равна

$$x_0 \int_0^{2\pi} f(\dot{x}) \cos(\omega t) d(\omega t).$$

Приравнивая обе величины друг к другу, находим эквивалентный коэффициент затухания

$$c = \frac{1}{\pi \omega x_0} \int_0^{2\pi} f(\dot{x}) \cos(\omega t) d(\omega t). \quad (5.45)$$

Амплитуда такого «линеаризованного» уравнения (5.44), как мы видели, выражается так:

$$x_0 = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}$$

Для вычисления этой амплитуды в данное уравнение следует подставить значение c из формулы (5.45).

Указанный общий метод может быть применен к любому типу затухания, даже если его закон дан просто в виде кривой. Но тогда интеграл (5.45) должен быть вычислен графически. В качестве примера возьмем случай сухого трения $f(\dot{x}) = \pm F$. Величина интеграла (5.45), которая оказалась равной $4F$. Отсюда получаем эквивалентный коэффициент затухания

$$c = \frac{4F}{\pi\omega x_0},$$

который, как видим, зависит как от частоты, так и от амплитуды. Подставляя c в формулу для x_0 , имеем

$$x_0 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \left(\frac{4F}{\pi\omega x_0}\right)^2} = \frac{P_0}{k},$$

или

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 x_0^2 = \left(\frac{P_0}{k}\right)^2 - \left(\frac{4F}{\pi k}\right)^2,$$

откуда

$$x_0 = \frac{P_0}{k} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{4F}{\pi P_0}\right)^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}. \quad (5.46)$$

Заметим, что для этого случая существует также точное решение. По получение его слишком сложно, чтобы давать его здесь. Поэтому мы ограни-

чиваемся лишь приведением на рисунке 166 и 167 окончательных результатов, немногим отличающихся от результатов, даваемых формулой (5.46).

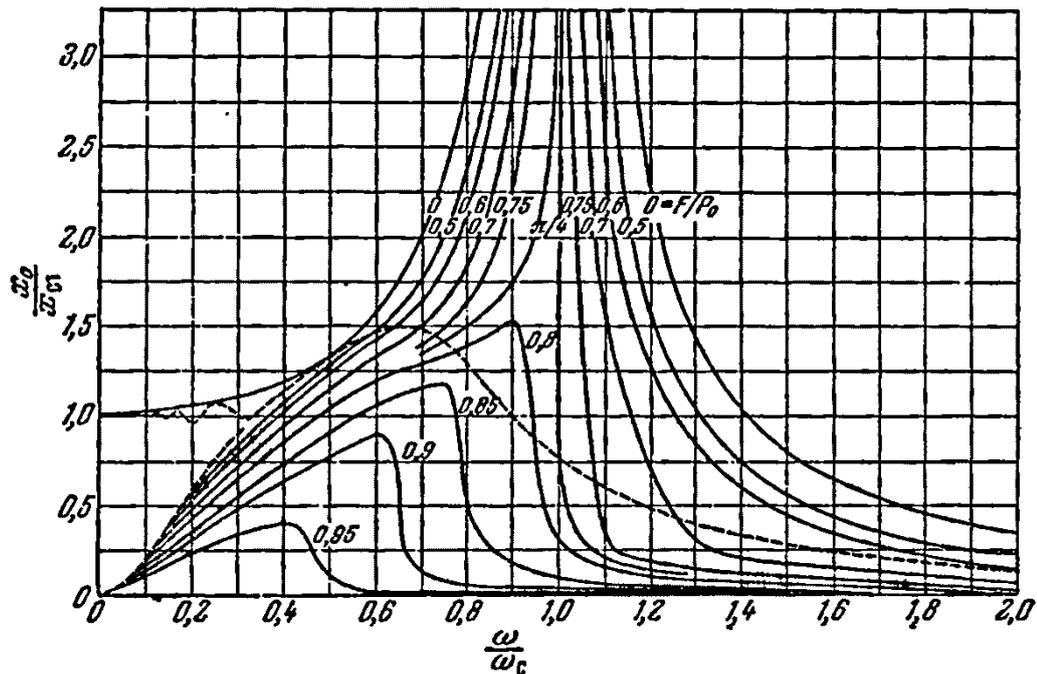


Рисунок 166 – Резонансная диаграмма для системы, затухание которой обусловлено сухим трением

В случае кулонова трения, меньшего определяемого из отношения $F/F_0 = \pi/4$, амплитуды при резонансе безгранично растут независимо от затухания. На первый взгляд кажется странным обстоятельство, что затухающие колебания могут иметь бесконечную амплитуду. Однако этот парадокс объясняется довольно просто, если принять во внимание, что возмущающая сила $P_0 \sin \omega t$ совершает работу, увеличивающую энергию системы, а поскольку работа есть произведение силы на перемещение, то величина этой энергии пропорциональна амплитуде. Вследствие постоянства силы трения F величина рассеяния энергии при затухании также пропорциональна амплитуде. Таким образом, если сила трения мала по сравнению с возмущающей силой ($F < \frac{\pi}{4} P_0$), то энергия, поглощенная системой, вследствие работы последней силы больше энергии, рассеянной по причине затухания, причем эти соображения остаются в силе, как бы ни были велики амплитуды. Итак, амплитуда растет беспредельно. Это можно выразить и иначе, сказав, что в

установившемся состоянии системы амплитуда бесконечна. В случае вязкого затухания (т. е. линейного) сама сила сопротивления пропорциональна амплитуде, вследствие чего рассеяние энергии пропорционально квадрату амплитуды. Таким образом, даже при малом коэффициенте затухания s всегда имеется такая конечная амплитуда, при которой рассеяние энергии становится равным ее поглощению вследствие действия возмущающей силы.

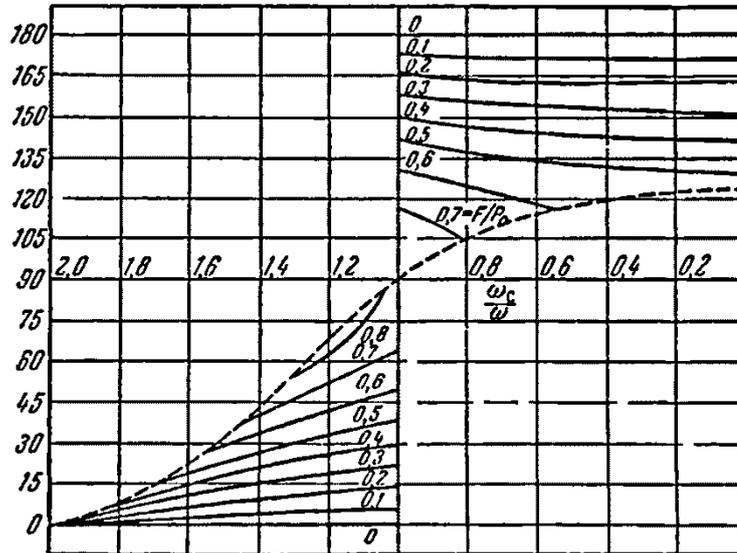


Рисунок 167 – Диаграмма сдвига фазы в случае сухого трения

В связи с тем, что при резонансе в случае кулонова трения также встречаются бесконечно большие амплитуды, сдвиг фазы в момент резонанса претерпевает разрыв непрерывности, как это видно на рисунке 167.

В случае кулонова трения сила трения (нелинейная, так как меняет знак) по величине постоянна, тогда как силы инерции и упругости (обе линейные) растут вместе с амплитудой. Таким образом, при больших амплитудах колебательное движение можно считать синусоидальным, а тогда приближение (5.46) является вполне удовлетворительным. При малых амплитудах кривая перемещений значительно искажается, вследствие чего упомянутое приближение амплитуды оказывается неудовлетворительным. Ниже пунктирной кривой на рисунке 166 мы имеем движения с одной остановкой или паузой за полпериода, как это показано на рисунке 168, а. В незаполненной линиями левой нижней угловой части рисунка 166 движение имеет за полпериода

больше одной паузы. Это показано на рисунке 168, б. Для этой области не может быть получено решения. В случае всевозможных движений, относящихся к типам рисунка 168, приближенная формула (5.46) неприменима.

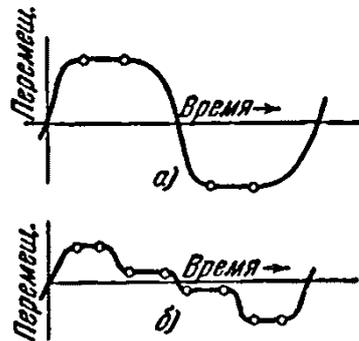


Рисунок 168 – Принуждённое движение с одной (а) и двумя (б) паузами за полпериода, имеющими место при большом кулоновом трении и низких частотах

Однако на практике мы интересуемся главным образом только условиями, создающимися вблизи резонанса, а здесь ошибки формулы (5.46) не превышают нескольких процентов. Таким образом, общий метод, даваемый уравнения (5.45) и уравнения для x_0 , имеет безусловно, большую практическую ценность. Его выводы для случая аэро- или гидродинамического сопротивления, т. е. когда $f(\dot{x}) = c\dot{x}^2$, достаточно разработаны и претворены в диаграммы, наподобие рисунка 166 и 167.

5.10 Субгармонический резонанс

В этом пункте мы рассмотрим некоторые случаи, когда движение значительно отличается от гармонического, вследствие присутствия в системе каких-либо ярко выраженных нелинейных факторов. При этом для нас неважно, обуславливается ли нелинейность упругостью или затуханием.

В линейных системах, подвергающихся действию постороннего возмущения, могут возбуждаться колебания с большими амплитудами при собственных частотах, выражающихся целыми числами, кратными основной частоте изменения возмущающих факторов. Наиболее важный в техническом отношении пример подобного рода это крутильные колебания двигателя

внутреннего сгорания. Обратный случай, т. е. возбуждение больших колебаний при низших частотах, по сравнению с основной частотой (составляющих $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ этой частоты) возмущающей силы, никогда не встречается в линейных системах.

В нелинейных системах указанные случаи могут быть. Рассмотрим в качестве примера самовозбуждающиеся релаксационные колебания типа рисунок 136. Подвергнем систему действию малой гармонической силы, частоты которой в 2, 3, 4, ... раза больше частоты свободных или собственных колебаний, равной $1/2\varepsilon$. Так как свободные колебания содержат все высшие гармоники, имеющие к тому же в нелинейных случаях большие амплитуды, то возмущающая сила (при соответственной разности фаз) должна совершать работу на одной из этих гармоник, вызывая тем самым фактическое ее появление. Но эта гармоника является неотъемлемой частью полного движения по рисунку 156 и должна поэтому привести к возникновению вместе с собою также и других гармоник. В результате возбуждается движение с большими амплитудами при частоте, низшей сравнительно с частотой изменения возмущающего фактора (первая составляет некоторую дробную часть последней, например $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ и т. д.). Такое явление известно под названием «субгармонического резонанса» или «демультипликации частоты».

Заметим, что до сего времени подобных практически важных случаев в машиностроении не встречалось, тогда как в электротехнике эти случаи имеют некоторые значения и начинают находить приложения.

Пусть мы имеем электрический контур, содержащий неоновую трубку, конденсатор, сопротивление и батарею, которые расположены таким образом, чтобы могли возникнуть релаксационные колебания по типу рисунка 156. Пусть, далее, этот контур возбуждается некоторым небольшим переменным напряжением с постоянной частотой ω . При изменении ёмкости C собственный период T_n системы несколько изменяется (в данном случае он про-

порционален не \sqrt{LC} , а произведению RC). Если бы здесь не было возбуждения с частотой ω , то период автоколебаний изменился бы по закону пунктирной линии, показанной на рисунке 169. Однако при действии указанного возбуждения получается иная картина. Дело в том, что система всегда колеблется с периодом, кратным периоду возбуждения $T_{\text{возб}}$ (а тогда частота будет составлять соответствующую дробную часть от частоты возбуждения ω), причем из всевозможных кратных периодов избираете» тот, который лежит ближе всего к собственному периоду, как показано на рисунке 169. В подобном контуре демультипликация частоты доходит до 200.

Хотя описанное явление впервые наблюдалось в релаксационных колебаниях, тем не менее, приведенное объяснение показывает, что оно не ограничивается только этим типом колебаний, но может встречаться также в любой системе с достаточно выраженной нелинейностью при малом «эффективном затухании».

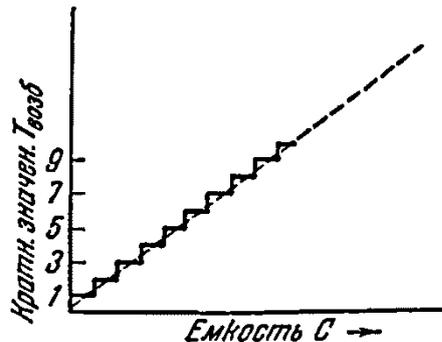
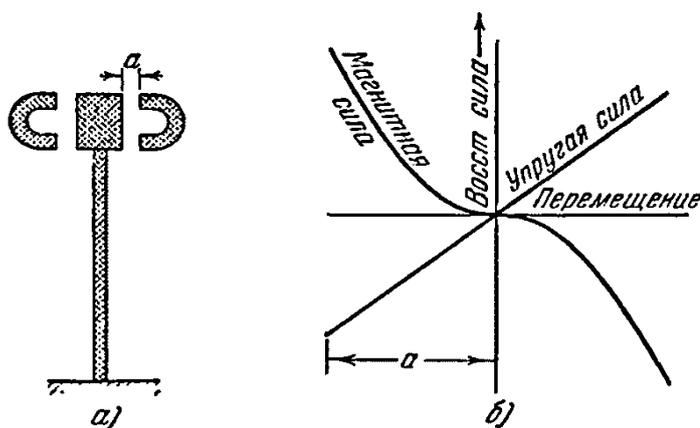


Рисунок 169 – Субгармонический резонанс в самовозбуждающемся электрическом контуре

Под эффективным затуханием мы подразумеваем полное рассеяние энергии за один период, вызванное совокупностью сил положительного и отрицательного затухания. Таким образом, наши рассуждения оказываются применимы к линейным автоколебаниям, а также к нелинейным вынужденным колебаниям без затухания или сочень малым затуханием. В последнем случае не линейность обычно обусловливается пружинами (понимаемыми, конечно, в широком смысле слова). Рассмотрим теперь два примера.

Положим, что мы имеем консоль с укрепленным на ней стальным грузом, который помещен между двумя постоянными магнитами (рисунок 170, а). «Пружина» здесь состоит из двух частей: упругий стержень (характеристика линейная) и магнитное поле (характеристика нелинейная и отрицательная). Чем ближе подходит груз к одному из магнитов, тем больше его притягивающая сила (являющаяся отрицательной восстанавливающей силой), как показано на рисунке 170, б. При такой комбинации «пружин» свободные колебания содержат большое число высших гармоник. Предположим теперь, что груз подвергается действию небольшой переменной силы, частота которой является приблизительно кратной собственной частоте. Эту силу можно осуществить многочисленными способами, между прочим, установкой на грузе маленького неуравновешенного мотора. Тогда переменная сила может совершить, работу на какой-то n -й гармонике движения и тем самым поддерживать систему в состоянии колебаний. В этом примере нет никакого иного источника энергии, кроме упомянутого колебательного (мотор), и мы видим, что частота такого колебательного источника энергии должна быть кратной собственной частоте.



- а) система с механическим субгармоническим резонансом;
- б) магнитные и упругие восстанавливающие силы, действующие на массу.

Рисунок 170

Далеко не является необходимым иметь внешнюю возмущающую силу, действующую на систему: субгармонический резонанс может быть вызван также переменной жесткостью. Случаи, рассмотренные в пунктах 5.2—5.4, имели линейные «пружины» (точнее говоря, «упругие» характеристики), но только их интенсивность изменялась со временем. Было показано, что в этих случаях резонанс может иметь место при частотах, высших, по сравнению с частотой изменения жесткости, а также и при половине этой частоты, но ни при каких других низших субгармониках (порядка $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ и т. д.). Однако если мы имеем нелинейную пружину, изменяющуюся с течением времени (т. е. такую пружину, жесткость которой изменяется и с перемещением и со временем), то могут возникнуть также и низшие гармоники. Примером подобной системы может служить система, представленная на рисунке 170, а, где теперь магниты сделаны из мягкой стали и несут обмотки с переменным электрическим током. Сила притяжения этих магнитов изменяется не только с перемещением, как показано на рисунке 170, б, но и со временем, причем последние изменения происходят с частотой, равной удвоенной частоте тока. Таким образом, магнитные силы оказываются способными совершать работу при колебании, если, конечно, имеется подходящее соотношение фаз, что ясно из рисунка 171. Кривая *I* здесь изображает движение груза, кривая *II* изображает «упругую» силу магнитов в предположении, что по ним течет постоянный ток наконец, кривая *III* показывает интенсивность изменения магнитного поля с течением времени, при условии, что масса неподвижна (частота этого изменения здесь принята равной ушестеренной частоте колебательного движения).

Полная сила действия магнитов на груз равна произведению ординат кривых *II* и *III*. Непосредственно слева от прямой *AA* магнитная сила действует против движения, а непосредственно справа от этой линии она способствует движению. Кривая *III* должна быть расположена так, чтобы слева от *AA* напряжение поля было мало, а справа от *AA* — велико. То же самое

должно выполняться и вблизи прямой BB . Таким образом, энергия поглощается системой. Нелинейность системы здесь весьма существенна, так как в противном случае кривая II должна быть синусоидой, а тогда никакого поглощения энергии системой не происходит. Заметим, что на некотором небольшом расстоянии от AA или BB кривая II имеет очень малые ординаты. Это обстоятельство имеет место в связи с поглощением энергии. Вопрос о том, каково должно быть соотношение между фазами кривых I и III , может быть разрешен только с помощью математического анализа. Так как подобное исследование связано с нелинейным уравнением с переменными коэффициентами, то разрешение этого вопроса довольно затруднительно.

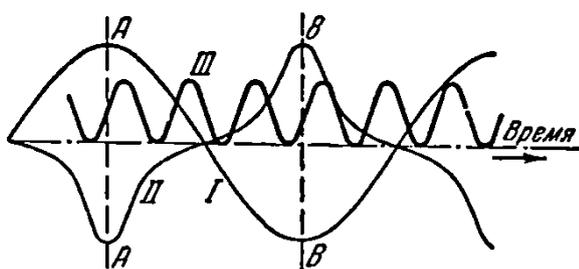


Рисунок 171 – Действие системы, изображённой на рисунке 170, при переменном токе в обмотках электромагнитов