

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Т.А. БАЯНДИНА, В. Л. БАЛАКИН

Математические модели движения летательных аппаратов
Электронный курс лекций

САМАРА

2013

УДК 629.78 (075)

ББК 39.6я7

Б 345

Авторы: Баяндина Тамара Александровна, Балакин Виктор Леонидович

Компьютерная вёрстка Т.А. Баяндина

Баяндина Т.А., Балакин В.Л. Математические модели движения летательных аппаратов [Электронный ресурс] : электрон. курс лекций / В.Л. Балакин, Т.А. Баяндина; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва (Нац. исслед. ун-т). - Электрон. текстовые и граф. дан. (1,14 Мбайт). - Самара, 2013. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM). - Систем. требования: ПК Pentium; Windows 98 или выше.

Излагается конспект лекций по дисциплине «Математические модели движения летательных аппаратов» по дистанционной форме обучения, который выполнен на основе соответствующей рабочей программы.

Данный научно – образовательный контент разработан в обеспечение учебной подготовки магистров факультета летательных аппаратов по направлению 161100.68 – Системы управления движением и навигация по мероприятиям блока 1 «Совершенствование образовательной деятельности» Программы развития Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва».

Подготовлено на кафедре космического машиностроения.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

Предисловие

В предлагаемом курсе лекций рассматриваются вопросы, связанные с математическими моделями движения летательных аппаратов.

Разнообразие существующих и разрабатываемых летательных аппаратов делает невозможным сколько-нибудь полное изложение данного вопроса в одном каком-либо учебнике, не говоря уже о курсе лекций.

Учитывая, что курс лекций предназначен для студентов, обучающихся по магистерской программе «Системы управления движением и навигация», авторы сочли целесообразным уделить основное внимание моделям движения объектов ракетно-космической и аэрокосмической техники.

За основу излагаемого материала взято 4-е переработанное и дополненное издание учебника А.А. Дмитриевского, Л.Н. Лысенко «Внешняя баллистика» /1/. Этот учебник в силу широты изложенного в нём материала на протяжении последних 40 лет играл важную роль в подготовке специалистов в области ракетостроения и космонавтики.

Поэтому курс лекций определён материалом учебника с сохранением обозначений и математических соотношений последнего. Это облегчит студентам пользование учебником при необходимости изучения тех вопросов, которые не вошли в курс лекций.

Профессор, доктор технических наук Балакин В.Л.

Доцент, кандидат технических наук Баяндина Т.А.

Введение

Математическая модель движения летательного аппарата (ЛА) является совокупностью аналитических выражений, графических и табличных зависимостей, которые однозначно определяют траекторию полёта ЛА.

Основу математической модели составляют уравнения движения (в основном дифференциальные уравнения, приведённые к форме Коши) и метод решения системы дифференциальных уравнений (обычно метод численного интегрирования Рунге-Кутты IV порядка).

Математическую модель дополняют характеристики гравитационного поля, характеристики атмосферы, аэродинамические характеристики ЛА и характеристики двигательной установки ЛА.

1 Теоретические основы составления математических моделей движения

1.1 Классификация и формы математических моделей

Математические модели могут быть детерминированными или стохастическими.

В детерминированной математической модели все исходные характеристики являются вполне определёнными заданными величинами или функциями.

В стохастической математической модели одна или несколько исходных характеристик являются случайными величинами или случайными функциями.

1.1.1 Летательный аппарат как динамическая система

Целью составления математических моделей, описывающих движение ЛА, является определение искомым параметров движения: компонентов скорости движения центра масс; угловой скорости ЛА относительно его центра масс; углов, характеризующих ориентацию аппарата и координат центра масс, по которым может быть построена траектория. Под

траекторией ЛА понимается линия, которую описывает центр масс относительно выбранной системы отсчёта (системы координат). Независимой переменной в математических моделях движения ЛА является время.

Для того, чтобы получить решение дифференциальных уравнений движения, должны быть заданы начальные условия и определены силы в правых частях уравнений. Модель должна характеризоваться полной информацией об их значениях на заданном интервале времени. Полная совокупность сил определяет вид входных воздействий и характеризует состояние ЛА во времени через его фазовые координаты.

Системы, текущее состояние которых определено при известном начальном состоянии и входных воздействиях на интервале времени от t_0 до t

$$x(t) = \varphi [t_0, x(t_0), \eta(t_0, t)] \quad (1.1)$$

называются динамическими системами.

Компоненты вектора $x(t)$ называются переменными состояния, и они характеризуют область возможных состояний системы. Функция φ представляет собой переходную функцию состояния системы, а $\eta(t)$ определяет характер входных воздействий. Переходная функция является решением системы (1.1) для всех $t \in T$, где T - множество моментов времени. Динамическая система, удовлетворяющая такой переходной функции состояния, называется обыкновенной динамической системой.

В процессе движения ЛА имеет место изменение динамических, массовых и других характеристик в результате расхода топлива, изменения параметров атмосферы и т.д. Это даёт основание рассматривать ЛА как нестационарную динамическую систему. Следовательно, математические модели ЛА как нелинейные нестационарные обыкновенные динамические системы могут иметь высокий порядок. Поэтому решение любой задачи исследования движения ЛА необходимо начинать с обоснования соответствующей математической модели полёта.

1.1.2 Виды математических моделей

По своему построению модели делятся на модели с определённой, неопределённой и смешанной структурами.

К моделям с определённой структурой относятся модели, отвечающие полному (детерминированному или стохастическому) уровню информативности о состоянии

исследуемого ЛА. В случае, когда возмущения носят случайный характер, используют понятие стохастической определённой модели, для которой параметры распределения вероятности случайных возмущений заданы. Если случайные возмущения не действуют, определённая модель будет детерминированной. При отсутствии достоверной информации о возможном состоянии системы имеют место детерминированные или стохастические неопределённые системы. Смешанные модели занимают промежуточное положение между определёнными и неопределёнными моделями. Для них характерно то, что хотя движение ЛА под действием возмущений и существенно отклоняется от расчётного, но оно остаётся в пределах области действия принятой расчётной схемы, определяемой введённой моделью и заданными допустимыми множествами, к которым принадлежат указанные возмущения. Неопределённые и смешанные модели используются в рамках теоретико-игрового (минимаксного) подхода к решению исследуемых задач.

Определённые и смешанные модели задаются дифференциальными уравнениями движения или конечными аналитическими зависимостями. Неопределённые модели представляются компонентами вектора состояния системы в виде каких-либо формальных разложений. Помимо формальных применяют факторные модели. Модели, представленные в виде дифференциальных уравнений, подразделяют на линейные и нелинейные. В зависимости от характера изменения аргумента (непрерывного или дискретного), в функции которого происходит развитие процесса (обычно времени), модели подразделяют на непрерывные и дискретные.

Примером функционального представления определённой модели обыкновенной динамической системы как нестационарного нелинейного управляемого объекта, подверженного действию возмущений $\eta(t)$, может служить модель вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \varphi [x(t), u(t), \eta(t)]; \\ y(t) &= \psi [x(t), u(t)]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $u(t)$ – вектор управления или вектор входных переменных; $\eta(t)$ – вектор возмущений; $y(t)$ – вектор выходных переменных. Математическая модель линейной нестационарной системы с непрерывным временем имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + F(t)\eta(t); \\ x(t_0) &= x_0; \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где A, B, F, C и D - матрицы, являющиеся функциями времени.

Для частного случая стационарной системы (объекта с постоянными параметрами) указанные матрицы имеют постоянные, не зависящие от времени элементы.

Движение линейного объекта при дискретном времени описывается разностным уравнением типа

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + F(t)\eta(t); \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

В объектах с дискретным временем понимается номер такта, принимающего целочисленные значения, $t = 0, 1, 2, \dots, n$, и производная заменяется первой разностью

$$\Delta x = x(t+1) - x(t). \tag{1.5}$$

Переход от исходной нелинейной модели к линейной осуществляется путём линеаризации исходной модели. Необходимым условием линеаризации является малость отклонений параметров возмущённого движения от номинальных (невозмущённых) значений. Возмущённое движение можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= u_*(t) + \delta u(t); t_0 \leq t \leq t_1; \\ x(t) &= x_*(t) + \delta x(t) \text{ при } x(t_0) = x_*(t_0) + \delta x(t_0), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где параметры, обозначенные звёздочкой, соответствуют номинальному (невозмущённому) движению. После подстановки (1.6) в (1.2) при $\eta(t) = 0$ и последующего разложения в ряд Тейлора получим выражение

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}_*(t) + \delta \dot{x}(t) = \varphi \left[\dot{x}_*(t), u_*(t); t \right] + \Phi_x \left[\dot{x}_*(t), u_*(t); t \right] \delta x(t) + \Phi_u \left[\dot{x}_*(t), u_*(t); t \right] \delta u(t) + \delta \Phi(t), \\ t_0 &\leq t \leq t_1. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь $\delta \Phi(t)$ - остаточный член разложения, учитывающего только линейные члены; Φ_x и Φ_u - якобианы (квадратные матрицы частных производных - весовых коэффициентов) функции φ относительно соответственно x и u . При условии малости $\delta \Phi(t)$ по отношению к

удерживаемым членам линейного разложения линеаризованное дифференциальное уравнение состояния примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x(t) &= A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t), \\ t_0 \leq t \leq t_1. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если исследуется динамика систем при отслеживании номинальной траектории, то собственное номинальное движение может не представлять интереса. Тогда в (1.6) можно положить $x_*(t) = 0$ и $x(t) = \delta x(t)$. В результате имеем каноническую форму математической модели состояния линейной нестационарной системы (1.3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для неуправляемой динамической системы $u(t)=0$. Тогда (1.2) и (1.9) соответственно примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= F(x(t), \eta(t)), \\ y(t) &= \psi(t, x(t)). \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= A(t)x(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.11) следует, что при неуправляемом движении фактором, определяющим отклонения от номинала, являются начальные отклонения переменных состояния.

Для получения стохастической модели системы с непрерывным временем необходимо использовать стохастические дифференциальные уравнения в форме

$$(1.12)$$

Стохастическое дифференциальное уравнение называется линейным, если функция φ линейная относительно x , а σ не зависит от x .

1.2 Принципы составления уравнений движения

1.2.1 Уравнения Мещерского

Будем считать, что при движении происходит одновременное присоединение частиц к телу и их отделение от него.

В процессе присоединения и отделения частиц масса тела изменяется. Будем считать, что скорости присоединения и отделения частиц не зависят от скорости движения тела. В момент времени t тело имеет массу m и движется с абсолютной скоростью V_a . За промежуток времени dt масса тела изменится за счёт присоединения элементарной массы dm_1 и отделения массы dm_2 . Согласно гипотезе, принятой И.В. Мещерским¹, присоединение и отделение частиц происходит за бесконечно малый промежуток времени. После присоединения частица движется со скоростью тела, а отделившаяся частица теряет взаимодействие с телом.

На данную систему, состоящую из тела и частиц, действуют внешние силы с равнодействующей ΣF_i . В результате взаимодействия тела и частиц и под действием силы ΣF_i скорость соединённой массы $m+dm_1$ определяется как V_a+dV_a . Обозначим абсолютную скорость движения массы dm_1 перед присоединением через U_a , а абсолютную скорость массы dm_2 после отделения через W_a .

Запишем изменение количества движения системы с массами m , dm_1 и dm_2 за промежуток времени dt , приравняв его к импульсу внешних сил:

$$(1.13)$$

Пренебрежём слагаемым второго порядка малости dm_1dV_a , разделим обе части на dt и после преобразований, получим уравнение движения тела переменной массы

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (1.14)$$

или

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (1.15)$$

¹ Мещерский Иван Васильевич (1859-1935), профессор, труды по механике тел переменной массы.

Обозначим через u_x, u_y, u_z проекции скорости тела массой m на оси прямоугольной системы координат, через X, Y, Z проекции равнодействующей всех сил на те же оси, через v_x, v_y, v_z и w_x, w_y, w_z проекции скорости присоединяющейся частицы и через u'_x, u'_y, u'_z проекции скорости отделяющейся частицы. Проецируя уравнение (1.14) на оси координат, получим

$$\begin{aligned} m \frac{du_x}{dt} + v_x \frac{dm}{dt} &= X \\ m \frac{du_y}{dt} + v_y \frac{dm}{dt} &= Y \\ m \frac{du_z}{dt} + v_z \frac{dm}{dt} &= Z \end{aligned} \quad (1.16)$$

Эти уравнения названы именем И.В. Мещерского по предложению профессора А.А. Космодемьянского². И.В. Мещерский назвал проекциями "прибавочной силы" на координатные оси.

Таким образом, И.В. Мещерский показал, что уравнения движения тела переменной массы можно записать как и уравнения движения тела постоянной массы, добавив прибавочную силу.

Обозначим относительные скорости присоединения частиц через $U_{отн} = U_a - V_a$ и отделения частиц через $W_{отн} = W_a - V_a$. Тогда уравнение (1.15) примет вид

$$m \frac{dU}{dt} + U \frac{dm}{dt} = \sum F_{отн} \quad (1.17)$$

Масса тела равна

$$m = m_0 + \int W_{отн} dm_{отн}$$

Если нет присоединения частиц ($\frac{dm}{dt} = 0$) то из (1.17) получим уравнение движения ЛА с реактивным двигателем

$$m \frac{dU}{dt} = \sum F_{отн} \quad (1.18)$$

где $\frac{dm}{dt}$ — секундный массовый расход рабочего вещества.

² Космодемьянский Аркадий Александрович (1909-1988), профессор, доктор физико-математических наук, труды по аэромеханике, механике переменной массы, истории механики.

Заметим, что при отделении частиц производная dm/dt имеет знак «минус».

При движении ракеты вертикально вверх И.В. Мещерский предложил уравнение

$$\text{---} \tag{1.19}$$

где g - ускорение свободного падения; --- - сопротивление воздуха. В уравнении (1.19) И.В. Мещерский не раскрыл содержания слагаемого p_r , назвав его давлением газов.

1.2.2 Теоремы динамики тел и принцип затвердевания

При составлении уравнений движения ЛА используются теоремы об изменении количества движения, изменении кинетического момента, изменении кинетической энергии.

Применение теорем к динамике тел переменного состава (массы) проводится на основе принципа затвердевания. Он формулируется следующим образом: уравнения движения тела переменного состава можно представлять в форме уравнений движения тела постоянного состава, имеющего мгновенно зафиксированную (затвердевшую) массу. В число сил, действующих на тело, включаются внешние, реактивные силы Кориолиса и вариационные силы.

Запишем теоремы об изменении количества движения и кинетического момента тела переменного состава в следующей математической форме

$$\text{---} \tag{1.20}$$

Здесь F и M - соответственно главный вектор и главный момент всех внешних сил; --- - вектор кориолисовых сил инерции; M_k - главный момент кориолисовых сил инерции, связанных с движением частиц внутри тела; $F_* = S_a(\rho_a - \rho_0)$ - главный вектор сил, обусловленных действием атмосферного давления и давления газа на срезе сопла; --- - изменение количества движения относительно связанной системы координат, представляющее собой локальную (относительную) производную ---, --- - вектор скорости частицы с массой --- относительно корпуса тела, q_r - главный вектор реактивных сил, --- - главный вектор вариационных сил, обусловленный нестационарностью процессов

движения частиц внутри корпуса тела; K_r и \dots - соответственно главный момент реактивных сил и главный момент вариационных сил.

Рассмотрим сумму \dots . Проекция q_r на продольную ось ЛА, совпадающую с продольной осью ракетного двигателя, имеет вид:

где ρ_a - плотность истекающих газов; W_a — скорость истечения газов через площадь S_a выходного сечения сопла.

Обозначим \dots и получим

\dots

Тогда рассматриваемую сумму можно записать в виде

\dots

Для рассматриваемого класса ЛА пренебрежём величиной \dots и получим

$$\dots \tag{1.21}$$

Аналогичным образом запишем следующую математическую форму теоремы о главном моменте количеств движения ракетного ЛА:

$$\dots \tag{1.22}$$

Здесь M - главный момент внешних сил, за исключением атмосферного давления и давления газов в выходном сечении сопла двигателя; $M_{дв}$ - главный момент тяги двигателей, включающий моменты реактивного происхождения и дополнительные моменты, вызванные атмосферным давлением, давлением газа в выходном сечении сопла и нестационарностью движения газа и жидкого наполнителя внутри корпуса ЛА.

Уравнения (1.21) и (1.22) отражают формулировку принципа затвердевания для реактивных ЛА как тел переменного состава.

Кинетическая энергия ЛА как тела переменного состава определяется суммой кинетических энергий точек переменного состава: ——. С учётом равенства после преобразований можно получить

$$\text{---} \quad (1.23)$$

где m - масса мгновенно затвердевшей ракеты в момент времени t ;

— - кинетическая энергия системы материальных точек, принадлежащих ЛА, в его движении относительно центра масс.

Поскольку центр масс перемещается относительно корпуса, оказывается удобным определять кинетическую энергию ЛА через скорости в переносном и относительном движениях.

С учётом

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (1.24)$$

Таким образом, кинетическая энергия ЛА в его абсолютном движении кроме T содержит разность кинетических энергий центра масс, обладающего массой мгновенно затвердевшего ЛА, в его переносном и относительном движениях.

Дифференциал кинетической энергии тела переменного состава может быть получим дифференцированием

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (1.25)$$

Разделив правую и левую части (1.25) на dt , получим второе слагаемое в правой части в виде

$$\text{---}$$

Запишем уравнение движения точки переменной массы

$$\text{---} \quad (1.26)$$

где \mathbf{F} - равнодействующая внешних сил, приложенных к точке ν ; \mathbf{F}^* - равнодействующая внутренних сил, приложенных к точке ν ; \mathbf{R} - реактивная сила, приложенная к точке ν .

Пренебрежём действием внутренних сил, проведём замену в (1.25) и получим

$$\mathbf{F} = m_\nu \mathbf{a}_\nu + \mathbf{R} \quad (1.27)$$

Обозначим dS_ν - элементарный путь частицы массой m_ν , и вернёмся к дифференциалам

$$dS_\nu = \mathbf{v}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu \quad (1.28)$$

где dS_ν и dS_ν^* - соответственно элементарные работы внешних и реактивных сил, приложенных к ЛА.

Последнее слагаемое в правой части представляет собой кинетическую энергию, определяемую изменением массы m_ν точек, принадлежащих телу, и их абсолютными скоростями.

Кинетическую энергию ЛА рассматривают и в том случае, когда составляют уравнения его движения в обобщённых координатах. Пусть положение тела переменной массы определяется независимыми обобщёнными координатами q_1, q_2, \dots, q_s .

Тогда уравнения движения могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} &= Q_\sigma, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} &= Q_\sigma^*, \\ \dots \dots \dots & \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} &= Q_\sigma \end{aligned} \quad (1.29)$$

где Q_σ - обобщённая сила, определяемая внешними факторами;
 Q_σ^* - обобщённая сила, определяемая притоком механической энергии к затвердевшему телу переменной массы при отбрасывании частиц; $\sigma = 1, 2, \dots, s$.

Кинетическая энергия ЛА в его вращательном движении относительно центра масс может быть выражена через моменты инерции и проекции мгновенной угловой скорости на соответствующие оси:

$$- \tag{1.30}$$

где A, B - моменты инерции ЛА относительно его главных осей инерции;
 z, y, x, p, q, r - проекции мгновенной угловой скорости ЛА на оси.

Если моменты инерции ЛА относительно экваториальных осей одинаковы ($A = B$), то (1.30) можно представить в виде:

$$- \tag{1.31}$$

При составлении дифференциальных уравнений вращательного движения в рассмотренном случае часто используют уравнение Лагранжа в обобщённых координатах (уравнение Лагранжа 2-го рода), которое будет иметь вид

$$- \quad - \quad - \tag{1.32}$$

Зависимость (1.28) для вычисления изменения кинетической энергии ЛА также существенно упрощается.

1.2.3 Уравнения поступательного движения

Обозначим скорость и ускорение центра масс системы (корпус ЛА - топливо - газы) в абсолютном движении через V_a и a_a . Движение корпуса и жёстко связанных с ним частей (т.е. и той точки тела, с которой в данный момент времени совпадает центр масс) относительно неподвижной системы координат будет переносным. Скорость и ускорение центра масс корпуса в переносном движении обозначим через V_e и $a_e = dV_e/dt$. Скорость и ускорение центра масс системы "корпус - топливо - газы" относительно корпуса ЛА обозначим через V_r и a_r . Из механики тел переменного состава следует, что произведение массы тела на переносное ускорение его центра масс равно равнодействующей всех внешних и реактивных сил, действующих на тело:

$$\tag{1.33}$$

Скорость и ускорение центра масс в абсолютном движении соответственно имеют вид

(1.34)

Из последнего равенства определим a_e и подставим его в (1.33). Тогда уравнение движения центра масс системы "корпус - топливо - газы", записанное в векторной форме, получим в следующем виде:

$$\text{—} \qquad \qquad \qquad (1.35)$$

При выводе уравнений (1.15) и (1.16) предполагалось, что взаимодействие основного тела с присоединяющимися или отделяющимися частицами происходит мгновенно. В действительности процесс взаимодействия ЛА с подвижными присоединяющимися или отделяющимися газовыми потоками сложнее. У ЛА с двигателями на жидком и твёрдом топливе отделяющиеся частицы получают относительную скорость ещё в камере сгорания двигателя до момента выхода частицы за плоскость наружного сечения сопла, т.е. до потери связи с основной массой ЛА. Кроме того, у ЛА с двигателями на жидком топливе горючее и окислитель перемещаются в процессе работы двигателя внутри корпуса. При взаимодействии движущихся потоков с корпусом, колеблющимся в поперечном направлении, возникает кориолисова сила $F_{кор}$. Запишем уравнение движения центра масс ракеты с учётом этой силы:

$$\text{—} \qquad \qquad \qquad (1.36)$$

Добавим в последнее уравнение слагаемое, учитывающее нестационарность движения масс внутри ЛА. Пусть количество движения топлива и газов, перемещающихся внутри корпуса, в момент времени t равно $q_{вар}$, а в момент времени $t + dt$ равно $q_{вар} + \delta q_{вар}$. За промежуток времени dt изменение количества движения подвижных масс составит $\delta q_{вар}$, и уравнение движения ЛА запишется в более полной форме:

$$\text{—} \qquad \qquad \qquad (1.37)$$

Составляющую $(\delta q_{вар})/dt$ принято называть вариационной силой.

Уравнение (1.37) соответствует рассмотренному выше принципу затвердевания.

Вариационные силы и моменты отражают нестационарность движения масс внутри корпуса ЛА. Однако в большинстве случаев процесс перемещения рабочего тела внутри ЛА можно принять за квазистационарный и не учитывать вариационные силы ввиду их малости.

Силы Кориолиса, обусловленные движением масс внутри корпуса ЛА и его колебаний, на движение центра масс почти не оказывают влияния. Силы Кориолиса, появляющиеся при рассмотрении относительного движения ЛА в связанной с Землей системе координат, оказывают заметное влияние на его полёт только при движении со скоростями, превышающими 600...700 м/с.

В инерциальной системе координат уравнение движения центра масс ЛА записывается в виде

$$\text{---} \tag{1.38}$$

где --- - векторы суммы внешних и реактивных сил.

Уравнение движения центра масс ЛА относительно подвижной, связанной с Землёй системы координат будет иметь вид

где $ma_{пер}$ и $ma_{кор}$ - переносная и кориолисова силы инерции, определяемые вращением Земли.

Для прямоугольной системы координат с началом в условном центре Земли при направлении вектора угловой скорости Земли Ω по оси OY_0 получим

$$\text{---} \tag{1.39}$$

Если принять $\Omega = const$, то переносное ускорение равно

$$\tag{1.40}$$

а кориолисово ускорение, определяемое вращением Земли, равно

$$\tag{1.41}$$

где V — относительная скорость ЛА.

Часто уравнения движения центра масс записываются относительно подвижной системы координат $Ox_i Y_i Z_i$, связанной с ЛА (в дальнейшем индекс i заменяется на индекс, соответствующей выбранной системы координат). Воспользуемся правилом перехода от неподвижной системы координат к подвижной:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{\dot{\omega}} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{\omega} \times (\mathbf{\omega} \times \mathbf{r}_i) \quad (1.42)$$

где $\frac{d}{dt}$ - производная вектора скорости центра масс ЛА в подвижной системы координат.

Для земных систем координат

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{\dot{\omega}} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{\omega} \times (\mathbf{\omega} \times \mathbf{r}_i) \quad (1.43)$$

Если $\mathbf{\omega}$ - угловая скорость осей подвижной системы координат относительно осей, связанных с Землей, то

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{\dot{\omega}} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{\omega} \times (\mathbf{\omega} \times \mathbf{r}_i) \quad (1.44)$$

где $\frac{d}{dt}$ - локальная производная.

Тогда векторное уравнение движения центра масс ЛА с учётом влияния вращения Земли будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{\dot{\omega}} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{\omega} \times (\mathbf{\omega} \times \mathbf{r}_i) \quad (1.45)$$

Для любой прямоугольной системы координат $Ox_i Y_i Z_i$ начало которой совпадает с центром масс ЛА, на основании (1.42) можно написать три скалярных уравнения движения центра масс

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{d x_i}{dt} \right) &= \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \omega_y z_i - \omega_z y_i + \dot{\omega}_x z_i - \dot{\omega}_y y_i + \omega_x \omega_y z_i - \omega_x \omega_z y_i - \omega_y \omega_z x_i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{d y_i}{dt} \right) &= \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \omega_z x_i - \omega_x z_i + \dot{\omega}_y x_i - \dot{\omega}_z z_i + \omega_x \omega_z x_i - \omega_y \omega_x z_i - \omega_y \omega_z x_i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{d z_i}{dt} \right) &= \frac{d^2 z_i}{dt^2} + \omega_x y_i - \omega_y x_i + \dot{\omega}_z y_i - \dot{\omega}_x x_i + \omega_x \omega_y y_i - \omega_x \omega_z x_i - \omega_y \omega_z x_i \end{aligned} \quad (1.46)$$

где ω_i - проекции вектора скорости центра масс ЛА на оси связанной с ним системы координат;
 ω_i^* - проекции вектора угловой скорости связанной системы координат на выбранные (i -е) оси подвижной системы координат, направление которых неизменно в пространстве и совпадает с направлением осей неподвижной системы координат;
 R_i - проекции внешних и реактивных сил, действующих на ЛА, на оси системы координат $Ox_iY_iZ_i$.

1.2.4 Уравнения вращательного движения

Чтобы составить уравнения вращательного движения ЛА относительно осей, проходящих через центр масс и вращающихся по отношению к ЛА с угловой скоростью ω^* , при вращении самого ЛА с угловой скоростью ω , надо воспользоваться известным уравнением

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^3 R_i + K \omega \quad (1.47)$$

где dK/dt — производная от кинетического момента, вычисленная относительно неподвижной системы координат; $\frac{dK_i}{dt}$ - производная от кинетического момента, вычисленная относительно i -й системы координат $Ox_iY_iZ_i$ (локальная производная).

Если система координат $Ox_iY_iZ_i$ не перемещается относительно ЛА, то $\omega^* = 0$ и

$$\frac{dK_i}{dt} = M_R, \quad (1.48)$$

где M_R - результирующий момент системы сил.

Проекции векторного равенства (1.48) на оси координат, связанные с ЛА, могут быть представлены через проекции на эти оси вектора момента количества движения K :

$$A_i \omega_i = M_{Ri}, \quad (1.49)$$

где A_i - тензор инерции ЛА, выраженный матрицей инерции:

(1.50)

Проекции кинетического момента K на оси координат $X_i Y_i Z_i$ имеют вид

(1.51)

где I_{x_i} - моменты инерции ракеты относительно осей X_i , I_{y_i} - центробежные моменты инерции, определяемые относительно координатных плоскостей.

При определении осевых и центробежных моментов инерции может быть учтено перемещение центра масс (начала координат) и вращение осей координат относительно корпуса:

$$\begin{aligned} & \dot{X}_i = \dot{X}_i^0 + \dot{\alpha}_i Y_i - \dot{\beta}_i Z_i; \\ & \dot{Y}_i = \dot{Y}_i^0 + \dot{\beta}_i X_i + \dot{\alpha}_i Z_i; \end{aligned} \quad (1.52)$$

Осевые и центробежные моменты инерции в процессе работы двигателя и движения ЛА будут переменными величинами, зависящими от времени.

Уравнения вращательного движения относительно центра масс запишем, используя (1.48) и (1.51):

$$\begin{aligned} & \dot{M}_x = \dot{M}_x^0 + \dot{\alpha}_i M_{x_i} - \dot{\beta}_i M_{y_i}; \\ & \dot{M}_y = \dot{M}_y^0 + \dot{\beta}_i M_{x_i} + \dot{\alpha}_i M_{z_i}; \end{aligned} \quad (1.53)$$

Правые части уравнений содержат проекции суммы моментов относительно центра масс всех сил, действующих на ЛА, на соответствующие оси координат. Моменты кориолисовых сил

и дополнительный момент, определяемый перемещением центра масс ЛА относительно корпуса, при решении многих задач ввиду малости не учитываются.

Если подвижные оси координат совместить с главными центральными осями инерции $OXYZ$, то матрица (1.52) превратится в диагональную:

$$(1.54)$$

а её элементы I_x, I_y, I_z будут главными центральными моментами инерции. Проекция уравнения (1.48) на оси связанной системы координат при этом запишутся в виде

$$(1.55)$$

где

$$(1.56)$$

- суммы проекций моментов всех внешних и реактивных сил на оси связанной системы координат; - составляющие вектора углового ускорения.

Определяя из (1.55) угловые ускорения, запишем динамические уравнения вращательного движения ЛА относительно центра масс в проекциях на оси связанной системы координат:

$$(1.57)$$

где - матрица, обратная к . Переходя к скалярным уравнениям, получим уравнения вращательного движения в виде динамических уравнений Эйлера

$$\begin{matrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{matrix} \quad (1.58)$$

2 Дифференциальные уравнения движения

Конкретный вид математического описания процесса движения ЛА зависит от допущений, положенных в основу составления математической модели, выбранной системы координат и системы действующих сил.

При движении тел в воздухе связь между основными видами движений (поступательным и вращательным, продольным и поперечным) проявляется через реактивные и аэродинамические силы и моменты. В зависимости от постановки задачи при составлении уравнений пространственного движения ЛА учитываются инерционные, аэродинамические и реактивные перекрёстные связи, а при составлении уравнений пространственного движения в расширенной постановке должны учитываться также перекрёстные связи системы управления по каналам тангажа, рыскания, крена и связи, обусловленные появлением управляющих сил.

Для некоторых ЛА, как показывают теоретические и экспериментальные исследования, разделение движений на поступательное движение центра масс и вращательное относительно центра масс и разделение поступательного движения на продольное и боковое позволяют получить практически приемлемую точность расчётов. Раздельное рассмотрение движений возможно только при существенных упрощениях.

2.1 Уравнения движения летательного аппарата на активном участке траектории

2.1.1 Исходная система уравнений

Движение ЛА будем рассматривать в нормальной земной системе координат $O_0X_gY_gZ_g$. Для упрощения влияние вращения Земли учтём введением постоянного по величине и направлению ускорения свободного падения, пренебрегая кориолисовым ускорением, а кривизну Земли учитывать не будем. При этих допущениях система уравнений может быть написана на основании (1.46) и (1.58). В отсутствие ветра воздушная скорость равна земной: $V = V_k$.

Удобно записать систему уравнений для определения скорости V движения центра масс ЛА относительно Земли в проекциях на оси траекторией системы координат, так как в этой системе

Уравнения (1.46) упростятся и будут иметь вид

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (2.1)$$

Для определения проекций угловой скорости движения траекторной системы координат $Ox_k Y_k Z_k$ относительно неподвижной системы $OoX_g Y_g Z_g$ на оси $Ox_k Y_k Z_k$ используем рисунок 2.1:

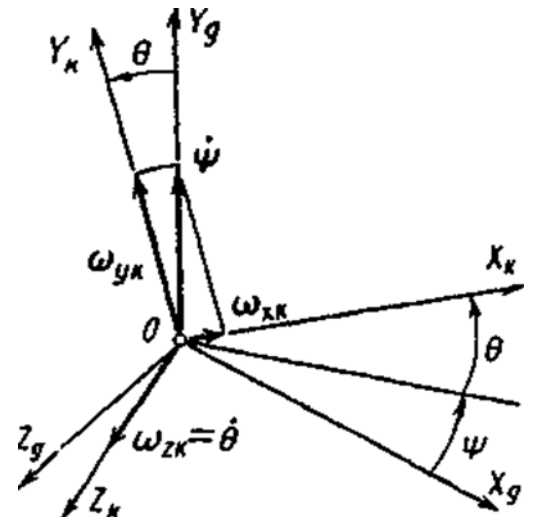
$$(2.2)$$

Подставляя в (2.1), получим

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (2.3)$$

В правых частях (2.3) учтём составляющие силы тяги, силы тяжести, аэродинамических и управляющих сил.

Аэродинамические силы определим через X_a, Y_a, Z_a в скоростной системе координат. Получим проекции полной аэродинамической силы на оси траекторной системы координат:



(2.4)

Рисунок 2.1 - Схема взаимного расположения траекторной и нормальной систем координат

где θ – скоростной угол крена.

Пусть сила тяги задана проекциями на связанные оси координат P_x, P_y, P_z . Подобное представление силы тяги удобно при расчётах характеристик движения ЛА для последующего учёта управляющих сил, которые появляются при отклонении вектора тяги от продольной оси ЛА. Управляющие силы, создаваемые отдельными органами управления, могут быть включены в проекции силы тяги по связанным осям. Кроме того, это даёт возможность учесть влияние эксцентриситета тяги на характеристики движения ЛА.

Обозначим проекции на оси связанной системы координат управляющих аэродинамических сил, создаваемых органами управления:

Запишем выражения для проекций силы тяги и управляющих сил на траекторные оси:

$$(2.5)$$

+

где α – угол атаки, β – угол скольжения.

Проекции силы тяжести на траекторные оси координат имеют вид:

$$(2.6)$$

Подставляя полученные составляющие (2.5), (2.6) и угловые скорости (2.2) в (2.1), запишем систему уравнений, описывающих движение центра масс ЛА в траекторной системе координат:

$$- \quad (2.7)$$

$$- \quad (2.8)$$

$$- \quad (2.9)$$

Запишем уравнения вращательного движения ЛА в проекциях на связанные оси координат для случая, когда они совпадают с главными центральными осями инерции:

$$(2.10)$$

$$(2.11)$$

$$(2.12)$$

где M_{x0} - суммы проекций моментов внешних сил и тяги на связанные оси координат (без учёта управляющих сил); M_{x1} - суммы проекций моментов управляющих сил на связанные оси координат.

Для осесимметричных ЛА динамические уравнения вращательного движения можно записать в упрощённом виде:

$$(2.13)$$

При работающем двигателе вследствие изменения массы ЛА из-за расхода топлива моменты инерции будут переменными величинами. При приближённых баллистических расчётах их принимают постоянными. При более точных расчётах, связанных с исследованием устойчивости и управляемости, изменение моментов инерции необходимо учитывать.

Для установления связей между производными $\dot{\alpha}$ и угловыми скоростями воспользуемся формулами:

$$\dot{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \\ \dot{\alpha}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \\ \dot{\alpha}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \\ \dot{\alpha}_z \end{bmatrix} ; \quad (2.14)$$

Из (2.14) получим

$$(2.15)$$

$$\text{---} \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

При определении аэродинамических сил для пространственной задачи движения ЛА надо знать значения углов α .

Имея матрицу направляющих косинусов последовательного перехода от связанной системы координат к скоростной, от скоростной - к траекторной, от траекторной - к земной и, приравнявая её диагональные элементы к диагональным элементам матрицы направляющих косинусов непосредственного перехода от связанной системы координат к земной, можно получить следующие соотношения между углами:

$$(2.18)$$

(2.19)

(2.20)

Если теперь использовать выражения для проекций вектора скорости центра масс ЛА на оси системы координат $O_0X_gY_gZ_g$, то получим

— (2.21)

— (2.22)

— (2.23)

Соответственно расстояние от начала координат до центра масс ЛА (наклонная дальность) равно

————— (2.24)

Уравнения (2.7)...(2.12) и (2.15)...(2.24) вместе с уравнением

(2.25)

определяющим изменение массы, будут составлять систему из 17 уравнений, описывающую пространственное движение ЛА. Эта система уравнений может применяться для различных целей. Проще её использовать для решения прямой задачи внешней баллистики. В этом случае, если будут известны все геометрические, весовые, инерционные, аэродинамические характеристики ЛА, характеристики, определяющие работу его двигателя, законы изменения управляющих сил и моментов и начальные условия полёта, то уравнения системы могут быть тем или иным способом проинтегрированы.

В результате решения будут найдены все параметры движения ЛА:

Решение полной системы уравнений, описывающей пространственный полёт управляемого ЛА, является сложным и трудоёмким. Поэтому при решении практических задач рассмотренную исходную систему упрощают.

2.1.2 Упрощённые системы уравнений пространственного движения

Рассматривая работу системы управления в отсутствии переходных процессов и пренебрегая угловыми скоростями $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ и производными по времени $\dot{\delta}_x, \dot{\delta}_y, \dot{\delta}_z$ можно получить балансирующие зависимости

$$M_x = M_{x0} + M_{x1} \alpha + M_{x2} \beta + M_{x3} \gamma + M_{x4} \delta_x + M_{x5} \delta_y + M_{x6} \delta_z$$

$$M_y = M_{y0} + M_{y1} \alpha + M_{y2} \beta + M_{y3} \gamma + M_{y4} \delta_x + M_{y5} \delta_y + M_{y6} \delta_z$$

$$M_z = M_{z0} + M_{z1} \alpha + M_{z2} \beta + M_{z3} \gamma + M_{z4} \delta_x + M_{z5} \delta_y + M_{z6} \delta_z$$

. Они отражают равенство управляющих моментов от управляющих сил и моментов от всех остальных сил, действующих на ЛА. Углы атаки, скольжения, крена, определяемые из балансирующих зависимостей, называются балансирующими углами α, β, γ , а движение ЛА по траектории с такими углами - движением в балансирующем режиме. При балансирующем режиме полёта предполагается мгновенная реакция ЛА на отклонения органов управления $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ по направлению и высоте, соответственно. При этом углы атаки, скольжения и крена принимают свои балансирующие значения. Зависимости между балансирующими углами ЛА и углами органов управления можно установить двумя способами.

Если известны независимые аэродинамические характеристики ЛА и его органов управления, то при продольном движении

$$(2.26)$$

Здесь q – скоростной напор набегающего невозмущённого потока; S – характерная площадь ЛА; l – характерная длина ЛА; m_z – коэффициент момента тангажа в связанной системе координат; q_p – скоростной напор набегающего невозмущённого потока органа управления; S_p – характерная площадь рулей; l_p – расстояние от центра давления управляющего органа до центра масс ЛА; m_{pz} – коэффициент момента тангажа с учётом угловой скорости поворота управляющего органа.

³ - производные углов поворота управляющего органа по тангажу, рысканию и крену, соответственно.

Оставляя только статические члены при раздельном учёте аэродинамических моментов, запишем выражения для угла отклонения руля высоты при балансировке

$$\text{-----} \quad (2.27)$$

Аналогично может быть получена зависимость угла отклонения руля направления .

Если суммарный момент, действующий на ЛА, определяется при совместном изменении угла атаки и угла отклонения органа управления, то при учёте только статических членов

$$\text{---} \quad (2.28)$$

Коэффициент аэродинамической подъёмной силы представим в виде

$$(2.29)$$

На этапе начального проектирования удобно использовать формулу

$$\text{---} \quad (2.30)$$

Углы сравнительно медленно изменяются по траектории полёта, и их текущие значения зависят от положения органов управления, скорости ЛА и высоты его полёта. Как правило, значения указанных углов и угла невелики, что позволяет опустить в уравнениях члены, содержащие произведения этих углов:

—

—

$$\text{-----} \quad (2.31)$$

Система (2.31) содержит 14 соотношений, в которые входят 14 неизвестных. Если предположить, что в процессе полёта углы _____, а также и _____ не превосходят величин, при которых можно принять _____ то в системе (2.31) уравнения и некоторые соотношения упростятся

—

—

(2.32)

Система уравнений, описывающая пространственное движение, существенно упрощается для осесимметричных ЛА, у которых сила тяги не создаёт момента относительно центра масс и направлена по продольной оси ЛА:

Управляющие силы _____ учтём в неявном виде, включив их соответственно в члены, учитывающие лобовое сопротивление, подъёмную и боковую силы:

—

—

(2.33)

Из (2.10)...(2.12) получим

(2.34)

Если угловые скорости во вращательном движении малы и то уравнения (2.34) можно заменить балансировочными зависимостями. Из них найдём балансировочные углы, которые введём в (2.33). Как и раньше, примем, что, а косинусы этих углов равны единице. Для подъёмной и боковой сил используем линейные зависимости

(2.35)

где . (2.36)

Тогда из (2.33) получим

_____ (2.37)

_____ (2.38)

_____ (2.39)

Из (2.18), (2.19) и (2.20) следует

_____ ; (2.40)

Уравнения (2.21)...(2.25) останутся без изменения.

В результате проведённых упрощений получена система из 11 уравнений, в которой имеется 13 неизвестных:

Эта система может быть решена, если к имеющимся уравнениям добавить кинематические уравнения, задающие метод управления. Например, задать для двух неизвестных величин определённые программы их изменения по времени: и

В (2.38) и (2.39) члены, содержащие произведения малых углов значительно меньше остальных. Поэтому при приближённых расчётах их можно опустить и вместо уравнений (2.38) и (2.39) использовать

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (2.41)$$

$$\text{---} \quad (2.42)$$

Полученные системы уравнений могут быть использованы для описания движения неуправляемого ЛА, если опустить в них члены, содержащие управляющие силы и моменты. Например, для малых и малых угловых скоростей можно пренебречь членами второго порядка малости

$$\text{---} \quad (2.43)$$

Остальные 11 уравнений системы примут следующий вид

$$\text{---} \quad (2.44)$$

2.1.3 Упрощённые системы уравнений продольного и бокового движений

При разделении движения ЛА на продольное и боковое принимают, что в первом приближении они не зависят друг от друга. Поэтому в уравнениях продольного движения учитывают только те силы и моменты, которые действуют в вертикальной плоскости. При определении характеристик бокового движения ЛА его нельзя считать независимым от продольного. Поэтому в уравнения включаются все силы и моменты, которые могут вызывать отклонение ЛА от вертикальной плоскости движения. Пренебрегая членами второго порядка малости, получим из исходной модели систему уравнений, описывающую продольное движение управляемого ЛА:

$$\begin{aligned} & \dots & ; \\ & \dots & \\ & \dots & \end{aligned} \tag{2.45}$$

Тригонометрическое соотношение в (2.45) в ряде случаев заменить суммой углов

$$\dots \tag{2.46}$$

Если в первых двух уравнениях (2.45) управляющие силы неизвестны, то следует добавить уравнения управления. Тогда полученная система уравнений будет замкнутой и имеет решение.

Запишем систему уравнений, описывающую боковое движение ЛА в предположении, что полёт происходит с

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \dots \end{aligned} \tag{2.47}$$

Уравнения (2.47) не могут решаться без учёта величин, определяемых продольным движением. Например, первое уравнение в (2.47) является основным при определении параметров бокового движения, но оно решается, если известны Боковые аэродинамические силы и моменты также не могут быть определены, если неизвестны скорость и высота полёта.

Система (2.47) получилась достаточно сложной, а при больших θ необходимо проверять применимость формулы, определяющей γ_a . Существенно упростить систему можно, если воспользоваться искусственным приёмом и принять в уравнениях, определяющих угловые параметры движения ЛА. Такое допущение равносильно предположению, что ЛА летит горизонтально, его продольная ось составляет с вектором скорости центра масс угол скольжения β , а скоростной угол крена равен нулю ($\gamma_a = 0$).

В уравнениях условного горизонтального движения ЛА скорость должна быть принята равной $V \cos \theta$. Она находится при решении системы уравнений, описывающих продольное движение ЛА. При этих допущениях из (2.47) следует

$$\text{---} \tag{2.48}$$

Тригонометрическое соотношение в (2.48) в ряде случаев можно заменить суммой углов

$$\tag{2.49}$$

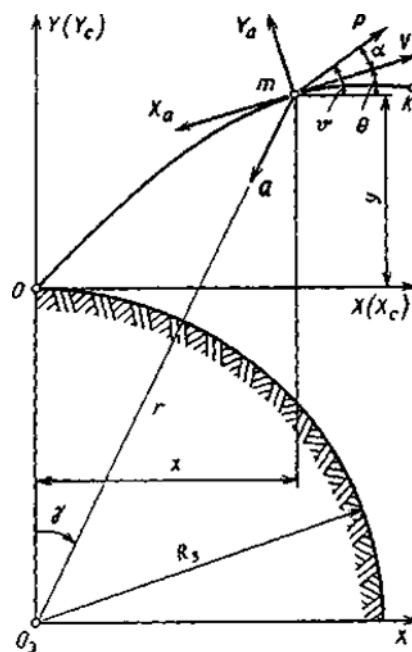
Если в первом уравнении системы (2.48) неизвестны управляющие силы, то к ней следует добавить уравнения управления.

Управление полётом ЛА, как правило, осуществляется по трём отдельным каналам: тангажа, рыскания и крена. Хотя каждый канал управления и решает свои самостоятельные задачи, но их работа взаимозависима, что проявляется через динамические характеристики ЛА, динамические и кинематические характеристики движения и перекрёстные связи. Поэтому при решении задач для управляемого ЛА разделение движения возможно только после того, как установлена его правомерность на основании предварительного анализа конкретных характеристик ЛА, его системы управления и условий движения.

В качестве примера, составим систему уравнений, описывающую движение центра масс управляемой баллистической ракеты на активном участке плоской траектории применительно к

сферической модели Земли. Влияние вращения Земли учтём частично через ускорение свободного падения. Будем полагать, что оно направлено в центр Земли и изменяется в соответствии с зависимостью $g = g_0(R_3/r)^2$. Управляющие силы X_p и Y_p отдельно учитывать не будем и включим их в члены, учитывающие лобовое сопротивление и подъёмную силу.

Вектор тяги направлен по продольной оси ракеты. Систему уравнений составим в проекциях на оси прямоугольной стартовой системы координат OXY (OX_cY_c) (рисунок 2.2). Проекцию вектора скорости на ось OX обозначим через u , а проекцию на ось OY - через w . Проекции силы тяжести на оси обозначим соответственно через g_x и g_y : $g_x = g \sin\gamma$, $g_y = g \cos\gamma$. Записав уравнения движения в проекциях на выбранные оси координат и добавив обычные кинематические и тригонометрические соотношения, вытекающие из рисунка 2.2, получим систему уравнений



$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 & \dots \\
 & \dots \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

(2.50) Рисунок 2.2 - Схема сил, действующих на баллистическую ракету дальнего действия при рассмотрении её относительного движения в центральном гравитационном поле

Если к данным уравнениям добавить соотношение, задающее программный угол тангажа, выражение для подъёмной силы и уравнение, описывающее изменение массы ракеты $m(t)$, то система может быть проинтегрирована.

При расчёте траекторий для сравнительно небольших дальностей полёта ЛА в ряде случаев можно не учитывать кривизну Земли, а её вращение учитывать приближённо через ускорение свободного падения, считая его постоянным по величине и направлению, приняв гравитационное поле Земли плоскопараллельным. В (2.50) следует положить $\gamma = 0$, и тогда для активного участка траектории получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 & \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

— —
 — —
 —.

При отсутствии управления или выключении его движение ЛА становится неуправляемым. У большинства неуправляемых ЛА вектор тяги совпадает с осью ЛА. При малых углах атаки ($\cos\alpha \approx 1, \sin\alpha \approx 0, Y_a \approx 0$) система уравнений, описывающая движение центра масс неуправляемого ЛА, имеет вид:

— —
 — —
 — —

(2.52)

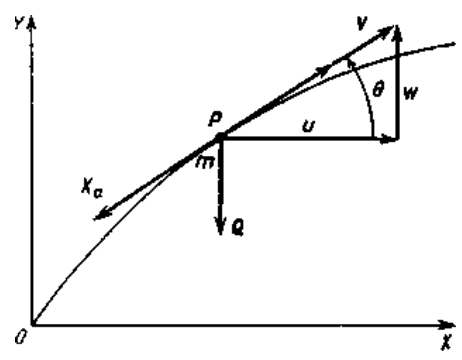


Рисунок 2.3 - Схема сил, действующих на материальную точку, совпадающую с центром масс неуправляемой ракеты

При принятых допущениях векторы тяги и лобового сопротивления, действующие на материальную точку массой m , совпадающую с центром масс неуправляемой ракеты, и вектор скорости её центра масс лежат на одной прямой (рисунок 2.3). Исходя из этого рисунка

— —

Умножим и разделим правую часть уравнения на m_0V и запишем

— —

где — — —

Обозначим $\operatorname{tg} \theta = p$, и тогда

— — —

Из второго уравнения системы (2.52) получим $dp/dt = -g/u$, а из третьего уравнения получим

— —

Четвёртое уравнение системы (2.52) сохранится. Таким образом, получена система уравнений в форме, удобной для проведения расчётов активных участков траекторий неуправляемых ракет:

— - — - — - — (2.53)

Полагая в системе (2.51) $Y_a = 0$, запишем

— —
— —

или

— - — —
— — — (2.54)

2.2 Уравнения движения летательного аппарата на пассивном участке траектории

2.2.1 Уравнения свободного движения в атмосфере

Рассмотрим свободное движение в плотных слоях атмосферы на ЛА, на который действуют аэродинамические силы и силы, определяемые влиянием Земли. Система уравнений, описывающая пространственное движение неуправляемого ЛА, может быть получена из системы (2.7)...(2.12), (2.15)...(2.24), если в них опустить управляющие силы и моменты и положить $m = const$ и $P = 0$. У стабилизированных ЛА изменение углов α и β , вызванное колебаниями ЛА относительно центра масс, приводит к незначительным отклонениям центра масс от расчётной траектории, определённой без учёта колебаний.

Влияние на траекторию центра ЛА могут оказывать возмущающие факторы, не учтённые в (2.7)...(2.12) и (2.15)...(2.24).

Получим, в качестве примера, систему уравнений, описывающую управляемый полёт центра масс баллистической ракеты (или её головной части) на пассивном участке траектории с учётом влияния силы сопротивления воздуха. Её легко записать из (2.50), если принять $P = 0$ и $m = const$:

$$\begin{aligned}
 & \ddot{x} + \mu \dot{x} = 0 \\
 & \ddot{y} + \mu \dot{y} = 0 \\
 & \ddot{z} - \mu \dot{z} = -g \\
 & \dot{x} = v_x \\
 & \dot{y} = v_y \\
 & \dot{z} = v_z \\
 & x = x_0 \\
 & y = y_0 \\
 & z = z_0
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Расчёт параметров движения ракеты на пассивном участке траектории проводится либо до точки пересечения траектории с поверхностью Земли, либо до точки, находящейся на заданной высоте h_B . При решении плоской задачи в стартовой системе координат для сферической модели Земли координаты точки пересечения траектории с поверхностью Земли x_c и y_c должны принадлежать окружности, отвечающей уравнению: $x^2 + y^2 = R^2$. Получаемые при решении системы (2.55) координаты x и y подставляются в уравнение окружности. Для окончания расчёта при достижении высоты h_B координаты x_c и y_c должны отвечать уравнению: $z = h_B$.

Определение точки пересечения траектории с поверхностью модели Земли в форме эллипсоида требует самостоятельного рассмотрения с учётом широты и долготы места пуска и места приземления.

Чтобы получать упрощённую модель невозмущённого движения неуправляемого ЛА, необходимо использовать (2.7), (2.8) и (2.12). В результате получим систему уравнений, описывающую продольное движение неуправляемого ЛА с учётом колебаний его продольной оси относительно центра масс:

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\alpha} + \mu \dot{\alpha} = 0 \\
 & \ddot{x} + \mu \dot{x} = 0 \\
 & \ddot{y} + \mu \dot{y} = 0
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

— — — —
 — — — —

2.2.2 Упрощённые уравнения продольного движения центра масс в атмосфере

При решении некоторых задач можно полагать, что неуправляемый ЛА совершает только продольное движение в однородном плоскопараллельном поле притяжения в неподвижной атмосфере и с пренебрежимо малыми углами атаки. В этом случае траекторией ЛА является плоская кривая. Система уравнений, описывающая движение центра масс ЛА при допущении, что $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$ и $Y_a = 0$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= u \\ \dot{y}_c &= v \\ \dot{u} &= -g \sin\theta \\ \dot{v} &= g \cos\theta \end{aligned} \quad (2.57)$$

Первые два уравнения в (2.57) написаны в траекторной системе координат, т.е. в проекциях на касательную и нормаль к траектории. В ряде случаев для решения оказываются удобными системы уравнений, записанные для стартовой системы координат.

Из рисунка 2.4 следует, что $\dot{x}_a = V \cos\theta$. Умножим числитель и знаменатель правой части на V : $du/dt = X_a u / (mV)$. Значение скорости по известной величине u может быть найдено как $V = u / \cos\theta$ где $\dot{\theta} = X_n / (mV)$. Поэтому в качестве второго уравнения системы используем дифференциальное уравнение

$$\dot{\theta} = -g \cos\theta / u \quad (2.58)$$

Обозначим $E = X_a / (mV)$, добавим кинематические соотношения и получим систему уравнений

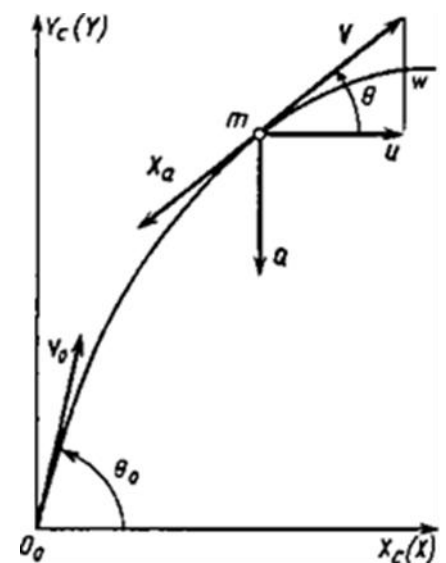


Рисунок - 2.4 Упрощенная схема сил, действующих на снаряд постоянной массы, движущийся в воздухе при $g = const$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (2.59)$$

Систему уравнений, описывающую свободный полёт центра масс ЛА постоянной массы на большие дальности, можно получить из (2.55), если принять, что программа изменения угла тангажа отсутствует и $P=0$:

$$\begin{aligned} &\text{---} \quad \text{---} \\ &\text{---} \quad \text{---} \\ &\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ &\text{---} \quad \text{---} \\ &\quad \quad \text{---} \quad \text{---} \end{aligned} \quad (2.60)$$

При $\alpha=0, Y_a=0$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (2.61)$$

Остальные уравнения из (2.60) останутся без изменений. Для относительно небольших дальностей можно положить $\gamma = 0$ и $g = g_0 = const$, и тогда из (2.60) получим

$$\begin{aligned} &\text{---} \quad \text{---} \\ &\text{---} \quad \text{---} \\ &\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.2.3 Уравнения свободного движения центра масс в безвоздушном пространстве

Рассмотрим приближенный расчёт траекторий свободного полета небольшой дальности, проходящих в безвоздушном пространстве или в воздушной среде, оказывающей пренебрежимо малое сопротивление. При малых скоростях движения ЛА в воздухе (примерно до 50 м/с) можно считать, что сила сопротивления воздуха отсутствует и ЛА летит под действием только силы тяжести. Уравнения движения, составленные в проекциях на оси стартовой системы координат, имеют вид

$$d^2x / dt^2 = 0; d^2y / dt^2 = -g. \quad (2.63)$$

Уравнения (2.63) являются исходными уравнениями параболической теории движения ЛА постоянной массы.

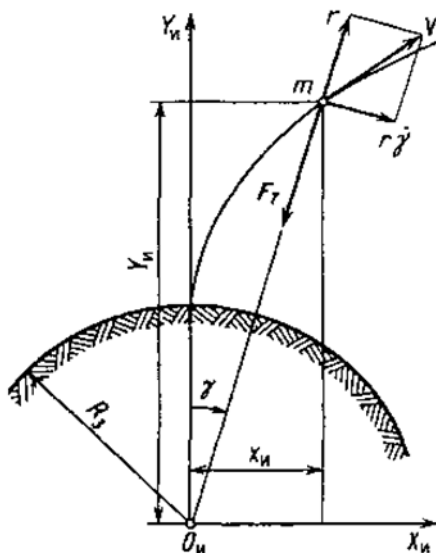


Рисунок 2.5 - Схема действия силы тяготения в центральном гравитационном поле

Используя рисунок 2.5 и опустив преобразования, имеющиеся в [1], запишем в полярных координатах r и γ дифференциальные уравнения движения ЛА постоянной массы в центральном гравитационном поле Земли без учёта сопротивления воздуха и вращения Земли:

$$- \quad - \quad (2.69)$$

Система (2.69) является основой эллиптической теории, позволяющей приближённо определять характеристики движения баллистических ракет на внеатмосферном участке полёта.

Заключение

Возвращаясь к теме многообразия математических моделей различных управляемых и неуправляемых летательных аппаратов, авторы хотели бы предложить студентам в качестве справочного материала список дополнительной литературы, которой может быть полезен в практической деятельности, связанной с авиационной, ракетной и космической техникой.

1 Андреевский В.В. Динамика спуска космических аппаратов на Землю. – М.: Машиностроение, 1970.

2 Динамика полёта: Учебник для вузов / Ефремов А.В., Захарченко В.Ф., Овчаренко В.Н., Суханов В.Л., Шелюхин Ю.Ф., Устинов А.С. М.: Машиностроение, 2011.

3 Иванов Н.М., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация космических аппаратов. 2-е изд. – М.: Дрофа, 2004.

4 Иванов Н.М., Мартынов А.И. Движение космических летательных аппаратов в атмосферах планет. М.: Наука, 1985.

5 Каменков Е.Ф. Маневрирование спускаемых аппаратов. - М.: Машиностроение, 1983.

6 Колесников К.С. Динамика ракет: Учебник для вузов. 2-е изд. М.: Машиностроение, 2003.

7 Колесников К.С. Жидкостная ракета как объект регулирования. М.: Машиностроение, 1969.

8 Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.

9 Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука, 1982.

10 Шкадов Л.М., Буханова Р.С., Илларионов В.Ф., Плохих В.П. Механика оптимального пространственного движения летательных аппаратов в атмосфере. М.: Машиностроение, 1972.

11 Ярошевский В.А. Вход в атмосферу космических летательных аппаратов. М.: Наука, 1988.

12 Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978.

Список использованных источников

- 1 Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Внешняя баллистика: Учебник для студентов вузов. 4-е изд., перераб. и доп. - М: Машиностроение, 2005.

Оглавление

Предисловие	3
Введение	4
1 Теоретические основы составления математических моделей движения	4
1.1 <i>Классификация и формы математических моделей</i>	4
1.1.1 Летательный аппарат как динамическая система	4
1.1.2 Виды математических моделей	5
1.2 Принципы составления уравнений движения	9
1.2.1 Уравнения Мещерского	9
1.2.2 Теоремы динамики тел и принцип затвердевания	11
1.2.3 Уравнения поступательного движения	15
1.2.4 Уравнения вращательного движения	19
2 Дифференциальные уравнения движения	22
2.1 <i>Уравнения движения летательного аппарата на активном участке траектории</i>	22
2.1.1 Исходная система уравнений	22
2.1.2 Упрощённые системы уравнений пространственного движения	27
2.1.3 Упрощённые системы уравнений продольного и бокового движений	32
2.2 <i>Уравнения движения летательного аппарата на пассивном участке траектории</i>	36
2.2.1 Уравнения свободного движения в атмосфере	36
2.2.2 Упрощённые уравнения продольного движения центра масс в атмосфере	38
2.2.3 Уравнения свободного движения центра масс в безвоздушном пространстве	39
Заключение	41
Список использованных источников	42