МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

О.В. ПАВЛОВ, М.С. ТАТАРНИКОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент и 38.03.05 Бизнес-информатика

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2016

УДК 33(075)
ББК У9(2)26я7
П121
Рецензенты: д-р экон. наук, проф. Д. Ю. И в а н о в,
д-р экон. наук, проф. Т. А. К о р н е е в а

Павлов, Олег Валерьевич

П121 **Математические методы финансового анализа:** учеб. пособие / *О.В. Павлов, М.С. Татарникова*. – Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2016. – 80 с.

ISBN 978-5-7883-1095-4

В данном пособии рассмотрены количественные методы наращения и дисконтирования разовых выплат и потоков платежей.

В пособии приводятся практические приложения математических методов финансового анализа: оценка финансовых активов, оценка экономической эффективности инвестиционных проектов, анализ кредитных операций.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент и 38.03.05 Бизнес-информатика.

УДК 33(075)
ББК У9(2)26я7

Учебное издание

Павлов Олег Валерьевич,
Татарникова Мария Сергеевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Редактор Ю.Н. Литвинова. Компьютерная доверстка Т.С. Зинкина

Подписано в печать 8.09.2016. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л 5,0.
Тираж 100 экз. Заказ №   . Арт. 36/2016.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

ISBN 978-5-7883-1095-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математические методы финансового анализа (ММФА) – раздел экономической науки, занимающийся количественным исследованием финансовых операций (сделок, контрактов). Это научное направление сформировалось на стыке финансовой науки и математики.

Финансовая операция (сделка, контракт) – это действие по управлению финансовыми средствами (финансовыми активами), связанная с переходом права собственности на эти финансовые средства. В дальнейшем в качестве синонима финансовой операции будут употребляться термины сделка и контракт.

К финансовым операциям относятся:

1) банковские операции;
2) сделки с ценными бумагами;
3) инвестирование;
4) лизинг;
5) страхование;
6) любое другое действие, связанное с переходом права собственности на финансовые активы.

В финансовой операции участвуют не менее двух участников.

Задачи ММФА:

1) вычисление конечных результатов финансовой операции для каждой из участвующих сторон;
2) разработка планов финансовых сделок;
3) определение зависимости конечных результатов от основных параметров финансового контракта, определение допустимых граничных (критических) значений этих параметров;
4) сравнение различных финансовых операций или их вариантов;
5) нахождение параметров эквивалентного (безубыточного) изменения условий сделки.

1. ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ НАРАЩЕНИЯ

1.1. Принцип неравноценности денег во времени

Важнейшим фактором в финансовом анализе является время. В финансовых контрактах получение или платеж определенной суммы денег всегда связан с конкретным моментом времени.

Даже в условиях отсутствия инфляции и риска любая сумма (например миллион рублей), полученная сегодня, не равноценна этой же сумме, которая будет получена через год.

Неравноценность двух одинаковых сумм объясняется тем фактом, что имеющиеся сегодня деньги могут быть инвестированы (например, положены на банковский депозит) и принести доход в будущем. Деньги, получение которых ожидается в будущем, не могут приносить доход в настоящем. Поэтому деньги в настоящем ценнее денег в будущем.

Принцип неравноценности денег во времени: рубль, заработанный сегодня, стоит больше рубля, который будет заработан в будущем без учета инфляции.

Следствием принципа временной стоимости денег является **неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным временным периодам, для принятия финансовых решений**. Фактор времени в долгосрочных операциях играет решающую роль. Влияние фактора времени многократно усиливается инфляцией.

1.2. Проценты, классификация процентных ставок

Простейшим видом финансовой операции является предоставление некоторой первоначальной суммы P в долг при условии, что через промежуток времени t будет возвращена большая конечная сумма S. Результат сделки может быть измерен двумя способами:

1) вычислением дохода – абсолютного показателя, называемого процентами I:

$$I = S - P\,;$$

2) расчетом относительного показателя, называемого процентной ставкой.

Применяются два принципа расчета процентов:

1) прямой – наращение первоначальной суммы долга P;

2) обратный – установление скидки с конечной суммы долга S.

Этим двум принципам соответствуют два вида процентных ставок: ставки наращения и учетные ставки.

Ставки наращения используются при наращении на первоначальную сумму долга P, учетные ставки применяются при скидке с конечной суммы долга S.

Ставка наращения за период *t* – это отношение дохода за фиксированный период времени t к первоначальной сумме.

Ставка наращения вычисляется по формуле:

$$i = \frac{S - P}{P}.$$

Учетная ставка – это отношение дохода за фиксированный период времени t к сумме погашаемого долга.

Учетная ставка рассчитывается по формуле:

$$d = \frac{S - P}{S}.$$

Ставка наращения и учетная ставка взаимосвязаны:

$$i = \frac{d}{1 - d} \text{ или } d = \frac{i}{1 + i}.$$

Проценты (процентные деньги) – это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме (кредит, помещение денег на банковский депозит, учёт векселя, покупка облигации и т.д.).

Современная модель рыночной экономики построена на **процентных деньгах.**

Наращение или рост – процесс увеличения денежной суммы в связи с присоединением процентов.

Наращенная сумма – это первоначальная сумма вместе с начисленными к концу срока операции процентами.

Наращенная сумма вычисляется по формуле:

$$S = P + I,$$

где S – наращенная сумма; P – первоначальная сумма; I – начисленные проценты.

Единицей измерения процентов является денежная единица (в России – рубль).

Процентная ставка является относительной безразмерной величиной. В финансовой документации процентная ставка записывается в виде математических процентов. Размер процентной ставки зависит от следующих факторов: общего состояния экономики страны, вида сделки, срока кредита и т.д.

В финансовом анализе процентная ставка применяется как измеритель **степени доходности финансовой сделки** и называется **доходностью**.

Временной период, к которому относится процентная ставка, называется периодом начисления.

В качестве периода начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц.

Классификация процентных ставок

1. По базе для их начисления:

- **простые;**
- **сложные.**

При постоянной базе начисления используются простые процентные ставки, при переменной базе – сложные процентные ставки.

2. По принципу расчета процентов:

- **ставки наращения;**
- **учетные ставки.**

При наращении первоначальной суммы долга используются ставки наращения, при установлении скидки с конечной суммы долга применяются учетные ставки.

3. По размеру:

- **фиксированные;**
- **плавающие.**

Ставки, указанные в контракте, могут быть фиксированными (постоянными) или плавающими (переменными). В случае плавающей ставки её значение равно изменяющейся во времени базовой величине и надбавки к ней, называемой **маржой**.

4. По способу начисления процентов:

- **дискретные;**
- **непрерывные.**

Дискретные проценты начисляются за фиксированные в договоре периоды времени (год, полугодие, квартал, месяц). Непрерывные проценты начисляются для процессов, которые можно рассматривать как непрерывные.

1.3. Простая процентная ставка наращения

Проценты за период начисления рассчитываются как произведение первоначальной суммы на процентную ставку наращения:

$$I = Pi.$$

Подставляя это выражение в формулу для наращенной суммы, получим:

$$S = P + Pi = P(1+i).$$

Ставка наращения в финансовых контрактах обычно устанавливается в расчете за год и называется годовой.

Простая процентная ставка наращения – это ставка, при которой база начисления всегда остаётся постоянной.

Проценты вычисляются

за первый период: $I_1 = Pi$,

за второй период: $I_2 = Pi$,

за n-й период: $I_n = Pi$,

где n – количество периодов, i – простая годовая ставка наращения, P – первоначальная сумма, являющаяся базой начисления, не изменяющейся с течением времени.

Проценты за весь срок финансовой операции n рассчитываются следующим образом:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = Pi + Pi + \ldots + Pi = Pin.$$

Тогда наращенная сумма записывается в виде:

$$S = P + I = P(1+ni),$$

где $(1+ni)$ – множитель наращения простых процентов.

На рис. 1.1 приводится график наращенной суммы, рассчитанной по простой ставке наращения за 15 лет.

При расчете использовались следующие данные: первоначальная сумма P = 1000 руб., годовая процентная ставка i = 10 %.

Наращенная сумма растет линейно с увеличением количества временных периодов.

Множителем наращения называется число, показывающее, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной величины.

Экономический смысл множителя наращения: наращенная стоимость одной денежной единицы через *n* временных периодов.

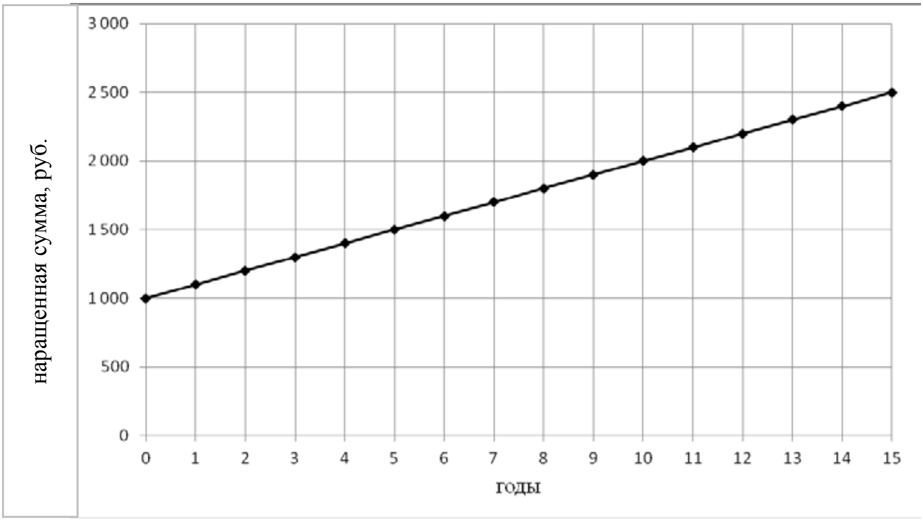

Рис. 1.1. График наращенной суммы,
рассчитанной по простой ставке наращения

Множитель наращения всегда больше единицы.

Обычно к наращению по простой процентной ставке прибегают:
1) при выдаче краткосрочных ссуд (до одного года);
2) при финансовых операциях, когда проценты периодически выплачиваются кредитору и не присоединяются к сумме долга.

Для краткосрочных финансовых операций (менее года) срок вычисляется по формуле:

$$n = \frac{t}{K},$$

где t – число дней финансовой операции, K – временная база (число дней в году).

В этом случае срок ссуды n измеряется в долях года.

Используется два типа временных баз: **точные проценты и обыкновенные (коммерческие) проценты.**

Если используются точные проценты, то за временную базу берётся год, состоящий из 365 (366) дней, K = 365 (366). В случае обыкновенных процентов считают, что год приближенно состоит из 360 дней (12 месяцев по 30 дней), K = 360.

Используется три варианта расчёта простых процентов:

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365, британская практика).

Временная база K = 365. Количество дней финансовой операции рассчитывается точно по календарю. Первый и последний день принимаются за один. Даёт самые точные результаты. Применяется в Великобритании, США.

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360, французская практика).

Временная база K = 360. Количество дней финансовой операции рассчитывается точно по календарю. Первый и последний день принимаются за один. Применяется во Франции, Бельгии.

3. Обыкновенные проценты с приближённым числом дней ссуды (360/360, германская практика).

Временная база K = 360. Количество дней в каждом месяце принимается равным 30. Первый и последний день принимаются за один. Применяется в Германии, Дании, Швеции.

Рассмотрим случай, когда финансовая операция продолжается два смежных календарных периода (например, два смежных месяца). В первый период финансовая операция длится срок n_1, а во второй – n_2 (например, в первый месяц финансовая операция длится 15 дней, а во второй месяц – 10 дней). Наращенная сумма в этом случае рассчитывается по формуле:

$$S = P + I = P + Pn_1 i + Pn_2 i = P(1 + n_1 i + n_2 i).$$

Если простая ставка наращения в каждом периоде является переменной, наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P + I = P + Pn_1 i_1 + Pn_2 i_2 + \ldots + Pn_k i_k = P(1 + \sum_{t=1}^{k} n_t i_t),$$

где $i_1, i_2, \ldots i_k$ – последовательные во времени значения простых процентных ставок, $n_1, n_2, \ldots n_k$ – продолжительность периодов, k – количество периодов, t – номер временного периода.

1.4. Сложная годовая процентная ставка наращения

Сложная процентная ставка наращения – это ставка, при которой база начисления является переменной, проценты начисляются на проценты.

Прибавление процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления, называется **капитализацией процентов**.

Вычислим наращенную сумму:

через 1 год $S_1 = P(1+i)$,

через 2 года $S_2 = S_1(1+i) = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$,

через 3 года $S_3 = S_2(1+i) = P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$.

Продолжая этот процесс, получаем наращенную сумму через n лет (периодов):

$$S = P(1+i)^n,$$

где $(1+i)^n$ – множитель наращения по сложным процентам.

На рис. 1.2 приводится график наращенной суммы, рассчитанный по сложной ставке наращения за 15 лет. При расчете использовались следующие данные: первоначальная сумма P = 1000 руб., годовая процентная ставка i = 10 %.

Наращенная сумма растет по степенной зависимости с увеличением количества временных периодов.

Сложные процентные ставки наращения применяются для расчёта долгосрочных финансовых операций (срок более года).

На рис. 1.3 приводится сравнение графиков множителей наращения простых и сложных процентов за 1,5 года, процентная ставка наращения – 10 %.

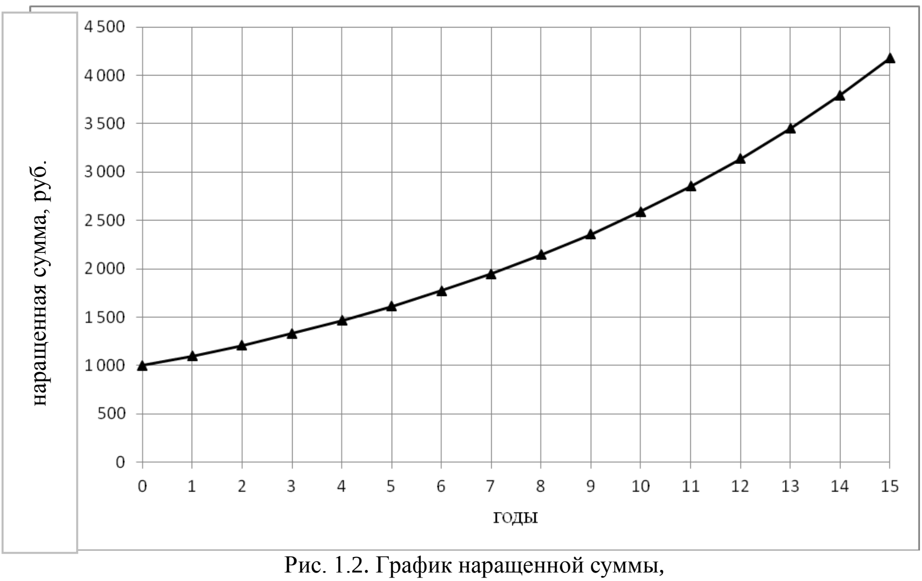

Рис. 1.2. График наращенной суммы,
рассчитанной по сложной ставке наращения

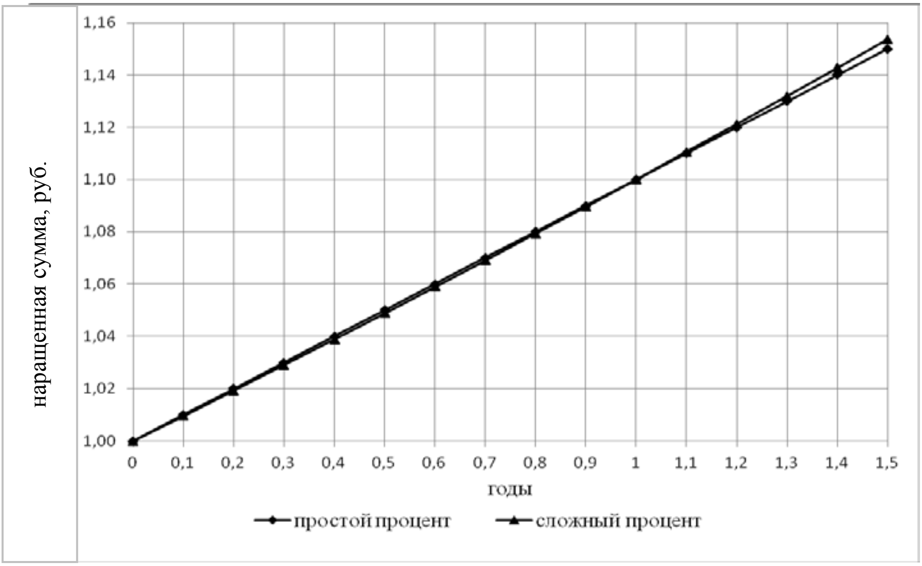

Рис. 1.3. Сравнение графиков множителей наращения простых и сложных процентов

Из анализа рис. 1.3 можно сделать выводы:

1) для периодов меньше 1 года сложные проценты меньше простых;

2) для периода, равного 1 году, сложные проценты равны простым;

3) для периодов больше 1 года сложные проценты больше простых.

На рис. 1.4 приводится сравнение графиков наращенных сумм, рассчитанных по простой и сложной годовым ставкам наращения за 15 лет. Первоначальные суммы и годовые ставки наращения одинаковые: P = 1000 руб., i = 10 %.

На больших временных периодах рост сложных процентов значительно больше, чем простых.

Рассмотрим случай, когда финансовая операция продолжается два смежных календарных периода (например, два смежных года). В первый период финансовая операция длится срок n_1, а во второй – n_2 (например: в первый год финансовая операция длится 60 дней, а во второй год – 90 дней). Наращенная сумма в этом случае рассчитывается по формуле:

$$S = P(1+i)^{n_1}(1+i)^{n_2} = P(1+i)^{n_1+n_2}.$$

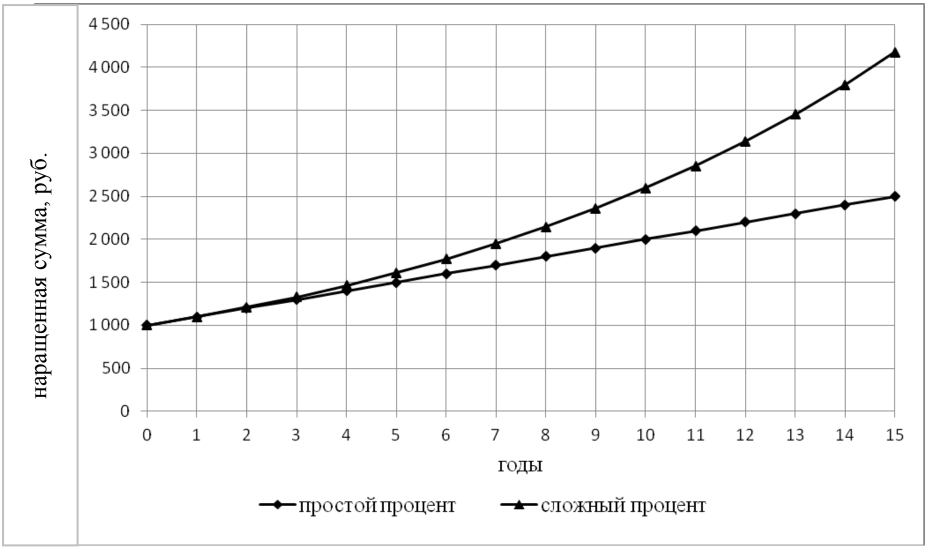

Рис. 1.4. Сравнение графиков наращенных сумм, рассчитанных по простой и сложной ставкам наращения

В случае, если сложная процентная ставка является переменной, наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ldots(1+i_k)^{n_k} = P\sum_{t=1}^{k}(1+i_t)^{n_t},$$

где $i_1, i_2, \ldots i_k$ – последовательные во времени значения процентных ставок, $n_1, n_2, \ldots n_k$ – продолжительность периодов, k – количество периодов, t – номер временного периода.

1.5. Номинальная процентная ставка наращения

В финансовых операциях часто проценты начисляются не один, а m раз в году. Если период наращения процентов составляет месяц, то $m = 12$, если квартал, то $m = 4$, если полгода, то $m = 2$.

Для расчета наращенной суммы можно воспользоваться формулой:

$$S = P(1+i)^N.$$

В этой формуле в качестве ставки i нужно использовать ставку наращения за период (месяц, квартал, полгода), а в качестве N –

количество периодов начисления, вычисляемых как произведение количества начислений процентов m на количество лет n:

$$N = mn.$$

В финансовых контрактах указывается **годовая или номинальная процентная ставка *j*.** Если количество начислений процентов m раз, то проценты за период начисляются по ставке $\frac{j}{m}$.

Формула для расчета наращенной суммы примет вид:

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{mn},$$

где $(1+\frac{j}{m})^{mn}$ – множитель наращения при m начислениях процентов.

На рис. 1.5 приводятся графики наращенных сумм, рассчитанных при однократном и 12-кратном начислении процентов в году за 15 лет. При расчете использовались следующие данные: первоначальная сумма P = 1000 руб., годовая процентная ставка i = 10 %.

Анализируя рис. 1.5, можно сделать вывод: **чем больше количество начислений процентов в году, тем больше рост наращенной суммы.**

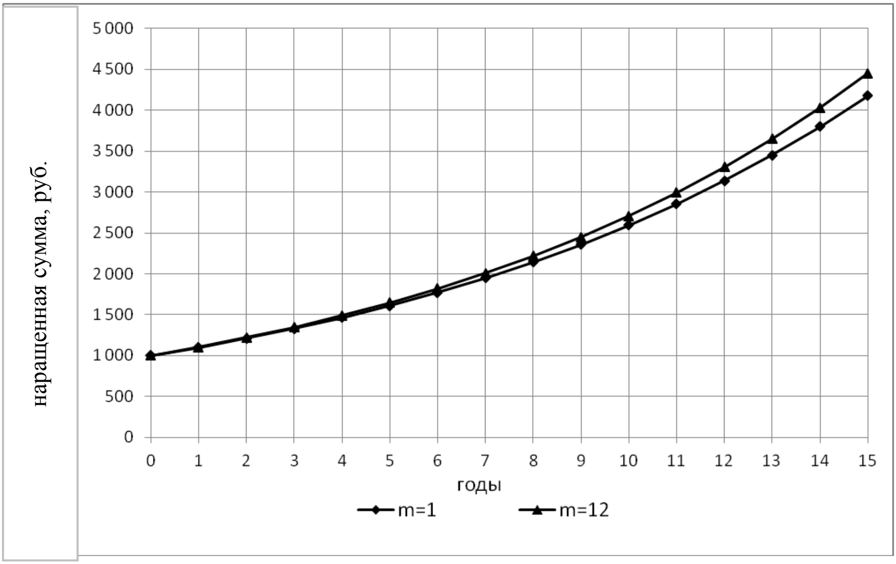

Рис. 1.5. Графики наращенных сумм, рассчитанных при однократном и 12-кратном начислении процентов в году

1.6. Эффективная ставка

Эффективная (действительная) ставка – это годовая ставка сложных процентов, которая даёт тот же результат, что и начисление процентов m раз по ставке j/m.

Эффективная ставка i измеряет доход, который получается в целом за год от начисления процентов.

Множители наращения по двум видам ставок – эффективной и номинальной при начислении процентов m раз должны быть равны:

$$(1+i)^n = (1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Из этого равенства эффективная ставка вычисляется:

$$i = (1+\frac{j}{m})^m - 1.$$

Номинальная ставка определяется по формуле:

$$j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1).$$

Замена в финансовом контракте номинальной ставки j при начислении m раз процентов в год на эффективную ставку i не изменяет финансовых обязательств, обе ставки **эквивалентны.**

1.7. Непрерывное наращение

В общих теоретических разработках и анализе сложных финансовых проблем используют непрерывные проценты.

Непрерывное начисление процентов – это начисление процентов за бесконечно малые отрезки времени ($m \to \infty$).

Сила роста δ – это процентная ставка j при непрерывном начислении процентов ($j \to \delta$).

Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени.

Сила роста называется постоянной, если она не изменяется во времени. Сила роста, изменяющаяся во времени, называется переменной.

Формула для расчета наращенной суммы при дискретном начислении процентов m раз в году имеет вид:

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Чем больше m, тем меньше интервал времени между моментами начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ наращенная сумма для постоянной силы роста $\delta = const$ вычисляется:

$$S = \lim_{m \to \infty} P(1 + \frac{j}{m})^{mn}.$$

Используя второй замечательный предел:

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{j}{m})^{m} = e^{j},$$

заменяя $j \to \delta$, получаем формулу для нахождения наращенной суммы при непрерывном начислении:

$$S = Pe^{\delta n},$$

где $e^{\delta n}$ – множитель наращения при непрерывном начислении процентов.

На рис. 1.6 приводятся графики наращенных сумм, рассчитанных при 12-кратном начислении процентов в году и непрерывном начислении. При расчете использовались следующие данные: первоначальная сумма P = 1000 руб., годовая процентная ставка i = 10 %.

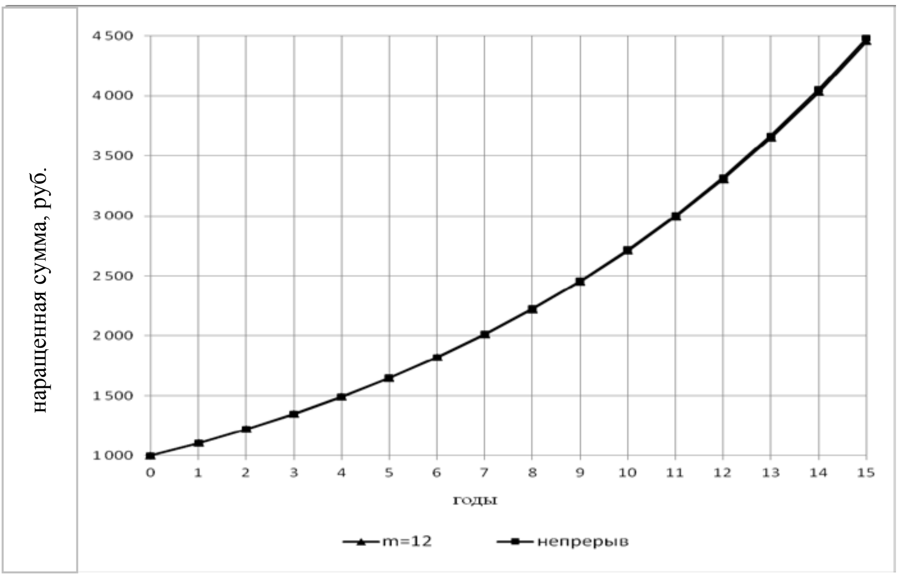

Рис.1.6. Графики наращенных сумм, рассчитанных при 12-кратном и непрерывном начислении процентов

Из анализа рис. 1.6 можно сделать вывод: **при непрерывном начислении процентов рост наращенной суммы максимальный.**

Связь дискретных ставок наращения i и j с силой роста δ определяется из равенства множителей наращения дискретных и непрерывных ставок:

$$(1+i)^n = e^{\delta n}.$$

Из этого равенства следует:

$$\delta = \ln(1+i), \;\; i = e^{\delta} - 1.$$

Из равенства

$$(1+\frac{j}{m})^{mn} = e^{\delta n}$$

следует

$$\delta = m\ln(1+\frac{j}{m}), \;\; j = m(e^{\frac{\delta}{m}} - 1).$$

Если переменная сила роста изменяется во времени по определенному закону $\delta_t = f(t)$, то наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = Pe^{\int_0^n \delta_t dt}.$$

Рассмотрим случай, когда сила роста изменяется по линейному закону:

$$\delta_t = \delta_0 + at,$$

где δ_0 – начальное значение силы роста, a – прирост силы роста.

Вычислим интеграл от силы роста:

$$\int_0^n \delta_t dt = \int_0^n (\delta_0 + at)dt = \delta_0 n + \frac{an^2}{2}.$$

Окончательно выражение для наращенной суммы примет вид:

$$S = Pe^{\delta_0 n + \frac{an^2}{2}},$$

где $e^{\delta_0 n + \frac{an^2}{2}}$ – множитель наращения.

Все рассмотренные методы наращения по процентным ставкам приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Методы наращения по процентным ставкам

Метод наращения	**Формула**	**Множитель наращения**
По простой процентной ставке i	$S = P(1+in)$	$1+in$
По сложной процентной ставке i	$S = P(1+i)^n$	$(1+i)^n$
По номинальной процентной ставке j, при m-кратном начислении процентов	$S = P(1+\frac{j}{m})^{mn}$	$(1+\frac{j}{m})^{mn}$
При непрерывном начислении процентов, по постоянной силе роста δ	$S = Pe^{\delta n}$	$e^{\delta n}$

1.8. Дисконтирование и учёт

В практической деятельности часто необходимо решить задачу, обратную наращению процентов: по заданной конечной сумме S, которая будет уплачена через срок n, необходимо рассчитать первоначальную сумму P.

Вычисление первоначальной величины P по конечной сумме S также необходимо, когда проценты с суммы S удерживаются вперед при покупке финансовых обязательств, оплата которых произойдет в будущем. В этом случае процесс начисления процентов и их удержание называется **учетом**, а проценты – **дисконтом (*discount*).**

Дисконт (скидка) вычисляется:

$$D = S - P.$$

Величину P, найденную с помощью дисконтирования, называют **современной величиной** (***present value PV***) суммы S, или **современной (приведенной, текущей, капитализированной) стоимостью**.

*Современная (приведенная) величина суммы **PV** является важным понятием в современном финансовом анализе.*

Дисконтирование – это операция определения величины денег, которые будут получены в будущем на более ранний момент времени.

Логика финансовых операций представлена на рис. 1.7.

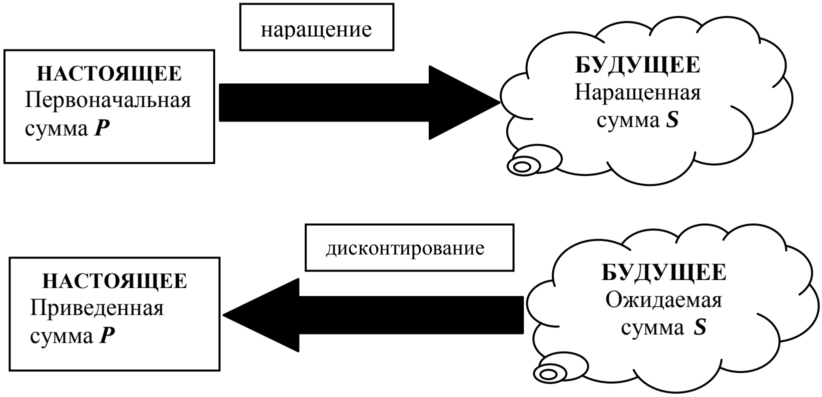

Рис. 1.7. Логика финансовых операций

В зависимости от вида процентной ставки применяются два метода дисконтирования:

- **математическое дисконтирование,**
- **банковский (коммерческий) учёт.**

При использовании математического дисконтирования используется ставка наращения, при банковском учете – учетная ставка.

Математическое дисконтирование является формальным решением задачи, обратной наращению.

Задача математического дисконтирования формулируется в следующем виде: какую первоначальную сумму P необходимо инвестировать сегодня, чтобы через заданный срок n и при заданной процентной ставке i получить заданную наращенную сумму S.

Современную стоимость суммы S можно найти с помощью следующих формул.

Для простой процентной ставки: $P = \dfrac{S}{1+ni}$,

для сложной процентной ставки: $P = \dfrac{S}{(1+i)^n}$,

для номинальной процентной ставки: $P = \dfrac{S}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}$,

для непрерывного начисления процентов,

в случае постоянной силы роста: $P = Se^{-\delta n}$,

в случае переменной силы роста: $P = Se^{-\int_0^n \delta_t dt}$.

Процентная ставка в операции математического дисконтирования называется ставкой дисконтирования и обозначается ***r***.

Дисконтный множитель (коэффициент дисконтирования) *DF* (*discount factor*) показывает, какую долю составляет первоначальная величина в конечной сумме.

Дисконтные множители *DF* вычисляются

для простой процентной ставки: $DF = \dfrac{1}{1+ni}$,

для сложной процентной ставки: $DF = \dfrac{1}{(1+i)^n}$,

для номинальной процентной ставки: $DF = \dfrac{1}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}$,

для непрерывного дисконтирования: $DF = e^{-\delta n}$.

Экономический смысл дисконтного множителя: современная стоимость одной денежной единицы (рубля), подлежащей выплате через время *n*.

Дисконтный множитель – величина, обратная множителю наращения. Дисконтный множитель всегда меньше единицы $DF < 1$.

Все методы математического дисконтирования приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2. Методы математического дисконтирования

Метод дисконтирования	**Формула**	**Дисконтный множитель**
По простой процентной ставке *i*	$P = \dfrac{S}{1+in}$	$\dfrac{1}{1+in}$
По сложной процентной ставке *i*	$P = \dfrac{S}{(1+i)^n}$	$\dfrac{1}{(1+i)^n}$
По номинальной процентной ставке *j*	$P = \dfrac{S}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}$	$\dfrac{1}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}$
По постоянной силе роста δ	$P = Se^{-\delta n}$	$e^{-\delta n}$

1.9. Начисление процентов в условиях налогообложения

В ряде стран полученные юридическими и физическими лицами проценты облагаются налогом, что уменьшает реальную наращенную сумму.

Налог T при начислении процентов находится по формуле:

$$T = (S - P)\tau ,$$

где S – наращенная сумма, P – первоначальная сумма, τ – ставка налога на проценты.

Наращенная сумма с учетом налога:

$$S_{\text{Н}} = S - T = S - (S - P)\tau = S(1-\tau) + P\tau .$$

При начислении простых процентов наращенная сумма с учетом налога определяется:

$$S_{\text{Н}} = S(1-\tau) + P\tau = P(1+in)(1-\tau) + P\tau .$$

Выполняя преобразования, получим выражение для наращенной суммы при начислении простых процентов:

$$S_{\text{Н}} = P[1 + n(1-\tau)i] .$$

Учет налога приводит к сокращению процентной ставки, вместо ставки *i* применяется ставка *(1-τ)i.*

При начислении налога при использовании **сложной процентной** ставки существуют два варианта:

1) налог начисляется за весь срок на всю сумму процентов;

2) налог начисляется периодически, в конце каждого периода (года).

В первом случае налог вычисляется по формуле:

$$T = (S - P)\tau = P[(1+i)^n - 1]\tau .$$

Наращенная сумма определится:

$$S_{\text{Н}} = S - T = S - (S - P)\tau = S(1-\tau) + P\tau .$$

Подставляя в эту формулу выражение для наращенной суммы $S = P(1+i)^n$, получим:

$$S_{\text{Н}} = P(1+i)^n(1-\tau) + P\tau = P[(1-\tau)(1+i)^n) + \tau] .$$

Во втором варианте налог за каждый год является переменной величиной, так как сумма процентов растет во времени:

$$T_t = I_t\tau = (S_t - S_{t-1})\tau = P[(1+i)^t - (1+i)^{t-1}]\tau .$$

Сумма налога и наращенная сумма не зависит от метода начисления.

1.10. Начисление процентов в условиях инфляции

Без учёта инфляции результаты расчетов процентов являются неточными.

Реальная стоимость C суммы денег S, обесцененной за счёт инфляции, вычисляется по формуле:

$$C = \frac{S}{I_p},$$

где I_p – индекс цен (темп роста цен) на группу товаров.

Индекс цен вычисляется по формуле Пааше:

$$I_p = \frac{\sum_{j=1}^{K} p_{1j} q_{1j}}{\sum_{j=1}^{K} p_{0j} q_{1j}},$$

p_{1j}, p_{0j} – цена j-го товара в исследуемом и базисном периодах, q_{1j} – объём проданных товаров j в исследуемом периоде, K – число товаров.

Темпом инфляции называется относительный прирост цен за временной период.

Темп инфляции вычисляется по формуле:

$$H = I_p - 1.$$

Темп инфляции измеряется в процентах. Если цены выросли в 1,2 раза, то темп инфляции – 20 %.

Индекс цен определяется:

$$I_p = 1 + \frac{H}{100}.$$

Если темп инфляции – 40 %, то цены выросли в 1,4 раза.

Индекс цен за n периодов рассчитывается:

$$I_p = \prod_{t=1}^{n} I_{p,t} = \prod_{t=1}^{n} (1 + H_t),$$

где $I_{p,t}$ – индекс цен в периоде t, H_t – темп инфляции в периоде t.

Если темп инфляции постоянный H_t = const, то формула для расчета индекса цен приобретает вид:

$$I_p = (1 + H_t)^n.$$

Средний за период t индекс цен (среднегодовой) вычисляется:

$$i_p = \sqrt[n]{I_p}\ .$$

Средний за период t темп инфляции (среднегодовой) определяется:

$$h = \sqrt[n]{I_p} - 1\ .$$

Если h – постоянный прогнозируемый темп инфляции за период, то индекс цен за n периодов:

$$I_p = (1 + h)^n\ .$$

Грубой ошибкой является суммирование темпов инфляции каждого периода для получения обобщающего показателя инфляции за несколько периодов.

Постоянный темп инфляции 3 % в месяц приводит к росту цен за год в размере:

$$I_p = (1 + h)^n = (1 + 0{,}03)^{12} = 1{,}4258\ .$$

Таким образом, годовой темп инфляции равен:

$$H = I_p - 1 = 1{,}4258 - 1 = 42{,}58\ \%\ ,$$

а не 36 %, которые получаются суммированием темпов инфляции каждого месяца.

Начисление простых процентов в условиях инфляции

Для простых процентов реальная стоимость суммы, обесцененная инфляцией, рассчитывается:

$$C = \frac{S}{I_p} = P\frac{1 + ni}{I_p} = P\frac{1 + ni}{(1 + h)^n}\ .$$

Для определения простой процентной ставки, которая компенсирует инфляцию, приравняем множитель наращения к единице:

$$\frac{1 + ni}{I_p} = 1\ .$$

Минимально допустимая (барьерная) ставка для простых процентов определится:

$$i^* = \frac{I_p - 1}{n}\ .$$

Для компенсации обесценения денег производится корректировка ставки наращения на величину ***инфляционной премии***. Скорректированная ставка наращения называется ***брутто-ставкой*** r.

Для нахождения брутто-ставки в случае начисления простых процентов приравняем множитель наращения, скорректированный по брутто-ставке реальному множителю наращения:

$$\frac{1+nr}{I_p}=(1+ni).$$

Брутто-ставка простых процентов определится:

$$r=\frac{(1+ni)I_p-1}{n}.$$

Решение обратной задачи заключается в определении реальной ставки наращения i (доходности с учетом инфляции) по заданному значению брутто-ставки.

Реальная доходность начисления простых процентов с учетом инфляции:

$$i=\left[\frac{(1+nr)}{I_p}-1\right]/n.$$

Начисление сложных процентов в условиях инфляции

Для сложных процентов реальная стоимость суммы, обесцененная инфляцией, рассчитывается:

$$C=P\frac{(1+i)^n}{I_p}=P\left(\frac{1+i}{1+h}\right)^n.$$

Для определения сложной процентной ставки, которая компенсирует инфляцию, приравняем множитель наращения к единице:

$$\left(\frac{1+i}{1+h}\right)^n=1.$$

Минимально допустимая (барьерная) ставка для сложных процентов равна темпу инфляции:

$$i^*=h.$$

Проанализируем, как влияет сложная ставка наращения i и темп инфляции h на реальную стоимость денег C.

Возможны ситуации:

- $i > h \rightarrow C > P$ – реальный рост денег;

- $i = h \rightarrow C = P$ – наращение поглощается инфляцией;
- $i < h \rightarrow C < P$ – обесценивание денег во времени за счёт инфляции.

Ставку, превышающую i^*, называют положительной ставкой процента.

Для нахождения брутто-ставки в случае сложных процентов приравняем множитель наращения, скорректированный по брутто-ставке реальному множителю наращения:

$$\frac{1+r}{1+h} = 1+i.$$

Брутто-ставка при начислении сложных процентов определится:

$$r = i + h + ih.$$

Если $i \ll 1$ и $h \ll 1$, то можно использовать приближенную формулу:

$$r = i + h.$$

Реальная доходность при начислении сложных процентов с учетом инфляции:

$$i = \frac{1+r}{1+h} - 1.$$

Вопросы

1. Предмет исследования ММФА. Понятие финансовой операции (сделки, контракта). Задачи ММФА. Принцип неравноценности денег во времени. Проценты, процентные ставки: ставки наращения и учетные ставки. Наращенная сумма, период начисления, доходность финансовой операции. Классификация процентных ставок.

2. Простая процентная ставка наращения. Вычисление процентов наращенной суммы. Множитель наращения. Три варианта расчета простых процентов. Начисление простых процентов в смежных календарных периодах. Расчёт наращенной суммы по простым переменным ставкам.

3. Сложная процентная ставка наращения. Вычисление наращенной суммы. Множитель наращения. Начисление сложных процентов в смежных календарных периодах. Расчёт наращенной суммы по сложным переменным ставкам.

4. Номинальная процентная ставка наращения. Вычисление наращенной суммы при начислении процентов m раз за год. Определение эффективной ставки. Расчёт эффективной ставки.

5. Непрерывное начисление процентов. Сила роста. Вычисление наращенной суммы при постоянной силе роста. Связь дискретных ставок наращения с силой роста. Расчёт наращенной суммы при переменной силе роста.

6. Задача, обратная наращению процентов. Логика финансовых операций. Дисконтирование. Понятие дисконта. Два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский учёт. Формулировка задачи математического дисконтирования. Вычисление современной стоимости при использовании простых, сложных, номинальных процентов и силы роста. Дисконтные множители (коэффициенты дисконтирования).

7. Начисление процентов в условиях налогообложения. Вычисление наращенной суммы при использовании простой и сложной ставок наращения.

8. Характеристики инфляции. Определение индекса цен, темпа инфляции. Формула Пааше. Формулы для расчета индекса цен, темпа инфляции.

9. Вычисление реальной стоимости денег с учетом инфляции при наращении простых процентов. Вычисление барьерной ставки, брутто-ставки, реальной доходности при наращении простых процентов.

10. Вычисление реальной стоимости денег с учетом инфляции при наращении сложных процентов. Вычисление барьерной ставки, брутто-ставки, реальной доходности при наращении сложных процентов.

2. УЧЁТНЫЕ СТАВКИ

2.1. Банковский учёт (банковское дисконтирование)

Банковский учет, или **банковское дисконтирование,** состоит в следующем: финансовое учреждение до наступления срока платежа по платежному обязательству приобретает его у владельца со скидкой (дисконтом). Владелец векселя получает деньги, хотя и не в полном объеме, но раньше срока.

Вексель – письменное обязательство или указание векселедателя (заемщика) выплатить в установленный срок определенную сумму предъявителю векселя (векселедержателю).

Задача банковского дисконтирования формулируется следующим образом. По заданной сумме S, которая будет выплачена через временной период n, требуется определить сумму займа P в настоящий момент. Проценты начисляются на конечную сумму S, выплачиваются заранее в момент предоставления долга. Для начисления процентов применяется учетная ставка d.

Номинал – нарицательная стоимость, обозначенная в векселе (сумма, подлежащая уплате в соответствии с обещанием плательщика по тексту векселя).

Разность между номиналом векселя S и стоимостью векселя при учёте P называется дисконтом:

$$D = S - P.$$

Дисконт – это проценты, начисляемые за время от дня учёта (дисконтирования) до дня погашения векселя. Проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока.

Учетная ставка d за временной период t – это отношение дисконта D к сумме погашаемого долга S:

$$d = \frac{S - P}{S} = \frac{D}{S}.$$

Из этой формулы следует, что дисконт за временной период вычисляется:

$$D = Sd.$$

2.2. Простая учетная ставка

Простая учётная ставка наращения – это ставка, при которой база начисления всегда остаётся постоянной.

Постановка задачи. Вексель на сумму S и сроком погашения n периодов (месяцев) продается (учитывается) раньше срока с дисконтом по простой годовой учетной ставке d. Необходимо определить стоимость векселя при учёте.

Проценты (дисконты) вычисляются

за первый период: $D_1 = Sd$,

за второй период: $D_2 = Sd$,

за n-й период: $D_n = Sd$.

Дисконт за весь срок финансовой операции n рассчитывается:

$$D = D_1 + D_2 + \ldots + D_n = Snd.$$

Стоимость векселя при учете:

$$P = S - D = S - Snd = S(1 - nd),$$

где $(1 - nd)$ – дисконтный множитель.

Учет осуществляется при временной базе K = 360 дней, число дней финансовой операции обычно берется точным.

Наращение по учетной ставке производится по формуле:

$$S = \frac{P}{1 - nd},$$

где $\frac{1}{1 - nd}$ – множитель наращения.

2.3. Сложная учетная ставка

Сложная учётная ставка – это ставка, при которой база начисления является переменной, проценты начисляются на проценты.

Постановка задачи. Вексель на сумму S и сроком погашения n лет продается (учитывается) раньше срока с дисконтом по сложной годовой учетной ставке d. Необходимо определить стоимость векселя при учёте.

Если осуществить продажу за 1 год до срока погашения, то начисляются проценты $D_1 = Sd$ и продавец получит сумму:

$$P = S - Sd = S(1 - d).$$

Если осуществить продажу за 2 года до срока погашения, то за первый год проценты начисляются на S и равны $D_1 = Sd$, а за второй год проценты начисляются уже на сумму $S(1-d)$, дисконтированную на предыдущем шаге, и равны $D_2 = S(1-d)d$. Продавец получит сумму:

$$P = S - D_1 - D_2 = S - Sd - S(1-d)d = S(1-d)^2.$$

Рассуждая аналогичным образом, определим стоимость векселя при учёте за n лет до срока погашения:

$$P = S(1-d)^n,$$

где $(1-d)^n$ – дисконтный множитель.

Учётная ставка применяется к сумме, уже дисконтированной на предыдущем шаге.

Дисконтирование по сложной учетной ставке финансово выгоднее для продавца (должника), чем дисконтирование по простой учетной ставке. Операция наращения при этом имеет вид:

$$S = \frac{P}{(1-d)^n},$$

где $\frac{1}{(1-d)^n}$ – множитель наращения.

2.4. Номинальная и эффективная учетные ставки

Если дисконтирование производится m раз в году по ставке $\frac{f}{m}$, то стоимость векселя при учете рассчитывается:

$$P = S(1-\frac{f}{m})^{mn},$$

где f – номинальная годовая учетная ставка, $(1-\frac{f}{m})^{mn}$ – дисконтный множитель.

Наращение по сложной учетной ставке осуществляется по формуле:

$$S = \frac{P}{(1-\frac{f}{m})^{mn}},$$

где $\dfrac{1}{(1-\dfrac{f}{m})^{mn}}$ – множитель наращения.

Эффективная учетная ставка – это годовая учетная ставка сложных процентов, начисляемых один раз в году, эквивалентная годовой номинальной учетной ставке f при начислении процентов m раз в году.

Эффективная учетная ставка находится из равенства:

$$S(1-d)^n = S(1-\frac{f}{m})^{mn}.$$

После преобразований выражение для эффективной учетной ставки запишется:

$$d = 1-(1-\frac{f}{m})^m.$$

2.5. Непрерывное банковское дисконтирование

Формула для расчета стоимости векселя при дисконтировании m раз в году имеет вид:

$$P = S(1-\frac{f}{m})^{mn}.$$

В пределе при m, стремящемся к бесконечности, стоимость векселя при учете вычисляется:

$$P = \lim_{m\to\infty} S\left[1+\frac{(-f)}{m}\right]^{mn}.$$

Используя второй замечательный предел:

$$\lim_{m\to\infty}\left[1+\frac{(-f)}{m}\right]^{m} = e^{-f},$$

заменяя $f \to \delta$, получаем формулу для нахождения стоимости векселя при учете:

$$P = Se^{-\delta n},$$

где δ – сила учета, $e^{-\delta n}$ – дисконтный множитель.

Наращение осуществляется по формуле:

$$S = Pe^{\delta n},$$

где $e^{\delta n}$ – множитель наращения.

Рассмотренные методы наращения по учётным ставкам приведены в табл. 2.1, а методы банковского дисконтирования – в табл. 2.2.

Таблица 2.1. Методы наращения по учетным ставкам

Метод наращения	**Формула**	**Множитель наращения**
По простой учетной ставке *d*	$S = \dfrac{P}{1-nd}$	$\dfrac{1}{1-nd}$
По сложной учетной ставке *d*	$S = \dfrac{P}{(1-d)^n}$	$\dfrac{1}{(1-d)^n}$
По номинальной учетной ставке *f*, при *m*-кратном дисконтировании	$S = \dfrac{P}{(1-\frac{f}{m})^{mn}}$	$\dfrac{1}{(1-\frac{f}{m})^{mn}}$
При непрерывном дисконтировании, по постоянной силе учета δ	$S = Pe^{\delta n}$	$e^{\delta n}$

Таблица 2.2. Методы банковского дисконтирования

Метод дисконтирования	**Формула**	**Дисконтный множитель**
По простой учетной ставке *d*	$P = S(1-nd)$	$1-nd$
По сложной учетной ставке *d*	$P = S(1-d)^n$	$(1-d)^n$
По номинальной учетной ставке *f*, при *m*-кратном дисконтировании	$P = S(1-\frac{f}{m})^{mn}$	$(1-\frac{f}{m})^{mn}$
При непрерывном дисконтировании, по постоянной силе учета δ	$P = Se^{-\delta n}$	$e^{-\delta n}$

Вопросы

1. Понятие операции банковского (коммерческого) учета. Простая учётная ставка. Расчёт стоимости векселя при его досрочном учёте. Наращение по простой учётной ставке.

2. Банковский учёт по сложной учётной ставке. Расчёт стоимости векселя при его досрочном учёте. Наращение по сложной учётной ставке.

3. Номинальная и эффективная учётная ставка. Банковское дисконтирование и наращение по номинальной и эффективной учётной ставке.

4. Непрерывное банковское дисконтирование. Формулы наращения и дисконтирования.

3. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

3.1. Классификация потоков платежей

Финансовые операции часто предполагают не отдельные платежи, а их последовательность во времени. Например: платежи по ипотеке, выплата зарплаты и пенсии, получение процентов по облигации.

Потоки платежей — это последовательные во времени платежи.

В зарубежной финансовой литературе применяется аналогичный термин ***«cash flows» CF***. Схема потока платежей представлена на рис. 3.1.

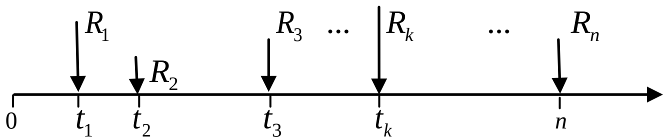

Рис. 3.1. Схема потока платежей

Денежные потоки разделяются на:

➢регулярные;

➢нерегулярные.

Регулярные потоки платежей (финансовая рента, рента, аннуитет) – это платежи, у которых все выплаты направлены в одну сторону, а временные интервалы между платежами одинаковы.

Нерегулярные потоки платежей – это платежи, у которых у которых платежи направлены в разные стороны: поступления и выплаты. Интервалы между платежами не обязательно равны друг другу.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

1) R_t – член ренты, величина платежа $t = 1,n$;
2) n – срок ренты, время от начала первого периода до конца последнего;
3) Δt – период ренты, временной интервал между двумя последовательными платежами;
4) i – процентная ставка;
5) p – число платежей в году (дополнительный параметр);
6) m – количество начислений процентов в году (доп. параметр).

Потоки платежей можно классифицировать по следующим параметрам.

По количеству выплат членов ренты на протяжении года:

- дискретные:
  годовые (одна выплата в году, $p = 1$);
  p-срочные (p – количество выплат в году);
- непрерывные ($p \to \infty$).

По количеству начислений процентов в течение года:

- с ежегодным начислением процентов ($m = 1$);
- с начислением процентов m раз в году;
- с непрерывным начислением процентов ($m \to \infty$).

По величине своих членов ренты:

- постоянные (выплаты, которые не изменяются во времени);
- переменные.

По вероятности выплат:

- верные (подлежат безусловной уплате, число членов ренты известно заранее);
- условные (выплаты условной ренты ставятся в зависимость от наступления некоторого случайного события, число членов ренты заранее неизвестно, к таким рентам относятся страховые аннуитеты, например выплата пенсий).

По количеству членов ренты:

- ограниченные по сроку ренты (срок ренты заранее оговорен);
- бесконечные (вечные) ренты — ***перпетуитет*** (например: выплаты процентов по облигациям с неограниченным сроком).

По началу срока ренты делятся:

- немедленные;
- отсроченные.

По моменту выплат платежей в пределах периода:

- обыкновенные (постнумерандо);
- пренумерандо;
- платежи в середине периода.

Рента постнумерандо – поток платежей, выплаты которого производятся в конце периода.

Схема потока платежей ренты постнумерандо представлена на рис. 3.2.

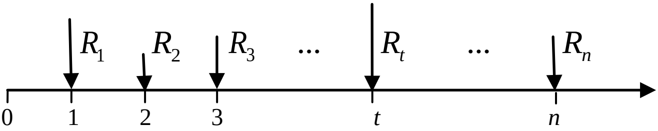

Рис. 3.2. Схема потока платежей ренты постнумерандо

Рента пренумерандо – поток платежей, выплаты которого производятся в начале периода.

Схема потока платежей ренты пренумерандо представлена на рис. 3.3.

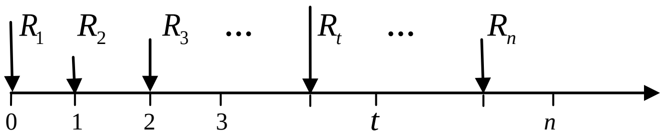

Рис. 3.3. Схема потока платежей ренты пренумерандо

Пример. Ипотечный договор предусматривает ежемесячные платежи в конце каждого месяца в течение 10 лет, с ежемесячным начислением процентов. Данная рента является дискретной, 12-срочной (p = 12), с 12-кратным начислением процентов (m = 12), постоянной, верной, ограниченной (n = 10), немедленной рентой постнумерандо.

3.2. Расчет наращенной суммы и современной стоимости потока платежей

Обобщающими характеристиками потока платежей является **наращенная сумма и современная стоимость.**

Наращенная сумма (будущая стоимость) потока платежей *FV* (*future value*) – это сумма всех выплат с начисленными на них к концу срока сложными процентами.

Современная стоимость потока платежей *PV* (*present value*) – это сумма всех выплат, дисконтированных на начало срока потока по сложной процентной ставке.

Сформулируем задачу: имеется ряд платежей R_k, выплачиваемых в моменты времени t_k, $k = 1,n$. Известно количество выплат n и общий срок выплат t_n. Проценты начисляются по сложной процентной ставке i один раз в году, выплаты производятся в конце года. Необходимо определить наращенную сумму FV и современную стоимость PV потока платежей. Схема потока платежей приведена на рис. 3.1.

Наращенная сумма потока платежей запишется:

$$FV = R_1(1+i)^{t_n-t_1} + R_2(1+i)^{t_n-t_2} + \ldots + R_k(1+i)^{t_n-t_k} + \ldots + R_n.$$

В краткой записи:

$$FV = \sum_{k=1}^{n} R_k(1+i)^{t_n-t_k}.$$

Современная стоимость потока платежей вычисляется:

$$PV = \frac{R_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{R_2}{(1+i)^{t_2}} + \ldots + \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}} + \ldots + \frac{R_n}{(1+i)^{t_n}}.$$

В краткой записи:

$$PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}.$$

Умножим наращенную сумму потока платежей на дисконтный множитель (коэффициент дисконтирования):

$$FV\frac{1}{(1+i)^{t_n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k(1+i)^{t_n-t_k}}{(1+i)^{t_n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}} = PV.$$

После преобразований справа получится формула для современной стоимости потока платежей.

Современная стоимость потока платежей равна дисконтированной наращенной сумме потока платежей.

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^{t_n}}.$$

3.3. Расчет наращенной суммы постоянной годовой ренты постнумерандо

Годовая рента постнумерандо – денежный поток, который предусматривает выплаты и начисление процентов один раз в конце года.

Задача формулируется следующим образом: в течение n лет в банк (или в финансовое учреждение) в конце каждого года вносится сумма R рублей, на которую начисляются проценты по сложной ставке i. Необходимо определить наращенную сумму и современную стоимость ренты.

Схема потока платежей постоянной годовой ренты постнумерандо представлена на рис. 3.4.

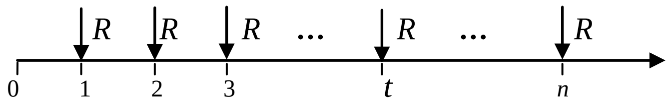

Рис. 3.4. Схема потока платежей постоянной годовой ренты постнумерандо

Наращенная сумма годовой ренты постнумерандо вычисляется:

$$FV = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R(1+i) + R.$$

Вынесем общий множитель R за скобки и переставим слагаемые в обратном порядке:

$$FV = R\left\{1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}\right\}.$$

Последовательность в скобках является геометрической прогрессией со знаменателем $q = 1 + i$.

Сумма геометрической прогрессии S_n определяется по формуле:

$$S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1};$$

где a_1 – первый член прогрессии, n – количество членов прогрессии.

Учитывая формулу для суммы геометрической прогрессии, определим наращенную сумму годовой ренты постнумерандо:

$$FV = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Введем **коэффициент наращения ренты**:

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Тогда формула для наращенной суммы годовой ренты постнумерандо примет вид:

$$FV = Rs_{n;i}.$$

Экономический смысл коэффициента наращения ренты: наращенная сумма денежного потока в 1 рубль за *n* лет при сложной процентной ставке *i*.

3.4. Расчет современной стоимости постоянной годовой ренты постнумерандо

Современная стоимость годовой ренты постнумерандо вычисляется:

$$PV = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}.$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$PV = \frac{R}{1+i}\left\{1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{1+i}$.

Учитывая формулу для суммы геометрической прогрессии, определим современную стоимость постоянной годовой ренты:

$$PV = \frac{R}{1+i}\frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1}.$$

После преобразований получим окончательную формулу:

$$PV = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Введем **коэффициент приведения ренты (коэффициент аннуитета):**

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(1+i)^n}.$$

Тогда формула для современной стоимости годовой ренты постнумерандо примет вид:

$$PV = Ra_{n;i}.$$

Экономический смысл коэффициента приведения (коэффициента аннуитета): приведенная (дисконтированная) стоимость денежного потока в 1 рубль за *n* лет при ставке дисконтирования *i*.

3.5. Определение параметров постоянных годовых рент постнумерандо

При разработке контрактов часто задаются современная стоимость и наращенная сумма (обобщающие характеристики) и два основных параметра. Необходимо рассчитать значение недостающего параметра.

Определение члена ренты

Задача 1. Требуется определить периодические взносы R при известной процентной ставке i и сроке n для создания целевого фонда в сумме FV рублей.

Из выражения для наращенной суммы постоянной ренты постнумерандо следует:

$$FV = Rs_{n;i} \Rightarrow R = \frac{FV}{s_{n;i}}.$$

Задача 2. Требуется определить периодические взносы R при известной процентной ставки i и сроке n для погашения в рассрочку задолженности в сумме PV рублей.

Из выражения для современной стоимости постоянной ренты постнумерандо следует:

$$PV = Ra_{n;i} \Rightarrow R = \frac{PV}{a_{n;i}}.$$

Расчет срока ренты

Задача 1. Необходимо определить срок ренты и соответственно число членов ренты при известных параметрах: наращенной сумме FV, члене ренте R и процентной ставке i.

Из выражения для наращенной суммы постоянной ренты постнумерандо следует:

$$FV = \frac{R(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{R} i + 1\right)}{\ln(1+i)}.$$

Задача 2. Необходимо определить срок ренты и соответственно число членов ренты при известных параметрах: современной стоимости PV, члене ренте R и процентной ставке i.

Из выражения для современной стоимости постоянной ренты постнумерандо следует:

$$PV = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow n = \frac{\ln\left(1-\frac{PV}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}.$$

Определение процентной ставки

Определение процентной ставки необходимо для определения доходности финансовой операции или сделки.

Для определения размера процентной ставки необходимо решить уравнения относительно процентной ставки:

$$FV = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad PV = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Уравнения относительно процентной ставки являются трансцендентными и не имеют аналитического решения. Для решения уравнений используются численные методы и прикладные программы. В электронной таблице Excel для решения таких уравнений можно воспользоваться надстройкой «Поиск решения».

3.6. Годовая рента с начислением процентов *m* раз в году

Рассмотрим годовую ренту, у которой проценты начисляются m раз в году. Схема потока платежей постоянной ренты постнумерандо с начислением процентов m раз представлена на рис. 3.5.

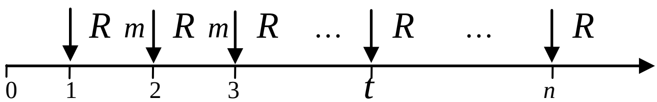

Рис. 3.5. Схема потока платежей постоянной годовой ренты постнумерандо с m начислением процентов

Наращенная сумма ренты вычисляется:

$$FV = R(1+\frac{j}{m})^{(n-1)m} + R(1+\frac{j}{m})^{(n-2)m} + \ldots + R(1+\frac{j}{m})^{m} + R.$$

Вынесем общий множитель R за скобку и переставим слагаемые в обратном порядке:

$$FV = R\left\{1 + (1+\frac{j}{m})^{m} + \ldots + R(1+\frac{j}{m})^{(n-2)m} + (1+\frac{j}{m})^{(n-1)m}\right\}.$$

Выражение в скобках является геометрической прогрессией со знаменателем: $q = (1 + j/m)^m$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, определим наращенную сумму ренты:

$$FV = R\frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^m - 1} = Rs_{mn;j/m},$$

где $s_{mn;j/m}$ – коэффициент наращения ренты.

Современная стоимость ренты вычисляется:

$$PV = R(1 + \frac{j}{m})^{-m} + R(1 + \frac{j}{m})^{-2m} + \ldots + R(1 + \frac{j}{m})^{-(n-1)m} + R(1 + \frac{j}{m})^{-nm}.$$

Вынесем общий множитель за скобку:

$$PV = R(1 + \frac{j}{m})^{-m}\left\{1 + (1 + \frac{j}{m})^{-m} + \ldots + (1 + \frac{j}{m})^{-(n-2)m} + (1 + \frac{j}{m})^{-(n-1)m}\right\}.$$

Выражение в скобках является геометрической прогрессией со знаменателем: $q = (1 + j/m)^{-m}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, определим современную стоимость ренты:

$$PV = R\frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{(1 + j/m)^m - 1} = Ra_{mn;j/m},$$

где – $a_{mn;j/m}$ коэффициент приведения ренты.

3.7. Рента *p*-срочная, с начислением процентов один раз в году

Рассмотрим ренту, у которой выплаты производятся *p* раз в году, а проценты начисляются один раз в году (*m* = 1). Схема потока платежей ренты представлена на рис. 3.6.

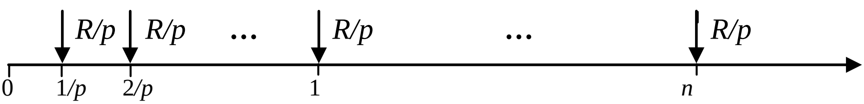

Рис. 3.6. Схема потока платежей постоянной *p*-срочной ренты с однократным начислением процентов

Рента выплачивается равными суммами *R/p,* общее число членов ренты равно *np.*

Наращенная сумма ренты вычисляется:

$$FV = \frac{R}{p}(1+i)^{(n-1+1/p)} + \frac{R}{p}(1+i)^{(n-1+2/p)} + \ldots + \frac{R}{p}(1+i)^{1/p} + \frac{R}{p}.$$

Данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем: $q = (1+i)^{1/p}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, определим наращенную сумму ренты:

$$FV = R\frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = Rs_{n;i}^{(p)},$$

где $s_{n;i}^{(p)}$ – коэффициент наращения ренты.

Современная стоимость ренты вычисляется:

$$PV = R(1+i)^{-1/p} + R(1+i)^{-2/p} + \ldots + R(1+i)^{-np-1/p} + R(1+i)^{-np}.$$

Данная последовательность представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем: $q = (1+i)^{-1/p}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии определим современную стоимость ренты:

$$PV = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = Ra_{n;i}^{(p)},$$

где $a_{n;i}^{(p)}$ – коэффициент приведения ренты.

3.8. Рента *p*-срочная с начислением процентов *m* раз в году

Рассмотрим ренту, у которой выплаты производятся *p* раз в году, а проценты начисляются *m* раз в году. Схема потока платежей ренты представлена на рис. 3.7.

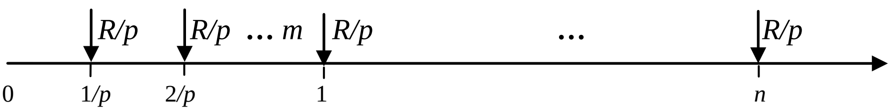

Рис. 3.7. Схема потока платежей постоянной годовой *p*-срочной ренты с начислением процентов *m* раз в году

Рента выплачивается равными суммами *R/p,* число членов ренты равно *np.*

Последовательность членов ренты с начисленными процентами является геометрической прогрессией со знаменателем: $q=(1+j/m)^{m/p}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, определим наращенную сумму ренты:

$$FV=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}=Rs_{mn;j/m}^{(p)},$$

где $s_{mn;j/m}^{(p)}$ – коэффициент наращения ренты.

Дисконтированный ряд членов ренты представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем: $q=(1+j/m)^{-m/p}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии определим современную стоимость ренты:

$$PV=R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}=Ra_{mn;j/m}^{(p)},$$

где $a_{mn;j/m}^{(p)}$ – коэффициент приведения ренты.

3.9. Ренты с непрерывным начислением процентов

Рассмотрим ренту, у которой выплаты производятся один раз в году (p = 1), а проценты начисляются непрерывно ($m\to\infty$).

Наращенная сумма ренты вычисляется:

$$FV=Re^{(n-1)\delta}+Re^{(n-2)\delta}+\ldots+Re^{\delta}+R.$$

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, определим наращенную сумму ренты:

$$FV=R\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}=Rs_{n;\delta},$$

где $s_{n;\delta}$ – коэффициент наращения ренты.

Современная стоимость ренты вычисляется:

$$PV=Re^{-\delta}+Re^{-2\delta}+\ldots+Re^{-\delta(n-1)}+Re^{-\delta n}.$$

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, определим современную стоимость ренты:

$$PV=R\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}=Ra_{n;\delta},$$

где $a_{n;\delta}$ – коэффициент приведения ренты.

Рассмотрим ренту, у которой выплаты производятся p раз в году, а проценты начисляются непрерывно ($m \to \infty$).

Наращенная сумма ренты вычисляется аналогично:

$$FV = R\frac{e^{\delta n}-1}{p(e^{\delta / p}-1)} = Rs_{n;\delta}^{(p)},$$

где $s_{n;\delta}^{(p)}$ – коэффициент наращения ренты.

Современная стоимость ренты определяется:

$$PV = R\frac{1-e^{-\delta n}}{p(e^{\delta / p}-1)} = Ra_{n;\delta}^{(p)},$$

где $a_{n;\delta}^{(p)}$ – коэффициент приведения ренты.

3.10. Постоянные непрерывные ренты

Рассмотрим ренту, у которой поток платежей рассматривается как непрерывный процесс ($p \to \infty$), а проценты начисляются один раз в году. Коэффициент аннуитета непрерывной ренты с однократным начислением процентов определяется:

$$a_{n;i}^{(\infty)} = \lim_{p\to\infty} a_{n;i}^{(p)} = \lim_{p\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}.$$

Раскроем неопределенность, применив правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p[(1+i)^{1/p}-1]} = \frac{1}{\ln(1+i)}.$$

Окончательно коэффициент аннуитета непрерывной ренты запишется:

$$a_{n;i}^{(\infty)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}.$$

Современная стоимость непрерывной ренты с однократным начислением процентов определится выражением:

$$PV = Ra_{n;i}^{(\infty)} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}.$$

Аналогично определим коэффициент наращения непрерывной ренты:

$$s_{n;i}^{(\infty)} = \frac{(1+i)^{-n}-1}{\ln(1+i)}.$$

Наращенная сумма непрерывной ренты с однократным начислением процентов определится по формуле:

$$FV = Rs_{n;i}^{(\infty)} = R\frac{(1+i)^{-n} - 1}{\ln(1+i)}.$$

Рассмотрим ренту, у которой платежи выплачиваются непрерывно ($p \to \infty$) и проценты начисляются непрерывно ($m \to \infty$).

Подставим формулы эквивалентности между непрерывными и дискретными ставками: $\delta = \ln(1+i)$, $i = e^{\delta n} - 1$ в ранее полученные выражения для коэффициентов наращения $s_{n;i}^{(\infty)}$ и аннуитета $a_{n;i}^{(\infty)}$

Коэффициент аннуитета непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов примет вид:

$$a_{n;\delta}^{(\infty)} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}.$$

Современная стоимость непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов:

$$PV = Ra_{n;\delta}^{(\infty)} = R\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}.$$

Коэффициент наращения непрерывной ренты примет вид:

$$s_{n;\delta}^{(\infty)} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}.$$

Наращенная сумма непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов:

$$FV = Rs_{n;\delta}^{(\infty)} = R\frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}.$$

3.11. Наращенные суммы и современные стоимости других видов постоянных годовых рент

Каждый платеж ренты пренумерандо поступает на один период раньше ренты постнумерандо. Поэтому наращенная сумма FV_1 и современная стоимость PV_1 ренты пренумерандо больше в (1+*i*) раз аналогичных обобщающих характеристик ренты постнумерандо.

Для годовой ренты (p = 1, m = 1):

$$FV_1 = FV(1+i), \quad PV_1 = PV(1+i).$$

Для ренты с начислением процентов m раз в году ($p=1,\ m>1$):

$$FV_1 = FV(1+\frac{j}{m})^m\ ,\quad PV_1 = PV(1+\frac{j}{m})^m.$$

Для p-срочной ренты с однократным начислением процентов ($p>1, m=1$):

$$FV_1 = FV(1+i)^{1/p},\quad PV_1 = PV(1+i)^{1/p}.$$

Для p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году ($p>1, m>1$):

$$FV_1 = FV(1+\frac{j}{m})^{m/p},\quad PV_1 = PV(1+\frac{j}{m})^{m/p}.$$

Наращенные суммы $FV_{1/2}$ и современные стоимости $PV_{1/2}$ рент с выплатами в середине периода находятся умножением соответствующих обобщающих характеристик рент постнумерандо на множитель наращения за половину периода.

Для годовой ренты (p = 1, m = 1):

$$FV_{1/2} = FV(1+i)^{1/2},\quad PV_{1/2} = PV(1+i)^{1/2}.$$

Для ренты с начислением процентов m раз в году ($p=1,\ m>1$):

$$FV_{1/2} = FV(1+\frac{j}{m})^{m/2}\ ,\quad PV_{1/2} = PV(1+\frac{j}{m})^{m/2}.$$

Для p-срочной ренты с однократным начислением процентов ($p>1, m=1$):

$$FV_{1/2} = FV(1+i)^{1/2p},\quad PV_{1/2} = PV(1+i)^{1/2p}.$$

Для p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году ($p>1, m>1$):

$$FV_{1/2} = FV(1+\frac{j}{m})^{m/2p},\quad PV_{1/2} = PV(1+\frac{j}{m})^{m/2p}.$$

3.12. Вечная и отложенная рента

Рента с очень большим сроком ($n \to \infty$), называется вечной (*перпетуитет*).

Коэффициент аннуитета годовой вечной ренты рассчитывается:

$$a_{\infty;i} = \lim_{n\to\infty} \frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i} = \frac{1}{i}\ .$$

Современная стоимость перпетуитета вычисляется:

$$PV_{\infty} = Ra_{\infty;i} = \frac{R}{i}.$$

Современная стоимость вечной ренты зависит только от размера члена ренты и процентной ставки. Отдаленные платежи оказывают незначительное влияние на величину коэффициента аннуитета ренты.

Рента, начало выплат которой сдвинуто вперед, называется отложенной рентой.

Сдвиг во времени не отражается на величине наращенной суммы. Пусть рента выплачивается спустя t лет после начального момента времени. Современная стоимость отложенной ренты PV_{om} равна дисконтированной величине современной стоимости немедленной ренты PV:

$$PV_{om} = \frac{PV}{(1+i)^t} = R\frac{a_{n;i}}{(1+i)^t}.$$

Вопросы

1. Определение потока платежей. Классификация потоков платежей. Параметры ренты.
2. Расчет наращенной суммы и современной стоимости потока платежей.
3. Расчёт наращенной суммы постоянной годовой ренты постнумерандо. Коэффициент наращения ренты.
4. Расчёт современной стоимости постоянной годовой ренты постнумерандо. Коэффициент приведения (аннуитета) ренты.
5. Годовая рента с начислением процентов m раз в году. Расчёт наращенной суммы и современной стоимости.
6. Рента p-срочная с начислением процентов один раз в году. Расчёт наращенной суммы и современной стоимости.
7. Рента p-срочная с начислением процентов m раз в году. Расчёт наращенной суммы и современной стоимости.
8. Ренты с непрерывным начислением процентов. Расчёт наращенной суммы и современной стоимости.
9. Постоянные непрерывные ренты. Расчёт наращенной суммы и современной стоимости.
10. Определение параметров постоянной годовой ренты постнумерандо. Определение члена ренты, срока рента, размера процентной ставки.
11. Расчет наращенной суммы и современной стоимости ренты пренумерандо и ренты с выплатами в середине периода.
12. Определение вечной ренты. Коэффициент приведения (аннуитета) вечной ренты. Определение отложенной ренты. Расчет современной стоимости отложенной ренты.

4. ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

4.1. Классификация инвестиций

Инвестиции – это расходование денежных средств или иных ценностей для получения доходов в будущем. Инвестиции предполагают отказ от текущего потребления для достижения целей в будущем. Существуют реальные и финансовые инвестиции.

Реальные инвестиции – это расходование денежных средств на материальные ресурсы: недвижимость, землю, оборудование. Производственные инвестиции – это вложения в создание, реконструкцию производства.

Финансовые инвестиции – это расходование денежных средств на покупку финансовых активов.

Финансовый актив (инструмент, ценная бумага) – это документ, закрепляющий право на получение доходов в будущем при наступлении определенных условий.

Существуют основные и производные финансовые инструменты. Основные ценные бумаги – это **акции, облигации, векселя, депозиты и др**. Производные финансовые инструменты – это **финансовые опционы, варранты, фьючерсы** и др.

Существуют четыре основных критерия для оценки экономической эффективности инвестиционных проектов: **чистый приведенный доход *NPV*, индекс доходности *PI*, внутренняя норма доходности *IRR*, дисконтируемый срок окупаемости *DPP*.**

Все критерии являются результатом сопоставления приведенной (дисконтированной) стоимости операционного денежного потока CF_t **(*Cash Flow*)** и приведенной стоимости инвестиционного денежного потока INV_t ***(investment)***.

4.2. Расчёт денежного потока от операционной деятельности проекта

Денежный поток от операционной деятельности CF_t в каждом периоде проекта в укрупненном виде рассчитывается по формуле:

$$CF_t = R_t - C_t - N_t \ , t = 1, n \ ,$$

где R_t – выручка проекта в t-й период, C_t – текущие затраты проекта в t-й период, N_t – налог на прибыль в t-й период.

Расчёт выручки проекта осуществляется по формуле:

$$R_t = P_t Q_t, \quad i = \overline{1,n};$$

где P_t – цена продукции проекта в t-й период, Q_t – объем продаж проекта в t -й период, n – срок реализации проекта.

Текущие затраты проекта состоят из переменных C_{vt} и постоянных C_{ct} :

$$C_t = C_{vt} + C_{ct}.$$

Переменные затраты C_{vt} напрямую зависят от объемов производства продукции:

$$C_{vt} = c_t Q_t,$$

где c_t – себестоимость продукции.

В себестоимость продукции включаются:

- стоимость сырья, материалов, комплектующих;
- стоимость топлива, энергии;
- переменная (сдельная) заработная плата.

Постоянные затраты C_{ct} не зависят напрямую от объемов производства продукции и включают:

- расходы на оплату труда работников;
- административные затраты;
- расходы на маркетинг.

Налог на прибыль N_τ вычисляется по формуле:

$$N_\tau = (R_t - C_t)\tau, t = \overline{1,n},$$

где τ – ставка налога на прибыль.

Перепишем формулу для расчета денежного потока от операционной деятельности CF_t в каждом периоде проекта в развернутом виде:

$$CF_t = R_t - C_t - (R_t - C_t)\tau, t = \overline{1,n}.$$

4.3. Критерий чистый приведенный доход *NPV*

Чистый приведенный доход (стоимость) ***NPV*** **(*Net Present Value*) –** это сумма денежных потоков проекта, приведенная к начальному периоду проекта:

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^{n} \frac{INV_t}{(1+r)^t},$$

где n – срок проекта, r – ставка дисконтирования проекта, CF_t – денежный поток от операционной деятельности в период t, INV_t – денежный поток от инвестиционной деятельности в период t.

Если инвестиция INV является разовой, то формула для чистой приведенной стоимости NPV имеет вид:

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - INV.$$

На рис. 4.1 изображен график чистой приведенной стоимости в зависимости от временного периода для типичного проекта.

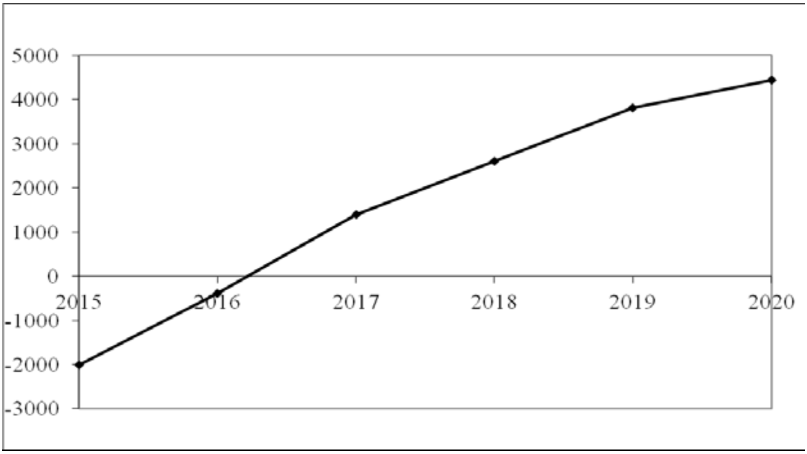

Рис. 4.1. График чистой приведенной стоимости в зависимости от временного периода

Проект считается экономически эффективным, если чистая приведенная стоимость больше нуля *NPV* > 0. Проект является экономически неэффективным, если чистая приведенная стоимость меньше нуля *NPV* < 0.

В случае сравнения взаимоисключающих проектов с одинаковой ставкой дисконтирования r более выгодным считается проект с наибольшей чистой приведенной стоимостью.

Осуществление инвестиционного проекта связано с **неопределенностью будущего**, инвестор может недополучить прибыль в связи с неожиданно произошедшими событиями, недостаточным знанием конъюнктуры рынка, появлением товаров-заменителей и фирм-конкурентов и т.д.

Неопределенность – это неполнота и неточность информации об условиях реализации проекта.

Противоположным понятию неопределенности является понятие ***детерминированности***. Условия реализации проекта, о которых имеется полная и точная информация, называются детерминированными.

Риск – это возможность возникновения таких условий, которые приведут к негативным последствиям (для инвестиционного проекта: сумма дисконтируемых денежных потоков проекта будет меньше, чем прогнозируемая).

Риск можно рассматривать как частный случай неопределенности.

Экономический смысл ставки дисконтирования (ставка дисконта) – доходность по альтернативным инвестициям или минимальная доходность (норма прибыли), устраивающая инвестора.

Ставку дисконтирования называют **альтернативными издержками**, так как она представляет собой доход, от которого отказывается инвестор, вкладывая деньги в данный проект, а не в альтернативный.

Идея **альтернативных издержек** имеет смысл лишь в том случае, если сравниваются активы, которым присуща одинаковая степень риска. Необходимо выбрать активы, риск которых эквивалентен риску рассматриваемого проекта, определить ожидаемую норму доходности этих активов и использовать эту норму в качестве альтернативных издержек (ставки дисконтирования).

Метод кумулятивного построения ставки дисконтирования

По методу кумулятивного построения величина ставки дисконтирования определяется как сумма безрисковой ставки и премии за риск.

Безрисковая ставка дисконтирования определяется исходя из ставки доходности надежного банка или ставки доходности по долгосрочным правительственным облигациям (безрисковым активам).

Достоинства чистого приведенного дохода (стоимости).

1.Чистый приведенный доход *NPV* учитывает время поступления денежного операционного потока и время вложения инвестиций на всём временном интервале проекта.

2. Критерий NPV является аддитивным. Свойство аддитивности заключается в том, что чистый приведенный доход проектов A и B равен сумме их чистых приведенных доходов:

$$NPV(A+B) = NPV(A) + NPV(B).$$

Свойство аддитивности позволяет суммировать чистые приведенные доходы разных проектов.

4.Чистая приведенная стоимость учитывает масштаб инвестиций и генерируемых денежных потоков.

4.4. Критерий внутренняя норма доходности *IRR*

Внутренняя норма доходности (*Internal Rate of Return) IRR* – это ставка дисконтирования r, при которой чистая приведенная стоимость равняется нулю.

Для определения внутренней нормы доходности необходимо решить нелинейное уравнение относительно ставки дисконтирования:

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^{n} \frac{INV_t}{(1+r)^t} = 0.$$

Внутренняя норма доходности *IRR* представляет собой ставку дисконтирования, при которой приведенная стоимость операционного денежного потока равняется приведенной стоимости инвестиционного денежного потока.

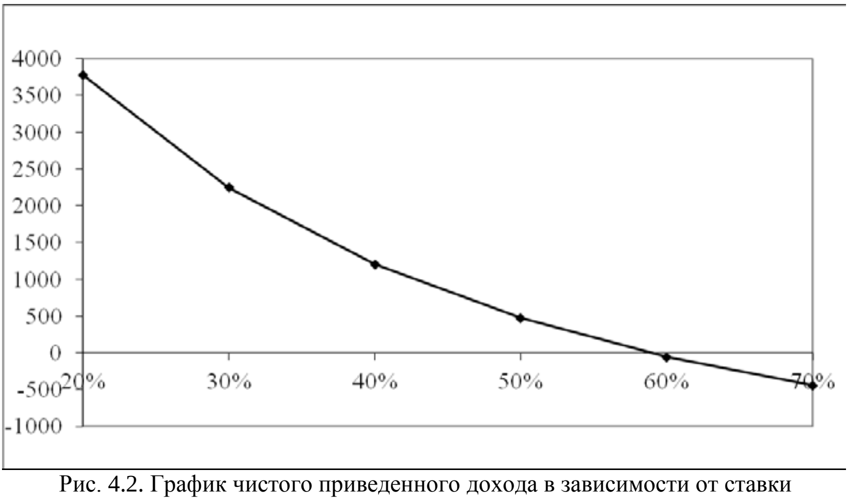

Рис. 4.2. График чистого приведенного дохода в зависимости от ставки дисконтирования

На рис. 4.2 изображен график чистого приведенного дохода в зависимости от ставки дисконтирования для типичного проекта.

Проект считается экономически эффективным, если внутренняя норма доходности больше ставки дисконтирования *IRR > r*. Проект считается экономически неэффективным, если внутренняя норма доходности меньше ставки дисконтирования или равна ей *IRR < r*.

При положительной чистой приведенной стоимости $NPV > 0$ внутренняя норма доходности больше ставки дисконтирования $IRR > r$.

При отрицательной чистой приведенной стоимости $NPV < 0$ внутренняя норма доходности меньше ставки дисконтирования $IRR < r$.

Внутренняя норма доходности показывает устойчивость инвестиционного проекта к изменению ставки дисконтирования. **Разница между ставкой дисконтирования и внутренней нормой доходности определяет запас прочности инвестиционного проекта.**

В случае, если бы проект осуществлялся только за счет заемных средств, внутренняя норма доходности *IRR* была бы равна такой наибольшей процентной ставки кредита, которая позволила бы расплатиться по кредиту из доходов, генерируемых проектом.

Недостатки:

1. Внутренняя норма доходности рассчитывается только численными или приближенными методами.
2. При сравнении взаимоисключающих проектов, различающихся по сроку жизни и масштабам инвестиций, использование критерия может дать неправильный результат.
3. Инвестиционный проект может иметь несколько значений внутренней нормы доходности в случае, если свободный денежный поток проекта меняет знак больше, чем один раз.
4. Для внутренней нормы доходности не выполняется свойство аддитивности.

4.5. Критерий индекс рентабельности (доходности) инвестиций PI

Индекс рентабельности (доходности) инвестиций (*Profitability Index) PI* – это отношение приведенной стоимости операционного денежного потока к приведенной стоимости инвестиционного денежного потока:

$$PI = \frac{\sum_{t=1}^{n} CF_t / (1+r)^t}{\sum_{t=0}^{n} INV_t / (1+r)^t},$$

где CF_t – денежный поток от операционной деятельности (*Cash Flow*) в период *t*, INV_t – денежный поток от инвестиционной деятельности в период *t*.

Проект является эффективным, если индекс рентабельности больше единицы *PI* > 1. Проект является неэффективным, если индекс рентабельности меньше единицы *PI* < 1.

При положительном чистом приведенном доходе $NPV > 0$ индекс рентабельности больше единицы $PI > 1$.

При отрицательном чистом приведенном доходе $NPV<0$ индекс рентабельности больше единицы $PI < 1$.

Индекс рентабельности характеризует доход на единицу инвестиций. При одинаковых значениях чистой приведенной стоимости выгодней будет тот проект, у которого больше индекс рентабельности.

Недостаток: для индекса рентабельности не выполняется свойство аддитивности.

4.6. Дисконтируемый срок окупаемости DPP

Дисконтируемый срок окупаемости (*Discounted Payback Period)* – это интервал времени, за который дисконтированная стоимость операционного денежного потока становится равной дисконтированной стоимости инвестиционного денежного потока:

$$\sum_{t=1}^{DPP} \frac{CF_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{DPP} \frac{INV_t}{(1+r)^t}.$$

Недостатки:

1. Для критерия дисконтируемый срок окупаемости не выполняется свойство аддитивности.

2. Дисконтируемый срок окупаемости не учитывает временную разницу получения доходов в пределах срока окупаемости.

Из всех рассмотренных критериев только для чистой приведенной стоимости выполняется свойство аддитивности.

Чистая приведенная стоимость *NPV* является наиболее предпочтительным критерием для оценки инвестиционных проектов.

Вопросы

1. Понятие инвестиции. Классификация инвестиций. Критерии оценки инвестиционных проектов.
2. Расчёт денежного потока от операционной деятельности проекта.
3. Критерий чистый приведённый доход проекта. Экономический смысл. Свойство аддитивности. График зависимости чистого приведённого дохода для типичного проекта.
4. Критерий внутренняя норма доходности проекта. Экономический смысл. График зависимости чистого приведённого дохода от ставки дисконтирования для типичного проекта. Недостатки критерия внутренняя норма доходности проекта.
5. Критерий индекс доходности (рентабельности). Экономический смысл. Недостаток критерия индекс доходности.
6. Критерий дисконтированный срок окупаемости проекта. Экономический смысл. Графическое изображение дисконтированного срока окупаемости проекта.

5. ОЦЕНКА ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ (ИНСТРУМЕНТОВ)

5.1. Базовая модель оценки финансовых активов. Метод дисконтированных денежных потоков

Финансовый актив является товаром на рынке капитала и имеет следующие характеристики:

1) текущая рыночная цена P;

2) теоретическая стоимость на основе доступной информации PV;

3) доходность;

4) риск.

Текущая рыночная цена финансового актива P реально существует и объективна в том смысле, что она объявлена и финансовый актив по ней равнодоступен любому участнику рынка. Теоретическая стоимость финансового актива субъективна и зависит от анализа инвестора.

Возможны 3 варианта для инвестора.

1. Цена финансового актива завышена $P > PV$, поэтому инвестору невыгодно приобретать его.

2. Цена финансового актива занижена $P < PV$, выгодно приобрести.

3.Текущая рыночная цена полностью отражает теоретическую стоимость актива $P = PV$.

Каждый финансовый актив имеет столько оценок теоретической стоимости, сколько существует инвесторов на рынке, заинтересованных в данном активе.

Метод дисконтированных денежных потоков

Любой финансовый актив (ценная бумага) может быть количественно оценен как дисконтированная (приведенная) стоимость будущих денежных потоков, генерируемых этим финансовым активом.

Схема денежных потоков, генерируемых финансовым активом, представлена на рис. 5.1.

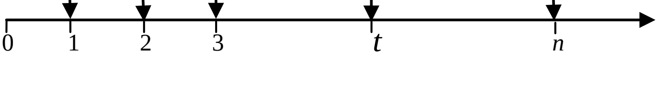

Рис. 5.1. Схема денежных потоков, генерируемых финансовым активом

Проблема заключается в том, насколько точно удастся сделать прогноз денежных потоков финансового актива. Такой подход известен как **фундаментальный анализ.**

Стоимость финансового актива может быть оценена по формуле (модель была предложена в 1938 году Дж. Уильямсом):

$$PV = \frac{CF_1}{(1+r_1)^1} + \frac{CF_2}{(1+r_2)^2} + \ldots + \frac{CF_n}{(1+r_3)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r_t)^t},$$

CF_t – ожидаемые денежные поступления в период *t*, *r* – ставка дисконтирования в период *t*, *n* – число периодов, в течение которых ожидается поступление денежных потоков.

Если ставка дисконтирования постоянна r = const, то формула для метода дисконтированных денежных потоков упрощается:

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}.$$

Оценка теоретической стоимости финансового актива зависит:

1) от ожидаемых денежных поступлений CF_t;

2) горизонта планирования *n;*

3) ставки дисконтирования *r*.

Для инвестора наиболее существенным является ставка дисконтирования. **Ставка дисконтирования (приемлемая норма прибыли) характеризует доходность альтернативных вариантов инвестиций, доступных данному инвестору.**

Поэтому ставки дисконтирования будут отличаться у разных инвесторов.

Если денежные потоки постоянны

$$CF_1 = CF_2 = \ldots = CF_t = CF = \text{const}$$

и горизонт планирования бесконечен (или очень большой) $n \to \infty$, то, применяя формулу для бесконечного аннуитета, теоретическая оценка финансового актива примет следующий вид:

$$PV = \frac{CF}{r}.$$

На практике данной формулой пользуются при сроке $n > 10$ лет.

Первая задача инвестора: определение теоретической стоимости актива.

Инвестор определяет теоретическую стоимость актива *PV*, сделав прогноз денежных потоков, генерируемых финансовым активом, и задав приемлемую норму прибыли (ставку дисконтирования). Полученную теоретическую стоимость актива PV инвестор сравнивает с рыночной ценой P и принимает решение.

Вторая задача инвестора: определение нормы прибыли актива.

Инвестор, зная рыночную цену и сделав прогноз денежных потоков, генерируемых финансовым активом рассчитывает норму прибыли (доходность) актива. Рассчитанную норму прибыли инвестор сравнивает с приемлемым для себя вариантом и принимает решение.

5.2. Оценка стоимости облигаций

Облигация – ценная бумага, свидетельствующая, что ее владелец предоставил заем эмитенту этой бумаги.

Облигация обеспечивает два вида дохода, в большинстве случаев владелец получает проценты (по купонам) и в конце срока номинальную выкупную цену.

Основные параметры облигации:

1) номинальная цена (номинал);
2) выкупная цена или правило ее определения;
3) дата погашения и дата выплаты процентов;
4) купонная процентная ставка (купонная доходность);
5) текущая доходность;
6) полная доходность.

Выплаты процентов осуществляются ежегодно, по полугодиям или ежеквартально.

Облигации можно классифицировать по следующим параметрам.

1. По методу обеспечения:

- государственные и муниципальные облигации;
- облигации частных организаций, которые обеспечиваются залогом;
- облигации частных организаций без специального обеспечения.

2. По сроку:

- с фиксированной датой погашения;
- без указания даты погашения (бессрочные).

3. По способу погашения номинала (выкупа облигации):

- разовым платежом;
- распределенными во времени погашениями доли номинала (по частям);

- последовательным погашением доли общего количества облигаций.

4. По методу выплаты дохода:

- выплачиваются только купонные проценты, срок выкупа не существует (бессрочные облигации);
- выплата купонных процентов не предусматривается (облигация с нулевым купоном);
- проценты выплачиваются вместе с номиналом в конце срока;
- периодически выплачиваются купонные проценты, в конце срока выплачивается номинал и выкупная цена. Этот вид является преобладающим.

С момента выпуска и до погашения облигации продаются и покупаются по рыночным ценам на фондовом рынке.

Курс облигации – это рыночная цена облигации в расчете на 100 денежных единиц номинальной цены:

$$K = \frac{P}{N} \times 100\%,$$

где K – курс облигации; P – рыночная цена облигации; N – номинальная цена облигации.

Оценка стоимости облигации

Для оценки стоимости облигации применим базовую модель оценки финансовых активов (метод дисконтированных денежных потоков):

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}.$$

Денежный поток, генерируемый облигацией, складывается из периодически получаемых по купонам процентов и получением номинала или выкупной цены облигации в конце срока:

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^n}.$$

Купонный доход облигации представляет собой постоянную годовую ренту постнумерандо:

$$CF_t = Ng,$$

где g – купонная ставка.

Общая формула для оценки облигации примет вид:

$$PV = Ng\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^n}.$$

Учитывая, что сумма коэффициентов дисконтирования равна коэффициенту аннуитета ренты:

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^t} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^n},$$

получим окончательную формулу для оценки стоимости облигации:

$$PV = N\left[\frac{g}{r} + (1-\frac{g}{r})\frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

Оценка стоимости облигации с нулевым купоном

Общая формула для оценки облигации, имеющей два вида дохода:

$$PV = Ng\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^n}.$$

У облигаций с нулевым купоном выплата процентов не предусмотрена, поэтому первое слагаемое в общей формуле оценки облигации отсутствует.

Формула для оценки облигаций с нулевым купоном примет вид:

$$PV = \frac{N}{(1+r)^n}.$$

Стоимость облигации с нулевым купоном определяется величиной номинала или выкупной цены в конце срока.

Оценка стоимости бессрочной облигации

Общая формула для оценки облигации, имеющей два вида дохода:

$$PV = Ng\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^n}.$$

У бессрочной облигации $(n \to \infty)$ выплата номинала или выкупной цены в конце срока не предусмотрена, поэтому второе слагаемое в общей формуле оценки облигации отсутствует:

$$PV = Ng\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^t}.$$

Учитывая выражение:

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^t} = \frac{1}{r},$$

окончательно получаем формулу для оценки бессрочной облигации:

$$PV = \frac{Ng}{r}.$$

Стоимость бессрочной облигации определяется купонным доходом.

Доходность облигации

Различают следующие виды доходности облигации:

1) купонная доходность g;

2) текущая доходность i_t;

3) полная доходность *YTM* (*yield to maturity*).

Купонная доходность g задана и обозначена на облигации.

Текущая доходность i_t характеризует отношение купонного дохода к цене приобретения облигации. Эта доходность не учитывает второй доход – получение номинальной стоимости или выкупной цены облигации. Текущая доходность непригодна при сравнении доходности разных видов облигаций. Например, у облигаций с нулевым купоном текущая доходность равна нулю.

Текущая доходность определяется по формуле:

$$i_t = \frac{Ng}{P} = \frac{g}{K} \times 100\%.$$

Полная доходность (**ставка помещения**) измеряет реальную эффективность инвестиций в облигацию для инвестора в виде годовой ставки сложных процентов. Учитывает оба источника дохода: периодически получаемые по купонам проценты и получение номинала или выкупной цены облигации в конце срока.

Для определения полной доходности облигации необходимо приведенную стоимость всех поступлений приравнять цене облигации:

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^n}.$$

Решая это уравнение относительно ставки дисконтирования *r*, определим полную доходность облигации *YTM*. Уравнение является трансцендентным и аналитически не решается. Полная доходность может быть определена только численными методами с применением программного обеспечения (электронная таблица Excel) или с помощью приближенных оценок.

Для приближенной оценки полной доходности облигации применяют формулу:

$$YTM = \frac{Ng + (N - P)/n}{(N + P)/2},$$

где P – рыночная цена облигации; n – число лет, оставшихся до погашения облигации.

5.3. Оценка стоимости акций. Модель нулевого роста

Акция – это долевая ценная бумага, подтверждающая участие ее владельца в собственном капитале общества.

Акции не имеют установленных сроков обращения.

Покупка акций сопровождается для инвестора приобретением прав:

1) права участия в управлении обществом (за исключением привилегированных акций),

2) права участия в распределении прибыли общества,

3) права получения доли имущества, пропорциональной его вкладу в уставный капитал, в случае ликвидации данного общества.

Выделяют две категории акции: **обыкновенные и привилегированные.**

Обыкновенная акция дает право:

1) на получение дохода, зависящего от результатов деятельности общества,

2) участие в управлении (одна акция – один голос).

Выплата дивидендов по обыкновенным акциям не гарантирована и зависит исключительно от прибыли общества и решения собрания акционеров.

Привилегированная акция дает преимущественное право

1) на получение гарантированных дивидендов;

2) долю в остатке активов при ликвидации общества.

Дивиденды по привилегированным акциям выплачиваются независимо от прибыли общества и до их распределения между держателями обыкновенных акций.

Для оценки акций используются следующие характеристики:

1) номинальная стоимость акции – стоимость, указанная на бланке акции;

2) курсовая (текущая рыночная) цена – по этой цене акция оценивается на рынке ценных бумаг;

3) балансовая стоимость акции рассчитывается как отношение общей стоимости активов по балансу за минусом задолженности кредитора к общему числу выпущенных акций.

Оценка стоимости обыкновенной акции

Для оценки стоимости акции применим базовую модель оценки финансовых активов (метод дисконтированных денежных потоков):

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}.$$

Денежный поток, генерируемый акцией каждый год, состоит из дивидендов в денежной форме DIV_t. Так, для акции не установлен срок обращения ($n \to \infty$), и формула для оценки стоимости акции запишется в следующем виде:

$$PV = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{DIV_t}{(1+r)^t}.$$

Стоимость обыкновенной акции определяется как дисконтированный денежный поток дивидендов по норме доходности, которая может быть получена на рынке капиталов от ценных бумаг с подобной степенью риска.

Существуют три варианта динамики ожидаемых дивидендов:

1) дивиденды постоянны;

2) дивиденды возрастают с постоянным темпом прироста;

3) дивиденды возрастают с изменяющимся темпом прироста.

Если дивиденды постоянны $DIV_t = DIV = const,$ то, учитывая формулу для бесконечного аннуитета, стоимость акции примет вид:

$$PV = \frac{DIV}{r}.$$

Оценку акций по этой формуле называют **моделью нулевого роста.**

Оценка стоимости привилегированной акции

Привилегированные акции, как и бессрочные облигации, генерируют доход неопределенно долго ($n \to \infty$). Оценка стоимости привилегированной акции вычисляется:

$$PV = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{DIV_t}{(1+r)^t} = \frac{DIV}{r}.$$

5.4. Оценка стоимости обыкновенной акции с постоянным темпом прироста дивидендов. Модель постоянного роста

Рассмотрим оценку стоимости акции, выплата дивидендов по которой увеличивается с постоянным темпом прироста g. Схема денежных потоков, генерируемых акцией, представлена на рис. 5.2.

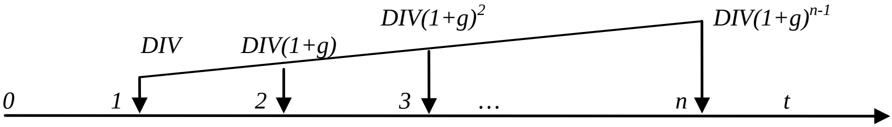

Рис. 5.2. Схема денежных потоков, генерируемых акцией

Базовая величина дивиденда равна DIV, и ежегодно она увеличивается с темпом прироста g.

Оценка стоимости акции в этом случае определяется по формуле:

$$PV = \frac{DIV}{1+r} + \frac{DIV(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{DIV(1+g)^2}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{DIV(1+g)^{n-1}}{(1+r)^n}.$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$PV = \frac{DIV}{1+r}\left\{1 + \frac{1+g}{1+r} + \frac{(1+g)^2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+r)^{n-1}}\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \dfrac{1+g}{1+r}$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим:

$$PV = \frac{DIV}{1+r}\left[\frac{\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n - 1}{\left(\frac{1+g}{1+r}\right) - 1}\right] = DIV\,\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n}{r-g}.$$

При выполнении условия $g < r$ и $n \to \infty$ формула примет вид:

$$PV = \frac{DIV}{r-g}.$$

Данная формула называется **моделью постоянного роста,** или **моделью Гордона.** Формулой можно пользоваться, только если $g < r$.

Вопросы

1. Базовая модель оценки финансовых активов. Метод дисконтированных денежных потоков. Задачи инвестора.

2. Определение облигации. Классификация облигаций. Параметры облигации.

3. Расчет стоимости облигаций. Расчёт стоимости облигации с нулевым купоном. Оценка бессрочной облигации.

4. Виды доходности облигаций. Расчет текущей и полной доходности облигации.

5. Определение акции. Классификация акций. Параметры акции. Оценка обыкновенных акций. Модель нулевого роста. Оценка привилегированных акций.

6. Оценка обыкновенных акций с постоянным темпом прироста дивидендов. Модель постоянного роста.

6. АНАЛИЗ КРЕДИТНЫХ ОПЕРАЦИЙ (СДЕЛОК)

Существует большое количество видов кредитных сделок: потребительский кредит, ипотека, лизинг, автокредит и другие. Конкретные условия кредитной сделки определяются в финансовом контракте, являющемся юридическим документом.

Кредитные сделки разделяются на краткосрочные (срок меньше года) и долгосрочные (срок более года).

6.1. Потребительский кредит

Потребительский кредит представляет собой единовременную выдачу кредита (займа), который выплачивается одним платежом. В сделке участвуют два лица: кредитор, предоставляющий в долг деньги, и заемщик (дебитор), получающий деньги. Схема потребительского кредита представлена на рис. 6.1.

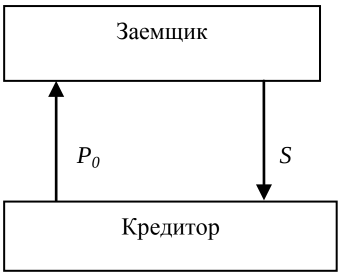

Рис. 6.1. Схема потребительского кредита

Проценты начисляются однократно на весь объем кредита P_0 в момент открытия кредита. Такой метод называется разовым начислением процентов. Погашение долга с процентами производится равными частями на протяжении всего срока кредита.

Формула для расчета объёма возвращаемых средств:

$$S = P_0(1 + ni),$$

где n – срок кредита в годах; S – объём возвращаемых средств.

Величина разового погасительного платежа R составит:

$$R = \frac{S}{pn},$$

где p – количество платежей в году.

6.2. Погашение задолженности при начислении по простой процентной ставке

Краткосрочный кредит иногда погашается с помощью частичных платежей. Существуют два метода:

1) актуарный метод;

2) метод расчета по правилу торговца.

Актуарный метод

На рис. 6.2 изображен график платежей и **контур кредитной сделки** для актуарного метода.

Контур кредитной сделки – это графическое изображение процесса погашения долга частичными (периодическими) платежами.

При расчётах используются обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды. Проценты при актуарном методе начисляются на невыплаченную часть долга. Если частичный платеж ($R_1, R_2, R_3,$) меньше начисленных процентов (S_1-P_0, S_2-P_1, S_3-P_2), то его не учитывают в момент поступления и приплюсовывают к следующему платежу. Необходимым условием кредитной сделки является сбалансированность вложений и отдачи.

Баланс финансовой операции должен обеспечить эквивалентность выплат и поступлений.

Сбалансированная операция имеет замкнутый контур: последний платеж полностью выплачивает остаток задолженности:

$$P_1 = P_0(1 + t_1 i) - R_1;$$

$$P_2 = P_1(1 + (t_2 - t_1)i) - R_2;$$

$$P_3 = P_2(1 + (t_3 - t_2)i) - R_3 = 0.$$

Актуарный метод применяется в финансовых операциях со сроком больше года.

Правило торговца

На рис. 6.3 изображен контур кредитной сделки для метода расчета по правилу торговца.

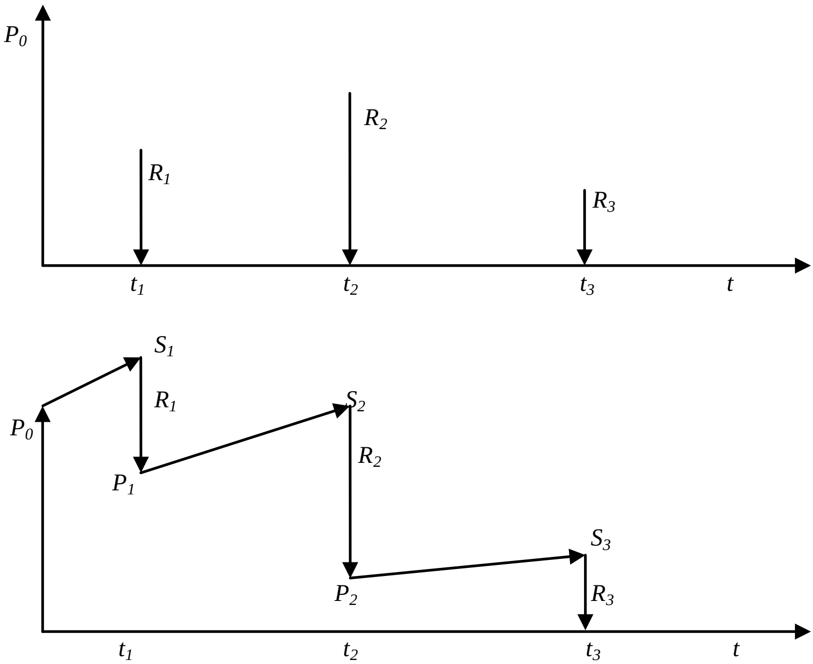

Рис. 6.2. График платежей и контур кредитной операции для актуарного метода

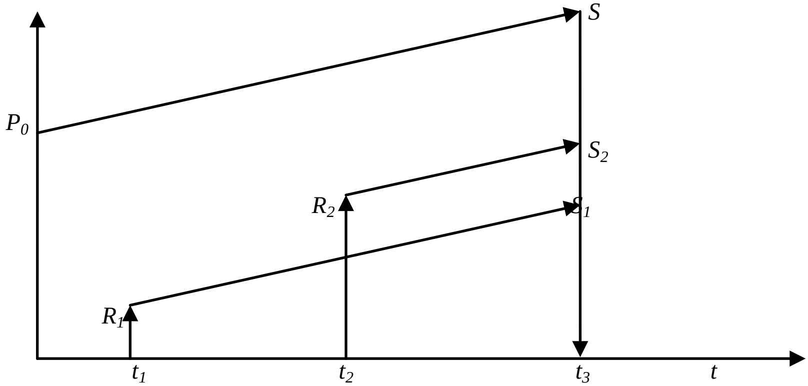

Рис. 6.3 Контур кредитной сделки для метода расчета по правилу торговца

Сумма долга с начисленными процентами остается постоянной до полного погашения:

$$S = P_0(1+t_3 i).$$

Параллельно идёт накопление частичных платежей, сумма которых после наращения к концу срока должна быть равна наращенной сумме долга:

$$P_0(1+t_3 i) = R_1[1+(t_3-t_1)i] + R_2[1+(t_3-t_2)i].$$

Для произвольного числа n частичных выплат:

$$P_0(1+t_n i) = \sum_{j=1}^{n} R_j[1+(t_n-t_j)i],$$

где R_j – сумма j-го платежа.

6.3. Погашение задолженности при начислении по сложной процентной ставке

Параметрами долгосрочной кредитной операции является сумма кредита P_0, срок операции t_n, процентная ставка i, схема погашения кредита частичными платежами: t_1,R_1; t_2,R_2; t_3,R_3;… t_n,R_n..

На рис. 6.4 изображен график платежей и контур кредитной сделки.

В случае долгосрочной кредитной сделки выплата процентов за кредит и его погашение осуществляются в течение продолжительного времени. Проценты при долгосрочном кредитовании начисляются на невыплаченную часть долга по актуарному методу.

Сбалансированная операция имеет замкнутый контур: последний платеж полностью выплачивает остаток задолженности:

$$P_1 = P_0(1+i)^{t_1} - R_1;$$

$$P_2 = P_1(1+i)^{t_2-t_1} - R_2;$$

$$P_3 = P_2(1+i)^{t_3-t_2} - R_3 = 0.$$

Выполняя преобразования, получим:

$$P_0 = \frac{R_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{R_2}{(1+i)^{t_2}} + \frac{R_3}{(1+i)^{t_3}}.$$

Для произвольного числа периодов получим балансовое уравнение:

$$P_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}.$$

Сумма всех современных стоимостей платежей заемщика равна первоначальной величине долга.

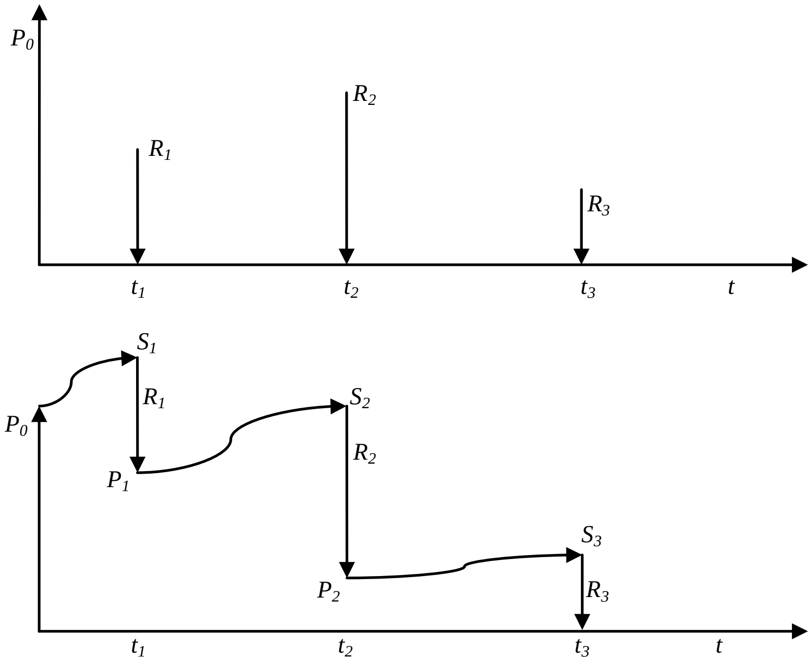

Рис. 6.4. График платежей и контур кредитной операции для долгосрочной кредитной операции

В случае постоянных платежей заемщика $R_k = R = const$ балансовое уравнение примет вид:

$$P_0 = R\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^{t_k}} = Ra_{n;i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

В случае постоянных платежей заемщика (распространенный случай) кредитная сделка определяется 3 параметрами: величиной платежа R, сроком сделки n, процентной ставкой i.

Величина постоянного платежа заёмщика определится как отношение первоначальной суммы долга и коэффициента аннуитета:

$$R = \frac{P_0}{a_{n;i}} = P_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Эффективность кредитной сделки определится процентным доходом, получаемым кредитором за весь срок сделки. Процентный доход определяется как разность между суммой платежей заемщика и первоначальной суммой долга (объемом кредита):

$$I = \sum_{k=1}^{n} R_k - P_0 \ .$$

6.4. Схемы погашения долгосрочной кредитной сделки

При долгосрочных кредитных сделках начисление процентов производится многократно каждый временной период. Обычно каждый месяц, реже – квартал. Сумма процентов зависит от невыплаченной (невозвращенной, непогашенной) части долга. Поэтому различные схемы погашения кредита влияют на сумму уплачиваемых процентов за кредит.

Различают следующие схемы погашения кредита:

1. Произвольные периодические платежи.
2. Постоянные периодические платежи.
3. Нарастающие (прогрессивные) периодические платежи.
4. Убывающие (регрессивные) периодические платежи.

Периодический платеж R_t состоит из двух частей:

$$R_t = K_t + I_t \ ,$$

где K_t – первая часть платежа, идущего на погашение основного долга, I_t – вторая часть платежа, направляемого на выплату процентов по кредиту.

Часть платежа I_t, идущего на выплату процентов по кредиту, определяется как произведение процентной ставки на невыплаченную часть долга в предыдущем периоде:

$$I_t = P_{t-1} i \ .$$

Невыплаченная часть долга P_t определяется как разность между невыплаченной частью долга на предыдущем шаге и выплатой, идущей на погашение основной части долга:

$$P_t = P_{t-1} - K_t \ .$$

Расчет постоянных периодических платежей

Расчет постоянных периодических платежей долгосрочной кредитной сделки производится по следующему алгоритму:

1. Определение постоянного платежа R:

$$R = \frac{P_0}{a_{n;i}} = P_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} .$$

2. Расчёт части платежа I_t, идущего на выплату процентов по кредиту в периоде t:

$$I_t = P_{t-1} i .$$

3. Вычисление части платежа K_t, направляемого на погашение основного долга в периоде t:

$$K_t = R_t - I_t .$$

4. Определение невыплаченной части долга P_t в периоде t:

$$P_t = P_{t-1} - K_t .$$

5. Повторение расчетов для следующего периода $t = t + 1$, переход к пункту 2.

Подробная схема расчетов для постоянных платежей приводится ниже.

1 период $I_1 = P_0 i$, $K_1 = R - I_1$, $P_1 = P_0 - K_1$,

2 период $I_2 = P_1 i$, $K_2 = R - I_2$, $P_2 = P_1 - K_2$,

3 период $I_3 = P_2 i$, $K_3 = R - I_3$, $P_3 = P_2 - K_3$,

…

t период $I_t = P_{t-1} i$, $K_t = R - I_t$, $P_t = P_{t-1} - K_t$,

…

n период $I_n = P_{n-1} i$, $K_n = R - I_n$, $P_n = P_{n-1} - K_n = 0$.

Расчёт платежей, изменяющихся по линейному закону

Расчёт периодических платежей, изменяющихся по линейному закону, осуществляется по формуле:

$$R_t = R_1 + (t-1)\Delta R ,$$

где R_1 – размер платежа, выплачиваемого в первый период; ΔR – величина прироста платежа.

Если $\Delta R = 0$, то поток платежей постоянный;

Если $\Delta R > 0$, то поток платежей нарастающий;

Если $\Delta R < 0$, то поток платежей убывающий.

Подставим выражение $R_t = R_1 + (t-1)\Delta R$ в балансовое уравнение:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+i)^t} ,$$

получим:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_1 + (t-1)\Delta R}{(1+i)^t}.$$

Это выражение является арифметико-геометрической прогрессией. Применяя формулы для суммы арифметической и геометрической прогрессий, придем к выражению:

$$P_0 = R_1 a_{i,n} + \left(\frac{a_{i,n}}{i} - \frac{n}{i(1+i)^n} \right) \Delta R.$$

При заданной сумме кредита P_0, сроке кредита n и процентной ставке i балансовое условие между кредитором и заемщиком зависит от двух параметров: величины выплаты в первый период R_1 и величины прироста платежа ΔR.

Если задать величину прироста платежа ΔR, то величину выплаты в первый период R_1 возможно определить из уравнения:

$$R_1 = \frac{P_0}{a_{i,n}} - \left(\frac{1}{i} - \frac{n}{a_{i,n} i (1+i)^n} \right) \Delta R.$$

Алгоритм расчета периодических платежей, изменяющихся по линейному закону:

1. Задание величины прироста платежа ΔR.
2. Определение первого платежа R_1:

$$R_1 = \frac{P_0}{a_{i,n}} - \left(\frac{1}{i} - \frac{n}{a_{i,n} i (1+i)^n} \right) \Delta R.$$

3. Определение части платежа I_t, идущего на выплату процентов по кредиту в периоде t:

$$I_t = P_{t-1} i.$$

4. Определение части платежа K_t, идущего на погашение основного долга:

$$K_t = R_t - I_t.$$

5. Определение невыплаченной части долга P_t:

$$P_t = P_{t-1} - K_t.$$

6. Определение платежа в следующем периоде $t = t + 1$:

$$R_{t+1} = R_t + \Delta R.$$

7. Повторение расчетов для следующего периода $t = t + 1$, переход к пункту 3.

Подробная схема расчетов для платежей, изменяющихся по линейному закону, приводится ниже.

1 период $I_1 = P_0 i$, $K_1 = R_1 - I_1$, $P_1 = P_0 - K_1$, $R_2 = R_1 + \Delta R$,

2 период $I_2 = P_1 i$, $K_2 = R_2 - I_2$, $P_2 = P_1 - K_2$, $R_3 = R_2 + \Delta R$,

3 период $I_3 = P_2 i$, $K_3 = R_3 - I_3$, $P_3 = P_2 - K_3$, $R_4 = R_3 + \Delta R$,

…

t период $I_t = P_{t-1} i$, $K_t = R_t - I_t$, $P_t = P_{t-1} - K_t$, $R_{t+1} = R_t + \Delta R$,

…

n период $I_n = P_{n-1} i$, $K_n = R_n - I_n$, $P_n = P_{n-1} - K_n = 0$.

Вопросы

1. Классификация кредитных сделок. Потребительский кредит.
2. Погашение задолженности по простой процентной ставке. Актуарный метод. График платежей и контур кредитной операции для актуарного метода. Правило торговца. Контур кредитной операции для метода правило торговца.
3. Баланс долгосрочной кредитной сделки. Контур кредитной операции. Вывод балансового уравнения. Определение величины постоянного периодического платежа заемщика.
4. Схемы погашения долгосрочной кредитной сделки.
5. Расчет постоянных периодических платежей.
6. Расчёт платежей, изменяющихся по линейному закону.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1

Задача № 1. На банковский вклад в размере ***P*** руб. начисляются проценты по простой ставке наращения ***i %*** в течение ***0,8*** года. Определить проценты и наращенную сумму.

Задача № 2. Клиент внес на банковский депозит сумму в размере ***P*** руб. на срок ***n*** лет под сложную процентную ставку ***i %*** годовых. Определить наращенную сумму при ежегодном, ежеквартальном и ежемесячном начислении процентов.

Задача № 3. На банковский вклад в размере ***P*** руб. начисляются проценты по сложной годовой ставке наращения ***i %*** в течение ***n*** лет. Определить наращенную сумму и силу роста при непрерывном начислении процентов.

Задача № 4. На банковском депозите к концу срока договора накопилась сумма ***100000*** руб. Срок договора – ***n*** лет, номинальная ставка процентов ***i %***. Определить современную стоимость суммы при ежеквартальном и ежемесячном начислении процентов.

Задача № 5. Вексель, имеющий номинал ***P*** руб., учтен в финансовом учреждении по учетной ставке ***d*** годовых за **150** дней до его погашения. Определить стоимость векселя при учёте.

Задача № 6. Вексель номиналом ***P*** руб. учтен по сложной учётной ставке ***d***. Срок платежа по векселю наступает через ***1,4*** года, Определить стоимость векселя при учёте и дисконт при ежегодном и ежемесячном дисконтировании.

Задача № 7. Имеется следующий график внесения денег на банковский депозит:

1 марта 2010 г. – 40000 руб., 1 марта 2011 г. – 60000 руб.

1 сентября 2011 г. – 50000 руб., 1 марта 2012 г. – 70000 руб.

Определить наращенную сумму денежного потока на 1 марта 2012 г. и современную стоимость на 1 марта 2010 г. при процентной ставке наращения ***i %.*** Нарисовать график платежей.

Задача № 8. В банк в течение ***n*** лет ежегодно в конце года поступает денежная сумма в размере ***P*** руб., на которую начисляются проценты по сложной ставке наращения ***i %*** годовых. Определить коэффициенты наращения и приведения (аннуитета) ренты, а также современную стоимость и наращенную сумму денежного потока.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2

Задача № 1. Инвестиционный проект осуществляется в течение 5 лет. Ежегодный денежный поток от операционной деятельности проекта равен ***1 000 000*** руб. Однократные инвестиции до начала реализации проекта составляют ***2 000 000*** руб. Определить, является ли проект эффективным по критериям: чистой приведенной стоимости ***NPV,*** внутренней нормы доходности ***IRR***, индексу рентабельности ***PI***, если минимальная норма доходности, устраивающая инвестора, ***r***. Построить график зависимости чистой приведенной стоимости от ставки дисконтирования.

Задача № 2. Номинал облигации, до погашения которой остается ***n*** лет, равен ***P*** руб., купон ***i %*** выплачивается один раз в год. Определить цену облигации, чтобы она обеспечила покупателю доходность до погашения в размере (***i + 7***) % годовых.

Задача № 3. Облигация с нулевым купоном номинальной стоимостью ***P*** руб. и сроком погашения ***n*** лет продается за (***P-5000***) руб. Выгодно ли экономически приобретать эти облигации, если имеется возможность инвестировать средства с нормой прибыли ***i %*** годовых.

Задача № 4. Облигация номинальной стоимостью ***10000*** руб. с годовой купонной ставкой ***i %,*** имеющая текущую рыночную стоимость ***3352*** руб., будет приниматься к погашению через ***n*** лет. Рассчитать полную доходность облигации.

Задача № 5. Компания гарантирует выплату дивидендов в размере ***0,01P*** руб. на акцию в конце каждого года в течение неопределенно долгого времени. Определить, что предпочтительнее для инвестора, приобрести акции компании по цене (***P-460***) руб. или поместить деньги на вклад под ***i %*** годовых.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Четыркин, Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов [Текст] / Е.М. Четыркин. – М.: Дело, 2005. – 320 с.

2. Кузнецов, Б.Т. Математические методы финансового анализа [Текст]: учеб. пособие / Б.Т. Кузнецов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 160 с.

3. Ковалев В.В. Курс финансовых вычислений [Текст] / В.В. Ковалев, В.А. Уланов. – М.: Проспект, 2014. – 560 с.

4. Брейли, Р. Принципы корпоративных финансов [Текст] / Р. Брейли, С. Майерс; пер. с англ. – М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2008. – 1008 с.

5. Бригхем, Ю. Финансовый менеджмент: полный курс в 2-х томах. [Текст] / Ю. Бригхем, Л. Гапенски; пер. с англ.; под ред. В.В. Ковалёва. – СПб.: Экономическая школа, 2005.

6. Виленский, П.Л. Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика [Текст]: учеб. пособие / П.Л. Виленский, В.Н. Лившиц, С.А. Смоляк. – М.: Дело, 2008. – 1104 с.