МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

А.Л. САРАЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ АНАЛИЗА ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Утверждено редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для бакалавров направлений 38.03.01 «Экономика» и 38.03.05 «Бизнес-информатика» и магистров направлений 38.04.01 «Экономика» и 38.04.05 «Бизнес-информатика»

Самара
Издательство Самарского университета
2016

УДК 330.101.542
ББК 65.012.1 я73
С20

Рецензенты:
доктор экономических наук, доцент Н.М. Тюкавкин,
доктор экономических наук, профессор Б.Я. Татарских

Сараев, Александр Леонидович

С20 Математические методы и модели анализа поведения потребителей: учеб. пособие / *А.Л. Сараев.* − Самара: Изд-во Самарского университета, 2016. – 84 с.

ISBN 978-5-7883-1111-1

В публикуемом учебном пособии представлены основные математические методы анализа поведения потребителя. Подробно рассмотрены математические модели потребительских предпочтений и их отношений. Описаны кривые безразличия и их свойства, функции полезности и нормы замещения, бюджетные ограничения потребителя, максимизация полезности и минимизация расходов потребителя, особые случаи оптимального выбора, абсолютно взаимозаменяемые блага и абсолютно взаимодополняемые блага. Представлен набор заданий для самостоятельной работы.

Учебное пособие предназначено для бакалавров направлений 38.03.01 «Экономика» и 38.03.05 «Бизнес-информатика» и магистров направлений 38.04.01 «Экономика» и 38.04.05 «Бизнес-информатика».

УДК 330.101.542
ББК 65.012.1 я73

ISBN 978-5-7883-1111-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение научной дисциплины «Экономическая теория» явилось результатом поиска различных ответов на основной вопрос экономики: «Чем определяется и от чего зависит благосостояние наций.

Появлению и становлению экономической теории предшествовали многочисленные дискуссии XV–XVII веков. специалистов о том, что эффективнее для развития экономики страны: дешевая национальная валюта и запрет на ввоз иностранной валюты или превышение экспорта над импортом.

Становление экономической теории в качестве научной дисциплины экономической науки окончательно оформилось лишь в конце XVIII веке. Это явилось результатом научных исследований основоположников классической школы, согласно которым основным источником национального богатства было признано общественное разделении труда, координируемое невидимой рукой рынка.

Уже в середине XIX века областью научных интересов экономистов стало создание теории ценности и описание механизма функционирования рынка в условиях ограниченных ресурсов. Со второй половины XIX века экономическая теория стала развиваться по трем методологически различным направлениям.

1. Неоклассическое направление.

Представителями этого направления стали неоклассики – продолжатели традиций классической школы. На основе совершенствования классических методов экономического анализа они к началу XX века разработали стройную теорию рыночного хозяйства, в которой экономическая роль государства была сведена к минимуму. Согласно этой теории хозяйственная жизнь страны протекает на основе объективных законов, независимо от воли и желания людей.

2. Институциональное направление.

Представители этого направления – экономисты исторической школы считают, что экономическая жизнь страны регулируется не механизмом рынка, а специфическими для каждой нации исторически сложившимися социальными институтами, среди которых решающая роль принадлежит государству. Представители этого направления интерпретируют экономические явления с позиций философии и социологии, а не с позиций методов экономического анализа.

3. Направление политической экономии.

Представители этого направления – марксисты, опираются на экономическое учение К. Маркса. Согласно этой теории, признающей наличие объективных экономических законов, характер рыночных отношений объявляется преходящим, временным и несовместимым с представлениями людей о социальной справедливости.

Основное, неоклассическое направление развитие научных исследований в области экономики в XX веке существенно продвинулось вперед во многом благодаря работам Дж.М. Кейнса.

Результатом его оригинального подхода к анализу национального хозяйства и значительным расширением современных представлений о характере функционирования рыночной экономики стало возникновение двух новых разделов экономической теории – макроэкономики и микроэкономики.

Предметом изучения макроэкономики стали факторы, определяющие объем и динамику национального дохода, занятость, уровень цен, темпы инфляции, конъюнктурные циклы, темпы экономического роста.

Предметом изучения микроэкономики стали традиционные проблемы теории ценности. Это – согласование хозяйственных целей множества индивидуальных потребителей и производителей посредством рыночного ценообразования и механизм распределения национального дохода.

Имея один и тот же объект исследования – национальное хозяйство, микро и макроэкономика различаются кругом изучаемых проблем и инструментами анализа.

Микроэкономика изучает локальные компоненты общественного хозяйства. Такими компонентами являются отдельные производители и потребители, фирмы и домашние хозяйства и т.д. Микроэкономический подход выводит функционирование экономической системы в целом из поведения отдельных экономических субъектов. Микроэкономика исследует цели и средства отдельных экономических субъектов, условия совместимости их хозяйственных планов, механизм взаимодействия и координации индивидуальных хозяйств. Такая координация обеспечивается механизмом рыночного ценообразования, который и является основным предметом исследования микроэкономики.

Для моделирования адекватных логически непротиворечивых и экспериментально подтверждаемых описаний экономических событий используются универсальные научные приемы.

Формулируются новые понятия и определения для обозначения наблюдаемых явлений, выдвигаются гипотезы о способах взаимодействия взаимозависимых наблюдаемых объектов, разрабатываются концепции, модели и механизмы рассматриваемых экономических процессов. Вариант алгоритма процесса создания экономической теории представлен на рис.1.

Модель любого экономического явления или процесса всегда проще реальности. Такое упрощенное представление действительности достигается за счет игнорирования несущественных для целей исследования свойств наблюдаемого объекта. Например, в рамках экономической теории человек – субъект экономики всегда принимает решения только на основе тщательного сравнения ожидаемых выгод и потерь от совершаемых поступков, а все остальные человеческие качества не принимаются во внимание.

Модель изучаемого объекта экономики всегда содержит две группы переменных взаимозависимых параметров. Это экзогенные переменные, получаемые в результате наблюдения за объектом и его свойствами, и эндогенные переменные, определяемые путем анализа модели и решения соответствующих задач.

Рис.1. Алгоритм создания экономической теории.

При изучении сложных экономических процессов широко используется метод частичного анализа, согласно которому переменными факторами принимаются только те факторы, воздействие которых на изучаемый объект желательно установить. Остальные факторы считаются заданными и постоянными величинами.

После проведения частичного анализа при необходимости проводится общий анализ, учитывающий комплексное воздействие всех основных факторов на формирование исследуемого явления. При этом, как правило, проводится проверка выводов частичного анализа на взаимоисключение.

При проведении микроэкономического анализа предполагается, что поведение экономических субъектов является рациональным, намеченные цели достигаются с наименьшими издержками максимальным результатом. Цель производителей заключается в максимизации прибыли предприятия, а целью потребителей является максимизация индивидуального благосостояния, или индивидуальной полезности. Экономическое понимание полезности блага заключается в его пригодности для удовлетворения потребностей человека, при этом ее следует отличать от полезности в физиологическом смысле. Например, существует набор благ вредных с медицинской точки зрения, но эти, же блага являются полезными с точки зрения экономики.

Экономические модели в зависимости от объекта исследования делятся на оптимизационные модели и равновесные модели. Первые описывают поведение отдельных экономических субъектов, оптимизирующие свои цели при заданных возможностях. Вторые представляют результат взаимодействия всех хозяйствующих агентов и выявляются условия совместимости их целей.

Способы достижения целей экономическим субъектом зависят от условий для принятия решений. В связи с этим различают принятие решений в условиях определенности, принятие решений в условиях неопределенности и принятие стратегические решений.

Принятие решений происходит в условиях определенности, если экономические субъекты полностью информированы обо всех обстоятельствах экономической ситуации. В таких условиях задачи принятия решений субъектом экономики сводятся к нахождению условных экстремумов целевых функции при ограничениях на ее переменные.

Принятие решений происходит в условиях неопределенности, если экономические субъекты не могут быть полностью информированы обо всех обстоятельствах, экономической ситуации в связи с наличием непредвиденных обстоятельств. В этих условиях при принятии решений приходится учитывать и оценивать с помощью специфических методов определенные риски. Их приходится учитывать и оценивать при наличии неопределенности, порожденной недостатком информации о внешней среде.

Принятие стратегических решений сопровождается некоторой неопределенностью, порожденной не столько недостатком информации, сколько следствием взаимозависимости решений одного и другого субъектов. Для принятия стратегических решений в XX веке была разработана специальная теория – теория игр.

Для адекватного описания взаимодействия отдельных экономических субъектов в ходе реализации их планов служат равновесные модели, направленные на определение наилучшего способа достижения цели при заданных ресурсах. Такие модели определяют условия совместимости индивидуальных планов и выявляют инструменты их согласования.

Состояние совместимости планов всех хозяйствующих субъектов называется экономическим равновесием. Оно не означает, что каждый участник рыночных сделок полностью удовлетворен достигнутыми результатами. Однако состояние равновесия не дает никому возможности повысить свое благосостояние за счет изменения объема и структуры покупок или продаж при сложившихся ценах. Следует отметить, что экономическое равновесие характеризует ожидаемое развитие экономической конъюнктуры. Очевидно, что в любом прошедшем периоде объем продаж тождественно равен объему покупок. Если же в этом периоде покупатели хотели купить одно количество товаров, а продавцы намеревались продать иное количество товаров, то равновесия попросту не существовало.

Поскольку результаты взаимодействия экономических субъектов зависят от рассматриваемого интервала времени, методы описания экономической ситуации делятся на методы статического анализа, методы сравнительной статики и методы динамического анализа.

Методы статического анализа рассматривают ситуацию в экономике в определенный момент времени. Например, формирование цен при существующих спросе и предложении.

Методы сравнительной статики сопоставляют результаты полученные методами статического анализа в различные моменты времени. Например, установление различий в цене данного блага в разные периоды.

Методы динамического анализа служат для выявления характера изменений экономических показателей между двумя моментами времени и установления определяющих факторов этих изменений. Если методы сравнительной статики фиксируют только повышение цены на определенный товар за рассматриваемый интервал времени, то характер такого повышения (монотонный или колебательный) можно выяснить только методами динамического анализа.

В отличие от статического экономического равновесия, выражающего совпадение планов экономических субъектов на определенный момент, в динамических моделях используется понятие стационарного состояния. Оно характеризует сохраняющееся во времени равновесие при неизменных факторах формирования спроса и предложения.

При постановке и решении задач микроэкономики используются три способа описания их условий и результатов решения. Сюда относятся словесное описание сути проблемы, математическое описание задачи и графическое представление результатов.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального распределения ресурсов для индивидуального хозяйства предпринимателя.

Основной целью научной дисциплины и учебного курса микроэкономики является изучение механизма рыночного ценообразования. Число факторов, определяющих цену блага и объем продаж на конкретном рынке, велико. Это технология производства, вкусы потребителей, погодные условия, политический климат в стране, налоговая политика властей, обменный курс национальной валюты и т.д. Практически любое социально-экономическое событие в той или иной мере отражается на конъюнктуре рынка, а, следовательно, и на цене.

Очевидно, что каждый ценообразующий фактор воздействует на цену либо через спрос, либо через предложение. Поэтому спрос и предложение выступают в качестве двух агрегированных (суммарных) показателей, определяющих конкретное значение цены. В то же время для анализа процесса формирования цены и ее роли необходимо выяснять, что стоит за каждым из этих феноменов рынка. Типичная схема процесса рыночного ценообразования представлена на рис.2.

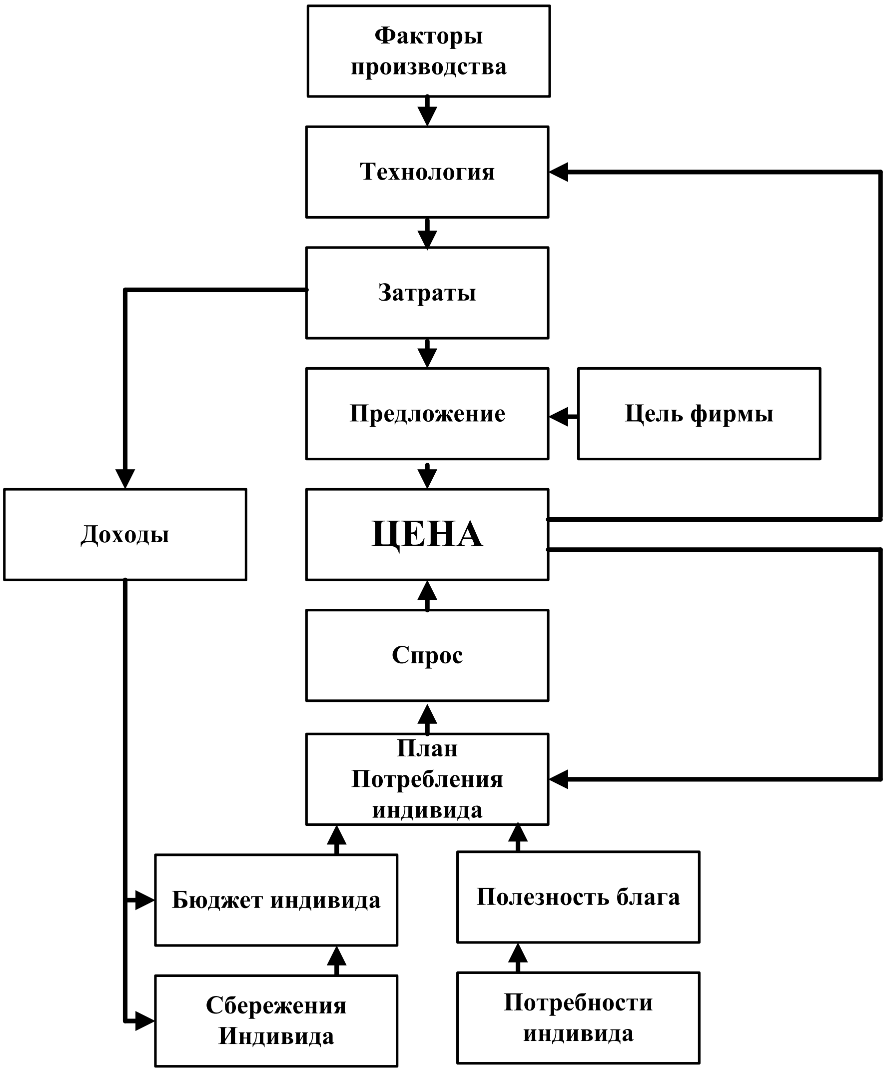

Рис.2. Схема рыночного ценообразования.

Цена предлагаемого производителями объема благ определяется целями фирмы и затратами производства. Затраты зависят от цен факторов производства и технологии изготовления продукции. Технология выбирается в соответствии с количеством и качеством наличных факторов производства.

Спрос на каждое благо определяется в результате составления, реализации и взаимодействия планов потребления индивидами, стремящимися при заданных средствах максимально удовлетворить свои потребности.

Ассортимент и объем благ в индивидуальных планах потребления зависят от полезности благ и бюджета потребителя. Полезность конкретного блага зависит от потребностей и вкусов индивида. Бюджет индивида формируется из текущего дохода и фонда сбережений.

Прямые связи схемы, направленные от ценообразующих факторов к цене, дополняются обратными связями от цены к факторам, которые ее определяют.

С одной стороны цены определяют планы потребления индивидов, с другой стороны цены благ учитываются при составлении этих планов.

Точно так же, технология посредством затрат и объема предложения воздействует на цену, но сама технология зависит от цены реализации производимой продукции.

Особую роль в процессе ценообразования играют текущие доходы участников производства. Со стороны домашних хозяйств они определяют спрос на блага и предложение капитала, поскольку распределяются между текущим потреблением и сбережением. В то же время для фирм доходы участников производства являются затратами и в этом качестве определяют предложение благ на рынке.

Формирование цены на рынке при перечисленных факторах спроса и предложения зависит еще от конкретных условий торга и от типа рынка, на котором встречаются продавцы и покупатели.

Таким образом, микроэкономика является одной из двух составных частей современной экономической теории.

Предметом исследования микроэкономики является поведение отдельных экономических субъектов и процесс рыночного ценообразования.

Основным методом экономического анализа является моделирование изучаемых процессов.

Поведение отдельных экономических субъектов описывается посредством оптимизационных моделей, а результаты их совокупного взаимодействия – с помощью равновесных моделей.

По степени полноты охвата изучаемых взаимосвязей выделяют модели частичного и общего равновесия, по продолжительности наблюдения за процессами – статические, сравнительной статики и динамические.

Представления микроэкономики о механизме ценообразования начинается с построения моделей поведения отдельных экономических субъектов и частичного равновесия.

Полное представление о механизме ценообразования и его роли в национальном хозяйстве можно получить только на основе моделей общего экономического равновесия.

Целью микроэкономического анализа является моделирование экономической деятельности и взаимодействия отдельных экономических субъектов, которые преследуют свои частные интересы.

Реализация подобных частных интересов отдельным индивидом заключается в необходимости его постоянного участия в выборе правильного решения относительно соответствующей экономической ситуации.

Для построения модели оптимального выбора потребителя рассмотрим основные положения теории поведения потребителя, важные для корректного решения соответствующих проблем.

Экономическая модель поведения потребителя обусловлена его выбором лучшего из того, что он может себе позволить. Очевидно, что, прежде всего, необходимо сформулировать и разъяснить экономическое понятие «лучшее».

Основная проблема потребителя в рыночной экономике состоит в выборе таких уровней потребления различных товаров и услуг, которые были бы ему доступны для их покупки на рынке. Эти товары и услуги называются благами.

Совокупность этих благ представляет собой товарный или потребительский набор, которые индивид потребляет в течение определённого периода времени.

Потребительские наборы являются объектами потребительского выбора.

1. ПОТРЕБИТЕЛЬСКИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЯ И ИХ ОТНОШЕНИЯ

Пусть число рассматриваемых благ является конечным и равно n. Любой товарный набор этих благ может быть описан вектором некоторого n – мерного пространства

$$\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

Здесь x_i – количество блага с номером i, $i = (1..n) = (1, 2, \ldots, n)$. Множество всех таких векторов образует n – мерное пространство благ R^n, которое включает в себя различные количества всевозможных товаров и услуг.

Пусть для некоторого потребителя первым благом является картофель, вторым благом является молоко, третьим благом является свинина. В течение недели он потребляет 3кг картофеля, 5л молока и 2кг свинины, а всеми остальными товарами и услугами не пользуется. Тогда его товарный набор имеет вид

$$\mathbf{x} = (3, 5, 2, 0, \ldots, 0).$$

Очевидно, что вектор товарного набора служит для описания уровней потребления индивида.

Для анализа поведения потребителя необходимо подробное определение его предпочтений относительно тех или иных товарных наборов на потребительском множестве X .

Понятие «потребительское множество» обусловлено тем, что выбор потребителем того или иного товарного набора обычно ограничен его возможностями.

Поскольку блага, как правило, не могут быть отрицательными, то потребительское множество может быть записано в виде

$$X = R_{+}^{n} = \left\{ \mathbf{x} \in R^{n} : x_i \geq 0, (i = 1..n) \right\}$$

Очевидно, что $X \subset R^n$.

Для обозначения связи между объектами в математике используют, понятие «отношение». Широко известны отношения порядка: «меньше» – $(<)$, «меньше или равно» – $(\leq)$, «больше» $(>)$, «больше или равно» $(\geq)$, «равно» $(=)$ и т.д. В микроэкономическом анализе употребляются термины «отношения предпочтений».

Пусть

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

– товарные наборы из потребительского множества X.

Если для рассматриваемого потребителя товарный набор $\mathbf{x}$ предпочтительнее чем набор $\mathbf{y}$, то такое отношение предпочтения называется отношением строгого предпочтения или строгим предпочтением и обозначается символом $(\succ)$

$$(\mathbf{x} \succ \mathbf{y}).$$

Если для рассматриваемого потребителя товарный набор $\mathbf{x}$ предпочтительнее чем набор $\mathbf{y}$ или безразличен, то такое отношение предпочтения называется отношением не строгого (слабого) предпочтения или не строгим (слабым) предпочтением и обозначается символом $(\succeq)$

$$(\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}).$$

Если рассматриваемому потребителю безразличен выбор между товарным набором $\mathbf{x}$ и товарным набором $\mathbf{y}$, то такое отношение предпочтения называется отношением безразличия и обозначается символом $(\sim)$

$$(\mathbf{x} \sim \mathbf{y}).$$

Перечисленные отношения строгого предпочтения, слабого предпочтения и безразличия не являются независимыми. Например, если $(\mathbf{x} \succeq \mathbf{y})$ и $(\mathbf{y} \succeq \mathbf{x})$**Ошибка! Не указан аргумент ключа.**, то можно сделать вывод, что $(\mathbf{x} \sim \mathbf{y})$**Ошибка! Не указан аргумент ключа.**.

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О ПРЕДПОЧТЕНИЯХ

В микроэкономике принимается ряд классических предположений относительно логичности поведения потребителей при выборе предпочтений. Например, ситуация, в которой возможны одновременно строгие предпочтения $(\mathbf{x} \succ \mathbf{y})$ и $(\mathbf{y} \succ \mathbf{x})$, заранее отвергается как неразумная**Ошибка! Не указан аргумент ключа.**.

Три основополагающих предположения теории поведения потребителя, принято формулировать как аксиомы отношений потребительских предпочтений.

1. Аксиома сравнимости.

Аксиома сравнимости утверждает, что любой индивид имеет чётко определённое отношение предпочтения между любыми двумя товарными наборами из потребительского множества

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X : или (\mathbf{x} \succ \mathbf{y}) или (\mathbf{y} \succ \mathbf{x}) или (\mathbf{x} \sim \mathbf{y}) \tag{1}$$

Другими словами, потребитель всегда может определить одну из следующих возможностей:

- либо $\mathbf{x}$ предпочтительнее, чем $\mathbf{y}$;
- либо $\mathbf{y}$ предпочтительнее, чем $\mathbf{x}$;
- либо $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ одинаково привлекательны для него.

Важность этой аксиомы состоит в том, что она исключает возможность для индивида предпочитать $\mathbf{x}$ строго больше, чем $\mathbf{y}$ и одновременно $\mathbf{y}$ предпочитать строго больше, чем $\mathbf{x}$.

2. Аксиома транзитивности.

Эта аксиома для отношений предпочтений составляет сердцевину концепции рациональности индивида. Транзитивность означает, что

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X : если\ (\mathbf{x} \succeq \mathbf{y})\ и\ (\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}),\ то (\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}). \tag{2}$$

3. Аксиома рефлексивности.

Эта аксиома отношений предпочтений подразумевает, что любой товарный набор, по крайней мере, не хуже самого себя

$$\forall \mathbf{x} \in X : (\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}). \tag{3}$$

Перечисленные выше аксиомы могут быть использованы применительно к отношениям строго предпочтения и безразличия.

Отношение строго предпочтения не является рефлексивным, то есть выражение

$$\forall \mathbf{x} \in X : (\mathbf{x} \succ \mathbf{x})$$

не имеет места.

Отношение строго предпочтения является транзитивным

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X : \textit{если } (\mathbf{x} \succ \mathbf{y}) \textit{ и } (\mathbf{y} \succ \mathbf{z}), \textit{то} (\mathbf{x} \succ \mathbf{z}).$$

Отношение безразличия является рефлексивным

$$\forall \mathbf{x} \in X : (\mathbf{x} \sim \mathbf{x}).$$

Отношение безразличия является транзитивным

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X : \textit{если } (\mathbf{x} \sim \mathbf{y}) \textit{ и } (\mathbf{y} \sim \mathbf{z}), \textit{то} (\mathbf{x} \sim \mathbf{z}).$$

Отношение безразличия является симметричным

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X : \textit{если } (\mathbf{x} \sim \mathbf{y}), \textit{то} (\mathbf{y} \sim \mathbf{x}).$$

Имеет место соотношение

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X : \textit{если } (\mathbf{x} \succ \mathbf{y}) \textit{ и } (\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}), \textit{то} (\mathbf{x} \succ \mathbf{z}).$$

Помимо аксиом сравнимости, транзитивности и рефлексивности относительно предпочтений потребителя в микроэкономике применяются еще два дополнительных допущения о строгой монотонности и строгой выпуклости отношений предпочтения. С одной стороны эти допущения значительно облегчают анализ потребительского выбора, с другой стороны они определенным образом ограничивают построение моделей микроэкономики, игнорируя целый ряд благ особого рода. Сюда могут быть отнесены совершенные комплементы, антиблага, совершенные субституты и т.д. Такие особые блага приходится рассматривать отдельно.

В микроэкономике часто используют предположение о ненасыщаемости, согласно которому потребитель предпочитает большее количество товаров меньшему количеству товаров тех же благ. Такое предположение соответствует строгой монотонности в свойстве отношения предпочтения.

Условие строгой монотонности отношения предпочтения на потребительском множестве X имеет вид

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in X : \textit{если } (\mathbf{x} > \mathbf{y}), \textit{то} (\mathbf{x} \succ \mathbf{y}). \tag{4}$$

Согласно условию (4) потребителю лучше, когда он, по меньшей мере, всех, кроме одного, товаров потребляет в таком же количестве, но уж как минимум одно благо он потребляет в большем количестве.

Предположение о ненасыщаемости плодотворно только для благ, но не для антиблаг. Антиблагами приносят потребителю вред, поэтому он стремится употреблять их в как можно в меньшем количестве. Примерами антиблаг могут служить выхлопные газы автомобилей, сигаретный дым для некурящих людей и т.д.

3. КРИВЫЕ БЕЗРАЗЛИЧИЯ

Отношение предпочтения является строго выпуклым, если для товарных наборов $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ выполняется следующее условие

$$\textit{Если } (\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}), (\mathbf{z} \succeq \mathbf{x}) \textit{и } (\mathbf{y} \neq \mathbf{z}), \textit{ то} (\alpha \cdot \mathbf{y} + (1-\alpha) \cdot \mathbf{z} \succ \mathbf{x}). \tag{5}$$

Здесь $0 < \alpha < 1$.

Проиллюстрируем свойство строгой выпуклости отношения предпочтения (5) с помощью, так называемых кривых безразличия. Для этого рассмотрим множество потребительских наборов, которые для нашего потребителя описываются отношением безразличия. Графически такое множество может быть представлено в виде семейства линий – кривых безразличия.

Предположим, что некий индивид может потреблять только два блага $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. На оси абсцисс будем откладывать количество первого товара x_1, а на оси ординат – количество второго товара x_2.

Кривую безразличия образует множество всех тех точек, соответствующие товарные наборы которых являются равноценными для потребителя.

Варианты трех типичных кривых безразличия представлены на рис.3, рис.4 и рис.5.

На рис.3 отмеченные точками товарные наборы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ являются равноценными. Все товарные наборы, лежащие выше кривой безразличия, содержат бóльшее количество благ и оказываются более предпочтительными для потребителя. Эта область называется зоной улучшения. Все товарные наборы, лежащие ниже кривой безразличия, являются менее предпочтительными для потребителя, чем те, которые расположены на кривой.

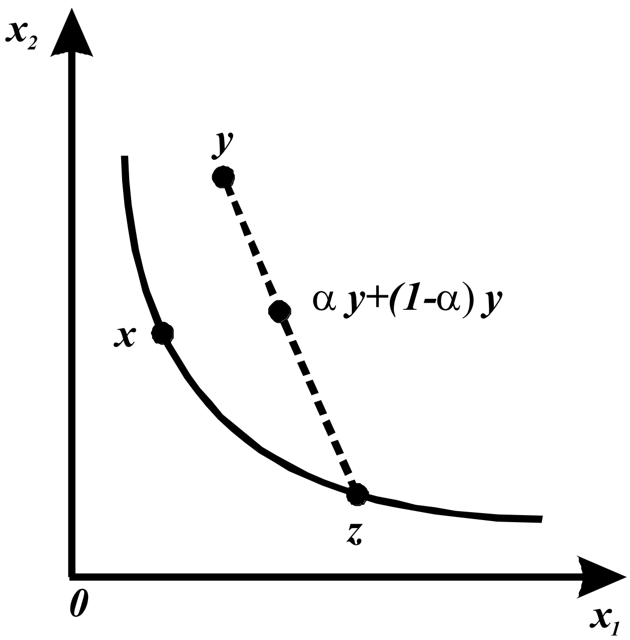

Рис.3. Вогнутая кривая безразличия.

Для точек рис.3. имеет место соотношение, соответствующее условию (5)

$$(\mathbf{y} \succ \mathbf{x}), (\mathbf{z} \simeq \mathbf{x}) \; u \; (\mathbf{y} \neq \mathbf{z}).$$

Если мы соединить отрезком прямой точки $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, то любая точка, принадлежащая данному отрезку, задается линейной комбинацией

$$(\alpha \cdot \mathbf{y} + (1-\alpha) \cdot \mathbf{z}).$$

Поскольку параметр α удовлетворяет строгому неравенству $0 < \alpha < 1$, линейная комбинация не может принимать крайние значения $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$. Все остальные точки на отрезке представляют товарные наборы, лежащие в зоне улучшения, и являются более предпочтительными для потребителя, чем набор $\mathbf{x}$, лежащий на кривой безразличия

$$(\alpha \cdot \mathbf{y} + (1-\alpha) \cdot \mathbf{z}) \succ \mathbf{x}.$$

Таким образом, ситуация, представленная на рис.3, полностью удовлетворяет условию (5) о строгой выпуклости отношения предпочтения. Отметим, что кривая безразличия на рис.3 является выпуклой по отношению к зоне улучшения.

Наоборот, кривая, представленная на рис.4, по отношению к зоне улучшения является вогнутой.

Здесь видно, что условие строгой выпуклости отношения предпочтения не выполнятся, поскольку $\mathbf{x} \succ (\alpha \cdot \mathbf{y} + (1-\alpha) \cdot \mathbf{z})$.

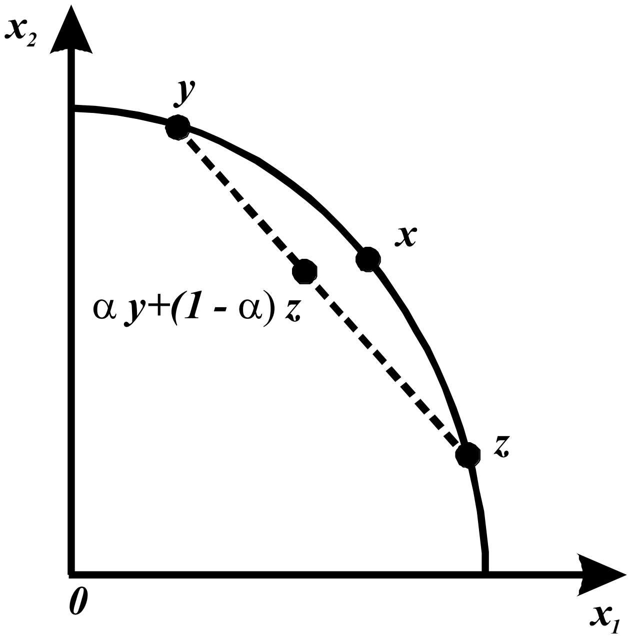

Рис.4. Выпуклая кривая безразличия.

Прямая безразличия, представленная на рис.5, описывает не строго выпуклое отношение предпочтения.

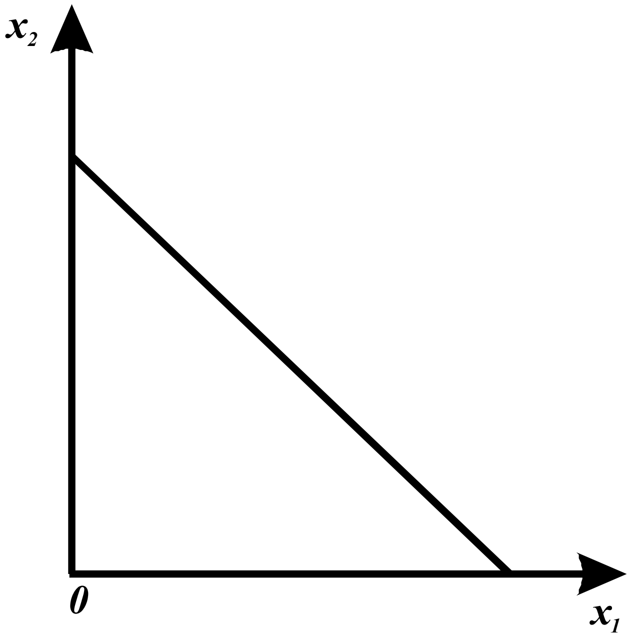

Рис.5. Выпуклая кривая безразличия.

Следует ещё раз отметить, что условие строгой выпуклости отношения предпочтения исключает из анализа некоторые типы благ, например, совершенные субституты или блага, описывающиеся вогнутыми кривыми безразличия.

4. ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

В микроэкономике отношение предпочтения весьма удобно и плодотворно описывать при помощи функции полезности. Возможность представления предпочтений в виде функции полезности тесно связана с предположением о сравнимости и транзитивности отношения предпочтения. При этом для существования функции полезности необходимо ввести предположение о непрерывности отношения предпочтения.

Отношение предпочтения $(\succeq)$ на потребительском множестве X называется непрерывным, если для двух любых сходящихся последовательностей $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ и $y = \lim_{k\to\infty} y_k$ выполняется соотношение

$$\forall k : x_k \succeq y_k \Rightarrow x \succeq y. \qquad (6)$$

Если выполняются условия сравнимости, транзитивности и непрерывности отношения предпочтения, то это отношение можно представить в виде функции, отражающей зависимость между объёмами потребляемых в наборе благ и уровнем полезности, достигаемым потребителем при потреблении этого набора благ.

Любая функция полезности $U(\mathbf{x})$ должна принимать бóльшие значения для тех наборов благ, которые предпочтительнее с точки зрения потребителя, и одинаковые значения для равноценных наборов благ

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X : (\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}) \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) \geq U(\mathbf{y}). \qquad (7)$$

В микроэкономике для решения задач используются функции полезности различных видов. На практике наиболее часто используется функция Кобба-Дугласа.

Если потребительский набор состоит только из двух благ, то функция полезности Кобба-Дугласа имеет вид

$$U(x_1, x_2) = k \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}. \qquad (8)$$

График этой функции представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве.

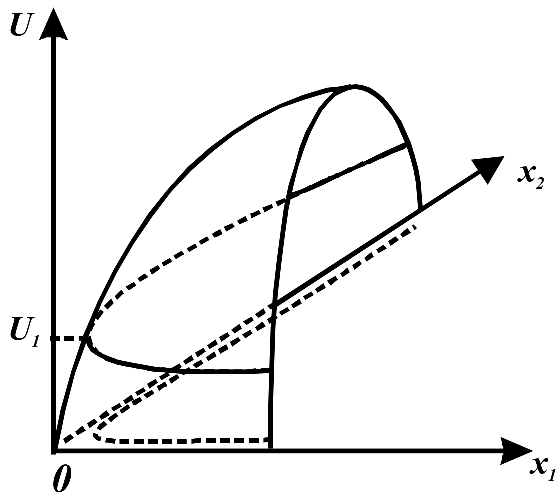

Рис.6. График функции полезности Кобба-Дугласа.

Функция (8) удовлетворяет условиям о строгой монотонности и строгой выпуклости отношения предпочтения. Свойство строгой монотонности требует, чтобы функция полезности была возрастающей по каждому из аргументов:

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0, \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0. \quad (9)$$

Неравенства (9) означают, что увеличение количества каждого из благ в товарном наборе увеличивает для потребителя полезность этого набора.

Свойство строгой выпуклости предполагает, что проекции линий уровня функции полезности на плоскость $O x_1 x_2$ должны быть строго выпуклы (вниз).

Если выполнить сечение этой поверхности плоскостью $U = U_1$, то получится линия уровня $U(x_1 x_2) = U_1$ для функции полезности. Проекция этой линии на координатную плоскость $O x_1 x_2$ представляет собой кривую безразличия, каждая точка которой представляет набор двух благ, имеющих для потребителя одинаковую полезность равную значению U_1.

Если выполнить сечение этой поверхности другой плоскостью $U = U_2$, то получится другая линия уровня $U(x_1 x_2) = U_2$ для функции полезности.

Проекция этой линии на координатную плоскость $Ox_1 x_2$ представляет собой кривую безразличия, каждая точка которой представляет набор двух благ, имеющих для потребителя одинаковую полезность равную значению U_2.

Однопараметрическое семейство таких кривых при различных значениях U_k представляет собой, так называемую карту кривых безразличия, изображенную на рис.7.

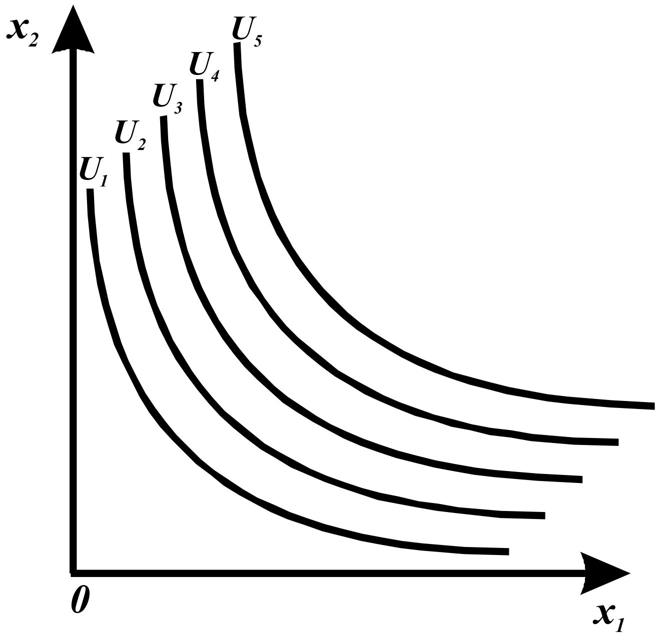

Рис.7. Линии карты кривых безразличия.

Очевидно, что вышеприведенное определение кривой безразличия и определение кривой безразличия, данное здесь с помощью функции полезности идентичны.

В моделях микроэкономики иногда используют важный частный случай функции Кобба-Дугласа, при котором показатели степени удовлетворяют соотношению $\alpha + \beta = 1$

$$U(x_1, x_2) = k \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha}. \qquad (10)$$

Для функции Кобба-Дугласа вида (10) графиком в трехмерном пространстве является коническая поверхность, изображенная на рис.8.

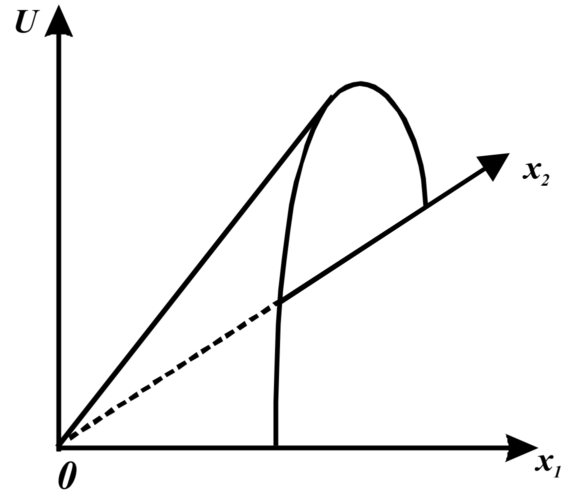

Рис.8. Коническая поверхность графика функции Кобба-Дугласа (10).

5. НОРМА ЗАМЕЩЕНИЯ

Предположим, что потребитель потребляет товарный набор, состоящий из двух благ – товара 1 и товара 2.

Нормой замещения товара 2 товаром 1 называется то количество товара 2 – Δx_2, от которого потребитель готов отказаться ради получения дополнительного количества товара 1 – Δx_1, оставаясь при этом на том же самом уровне полезности или на той же самой кривой безразличия

$$RS = (-1) \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\left.\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right|_{U=const} \quad (11)$$

Если приращения количества товаров Δx_1 и Δx_2 являются бесконечно малыми, то норму замещения благ превращается в предельную норму замещения

$$MRS = \lim_{\Delta x_1 \to 0}\left(-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right) = -\frac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{U=const} \qquad (12)$$

Геометрический смысл предельной нормы замещения MRS, измеряющий наклон кривой безразличия в каждой отдельной точке, показан на рис.9.

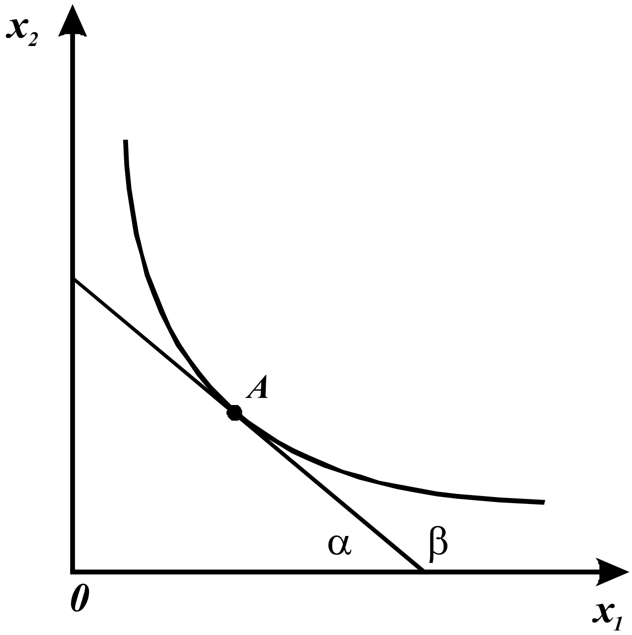

Рис.9. Геометрический смысл предельной нормы замещения MRS.

Отношение приращений благ в точке A равно тангенсу угла наклона касательной, проведённой к кривой безразличия в данной точке

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \mathrm{tg}\beta .$$

Значение положительной величины предельной нормы замещения MRS в точке A выражается соотношением

$$MRS = -\frac{dx_2}{dx_1} = -\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\alpha, \qquad (13)$$

и равно тангенсу угла $\alpha = \pi - \beta$ для кривой безразличия в данной точке.

6. СВОЙСТВА КРИВЫХ БЕЗРАЗЛИЧИЯ

Теорема 1.

Кривые безразличия не могут пересекаться.

Доказательство.

Пусть две кривые безразличия U_1 и U_2 пересекаются, как показано на рис.10, в точке $\mathbf{z}$.

Поскольку различным кривым безразличия соответствуют различные уровни полезности от потребления наборов благ, то наборы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, принадлежащие разным кривым, не могут иметь отношение безразличия.

Предположим, что набор $\mathbf{x}$ более предпочтителен для потребителя, чем набор $\mathbf{y}$, и имеет место отношение $(\mathbf{x} \succ \mathbf{y})$.

С другой стороны, наборы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ принадлежат кривой безразличия U_2, а наборы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ принадлежат кривой безразличия U_1.

Следовательно, $(\mathbf{x} \sim \mathbf{z})$ и $(\mathbf{z} \sim \mathbf{y})$. Из транзитивности отношения предпочтения следует, что $(\mathbf{x} \sim \mathbf{y})$. Но это противоречит предположению о том, что $(\mathbf{x} \succ \mathbf{y})$. Значит, кривые безразличия не могут пересекаться. Что и требовалось доказать.

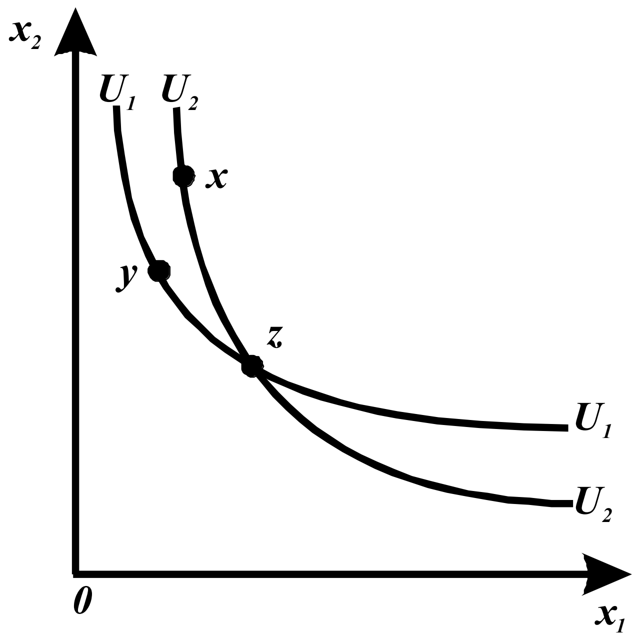

Рис.10. Предположение о возможном пересечении кривых безразличия.

Теорема 2.

Каждая следующая кривая безразличия, проходящая дальше от начала координат, отражает большую величину полезности, чем предыдущая.

Доказательство автоматически следует из предположения о строгой монотонности отношения предпочтения и вытекающем из него строго возрастания функции полезности. Каждая кривая безразличия, изображенная на рис.7 и расположенная выше, показывает более высокий уровень полезности.

Теорема 3.

Кривые безразличия имеют отрицательный наклон.

Доказательство.

Доказательство этого свойства также следует из строгой монотонности отношения предпочтения. Рассмотрим две кривые безразличия на рис.11.

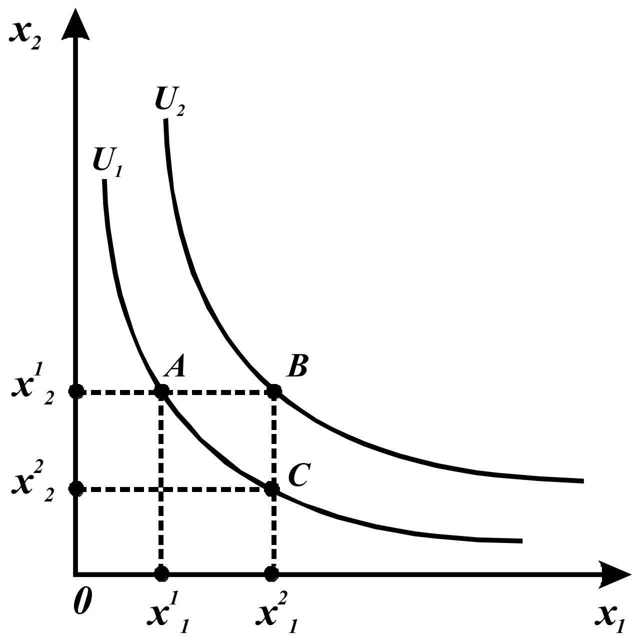

Рис.11. Обоснование отрицательного наклона кривых безразличия.

Пусть первоначально потребитель находится в точке A. Потребляемый им товарный набор $\left(x_1^1, x_1^2\right)$, как показано на рис.11, доставляет полезность U_1.

Если мы увеличим количество первого блага, оставив при этом количество второго блага неизменным, то потребитель попадает в точку B, принадлежащую другой кривой безразличия и отражающую более высокий уровень полезности U_2.

Если же мы хотим сохранить отношение безразличия, то есть хотим остаться на прежнем уровне полезности U_1, то увеличение количества первого блага должно сопровождаться уменьшением количества второго блага, например, при переходе из точки A в точку C. Таким образом

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} < 0,$$

что показывает отрицательный наклон кривой безразличия.

Если предпосылка о строгой монотонности отношения предпочтения не выполняется, то данное свойство не имеет места.

Так, например, товарные наборы, включающие в себя антиблаго, принадлежат кривым безразличия, имеющим положительный наклон.

Теорема 4.

Предельная норма замещения MRS одного блага другим уменьшается при движении вдоль кривой безразличия.

Доказательство.

Это свойство основано на предположении о строгой выпуклости отношения предпочтения и требовании строгой выпуклости вниз кривых безразличия. Оно исключает из анализа целый ряд благ и видов предпочтений и является частным случаем.

Предельной полезностью потребления блага x_1 для функции полезности $U(x_1 x_2)$ называется ее частная производная

$$MU_1 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}. \tag{14}$$

Предельная полезность товара x_1 есть дополнительная полезность, получаемая от потребления его малого дополнительного количества, а потребление других товаров остается неизменным.

Очевидно, что величина предельной полезности зависит от точки, в которой частная производная вычисляется и зависит уровня потребления в данный момент индивидом блага x_1 и x_2.

Предельной полезностью потребления блага x_2 для функции полезности $U(x_1 x_2)$ является ее вторая частная производная

$$MU_2 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}. \tag{15}$$

Предельная полезность товара x_2 есть дополнительная полезность, получаемая от потребления его малого дополнительного количества, а потребление других товаров остается неизменным.

Рассмотрим полный дифференциал функции полезности $U(x_1\, x_2)$

$$dU(x_1, x_2) = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2. \tag{16}$$

Если перемещаться вдоль одной и той же кривой безразличия и сохранять постоянным уровень полезности, то полный дифференциал функции $U(x_1\, x_2)$ обращается в нуль

$$dU(x_1, x_2) = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0. \tag{17}$$

или

$$MU_1\, dx_1 + MU_2\, dx_2 = 0. \tag{18}$$

Отсюда следует

$$MSR = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U=const} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{MU_1}{MU_2}. \tag{19}$$

Таким образом, MRS есть соотношение предельных полезностей двух благ. Заметим, что MRS при этом не зависит от того, как измеряется полезность, хотя этого нельзя сказать о предельной полезности.

7. МОНОТОННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

На практике выбор функции полезности является не единственным. Очевидно, что если $U(\mathbf{x})$ есть функция полезности, то функциями полезности в качестве индикаторов предпочтений также являются $C \cdot U(\mathbf{x})$, $\ln(U(\mathbf{x}))$ и т.д.

Если имеющейся функции полезности $U(\mathbf{x})$ поставить в соответствие новую функцию полезности $F(U(\mathbf{x}))$, которая описывает предпочтения потребителя также как и первоначальная функция полезности $U(\mathbf{x})$, то такая процедура называется монотонным преобразованием функции полезности.

Таким образом, если имеет место соотношение

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X : (\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}) \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) \geq U(\mathbf{y}),$$

то имеем место и условие

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X : (\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}) \Leftrightarrow F(U(\mathbf{x})) \geq F(U(\mathbf{y})).$$

Очевидно, что при этом для функции $F(U)$ должно выполняться условие строгой монотонности

$$\frac{\partial F}{\partial U} > 0.$$

Примерами монотонного преобразования функции полезности могут служить умножение её на любое положительное число $C \cdot U(\mathbf{x})$, прибавление к ней любого числа $A+U(\mathbf{x})$, возведение её в положительную степень $U^a(\mathbf{x})$ при условии, что $U(\mathbf{x})>0$ и т.д.

Таким образом, функция полезности, которая представляет отношение предпочтения, не является единственной, и при анализе отношения предпочтения $(\succeq)$ можно использовать не только первоначальную функцию полезности $U(\mathbf{x})$, но и другие функции, являющиеся её монотонным преобразованием.

Следует отметить, что при монотонном преобразовании сохраняется только порядок уровней полезности, а не их числовые значения.

Свойства функции полезности, которые инварианты для любого монотонного преобразования называются ординалистскими (порядковыми) свойствами.

Свойства функции полезности, которые не инварианты для монотонного преобразования называются кардиналистскими (количественными или измеряемыми) свойствами.

Таким образом, отношение предпочтения, ассоциируемое с функцией полезности, является ординалистским свойством.

8. БЮДЖЕТНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ ПОТРЕБИТЕЛЯ.

В рамках потребительского множества выбор потребителя ограничен не только физическим наличием нужных товаров, но и его экономической возможностью купить только то, что он может себе позволить.

При удовлетворении потребительских желаний потребитель всегда сталкивается с определенным бюджетным ограничением.

Пусть все n благ из товарного набора продаются на рынке по неотрицательным ценам, измеряемым в некоторых денежных единицах. Экономическая ситуация с отрицательными ценами, при которых индивид платит за то, чтобы не потреблять антиблага здесь не рассматривается.

Предположим, что в отношении цен благ существует полная определённость, они публично котируются и известны потребителям. Их можно представить как ценовой вектор $\mathbf{p}$, который показывает денежные затраты на единицу каждого их n товаров

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Будем считать, что на рынке эти цены не зависят от влияния на них потребителей и представляют собой постоянные величины

$$\forall k : p_k = const.$$

Очевидно, что возможность потребления некоторого товарного набора зависит от рыночных цен и от уровня денежного дохода потребителя.

Пусть потребитель обладает некоторой суммой денег, которую он может расходовать в течение рассматриваемого периода времени (заработная плата, стипендия, пенсия и т.д.). Обозначим этот постоянный в рассматриваемом периоде времени данный доход $I = const$.

Товарный набор $\mathbf{x} \in X$ будет доступен потребителю только тогда, когда общие денежные расходы на его приобретение не превысят дохода потребителя. Бюджетное ограничение принимает вид

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \le I \qquad (20)$$

Бюджетное ограничение (20) вместе с условием $\mathbf{x} \in X = R_{+}^{n}$ определяют вальрасианское бюджетное множество

$$B_{P,I} = \left\{ \mathbf{x} \in R_{+}^{n} : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \le I \right\},$$

которое представляет собой множество всех товарных наборов, доступных для потребителя, сталкивающегося с рыночными ценами $\mathbf{p}$ и имеющего доход I.

Теперь проблема потребителя может быть сформулирована как выбор товарного набора $\mathbf{x}$ из множества $B_{P,I} = \left\{ \mathbf{x} \in R_{+}^{n} : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \le I \right\}$ при заданном доходе и заданных ценах.

На рис.12 представлено бюджетное множество Вальраса (вальрасианское множество) для случая двух благ $(n = 2)$.

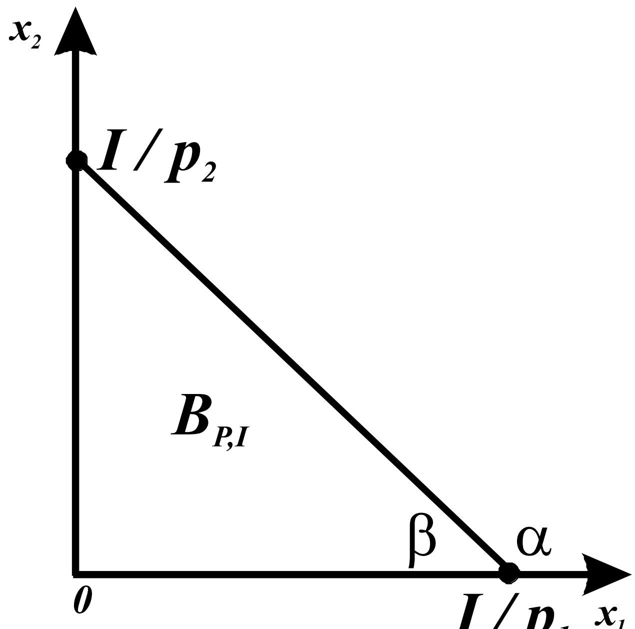

Рис.12. Вальрасианское бюджетное множество для случая двух благ $(n = 2)$.

Верхняя граница этого множества называется бюджетной линией. Все товарные наборы, расположенные на ней доступны для потребителя только при условии полного расходования денежного дохода I.

Уравнение бюджетной линии имеет вид

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \qquad (21)$$

В левой части уравнения представлены денежные расходы потребителя на покупку двух благ, в правой части – доход потребителя. Уравнение (21) можно записать в виде

$$x_2 = \frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \qquad (22)$$

Из уравнения (22) непосредственно следует экономический смысл точек пересечения бюджетной линии с осями координат и её наклона. Каждая из точек пересечения $\left(\frac{I}{p_1}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{I}{p_2}\right)$ показывает максимальное количество одного из товаров, которое может быть куплено на располагаемый доход при текущих ценах, когда потребитель не покупает ни одной единицы другого товара.

Тангенс угла наклона бюджетной линии представляет собой альтернативные издержки потребления первого блага. Чтобы потребить большее количество первого блага при условии полного расходования денежных средств индивид должен отказаться от потребления некоторого количества второго блага, которое и представляет собой экономические издержки потребления дополнительного количества товара 1

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1},$$

или

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}.$$

В конечном счете, альтернативные издержки зависят от соотношения цен на рынке. Если второе благо в два раза дешевле, чем первое, то индивид вынужден пожертвовать двумя единицами второго блага ради приобретения одной дополнительной единицы первого блага. Из уравнения (22) легко видеть, что

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{p_1}{p_2}, \operatorname{tg}\beta = \frac{p_1}{p_2}.$$

Соотношение, в котором товары могут быть обменены один на другой на рынке, называется рыночной нормой обмена. Эта норма задаётся соотношением цен данных товаров. В отличие от рыночной, физическая норма обмена – это предельная норма замещения MRS. Она характеризует лишь вкусы и предпочтения потребителя независимо от рыночных условий и показывает, от какого количества второго блага готов отказаться потребитель ради получения дополнительной единицы первого блага при том же уровне полезности.

Изменения в доходе и ценах вызывают сдвиг бюджетной линии. Увеличение денежного дохода I делает возможным для потребителя покупку товарных наборов, которые раньше были ему недоступны. Оно, в соответствии с уравнением (22), смещает бюджетную линию, как показано на рис.13, дальше от начала координат параллельно себе самой. В этом случае наклон бюджетной линии не изменяется, так как зависит только от цен потребляемых товаров и не подвержен влиянию дохода потребителя.

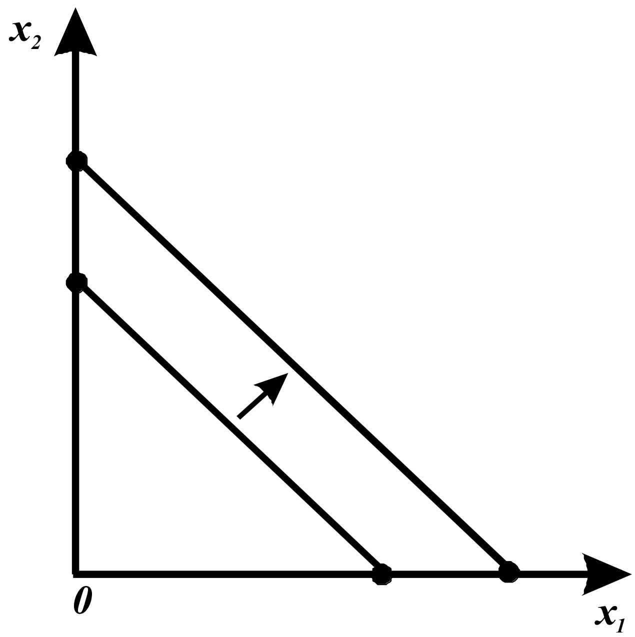

Рис.13. Перемещение бюджетной линии при увеличении денежного дохода I потребителя.

Из уравнения (22) также видно, что изменение цены первого блага сместит бюджетную кривую вдоль оси x_1, не изменяя точки её пересечения с осью x_2. На рис.14 отражена ситуация при которой цена первого блага уменьшилась.

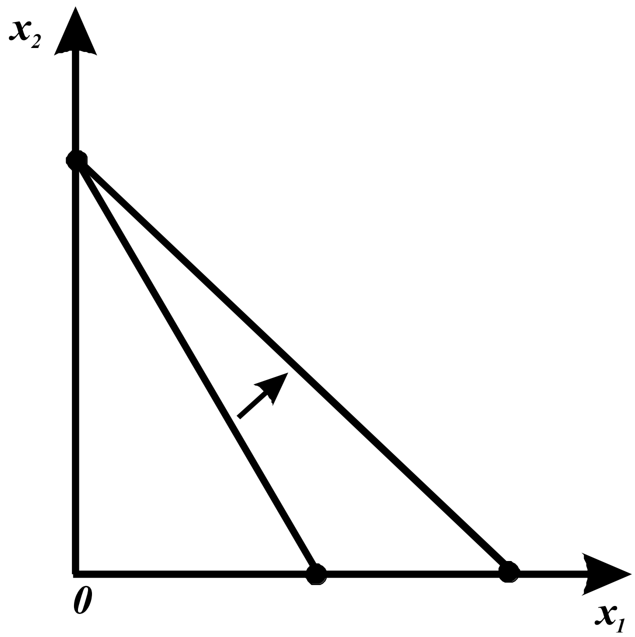

Рис.14. Перемещение бюджетной линии при уменьшении цены первого блага.

Если бы потребитель тратил весь свой доход на первое благо, он смог бы покупать его в большем количестве при пониженной цене. Следовательно, точка пересечения бюджетной линии с осью x_1 сдвигается дальше от начала координат. Поскольку цена второго блага осталась неизменной, то не изменилась и точка пересечения бюджетной линии с осью ординат.

На рис.14 видно, что при снижении цены одного из благ бюджетное множество будет включать большее количество элементов. При увеличении цены ситуация будет обратной.

Следует отметить, что графические представления возможны только в частном случае при $n = 2$.

В самом общем случае, относительно бюджетного множества необходимо сделать несколько естественных допущений.

1. Будем предполагать бюджетное множество ограниченным. Это соответствует отсутствие нулевых цен на любой товар.

$$\forall k : p_k > 0 .$$

В случае двух благ выражение $p_1 = 0$ приводит к тому, что графиком уравнения бюджетной линии (2.2.4) является прямая, параллельная оси x_1 и проходящей через точку $x_2 = \dfrac{I}{p_2}$. В этом случае бюджетное множество было бы неограниченным справа и потребитель смог бы потреблять первый товар в любом количестве.

2. Допустим, что бюджетное множество является замкнутым. Это означает, что любой товарный набор, расположенный на границах бюджетного множества, является доступным для потребителя. В двухмерном случае границами являются оси координат и бюджетная линия. Следовательно, возможны ситуации, когда одно из благ вообще не потребляется индивидом.

3. Будем предполагать, что бюджетное множество является непустым. Это означает, что доход потребителя $I > 0$ и цена хотя бы одного из благ такова, что индивид сможет купить положительное количество данного блага. Вырожденный случай, когда $\forall k : x_k = 0$, не рассматривается.

4. Предположим, что бюджетное множество является выпуклым, то есть если товарные наборы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_{P,I}$, то набор $\mathbf{z} = \alpha \cdot \mathbf{x} + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{y} \in B_{P,I}$. Здесь $0 < \alpha < 1$.

9. МАКСИМИЗАЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

Формирование индивидуального спроса потребителей на то или иное благо и описание их поведения на рынке можно представить в виде экономической модели.

Будем предполагать, что любой потребитель ведёт себя рационально и выбирает такие количества каждого блага из товарного набора, которые позволяют ему максимально удовлетворить свои потребности при наличии ограниченного и фиксированного запаса денежных средств.

Основой этой модели являются рассмотренные в предыдущей главе предпочтения и бюджетное ограничение потребителя, которые определяют для отдельного индивида оптимальное количество товаров каждого вида за определённый период времени при заданных ценах.

Рассмотрим сначала графический анализ простого случая, когда потребительский набор состоит только из двух благ x_1 и x_2, потребление которых осуществляется в течение некоторого периода времени (например, месяца).

На рис.15 представлены три кривые безразличия, которые описывают предпочтения некоторого потребителя относительно первого и второго блага из товарного набора.

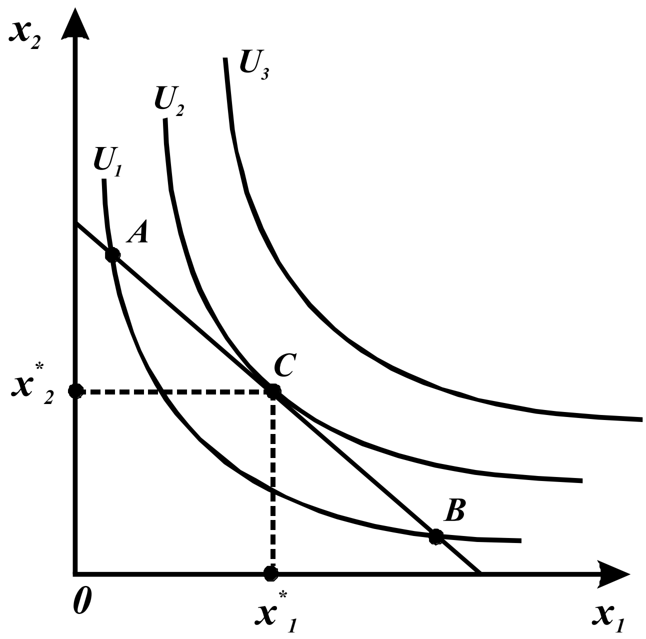

Рис. 15. Кривые безразличия предпочтений некоторого потребителя относительно первого и второго блага из товарного набора.

Из рис. .15 видно, что функция полезности потребителя является возрастающей и имеет место неравенство

$$U_1 < U_2 < U_3.$$

Очевидно, что для потребителя достижение уровня полезности U_3 было бы наиболее предпочтительным, но, ни одна из комбинаций количеств первого и второго блага, принадлежащая кривой U_3, недоступна для потребителя, поскольку его доход, отражённый на графике линией бюджетного ограничения, не позволяет ему достичь этого уровня полезности в данный момент времени.

Вполне доступными оказываются товарные наборы, отмеченные на рис. 15 точками A и B на кривой безразличия U_1. Но такой выбор потребителя является не рациональным, поскольку есть кривые безразличия с более высоким уровнем полезности.

Очевидно, что самый оптимальный товарный набор потребителя при заданном бюджетном ограничении достигается в точке касания $C\left(x_1^*, x_2^*\right)$ на кривой U_2.

Поскольку линия бюджетного ограничения U_2 только касается её в точке $C\left(x_1^*, x_2^*\right)$, то товарные наборы на любой кривой безразличия, расположенной выше нее, не могут быть куплены при существующем денежном доходе.

Таким образом, именно потребление набора $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ доставляет потребителю максимально возможный уровень полезности при заданном бюджетном ограничении.

Следует отметить, что касательная линия бюджетного ограничения к кривой U_2 определяет предельную норму замещения MRS (тангенс угла наклона касательной) второго товара первым в этой точке

$$MRS = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U=const} \tag{23}$$

Формула (23) позволяет сформулировать принцип максимизации полезности потребителем.

Для максимизации полезности при заданном фиксируемом количестве расходуемых денег, индивид должен покупать такие количества товаров, которые полностью исчерпывают его доход и для которых норма замещения MRS равна норме обмена между двумя этими товарами на рынке или обратному соотношению цен этих товаров

$$MRS = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U=const} = \frac{p_1}{p_2} \tag{24}$$

В общем случае правило касания бюджетной линии кривой безразличия является необходимым, но не достаточным условием максимизации полезности. Достаточное условие связано с определенной формой кривых безразличия, то есть с определённым свойством отношения предпочтения. Если, что предельная норма замещения уменьшается по мере движения вдоль кривой безразличия, или кривые безразличия являются строго выпуклыми вниз, то касание бюджетной линии кривой безразличия будет и необходимым, и достаточным условием максимизации полезности при заданном бюджетном ограничении.

Обобщим полученные результаты на случай товарного набора из n благ. Пусть отношение предпочтения обладает свойствами сравнимости, транзитивности, рефлексивности, непрерывности, строгой монотонности и строгой выпуклости. Тогда соответствующая функция полезности является непрерывной, возрастающей, строго вогнутой и дифференцируемой во всех точках. Потребительское множество состоит только из неотрицательных благ $X = R_{+}^{n}$. Бюджетное множество предполагается ограниченным, замкнутым, непустым и выпуклым. Тогда задача максимизации полезности в самом общем виде может быть записана

$$\begin{cases} \max\limits_{X} U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \le I \\ \forall i : x_i \ge 0 \end{cases} \tag{25}$$

Система (25) представляет собой задачу нелинейного программирования.

Если потребитель будет расходовать весь свой доход на покупку товаров и услуг, то задача (25) принимает вид.

$$
\begin{cases}
\max\limits_{X} U = U(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = I \\
\forall i : x_i \geq 0
\end{cases}
\tag{26}
$$

Задача нахождения условного экстремума (26) решается с помощью метода множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для задачи (26) имеет вид

$$
L = U(x_1, x_2, \dots, x_n) - +\lambda\left(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - I\right) \tag{27}
$$

Необходимыми условиями максимума функции (27) являются равенства нулю всех её частных производных

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial U(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{\partial U(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_n} = \dfrac{\partial U(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} - \lambda p_n = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - I = 0
\end{cases}
\tag{28}
$$

Решением системы (28) будет некоторый вектор $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right)$, координатами которого являются оптимальные объемы каждого из благ, которые максимизируют полезность индивида от потребления данного товарного набора при заданном бюджетном ограничении. Именно на эти количества каждого блага наш потребитель предъявит спрос на рынке.

Отметим, что необходимые условия максимума (28) будут и достаточными только в случае выполнения предположения о строгой выпуклости отношения предпочтения.

Рассмотрим первые два уравнения системы (28)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} = \lambda p_1 \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2} = \lambda p_2 \end{cases}.$$

Вычислим отношение

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{MU_1}{MU_2} = MRS\big|_{x_2 \to x_1}.$$

Совершенно аналогично такое же соотношение можно записать относительно любой пары уравнений из системы (28)

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j} = \frac{MU_i}{MU_j} = MRS\big|_{x_j \to x_i}. \tag{29}$$

Таким образом, экономический смысл соотношения (29) состоит в том, что в точке оптимального выбора предельная норма замещения одного блага другим из потребительского набора должна быть равна соотношению цен этих двух благ.

Следует отметить, что при любом положительном монотонном преобразовании функции полезности значение MRS в каждой точке не изменяется и сохраняется решение задачи потребительского выбора.

При построении модели оптимального выбора предполагалось, что цены благ и доход потребителя на рассматриваемом временном интервале являются постоянными величинами. Однако за пределами этого интервала времени цены и доход могут изменяться. Соответственно будет изменяться и величина спроса, предъявляемого потребителем, на то или иное благо. Очевидно, например, что с увеличением дохода потребителя и уменьшением цен приобретается большее количество товаров и услуг, и наоборот.

Таким образом, индивидуальный спрос представляет собой функцию количества блага, покупаемого потребителем за данный период времени, от цен этого блага, дохода потребителя и цен других благ из товарного набора.

Решение системы уравнений (28) относительно оптимальных объемов каждого блага $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ в общем виде могут быть представлены в системой функций

$$\begin{cases} x_1^* = D_1(\mathbf{p}, I) = D_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, I) \\ x_2^* = D_2(\mathbf{p}, I) = D_2(p_1, p_2, \ldots, p_n, I) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^* = D_n(\mathbf{p}, I) = D_n(p_1, p_2, \ldots, p_n, I) \end{cases} \tag{30}$$

Эти функции называются функциями спроса по Маршаллу (Вальрасу) или функциями некомпенсированного спроса потребителя.

Функции (30) являются однородными функциями нулевого порядка

$$x_k^* = D_k(\alpha \cdot p_1, \alpha \cdot p_2, \ldots, \alpha \cdot p_n, \alpha \cdot I) = D_k(p_1, p_2, \ldots, p_n, I). \qquad (31)$$

Здесь $\forall p_i > 0, I > 0, \alpha > 0$.

Однородность функций спроса нулевого порядка означает, что при изменении всех цен и дохода потребителя в одно и то же число раз, количество каждого блага, покупаемого потребителем на рынке, останется неизменным.

Приведем доказательство свойства (31) для случая двух переменных.

Рассмотрим рис. 15.

Предположим, что доход потребителя и цены обоих благ увеличились в α раз

$$\begin{gathered} p_1 \to \alpha \cdot p_1, \\ p_2 \to \alpha \cdot p_2, \\ I \to \alpha \cdot I \end{gathered}$$

Очевидно, что при этом наклон бюджетной линии на рис. 15 не изменится

$$\frac{\alpha \cdot p_1}{\alpha \cdot p_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Останутся прежними и точки пересечения бюджетной линии с осями координат

$$\frac{\alpha \cdot I}{\alpha \cdot p_1} = \frac{I}{p_1}, \frac{\alpha \cdot I}{\alpha \cdot p_2} = \frac{I}{p_2}.$$

Следовательно, не изменится и бюджетное множество – множество доступных для потребителя товарных наборов. Неизменность бюджетного множества означает и неизменность оптимального набора потребителя.

Пример. Рассмотрим функцию полезности Кобба-Дугласа

$$U(\mathbf{x}) = U(x_1, x_2) = k \cdot x_1^a \cdot x_2^b.$$

Здесь $k = const, a = const, b = const, k > 0, a > 0, b > 0$.

Задача потребительского выбора для этой функции имеет вид

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} U(x_1, x_2) = \max\limits_{\mathbf{x}} \left(k \cdot x_1^a \cdot x_2^b \right) \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = I \end{cases}$$

Для решения этой задачи воспользуемся условием оптимума (29)

$$\begin{cases} MRS = \dfrac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = I \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha \cdot x_2}{\alpha \cdot x_1} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = I \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений являются функции спроса по Маршаллу (функции некомпенсированного спроса потребителя)

$$x_1^* = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{I}{p_1}, x_2^* = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{I}{p_2}.$$

Следует отметить, что для функции полезности Кобба – Дугласа спрос потребителя на одно из благ не будет зависеть от цены другого блага, а денежные расходы на покупку каждого из благ, входящих в товарный набор, составляют постоянную долю от дохода, которая определяется предпочтениями потребителя в отношении этих благ. Так, на покупку первого блага потребитель всегда будет расходовать $\frac{a}{a+b}$ часть своего дохода, а на покупку второго блага $\frac{b}{a+b}$ часть своего дохода, независимо от цен этих благ.

Неравенство $a > b$ означает, что потребитель первый товар предпочитает второму. В этом состоит экономический смысл показателей степени в функции Кобба – Дугласа.

Подставим теперь полученные оптимальные объемы благ (30) в функцию полезности $U(\mathbf{x})$

$$U_{\max} = U\left(\mathbf{x}^*\right) = U\left(D_1(\mathbf{p}, I), D_2(\mathbf{p}, I), \ldots, D_n(\mathbf{p}, I)\right) = V(\mathbf{p}, I) = V\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, I\right).$$

Поскольку потребитель желает максимизировать полезность при заданном бюджетном ограничении, то получаемый оптимальный уровень полезности будет не прямо, но косвенно зависеть от цен, по которым товары покупаются на рынке и от дохода потребителя.

Эта зависимость и представлена в косвенной (неявной) функции полезности $V = V(\mathbf{p}, I) = V\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, I\right)$.

Если либо цены, либо доход изменятся, то уровень полезности, который может быть достигнут, окажется под воздействием этих изменений. Иногда как в теории потребительского выбора, так и во многих других контекстах, полезно использовать этот косвенный подход, чтобы исследовать, как изменения в экономической ситуации приводят к различным результатам.

10. МИНИМИЗАЦИЯ РАСХОДОВ ПОТРЕБИТЕЛЯ

Любая задача максимизации функции полезности с ограничением связана со своей двойственной проблемой – задачей минимизации функции расходов при заданном ограничении функции полезности. Таким образом, первичной проблеме потребителя – максимизации полезности для индивида при заданном бюджетном ограничении, соответствует двойственная к ней проблема – минимизации расходов для достижения потребителем некоторого заданного уровня полезности. Рассмотрим, прежде всего, графическое решение данной проблемы для случая двух благ в товарном наборе. Денежные расходы потребителя E на покупку этих двух благ могут быть представлены формулой

$$E = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \tag{32}$$

Рыночные цены предполагаются неизменными, и расходы потребителя будут зависеть от покупаемых количеств первого и второго блага. Двойственная проблема минимизации расходов представлена на рис. 16.

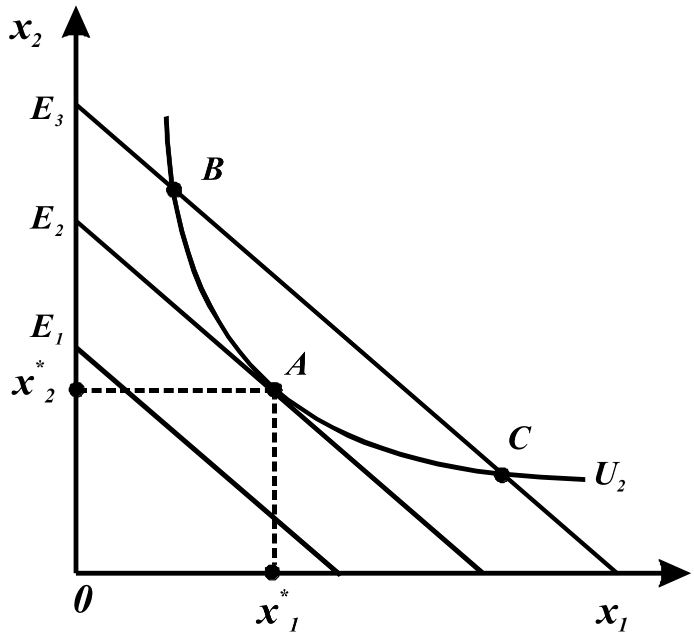

Рис. 16. Двойственная проблема минимизации расходов.

Здесь потребитель стремиться достичь определённого уровня полезности U_2. Этот уровень полезности выступает в данной задаче как ограничение. Три бюджетные линии E_1, E_2, E_3 показывают три возможных уровня расходов потребителя на покупку первого и второго товаров.

Очевидно, что уровень расходов E_1 слишком мал, чтобы достичь уровня полезности U_2. С уровень расходов E_3 потребитель легко достигает уровня полезности U_2 либо в точке B, либо в точке C. Однако в этом случае расходы потребителя не являются минимальными. И только уровень расходов E_2 является одновременно и минимальным и достаточным для достижения уровня полезности U_2, поскольку линия E_2 касается кривой безразличия U_2.

Решением этой двойственной задачи будет покупка товарного набора $\left(x_1^*, x_2^*\right)$, который соответствует точке касания линии расходов и кривой безразличия уровня полезности U_2. В этой точке выполняется условие равенства предельной нормы замещения обратному соотношению цен

$$MRS = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{33}$$

Рассмотрим теперь общий случай задачи минимизации расходов потребителя. Как и прежде предположим, что отношение предпочтения обладает свойствами сравнимости, транзитивности, рефлексивности, непрерывности, строгой монотонности и строго выпуклости. Соответствующая функция полезности является непрерывной, возрастающей, строго квазивогнутой и дифференцируемой во всех точках. Бюджетное множество является ограниченным, замкнутым, непустым и выпуклым.

Зададим требуемый уровень полезности в виде

$$U\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \overline{U} > U(0, 0, \ldots, 0) = 0,$$

и предположим, что потребитель покупает только положительные, а не нулевые количества всех благ из товарного набора $\forall x_i > 0$.

Задача минимизации расходов при заданном уровне полезности $\overline{U}$ имеет вид

$$\begin{cases} \min\limits_{X}\left(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n\right) \\ U = U\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \overline{U} \\ \forall i : x_i \geq 0 \end{cases} \tag{34}$$

Очевидно, что эта задача аналогична первичной проблеме максимизации полезности, но целевые функции и ограничения у этих двойственных проблем меняются местами. Задача (34) является задачей поиска условного экстремума, функцию Лагранжа которой имеет вид

$$L = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n - \lambda \cdot \left(U\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) - \overline{U}\right) \tag{35}$$

Необходимым условием минимума этой функции является равенство нулю всех её частных производных

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \cdot \dfrac{\partial U\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda \cdot \dfrac{\partial U\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = p_n - \lambda \cdot \dfrac{\partial U\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \overline{U} - U\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \end{cases} \tag{36}$$

Здесь все величины $p_1, p_2, \ldots, p_n, \overline{U}$ являются константами. Решением системы (36) будет некоторый вектор $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$, координатами которого являются оптимальные объемы каждого из благ, которые минимизируют расходы потребителя на покупку товарного набора, доставляющего ему полезность $\overline{U}$. Условия (36) являются необходимыми, но не достаточными условиями минимума функции Лагранжа. Однако при наличии предпосылки о строгой выпуклости отношения предпочтения это условие позволяет определить минимум, а не максимум функции.

Составим из первых двух уравнений системы (36) отношение

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{MU_1}{MU_2} = MRS\Big|_{x_2 \to x_1}.$$

Совершенно аналогично такое же соотношение можно записать относительно любой пары уравнений из системы (36)

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_j}} = \frac{MU_i}{MU_j} = MRS\Big|_{x_j \to x_i}. \qquad (37)$$

Таким образом, экономический смысл соотношения (37) состоит в том, что оптимального выбора предельная норма замещения одного блага другим должна быть равна соотношению цен этих двух благ.

При построении модели минимизации расходов предполагалось, что цены благ и требуемый уровень полезности являются постоянными величинами. Однако с течением времени рыночные цены на товары, и желаемый уровень полезности могут измениться. В зависимости от этого будет меняться и количество каждого из благ, которые потребитель покупает на рынке.

Решение системы уравнений (36) относительно оптимальных объемов каждого блага $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ в общем виде могут быть представлены в системой функций оптимального объема каждого блага от цен и уровня полезности потребителя

$$\begin{cases} x_1^* = H_1(\mathbf{p}, I) = H_1\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \overline{U}\right) \\ x_2^* = H_2(\mathbf{p}, I) = H_2\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \overline{U}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^* = H_n(\mathbf{p}, I) = H_n\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \overline{U}\right) \end{cases} \tag{38}$$

Эти функции называются функциями спроса по Хиксу или функциями компенсированного спроса потребителя.

Функции (38) являются однородными функциями нулевого порядка

$$x_k^* = H_k\left(\alpha \cdot p_1, \alpha \cdot p_2, \ldots, \alpha \cdot p_n, \alpha \cdot \overline{U}\right) = H_k\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \overline{U}\right). \tag{39}$$

Здесь $\forall p_i > 0, \overline{U} > 0, \alpha > 0$.

Свойство (39) означает, что если цены всех благ изменятся в α раз, то величина компенсированного спроса потребителя останется прежней при том же самом требуемом уровне полезности. Однако компенсированный спрос будет зависеть от выбранного нами уровня полезности $\overline{U}$. Если потребитель хочет достичь более высокого уровня полезности, то он должен потреблять и большее количество благ.

Рассмотрим доказательство свойства (38) для случая двух переменных.

На рис. 16 видно, что при первоначальных ценах $\left(p_1, p_2\right)$ и уровне полезности U_2 потребитель выбирает набор $\left(x_1^*, x_2^*\right)$. Если цены обоих благ увеличатся в α раз $p_1 \to \alpha \cdot p_1, p_2 \to \alpha \cdot p_2$, то наклон бюджетной линии не изменится

$$\frac{\alpha \cdot p_1}{\alpha \cdot p_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Уровень полезности U_2 остается прежним. Следовательно, не меняется и оптимальный набор потребителя.

Если изменить цену на любое благо потребительского набора, или изменить уровень полезности потребителя, то оптимальным станет другой товарный набор. Такую зависимость можно представить в виде функции расходов потребителя

$$E_{\min} = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k^* = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot H_k(\mathbf{p}, \overline{U}) = E(\mathbf{p}, \overline{U}) = E(p_1, p_2, \ldots, p_n, \overline{U}) \quad (40)$$

Таким образом, функция расходов потребителя (40) показывает минимальные денежные затраты, которые должен сделать потребитель, чтобы достичь некоторого заданного уровня полезности при определённых ценах, сложившихся на рынке. Очевидно, что функция расходов является однородной функцией первого порядка по ценам. Это означает, что увеличение цены каждого блага в α раз потребует увеличения уровня минимальных расходов потребителя тоже в α раз.

Пример. Предпочтения некоторого потребителя описываются функцией полезности Кобба-Дугласа

$$U(\mathbf{x}) = U(x_1, x_2) = k \cdot x_1^a \cdot x_2^{1-a}, (0 < a < 1).$$

Требуется сформулировать задачу минимизации расходов потребителя при заданном уровне полезности $\overline{U}$. Найти функции компенсированного спроса и функцию расходов для данного потребителя. (Решить самостоятельно).

Можно показать, что между двойственными задачами потребительского выбора существует следующая взаимосвязь:

1. Если вектор $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ является оптимальным потребительским набором в задаче максимизации полезности при доходе $I > 0$, то этот вектор является оптимальным набором и в задаче минимизации расходов, если для уровня полезности $U\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$. Кроме того, минимальный уровень расходов в данной задаче в точности равен доходу потребителя I из проблемы максимизации полезности.

2. Если вектор $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ является оптимальным потребительским набором в задаче минимизации расходов при требуемом уровне полезности $\overline{U} > 0$, то этот вектор является оптимальным набором и в задаче максимизации полезности с доходом потребителя $I = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k^*$. Кроме того, максимальный уровень полезности в этой задаче в точности равен требуемому значению полезности из задачи минимизации расходов $\overline{U}$.

Из сформулированного принципа двойственности следуют несколько важных тождеств, раскрывающих связь между косвенной функцией полезности и функцией расходов, а также между функциями компенсированного и некомпенсированного спроса

$$E\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, V\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, I\right)\right) \equiv I \qquad (41)$$

$$V\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, E\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \overline{U}\right)\right) \equiv \overline{U} \qquad (42)$$

$$D_k\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, I\right) = H_k\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, V\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, I\right)\right) \qquad (43)$$

$$H_k\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \overline{U}\right) = D_k\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, E\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \overline{U}\right)\right) \qquad (44)$$

11. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА

Рассмотрим теперь несколько особых случаев оптимального выбора потребителя. Эти случаи не были включены в предыдущий общий анализа из-за наличия большого количества дополнительных предположений.

Угловое решение, или граничный максимум

При решении задачи максимизации полезности при заданном бюджетном ограничении предполагалось, что потребляются только положительные (ненулевые) количества всех благ.

В некоторых случаях предпочтения индивида таковы, что максимум полезности достигается при нулевом потреблении одного из благ. Такая возможность представлена на рис. 17

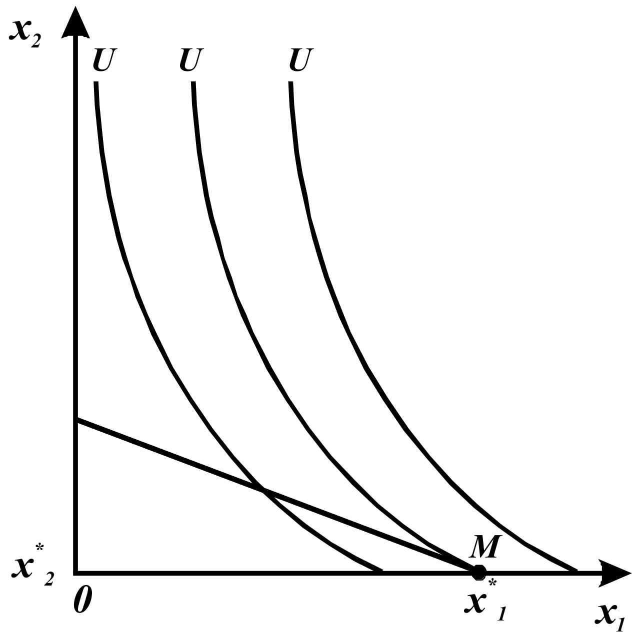

Рис. 16. Максимум полезности при нулевом потреблении одного из благ.

Предполагается, что индивид потребляет только благо x_1 (рыбные котлеты) и благо x_2 (гамбургеры). Следует отметить, что кривые безразличия на рис. 17 являются довольно крутыми и демонстрируют предпочтения потребителя относительно двух рассматриваемых благ. Очевидно, что индивид предпочитает рыбные котлеты гораздо больше, чем гамбургеры. Он ради одной дополнительной котлеты готов пожертвовать несколькими гамбургерами. Линия бюджетного ограничения в данном случае является пологой. Это означает, что рыбные котлеты в данный момент времени стоят дешевле, чем гамбургеры. В такой ситуации рациональный потребитель вообще не станет покупать гамбургеры, поскольку они менее предпочтительны и дороже, чем рыбные котлеты.

Оптимальный товарный набор $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ находится на границе потребительского множества. Максимум функции полезности находится в точке $M\left(x_1^*, 0\right)$, в которой гамбургеры не потребляются вообще. Любая точка линии бюджетного ограничения, в которой покупается положительное количество гамбургеров $\left(x_2 > 0\right)$, дает потребителю меньшую полезность, чем точка $M\left(x_1^*, 0\right)$. В этой точке линия бюджетного ограничения и кривая безразличия могут не только касаться, но и просто пересекаться.

На рис. 17 в точке $M\left(x_1^*, 0\right)$ бюджетная линия оказывается более пологой, чем кривая безразличия и соотношение цен двух благ оказывается меньше, чем предельная норма замещения второго товара первым

$$\frac{p_1}{p_2} < MRS\left(x_1^*, x_2^*\right)\Big|_{x_2 \to x_1} \qquad (45)$$

Неравенство (45) может возникать при угловом решении, потому что дальнейшее увеличение потребления первого блага за счет сокращения количества второго блага уже невозможно.

Абсолютно взаимозаменяемые блага (совершенные субституты)

Совершенные субституты – это блага, которые служат для удовлетворения одинаковых потребностей, так что потребителю абсолютно всё равно, какой из этих товаров потреблять. Такие товары легко заменяют друг друга в потреблении. Предпочтения потребителя в отношении двух таких благ описываются линейной функцией полезности

$$U(x_1, x_2) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2, (a > 0, b > 0) \tag{46}$$

Полезность абсолютно взаимозаменяемых в потреблении товаров x_1 и x_2 измеряется от их общего объема. Функция полезности является аддитивной, а кривые безразличия представляют собой прямые линии.

$$\begin{gathered} U(x_1, x_2) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = C, \\ x_2 = \frac{C}{b} - \frac{a}{b} x_1, tg\alpha = \frac{a}{b}, tg\beta = -\frac{a}{b} \end{gathered} \tag{47}$$

Предельная норма замещения $MRS = \frac{a}{b}$ является постоянной величиной, отражающей пропорцию, в которой один товар может быть заменён другим.

На рис. 18 представлена карта кривых безразличия для товаров – совершенных субститутов.

Пусть, например, функция полезности имеет вид $U(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$. Это означает, что индивиду абсолютно всё равно, потребить две единицы второго блага или одну единицу первого блага. Действительно,

$$tg\alpha = \frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow x_2 = 2x_1.$$

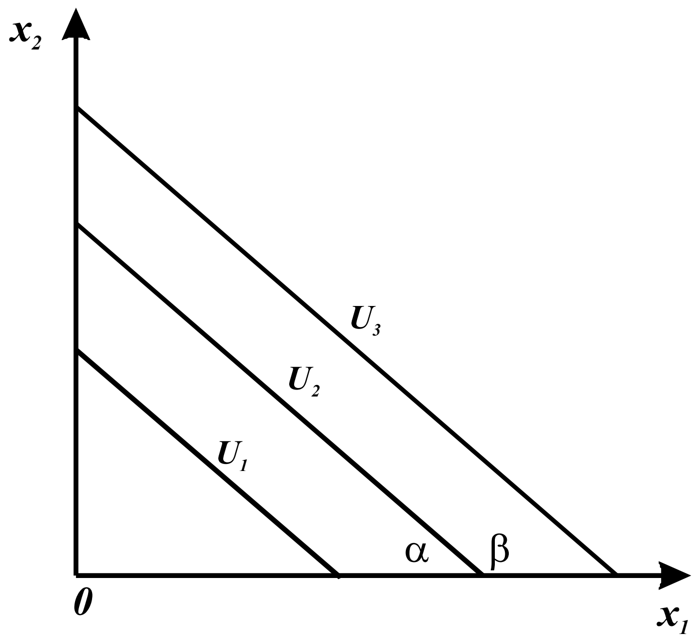

Рис. 18. Кривые безразличия для совершенных субститутов.

Таким образом, потребитель одну единицу первого блага обменяет только на две единицы второго блага. Следовательно, первое благо является для него в два раза более ценным, чем второе благо. В этом состоит экономический смысл коэффициентов в данной функции полезности: они показывают предпочтения потребителя относительно благ из товарного набора.

Примерами абсолютно взаимозаменяемых в потреблении благ могут быть Кока-кола и Пепси-кола, конфеты «Мишка косолапый» и «Мишка на севере», автомобили «Вольво» и «Тойота», джинсы «Levis» и «Wrangler».

Задача максимизации полезности для случая совершенных субститутов выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} U(x_1, x_2) = \max\limits_{\mathbf{x}} (a \cdot x_1 + b \cdot x_2) \\ \quad p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = I \end{cases} \tag{48}$$

Эта задача не может быть решена рассмотренным выше стандартным способом, поскольку здесь не выполняется предпосылка о строгой выпуклости отношения предпочтения.

Кривые безразличия являются прямыми линиями, предельная норма замещения не убывает по мере движения вдоль кривой безразличия, а является постоянной величиной, равной тангенсу угла наклона кривых безразличия.

На рис. 19 показано, что в общем случае наклон бюджетной линии не совпадает с наклоном линии уровня полезности.

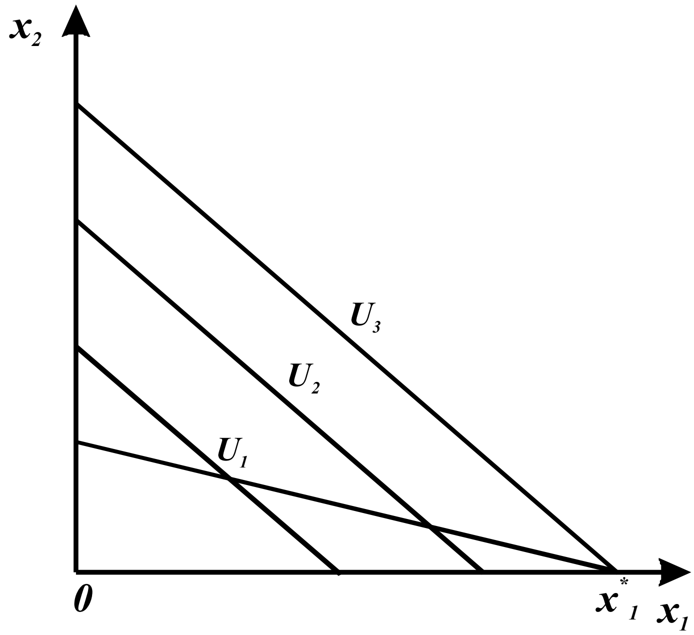

Рис. 19. Кривые безразличия и бюджетное ограничение для задачи (48).

Это приводит к угловому решению, при котором будет покупаться только одно из благ. Таким решением является первое благо, на которое потребитель и тратит весь свой доход $x_1^* = \dfrac{I}{p_1}, x_2^* = 0$. Если соотношение цен на рынке изменится, и линия бюджетного ограничения станет более крутой, то, возможно, потребитель переключится на потребление второго блага, перестав покупать первое.

Приведем аналитическое решение задачи потребительского выбора для случая совершенных субститутов. Из уравнения бюджетного ограничения находим

$$x_2 = \frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1.$$

Вычислим теперь функцию полезности

$$U(x_1) = a \cdot x_1 + b \cdot \left(\frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \right) = \left(a - b \cdot \frac{p_1}{p_2} \right) \cdot x_1 + b \cdot \frac{I}{p_2},$$

или

$$U(x_1) = \left(\frac{a}{b} - \frac{p_1}{p_2} \right) \cdot b \cdot x_1 + b \cdot \frac{I}{p_2}, 0 \le x_1 \le \frac{I}{p_1}.$$

Поскольку функция полезности является линейной, то возможны только три случая достижения максимума.

Если $\left(\frac{a}{b} - \frac{p_1}{p_2} \right) > 0$, то функция полезности $U(x_1)$ является возрастающей функцией и ее максимум достигается при наибольшем значении $x_1^* = \frac{I}{p_1}$. При этом $x_2^* = 0$. Если $\left(\frac{a}{b} - \frac{p_1}{p_2} \right) < 0$, то функция полезности $U(x_1)$ является убывающей функцией и ее максимум достигается при наименьшем значении $x_1^* = 0$. При этом $x_2^* = \frac{I}{p_2}$. Если $\left(\frac{a}{b} - \frac{p_1}{p_2} \right) = 0$, то функция полезности $U(x_1)$ является константой ее максимум достигается при наименьшем значении $x_1^* = 0$. При этом $x_2^* = \frac{I}{p_2}$.

Полученные выводы соответствуют угловому решению, при котором потребитель, согласно неравенству $MRS = \frac{a}{b} > \frac{p_1}{p_2}$, будет потреблять только первое благо.

Абсолютно взаимодополняемые блага (совершенные комплементы).

Совершенные комплементы представляют собой такие товары, которые потребляются индивидом всегда вместе, причем в фиксированной пропорции. В реальной жизни примерами таких благ могут служить правая и левая перчатка, правый и левый ботинок, теннисная ракетка и теннисный мяч. Для отдельных потребителей это – чай и сахар, кофе и молоко, джин и тоник. Вообще следует иметь в виду, что принадлежность благ к совершенным комплементам и совершенным субститутам зависит только от вкусов и предпочтений того или иного потребителя. Для кого-то, например, огурцы и помидоры являются взаимозаменяемыми благами, а кто-то потребляет их только вместе в салате как взаимодополняемые товары.

В этом случае не выполняются предположения, как о строгой монотонности, так и строгой выпуклости отношения предпочтения. Функция полезности не является дифференцируемой и не является возрастающей при увеличении значений только одной из переменных. Кривые безразличия такой функции полезности имеют особую форму и представлены на рис. 20.

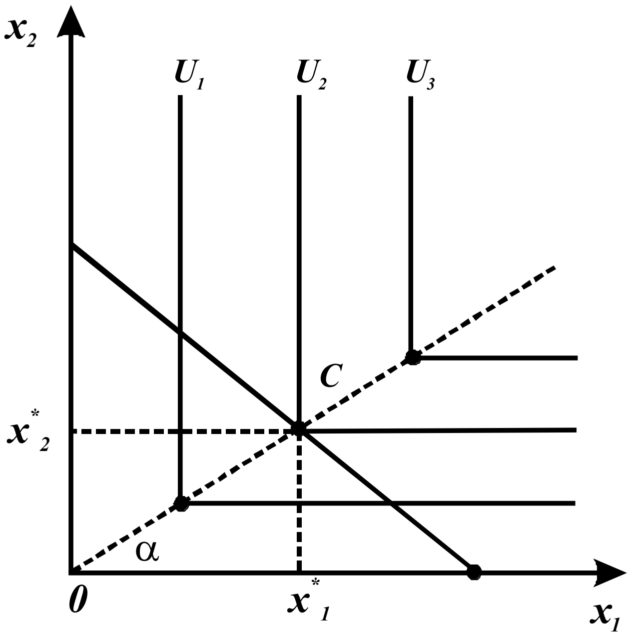

Рис. 20. Кривые безразличия и бюджетное ограничение для совершенных комплементов.

Форма кривых безразличия показывает, что увеличение количества одного из благ без соответствующего увеличения количества другого блага не изменит полезности этого набора для потребителя. Таким образом, здесь норма замещения одного блага другим равна нулю

$$RS = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\bigg|_{U=const} = -\frac{0}{\Delta x_1} = 0 \qquad (49)$$

В принципе, можно также сказать, что норма замещения одного блага другим бесконечно велика

$$RS = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\bigg|_{U=const} = -\frac{\Delta x_2}{0} \to \pm\infty \qquad (50)$$

Предельная норма замещения $MRS = 0$, так как $-\frac{dx_2}{dx_1} = 0$ при подходе справа ($-\frac{dx_2}{dx_1}$ при походе слева не существует).

Функция полезности для совершенных комплементов имеет вид

$$U(x_1, x_2) = \min\{a \cdot x_1, b \cdot x_2\}, a > 0, b > 0 \qquad (51)$$

Рассмотрим три возможных случая.

1. Пусть $a \cdot x_1 < b \cdot x_2$, тогда $U(x_1, x_2) = a \cdot x_1$. В этом случае количество второго блага оказывается избыточным.

2. Пусть $a \cdot x_1 > b \cdot x_2$, тогда $U(x_1, x_2) = b \cdot x_2$. В этом случае избыточным оказывается количество первого блага.

3. Пусть $a \cdot x_1 = b \cdot x_2$, тогда $U(x_1, x_2) = a \cdot x_1 = b \cdot x_2$. В этом случае товары потребляются в нужных пропорциях.

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b} \tag{52}$$

Пропорция (52) показывает, в каких отношениях должны потребляться блага, являющиеся совершенными комплементами. Экономический смысл коэффициентов функции полезности (51) состоит в том, что они показывают пропорцию потребления взаимодополняемых благ.

Задача максимизации полезности для случая совершенных комплементов выглядит следующим образом

$$\begin{cases} \max\limits_X U(x_1, x_2) = \max\limits_X \left(\min\{a \cdot x_1, b \cdot x_2\}\right), \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = I \end{cases} \tag{53}$$

Задача (2.55) не может быть решена стандартным способам, поскольку рассматриваемая функция полезности является не дифференцируемой. Графическое решение этой задачи представлено на рис. 20. Оптимальный набор $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ находиться в точке C на пересечении луча, выходящего из начала координат под углом α $\left(tg\,\alpha = \frac{a}{b}\right)$ с линией бюджетного ограничения. Это означает, что потребитель максимизирует полезность, полностью расходуя свой доход на покупку товарного набора, и потребляет блага в правильной пропорции.

Вычислим функцию спроса потребителя. Из уравнения бюджетного ограничения выразим x_2

$$x_2 = \frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1, \tag{54}$$

и подставим это выражение в функцию полезности

$$U(x_1) = \min\left\{a \cdot x_1, b \cdot \left(\frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right)\right\}. \tag{55}$$

Эта функция является кусочно-линейной и может быть записана в виде

$$U(x_1) = \begin{cases} a \cdot x_1, & 0 \le x_1 \le x_1^* \\ b \cdot \left(\frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right), & x_1^* \le x_1 \le \frac{I}{p_1} \end{cases} \tag{56}$$

График этой кусочно-линейной функции полезности представлен на рис. 21. Координаты точки M получаются, если приравнять нулю выражение (54)

$$b \cdot \left(\frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{I}{p_1} \Rightarrow M\left(\frac{I}{p_1}, 0\right).$$

Координаты точки максимума C кусочно-линейной функции полезности находятся, если приравнять ее обе части

$$a \cdot x_1 = b \cdot \left(\frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right). \tag{57}$$

Решение уравнения (57) дает

$$x_1^* = \frac{b \cdot I}{b \cdot p_1 + a \cdot p_2}. \tag{58}$$

Подставляя значение (58) в уравнение (54), находим

$$x_2^* = \frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{b \cdot I}{b \cdot p_1 + a \cdot p_2}. \tag{59}$$

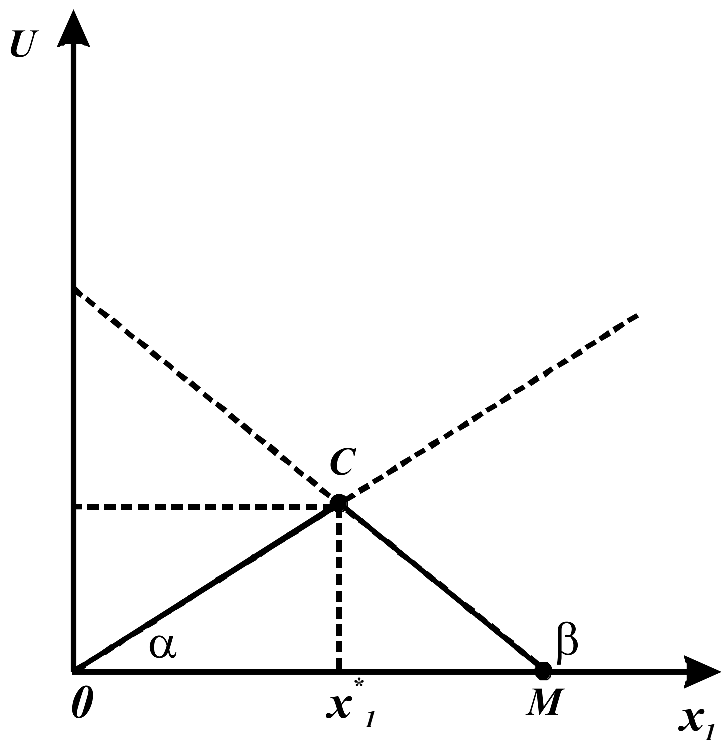

Рис. 21. График кусочно-линейной функции полезности $U(x_1)$.

Формулы (58) и (59) показывают, что в рассматриваемом случае спрос потребителя на любое благо прямо пропорционально зависит от дохода потребителя и обратно пропорционально зависит от цен этих благ. Такая же зависимость наблюдалась и для функции полезности Кобба-Дугласа, и для совершенных субститутов.

Особо следует отметить, что в рассматриваемом случае спрос потребителя на одно благо обязательно зависит и от цены другого блага, причём в обратном отношении. Это связано с тем, что совершенные комплементы потребляются только вместе и никогда не потребляются порознь.

Задание для самостоятельного рассмотрения. Выведите косвенную функцию полезности для случая двух благ, являющихся совершенными комплементами.

12. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1.

В соответствии с представленной таблицей

Количество благ	Предельная полезность благ		
	X	Y	Z
1	100	80	70
2	98	75	60
3	94	70	50
4	88	65	40
5	80	60	30
6	60	55	20

потребитель оценивает полезность каждой единицы трех видов благ по мере увеличения их количества. Израсходовав весь свой бюджет на приобретение четырех единиц блага X по цене $P_X = 11$, пяти единиц блага Y и шести единиц блага Z, он получил максимум полезности от купленного набора благ. Определите бюджет индивида и цены P_Y и P_Z.

Задача 2.

Оценка потребителем полезности каждой единицы трех видов благ по мере увеличения их количества представлена в таблице

Количество благ	Предельная полезность благ		
	X	Y	Z
1	30	24	18
2	25	21	15
3	20	15	12
4	15	12	9
5	10	9	6

Имея бюджет $I=30$ и купив три единицы блага X, одну единицу блага Y и три единицы блага Z, он получил максимум полезности. Определите цены всех благ P_X, P_Y и P_Z.

Задача 3.

Для индивидуального потребителя предельная полезность апельсинов отображается функцией

$$MU_A = 100 - 4 \cdot Q_A,$$

а предельная полезность бананов отображается функцией

$$MU_B = 60 - Q_B.$$

Доход потребителя составляет $I = 300$, а цены благ заданы соотношениями $P_A = 8$ и $P_B = 2$. Найти количество каждого из благ, которые должен купить потребитель для максимизации общей полезности.

Задача 4.

В таблице представлена зависимость общей полезности TU и предельной полезности MU товаров X, Y, Z от объемов их потребления Q.

Количество благ Q	Товар					
	X		Y		Z	
	TU	MU	TU	MU	TU	MU
1	…	14	12	…	11	…
2	…	11	24	…	…	9
3	…	9	32	…	28	…
4	…	6	37	…	32	…
5	…	4	39	…	…	2

Вычислить пропущенные значения в таблице. Составьте табличные функции спроса на товары X, Y, Z. Постройте графики этих функций, если одна условная единица полезности равна $0{,}5$ денежной единицы.

Задача 5.

Согласно первому закону Госсена функция предельной полезности при увеличении количества потребляемого блага убывает. Выяснить, какие из следующих функций предельной полезности противоречат первому закону Госсена.

1. $MU(X) = \dfrac{20}{X+1}$,

2. $MU(X) = 20 - X$,

3. $MU(X) = 20 + \frac{1}{X+1}$,

4. $MU(X) = 20 + X$.

Задача 6.

В каждую чашку чая потребитель кладет только три ложки сахара. Единица измерения чашки чая обозначается X, а единица измерения ложки сахара обозначается Y. Определить, какая из приведенных функций полезности правильно описывает вкусы потребителя.

1. $U(X,Y) = 3 \cdot X \cdot Y$,
2. $U(X,Y) = X + Y$,
3. $U(X,Y) = X \cdot Y \cdot (3 \cdot X + Y)$,
4. $U(X,Y) = \min\{X, 3 \cdot Y\}$.

Задача 7.

Для потребителя выбор между равными количествами цейлонского чая X и индийского чая Y абсолютно безразличен. Определить, какая из приведенных функций полезности правильно описывает этот факт и пояснить ответ

1. $U(X,Y) = X \cdot Y$,
2. $U(X,Y) = X + Y$,
3. $U(X,Y) = \max\{X, Y\}$,
4. $U(X,Y) = X^2$.

Задача 8.

Функция общей полезности потребителя блага X имеет вид

$$TU(X) = 12 \cdot X + X^2.$$

а) Определить функцию предельной полезности и функцию спроса для блага X.

б) Рассчитать объем потребления блага X, если цена равна 7, 8 и 10 денежных единиц за штуку.

в) Произвести такой же расчет для функция полезности

$$TU(X) = 18 \cdot X - 2 \cdot X^2.$$

Задача 9.

Функция предельной полезности блага имеет вид

$$MU(X) = 20 - 2 \cdot X.$$

При какой цене покупатель откажется от приобретения этого блага, если одна единица полезности равна одной денежной единице.

Задача 10.

Функция полезности потребителя имеет вид

$$U(X, Y, Z) = X^{0,4} \cdot Y^{0,5} \cdot Z^{0,1},$$

а бюджет равен I.

1. Построить функции спроса на блага X, Y, Z.

2. Определить функции спроса, если функция общей полезности примет вид

$$TU(X,Y,Z) = X^{0,5} \cdot Y^{0,5} \cdot Z^{0,5}.$$

Задача 11.

Весь доход в размере 200 денежных единиц в месяц потребитель должен израсходовать на покупку товара X по цене четыре денежных единицы за одну его единицу и покупку товара Y по цене пять денежных единиц за одну его единицу.

1. Построить график бюджетной линии.

2. Построить график бюджетной линии для дохода потребителя размером 240 денежных единиц в месяц.

3. Построить график бюджетной линии для дохода потребителя размером 200 денежных единиц в месяц при снижении цены товара X до двух денежных единиц.

Задача 12.

Доход в размере 300 денежных единиц в месяц израсходован весь потребителем на покупку товара X по цене три денежных единицы за штуку и покупку товара Y по цене пять денежных единиц за штуку.

1. Построить график бюджетной линии.

2. Построить уравнение бюджетной линии и определить ее наклон.

3. Построить график бюджетной линии для дохода потребителя размером 600 денежных единиц в месяц.

Задача 13.

Потребитель покупает 8 единиц товара X и 4 единицы товара Y. Чему равен его бюджет, если $P_X = 2$, а предельная норма замещения товара Y товаром X равна $0{,}5$?

Задача 14.

Доход потребителя составляет 160 денежных единиц в месяц. Он потребляет товар X в объеме 8 штук и товар Y в объеме 8 штук. Предельная норма замещения $MRS_{XY} = 4$. Определить цены товаров X и Y.

Задача 15.

Потребитель располагает доходом 120 денежных единиц в месяц. Цена товара Y составляет 10 денежных единиц, предельная норма замещения $MRS_{XY} = 4$. Определить оптимальную для потребителя комбинацию товаров X и Y, если известно, что $X = \frac{1}{2} \cdot Y$.

Задача 16.

При заданном бюджете и заданных ценах предельные нормы замещения для используемых благ потребителя задаются соотношениями

$$MRS_{XY} = 2,\ MRS_{YZ} = 0{,}5.$$

Определить предельную норму замещения MRS_{XZ}.

Задача 17.

Функция полезности потребителя задается соотношением

$$U(X, Y) = X^{0{,}6} \cdot Y^{0{,}3}.$$

Его бюджет составляет $I = 150$, цены благ $P_X = 20,\ P_Y = 2$. Определить число единиц каждого блага, которое купит потребитель.

Задача 18.

Определить противоречивое упорядочивание для трех различных товаров X, Y, Z, которые потребитель может упорядочить по степени предпочтения

1. Если $X \succ Y$ и $Z \succ Y$, то $X \succ Y$.
2. Если $X \succ Y$ и $Y \succ Z$, то $X \succ Z$.
3. Если $Y \succ X$ и $X \succ Z$, то $Y \succ Z$.
4. Если $Y \succ Z$ и $Z \succ X$, то $Y \succ X$.
5. Если $Y \succ Z$ и $Z \succ X$, то $X \succ Y$.

Задача 19.

На одной оси координат откладывается количество яда, а на другой оси координат откладывается количество противоядия. Выяснить, как могут в этом случае, выглядеть кривые безразличия и что они будут обозначать.

Задача 20.

№ 20. Может ли случиться так, что выбор любой точки бюджетной линии принесет потребителю одинаковую полезность?

Задача 21.

Переведите на язык кривых безразличия следующие утверждения:

1. Не могу пить чай без двух ложек сахара.

2. Ненавижу чай с сахаром.

3. Очень люблю художественные фильмы, а к мультфильмам совершенно равнодушен.

4. Люблю и молоко, и рыбу, но если потребляю их вместе, то всегда болит живот.

5. Терпеть не могу тараканов, но для компенсации морального вреда от появления дополнительного таракана удовлетворюсь конфетой.

6. Можно приготовить два блюда из компонентов A и B – для первого блюда нужна смесь в пропорции один к трем, а для второго блюда нужна смесь в пропорции три к одному. Пропорции нарушать нельзя, а сами по себе компоненты A и B бесполезны.

Задача 22.

Потребитель с функцией полезности

$$U(X,Y) = X^{0,6} \cdot Y^{0,4}.$$

и бюджетом $I = 100$ купил 15 единиц блага X и 8 единиц блага Y. Определите цены благ.

Задача 23.

Потребитель имеет 6 единиц блага X и 8 единиц блага Y. Его функция полезности задана соотношением

$$U(X,Y) = (X-2)\cdot(Y-4).$$

Найти, за сколько единиц блага X потребитель согласится отдать две единицы блага Y. Определить предельную норму замещения MRS_{XY} потребителя до и после предложенного ему обмена благами.

Задача 24.

Функция полезности потребителя имеет вид

$$U(X,Y) = 0,5 \cdot X + Y^{0,5}.$$

Определить минимальный бюджет потребителя, при котором он сможет купить благо X по ценам $P_X = 3$, $P_Y = 2$.

Задача 25.

Функция полезности индивида имеет вид

$$U(X, Y) = X \cdot Y^2.$$

Его доход составляет 200 денежных единиц в месяц. Цена блага X составляет 20 денежных единиц, а цена блага Y составляет 15 денежных единиц. Как потребитель должен израсходовать полностью свой доход, чтобы получать максимум удовлетворения?

Задача 26.

Функция полезности потребителя имеет вид

$$U(X, Y) = X^{0,75} \cdot Y^{0,25}.$$

При имеющемся у него бюджете он приобрел 21 единицу блага X по цене $P_X = 4$. Определить количество денег оставшихся у потребителя на покупку блага Y.

Задача 27.

Функция полезности потребителя относительно покупаемых им товаров X и Y имеет вид

$$U(X, Y) = X^2 \cdot Y.$$

Вывести функцию спроса потребителя на товар X, если его доход $I = 100$ денежных единиц в месяц.

Задача 28.

Определить функцию спроса потребителя на товар Y, если его доход составляет 140 денежных единиц в месяц, цена товара X равна 7 денежным единицам, а функция полезности имеет вид

$$U(X, Y) = X \cdot Y.$$

Задача 29.

При заданных ценах потребитель покупает 4 единицы блага X и 5 единиц блага Y. В дальнейшем доход потребителя и цены благ изменились таким образом, что его бюджетная линия стала описываться уравнением

$$Y = 14 - 0{,}75 \cdot X.$$

Определить, повысилось или понизилось благосостояние потребителя в результате происшедших изменений?

Задача 30.

Функция полезности потребителя относительно покупаемых им товаров X и Y имеет вид

$$U(X, Y) = X^{0,6} \cdot Y^{0,3}.$$

Выяснить, на сколько возрастет объем его спроса на товар X при увеличении бюджета на $\Delta I = 9 \cdot P_X$?

Задача 31.

Потребитель предъявляет спрос на два блага X и Y, который определяется функциями

$$X^D = \frac{480}{P_X},\; Y^D = \frac{240}{P_Y}.$$

Определить общую полезность благ, купленных потребителем при $P_X = 19{,}2$ и $P_Y = 15$, если известно, что она измеряется функцией

$$U(X,Y) = X^{\alpha} \cdot Y^{\beta},$$

и при этом имеет место соотношение $\alpha + \beta = 0{,}75$.

Задача 32.

Потребитель с бюджетом 128 денежных единиц при заданных ценах полностью израсходует бюджет, если купит либо 3 единицы блага X и 10 единиц блага Y, либо 4 единицы блага X и 8 единиц блага Y. Какое количество блага X следует купить данному потребителю для максимизации своей функции полезности

$$U(X,Y) = X^{0,25} \cdot Y^{0,75}.$$

Задача 33.

Потребитель A полностью удовлетворен 6 единицами блага X, а потребитель B полностью удовлетворен 30 единицами этого блага. Потребитель A покупает благо X только при цене $P < 18$, а потребитель B покупает благо X только при цене $P < 10$. Определить цену, по которой оба потребителя купят одинаковое количество блага X.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Басовский Л.Е. Микроэкономика // Учебник, М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013, 224 с.

2. Белоусова И.Э. Микроэкономика: Базовый курс // Учебник для бакалавров, М.: Юрайт, 2013, 263 с.

3. Вечканов Г.С. Микроэкономика // Учебник для вузов: Стандарт третьего поколения, СПб.: Питер, 2012, 464 с.

4. Воронин А.П. Микроэкономика. Экономическая теория в вопросах и ответах // Учебное пособие, М.: Экономика, 2009, 214 с.

5. Гальперин В.М. Микроэкономика // В 3-х т. Т. 2. Микроэкономика, СПб.: Эк. шк. ГУ ВШЭ, 2008, 512 с.

6. Громыко В.В. Микроэкономика // Учебное пособие, М.: ИЦ РИОР, 2012, 159 с.

7. Гусейнов Р.М. Микроэкономика // Учебник для бакалавров, М.: Омега-Л, 2012, 447 с.

8. Ивасенко, А.Г. Микроэкономика // Учебное пособие, М.: КноРус, 2013, 280 с.

9. Ильяшенко В.В. Микроэкономика // Учебник, 2012, 288 с.

10. Малкина, М.Ю. Микроэкономика // Учебник, М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013, 395 с.

11. Микроэкономика : практикум / сост. В.И. Александров и др. – СПб. : Изд-во СПбГУЭФ, 2011. – 138 с.

12. Моховикова Г.А. Микроэкономика // Учебник для бакалавров, М.: Юрайт, 2013, 268 с.

13. Никулина И.Н. Микроэкономика // Учебник, М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013, 553 с.

14. Носова С.С. Микроэкономика. Конспект лекций // Учебное пособие, М.: КноРус, 2013, 224 с.

15. Нуреев, Р.М. Курс микроэкономики // Учебник, М.:Норма, НИЦ ИНФРА-М, 2012, 576 с.

16. Розанова Н.М. Микроэкономика. Руководство для будущих профессионалов // Учебник для бакалавров, М.: Юрайт, ИД Юрайт, 2013, 985 с.

17. Савицкая Е.В. Курс лекций по микроэкономике // Учебное пособие, М.:, 2002, 302 с.

18. Серяков С.Г. Микроэкономика // Учебник, М.: Магистр, ИНФРА-М, 2011, 416 с.

19. Симкина Л.Г. Микроэкономика // Учебное пособие, М.: КноРус, 2013, 360 с.

20. Тарануха Ю.В. Микроэкономика // Учебник, М.: КноРус, 2011, 320 с.

21. Тарасевич Л.С. Микроэкономика // Учебник для бакалавров, М.: Юрайт, 2013, 543 с.

22. Черемных Ю.Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень // Учебник М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013, 844 с.

Учебное издание

Сараев Александр Леонидович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ АНАЛИЗА ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции

Подготовка оригинал-макета Т.С. Зинкина

Подписано в печать 10.11.2016. Формат 60х84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл.-печ. л. 5,2;
Уч.-изд. л. 5,5. Гарнитура Times. Тираж 300 экз. Заказ № .

Издательство Самарского университета,
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии ООО «Медиа-Книга».
г. Самара, ул. Песчаная, 1.
Тел. 8 (846) 267-36-82. E-mail: izdatkniga@yandex.ru