

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВА-  
ТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Л.М. Савельев

### **Механика деформируемого твёрдого тела**

Конспект лекций для обучающихся в магистратуре  
по направлению 151600.68 – Прикладная механика

Самара 2013

## **ОГЛАВЛЕНИЕ**

1 Общие свойства деформируемых твёрдых тел	2
2 Кручение тонкостенных стержней открытого профиля	15
3 Общая теория напряжений и деформаций	51
4 Общие уравнения теории упругости	72
5 Распространение волн в упругой сплошной среде	83
6 Антиплоская задача теории упругости	104
7 Плоская задача теории упругости	117

# 1 ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

## 1.1. УПРУГОСТЬ И ПЛАСТИЧНОСТЬ

Упругость – это важнейшее свойство всех без исключения твёрдых тел. Под идеальной упругостью принято понимать однозначную зависимость между силами и вызванными этими силами перемещениями. Если прикладывать к упругому телу нагрузки в различной последовательности, то конечное состояние не будет зависеть от порядка их приложения, оно определяется только конечными значениями нагрузок. В частности, после снятия нагрузки упругие тела всегда возвращаются в исходное состояние. Данное определение упругости является упрощённым. При более строгом подходе упругое тело следует рассматривать как термодинамическую систему и принимать во внимание изменение температуры, которое может сопровождать деформацию. Далее будет показано, что однозначная зависимость между силами и перемещениями сохраняется, если тело теплоизолировано или если температура его поддерживается постоянной за счёт внешнего притока или оттока тепла.

Основной источник суждения о механических свойствах материала – опыт на растяжение. Призматический образец растягивается напряжением  $\sigma$  и измеряется его длина  $l$  или расстояние между базовыми рисками. Приращение длины  $\Delta l = l - l_0$ , где  $l_0$  – исходная длина, называется удлинением, а отношение  $\varepsilon = \Delta l / l$  – относительным удлинением. Иногда вместо слова «удлинение» употребляется более общий термин «деформация». Если  $\sigma$  меняется во времени определённым известным нам образом, то говорят, что задана программа испытания  $\sigma(t)$ . При этом физическое время  $t$  не играет роли, важно не протекание процесса во времени, а последовательность событий. С изменением  $\sigma$  меняется  $l$ : если  $\sigma = \sigma(t)$ , то  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ . Если наносить в плоскости  $\sigma - \varepsilon$  точки, соответствующие одинаковым значениям времени  $t$ , то получим некоторую кривую. Материал является упругим, если при любых программах испытания все кривые совпадают.

Уравнение полученной кривой

$$\sigma = \varphi(\varepsilon) \quad (1.1)$$

и представляет собой закон упругости. Для огромного большинства материалов закон упругости с большой точностью может считаться линейным и его можно записать следующим образом:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.2)$$

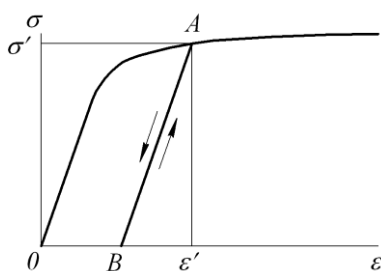
где  $E$  – модуль упругости. Равенство (1.2) называется законом Гука.

Закон упругости справедлив, пока напряжение не достигает определённого предела, называемого пределом упругости. Эта величина довольно условна: в зависимости от точности измерительной аппаратуры можно обнаружить отклонение от закона упругости при больших или меньших напряжениях. Напряжение, до которого справедлив закон Гука, называют пределом пропорциональности. Эта величина также является условной.

Если напряжение превышает предел упругости, зависимость между нагрузками и перемещениями перестаёт быть однозначной; перемещения, соответствующие данной системе нагрузок, зависят от порядка их приложения. После снятия нагрузки вызванные ею деформации не исчезают, а частично сохраняются. Эти деформации называются пластическими.

Рассмотрим простое растяжение образца. Если напряжение всё время возрастает и становится при этом выше предела упругости, зависимость между напряжением и деформацией изображается кривой, показанной на рисунке 1.1. Её уравнение имеет вид

$$\sigma = \varphi(\varepsilon); \quad d\sigma > 0. \quad (1.3)$$



**Рисунок 1.1 – Зависимость между напряжением и деформацией**

В теории пластичности принимается, что это уравнение справедливо при любой программе нагружения, в которой напряжение монотонно возрастает. Скорость нагружения при этом совершенно безразлична, можно остановить нагружение и держать образец под нагрузкой сколь угодно долго. Важно лишь соблюдение условия  $\dot{\sigma} > 0$ .

Для реальных материалов диаграмма пластического деформирования зависит от скорости. Но для большинства конструкционных сплавов эта зависимость довольно слабая, так что зависимость (1.3) можно считать универсальной.

Пусть нагружение доведено до точки  $\dot{A}$  с координатами  $\sigma'$  и  $\varepsilon'$ , после чего нагружение уменьшается до нуля. Если представить себе, что материал и в пластической области сохраняет упругие свойства, то нужно допустить, что деформация  $\varepsilon'$  состоит из двух частей: пластической и упругой. Если предположить, что закон Гука сохраняет силу и в пластической области, значение упругой составляющей будет  $\sigma'/E$ . При разгрузке упругая составляющая исчезает полностью, а пластическая остаётся неизменной. Следовательно, связь напряжения с деформацией при разгрузке будет изображаться пря-

мой  $AB$ , наклон которой будет определяться модулем упругости  $E$ . Этот факт довольно хорошо подтверждается опытами на металлах.

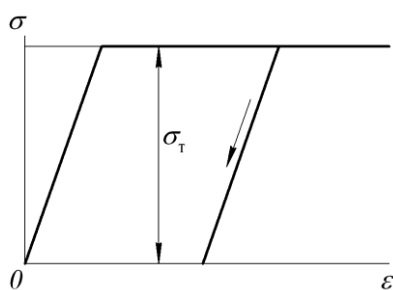
Более тщательные эксперименты показывают, что закон разгрузки не описывается совершенно точно уравнением линейной упругости; линия  $AB$ , строго говоря, не прямая. Особенно это заметно у полимерных материалов, а также у композитных материалов (например, стеклопластиков). Но для металлов этим эффектом можно пренебречь.

Предположим теперь, что образец после разгрузки нагружается вновь. Повторная нагрузка следует закону упругости до тех пор, пока снова не будет достигнуто напряжение  $\sigma'$ , то есть зависимость между  $\sigma$  и  $\varepsilon$  опять изображается отрезком  $BA$ . После точки  $A$ , то есть при  $\sigma > \sigma'$ , опять вступает в силу зависимость (1.3). При  $\sigma < \sigma'$  зависимость между напряжением и деформацией, справедливую как при нагружении, так и при разгрузке, удобно записывать в дифференциальной форме

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (\sigma < \sigma'). \quad (1.4)$$

Соотношения (1.3) и (1.4) для случая растяжения определяют модель упругопластического тела. С известным приближением этой модели соответствуют такие материалы как сталь, алюминиевые и титановые сплавы и другие металлические материалы, используемые для изготовления несущих элементов конструкций. Для большинства практических расчётов точность такой модели вполне достаточна.

У мягкой стали, титановых сплавов и некоторых других материалов переход от упругого участка диаграммы растяжения к пластическому происходит очень резко и пластический участок почти горизонтален. Идеализируя реальные свойства материала, можно в этих случаях изобразить эту диаграмму так, как показано на рисунке 1.2.



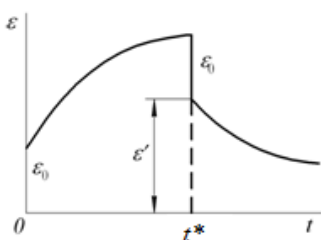
**Рисунок 1.2 – Идеальный упругопластический материал**

Напряжение в таком идеализированном материале не может превысить величину  $\sigma_0$ , называемую пределом текучести. При  $\sigma = \sigma_0$  величина пластической деформации неопределённая, она может расти сколь угодно. Теория идеальной пластичности наиболее разработана в математическом отношении.

## 1.2. ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ И ПОЛЗУЧЕСТЬ

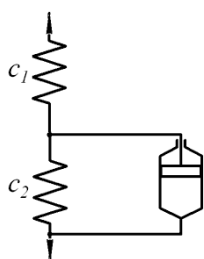
Явление последействия типично для полимерных материалов при высоком уровне напряжений.

Представим себе, что образец за очень короткое время нагружен до напряжения  $\sigma$ . Деформация его немедленно после нагружения будет  $\varepsilon_0$ ; это упругая деформация. Если теперь оставить образец под действием напряжения  $\sigma$  он продолжит деформироваться и по истечении некоторого времени  $t_*$  к начальной деформации  $\varepsilon_0$  прибавится добавочная деформация  $\varepsilon'$ , так что полная деформация будет  $\varepsilon_0 + \varepsilon'$ . Снимем теперь мгновенно нагрузку в момент времени  $t_*$ . Упругая деформация  $\varepsilon_0$  исчезнет, накопленная же за время  $t_*$  деформация последействия не исчезнет. Может показаться, что  $\varepsilon'$  – пластическая деформация, но это не так. Разгруженный образец будет продолжать сокращаться со временем и остаточная деформация будет постепенно уменьшаться, стремясь к нулю. Этот процесс иллюстрируется графиком на рисунке 1.3, где изображена зависимость деформации от времени для описанной программы нагружения.



**Рисунок 1.3 – Последействие**

Материалы, обладающие свойством последействия, называются наследственно упругими или вязкоупругими. Их поведение качественно воспроизводит механическая модель, изображённая на рисунке 1.4. Две пружины с жесткостями  $c_1$  и  $c_2$  соединены последовательно, причём параллельно одной из них установлено вязкое сопротивление – масляный демпфер. Если нагрузки прикладываются очень быстро, масло не успевает перетечь из одной части цилиндра в другую, пружина 2 не растягивается, а мгновенно упругое поведение системы определяется только жёсткостью пружины 1. Если, наоборот,



**Рисунок 1.4 – Модель последействия**

нагружение очень медленное, то сопротивление демпфера, пропорциональное скорости движения поршня, очень мало, сила растягивает как пружину 1, так и пружину 2. Перемещение опять линейно зависит от силы, но теперь жёсткость  $c$  определяется равенством

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}.$$

Величина  $c$  меньше, чем  $c_1$  и  $c_2$ . Прикладывая постоянную нагрузку в течение времени  $t_*$  и затем снимая её, получим график зависимости деформации от времени, подобный представленному на рисунке 1.3.

Несколько иначе происходит так называемый процесс ползучести у металлов при повышенной температуре. При мгновенном приложении растягивающей нагрузки к образцу он приобретает мгновенную деформацию  $\varepsilon_0$ , которая может быть упругой, а может состоять из упругой и пластической составляющих, в зависимости от температуры и напряжения. Если приложенная нагрузка сохраняется постоянной, деформация образца продолжает увеличиваться со временем и к моменту  $t_*$  дополнительная деформация становится равной  $\varepsilon'$ . График зависимости  $\varepsilon'$  от  $t$  совершенно подобен изображённому на рисунке 1.3. Но теперь деформация  $\varepsilon'$  представляет собой необратимую, то есть пластическую деформацию. Разгрузим образец. Если начальная деформация упруга, то при разгрузке произойдёт мгновенное сокращение на величину  $\varepsilon_0$ . Если же начальная деформация была упругопластической, то после разгрузки исчезнет только упругая часть величиной  $\sigma/E$ . Разгруженный образец не уменьшает своей длины после какой угодно выдержки. Деформация  $\varepsilon'$  является необратимой, то есть пластической (так же как и пластическая составляющая деформации  $\varepsilon_0$ ).

У реальных материалов свойства последействия и ползучести существуют одновременно. Последействие, то есть запаздывающая упругость, характерно для высокополимеров. Но если уровень напряжения достаточно высок, не вся деформация, накопленная в результате выдержки при постоянной нагрузке, возвращается после разгрузки. С другой стороны, если температура испытания не слишком велика, некоторый возврат, то есть некоторое уменьшение оставшейся после разгрузки деформации со временем, наблюдается и у металлов.

### 1.3. УПРУГАЯ ЭНЕРГИЯ И УПРУГИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Будем рассматривать упругое тело как механическую консервативную систему, то есть как систему, для которой работа внешней силы целиком затрачивается на сообщение кинетической энергии движения и накопление полностью обратимой потенциальной энергии:

$$A = T + U. \quad (1.5)$$

Здесь  $A$  – работа внешних сил;  $T$  – кинетическая энергия движения;  $U$  – потенциальная энергия деформации. Для вычисления  $U$  предположим, что внешняя сила прикладывается достаточно медленно и производит деформа-

цию с малой скоростью. Тогда кинетической энергией можно пренебречь (она зависит от квадрата скорости; уменьшая скорость в 10 раз, мы уменьшаем величину  $T$  в 100 раз).

Рассмотрим стержень под действием осевой силы. Процесс его деформации можно представить себе как последовательность бесконечно малых приращений удлинения  $d(\Delta l)$ , вызванного ростом силы  $P$ . Тогда

$$A = U = \int_0^{\Delta l} P d(\Delta l). \quad (1.6)$$

Полагая  $P = \sigma F$ ,  $\Delta l = \varepsilon l$  и учитывая, что  $lF = V$ , где  $l$ ,  $F$ ,  $V$  – длина, площадь сечения и объём стержня, найдём

$$U = V \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon.$$

Закон упругости связывает  $\sigma$  и  $\varepsilon$  зависимостью (1.1)  $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ . Положим

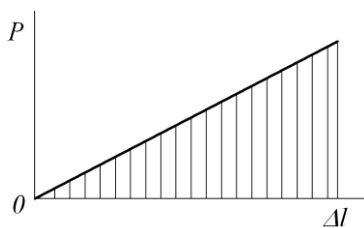
$$W = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (1.7)$$

Величина  $W$  есть упругая энергия на единицу объёма. Для линейно-упругого тела, для которого  $\sigma = E\varepsilon$ , из (1.7) следует, что

$$W = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (1.8)$$

Для всего стержня

$$U = \frac{EF(\Delta l)^2}{2l} = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{1}{2} P \Delta l. \quad (1.9)$$



**Рисунок 1.5 – Зависимость силы от перемещения**

График зависимости силы от перемещения при медленном приложении силы показан на рисунке 1.5. Работа изображается площадью заштрихованного треугольника.

Как уже сказано, мы рассматриваем здесь консервативные системы. Это означает в частности, что действующие силы являются консервативными. Консервативными называются в теоретической механике силы, имеющие потенциал. Работа таких сил зависит только от начального и конечного положения системы и не зависит от пути, по которому перемещаются точки системы. Только для таких сил справедливо уравнение сохранения механической энергии (1.5). Зависимость  $n$  переменных  $y_1, y_2, \dots, y_n$  от дру-



гих  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется потенциальной в том случае, когда существует такая функция  $W(x_k)$ , что

$$y_k = \frac{\partial W}{\partial x_k}. \quad (1.10)$$

Если справедливы соотношения (1.10), то существуют и обратные соотношения, выражающие  $x_k$  через  $y_k$ , которые могут быть представлены в аналогичной форме. Иными словами, существует функция  $W^*(y_k)$  такая, что

$$x_k = \frac{\partial W^*}{\partial y_k}. \quad (1.11)$$

Переход от соотношений (1.10) к (1.11) называется преобразованием Лежандра. Осуществляется он следующим образом. Положим

$$W^* = \sum_{i=1}^n x_i y_i - W. \quad (1.12)$$

Продифференцировав (1.12) по  $y_k$ , получим

$$\frac{\partial W^*}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_k} y_i + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial W}{\partial y_k}.$$

Производная  $\frac{\partial y_i}{\partial y_k}$  равна единице для  $i = k$  и равна нулю для остальных значений  $i$ . Кроме того, с учётом (1.10) имеем

$$\frac{\partial W}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial x_i}{\partial y_k}.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$\frac{\partial W^*}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_k} y_i + x_k - \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial x_i}{\partial y_k},$$

откуда и вытекает соотношение (1.11).

Дифференцируя (1.7) по  $\varepsilon$ , мы получаем

$$\sigma = \frac{dW}{d\varepsilon}. \quad (1.13)$$

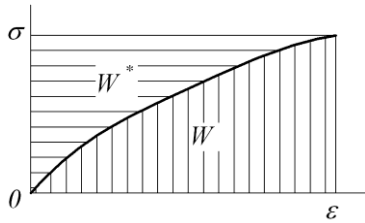
Это и есть условие того, что упругая энергия  $W$  служит потенциалом напряжений. Применяя преобразование Лежандра, то есть полагая

$$W^* = \sigma\varepsilon - W = W^*(\sigma),$$

мы находим

$$\varepsilon = \frac{dW^*}{d\sigma}. \quad (1.14)$$

Упругий потенциал  $W$  имеет непосредственный механический смысл: это удельная (то есть приходящаяся на единицу объёма) потенциальная энергия деформации, накопленная в теле. Величина  $W^*$  такого непосредственно физического смысла не имеет. Иногда её называют удельной дополнительной энергией деформации. Происхождение этого термина поясняет рисунок 1.6, где  $W = \int \sigma d\varepsilon$  есть заштрихованная вертикально площадь, а  $W^*$  дополняет её до площади прямоугольника со сторонами  $\sigma$  и  $\varepsilon$  (площадь  $W^*$  заштрихована горизонтально).



**Рисунок 1.6 – Удельная энергия деформации и удельная дополнительная энергия деформации**

Для линейно-упругого материала потенциал деформаций  $W^*$  численно равен потенциалу напряжений  $W$ . Из формулы (1.8) следует, что в этом случае

$$\sigma = \frac{dW(\varepsilon)}{d\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{dW(\sigma)}{d\sigma}.$$

Вся изложенная теория не предполагает упругости материала. Пока не произведена разгрузка, связь между деформацией и напряжением  $\sigma = \varphi(\varepsilon)$  одинакова как для упругого, так и для упругопластического тела.

Представленные выше соотношения относятся к случаю одноосного деформирования, но они легко обобщаются на общий случай напряжённо-деформированного состояния, характеризующегося тензором напряжений  $\sigma_{ij}$  и тензором деформации  $\varepsilon_{ij}$ . В этом случае упругие потенциалы напряжений и деформации определяются равенством

$$W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij},$$

$$W^* = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W,$$

а соотношения (1.13) и (1.14) будут иметь вид

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.15)$$

#### 1.4. ТЕРМОДИНАМИКА УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Данное ранее определение упругой деформации требует уточнения, поскольку оно не учитывает изменения температуры тела, которым может сопровождаться процесс его деформирования. Более общее определение упругого тела таково: работа сил, приложенных к упругому телу, на замкнутом по деформациям и температуре циклу равна нулю. Очевидно, что вязкое тело

(или вязкая жидкость), например, не подходит под это определение. Действительно, силы вязкого сопротивления совершают работу, которая переходит в тепло. Чтобы цикл был замкнутым не только по деформациям, но и по температуре, это тепло необходимо отвести; количество отведённого тепла равно работе сил за цикл и всегда отлично от нуля.

Рассмотрим элементарный прямоугольный параллелепипед упругого тела в условиях одноосного напряжённого состояния с напряжением  $\sigma$ . На две противоположные грани элемента действуют силы  $\sigma dF$ , где  $dF$  – площадь грани, в которой действует нормальное напряжение  $\sigma$ . Если напряжение увеличится на  $d\sigma$ , длина параллелепипеда возрастет на  $d\varepsilon dl$ , где  $dl$  – длина элемента,  $\varepsilon$  – продольная деформация. Работа, произведённая при возрастании напряжения, равна  $\sigma dF d\varepsilon dl = \sigma d\varepsilon d\tau$ , где  $d\tau = dF dl$  – объём элемента. В расчёте на единицу объёма работа составит величину  $\sigma d\varepsilon$ . Вообще говоря, количество тепла в рассматриваемом объёме может измениться. Обозначим через  $dQ$  изменение количества тепла, также отнесённое к единице объёма. Если  $W$  – внутренняя энергия, приходящаяся на единицу объёма, то её изменение при возрастании напряжений согласно первому началу термодинамики будет

$$dW = \sigma d\varepsilon + dQ. \quad (1.16)$$

Второе начало термодинамики утверждает, что существует функция состояния  $S$ , называемая энтропией, такая, что для обратимых процессов

$$dQ = T dS,$$

где  $T$  – температура.

Таким образом,

$$dW = \sigma d\varepsilon + T dS. \quad (1.17)$$

Данное выражение должно быть полным дифференциалом. Это означает, что внутренняя энергия есть функция деформации и энтропии:  $W = W(\varepsilon, S)$ . Её дифференциал

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial W}{\partial S} dS.$$

Сопоставляя последнее выражение с (1.17), видим, что

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}; \quad T = \frac{\partial W}{\partial S}. \quad (1.18)$$

Таким образом, внутренняя энергия является термодинамическим потенциалом. С помощью преобразования Лежандра также строятся следующие термодинамические потенциалы.

Свободная энергия  $\Phi(\varepsilon, T) = W - TS$ . Учитывая, что

$$d\Phi = dW - TdS - SdT = \sigma d\varepsilon + TdS - TdS - SdT = \sigma d\varepsilon - SdT,$$

находим

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}; \quad S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T}; \quad (1.19)$$

Энтальпия  $W^*(\sigma, S) = \sigma\varepsilon - W$ . Так как

$$dW^* = \sigma d\varepsilon + \varepsilon d\sigma - dW = \sigma d\varepsilon + \varepsilon d\sigma - \sigma d\varepsilon - TdS = \varepsilon d\sigma - TdS,$$

имеем соотношения

$$\varepsilon = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma}; \quad T = -\frac{\partial W^*}{\partial S}; \quad (1.20)$$

Свободная энтальпия  $\Phi^*(\sigma, T) = W^* + TS$ . Для неё

$$d\Phi^* = dW^* + TdS + SdT = \varepsilon d\sigma - TdS + TdS + SdT = \varepsilon d\sigma + SdT,$$

откуда следуют равенства

$$\varepsilon = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma}; \quad S = \frac{\partial \Phi^*}{\partial T}. \quad (1.21)$$

Исходя из выражений для  $dW$ ,  $d\Phi$ ,  $dW^*$ ,  $d\Phi^*$  можно заключить, что однозначная зависимость между напряжениями и деформациями имеет место, когда либо  $dQ=0$ , либо  $dT=0$ . В случае  $dQ=0$  отсутствует теплообмен с окружающей средой; такой процесс называется адиабатическим. Поскольку  $dQ=TdS$ , при этом энтропия  $S = \text{const}$ . Для адиабатического процесса потенциалом напряжений является внутренняя энергия  $W$ , а потенциалом деформаций – энтальпия  $W^*$ . В случае  $dT=0$ , то есть когда  $T = \text{const}$ , имеем дело с изотермическим процессом. Для него потенциалами напряжений и деформаций будут соответственно свободная энергия  $\Phi$  и свободная энтальпия  $\Phi^*$ .

Предположим, что для некоторого материала из опыта определена зависимость между напряжением, деформацией и температурой

$$\sigma = E\varepsilon - E\alpha(T - T_0). \quad (1.22)$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения,  $T_0$  – некоторая температура, соответствующая условно выбранному начальному состоянию: если  $T = T_0$  и  $\sigma = 0$ , то  $\varepsilon = 0$ .

Модуль упругости, фигурирующий в равенстве (1.22), должен быть определён в изотермических условиях. В самом деле, если при упругом деформировании образца его температура меняется, то упругая деформация будет сопровождаться температурной деформацией и, не производя непрерывного

замера температуры в течение опыта, мы не сможем отличить упругую деформацию от температурной. Измеряя только силу и деформацию, мы найдём, что в этих условиях зависимость между приращением напряжения и приращением деформации не описывается законом Гука и модулем  $E$ .

Выясним, как для данного материала будет выглядеть зависимость между напряжением и деформацией в случае адиабатического процесса. Предположим, что  $E$  и  $\alpha$  не зависят от температуры (это верно лишь приближённо, в узком диапазоне температур). Как уже сказано, для изотермического процесса потенциалом напряжений является свободная энергия  $\Phi$ . Поэтому выражение (1.22) должно получаться по формуле (1.19)

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}.$$

Интегрируя это равенство по  $\varepsilon$ , получим

$$\Phi = \frac{E\varepsilon^2}{2} - E\alpha\varepsilon(T - T_0) + \psi(T),$$

где  $\psi(T)$  – произвольная функция. Согласно (1.19) находим далее энтропию упругого тела

$$S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} = E\alpha\varepsilon - \psi'.$$

Теперь вычисляется внутренняя энергия

$$W = \Phi + TS = \frac{E\varepsilon^2}{2} + E\alpha\varepsilon T_0 + \psi - T\psi'.$$

Если деформация равна нулю, то на основании (1.16) внутренняя энергия представляет собой тепловую энергию. Она равна  $c_\varepsilon T$ , где  $c_\varepsilon$  – теплоёмкость при постоянной деформации. Считаем, что  $c_\varepsilon$  есть величина постоянная, не зависящая ни от деформации, ни от температуры. Полагая  $\varepsilon = 0$  в найденном выражении для  $W$ , получим

$$\psi - T\psi' = c_\varepsilon T. \quad (1.23)$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению для  $\psi(T)$ , которое можно проинтегрировать. Но нам не нужна функция  $\psi(T)$  сама по себе, а требуется её производная  $\psi'(T)$ , входящая в выражение для энтропии.

Продифференцируем равенство (1.23) по  $T$  и преобразуем его к виду

$$\psi'' = -\frac{c_\varepsilon}{T}.$$

Отсюда

$$\psi' = -c_\varepsilon (\ln T - \ln A) = -c_\varepsilon \ln \frac{T}{A},$$

где  $A$  – постоянная интегрирования.

С учётом полученного результата выражение для  $S$  принимает вид

$$S = E\alpha\varepsilon + c_\varepsilon \ln \frac{T}{A}.$$

Так как энтропия определена с точностью до произвольной постоянной, выбираем величину  $A$  таким образом, чтобы при  $\varepsilon = 0$  и  $T = T_0$  было  $S = 0$ . Имеем  $A = T_0$  и, окончательно,

$$S = E\alpha\varepsilon + c_\varepsilon \ln \frac{T}{T_0}. \quad (1.24)$$

Выражение для внутренней энергии с учетом равенства (1.23) переписывается так:

$$W = \frac{E\varepsilon^2}{2} + E\alpha\varepsilon T_0 + c_\varepsilon T. \quad (1.25)$$

Но чтобы внутренняя энергия была потенциалом, она должна быть представлена как функция деформации и энтропии. Разрешая (1.24) относительно  $T$ , получим

$$T = T_0 \exp \frac{S - E\alpha\varepsilon}{c_\varepsilon}. \quad (1.26)$$

Подстановка данного выражения в (1.25) даёт

$$W = \frac{E\varepsilon^2}{2} + E\alpha T_0 \varepsilon + c_\varepsilon T_0 \exp \frac{S - E\alpha\varepsilon}{c_\varepsilon}. \quad (1.27)$$

Отсюда можно сразу получить связь между напряжением и деформацией для адиабатического растяжения, когда теплообмен отсутствует. Дифференцируя  $W$  по  $\varepsilon$ , получим выражение

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = E\varepsilon + E\alpha T_0 \left( 1 - \exp \frac{S - E\alpha\varepsilon}{c_\varepsilon} \right). \quad (1.28)$$

Как видно, если материал подчиняется закону Гука в изотермических условиях, при адиабатическом деформировании зависимость между напряжением и деформацией перестаёт быть линейной. Однако нелинейность эта весьма слабая. Предположим, что растяжение начато при температуре  $T_0$ , тогда в начальный момент было  $S = 0$ , и весь процесс деформирования происходит при нулевом значении энтропии. Положим  $S = 0$  в (1.27) и воспользуемся разложением вида  $e^x = 1 + x + \dots$ , ограничившись двумя первыми членами. Получим

$$\sigma = E \left( 1 + \frac{E\alpha^2 T_0}{c_\varepsilon} \right) \varepsilon. \quad (1.29)$$

Величина  $E \left( 1 + \frac{E\alpha^2 T_0}{c_\varepsilon} \right)$  называется адиабатическим модулем упругости; он больше, чем изотермический модуль  $E$ . При упругих колебаниях, происходящих с большой частотой, тепло не успевает рассеиваться за время одного периода, и частота собственных колебаний определяется адиабатическим модулем. Для металлов разница между адиабатическим и изотермическим модулем составляет всего (1-2)%, для полимерных материалов эта разница может быть существенно большей. Заметим, что выражение (1.26) можно в соответствии с равенством (1.18) получить как производную

$$T = \frac{\partial W}{\partial S}.$$

Если в (1.26) разложить экспоненту в ряд и положить  $S = 0$ , найдём

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{E\alpha}{c_\varepsilon} \varepsilon \right). \quad (1.30)$$

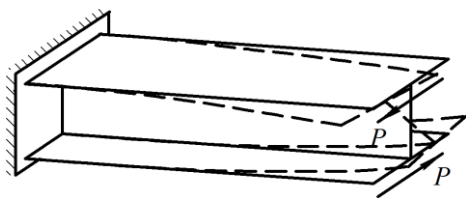
Из этой формулы видно, что при растяжении материал охлаждается, при сжатии нагревается. Если рассматривается, например, процесс колебаний, в стержне попеременно возникают растяжение и сжатие, то есть повышение и понижение температуры. Но в реальных условиях всегда происходит теплообмен с окружающей средой, то есть утечка тепловой энергии. Внешне это проявляется как затухание колебаний.

Мы предполагали, что  $E$ ,  $\alpha$ ,  $c_\varepsilon$  постоянны. В действительности это не так. Поэтому для реальных материалов картина оказывается более сложной, и качественные результаты могут быть другими. Например, многие полимеры при растяжении в упругой области не охлаждаются, как металлы, а нагреваются. Упругое деформирование многих материалов сопровождается пластическим, необратимым деформированием уже при небольших нагрузках. Поэтому использование законов термодинамики обратимых процессов не всегда может считаться оправданным.

## 2 КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

### 2.1 СВОБОДНОЕ КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

В теории упругости рассматривается задача о свободном кручении стержня произвольного сечения. Каждое сечение сохраняет свою форму в плане, поворачиваясь вокруг продольной оси на некоторый угол  $\theta$ . В то же время сечения перестают быть плоскими (как говорят, они «депланируют»), искривляясь вследствие перемещения их точек в осевом направлении. Исключение составляют круглые или кольцевые сечения, которые всегда остаются плоскими. Кручение называется *свободным или чистым* если *депланация сечений постоянна по длине стержня*. При свободном кручении в сечениях возникают только касательные напряжения, не изменяющиеся вдоль оси.



**Рисунок 2.1 – Пример стеснённого кручения стержня**

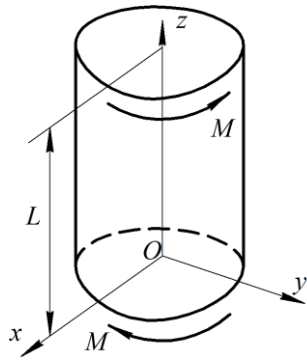
Если депланация невозможна в каком-либо сечении или её величина изменяется по длине, кручение называется стеснённым. На рисунке 2.1 показан в качестве примера двутавровый стержень, заделанный на одном конце и нагруженный силами  $P$ , образующими пару, на другом. Благодаря заделке происходит изгиб полков. Стенка из-за своей малой жёсткости практически не препятствует такому деформированию. Угол закручивания будет при этом существенно меньше, чем при свободном кручении.

При стеснённом кручении возникают дополнительные нормальные и касательные напряжения. Свободное кручение встречается на практике крайне редко, но если стержень имеет толстостенное или сплошное сечение, эффект стеснения оказывается незначительным и его можно игнорировать. В случае же тонкостенных стержней с открытым профилем учёт стеснения может привести к принципиально иным результатам по сравнению с результатами, которые даёт классическая теория свободного кручения Сен-Венана.

Прежде чем приступить к изучению стеснённого кручения, напомним некоторые результаты, вытекающие из теории свободного кручения.

Стержень длиной  $L$  отнесём к правой декартовой системе координат  $x, y, z$ , направив ось  $z$  параллельно образующей и поместив начало  $O$  системы в произвольной точке одного из оснований (рисунок 2.2). Обозначим через  $\alpha$





**Рисунок 2.2 – Система координат**

относительный угол закручивания, то есть угол закручивания, приходящийся на единицу длины стержня. Он связан с моментом  $M$  соотношением

$$\alpha = \frac{M}{GI_k} \quad (2.1)$$

где стоящее в знаменателе произведение  $GI_k$  называется жёсткостью стержня на кручение;  $G$  – модуль сдвига материала;  $I_k$  – геометрическая характеристика жёсткости на кручение или константа Сен-Венана.

Последняя не имеет единого математического выражения и для каждого сечения определяются, вообще говоря, как результат решения некоторой краевой задачи. Исключением является круглое или кольцевое сечение, для которого

величина  $I_k$  равна полярному моменту инерции  $I_p$ . В других случаях  $I_k$  всегда меньше (а часто – во много раз меньше)  $I_p$ . Для сечения

в виде узкого прямоугольника (рисунок 2.3,а) достаточную точность даёт формула

$$I_k = \frac{1}{3}b\delta^3, \quad (2.2)$$

где  $b$ ,  $\delta$  – длина и ширина прямоугольника.

Опираясь на мембранную аналогию, можно

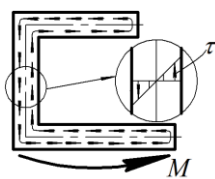
распространить данный результат на произвольные тонкостенные сечения с открытым контуром (рисунок 2.3,б), суммируя вклады отдельных участков:

$$I_k = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i \delta_i^3, \quad (2.3)$$

где  $b_i$  – длина  $i$ -го участка, измеренная по средней линии профиля;  $\delta_i$  – соответствующая толщина стенки;  $n$  – число участков. Сечение может включать и криволинейные участки, для которых в качестве  $b_i$  следует брать длину дуги средней линии участка.

Как уже сказано, при свободном кручении в сечениях стержня возникают только касательные напряжения. Максимальное напряжение всегда действует на границе сечения и направлено по касательной к контуру. В случае тонкостенного сечения с открытым контуром касательное напряжение изменяется по толщине стенки *по линейному закону*, как показано на рисун-

ке 2.4. Величина напряжения в крайних по толщине точках выражается формулой



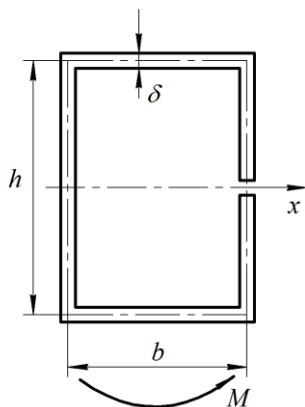
$$\tau = \pm \frac{M}{I_k} \delta. \quad (2.4)$$

**Рисунок 2.4 – Касательные напряжения при свободном кручении тонкостенного стержня с открытым контуром**

Наибольшее напряжение возникает в точке сечения с наибольшей толщиной. Его абсолютное значение

$$\tau_{\max} = \frac{M}{I_k} \delta_{\max}. \quad (2.5)$$

В качестве примера выполним расчёт стального стержня, сечение которого показано на рисунке 2.5. Примем  $\delta = 2\text{ мм}$ ;  $h = 60\text{ мм}$ ;  $b = 40\text{ мм}$ . Длина стержня  $L = 1\text{ м}$ , модуль сдвига  $G = 7,8 \cdot 10^4\text{ МПа}$ ; скручивающий момент  $M = 50\text{ Н} \cdot \text{м}$ .



**Рисунок 2.5 – Сечение стержня**

Находим константу Сен-Венана согласно (2.3):

$$I_k = \frac{1}{3}(2h + 2b)\delta^3 = \frac{1}{3}(2 \cdot 60 + 2 \cdot 40)2^3 = 533\text{ мм}^4.$$

Относительный угол закручивания

$$\alpha = \frac{M}{GI_k} = \frac{50}{7,8 \cdot 10^{10} \cdot 533 \cdot 10^{-12}} = 1,203 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Для стержня длиной  $L = 1\text{ м}$  угол взаимного поворота оснований составит величину

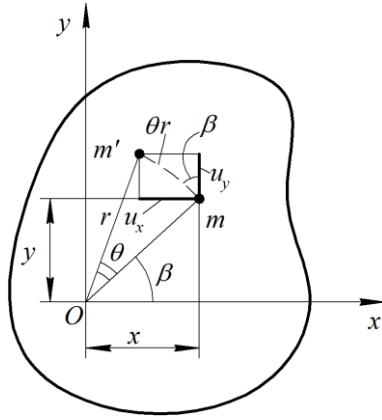
$$\alpha L = 1,203\text{ рад} = 68,9^\circ.$$

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{M}{I_k} \delta = \left( \frac{50}{533 \cdot 10^{-12}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \right) \cdot 10^{-6} = 188\text{ МПа}.$$

## 2.2 ОСЕВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ СВОБОДНОМ КРУЧЕНИИ

Остановимся далее на вычислении осевых перемещений, характеризующих деформацию сечений. Если поворот нижнего основания относительно оси  $z$  отсутствует, то на расстоянии  $z$  от него сечение повернётся на угол  $\theta = \alpha z$ . Будем считать его положительным, если он происходит против часовой стрелки при взгляде с положительного направления оси  $z$ . Точка  $m$  (рисунок 2.6) с полярными координатами  $r, \beta$  перейдёт в положение  $m'$ , переместившись на расстояние  $\theta r$  по окружности радиуса  $r$ . Проекция перемещения на координатные оси:



**Рисунок 2.6 – Перемещения в плоскости сечениях стержня**

$$u_x = -\theta r \sin \beta; \quad u_y = \theta r \cos \beta.$$

Но  $r \sin \beta = y$ ;  $r \cos \beta = x$ , так что для  $u_x, u_y$  получаем выражения

$$u_x = -\alpha y z; \quad u_y = \alpha x z. \quad (2.6)$$

Помимо  $u_x, u_y$  возникает также осевое перемещение  $u_z(x, y)$ . По формулам Коши находим деформации сдвига

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\alpha y + \frac{\partial u_z}{\partial x};$$

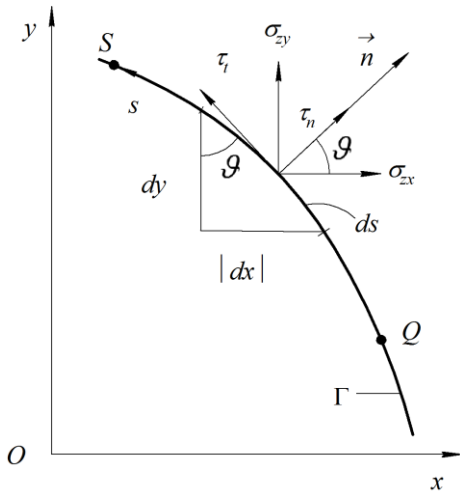
$$\gamma_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \alpha x + \frac{\partial u_z}{\partial y},$$

а согласно закону Гука получаем напряжения

$$\sigma_{zx} = G\gamma_{zx} = G\left(-\alpha y + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right);$$

$$\sigma_{zy} = G\gamma_{zy} = G\left(\alpha x + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right).$$

Из этих равенств следуют соотношения



**Рисунок 2.7 – К вычислению осевого перемещения**

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{1}{G}\sigma_{zx} + \alpha y; \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{1}{G}\sigma_{zy} - \alpha x. \quad (2.7)$$

Найдём закон изменения осевого перемещения  $u_z$  вдоль произвольной кривой  $\Gamma$ , лежащей в плоскости поперечного сечения (рисунок 2.7). Если принять что в некоторой точке  $Q$  кривой перемещение  $u_z$  равно нулю, то для произвольной точки  $S$  будем иметь

$$u_z = \int_0^s du_z, \quad (2.8)$$

где  $s$  – дуговая координата точки  $S$ , отсчитываемая от начальной точки  $Q$ ; её положительное направление примем в соответствии с рисунком 2.7. Величина  $du_z$  определяется равенством

$$du_z = \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy.$$

Но

$$dx = -ds \sin \vartheta; \quad dy = ds \cos \vartheta, \quad (2.9)$$

где  $\vartheta$  – угол между нормальным к кривой вектором  $\vec{n}$  и осью  $x$ . Знак минус в формуле для  $dx$  связан с тем, что при положительных значениях  $\sin \vartheta$  и  $\cos \vartheta$  возрастание координаты  $s$  сопровождается уменьшением  $x$ . Таким образом, имеем

$$du_z = \left( -\frac{\partial u_z}{\partial x} \sin \vartheta + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cos \vartheta \right) ds.$$

Подставив данное выражение в формулу (2.8) и воспользовавшись соотношениями (2.7), получаем

$$u_z = \frac{1}{G} \int_0^s (-\sigma_{zx} \sin \vartheta + \sigma_{zy} \cos \vartheta) ds - \alpha \int_0^s (x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) ds.$$

Как видно из рисунка 2.7, выражение в скобках в первом интеграле есть составляющая  $\tau_t$  полного касательного напряжения в проекции на направление касательной к кривой  $\Gamma$ :

$$\tau_t = -\sigma_{zx} \sin \vartheta + \sigma_{zy} \cos \vartheta.$$

Величина, содержащаяся в скобках во втором интеграле, есть длина  $\rho$  перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к кривой. В самом деле, как следует из рисунка 2.8,

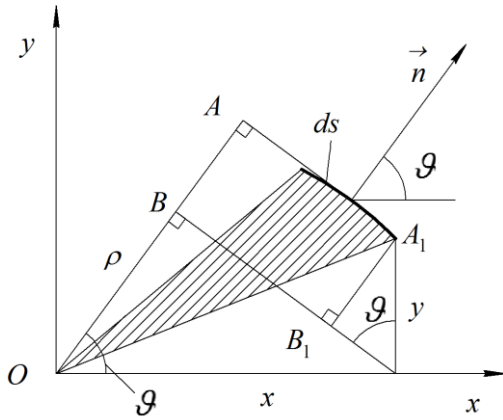


Рисунок 2.8 – К определению  $\rho$

$$\rho = OB + BA.$$

Но  $OB = x \cos \vartheta$ , а  $BA = B_1A_1 = y \sin \vartheta$ , откуда и выводим равенство

$$\rho = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta. \quad (2.10)$$

С учётом сказанного формуле для  $u_z$  можно придать вид

$$u_z = \frac{1}{G} \int_0^s \tau_t ds - \alpha \int_0^s \rho ds.$$

Произведение  $d\omega = \rho ds$  представляет собой удвоенную площадь треугольника с основанием  $ds$  и высотой  $\rho$ , который отмечен штриховкой на рисунке 2.8. С учётом этого можно записать окончательно

$$u_z = \frac{1}{G} \int_0^s \tau_t ds - \alpha \omega, \quad (2.11)$$

где через

$$\omega = \int_0^s \rho ds \quad (2.12)$$

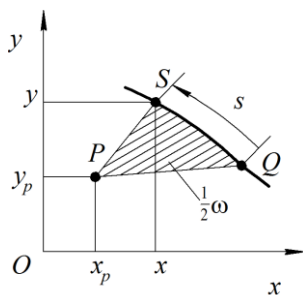
обозначена удвоенная площадь фигуры, ометаемой радиусом-вектором, начало которого находится в точке  $O$ , а конец скользит по кривой  $\Gamma$  от точки  $Q$  до текущей точки  $S$ . Величина  $\omega$  имеет размерность  $\text{мм}^2$  и называется *секториальной площадью*; будем считать её положительной, когда радиус-вектор вращается против часовой стрелки при взгляде с положительного направления оси  $z$ .

Применим полученные результаты к случаю тонкостенного стержня с открытым сечением. В качестве кривой  $\Gamma$  возьмём среднюю линию профиля. На этой линии касательные напряжения при свободном кручении равны нулю, и первое слагаемое в формуле (2.11) будет отсутствовать. Следовательно, осевые перемещения точек средней линии для незамкнутого сечения могут быть найдены по формуле

$$u_z = -\alpha\omega. \quad (2.13)$$

Таким образом, осевые перемещения изменяются вдоль средней линии по закону секториальной площади. По толщине стенки величину  $u_z$  можно считать неизменной из-за малости толщины.

При выводе формулы (2.12) предполагалось, что поворот сечения происходит относительно оси  $z$ , то есть вокруг точки  $O$ . Но начало системы координат при свободном кручении может быть помещено в любой точке основания, что не влияет на результаты. Поэтому можно разделить две точки – начало координат  $O$  и полюс  $P$ , вокруг которого происходит поворот сечения (рисунок 2.9). В случае свободного кручения выбор обеих точек произволен, но при стеснённом кручении дело обстоит иначе, как будет видно из дальнейшего. Все прежние выкладки остаются при этом в силе, надо только в выражениях типа (2.6), (2.7), (2.10) заменить  $x$  и  $y$  на  $x - x_p$  и  $y - y_p$ , где  $x_p$ ,  $y_p$  – координаты полюса. В частности, соотношение (2.10) будем теперь писать в виде



**Рисунок 2.9 – К определению полюса**

$$\rho = (x - x_p)\cos \vartheta + (y - y_p)\sin \vartheta, \quad (2.14)$$

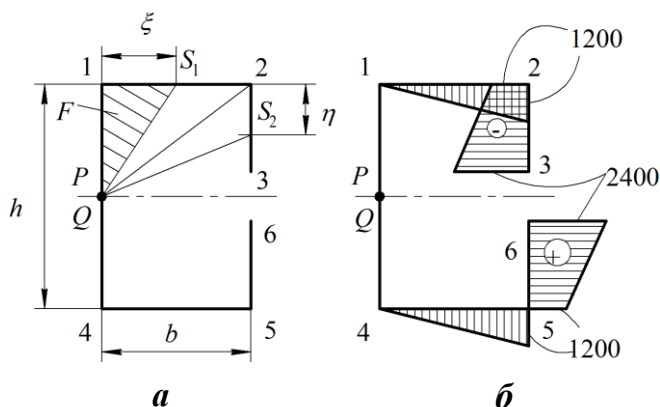
где, согласно (2.9),

$$\sin \vartheta = -\frac{dx}{ds}; \quad \cos \vartheta = \frac{dy}{ds}.$$

С учётом этого выражение (2.12) для  $\omega$  может быть представлено в форме

$$\omega = \int_0^s \left[ -(y - y_p)dx + (x - x_p)dy \right]. \quad (2.15)$$

Вычисление  $\omega$  связано с тремя произволами – положением начальной точки  $Q$  на кривой и двумя координатами полюса. Соответственно возникает неопределённость и в отыскании перемещения  $u_z$  по формуле (2.13). В случае свободного кручения данная неопределённость связана с возможностью перемещения стержня как жёсткого целого вдоль оси  $z$  и его поворотом относительно осей  $x, y$ . В случае же стеснённого кручения неопределённость устраняется благодаря особенностям возникающего напряжённого состояния, как будет показано далее.



**Рисунок 2.10 – Пример расчёта секториальной площади**

В произвольной точке  $S_1$  участка 1-2 радиус-вектор покрывает площадь  $F = \frac{1}{2} \frac{h}{2} \xi$ , заштрихованную на рисунке 2.10,а. Для получения  $\omega$  нужно удвоить эту величину и взять со знаком минус, поскольку радиус-вектор вращается по часовой стрелке. Таким образом,  $\omega$  изменяется на участке 1-2 по линейному закону; в точке 2, где  $\xi = b$ , имеем  $\omega_2 = -bh/2 = -60 \cdot 40/2 = -1200 \text{ мм}^2$ .

В произвольной точке  $S_2$  участка 2-3 к найденному значению  $\omega_2$  добавляется удвоенная площадь треугольника  $Q-2-S_2$ , которую также следует взять со знаком минус, и мы получаем здесь  $\omega = \omega_2 - b\eta$ . Как видим, на этом участке секториальная площадь изменяется также линейно; в точке 3 будет  $\omega_3 = -bh = -2400 \text{ мм}^2$ .

Точно так же находим значения  $\omega$  на нижней половине сечения. Отличие будет лишь в том, что теперь радиус-вектор вращается против часовой стрелки, так что здесь  $\omega > 0$  (рисунок 2.10,б).

На основании (2.13) абсолютная величина взаимного продольного смещения образующих, проходящих через точки 3 и 6, будет

Расчёт  $\omega$  поясним на примере сечения, показанного выше на рисунке 2.5. Выберем положение полюса  $P$  в середине вертикальной стенки. Здесь же поместим и начальную точку  $Q$  (рисунок 2.10,а). Зафиксировав в ней начало радиуса-вектора, конец его перемещаем вдоль контура. На участке, находящемся между точкой  $Q$  и точкой 1,  $\omega = 0$ .

$$\Delta u_z = (\omega_6 - \omega_3)\alpha = 2 \cdot 2400 \cdot 10^{-6} \alpha = 4,8 \cdot 10^{-3} \alpha.$$

Для принятых ранее исходных данных величина  $\alpha$  составляет 1,203 рад/м, а искомое смещение оказывается равным 5,77 мм.

### 2.3 СЕКТОРИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННЫХ СЕЧЕНИЙ

Как будет видно из дальнейшего, секториальная площадь играет при стеснённом кручении такую же роль, что и координаты  $x$ ,  $y$  при изгибе стержня. Поэтому величину  $\omega$  называют также *секториальной координатой*. С ней связаны следующие геометрические характеристики тонкостенных профилей:

*секториально-статический момент сечения, мм<sup>4</sup>*

$$S_\omega = \int_A \omega dA; \quad (2.16)$$

*секториально-линейные моменты сечения, мм<sup>5</sup>*

$$S_{\omega x} = \int_A \omega y dA; \quad S_{\omega y} = \int_A \omega x dA; \quad (2.17)$$

*секториальный момент инерции сечения, мм<sup>6</sup>*

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA, \quad (2.18)$$

где  $A$  – площадь сечения стержня.

Будем в дальнейшем полагать, что начало координат  $O$  находится в центре тяжести сечения, то есть координатные оси  $x$ ,  $y$  являются *центральными осями инерции*. В этом случае равны нулю статические моменты сечения относительно осей  $x$ ,  $y$ :

$$S_x = \int_A y dA = 0; \quad S_y = \int_A x dA = 0. \quad (2.19)$$

Положение полюса можно выбрать так, чтобы равнялись нулю секториально-линейные моменты  $S_{\omega x}$  и  $S_{\omega y}$ . Такая точка  $P$  называется *центром кручения профиля*. Предположим, что центр кручения находится на расстояниях  $a_x$  и  $a_y$  от произвольно выбранного полюса  $P_0(x_0, y_0)$ . Если  $\omega_0$  – секториальная площадь при полюсе  $P_0$ , то при полюсе  $P$  её величина, которую обозначим через  $\tilde{\omega}$ , определится выражением (2.15), где вместо  $x_p$  и  $y_p$  нужно взять  $x_0 + a_x$  и  $y_0 + a_y$ :

$$\tilde{\omega} = \int_0^s \left[ -(y - y_0 - a_y) dx + (x - x_0 - a_x) dy \right] =$$

$$= \omega_0 + a_y \int_0^s dx - a_x \int_0^s dy = \omega_0 + a_y (x - x_Q) - a_x (y - y_Q),$$

где  $x_Q, y_Q$  – координаты точки  $Q$ .

Подставим  $\tilde{\omega}$  в качестве  $\omega$  в формулы (2.17). Приравнявая  $S_{\omega_x}$  и  $S_{\omega_y}$  нулю, получаем следующие уравнения для определения  $a_x$  и  $a_y$ :

$$\int_A \left[ \omega_0 + a_y (x - x_Q) - a_x (y - y_Q) \right] y dA = 0;$$

$$\int_A \left[ \omega_0 + a_y (x - x_Q) - a_x (y - y_Q) \right] x dA = 0.$$

Если раскрыть скобки и учесть равенства (2.19), можно привести полученную систему к виду

$$S_{\omega_0 x} + a_y I_{xy} - a_x I_x = 0,$$

$$S_{\omega_0 y} + a_y I_y - a_x I_{xy} = 0,$$

где  $I_x, I_y$  и  $I_{xy}$  – осевые и центробежный моменты инерции сечения

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA; \quad I_{xy} = \int_A xy dA, \quad (2.20)$$

а также

$$S_{\omega_0 x} = \int_A \omega_0 y dA; \quad S_{\omega_0 y} = \int_A \omega_0 x dA. \quad (2.21)$$

Решение системы приводит к следующим выражениям для координат центра кручения:

$$a_x = \frac{S_{\omega_0 x} I_y - S_{\omega_0 y} I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2};$$

$$a_y = \frac{-S_{\omega_0 y} I_x + S_{\omega_0 x} I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}. \quad (2.22)$$

Заметим, что для центральной системы осей координат  $x, y$  формулы (2.22) остаются в силе независимо от выбора начальной точки  $Q$ . Действительно, если взять другое начало отсчёта координаты  $s$ , значение  $\omega$  изменится на постоянную величину, а секториальные характеристики  $S_{\omega_x}$  и  $S_{\omega_y}$  (2.17) в силу условий (2.19) останутся неизменными.

Формулы (2.22) упрощаются, когда  $x, y$  – *главные центральные оси инерции*. В этом случае  $I_{xy} = 0$ , и мы получаем



$$a_x = \frac{S_{\omega_0 x}}{I_x}; \quad a_y = -\frac{S_{\omega_0 y}}{I_y}. \quad (2.23)$$

Если, однако, сечение стержня не имеет осей симметрии, то нет смысла отыскивать положение главных осей, так как это слишком трудоёмкая процедура. Лучше в этом случае пользоваться непосредственно формулами (2.22), выбирая оси  $x$ ,  $y$  из соображений удобства (но они, конечно, должны быть центральными осями). Для симметричного сечения ось симметрии является главной центральной осью инерции, а центр кручения располагается на этой оси.

Для устранения последнего произвола при расчёте  $\omega(s)$  потребуем, чтобы равнялась нулю величина  $S_\omega$  (2.16). Если  $\tilde{\omega}$  – секториальная площадь, найденная при произвольно выбранной точке  $Q$ , то при другом начале отсчёта дуговой координаты секториальная площадь  $\omega$  будет отличаться от  $\tilde{\omega}$  на постоянную величину:

$$\omega = \tilde{\omega} + C. \quad (2.24)$$

Для определения  $C$  имеем условие  $S_\omega = 0$  или

$$\int_A (\tilde{\omega} + C) dA = 0,$$

откуда

$$C = -\frac{\tilde{S}_\omega}{A}, \quad (2.25)$$

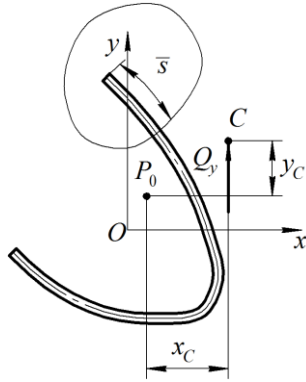
где

$$\tilde{S}_\omega = \int_A \tilde{\omega} dA. \quad (2.26)$$

Величина  $\omega = \tilde{\omega} + C$  при условии, что полюс совпадает с центром кручения, называется *главной секториальной площадью*, а соответствующая величина  $I_\omega$  – *главным секториальным моментом инерции*.

В балочной теории изгиба тонкостенных стержней с открытым сечением принимается, что касательные напряжения  $\tau$  постоянны по толщине и вместо них вводятся погонные касательные силы  $T = \tau\delta$ . Если  $x$ ,  $y$  – главные центральные оси инерции, а изгиб стержня происходит в плоскости координат  $yz$ , значение  $T$  в точке с координатой  $\bar{s}$ , отсчитываемой от края сечения (рисунок 2.11), находится по формуле

$$T = \frac{Q_y}{I_x} \bar{s}_x,$$



**Рисунок 2.11 – Простой изгиб тонкостенного стержня**

где  $Q_y$  – перерезывающая сила в сечении, а  $\bar{S}_x$  – статический момент отсечённой части сечения, которая на рисунке 2.11 очерчена замкнутой кривой, относительно оси  $x$ :

$$\bar{S}_x(\bar{s}) = \int_0^{\bar{s}} y \delta d\bar{s}.$$

Результирующая касательных сил приложена в определённой точке – центре изгиба сечения  $C$ . Расстояния  $x_C$ ,  $y_C$  центра изгиба

от произвольно выбранного полюса  $P_0$  определяются по формулам

$$x_C = \frac{1}{I_x} \int_0^l \bar{S}_x \rho d\bar{s}; \quad y_C = \frac{1}{I_y} \int_0^l \bar{S}_y \rho d\bar{s}, \quad (2.27)$$

где  $l$  – длина средней линии профиля,  $\rho$  – как и ранее, длина перпендикуляра, опущенного из полюса на касательную к контуру.

Покажем, что центр кручения совпадает с центром изгиба. Преобразуем для этого выражение

$$S_{\omega_0 x} = \int_A \omega_0 y dA$$

в первой из формул (2.21) следующим образом. Полагая  $dA = \delta d\bar{s}$ , перейдём к интегрированию по  $\bar{s}$ :

$$S_{\omega_0 x} = \int_0^l \omega_0 y \delta d\bar{s}.$$

Но  $y \delta d\bar{s} = d\bar{S}_x$ , так что

$$S_{\omega_0 x} = \int_0^l \omega_0 d\bar{S}_x.$$

Интегрируя данное выражение по частям, запишем

$$S_{\omega_0 x} = \omega_0 \bar{S}_x \Big|_0^l - \int_0^l \bar{S}_x d\omega_0.$$

Так как  $x$  – центральная ось, величина  $\bar{S}_x$  равна нулю не только при  $\bar{s} = 0$ , но и при  $\bar{s} = l$  – в силу равенств (2.19). Следовательно, внеинтегральный член в последнем равенстве обращается в ноль. Далее,

$$d\omega_0 = \rho ds = -\rho d\bar{s}.$$

Знак минус в последнем равенстве поставлен потому, что принятые положительные направления  $s$  и  $\bar{s}$  противоположны (см. рисунки 2.7 и 2.11).

Таким образом, приходим к соотношению

$$S_{\omega_0 x} = \int_0^l \bar{S}_x \rho d\bar{s},$$

откуда и следует, что определяемое по формуле (2.23) расстояние  $a_x$  от полюса  $P_0$  до центра кручения совпадает с величиной  $x_C$  (2.27). Аналогично устанавливается равенство  $a_y = y_C$ .

## 2.4 ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА СЕКТОРИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для некоторых характерных сечений найдём главную секториальную площадь  $\omega$  и главный секториальный момент инерции  $I_\omega$ .

1. Двутавровый профиль (рисунок 2.12,а). Так как сечение симметрично относительно осей  $x$  и  $y$ , центр кручения  $P$  находится в точке  $O$ . Поместив здесь же точку  $Q$ , получаем эпюру  $\tilde{\omega}$ , представленную на рисунке 2.12,б. Очевидно, что

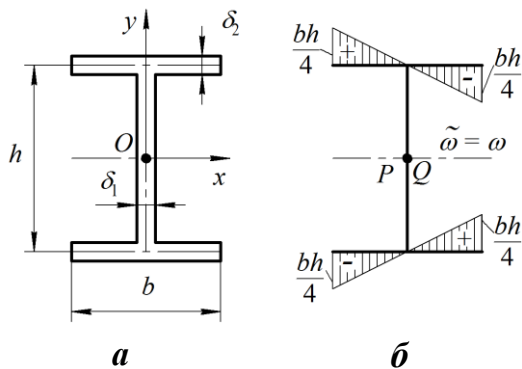


Рисунок 2.12 – Двутавровый профиль

$$\tilde{S}_\omega = \int_A \tilde{\omega} dA = \int_A \omega_0 dA = 0,$$

поэтому константа  $C$  (2.25) равна нулю. Отсюда заключаем, что  $\omega = \tilde{\omega}$ , то есть показанная на рисунке 2.12,б эпюра представляет главную секториальную площадь.

Для вычисления

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = \int_l \omega^2 \delta ds$$

удобно воспользоваться правилом Верещагина перемножения эпюр. Перемножая эпюру  $\omega$  саму на себя, находим

$$I_\omega = 4\delta_2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{bh}{4} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{bh}{4} \right) = \frac{b^3 h^2 \delta_2}{24}.$$

2. Зетобразный профиль (рисунок 2.13,а). Взяв точки  $P_0$  и  $Q$  в середине стенки, получим эпюру  $\omega_0$ , показанную на рисунке 2.13,б. По виду эпюр  $x$  и  $y$ , приведённых на рисунках 2.13,в и г, можно заключить, что  $S_{\omega_0 x}$  и  $S_{\omega_0 y}$  в этом случае равны нулю, то есть  $P_0$  и есть центр кручения  $P$ . Следовательно,  $\tilde{\omega} = \omega_0$ .

Найдём далее  $\tilde{S}_\omega$ :

$$\tilde{S}_\omega = \int_A \tilde{\omega} dA = 2\delta_2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{2} \cdot b \right) = \frac{b^2 h \delta_2}{2}.$$

Площадь сечения

$$A = 2b\delta_2 + h\delta_1 = h\delta_1(1 + 2\xi),$$

где

$$\xi = \frac{b\delta_2}{h\delta_1},$$

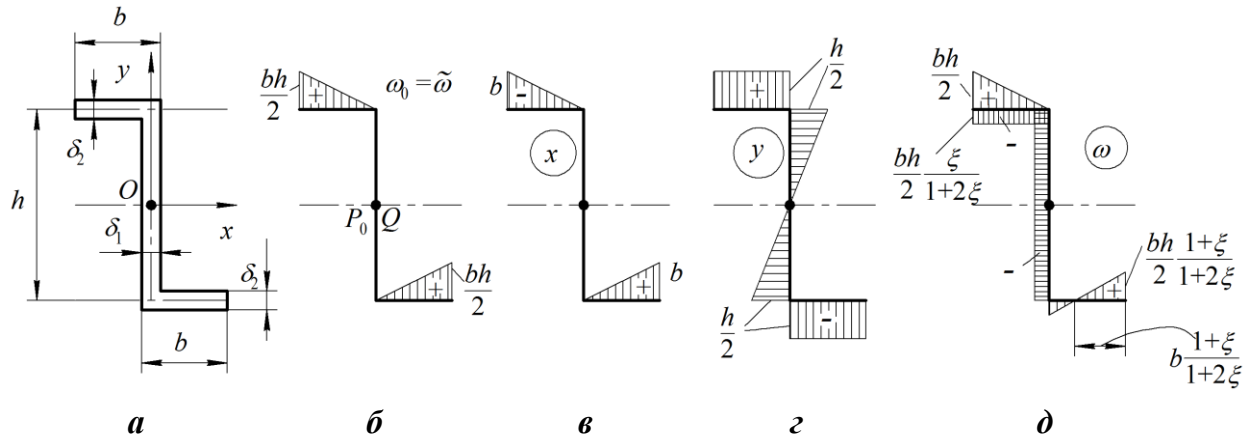


Рисунок 2.13 – Зетобразный профиль

и на основании (2.25) устанавливаем значение  $C$ :

$$C = -\frac{\tilde{S}_\omega}{A} = -\frac{bh}{2} \frac{\xi}{1+2\xi}.$$

Добавляя  $C$  к  $\tilde{\omega}$ , получаем эпюру главной секториальной площади  $\omega$ , рисунок 2.13, д. На верхней полке эпюра  $\omega$  показана в расслоённом виде.

Для нахождения  $I_\omega$  снова применим правило Верещагина, пользуясь расслоённой эпюрой  $\omega$ . Перемножая её саму на себя, запишем

$$I_\omega = 2\delta_2 \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{2} \cdot b \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{bh}{2} - \frac{bh}{2} \frac{\xi}{1+2\xi} \right) - \frac{bh}{2} \frac{\xi}{1+2\xi} \cdot b \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{2} - \frac{bh}{2} \frac{\xi}{1+2\xi} \right) \right] + \\ + \delta_1 \left[ \frac{bh}{2} \frac{\xi}{1+2\xi} \cdot h \cdot \frac{bh}{2} \frac{\xi}{1+2\xi} \right].$$

Выполнив далее необходимые алгебраические преобразования, можно выражение для  $I_\omega$  привести к виду

$$I_\omega = \frac{b^3 h^2 \delta_2}{12} \frac{2 + \xi}{1 + 2\xi}.$$

3. Швеллер (рисунок 2.14, а). Если взять точки  $P_0$  и  $Q$  в середине стенки, получим эпюру  $\omega_0$ , показанную на рисунке 2.14, б. Центр кручения нахо-

дится на оси симметрии. Для определения его расстояния  $a_x$  от точки  $P_0$ , находим  $S_{\omega_0 x}$  по правилу Верещагина (см. эпюру  $y$  на рисунке 2.14, в):

$$S_{\omega_0 x} = \int_A \omega_0 y dA = -2\delta_2 \frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{2} = -\frac{b^2 h^2 \delta_2}{4}.$$

Момент инерции сечения относительно оси  $x$ :

$$I_x = \frac{\delta_1 h^3}{12} + 2b\delta_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^3 \delta_1}{12} (1 + 6\xi),$$

где  $\xi$  имеет то же выражение, что и в предыдущем случае.

Координата центра кручения  $P$  оказывается равной

$$a_x = \frac{S_{\omega_0 x}}{I_x} = -b \frac{3\xi}{1 + 6\xi}.$$

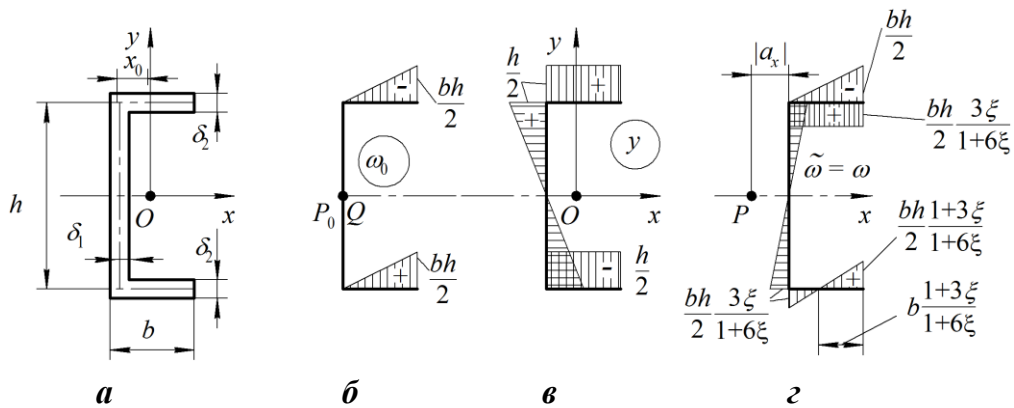


Рисунок 2.14 – Швеллер

Эпюра  $\tilde{\omega}$ , полученная при полюсе  $P$ , дана на рисунке 2.14, з, причём на верхней полке она показана в расслоённой форме. Данная эпюра обратно-симметрична относительно оси  $x$ , поэтому

$$\tilde{S}_\omega = \int_A \tilde{\omega} dA = 0,$$

и постоянная  $C = 0$ . Следовательно, главная секториальная площадь  $\omega = \tilde{\omega}$ .

Наконец, вычисляем главный секториальный момент инерции, пользуясь, как и ранее, правилом Верещагина:

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = 2 \left\{ \delta_2 \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{2} \cdot b \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} \frac{3\xi}{1+6\xi} \right) + \frac{bh}{2} \frac{3\xi}{1+6\xi} \cdot b \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} \frac{3\xi}{1+6\xi} \right) \right] + \delta_1 \frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{2} \frac{3\xi}{1+6\xi} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{bh}{2} \frac{3\xi}{1+6\xi} \right\}.$$

Выполнив очевидные преобразования, можно получить выражение

$$I_{\omega} = \frac{b^3 h^2 \delta_2}{12} \cdot \frac{2 + 3\xi}{1 + 6\xi}.$$

4. Угловые, тавровые и крестообразные сечения (рисунок 2.15).

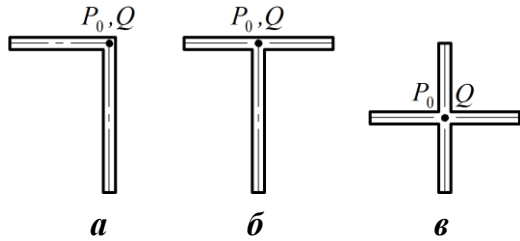


Рисунок 2.15 – Угловое, (а), тавровое (б) и крестообразное (в) сечения

Данные сечения образованы узкими прямоугольниками, средние линии которых сходятся в общей узловой точке. Поместив в ней полюс  $P_0$  и начальную точку  $Q$ , убеждаемся а том, что для подобных сечений секториальная площадь  $\omega_0$  равна нулю в каждой точке контура. Условия равенства нулю характеристик  $S_{\omega}$ ,  $S_{\omega_x}$  и  $S_{\omega_y}$  будут выполнены автоматически при любых осях  $x$ ,  $y$ , то есть главная секториальная площадь также равна нулю для всех точек контура. Центр кручения подобных профилей находится в узловой точке, а главный секториальный момент инерции  $I_{\omega} = 0$ .

5. Коробчатый стержень с продольным разрезом (рисунок 2.16,а). В заключение вернёмся к рассмотренному выше сечению (см. рисунок 2.5). Геометрические параметры сечения:  $h = 60\text{мм}$ ,  $b = 40\text{мм}$ ,  $\delta = 2\text{мм}$ .

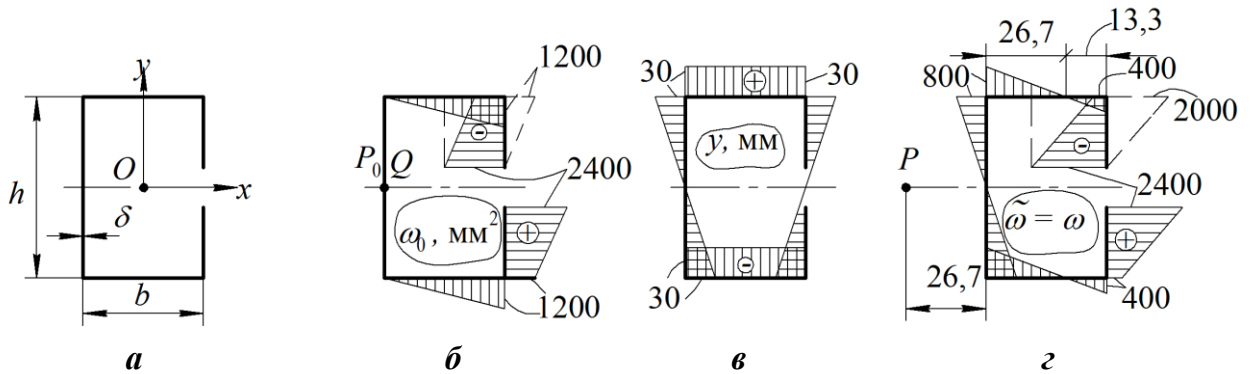


Рисунок 2.16 – Коробчатый стержень с продольным разрезом (размеры в миллиметрах)

На рисунке 2.16,б приведена эпюра  $\omega_0$ , полученная ранее для указанного на рисунке положения точек  $P_0$  и  $Q$ ; пунктиром здесь обозначена схема расслоения эпюры. Используя также эпюру ординат  $y$  (рисунок 2.16,в), по правилу Верещагина вычисляем

$$S_{\omega_0 x} = \int_A \omega_0 y dA =$$

$$= 2\delta \left[ -30 \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot 1200 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{h}{2} \left( -2400 + \frac{2}{3} \cdot 1200 \right) \right] = -5,76 \cdot 10^6 \text{ мм}^5.$$

Момент инерции относительно оси  $x$ :

$$I_x = \int_A y^2 dA = 2\delta \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 30 + 30 \cdot b \cdot 30 \right) = 2,16 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

Координата  $a_x$  центра кручения  $P$  получается равной

$$a_x = \frac{S_{\omega_0 x}}{I_x} = -\frac{5,76 \cdot 10^6}{2,16 \cdot 10^5} = -26,7 \text{ мм}.$$

Эпюра  $\tilde{\omega}$  при полюсе  $P$  показана на рисунке 2.16,б. Так как

$$\tilde{S}_\omega = \int_A \tilde{\omega} dA = 0,$$

величина  $\omega = \tilde{\omega}$ . Перемножив полученную эпюру саму на себя по правилу Верещагина, вычисляем  $I_\omega$ :

$$\begin{aligned} I_\omega = \int_A \omega^2 dA = 2\delta \left[ \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 800 + \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 26,7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 800 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 13,3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 400 - 2400 \cdot \frac{h}{2} \cdot \left( -2400 + \frac{1}{2} \cdot 2000 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot \frac{h}{2} \cdot \left( -2400 + \frac{2}{3} \cdot 2000 \right) \right] = 3,26 \cdot 10^8 \text{ мм}^6. \end{aligned}$$

## 2.5 НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ СТЕСНЁННОМ КРУЧЕНИИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Как уже говорилось, стеснённое кручение возникает тогда, когда деформация изменяется по длине стержня. Теория стеснённого кручения основывается на следующих предположениях. Во-первых, считается, что форма поперечного сечения остаётся при деформации неизменной (в проекции на плоскость, перпендикулярную оси), хотя сечения могут искривляться (депланировать) из-за осевых перемещений. Во-вторых, деформации сдвига в точках срединной поверхности считаются равными нулю. Это условие строго выполняется при свободном кручении, так как касательные напряжения отсутствуют в точках срединной поверхности. Но при стеснённом кручении возникают дополнительные касательные напряжения, постоянные по толщине. Соответственно появятся и деформации сдвига в срединной поверхности. Однако упомянутые напряжения невелики, благодаря чему данными деформациями допустимо пренебречь.

Отнесём стержень к системе координат  $x, y, z$ , причём оси  $x, y$  будем считать *центральными осями инерции*. Обозначим через  $M_k$  крутящий момент в сечении стержня, который в общем случае может быть переменным по длине. Будем, как и ранее, полагать, что положительный крутящий момент в сечении, нормаль к которому направлена в положительную сторону оси  $z$ , действует против часовой стрелки.

При использовании второй гипотезы формула (2.13)

$$u_z = -\alpha\omega$$

остаётся справедливой и при стеснённом кручении, но теперь относительный угол закручивания  $\alpha(z)$  является функцией координаты  $z$ . Продольные волокна получают деформации

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\alpha'\omega;$$

штрихом здесь и далее обозначается дифференцирование по  $z$ . Следовательно, в сечениях стержня возникают нормальные напряжения, которые обозначим через  $\sigma_\omega$ . Считая, что продольные волокна не оказывают давления друг на друга, закон Гука запишем как для одноосного напряжённого состояния. Тогда  $\sigma_\omega = E\varepsilon_z$ , то есть

$$\sigma_\omega = -E\alpha'\omega. \quad (2.28)$$

Напряжения  $\sigma_\omega$  являются самоуравновешенными, поскольку осевая сила и моменты относительно осей  $x, y$  при кручении отсутствуют:

$$N = \int_A \sigma_\omega dA = 0; \quad M_x = \int_A \sigma_\omega y dA = 0; \quad M_y = \int_A \sigma_\omega x dA = 0. \quad (2.29)$$

Если подставить сюда соотношение (2.28), то после сокращения на  $E\alpha'$  получим три равенства

$$\int_A \omega dA = 0; \quad \int_A \omega y dA = 0; \quad \int_A \omega x dA = 0. \quad (2.30)$$

В левых частях здесь находятся секториальные характеристики сечения (2.16) и (2.17), и равенства (2.30) будут удовлетворяться, если  $\omega$  – главная секториальная площадь.

Как видим, нормальные напряжения при стеснённом кручении тонкостенного стержня с открытым контуром изменяются в сечении по тому же закону, что и главная секториальная площадь; по толщине стенки напряжение  $\sigma_\omega$  постоянно.

Для получения расчётных зависимостей умножим обе части равенства (2.28) на  $\omega$  и проинтегрируем по площади сечения:



$$\int_A \sigma_\omega \omega dA = -E\alpha' \int_A \omega^2 dA.$$

Отсюда получаем соотношение

$$E\alpha' = -\frac{B}{I_\omega}, \quad (2.31)$$

где через

$$B = \int_A \sigma_\omega \omega dA \quad (2.32)$$

обозначена величина, называемая *бимоментом*. Она имеет размерность  $\text{Н} \cdot \text{мм}^2$  и представляет собой внутренний силовой фактор, определяющий уровень напряжений  $\sigma_\omega$ . Подстановка равенства (2.31) в соотношение (2.28) приводит к расчётной формуле для нормальных напряжений при стеснённом кручении

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega} \omega. \quad (2.33)$$

Принципиальная особенность стесненного кручения состоит в том, что напряжения  $\sigma_\omega$  образуют самоуравновешенную систему сил. Поэтому бимомент не может быть найден из условия равновесия отсечённой части стержня подобно тому как это делается при вычислении осевой силы или изгибающего момента. Его величина выражается через погонный угол закручивания по формуле

$$B = -EI_\omega \alpha', \quad (2.34)$$

вытекающей из соотношения (2.31).

Заметим, что если в формуле (2.32) вместо  $\sigma_\omega$  взять напряжения, постоянные по сечению или зависящие от координат линейно (то есть напряжения при действии осевой силы или при изгибе стержня), то получим  $B = 0$  в силу условий (2.30). Поэтому в общем случае напряжённого состояния, вызванного совместным действием растяжения, изгиба и стеснённого кручения, справедливы равенства

$$N = \int_A \sigma dA; \quad M_x = \int_A \sigma y dA; \quad M_y = \int_A \sigma x dA; \quad (2.35)$$

$$B = \int_A \sigma \omega dA. \quad (2.36)$$

Если на каком-либо торце приложена нормальная нагрузка, то тем самым на нём задан внешний бимомент, который будем обозначать через  $R$  и определять по формуле

$$R = \int_A \sigma^* \omega dA. \quad (2.37)$$

где  $\sigma^*$  – заданное нормальное напряжение в торцевом сечении. Пусть, в частности, в некоторой точке  $i$  основания приложена сосредоточенная сила  $P_i$ , которую будем считать положительной, если она растягивающая. Полагая, что сила равномерно распределена по малой площадке  $\Delta A$ , будем иметь в пределах этой площадки напряжение  $\sigma^* = P_i/\Delta A$ ; на остальной части торцевого сечения  $\sigma^* = 0$ . По формуле (2.37) имеем

$$R = \frac{P_i}{\Delta A} \omega_i \Delta A = P_i \omega_i. \quad (2.38)$$

Здесь  $\omega_i$  – значение  $\omega$  в той точке, где приложена сила  $P_i$ . Заметим попутно, что поскольку в торцевом сечении  $\sigma = \sigma^*$ , из равенства (2.36) следует, что на торце должно выполняться условие  $B = R$ . Отличие бимомента от нуля означает согласно (2.31) возникновение угла закручивания. Следовательно, если в точке приложения  $P_i$  главная секториальная площадь отлична от нуля, сила  $P_i$  вызовет не только растяжение и изгиб стержня, но также его закручивание. Данный эффект обнаруживается лишь при учёте стеснения.

Примером чисто бимоментной нагрузки является совместное действие двух равных и противоположно направленных моментов  $H$ , прикладываемых в плоскостях полок двутавра, как показано на рисунке 2.17,а. Если напряжение  $\sigma^*$  в полке изменяется по линейному закону, его максимальное значение будет  $6H/(b^2\delta_2)$ , где  $\delta_2$  – толщина полки. Воспользовавшись правилом Верещагина, согласно формуле (2.37) вычисляем значение бимомента (см. рисунок 2.12,б):

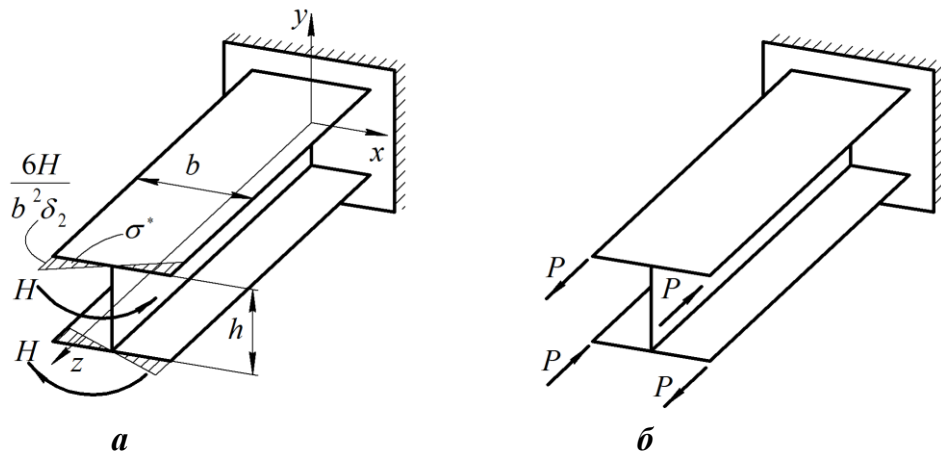


Рисунок 2.17 – Внешние бимоментные нагрузки

$$R = \int_A \sigma^* \omega dA = 4\delta_2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{6H}{b^2 \delta_2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{bh}{4} \right),$$

откуда

$$R = Hh. \quad (2.39)$$

Данный результат не зависит от детального характера распределения напряжений  $\sigma^*$ , создающих моменты  $H$ . Если, например, действуют четыре одинаковые силы  $P$ , как показано на рисунке 2.17,б, то, пользуясь формулой (2.38), находим

$$R = 4P \cdot \frac{bh}{4} = Pbh.$$

Полагая  $Pb = H$ , снова приходим к выражению (2.39). Один вариант создания моментов  $H$  отличается от другого приложением лишь таких самоуравновешенных нормальных напряжений, которые имеют локальный характер и быстро убывают при удалении от данного торца. Заметим, что равенство (2.39) в равной степени справедливо также для швеллера и зетобразного сечения.

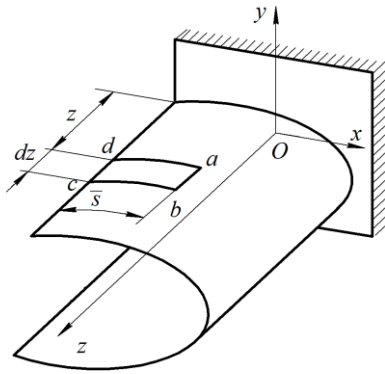
Подобным же образом бимоментная нагрузка может быть приложена и в произвольном сечении стержня. Пусть в некотором сечении действует осевая нагрузка в виде распределённой по контуру погонной силы  $q$  и  $n$  сосредоточенных сил  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ); будем считать их положительными, если они направлены в положительную сторону оси  $z$ . Величину внешнего бимомента в этом сечении определим выражением

$$R = \int_l q \omega ds + \sum_{i=1}^n P_i \omega_i, \quad (2.40)$$

где  $\omega_i$  – величина главной секториальной площади в той точке сечения, где приложена сила  $P_i$ . Интегрирование в формуле (2.40) осуществляется по всей длине  $l$  контура поперечного сечения.

## 2.6 КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ СТЕСНЁННОМ КРУЧЕНИИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

С нормальными напряжениями  $\sigma_\omega$  связаны дополнительные касательные напряжения  $\tau_\omega$ , как это вытекает из условий равновесия. В сечении стержня на расстоянии  $z$  от начала координат возьмём произвольную точку  $a$  (рисунок 2.18). Её положение определим координатой  $\bar{s}$ , отсчитываемой от края сечения. Для нахождения напряжения  $\tau_\omega$  в точке  $a$  выделим элемент стержня  $abcd$ , имеющий в продольном направлении размер  $dz$ .



**Рисунок 2.18 – Элемент тонкостенного стержня**

На рисунке 2.19 показаны силы, действующие на данный элемент. Результирующая напряжений  $\sigma_\omega$ , действующих на грани  $ad$ , обозначена через  $\bar{N}$ . В противоположной грани сила  $\bar{N}$  получает приращение вследствие приращения координаты  $z$ . Оно должно уравновешиваться постоянными по толщине касательными напряжениями в сечении  $ab$ ; их результирующая равна  $\tau_\omega \delta dz$ . Такое же по величине напряжение  $\tau_\omega$  будет согласно закону парности действовать в точке  $a$  поперечного сечения. В площадках  $ad$  и  $bc$  касательные напряжения будут изменяться, обращаясь в ноль в точках  $c$  и  $d$ . Условие равновесия данного элемента в продольном направлении:

В площадках  $ad$  и  $bc$  касательные напряжения будут изменяться, обращаясь в ноль в точках  $c$  и  $d$ . Условие равновесия данного элемента в продольном направлении:

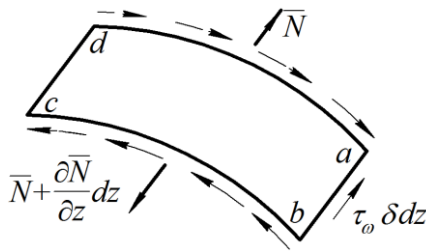
$$\tau_\omega \delta dz = \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} dz,$$

откуда

$$\tau_\omega = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \bar{N}}{\partial z}. \quad (2.41)$$

По определению,

$$\bar{N} = \int_0^{\bar{s}} \sigma_\omega \delta d\bar{s}.$$



**Рисунок 2.19 – К расчёту  $\tau_\omega$**

Если подставить сюда соотношение (2.28), получим

$$\bar{N} = -E\alpha' \int_0^{\bar{s}} \omega \delta d\bar{s}.$$

Обозначим через

$$\bar{S}_\omega = \int_0^{\bar{s}} \omega \delta d\bar{s} \quad (2.42)$$

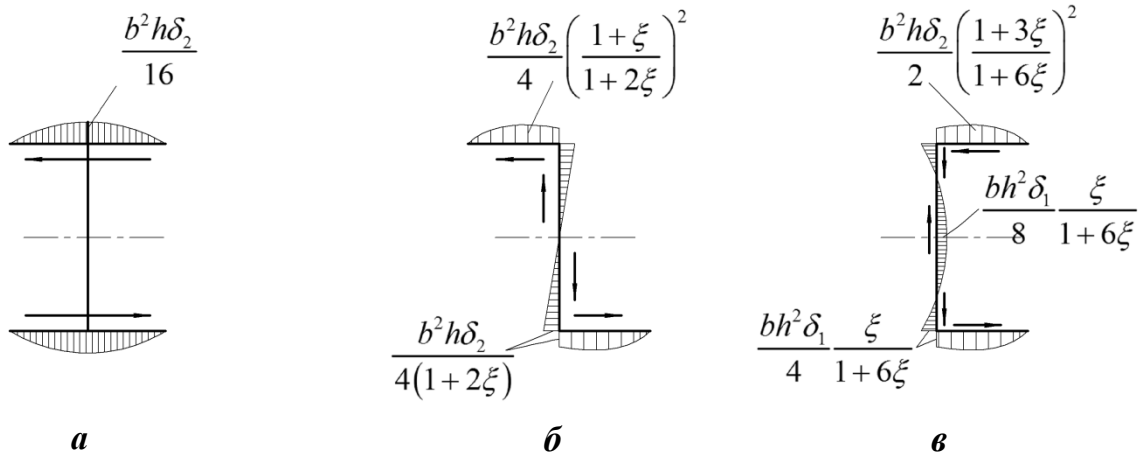
секториально-статический момент отсечённой части сечения (от свободного края до точки  $a$ ), являющийся функцией дуговой координаты  $\bar{s}$ . Выражение для  $\bar{N}$  принимает вид

$$\bar{N} = -E\alpha' \bar{S}_\omega,$$

и из равенства (2.41) находим

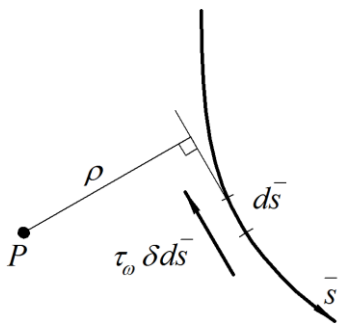
$$\tau_\omega = -\frac{E\alpha''}{\delta} \bar{S}_\omega. \quad (2.43)$$

Последняя зависимость устанавливает, что произведение  $\tau_\omega \delta$  изменяется в сечении по тому же закону, что и  $\bar{S}_\omega$ . Эпюры  $\bar{S}_\omega$  для двутавра, зетобразного сечения и швеллера, вытекающие из данных, приведённых на рисунках 2.12 ... 2.14, показаны на рисунке 2.20, где обозначения совпадают с обозначениями на рисунках 2.12...2.14; параметр  $\xi = b\delta_2/(h\delta_1)$ . Смысл стрелок на эпюрах будет пояснён ниже.



**Рисунок 2.20 – Эпюры  $\bar{S}_\omega$  для таврового (а), зетобразного (б) и швеллерного (в) сечений**

Найдём результирующий момент  $M_\omega$  в сечении, создаваемый напряжениями  $\tau_\omega$  относительно центра кручения (рисунок 2.21). С учётом соотношения (2.43) имеем



**Рисунок 2.21 – К вычислению  $M_\omega$**

$$M_\omega = \int_0^l \rho \tau_\omega \delta d\bar{s} = -E\alpha'' \int_0^l \bar{S}_\omega \rho d\bar{s}.$$

Но  $\rho d\bar{s} = -\rho ds = -d\omega$ , поэтому можно записать

$$M_\omega = E\alpha'' \int_0^l \bar{S}_\omega d\omega.$$

Вспользуемся далее интегрированием по частям:

$$M_\omega = E\alpha'' \left[ \bar{S}_\omega \omega \Big|_0^l - \int_0^l \omega d\bar{S}_\omega \right].$$

Первое слагаемое в скобках обращается в ноль, поскольку  $\bar{S}_\omega$  равно нулю как при  $\bar{s} = 0$ , так и при  $\bar{s} = l$  – в силу условия  $S_\omega = 0$ . Согласно (2.42) имеем  $d\bar{S}_\omega = \omega \delta d\bar{s}$ , так что

$$\int_0^l \omega d\bar{S}_\omega = \int_0^l \omega^2 \delta d\bar{s} = I_\omega.$$

В итоге приходим к соотношению

$$M_\omega = -\alpha'' EI_\omega. \quad (2.44)$$

Выразив отсюда произведение  $E\alpha''$ , из равенства (2.43) получаем расчётную формулу для  $\tau_\omega$ :

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega \bar{S}_\omega}{I_\omega \delta}. \quad (2.45)$$

Заметим, что величина  $\bar{S}_\omega$  определяется формулой (2.42) с точностью до знака, который зависит от того, от какого края отсчитывается координата  $\bar{s}$ . Но в любом случае, если напряжение  $\tau_\omega$ , найденное по формуле (2.45), окажется положительным, то в данной точке сечения оно имеет направление, противоположное направлению возрастания координаты  $\bar{s}$ , как это видно из рисунка 2.19 (имеется в виду сечение  $bc$ , нормаль к которому направлена в положительную сторону оси  $z$ ). Поэтому на эпюрах на рисунке 2.20 не указан знак  $\bar{S}_\omega$ , а вместо этого стрелками показано направление  $\tau_\omega$  при положительной величине  $M_\omega$ . Предполагается, что ось  $z$  и нормаль к сечению направлены от рисунка к наблюдателю.

## 2.7 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО УГЛА ЗАКРУЧИВАНИЯ

Величину  $M_\omega$  следует понимать как ту долю крутящего момента  $M_\kappa$ , которая воспринимается касательными напряжениями  $\tau_\omega$ ; она выражается через угол закручивания равенством (2.44). Другая доля, которую обозначим  $M_\theta$ , воспринимается касательными напряжениями чистого кручения  $\tau_\theta$ . Последние изменяются по толщине стенки профиля линейно и в крайних по толщине точках определяются в соответствии с (2.4) по формуле

$$\tau_\theta = \pm \frac{M_\theta}{I_\kappa} \delta. \quad (2.46)$$

Из соотношения (2.1) вытекает следующая связь  $M_\theta$  с относительным углом закручивания:

$$M_\theta = \alpha GI_\kappa. \quad (2.47)$$

Силовые факторы  $B$ ,  $M_\omega$  и  $M_\theta$  и, следовательно, напряжения  $\sigma_\omega$ ,  $\tau_\omega$  и  $\tau_\theta$  могут быть найдены в каждом сечении, если известна зависимость  $\alpha(z)$ .

Дифференциальное уравнение относительно  $\alpha$  получим, воспользовавшись условием

$$M_{\omega} + M_{\theta} = M_{\kappa}.$$

Крутящий момент  $M_{\kappa}(z)$  будем рассматривать как известную функцию координаты  $z$ , поскольку он может быть найден из условия равновесия отсечённой части стержня.

Подставив сюда зависимости (2.44) и (2.47), получим равенство

$$-\alpha'' EI_{\omega} + \alpha GI_{\kappa} = M_{\kappa}.$$

Данное уравнение можно представить в виде

$$\alpha'' - k^2 \alpha = -\frac{M_{\kappa}}{EI_{\omega}}, \quad (2.48)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{GI_{\kappa}}{EI_{\omega}}}. \quad (2.49)$$

Частными решениями однородного уравнения

$$\alpha'' - k^2 \alpha = 0$$

являются показательные функции  $e^{kz}$  и  $e^{-kz}$ . Вместо них удобнее использовать гиперболические функции  $\operatorname{sh} kz = \frac{1}{2}(e^{kz} - e^{-kz})$  и  $\operatorname{ch} kz = \frac{1}{2}(e^{kz} + e^{-kz})$ . Тогда общее решение уравнения (2.48) запишется в форме

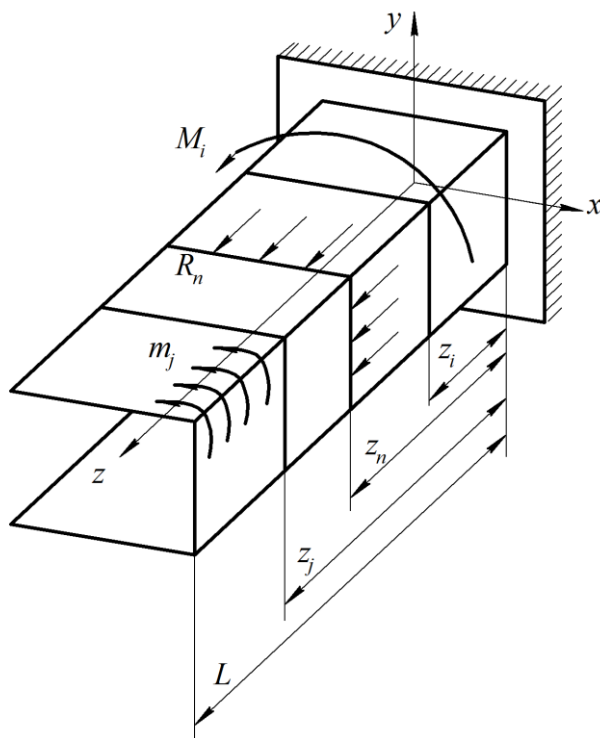
$$\alpha(z) = C_1 \operatorname{sh} kz + C_2 \operatorname{ch} kz + \alpha^*(z), \quad (2.50)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные;  $\alpha^*(z)$  – частное решение неоднородного уравнения (2.48), зависящее от вида правой части. На практике крутящий момент может быть постоянным или зависеть от  $z$  линейно. Ограничиваясь этими случаями, будем иметь

$$\alpha^* = \frac{1}{k^2} \frac{M_{\kappa}}{EI_{\omega}} = \frac{M_{\kappa}}{GI_{\kappa}}. \quad (2.51)$$

Как видим, частным решением является относительный угол закручивания, определяемый по теории свободного кручения.

В общем случае стержень может быть нагружен сосредоточенными  $M_i$  и распределёнными  $m_j$  моментами относительно оси  $z$ , а также бимоментными нагрузками  $R_n$  (рисунок 2.22). Моменты  $M_i$  приложены в сечениях с координатами  $z_i$ , причём,  $0 < z_i \leq L$ ; координаты бимоментных нагрузок  $z_n$  удовлетворяют условию  $0 < z_n < L$ . Распределённый момент  $m_j$  считается



**Рисунок 2.22 – Схема приложения нагрузок**

нагрузок  $R_n$  определяются формулами (2.37) и (2.40). Сечение стержня  $z=0$  считается закреплённым от поворота.

Сечения, в которых приложены нагрузки, разбивают стержень на несколько участков. На каждом из них будет своё выражение для функции  $\alpha(z)$  типа (2.50) со своими произвольными постоянными. Произвольные постоянные должны удовлетворять условиям сопряжения отдельных участков друг с другом, а также граничным условиям на концах стержня. Далее рассматривается метод начальных параметров, позволяющий составить общее выражение для  $\alpha(z)$ , пригодное для любого участка и содержащее лишь две произвольные постоянные.

## 2.8 МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

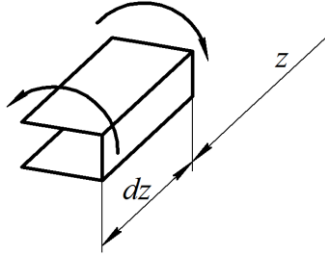
Крутящий момент  $M_k$  и его составляющие  $M_\theta$ ,  $M_\omega$  имеют положительные направления, показанные на рисунке 2.23. Если на участке, примыкающем к основанию  $z=0$ , распределённый момент отсутствует, крутящий момент будет иметь на нём постоянное значение  $M_k = -M_0$ . Согласно соотношению (2.51) будем иметь здесь

$$\alpha^* = -\frac{M_0}{GI_k}. \quad (2.52)$$

равным нулю при  $z < z_j$ , а на участке  $z > z_j$  его интенсивность остаётся постоянной; координаты  $z_j$ , определяющие начала участков действия  $m_j$ , могут принимать значения  $0 \leq z_j < L$ . Момент в начальном сечении  $z=0$  обозначим  $M_0$ . В сечениях  $z=0$  и  $z=L$  могут действовать бимоментные нагрузки  $R_0$  и  $R_L$ . Сосредоточенные и распределённые моменты считаются положительными, если они действуют против часовой стрелки при взгляде с положительного направления оси  $z$ ; знаки бимоментных



В соответствии с (2.50) приходим к следующему выражению для  $\alpha(z)$ :



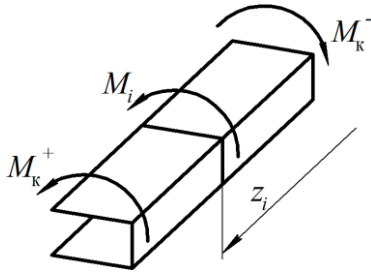
**Рисунок 2.23 – Положительные направления внутренних моментов  $M_k$ ,  $M_\theta$ ,  $M_\omega$**

$$\alpha(z) = C_1 \operatorname{sh} kz + C_2 \operatorname{ch} kz - \frac{M_0}{GI_k}. \quad (2.53)$$

Пусть, далее, при переходе к следующему участку в сечении  $z = z_i$  действует сосредоточенный внешний момент  $M_i$ . Крутящий момент  $M_k$  получит приращение (рисунок 2.24),

$$\Delta M_k = M_k^+ - M_k^- = -M_i,$$

где  $M_k^+ = M_k(z_i + 0)$  и  $M_k^- = M_k(z_i - 0)$  – значения крутящего момента сразу за сечением  $z = z_i$  и непосредственно перед ним.



**Рисунок 2.24 – Приращение крутящего момента**

Приращение  $\Delta\alpha(z)$ , которое получит функция  $\alpha(z)$  будем искать в виде, аналогичном (2.50), заменив только координату  $z$  на  $z - z_i$  и используя в формуле (2.51)  $\Delta M_k$  вместо  $M_k$ . Сменив также обозначения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  на  $A_1$  и  $A_2$ , запишем

$$\Delta\alpha(z) = A_1 \operatorname{sh} k(z - z_i) + A_2 \operatorname{ch} k(z - z_i) - \frac{M_i}{GI_k}.$$

Напряжение  $\sigma_\omega$  должно оставаться непрерывным при  $z = z_i$ . Из соотношений (2.33) и (2.34) вытекает требование непрерывности производной  $\alpha'(z)$ . Следовательно, производная

$$\Delta\alpha'(z) = A_1 k \operatorname{ch} k(z - z_i) + A_2 k \operatorname{sh} k(z - z_i)$$

должна при  $z = z_i$  обращаться в ноль. Отсюда находим  $A_1 = 0$ . Кроме того, перемещение  $u_z$  не может иметь разрыва при  $z = z_i$ , а это, в соответствии с равенством (2.13), означает непрерывность функции  $\alpha(z)$ . Значит, должно быть  $\Delta\alpha = 0$  при  $z = z_i$ . Отсюда вытекает равенство

$$A_2 = \frac{M_i}{GI_k}.$$

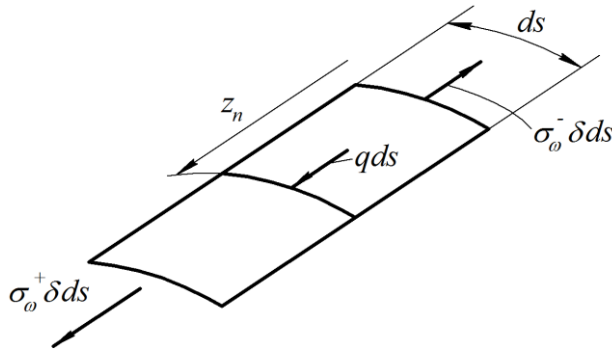
Таким образом, приходим к выражению

$$\Delta\alpha(z) = \frac{M_i}{GI_k} [\operatorname{ch} k(z - z_i) - 1]. \quad (2.54)$$

Подобным же образом находим приращение  $\Delta\alpha(z)$  при переходе через сечение  $z = z_n$ , в котором действует внешний бимомент  $R_n$ . Поскольку в этом случае  $\Delta M_k = 0$ , можно записать

$$\begin{aligned}\Delta\alpha(z) &= A_1 \operatorname{sh} k(z - z_n) + A_2 \operatorname{ch} k(z - z_n); \\ \Delta\alpha'(z) &= A_1 k \operatorname{ch} k(z - z_n) + A_2 k \operatorname{sh} k(z - z_n).\end{aligned}$$

Требование непрерывности  $u_z$  при  $z = z_n$  удовлетворяется при  $A_2 = 0$ . Что касается напряжения  $\sigma_\omega$ , то оно в данном случае претерпевает скачок.



**Рисунок 2.25 – Скачок нормального напряжения при действии внешнего бимоента**

На рисунке 2.25 показан элемент профиля с размером дуги  $ds$  возле сечения  $z = z_n$ . Условие равновесия элемента приводит к равенству

$$\Delta\sigma_\omega \delta ds = -q ds,$$

где  $\Delta\sigma_\omega = \sigma_\omega^+ - \sigma_\omega^-$  – приращение нормального напряжения. Умножив данное равенство на  $\omega$  и проинтегрировав по длине контура, получим

выражение для приращения внутреннего бимоента при  $z = z_n$ :

$$\Delta B = -R_n.$$

Исходя из формулы (2.34) заключаем, что в сечении  $z = z_n$  величина  $\alpha'$  изменяется скачком на величину

$$\Delta\alpha' \Big|_{z=z_n} = -\frac{\Delta B}{EI_\omega} = \frac{R_n}{EI_\omega} = k^2 \frac{R_n}{GI_k}.$$

отсюда устанавливаем значение постоянной  $A_1$ :

$$A_1 = k \frac{R_n}{GI_k}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае приращение  $\Delta\alpha(z)$  составит

$$\Delta\alpha(z) = \frac{R_n}{GI_k} k \operatorname{sh} k(z - z_n). \quad (2.55)$$

Если в сечении  $z = z_j$  начинается участок с распределённым моментом  $m_j$ , перемещение  $u_z$  и напряжение  $\sigma_\omega$  остаются непрерывными. Но крутящий момент получает на этом участке приращение (рисунок 2.26)

$$\Delta M_k = -m_j (z - z_j).$$

Приращение относительного угла закручивания на данном участке записывается в виде

$$\Delta\alpha(z) = A_1 \operatorname{sh} k(z - z_j) + A_2 \operatorname{ch} k(z - z_j) - \frac{m_j}{GI_k}(z - z_j);$$

$$\Delta\alpha'(z) = A_1 k \operatorname{ch} k(z - z_j) + A_2 k \operatorname{sh} k(z - z_j) - \frac{m_j}{GI_k}.$$

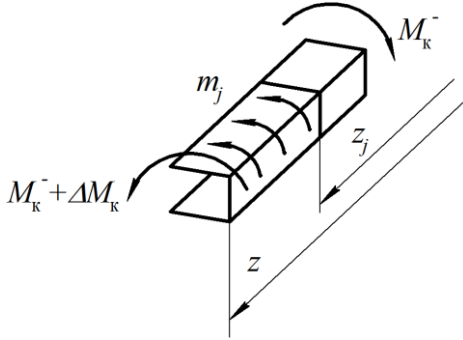


Рисунок 2.26 – Действие распределённого скручивающего момента

Приравнявая при  $z = z_j$  эти выражения нулю, находим

$$A_1 = \frac{m_j}{GI_k k}; \quad A_2 = 0.$$

Следовательно, в данном случае

$$\Delta\alpha(z) = \frac{m_j}{GI_k} \left[ \frac{1}{k} \operatorname{sh} k(z - z_j) - (z - z_j) \right]. \quad (2.56)$$

Суммируя полученные соотношения (2.53)...(2.56), можно выражение для  $\alpha$  представить в общем случае в следующей форме:

$$\alpha(z) = C_1 \operatorname{sh} kz + C_2 \operatorname{ch} kz - \frac{M_0}{GI_k} + \frac{1}{GI_k} \sum_i \tilde{M}_i \left[ \operatorname{ch} k(z - z_i) - (z - z_i)^0 \right] + \frac{1}{GI_k} \sum_j \tilde{m}_j \left[ \frac{1}{k} \operatorname{sh} k(z - z_j) - (z - z_j) \right] + \frac{k}{GI_k} \sum_n \tilde{R}_n \operatorname{sh} k(z - z_n). \quad (2.57)$$

Здесь символ  $\sum_i \tilde{\phantom{x}}$  (или  $\sum_j \tilde{\phantom{x}}$ ,  $\sum_n \tilde{\phantom{x}}$ ) означает, что в сечении с координатой  $z$  должны учитываться лишь те слагаемые, для которых аргумент функций, фигурирующих под знаком суммы, положителен, то есть те, для которых  $z - z_i > 0$  (или, соответственно,  $z - z_j > 0$ ,  $z - z_n > 0$ ). Во избежание неясности используется написание  $(z - z_i)^0$  вместо единицы.

Интегрируя соотношение  $\alpha(z) = \frac{d\theta}{dz}$ , можно найти и угол закручивания  $\theta$ . Учитывая, что  $\theta = 0$  при  $z = 0$ , можно записать

$$\theta(z) = \int_0^z \alpha(z) dz.$$

Подставив сюда выражение (2.57), получим

$$\theta(z) = C_1 \frac{1}{k} (\operatorname{ch} kz - 1) + C_2 \frac{1}{k} \operatorname{sh} kz - \frac{M_0}{GI_k} z +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{GI_{\kappa}} \sum_i \tilde{M}_i \left[ \frac{1}{k} \operatorname{sh} k(z - z_i) - (z - z_i) \right] + \\
& + \frac{1}{GI_{\kappa}} \sum_j \tilde{m}_j \left\{ \frac{1}{k^2} \left[ \operatorname{ch} k(z - z_j) - (z - z_j)^0 \right] - \frac{(z - z_j)^2}{2} \right\} + \\
& + \frac{1}{GI_{\kappa}} \sum_n \tilde{R}_n \left[ \operatorname{ch} k(z - z_n) - (z - z_n)^0 \right]. \tag{2.58}
\end{aligned}$$

Расчётные формулы для внутренних силовых факторов имеют вид

$$\begin{aligned}
M_{\theta}(z) = GI_{\kappa} \alpha(z) = GI_{\kappa} (C_1 \operatorname{sh} kz + C_2 \operatorname{ch} kz) - M_0 + \\
+ \sum_i \tilde{M}_i \left[ \operatorname{ch} k(z - z_i) - (z - z_i)^0 \right] + \sum_j \tilde{m}_j \left[ \frac{1}{k} \operatorname{sh} k(z - z_j) - (z - z_j) \right] + \\
+ k \sum_n \tilde{R}_n \operatorname{sh} k(z - z_n); \tag{2.59}
\end{aligned}$$

$$M_{\omega}(z) = M_{\kappa}(z) - M_{\theta}(z); \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}
B(z) = -EI_{\omega} \alpha'(z) = -\frac{GI_{\kappa}}{k^2} \alpha'(z) = -\frac{GI_{\kappa}}{k} (C_1 \operatorname{ch} kz + C_2 \operatorname{sh} kz) - \\
- \frac{1}{k} \sum_i \tilde{M}_i \operatorname{sh} k(z - z_i) - \\
- \frac{1}{k^2} \sum_j \tilde{m}_j \left[ \operatorname{ch} k(z - z_j) - (z - z_j)^0 \right] - \sum_n \tilde{R}_n \operatorname{ch} k(z - z_n). \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Полученное решение необходимо подчинить граничным условиям. Предположим, что стержень закреплён статически определённым образом, то есть на конце стержня  $z = L$  отсутствует связь, препятствующая свободному повороту этого сечения. Фигурирующий в расчётных формулах момент  $M_0$  может быть в этом случае найден из условия равновесия всего стержня в целом:

$$M_0 = -\sum_{i=1}^{n_1} \tilde{M}_i - \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{m}_j (L - z_j), \tag{2.62}$$

где  $n_1, n_2$  – общее число сосредоточенных моментов и число распределённых нагрузок.

На конце стержня  $z = 0$  может быть задано одно из двух граничных условий. Если данное сечение заделано таким образом, что его деформация невозможна, перемещение  $u_z$  будет равно нулю. Это значит, что согласно (2.13) должно выполняться равенство

$$\alpha(0) = 0. \quad (2.63)$$

Из выражения (2.57) вытекает в этом случае следующее значение постоянной  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{M_0}{GI_k}. \quad (2.64)$$

Если же связи, препятствующие свободной деформации сечения  $z = 0$ , отсутствуют, в этом сечении должно быть задано нормальное напряжение  $\sigma_0^*$ , то есть задан бимомент  $R_0$ . Тогда граничное условие запишется так:

$$B(0) = R_0, \quad (2.65)$$

где  $R_0 = \int_A \sigma_0^* \omega dA$  в соответствии с формулой (2.37).

Согласно (2.61) это равенство приводит к значению постоянной  $C_1$ :

$$C_1 = -\frac{R_0}{EI_\omega k} = -\frac{kR_0}{GI_k}. \quad (2.66)$$

Таким образом, одна из двух постоянных  $C_1, C_2$  определяется из граничного условия на конце стержня  $z = 0$ . Другая должна быть найдена из условия на конце стержня  $z = L$ ; оно имеет вид либо

$$\alpha(L) = 0, \quad (2.67)$$

либо

$$B(L) = R_L, \quad (2.68)$$

где  $R_L = \int_A \sigma_L^* \omega dA$  ( $\sigma_L^*$  – заданное значение нормального напряжения на конце  $z = L$ ).

В том случае, когда сечение стержня  $z = L$  закреплено от поворота, задача будет статически неопределимой; момент  $M_0$  не может быть найден из условия равновесия. Вместо соотношения (2.62) необходимо в дополнение к указанным выше граничным условиям воспользоваться равенством

$$\theta(L) = 0, \quad (2.69)$$

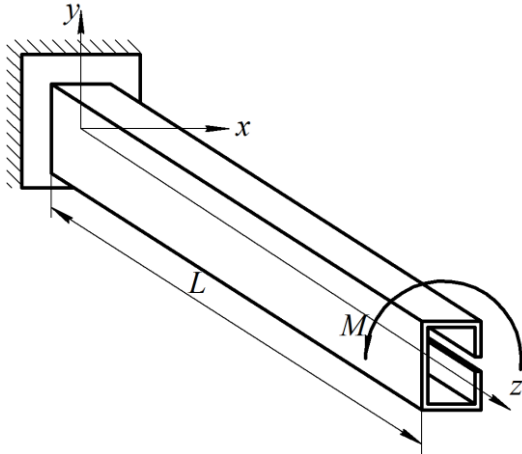
что и служит условием для определения  $M_0$ .

## 2.9 ПРИМЕР РАСЧЁТА СТЕРЖНЯ НА СТЕСНЁННОЕ КРУЧЕНИЕ

Пусть стальной стержень, сечение которого рассматривалось выше (см. рисунок 2.5), на конце  $z = 0$  заделан так, чтобы исключить деформацию, а на другом нагружен скручивающим моментом  $M = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}$  (рисунок 2.27). Длина стержня  $L = 1 \text{ м}$ ; размеры поперечного сечения  $h = 60 \text{ мм}$ ;  $b = 40 \text{ мм}$ ,

$\delta = 2\text{ мм}$ . Нормальный модуль упругости  $E = 2,03 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , модуль сдвига  $G = 7,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Геометрические характеристики сечения найдены ранее:  $I_k = 533 \text{ мм}^4$ ;  $I_\omega = 3,26 \cdot 10^8 \text{ мм}^6$ . Параметр  $k$  имеет значение

$$k = \sqrt{\frac{GI_k}{EI_\omega}} = \sqrt{\frac{7,8 \cdot 10^4 \cdot 533}{2,03 \cdot 10^5 \cdot 3,26 \cdot 10^8}} = 0,7926 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-1}.$$



**Рисунок 2.27 – Пример расчёта стержня при стеснённом кручении**

Безразмерный параметр  $kL = 0,7926$ , а гиперболические функции аргумента  $kL$ :

$$\begin{aligned} \text{sh } kL &= 0,8782; \quad \text{ch } kL = 1,331, \\ \text{th } kL &= 0,6599. \end{aligned}$$

Учитывая, что в заделке момент  $M_0 = -M$ , будем иметь согласно (2.57) следующее выражение для относительно-го угла закручивания:

$$\alpha(z) = C_1 \text{sh } kz + C_2 \text{ch } kz + \frac{M}{GI_k}.$$

Поскольку  $u_z(0) = 0$ , граничное условие при  $z = 0$  сводится к требованию  $\alpha(0) = 0$ . Следовательно, должно быть

$$C_2 = -\frac{M}{GI_k}.$$

На другом конце бимомент равен нулю, то есть при  $z = L$  производная

$$\alpha'(z) = C_1 k \text{ch } kz + C_2 k \text{sh } kz$$

должна обращаться в нуль. Это приводит к равенству

$$C_1 k \text{ch } kL + C_2 k \text{sh } kL = 0,$$

из которого находим

$$C_1 = -C_2 \text{th } kL = \frac{M}{GI_k} \text{th } kL.$$

Таким образом, получаем

$$\alpha(z) = \frac{M}{GI_k} (\text{th } kL \text{sh } kz - \text{ch } kz + 1).$$

Принимая во внимание равенство

$$\text{ch } kL \text{ch } kz - \text{sh } kL \text{sh } kz = \text{ch } k(L - z),$$

выражение для  $\alpha(z)$  можно привести к виду

$$\alpha(z) = \frac{M}{GI_k} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} k(L-z)}{\operatorname{ch} kL} \right].$$

При этом производная

$$\alpha'(z) = \frac{Mk \operatorname{sh} k(L-z)}{GI_k \operatorname{ch} kL}.$$

Поскольку

$$\int_0^z \operatorname{ch} k(L-z) dz = -\frac{1}{k} \operatorname{sh} k(L-z) \Big|_0^z = -\frac{1}{k} [\operatorname{sh} k(L-z) - \operatorname{sh} kL],$$

угол поворота сечений оказывается равным

$$\theta(z) = \int_0^z \alpha(z) dz = \frac{Mk}{GI_k} \left[ z + \frac{\operatorname{sh} k(L-z)}{k \operatorname{ch} kL} - \frac{\operatorname{th} kL}{k} \right],$$

причём,  $\theta(0) = 0$ ;  $\theta(L) = \frac{Mk}{GI_k} \left( 1 - \frac{\operatorname{th} kL}{kL} \right)$ .

Зависимости внутренних силовых факторов от  $z$  имеют вид

$$M_\theta(z) = GI_k \alpha(z) = M \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} k(L-z)}{\operatorname{ch} kL} \right];$$

$$M_\theta(0) = 0; \quad M_\theta(L) = M \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} kL} \right);$$

$$M_\omega(z) = M_k(z) - M_\theta(z) = M - M_\theta(z) = M \frac{\operatorname{ch} k(L-z)}{\operatorname{ch} kL};$$

$$M_\omega(0) = M; \quad M_\omega(L) = M \frac{1}{\operatorname{ch} kL};$$

$$B(z) = -\frac{GI_k}{k^2} \alpha'(z) = -M \frac{\operatorname{sh} k(L-z)}{k \operatorname{ch} kL}.$$

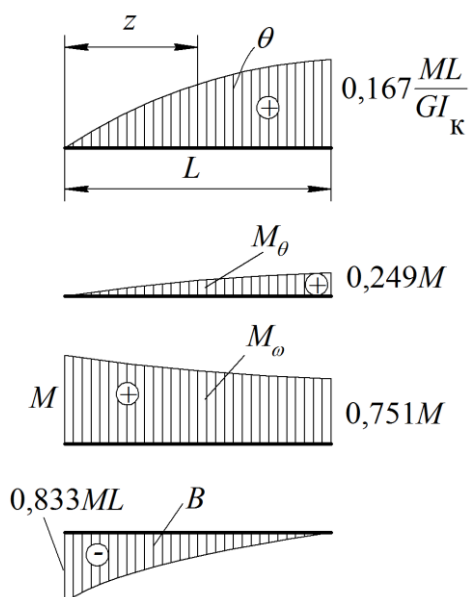
$$B(0) = -ML \frac{\operatorname{th} kL}{kL}; \quad B(L) = 0.$$

Данные зависимости показаны в виде эпюр на рисунке 2.28.

Как видим, максимальный угол закручивания

$$\theta_{\max} = 0,167 \frac{ML}{GI_k} = 0,167 \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{7,8 \cdot 10^4 \cdot 533} = 0,201 \text{ рад} \approx 11,5^\circ,$$

что приблизительно в шесть раз меньше, чем в случае свободного кручения ( $68,9^\circ$ ).



**Рисунок 2.28 – Распределение расчётных величин по длине стержня**

Максимальная величина  $M_\theta$  составляет  $0,249M$ , то есть  $M_{\theta_{\max}} = 0,249 \cdot 50 = 12,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Наибольшее по абсолютной величине касательное напряжение  $\tau_\theta$  возникает на свободном конце:

$$\tau_{\theta_{\max}} = \frac{M_{\theta_{\max}}}{I_K} \delta = \frac{12,5 \cdot 10^3 \cdot 2}{533} = 46,9 \text{ МПа}.$$

Оно примерно в четыре раза меньше, чем при свободном кручении ( $188 \text{ МПа}$ ).

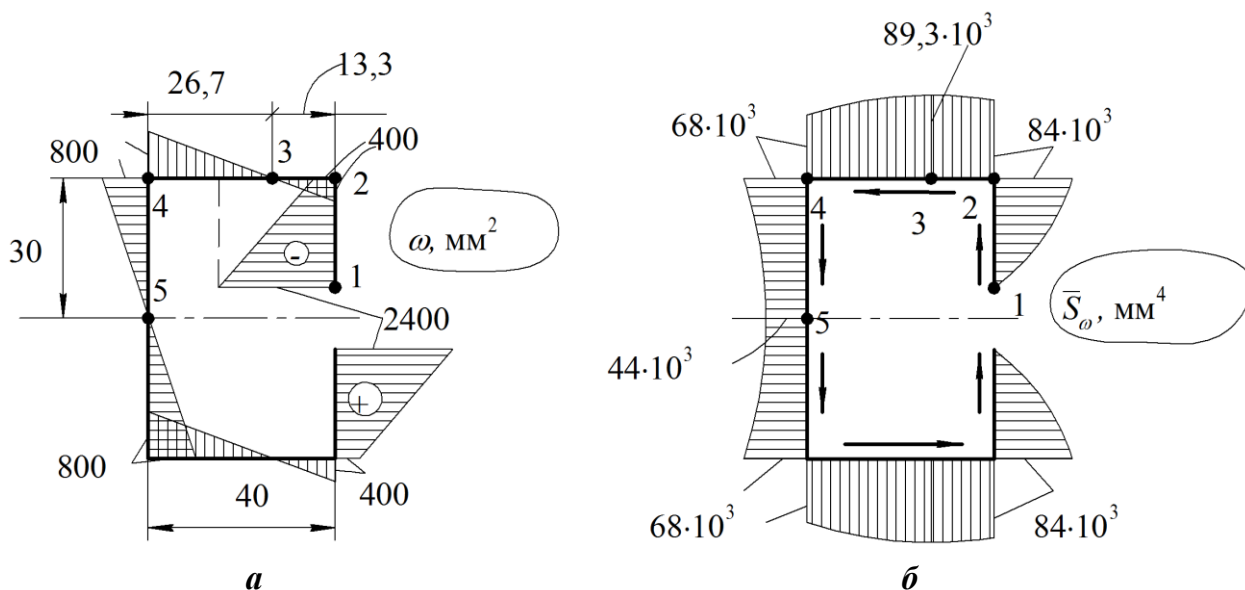
В этом же сечении момент  $M_\omega$  равен  $0,751M$ , то есть

$$M_\omega = 0,751 \cdot 50 = 37,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для нахождения составляющей  $\tau_\omega$  необходимо иметь секториальный статический момент отсечённой части сечения  $\bar{S}_\omega$  (2.42):

$$\bar{S}_\omega = \int_0^{\bar{s}} \omega \delta d\bar{s}.$$

На рисунке 2.29,а приведена эпюра главной секториальной площади  $\omega$  (см. рисунок 2.16,з), а на рисунке 2.29,б показана эпюра  $\bar{S}_\omega$ ; размеры указаны в миллиметрах; стрелки показывают направления  $\tau_\omega$ .



**Рисунок 2.29 – Главная секториальная площадь и секториально-статический момент отсечённой части сечения**

Числовые значения  $\bar{S}_\omega$  получены следующим образом:



- в точке 2  $S_{\omega} = \frac{2400 + 400}{2} \cdot 30 \cdot \delta = 84 \cdot 10^3 \text{ мм}^4$ ;
- в точке 3  $S_{\omega} = 84 \cdot 10^3 + \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 13,3 \cdot \delta = 89,3 \cdot 10^3 \text{ мм}^4$ ;
- в точке 4  $S_{\omega} = 89,3 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 26,7 \delta = 68 \cdot 10^3 \text{ мм}^4$ ;
- в точке 5  $S_{\omega} = 68 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 30 \delta = 44 \cdot 10^3 \text{ мм}^4$ .

В сечении  $z = L$  наибольшее по абсолютной величине напряжение  $\tau_{\omega}$  составляет

$$\tau_{\omega} = \frac{M_{\omega} \bar{S}_{\omega \max}}{I_{\omega} \delta} = \frac{37,6 \cdot 10^3 \cdot 89,3 \cdot 10^3}{3,26 \cdot 10^8 \cdot 2} = 5,1 \text{ МПа},$$

где  $\bar{S}_{\omega \max} = 89,3 \cdot 10^3 \text{ мм}^4$  – наибольшее значение  $\bar{S}_{\omega}$ . В сечении  $z = 0$  наибольшее значение  $\tau_{\omega}$  равно 6,85 МПа. Как видим, величина  $\tau_{\omega}$  по существу на порядок меньше напряжения  $\tau_{\theta}$ .

Наибольшее суммарное касательное напряжение возникает в сечении  $z = L$  и равно по абсолютной величине сумме

$$\tau_{\max} = 46,9 + 5,1 = 52 \text{ МПа}.$$

Максимальное нормальное напряжение  $\sigma_{\omega}$  действует в заделке, где абсолютная величина бимоента имеет наибольшее значение

$$B_{\max} = 0,833ML = 0,833 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 = 41,6 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

Абсолютное значение наибольшего напряжения будет

$$\sigma_{\omega \max} = \frac{B_{\max}}{I_{\omega}} \omega_{\max} = \frac{41,6 \cdot 10^6}{3,26 \cdot 10^8} \cdot 2400 = 306 \text{ МПа}.$$

Таким образом, напряжённно-деформированное состояние стержня при стеснённом кручении коренным образом отличается от того, которое возникает при свободном кручении. Существенно возрастает жёсткость стержня; наиболее значительными оказываются нормальные, а не касательные напряжения. Касательные напряжения  $\tau_{\omega}$  сами по себе не велики, но их роль в восприятии крутящего момента весьма значительна, так как результирующие напряжений  $\tau_{\omega}$  в полках и стенках имеют плечи порядка размеров поперечного сечения, как это видно из рисунка 2.29,б. Напряжения же  $\tau_{\theta}$  действуют с плечом, имеющим порядок толщины стенки профиля (см. рисунок 2.4).

## 2.10 ПРОТИВОКРУТИЛЬНЫЕ СВЯЗИ

Под противокрутильной понимается такая связь, которая, будучи установлена в каком-либо сечении стержня, устраняет депланацию этого сечения. Примером может служить трубка, вставленная между полками швеллера и соединённая с ними своими основаниями посредством сварки или пайки

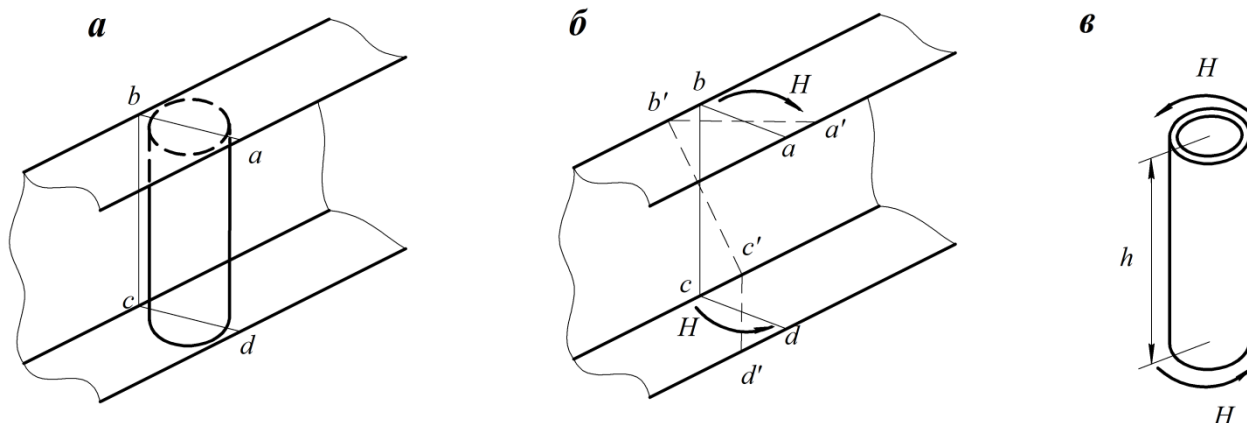


Рисунок 2.30 – Пример противокрутильной связи

(рисунок 2.30,а). Если бы трубка отсутствовала, сечение  $abcd$  при кручении стержня испытало бы депланацию, как показано штриховой линией на рисунке 2.30,б. Волокна  $ab$  и  $cd$  повернулись бы относительно друг друга в плоскостях своих полок, заняв положение  $a'b'$  и  $c'd'$ . Трубка благодаря своей малой длине имеет высокую крутильную жёсткость и делает этот взаимный поворот невозможным, так что данное сечение будет сохранять плоскую форму.

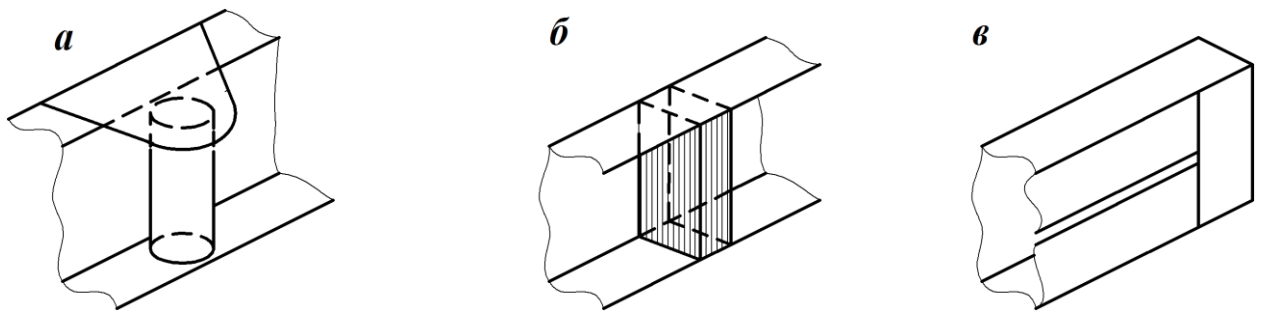
Взаимодействие трубки со стержнем сводится к парам в плоскостях оснований трубки, обозначенным на рисунках 2.30,б,в буквой  $H$ . Совокупные действия на стержень двух равных и противоположно направленных пар означает приложение бимоментной нагрузки величиной

$$R^* = Hh,$$

где  $h$  – высота сечения швеллера.

Противокрутильные связи могут устанавливаться на стержнях и с иной формой сечения, как это, например показано на рисунке 2.31,а для зетобразного сечения. Конструктивно противокрутильная связь не обязательно должна быть выполнена в виде трубки. Возможны и другие варианты – например, в виде замкнутой сварной коробки (рисунок 2.31,б) с достаточной жёсткостью на кручение.

С помощью противокрутильных связей можно существенно повысить жёсткость стержня при кручении. Закрепление торцевых сечений от депланации трудно осуществить на практике. В то же время такие граничные



**Рисунок 2.31 – Конструктивные варианты противокрутильных связей**

условия можно реализовать, оставляя концы свободными, но вводя в непосредственной близости от них противокрутильные связи. Подобная связь в виде приваренной накладки показана на рисунке 2.31,в применительно к стержню, рассмотренному выше в качестве примера расчёта. Таким образом, наличие противокрутильных связей на концах стержня может быть в расчёте учтено просто соответствующим заданием граничных условий.

### 3 ОБЩАЯ ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

#### 3.1 ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

Пусть произвольное тело (рисунок 3.1), отнесённое к декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , нагружено объёмными и поверхностными силами. Объёмные силы  $\vec{R}$  с компонентами  $R_i$  действуют на каждую частицу в объёме тела  $\tau$ ; они рассчитываются на единицу объёму. Поверхностные силы  $\vec{p}$  с компонентами  $p_i$  распределены по поверхности  $\omega$ , ограничивающей тело, и рассчитываются на единицу поверхности. Сосредоточенные силы могут рассматриваться как предельный случай поверхностной нагрузки, приложенной на малом участке поверхности тела.

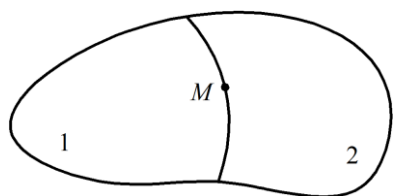


Рисунок 3.1 – Произвольное тело

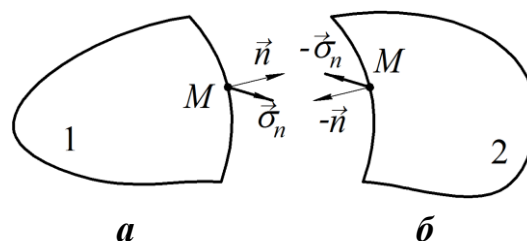


Рисунок 3.2 – Взаимодействие двух частей тела в точке M

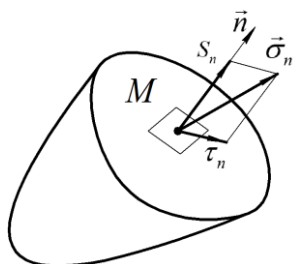
Возьмём в теле произвольную точку  $M$  и проведём проходящую через неё секущую поверхность, которая делит тело на две части 1 и 2. Отбросим часть 2, заменив её действие на часть 1 соответствующими силами (рисунок 3.2,а). Пусть  $\vec{n}$  – вектор единичной нормали к секущей поверхности в точке  $M$ . Через малую площадку  $\Delta A$ , выделенную в окрестности точки  $M$ , на рассматриваемую часть тела передаётся со стороны отброшенной части сила, вектор которой обозначим  $\Delta \vec{F}_n$ . Вектором напряжения называется предел отношения

$$\vec{\sigma}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta A}.$$

Нижний индекс  $n$  в обозначении  $\vec{\sigma}_n$  подчёркивает, что данная величина зависит от ориентации площадки, выделенной в точке  $M$ . В той же точке  $M$ , но на отброшенной части 2 тела в соответствии с принципом равенства действия и противодействия будет действовать вектор напряжения равный  $-\vec{\sigma}_n$  (рисунок 3.2,б). Если под  $\vec{n}$  всегда понимать вектор внешней нормали, то есть нормали, выходящей из тела, то можно записать равенство

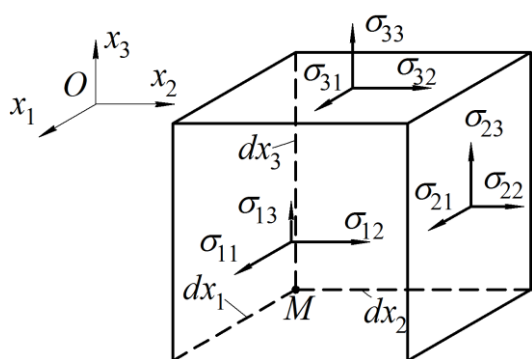
$$\vec{\sigma}_{-n} = -\vec{\sigma}_n. \quad (3.1)$$

Вектор напряжения в площадке с нормалью  $\vec{n}$  можно разложить на две составляющие, одна из которых (нормальное напряжение  $S_n$ ) есть его проекция на нормаль, а другая (касательное напряжение  $\tau_n$ ) – проекция на плоскость площадки



**Рисунок 3.3 – Нормальное и касательное напряжения**

Если площадка параллельна одной из координатных плоскостей, то касательное напряжение в ней можно в свою очередь разложить на составляющие по осям, образующим эту плоскость. В трёх взаимно-перпендикулярных площадках, выделенных в окрестности точки  $M$  и параллельных координатным плоскостям, будем иметь девять компонент  $\sigma_{ij}$  трёх векторов напряжений, как показано на рисунке 3.4.

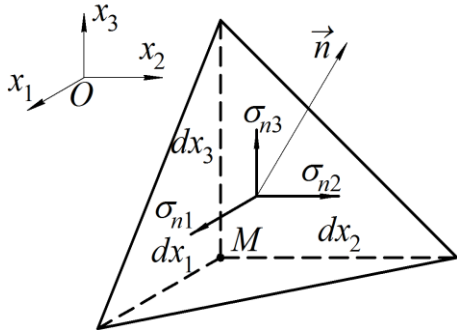


**Рисунок 3.4 – Составляющие напряжений в декартовых координатах**

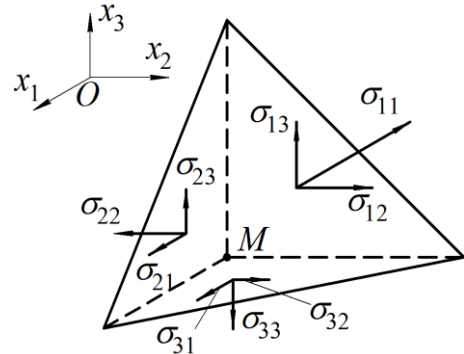
В обозначении  $\sigma_{ij}$  первый индекс указывает ориентацию площадки (то есть координатную ось, которой параллельна нормаль к площадке), а второй индекс обозначает ось, на которую проектируется вектор напряжения в этой площадке. Показанные на рисунке 3.4 направления напряжений будем считать положительными. При этом в противоположных гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в точке  $M$ , положительные напряжения имеют противоположные направления, как это вытекает из равенства (3.1). Таким образом, будем руководствоваться следующим правилом знаков. Если внешняя нормаль к площадке направлена в положительную сторону координатной оси, то положительные напряжения в этой площадке действуют также в положительных направлениях соответствующих осей. Если же направление внешней нормали к площадке противоположно положительному направлению оси, то и положительные напряжения в такой площадке действуют в отрицательных направлениях соответствующих осей. Согласно этому правилу, в частности, положительным считается растягивающее нормальное напряжение.

Зная  $\sigma_{ij}$ , можно найти напряжения в произвольной наклонной площадке в данной точке. Чтобы в этом убедиться, нужно воспользоваться условиями равновесия элементарного тетраэдра, показанного на рисунке 3.5. Три

грани тетраэдра параллельны координатным плоскостям, а ориентация четвертой определяется нормальным единичным вектором  $\vec{n}$ , компоненты которого (то есть направляющие косинусы) обозначим  $n_1, n_2, n_3$ . Компоненты векторов напряжений в гранях тетраэдра показаны на рисунках 3.5 и 3.6.



**Рисунок 3.5 – Компоненты вектора напряжений в наклонной площадке**



**Рисунок 3.6 – Компоненты вектора напряжений на гранях, параллельных координатным плоскостям**

Если площадь наклонной грани равна  $dA$ , то площади граней, перпендикулярных осям  $x_1, x_2, x_3$ , будут соответственно

$$dA_1 = n_1 dA; \quad dA_2 = n_2 dA; \quad dA_3 = n_3 dA.$$

Условие равновесия тетраэдра в проекции на ось  $x_i$  запишется так:

$$-\sigma_{1i} dA_1 - \sigma_{2i} dA_2 - \sigma_{3i} dA_3 + \sigma_{ni} dA + R_i d\tau = 0.$$

Здесь  $d\tau = \frac{1}{3} h dA$  – объём тетраэдра ( $h$  – расстояние от точки  $M$  до наклонной площадки).

Если разделить это равенство на  $dA$  и устремить  $h$  к нулю, получим

$$-\sigma_{1i} n_1 - \sigma_{2i} n_2 - \sigma_{3i} n_3 + \sigma_{ni} = 0,$$

откуда вытекает равенство

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ji} n_j. \quad (3.2)$$

Данное соотношение устанавливает значения компонент вектора напряжения в наклонной площадке. На основании обратного тензорного признака заключаем, что компоненты  $\sigma_{ij}$  образуют инвариантную величину – тензор второго ранга, называемый *тензором напряжений*. Его можно представить в виде следующей таблички:

$$T_\sigma = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь в каждой строке содержатся компоненты тензора напряжений, действующие на одной из площадок, а в каждом столбце – действующие параллельно одной из осей.

Если воспользоваться условиями равновесия моментов для элементарного тетраэдра, то можно установить равенства

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (3.3)$$

называемые законом парности касательных напряжений и показывающие, что  $(\sigma_{ij})$  – симметричный тензор.

Имея компоненты  $\sigma_{ni}$  вектора напряжений в наклонной площадке, можно найти его модуль

$$\sigma_n = |\vec{\sigma}_n| = \sqrt{\sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + \sigma_{n3}^2}. \quad (3.4)$$

Нормальное напряжение в наклонной площадке получим, спроектировав компоненты  $\sigma_{ni}$  на направление нормали:

$$S_n = \sigma_{n1}n_1 + \sigma_{n2}n_2 + \sigma_{n3}n_3 = \sigma_{ni}n_i. \quad (3.5)$$

Учитывая равенство (3.2), выражение для  $S_n$  может быть представлено в виде

$$S_n = \sigma_{ij}n_in_j. \quad (3.6)$$

Поскольку  $\sigma_n^2 = S_n^2 + \tau_n^2$ , касательное напряжение в наклонной площадке можно вычислить по формуле

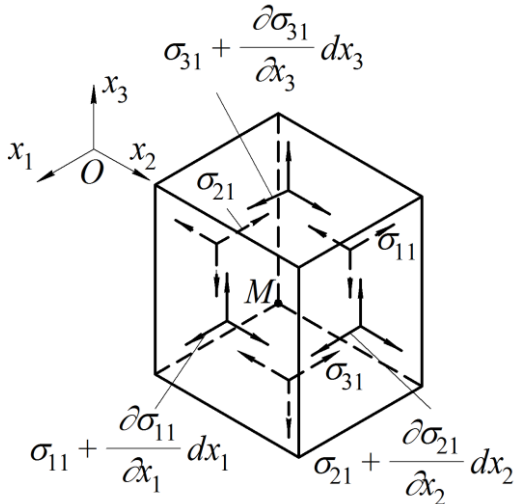
$$\tau_n = \sqrt{\sigma_n^2 - S_n^2}. \quad (3.7)$$

### 3.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И СТАТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  связаны между собой тремя дифференциальными зависимостями. Для их вывода запишем условия равновесия прямоугольного параллелепипеда, имеющего размеры  $dx_1$ ,  $dx_2$ ,  $dx_3$ . На рисунке 3.7 показаны напряжения в гранях параллелепипеда; обозначения даны лишь для тех компонент, которые действуют в направлении оси  $x_1$ . На гранях, отстоящих от точки  $M$  на расстояния  $dx_1$ ,  $dx_2$  или  $dx_3$ , напряжения имеют связанные с этим приращения относительно напряжений в противоположных гранях. Если умножить отмеченные на рисунке напряжения на площади соответствующих граней и учесть действие составляющей  $R_1$  объ-

ёмной силы, то можно записать следующее условие равновесия элементарного объёма в направлении оси  $x_1$ :

$$\left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 - \sigma_{21} dx_1 dx_3 + \\ + \left( \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + R_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$



**Рисунок 3.7 – К выводу дифференциальных уравнений равновесия**

После приведения подобных членов и сокращения на произведение дифференциалов получим одну из искомых зависимостей. Аналогично выводим и две другие. В итоге имеем три *дифференциальных уравнения равновесия*

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + R_1 = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + R_2 = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + R_3 = 0. \quad (3.8)$$

С использованием тензорных обозначений данные соотношения могут быть представлены одним равенством

$$\sigma_{ji,j} + R_i = 0, \quad (3.9)$$

где индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате.

Заметим, что условия равновесия моментов приводят снова к соотношениям закона парности касательных напряжений (3.3).

Дифференциальные уравнения равновесия (3.9) должны выполняться в любой точке в объёме тела. На границе тела также должно быть равновесие между внутренними напряжениями и поверхностными нагрузками. Необходимые соотношения можно получить, если представить, что рассмотренный выше элементарный тетраэдр (см. рисунок 1.5) находится у поверхности  $\omega$ , ограничивающей тело, причём наклонная грань принадлежит внешней поверхности. Тогда компоненты  $\sigma_{ni}$  вектора напряжений в наклонной площадке нужно заменить компонентами  $p_i$  внешней нагрузки, действующей на поверхности  $\omega$ . Вместо соотношения (3.2) будем иметь равенство

$$\sigma_{ji} n_j = p_i \quad \text{на } \omega, \quad (3.10)$$



где  $n_j$  – направляющие косинусы нормали к поверхности  $\omega$ .

Равенство (3.10) устанавливает искомую связь между напряжениями внутри тела и поверхностными силами и включает три соотношения, которые называются статическими условиями на поверхности тела:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 &= p_1; \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 &= p_2; \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= p_3.\end{aligned}\tag{3.11}$$

### 3.3 ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Возьмём выделенный ранее элементарный параллелепипед (см. рисунок 3.4) и начнём мысленно вращать его вокруг точки  $M$ . Значения компонент тензора напряжений на его гранях будут изменяться. Существует хотя бы одно такое положение параллелепипеда, при котором касательные напряжения на его гранях обращаются в ноль, а нормальные напряжения принимают экстремальные значения. Соответствующие оси координат в данной точке называются *главными осями тензора напряжений*. Компоненты напряжений в этих осях обозначают  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и называют *главными напряжениями* (рисунок 3.8). Нумеровать главные напряжения принято так, чтобы выполнялись неравенства  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

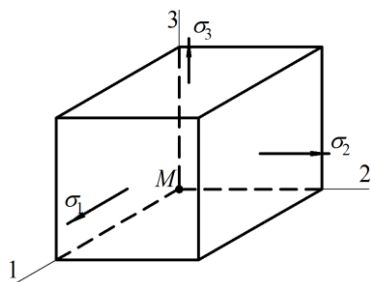


Рисунок 3.8 – Главные напряжения

Для нахождения главных напряжений обратимся к равенствам (3.2), выражающим компоненты вектора напряжений в наклонной площадке через компоненты тензора напряжений:

Для нахождения главных напряжений обратимся к равенствам (3.2), выражающим компоненты вектора напряжений в наклонной площадке через компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ji}n_j.$$

Если наклонная площадка является главной (рисунок 3.9), то вектор напряжения в ней, который обозначим  $\sigma$ , будет по определению направлен по нормали к ней, так что его компонентами будут проекции на координатные оси  $\sigma n_i$ . Подставив их вместо  $\sigma_{ni}$  в последнее равенство, получим

$$\sigma n_i = \sigma_{ji}n_j.$$

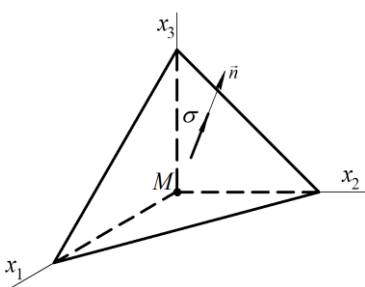


Рисунок 3.9 – Вектор напряжения в главной площадке

Данное соотношение в развёрнутом виде представляет однородную систему уравнений относительно направляющих косинусов нормали к главной площадке:

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \sigma)n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 &= 0; \\ \sigma_{12}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)n_2 + \sigma_{32}n_3 &= 0; \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)n_3 &= 0.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Тривиальное решение системы  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$  лишено смысла, поскольку должно выполняться равенство

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (3.13)$$

Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (3.14)$$

Раскрыв определитель, приходим к кубическому уравнению относительно  $\sigma$  вида

$$\sigma^3 - I_1(\sigma)\sigma^2 + I_2(\sigma)\sigma - I_3(\sigma) = 0, \quad (3.15)$$

коэффициенты которого выражаются через  $\sigma_{ij}$  по формулам

$$\begin{aligned}I_1(\sigma) &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; \\ I_2(\sigma) &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2; \\ I_3(\sigma) &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Можно показать, что все три корня уравнения (3.15) являются вещественными числами. Их величина не зависит от ориентации координатных осей  $x_1, x_2, x_3$ . Отсюда следует, что при повороте осей коэффициенты уравнения  $I_1(\sigma), I_2(\sigma), I_3(\sigma)$  должны оставаться неизменными. Поэтому их называют *инвариантами тензора напряжений* – первым, вторым и третьим соответственно.

Если условие (3.14) выполнено, то система уравнений (3.15) будет линейно зависимой. Отбросив одно из уравнений и добавив к оставшимся двум равенство (3.13), получим три уравнения, из которых можно найти направляющие косинусы нормали к площадке с напряжением  $\sigma_1, \sigma_2$  или  $\sigma_3$ .

В главных осях выражения (3.16) для инвариантов тензора напряжений имеют более простой вид

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2(\sigma) &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ I_3(\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отметим, что любая комбинация  $I_1(\sigma)$ ,  $I_2(\sigma)$ ,  $I_3(\sigma)$  также будет инвариантной величиной. В некоторых приложениях используются так называемые линейный, квадратичный и кубический инварианты тензора напряжений

$$\begin{aligned} J_1(\sigma) &= \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; \\ J_2(\sigma) &= \sigma_{ij}\sigma_{ij} = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{31}^2; \\ J_3(\sigma) &= \sigma_{ij}\sigma_{ik}\sigma_{jk}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Они связаны с  $I_1(\sigma)$ ,  $I_2(\sigma)$  и  $I_3(\sigma)$  равенствами

$$\begin{aligned} J_1(\sigma) &= I_1(\sigma); \\ J_2(\sigma) &= I_1^2(\sigma) - 2I_2(\sigma); \\ J_3(\sigma) &= I_1^3(\sigma) - 3I_1(\sigma)I_2(\sigma) + 3I_3(\sigma). \end{aligned}$$

В главных осях формулы (3.18) принимают вид

$$\begin{aligned} J_1(\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ J_2(\sigma) &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2; \\ J_3(\sigma) &= \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3. \end{aligned}$$

### 3.4 ГЛАВНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

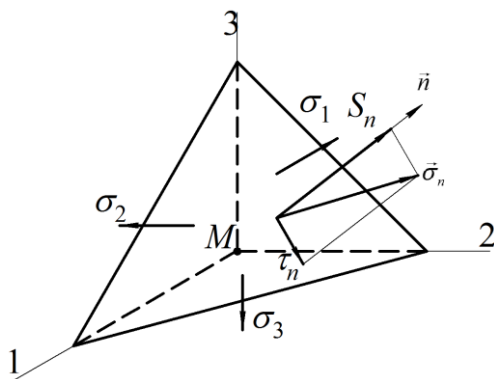


Рисунок 3.10 – Наклонная площадка в главных координатах

Совместим координатные оси с главными осями тензора напряжений и рассмотрим наклонную площадку с нормалью  $\vec{n}$  (рисунок 3.10). Компоненты вектора напряжения  $\vec{\sigma}_n$  согласно (3.2) будут равны

$$\sigma_{n1} = \sigma_1 n_1, \quad \sigma_{n2} = \sigma_2 n_2, \quad \sigma_{n3} = \sigma_3 n_3.$$

Сумма их проекций на нормаль к площадке даёт нормальное напряжение

$$\begin{aligned} S_n &= \sigma_{n1}n_1 + \sigma_{n2}n_2 + \sigma_{n3}n_3 = \\ &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

а сумма квадратов – квадрат модуля полного напряжения в площадке:

$$\sigma_n^2 = \sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + \sigma_{n3}^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2.$$

Для квадрата касательного напряжения получаем

$$\begin{aligned} \tau_n^2 = \sigma_n^2 - S_n^2 = & \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_1^2 n_1^4 - \sigma_2^2 n_2^4 - \sigma_3^2 n_3^4 - \\ & - 2\sigma_1\sigma_2 n_1^2 n_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 n_2^2 n_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1 n_3^2 n_1^2. \end{aligned}$$

Избавимся от четвёртых степеней  $n_1, n_2, n_3$ , воспользовавшись равенствами

$$n_1^4 = n_1^2(1 - n_2^2 - n_3^2); \quad n_2^4 = n_2^2(1 - n_1^2 - n_3^2); \quad n_3^4 = n_3^2(1 - n_1^2 - n_2^2).$$

Тогда выражение для  $\tau_n^2$  можно привести к виду

$$\tau_n^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_3^2 n_1^2. \quad (3.20)$$

Рассматривая касательное напряжение как функцию направляющих косинусов, найдём его экстремальные значения, которые называются *главными касательными напряжениями*. Направляющие косинусы не являются независимыми величинами, а связаны условием

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Следовательно, мы имеем дело с задачей на условный экстремум. Для решения подобных задач можно применить метод множителей Лагранжа, который состоит в следующем. Если требуется отыскать экстремум функции  $F(x_i)$  при дополнительном условии  $\Phi(x_i) = 0$ , то ищется обычным способом экстремум функции  $F^* = F + \lambda\Phi$ , то есть составляются уравнения

$$\frac{\partial F^*}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0, \quad (3.21)$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа.

Присоединив сюда условие  $\frac{\partial F^*}{\partial \lambda} \equiv \Phi = 0$ , получаем систему уравнений, достаточную для нахождения неизвестных параметров  $x_i$  и  $\lambda$ . В нашем случае неизвестными являются косинусы  $n_i$ ; в качестве функции  $F$  выступает  $\tau_n^2$ , а  $\Phi = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1$ . Дифференцирование по  $n_1$  даёт

$$\frac{\partial \tau_n^2}{\partial n_1} = 2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1 n_2^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_1 n_3^2; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} = 2n_1;$$

аналогично записываются производные по  $n_2$  и  $n_3$ . На основании (3.21) получаем следующую систему для определения  $n_1, n_2, n_3$ :

$$\begin{aligned}
n_1 \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_2^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_3^2 + \lambda \right] &= 0; \\
n_2 \left[ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_3^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 + \lambda \right] &= 0; \\
n_3 \left[ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 + \lambda \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Данные равенства удовлетворяются, если  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ . Такое решение лишено, однако, смысла, поскольку должно быть  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ . Другой вариант решения – случай, когда два из трёх параметров  $n_i$  равны нулю, а третий равен 1. Пусть, например,

$$n_1 = 1; \quad n_2 = n_3 = 0.$$

Тогда из первого уравнения (3.22) следует  $\lambda = 0$ , а второе и третье удовлетворяются автоматически. Аналогично можно было бы принять  $n_2 = 1$ , и  $n_3 = 1$ . Эти решения тривиальны, поскольку они приводят к главным площадкам, на которых касательные напряжения равны нулю. Исследуемая функция  $\tau_n^2$  положительна; для неё нулевое значение является экстремальным, но данный результат не представляет интереса.

Предположим теперь, что  $n_3 = 0$ , а  $n_1$  и  $n_2$  отличны от нуля. Из первых двух уравнений (3.22) в этом случае вытекают равенства

$$\begin{aligned}
(\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_2^2 + \lambda &= 0; \\
(\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 + \lambda &= 0.
\end{aligned}$$

Вычитая их одно из другого, получим соотношение

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 (n_1^2 - n_2^2) = 0.$$

При  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  отсюда следует, что  $n_1^2 = n_2^2$ . Из равенства  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$  находим тогда при  $n_3 = 0$

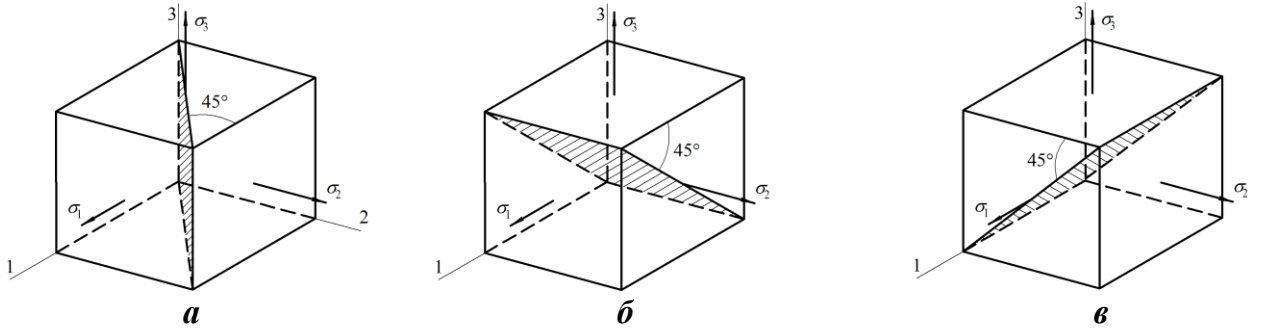
$$n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad n_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Мы получаем две взаимно-перпендикулярные площадки, параллельные третьей главной оси и составляющие углы  $45^\circ$  с первой и второй главными осями. Одна из них показана на рисунке 3.11,а. Абсолютное значение касательного напряжения в этих площадках, которое обозначим  $\tau_3$ , найдём в соответствии с формулой (3.20):

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

В тех же площадках согласно (3.19) действует нормальное напряжение

$$S_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$



**Рисунок 3.11 – Площадки с главными касательными напряжениями**

Аналогично устанавливаем значения главных касательных напряжений  $\tau_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$  и  $\tau_1 = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$ . Они действуют в площадках, параллельных соответственно второй и первой главной оси и составляют углы  $45^\circ$  с двумя другими осями (рисунок 3.11, б, в). Величина  $\tau_2$  представляет, очевидно, максимальное касательное напряжение в данной точке тела:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.23)$$

В площадке с напряжением  $\tau_{\max}$  действует и нормальное напряжение величиной  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ . Заметим, что площадки, в которых действуют главные касательные напряжения, не являются взаимно ортогональными; они принадлежат граням правильного додекаэдра (тела, ограниченного двенадцатью правильными пятиугольниками).

Определённый интерес в некоторых приложениях представляют напряжения в так называемых октаэдрических площадках, равнонаклонённых к главным осям. Для таких площадок все направляющие косинусы  $n_i^2 = 1/3$ . По формулам (3.19) и (3.20) получим значения нормальных и касательных напряжений на октаэдрических площадках:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \quad (3.24)$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.25)$$

Данные величины являются инвариантными и могут быть выражены через инварианты тензора напряжений. Исходя из соотношений (3.17) можно записать

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}I_1(\sigma); \quad \tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{2I_1^2(\sigma) - 6I_2(\sigma)}. \quad (3.26)$$

Если воспользоваться выражениями (3.16) для  $I_1(\sigma)$  и  $I_2(\sigma)$  через  $\sigma_{ij}$ , придем к выражениям

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33});$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right]^{1/2}. \quad (3.27)$$

### 3.4 РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ НА ШАРОВОЙ ТЕНЗОР И ДЕВИАТОР НАПРЯЖЕНИЙ

Напряжённое состояние в точке тела может быть представлено в виде суммы двух составляющих. Первая из них представляет собой равномерное всестороннее растяжение или сжатие и выражается так называемым *шаровым тензором*

$$T_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.28)$$

– среднее нормальное напряжение в данной точке.

Вторая составляющая характеризует отклонение напряжённого состояния от этого всестороннего растяжения или сжатия. Соответствующий тензор называется *девиатором напряжений*. Обозначая его компоненты через  $s_{ij}$ , запишем

$$D_{\sigma} = (s_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Разложение тензора напряжений на шаровую и девиаторную составляющие имеет особое значение в теории пластичности и при исследовании разрушения материалов, поскольку опыт показывает, что материалы по-разному реагируют на всестороннее сжатие и напряжения сдвига.

По аналогии с инвариантами тензора напряжений (3.16) можно построить инварианты для его составляющих. Первый инвариант шарового тензора совпадает с первым инвариантом тензора напряжений:

$$I_1(\sigma_0) = 3\sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = I_1(\sigma). \quad (3.30)$$

Второй и третий инварианты также выражаются через  $I_1(\sigma)$ :

$$I_2(\sigma_0) = 3\sigma_0^2 = \frac{1}{3}I_1^2(\sigma); \quad I_3(\sigma_0) = 3\sigma_0^3 = \frac{1}{27}I_1^3(\sigma).$$

Первый инвариант девиатора напряжений равен нулю, так как

$$I_1(s) = s_{ii} = (\sigma_{11} - \sigma_0) + (\sigma_{22} - \sigma_0) + (\sigma_{33} - \sigma_0) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - 3\sigma_0 = 0.$$

Для определения второго инварианта девиатора напряжений воспользуемся выражением (3.16) для  $I_2(\sigma)$ , подставив в него  $\sigma_{11} - \sigma_0$ ,  $\sigma_{22} - \sigma_0$  и  $\sigma_{33} - \sigma_0$  вместо  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$ . Выполнив необходимые преобразования, можно получить искомое выражение в виде

$$\begin{aligned} I_2(s) &= -\frac{1}{6} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right] = \\ &= -\frac{1}{6} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \end{aligned}$$

С точностью до множителя эта величина совпадает с квадратом  $\tau_{\text{окт}}$  (3.25).

Третий инвариант девиатора напряжений, как можно показать, выражается через инварианты тензора напряжений равенством

$$I_3(s) = I_3(\sigma) - \frac{1}{3}I_1(\sigma)I_2(\sigma) + \frac{2}{27}I_1^3(\sigma). \quad (3.32)$$

### 3.5 НЕЛИНЕЙНЫЙ ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИИ

Пусть две бесконечно близкие точки тела  $M$  и  $N$  (рисунок 3.12), расстояние между которыми определяется вектором  $d\vec{r}$ , после нагружения перемещаются в положения  $M'$  и  $N'$ ; соответствующий вектор обозначим  $d\vec{r}'$ . Вектор  $\overline{MM'}$ , который обозначим через  $\vec{u}$ , представляет собой вектор перемещения точки  $M$ . Если  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  – радиусы-векторы точки  $M$  до и после деформации, то  $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$ . Компоненты вектора перемещения

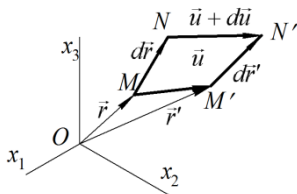


Рисунок 3.12 – Перемещение точек тела

$$u_i = x'_i - x_i$$

называют перемещениями точки  $M$  в направлении соответствующих осей.

В точке  $N$  вектор  $\vec{u}$  имеет приращение  $d\vec{u}$ .

Как видно из рисунка 3.12, справедливо равенство

$$d\vec{r} + (\vec{u} + d\vec{u}) = \vec{u} + d\vec{r}',$$

откуда следует, что

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{u}$$



или, в проекции на координатные оси,

$$dx'_i = dx_i + du_i. \quad (3.33)$$

Здесь

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 = u_{i,j} dx_j. \quad (3.34)$$

Поскольку  $du_i$  и  $dx_i$  есть компоненты векторов, из равенства (3.34) на основании обратного тензорного признака следует, что девять величин  $u_{i,j}$  являются компонентами тензора второго ранга, в общем случае несимметричного. Представим его в виде суммы

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}, \quad (3.35)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – симметричный, а  $\omega_{ij}$  – кососимметричный тензоры. Через компоненты  $u_{i,j}$  они выражаются соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (3.36)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (3.37)$$

С развёрнутой записи формулы (3.36) и (3.37) имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3};$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right); \quad (3.38)$$

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0; \quad \omega_{12} = -\omega_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right);$$

$$\omega_{23} = -\omega_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \quad \omega_{31} = -\omega_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \quad (3.39)$$

Квадрат длины волокна  $MN$  до деформации

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_i dx_i.$$

После деформации квадрат его длины с учётом (3.33) будет

$$ds'^2 = dx'_i dx'_i = (dx_i + du_i)(dx_i + du_i) = dx_i dx_i + 2du_i dx_i + du_i du_i.$$

Принимая во внимание соотношение (3.34), можно записать

$$ds'^2 = ds^2 + 2u_{i,j} dx_i dx_j + u_{i,j} dx_j u_{i,k} dx_k.$$

Поменяем в последнем слагаемом индексы  $i$  и  $k$  местами с тем чтобы в нём содержалось произведение  $dx_i dx_j$  и найдём разность  $ds'^2 - ds^2$ :

$$ds'^2 - ds^2 = 2u_{i,j}dx_i dx_j + u_{k,i}u_{k,j}dx_i dx_j.$$

Первое слагаемое в правой части равенства преобразуем с учётом выражения (3.35):

$$u_{i,j}dx_i dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})dx_i dx_j = \varepsilon_{ij}dx_i dx_j + \omega_{ij}dx_i dx_j.$$

Второе слагаемое здесь равно нулю. В этом легко убедиться, меняя в нём индексы  $i$  и  $j$  местами и учитывая, что  $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ . Таким образом, мы приходим к соотношению

$$ds'^2 - ds^2 = (2\varepsilon_{ij} + u_{k,i}u_{k,j})dx_i dx_j$$

или

$$ds'^2 - ds^2 = 2e_{ij}dx_i dx_j, \quad (3.40)$$

где через

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (3.41)$$

обозначен симметричный тензор второго ранга, называемый *нелинейным тензором деформации*.

### 3.6 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕЛИНЕЙНОГО ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИИ

Обозначим через

$$\varepsilon^* = \frac{ds' - ds}{ds}$$

относительную деформацию волокна  $MN$ . Тогда  $ds' = (1 + \varepsilon^*)ds$ , и из равенства (3.40) имеем

$$\left[ (1 + \varepsilon^*)^2 - 1 \right] ds^2 = 2e_{ij}dx_i dx_j. \quad (3.42)$$

Пусть ориентация рассматриваемого волокна определяется единичным вектором  $\vec{n}$  с компонентами  $n_i$ , так что

$$n_i = \frac{dx_i}{ds}.$$

Тогда равенство (3.42) можно представить в виде

$$(1 + \varepsilon^*)^2 - 1 = 2e_{ij}n_i n_j. \quad (3.43)$$

Корни полученного уравнения:

$$\varepsilon^* = \pm \sqrt{1 + 2e_{ij}n_i n_j} - 1.$$

Отбросив корень, не имеющий физического смысла, находим

$$\varepsilon^* = \sqrt{1 + 2e_{ij}n_i n_j} - 1. \quad (3.44)$$

Как видим, по известным компонентам тензора  $e_{ij}$  может быть вычислено относительное удлинение произвольно ориентированного отрезка в данной точке тела. Если, в частности, отрезок направлен параллельно оси  $x_1$ , то есть если  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = n_3 = 0$ , то

$$\varepsilon^* = \sqrt{1 + 2e_{11}} - 1, \quad (3.45)$$

Отсюда ясно, что компоненты  $e_{11}$ ,  $e_{22}$  и  $e_{33}$  определяют относительные удлинения линейных элементов, направленных по осям координат.

Для выяснения геометрического смысла компонент  $e_{ij}$  в случае  $i \neq j$  найдём изменение угла между произвольно ориентированными отрезками в данной точке тела. Пусть направления отрезков задаются единичными векторами  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  с компонентами  $m_i$ ,  $n_i$ . Длины отрезков обозначим  $ds_m$  и  $ds_n$ , а их проекции на координатные оси —  $dx_i^{(m)}$  и  $dx_i^{(n)}$ , так что

$$m_i = \frac{dx_i^{(m)}}{ds_m}; \quad n_i = \frac{dx_i^{(n)}}{ds_n}.$$

Косинус угла  $\mathcal{G}$  между данными отрезками равен скалярному произведению векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ :

$$\cos \mathcal{G} = m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = m_i n_i.$$

Если  $\varepsilon_m^*$  и  $\varepsilon_n^*$  — относительные удлинения отрезков, то после деформации они будут иметь длину

$$ds'_m = (1 + \varepsilon_m^*) ds_m; \quad ds'_n = (1 + \varepsilon_n^*) ds_n.$$

Их проекции на координатные оси согласно (3.33) окажутся равными

$$\begin{aligned} dx_i^{(m)} + du_i^{(m)} &= dx_i^{(m)} + u_{i,j} dx_j^{(m)}; \\ dx_i^{(n)} + du_i^{(n)} &= dx_i^{(n)} + u_{i,j} dx_j^{(n)}. \end{aligned}$$

Направляющие косинусы деформированных отрезков будут

$$\begin{aligned} m'_i &= \frac{dx_i^{(m)} + u_{i,j} dx_j^{(m)}}{(1 + \varepsilon_m^*) ds_m} = \frac{m_i + u_{i,j} m_j}{1 + \varepsilon_m^*}; \\ n'_i &= \frac{dx_i^{(n)} + u_{i,j} dx_j^{(n)}}{(1 + \varepsilon_n^*) ds_n} = \frac{n_i + u_{i,j} n_j}{1 + \varepsilon_n^*}. \end{aligned}$$

Для косинуса угла между отрезками после деформации получаем выражение

$$\begin{aligned}\cos \mathcal{G}' = m'_i n'_i &= \frac{m_i + u_{i,j} m_j}{1 + \varepsilon_m^*} \cdot \frac{n_i + u_{i,k} n_k}{1 + \varepsilon_n^*} = \\ &= \frac{m_i n_i + u_{i,j} m_j n_i + u_{i,k} m_i n_k + u_{i,j} u_{i,k} m_j m_k}{(1 + \varepsilon_m^*)(1 + \varepsilon_n^*)}.\end{aligned}$$

Первое слагаемое в числителе есть  $\cos \mathcal{G}$ . В трёх других заменим немые индексы таким образом, чтобы в них содержалось произведение  $m_i n_j$ . Это даёт

$$\cos \mathcal{G}' = \frac{\cos \mathcal{G} + (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) m_i n_j}{(1 + \varepsilon_m^*)(1 + \varepsilon_n^*)}$$

или

$$\cos \mathcal{G}' = \frac{\cos \mathcal{G} + 2e_{ij} m_i n_j}{(1 + \varepsilon_m^*)(1 + \varepsilon_n^*)}. \quad (3.46)$$

Данное соотношение позволяет в заданной точке тела определять углы между произвольными отрезками в деформированном состоянии по известным компонентам тензора  $e_{ij}$ . Если, в частности, отрезок  $ds_m$  направлен вдоль оси  $x_1$ , а отрезок  $ds_n$  – вдоль оси  $x_2$ , то  $m_1 = 1$ ,  $n_2 = 1$ , а  $m_2 = m_3 = 0$ ;  $n_1 = n_3 = 0$ ;  $\cos \mathcal{G} = 0$ . Тогда

$$\cos \mathcal{G}' = \frac{2e_{12}}{(1 + \varepsilon_m^*)(1 + \varepsilon_n^*)}.$$

Но в этом случае  $\mathcal{G}' = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12}$ , где  $\gamma_{12}$  – угол между деформированными отрезками, то есть деформация сдвига в плоскости  $x_1 x_2$ . Поэтому

$$\cos \mathcal{G}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin \gamma_{12}.$$

Следовательно,

$$\sin \gamma_{12} = \frac{2e_{12}}{(1 + \varepsilon_m^*)(1 + \varepsilon_n^*)}. \quad (3.47)$$

Таким образом, величина  $e_{12}$  определяет деформацию сдвига в плоскости  $x_1 x_2$ . Аналогичный смысл имеют  $e_{23}$  и  $e_{31}$ .

### 3.7 ЛИНЕЙНЫЙ ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИИ

Все соотношения упрощаются, если  $u_{i,j} \ll 1$ . Из равенства (3.35) следует, что в этом случае должно быть  $\varepsilon_{ij} \ll 1$  и  $\omega_{ij} \ll 1$ . Тогда в формуле (3.41) можно отбросить квадратичный член в скобках, и мы получим

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon_{ij}. \quad (3.48)$$

Пренебрегая величиной  $\varepsilon^{*2}$  в равенстве (3.43), вместо (3.44) будем иметь просто

$$\varepsilon^* = e_{ij}n_i n_j = \varepsilon_{ij}n_i n_j, \quad (3.49)$$

а вместо (3.45) получим  $\varepsilon^* = \varepsilon_{11}$ .

Поскольку  $\varepsilon^* \ll 1$ , знаменатель формулы (3.46) можно принять равным единице, так что для  $\cos \mathcal{G}'$  получается соотношение

$$\cos \mathcal{G}' = \cos \mathcal{G} + 2e_{ij}m_j n_i = \cos \mathcal{G} + 2\varepsilon_{ij}m_j n_i.$$

Заменяя приближённо  $\sin \gamma_{12} \approx \gamma_{12}$ , из формулы (3.47) будем иметь

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}.$$

Как видим, в этом случае компоненты тензора  $e_{12}$  совпадают с компонентами тензора  $\varepsilon_{ij}$ , причём диагональные компоненты  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  есть относительные удлинения отрезков, ориентированных вдоль координатных осей, а компоненты  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{23}$  и  $\varepsilon_{31}$  представляют собой половины деформаций сдвига в соответствующих плоскостях. Тензор  $\varepsilon_{ij}$  (3.36) называют *линейным тензором деформации* или просто тензором деформации. Формулы (3.38) называются *формулами Коши*.

Тензор  $\omega_{ij}$  (3.37) называется тензором вращений. Можно показать, что его компоненты определяют углы поворота бесконечно малого объёма тела в окрестности точки  $M$  относительно координатных осей.

### 3.8 ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИИ

В точке  $M$  тела с тензором деформации  $\varepsilon_{ij}$  можно указать такие три взаимно ортогональных направления, для которых отсутствуют деформации сдвига. Такие направления называются главными осями тензора деформации. Относительные удлинения в этих направлениях имеют экстремальные значения. Они называются *главными деформациями* и обозначаются через  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,

$\varepsilon_3$ . Их отыскание аналогично отысканию главных напряжений. Главные деформации являются корнями кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - I_1(\varepsilon)\varepsilon^2 + I_2(\varepsilon)\varepsilon - I_3(\varepsilon) = 0,$$

коэффициентами которого являются инварианты тензора деформации

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \quad (3.50)$$

$$I_2(\varepsilon) = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1; \quad (3.51)$$

$$I_3(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \quad (3.52)$$

Первый инвариант тензора деформации имеет простой геометрический смысл, являясь относительным изменением объёма или относительной объёмной деформацией  $\theta$  в данной точке тела:

$$\theta = \frac{d\tau' - d\tau}{d\tau} = \varepsilon_{ii} = I_1(\varepsilon), \quad (3.53)$$

где  $d\tau$  и  $d\tau'$  – элементарный объём, выделенный в окрестности точки, до и после деформации.

Как и в случае тензора напряжений, могут использоваться линейный, квадратичный и кубический инварианты тензора деформации:

$$\begin{aligned} J_1(\varepsilon) &= \varepsilon_{ii}; \\ J_2(\varepsilon) &= \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}; \\ J_3(\varepsilon) &= \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

С первым, вторым и третьим инвариантами они связаны соотношениями

$$\begin{aligned} J_1(\varepsilon) &= I_1(\varepsilon); \\ J_2(\varepsilon) &= I_1^2(\varepsilon) - 2I_2(\varepsilon); \\ J_3(\varepsilon) &= I_1^3(\varepsilon) - 3I_1(\varepsilon)I_2(\varepsilon) + 3I_3(\varepsilon). \end{aligned}$$

Как и тензор напряжений, тензор деформации может быть разложен на шаровой тензор и девиатор деформации. Все соотношения при этом полностью аналогичны соотношениям, приведённым выше.

### 3.9 УРАВНЕНИЯ СОВМЕЩНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

Если компоненты тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$  заданы как функции координат, то интегрированием соотношений Коши могут быть найдены компоненты перемещений  $u_i$ . Однако для нахождения трёх функций мы имеем шесть

уравнений (3.38), и интегрирование можно осуществить лишь в том случае, когда уравнения совместны, то есть не противоречат друг другу. Для выполнения этого условия компоненты  $\varepsilon_{ij}$  должны быть связаны определёнными зависимостями. Чтобы установить данные зависимости, сложим вторые производные от  $\varepsilon_{11}$  и  $\varepsilon_{22}$  по координатам  $x_2$  и  $x_1$  соответственно, используя равенства (3.38)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Мы пришли к одному из искомым соотношений. Ещё два могут быть получены круговой заменой индексов.

Другую группу соотношений можно получить, если  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{23}$  и  $\varepsilon_{31}$  продифференцировать соответственно по  $x_3$ ,  $x_1$  и  $x_2$ , а затем две из полученных производных сложить, а третью вычесть. Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3}. \end{aligned}$$

Продифференцировав данное равенство по  $x_1$ , придем ещё к одному соотношению, устанавливающему связь между компонентами тензора деформации. Таким образом, всего имеем шесть равенств, именуемых уравнениями совместности деформаций Сен-Венана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}; \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}; \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}; \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Представим себе, что тело разбито на большое число малых объёмов в форме прямоугольных параллелепипедов. Если каждый параллелепипед подвергнуть деформации в соответствии с функциями  $\varepsilon_{ij}(x_k)$ , то они превратятся, вообще говоря, в косоугольные параллелепипеды. Сплошное деформированное тело может быть составлено из них лишь в том случае, если  $\varepsilon_{ij}$  подчинены равенствам (3.55). В этом заключается геометрический смысл соотношений (3.55).



## 4 ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 4.1 УПРУГОЕ ТЕЛО

Пренебрегая термодинамическими эффектами, имеющими место при деформировании, будем называть упругим такое тело, у которого напряжения являются однозначными функциями компонент тензора деформации:

$$\sigma_{ij} = \varphi_{ij}(\varepsilon_{kl}). \quad (4.1)$$

Равенства (4.1) устанавливают, в частности, что замкнутому пути деформирования соответствует замкнутый путь нагружения и наоборот.

Пусть  $W$  – удельная работа внутренних сил, то есть удельная потенциальная энергия деформации. При возрастании компонент тензора деформации на  $d\varepsilon_{ij}$  величина  $W$  получит приращение

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (4.2)$$

При отсутствии термодинамических эффектов работа, проведённая над элементарным объёмом упругого тела в замкнутом цикле по деформациям или напряжениям, равна нулю:

$$\oint dW = \oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = 0.$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы подынтегральное выражение представляло собой полный дифференциал. Но тогда можно записать

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}.$$

Сопоставление данного равенства с соотношением (4.2) показывает, что для упругого тела

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (4.3)$$

Здесь содержится шесть равенств, называемых формулами Грина. Они выражают закон упругости в общем случае нелинейных зависимостей (4.1).

Таким образом,  $W(\varepsilon_{ij})$  является упругим потенциалом для напряжений. Воспользовавшись преобразованием Лежандра, можно построить упругий потенциал  $W^*$  для компонент тензора деформации:

$$W^* = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W. \quad (4.4)$$

Дифференциал функции  $W^*$ :

$$dW^* = d\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - dW.$$

С учётом равенства (4.2) получаем

$$dW^* = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}, \quad (4.5)$$

то есть  $W^* = W^*(\sigma_{ij})$ . Тогда

$$dW^* = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij},$$

и сопоставление последнего результата с (4.5) приводит к выражению

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4.6)$$

которое содержит шесть соотношений, выражающих компоненты  $\varepsilon_{ij}$  через потенциальную функцию  $W^*$ . Они называются формулами Кастильяно, а величина  $W^*$  есть удельная дополнительная энергия деформации, которая уже упоминалась ранее.

## 4.2 ЗАКОН ГУКА

Опыт показывает, что при малых деформациях соотношения (4.1) линейны, то есть справедливы равенства

$$\sigma_{ij} = \kappa_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (4.7)$$

Обратные зависимости также имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \Phi_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (4.8)$$

Тензор четвёртого ранга  $\kappa_{ijkl}$  можно назвать тензором модулей упругости, а тензор  $\Phi_{ijkl}$  – тензором упругих податливостей. Оба этих тензора обладают определёнными свойствами симметрии. Так, на основании зависимости (4.3) можно написать два равенства

$$\frac{d\sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}; \quad \frac{d\sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}.$$

Поскольку вторая производная не зависит от порядка дифференцирования, приходим к равенству

$$\frac{d\sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{d\sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

из которого следует, что  $\kappa_{ijkl} = \kappa_{klij}$ . Точно так же можно установить равенство  $\Phi_{ijkl} = \Phi_{klij}$ . Кроме того, в силу симметрии тензоров  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  можно в соотношениях (4.7) и (4.8) менять местами индексы  $i$  и  $j$  или  $k$  и  $l$ . При такой перестановке тензоры  $\kappa_{ijkl}$  и  $\Phi_{ijkl}$  не изменяются. В итоге оказывается, что из

81 компоненты тензора четвёртого ранга  $\kappa_{ijkl}$  или  $\Phi_{ijkl}$  независимых остаётся лишь 21. Соответствующие упругие потенциалы имеют вид

$$W = \frac{1}{2} \kappa_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}; \quad W^* = \frac{1}{2} \Phi_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}. \quad (4.9)$$

В случае линейно-упругого тела  $W^* = W$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться теоремой Эйлера об однородных функциях. Однородными называются функции  $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$  нескольких переменных, удовлетворяющие условию

$$f(tx_1, tx_2, tx_3, \dots) = t^n f(x_1, x_2, x_3, \dots),$$

где число  $n$  называется степенью однородности. Например,

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + x \sqrt{xy + \frac{x^3}{y}} \quad (n=2);$$

$$f(x, y) = \frac{x+y}{2x-y} \quad (n=0); \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 \operatorname{tg} \frac{x_1}{x_2} \quad (n=2).$$

Теорема Эйлера устанавливает, что для однородных функции справедливо равенство

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots = n f(x_1, x_2, \dots). \quad (4.10)$$

Величина  $W(\varepsilon_{ij})$ , как видно из (4.9), является однородной функцией компонент  $\varepsilon_{ij}$ ; степень однородности  $n=2$ . Поэтому можно согласно (4.10) записать

$$\varepsilon_{ij} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2W.$$

Принимая во внимание формулу Грина (4.3), получаем отсюда равенство

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}. \quad (4.11)$$

Тогда из формулы (4.4) следует, что

$$W^* = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = W,$$

то есть для линейно-упругого тела  $W^*$  есть та же удельная упругая энергия, но выраженная через напряжения. Тем не менее во избежание путаницы удобно различать две эти величины.

Предположим далее, что тело является изотропным и однородным, то есть его упругие свойства одинаковы во всех направлениях и не зависят от

координат точек тела. Потенциал напряжений изотропного тела не должен меняться при изменении осей координат, поэтому он должен выражаться через инварианты тензора деформации. Так как  $W$  является степенной функцией второго порядка от компонент тензора деформации, эту зависимость можно образовать из линейного и квадратичного инвариантов тензора деформации. Будем представлять её в следующей форме:

$$W = \frac{1}{2} [\lambda J_1^2(\varepsilon) + 2GJ_2(\varepsilon)], \quad (4.12)$$

где  $\lambda$  и  $G$  – постоянные;  $J_1(\varepsilon)$  и  $J_2(\varepsilon)$  определены равенствами (3.54):

$$J_1(\varepsilon) = \varepsilon_{ii}; \quad J_2(\varepsilon) = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

Чтобы установить связь  $\sigma_{ij}$  с  $\varepsilon_{ij}$ , обратимся к формулам Грина:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda J_1(\varepsilon) \frac{\partial J_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} + G \frac{\partial J_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial J_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij}; \quad \frac{\partial J_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\varepsilon_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, а  $J_1(\varepsilon) = \theta$  согласно (3.53), приходим к следующей зависимости:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\theta. \quad (4.13)$$

Она содержит две постоянные  $\lambda$  и  $G$ , называемыми упругими постоянными Ламе.

Формула (4.13) выражает обобщённый закон Гука для однородного изотропного тела. В развёрнутом виде имеем шесть соотношений

$$\sigma_{11} = 2G\varepsilon_{11} + \lambda\theta; \quad \sigma_{22} = 2G\varepsilon_{22} + \lambda\theta; \quad \sigma_{33} = 2G\varepsilon_{33} + \lambda\theta, \quad (4.14)$$

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} = G\gamma_{12}; \quad \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23} = G\gamma_{23}; \quad \sigma_{31} = 2G\varepsilon_{31} = G\gamma_{31}. \quad (4.15)$$

Заметим, что данные соотношения справедливы и для неоднородного изотропного тела, но в этом случае  $\lambda$  и  $G$  будут функциями координат рассматриваемой точки тела.

Если координатные оси совместить с главными осями тензора деформации, деформации сдвига  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{23}$  и  $\gamma_{31}$  будут равны нулю. Тогда на основании уравнений (4.15) будут равны нулю касательные напряжения  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$  и  $\sigma_{31}$ . Это означает, что площадки, перпендикулярные к данным осям, являются главными площадками. Отсюда следует, что в каждой точке изотропного

тела главные оси тензора деформации совпадают с главными осями тензора напряжений.

Сложим равенства (4.14):

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\lambda\theta + 2G(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}).$$

Обозначая здесь первый инвариант тензора напряжений буквой  $\Sigma$  и учитывая, что  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \theta$ , получаем отсюда

$$\Sigma = (3\lambda + 2G)\theta. \quad (4.16)$$

Из этого равенства вытекает соотношение

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (4.17)$$

где  $\sigma_0 = \frac{1}{3}\Sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$  есть среднее напряжение; величина

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G \quad (4.18)$$

называется объёмным модулем упругости. Равенство (4.17) устанавливает связь между объёмной деформацией и средним напряжением и называется законом упругого изменения объёма.

Если подставить вытекающее из (4.16) выражение

$$\theta = \frac{\Sigma}{3\lambda + 2G}$$

в формулу (4.13), то можно получить обратную форму закона Гука:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \Sigma \right). \quad (4.19)$$

Рассмотрим частный случай одноосного растяжения стержня, совместив ось  $x_1$  с осью стержня. В этом случае только напряжение  $\sigma_{11}$  отлично от нуля, остальные компоненты  $\sigma_{ij}$  нулевые. На основании (4.19) можно записать

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2G} \left( \sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \sigma_{11} \right) = \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)} \sigma_{11}; \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= \frac{1}{G} \left( -\frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \sigma_{11} \right) = -\frac{\lambda}{2G(3\lambda + 2G)} \sigma_{11}; \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Введём обозначения

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}; \quad \mu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}. \quad (4.21)$$

Величина  $E$  называется нормальным модулем упругости или модулем Юнга, а  $\mu$  – коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона. При этих обозначениях формулы (4.20) принимают привычный вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11}; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\mu}{E} \sigma_{11} = -\mu \varepsilon_{11}.$$

Предположим далее, что имеет место чистый сдвиг в плоскости  $x_1x_2$ , так что  $\sigma_{12}$  отлично от нуля, а остальные компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  нулевые. В этом случае

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}$$

или

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G} \sigma_{12},$$

остальные компоненты деформации равны нулю. Отсюда следует, что величина  $G$  представляет собой модуль сдвига.

Таким образом, только две упругие постоянные являются независимыми, другие же выражаются через них. Если в качестве независимых взять  $E$  и  $\mu$ , то для остальных будем иметь выражения

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}; \quad \lambda = \frac{2G\mu}{1-2\mu} = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (4.22)$$

С учётом этих формул соотношение (4.19) может быть записано в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{1+\mu} \Sigma \right), \quad (4.23)$$

а равенство (4.16) – в виде

$$\Sigma = \frac{E}{1-2\mu} \theta. \quad (4.24)$$

Строго говоря, при изотермическом и адиабатическом процессах деформирования упругие свойства изотропного тела будут несколько отличаться по величине. Например, для различных металлов при температуре  $20^\circ C$  в случае адиабатического и изотермического процессов деформирования соотношение между модулями объёмного сжатия  $K_{ад}$  и  $K$  следующее:

$$K_{ад} = (1,004 \dots 1,038) K.$$

Такие же небольшие различия имеют место между адиабатическим и изотермическим модулями Юнга, а также между адиабатическим и изотер-

мическим коэффициентами Пуассона. И только модуль сдвига  $G$  имеет одинаковое значение при адиабатическом и изотермическом процессах деформирования.

В некоторых случаях наиболее удобной оказывается матричная запись закона Гука. Введём матрицы-столбцы напряжений и деформаций

$$[\sigma] = [\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{31}]^T;$$

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} \gamma_{12} \gamma_{23} \gamma_{31}]^T.$$

Тогда формулы (4.14) и (4.15) можно представить одним равенством

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon], \quad (4.25)$$

где

$$[\kappa] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Соотношение (4.23) в матричной форме запишется так:

$$[\varepsilon] = [\Phi][\sigma], \quad (4.27)$$

где, с учётом формул (4.22),

$$[\Phi] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Если подставить формулы (4.13) в выражение

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

для удельной потенциальной энергии деформации, то можно представить  $W$  как функцию от компонент тензора деформации:

$$W = \frac{1}{2} (2G\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\theta) \varepsilon_{ij}.$$

Учитывая, что  $\delta_{ij}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ii} = \theta$ , приходим к соотношению

$$W = G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\lambda\theta^2. \quad (4.29)$$

Из этого выражения видно, что  $W > 0$ .

Подобным же образом, используя зависимость (4.23), представим  $W$  в функции компонент  $\sigma_{ij}$ :

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\mu}{1+\mu}\Sigma\right).$$

Учитывая (4.22), можно преобразовать это выражение к виду

$$W = \frac{1}{2E}\left[(1+\mu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \mu\Sigma^2\right]. \quad (4.30)$$

### 4.3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

В качестве основных неизвестных функций могут быть приняты перемещения  $u_i$ . Компоненты тензора деформации выражаются через них по формулам Коши (3.36):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

С помощью закона Гука получим и выражение напряжений через  $u_i$ :

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\theta = G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij}\lambda\theta, \quad (4.31)$$

где  $\theta = u_{i,i}$ .

Необходимые уравнения для отыскания  $u_i$  вытекают из трех уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} + R_i = 0.$$

Продифференцируем равенство (4.31) по  $x_j$ :

$$\sigma_{ij,j} = G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \delta_{ij}\lambda\theta_{,j}. \quad (4.32)$$

Но

$$u_{i,jj} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} = \nabla^2 u_i,$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Далее, выражение  $u_{j,ij}$  можно представить в виде

$$u_{j,ij} = (u_{j,j})_{,i} = \theta_{,i}.$$



Наконец, последнее слагаемое в равенстве (4.32) равно

$$\delta_{ij}\lambda\theta_{,j} = \lambda\theta_{,i}.$$

Таким образом, уравнения равновесия могут быть приведены к виду

$$G\nabla^2 u_i + (G + \lambda)\theta_{,i} + R_i = 0. \quad (4.33)$$

Три уравнения (4.33), представляющие собой уравнения равновесия в перемещениях, называются уравнениями Ламе.

Решение уравнений (4.33) должно быть подчинено граничным условиям. В общем случае поверхность  $\omega$ , ограничивающая тело, может быть представлены в виде суммы двух составляющих –  $\omega_u$  и  $\omega_p$ . Через  $\omega_u$  обозначается та часть поверхности, где тело закреплено или, в более общем случае, где заданы перемещения. На остальной части  $\omega_p$  поверхности  $\omega$  заданы поверхностные нагрузки  $p_i$ . Искомые перемещения должны удовлетворять кинематическим условиям

$$u_i = u_i^* \quad \text{на } \omega_u, \quad (4.34)$$

где  $u_i^*$  – заданные значения перемещений. На  $\omega_p$  должны удовлетворяться статические условия (3.10)

$$\sigma_{ij}n_j = p_i,$$

которые можно сформулировать в перемещениях, пользуясь равенством (4.31). Имеем

$$\sigma_{ij}n_j = G(u_{i,j}n_j + u_{j,i}n_j) + \delta_{ij}\lambda\theta n_j.$$

Первое слагаемое в скобках есть производная по направлению нормали от функции  $u_i(x_k)$ :

$$u_{i,j}n_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2}n_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3}n_3 = \frac{\partial u_i}{\partial n}.$$

Замечая также, что  $\delta_{ij}n_j = n_i$ , представим статические условия в виде

$$G\left(\frac{\partial u_i}{\partial n} + u_{j,i}n_j\right) + \lambda\theta n_i = p_i \quad \text{на } \omega_p. \quad (4.35)$$

#### 4.4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Решение задачи теории упругости в напряжениях предполагает, что за основные неизвестные принимаются шесть компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ . Для отыскания неизвестных функций мы располагаем, во-первых, тремя уравнениями равновесия

$$\sigma_{ij,j} + R_i = 0. \quad (4.36)$$

Кроме того, необходимо воспользоваться условиями совместности деформаций. Ранее эти условия были представлены в форме уравнений Сен-Венана (3.55). Здесь удобнее получить их в ином виде, взяв за основу уравнения Ламе (4.33) и исключив из них перемещения.

Разделим равенство (4.33) на  $G$ . Так как на основании (4.22)

$$\frac{G + \lambda}{G} = 1 + \frac{\lambda}{G} = 1 + \frac{2\mu}{1 - 2\mu} = \frac{1}{1 - 2\mu},$$

получим

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1 - 2\mu} \theta_{,i} = -\frac{1}{G} R_i.$$

Продифференцируем это равенство по  $x_j$ :

$$\nabla^2 u_{i,j} + \frac{1}{1 - 2\mu} \theta_{,ij} = -\frac{1}{G} R_{i,j}. \quad (4.37)$$

Поменяв местами индексы  $i$  и  $j$ , запишем также

$$\nabla^2 u_{j,i} + \frac{1}{1 - 2\mu} \theta_{,ij} = -\frac{1}{G} R_{j,i}.$$

Сложим два последних равенства:

$$\nabla^2 (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2}{1 - 2\mu} \theta_{,ij} = -\frac{1}{G} (R_{i,j} + R_{j,i}). \quad (4.38)$$

На основании формул Коши (3.36) и закона Гука (4.23) имеем

$$u_{i,j} + u_{j,i} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{1}{G} \left( \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{1 + \mu} \Sigma \right).$$

Учитывая также вытекающее из равенства (4.24) соотношение

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} \Sigma, \quad (4.39)$$

уравнение (4.38) приведём после умножения на  $G$  к виду

$$\nabla^2 \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{1 + \mu} \Sigma + \frac{1}{1 + \mu} \Sigma_{,ij} = -(R_{i,j} + R_{j,i}). \quad (4.40)$$

Данное уравнение можно несколько упростить. Выполним свёртку по индексам  $i, j$  в равенстве (4.37):

$$\nabla^2 u_{i,i} + \frac{1}{1 - 2\mu} \theta_{,ii} = -\frac{1}{G} R_{i,i}.$$

Замечая, что  $u_{i,i} = \theta$  и что  $\theta_{,ii} = \nabla^2 \theta$ , имеем отсюда

$$\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\nabla^2\theta = -\frac{1}{G}R_i.$$

На основании (4.39) это приводит к выражению

$$2\frac{1-\mu}{E}\nabla^2\Sigma = -\frac{1}{G}R_{i,i}$$

или

$$\nabla^2\Sigma = -\frac{1+\mu}{1-\mu}R_{i,i}.$$

Если подставить данный результат в (4.40), придем к следующим уравнениям совместности деформаций в напряжениях, называемых уравнениями Бельтрами – Мичелла:

$$\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\mu}\Sigma_{,ij} = -\left(R_{i,j} + R_{j,i} + \delta_{ij}\frac{\mu}{1-\mu}R_{i,i}\right). \quad (4.41)$$

В частном случае отсутствия или постоянства объёмных сил будем иметь более простые уравнения

$$\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\mu}\Sigma_{,ij} = 0, \quad (4.42)$$

которые называются уравнениями Бельтрами.

## 5 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

### 5.1 ВОЛНЫ РАСШИРЕНИЯ И ВОЛНЫ ИСКАЖЕНИЯ В ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

До сих пор мы предполагали, что нагрузки, прикладываются весьма медленно, «статически». Но иногда приходится сталкиваться с динамическими процессами, происходящими в твёрдых телах в результате быстрого или внезапного приложения нагрузок. Отличие от статического расчёта заключается в этом случае в необходимости учёта инерционных сил.

Ранее были получены дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для изотропного упругого тела (уравнения Ламе) (4.33):

$$G\nabla^2 u_i + (G + \lambda)\theta_{,i} + R_i = 0,$$

где  $G$ ,  $\lambda$  – упругие постоянные Ламе;  $u_i$  – компоненты вектора перемещения;  $R_i$  – компоненты объёмной силы;  $\theta = u_{j,j}$  – объёмная деформация;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа. В динамических задачах компоненты вектора перемещений являются функциями не только координат  $x_k$ , но и времени  $t$ :

$$u_i = u_i(x_k, t).$$

В соответствии с принципом Даламбера можно для получения уравнений движения воспользоваться уравнениями равновесия, добавив в них инерционные силы. Бесконечно малый объём тела  $d\tau$  имеет массу  $\rho d\tau$ , где  $\rho$  – плотность материала. Действующая на него в направлении оси  $x_i$  инерционная сила равна по определению

$$-\rho d\tau \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = -\rho \ddot{u}_i d\tau.$$

Здесь и в дальнейшем точками сверху отмечается дифференцирование по времени. Если разделить данную силу на  $d\tau$ , получим силу, рассчитанную на единицу объёма, то есть инерционную объёмную силу  $R_{ин,i}$ :

$$R_{ин,i} = -\rho \ddot{u}_i.$$

С учётом этого уравнения движения запишутся в виде

$$G\nabla^2 u_i + (G + \lambda)\theta_{,i} + R_i - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (5.1)$$

Остановимся подробнее на волновых процессах в упругой среде. Описывающие их уравнения получим из равенства (5.1), если положить  $R_i = 0$ :

$$G\nabla^2 u_i + (G + \lambda)\theta_{,i} = \rho \ddot{u}_i. \quad (5.2)$$

В упругой среде, в отличие от случая распространения звука в воздухе, существует не один, а несколько типов волн, имеющих различные скорости распространения; рассмотрим здесь два из них.

Первый тип характеризуется тем, что производимая волнами объёмная деформация отсутствует. Положив в (5.2)  $\theta = 0$ , приходим к трём не связанным между собой уравнениям волнового типа

$$G\nabla^2 u_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (5.3)$$

Волны, которые описываются уравнениями (5.3), называются *волнами искажения*.

Второй тип волн характеризуется отсутствием вращений частиц среды. Компоненты тензора вращений даются выражением (3.37):

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}).$$

Условие отсутствия вращений запишется в виде

$$u_{i,j} - u_{j,i} = 0.$$

Эти равенства тождественно удовлетворяются, если перемещения выражаются через некоторую функцию  $\varphi$  по формулам

$$u_i = \varphi_{,i}.$$

Тогда

$$\theta = u_{i,i} = \varphi_{,ii} = \nabla^2 \varphi,$$

так что

$$\theta_{,i} = (\nabla^2 \varphi)_{,i} = \nabla^2 (\varphi_{,i}) = \nabla^2 u_i.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (5.2) даёт равенство

$$G\nabla^2 u_i + (G + \lambda)\nabla^2 u_i = \rho \ddot{u}_i$$

или

$$(2G + \lambda)\nabla^2 u_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (5.4)$$

Мы снова пришли к уравнениям волнового типа. Определяемые ими волны называются *волнами расширения* или *безвихревыми волнами*.

Для обоих типов волн уравнения имеют одинаковый вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi, \quad (5.5)$$

где для случая волн расширения

$$c = c_1 = \sqrt{\frac{2G + \lambda}{\rho}}; \quad (5.6)$$

а для волн искажения

$$c = c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (5.7)$$

Так как

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}; \quad \lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)},$$

где  $E$ ,  $\mu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, можно записать

$$c_1 = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \frac{E}{\rho}}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)} \frac{E}{\rho}}. \quad (5.8)$$

## 5.2 ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

Предположим, что в некоторой точке упругой среды создаётся какое-то возмущение. От этой точки во все стороны будут распространяться волны. На достаточно большом расстоянии от источника возмущения волны можно рассматривать как плоские. Материальные частицы будут двигаться либо вдоль направления распространения волны, либо поперёк. Таким образом, на достаточном удалении от источника возмущения волны расширения и волны искажения принимают вид плоских продольных и поперечных волн. Рассмотрим их подробнее.

**5.2.1 Продольные волны.** Пусть ось  $x_1$  совпадает с направлением распространения волн. В случае продольных волн частицы перемещаются только вдоль оси  $x_1$ :

$$u_1 = u_1(x_1, t); \quad u_2 = u_3 = 0.$$

Если обозначить  $u = u_1$ ,  $x = x_1$ , из уравнений (5.4) будем иметь равенство

$$(2G + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.9)$$

Любая функция  $f(x - c_1 t)$ , аргументом которой является величина  $\xi = x - c_1 t$ , служит решением уравнения (5.9). В самом деле,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c_1 f'(\xi); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c_1^2 f''(\xi),$$

где

$$f'(\xi) = \frac{df(\xi)}{d\xi}.$$

С другой стороны,

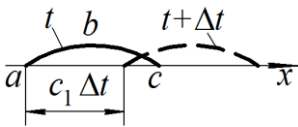
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(\xi); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(\xi),$$

так что равенство (5.9) удовлетворяется.

Точно так же уравнению (5.9) удовлетворяет любая функция вида  $f_1(x + c_1 t)$ , аргументом которой служит величина  $x + c_1 t$ . Общее решение уравнения (5.9) может быть представлено в форме

$$u(x, t) = f(x - c_1 t) + f_1(x + c_1 t). \quad (5.10)$$

Чтобы понять физический смысл такого решения, рассмотрим функцию  $f(x - c_1 t)$  в некоторый фиксированный момент времени  $t$ . Она будет являться некоторой функцией координаты  $x$ , которая может быть представлена, скажем, кривой  $abc$  (рисунок 5.1). По прошествии малого промежутка



времени  $\Delta t$  аргумент функции станет равным  $x - c_1(t + \Delta t) = x - c_1 t - c_1 \Delta t$ . Значения функции  $f$  останутся неизменными, если одновременно

с приращением  $\Delta t$  дать приращение координаты  $\Delta x = c_1 \Delta t$ . Следовательно, по прошествии

времени  $\Delta t$  вся кривая  $abc$  сместится в положительном направлении оси  $x$  на расстояние  $c_1 \Delta t$ . Иначе говоря, функция  $f$  представляет волну, которая движется в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $c_1$ . Точно так же

$f_1(x + c_1 t)$  есть волна, движущаяся в противоположном направлении со скоростью  $c_1$ . Таким образом, общее решение (5.10) представляет две волны, движущиеся с одинаковой скоростью  $c_1$  в противоположных направлениях.

Значение  $c_1$  определяется формулой (5.8). Например, для стали ( $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 0,3$ )  $c_1 = 6020$  м/с.

Скорость распространения волны  $c_1$  следует отличать от скорости движения  $\dot{u}$  материальных частиц среды. Скажем, для прямой волны перемещение частицы определяется выражением

$$u = f(x - c_1 t) = f(\xi), \quad (5.11)$$

где  $\xi = x - c_1 t$ . Скорость частицы

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = -c_1 f'(\xi). \quad (5.12)$$

Отметим, что в волновом движении кинетическая энергия совпадает с потенциальной энергией деформации в каждый момент времени. В самом деле, кинетическая энергия  $dT$  бесконечно малого объема  $d\tau$  равна

$$dT = \frac{1}{2} \rho d\tau \dot{u}^2 = \frac{1}{2} \rho c_1^2 [f'(\xi)]^2 d\tau. \quad (5.13)$$

Потенциальная энергия деформации  $dU$ , накапливаемая в объеме  $d\tau$ , определяется как  $Wd\tau$ , где  $W$  – удельная потенциальная энергия деформации. Через компоненты тензора деформации  $W$  выражается по формуле (4.29):

$$W = G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\lambda\theta^2.$$

В рассматриваемом случае, когда  $u_2 = u_3 = 0$ , а  $u_1 = u$ , будем иметь в соответствии с (5.11)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x} = f'(\xi); \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0; \quad \varepsilon_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Тогда

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{11} = f'(\xi),$$

так что

$$W = G\varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{11}^2 = \frac{1}{2}(2G + \lambda)\varepsilon_{11}^2 = \frac{1}{2}(2G + \lambda)[f'(\xi)]^2.$$

Следовательно,

$$dU = \frac{1}{2}(2G + \lambda)[f'(\xi)]^2 d\tau. \quad (5.15)$$

Если учесть соотношение

$$c_1^2 = \frac{2G + \lambda}{\rho},$$

то из сравнения (5.13) и (5.15) можно заключить, что  $dU = dT$ , то есть *кинетическая и потенциальная энергии в волновом движении имеют одинаковые значения*.

Выразим далее компоненты тензора напряжений через  $u$ . По закону Гука

$$\sigma_{11} = 2G\varepsilon_{11} + \lambda\theta = 2G\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{11} = (2G + \lambda)\varepsilon_{11};$$

$$\sigma_{22} = 2G\varepsilon_{22} + \lambda\theta = \lambda\varepsilon_{11};$$

$$\sigma_{33} = 2G\varepsilon_{33} + \lambda\theta = \lambda\varepsilon_{11}.$$

На основании равенств (5.12) и (5.14) можно записать



$$\varepsilon_{11} = f'(\xi) = -\frac{1}{c_1} \dot{u}. \quad (5.16)$$

Учитывая также, что  $2G + \lambda = c_1^2 \rho$ , получаем для  $\sigma_{11}$  выражение

$$\sigma_{11} = -c_1 \rho \dot{u}. \quad (5.17)$$

Компоненты  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$  выражаются через  $\sigma_{11}$  следующим образом:

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\lambda}{2G + \lambda} \sigma_{11}$$

или

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_{11}. \quad (5.18)$$

Полученные соотношения справедливы и для волны противоположного направления, представленной равенством  $u = f_1(x + c_1 t)$ , только в формулах (5.12), (5.16) и (5.17) отрицательный знак следует сменить на положительный.

Конкретный вид функций  $f$  и  $f_1$  определяется начальными условиями. Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  задано распределение перемещений и скоростей вдоль оси  $x$ :

$$u|_{t=0} = u_0(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{u}_0(x).$$

Тогда для определения  $f$  и  $f_1$  имеем согласно (5.10) и (5.12) условия

$$\begin{aligned} f(x) + f_1(x) &= u_0(x); \\ c_1 [-f'(x) + f_1'(x)] &= \dot{u}_0(x). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Пусть, в частности, начальные скорости  $\dot{u}_0 = 0$ . Условия (5.19) будут удовлетворяться, если

$$f(x) = f_1(x) = \frac{1}{2} u_0(x).$$

Таким образом, в этом случае начальное перемещение делится на две равные части, которые затем распространяются в противоположных направлениях в виде продольных волн.

**5.2.2 Поперечные волны.** В случае поперечных волн перемещения частиц происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волн. Совместим ось  $x_1$ , как и ранее, с направлением распространения волн, а ось  $x_2$  – с направлением поперечного перемещения. Тогда можно записать

$$u_1 = u_3 = 0; \quad u_2 = u_2(x_1, t).$$

Обозначая  $x = x_1$ ;  $v = u_2$ , будем иметь на основании (5.3) уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (5.20)$$

Его общее решение аналогично (5.10):

$$v(x, t) = f(x - c_2 t) + f_1(x + c_2 t),$$

где  $f$  и  $f_1$  – произвольные функции своих аргументов. Они описывают поперечные волны, которые движутся в прямом и обратном направлениях со скоростью  $c_2$ . Величина  $c_2$  даётся второй формулой (5.8). Отношение скоростей  $c_2/c_1$  составляет величину

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{1 - 2\mu}{2(1 - \mu)}}.$$

При  $\mu = 0,3$  будем иметь, в частности,  $c_2 = 0,53c_1$ .

Рассмотрим распространение поперечных волн в положительном направлении оси  $x$ :

$$v = f(\xi),$$

где  $\xi = x - c_2 t$ . Из всех компонент тензора деформации только компонента  $\varepsilon_{12}$  будет отлична от нуля:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} f'(\xi).$$

Скорость перемещения частиц

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} = -c_2 f'(\xi);$$

с учётом этого можно записать

$$\varepsilon_{12} = -\frac{1}{2c_2} \dot{v}. \quad (5.21)$$

Кинетическая энергия элементарного объёма будет

$$dT = \frac{1}{2} \rho \dot{v}^2 d\tau.$$

В рассматриваемом случае объёмная деформация  $\theta = 0$ , и для потенциальной энергии деформации получаем

$$dU = W d\tau = \left( G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda \theta^2 \right) d\tau = 2G \varepsilon_{12}^2 d\tau.$$

Подставим сюда равенство (5.21), а также вытекающее из формулы (5.7) соотношение

$$G = \rho c_2^2.$$

В итоге получим

$$dU = \frac{1}{2} \rho v^2 d\tau,$$

что совпадает с выражением для  $dT$ . Таким образом, и в случае поперечных волн в каждый момент времени кинетическая энергия совпадает с потенциальной.

Во время землетрясения в его эпицентре возникают волны, распространяющиеся со скоростями  $c_1$  и  $c_2$ . Они регистрируются с помощью сейсмографов, и по времени запаздывания одних волн относительно других можно получить представление о расстоянии до центра возмущения.

Волны расширения и волны искажения, которые распространяются со скоростями  $c_1$  и  $c_2$ , являются единственно возможными в *неограниченной* изотропной и однородной среде. Если же имеется свободная граница, оказывается возможным и принципиально другой тип волн, называемых волнами Рэлея. Они происходят в тонком приграничном слое и подобны кругам на гладкой поверхности жидкости от брошенного в неё камня. Рассматривать их подробно мы здесь не будем.

### 5.3 ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЯХ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

Будем предполагать, что при распространении продольных волн вдоль стержня перемещение  $u$  постоянно по сечению (рисунок 5.2). Тогда относительная деформация  $\varepsilon$  и нормальное напряжение  $\sigma$  будут в сечении также постоянны:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Здесь  $E$  – модуль упругости материала стержня;  $x$  – продольная координата.

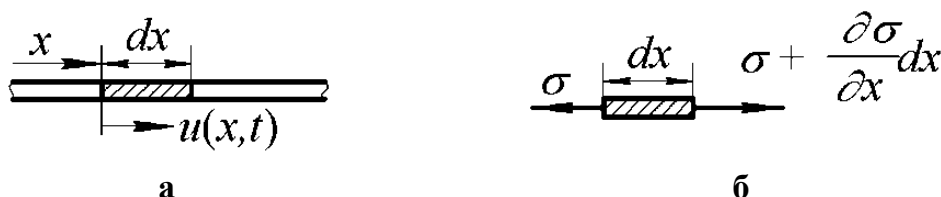


Рисунок 5.2 – Продольное перемещение (а) и напряжения (б) в стержне

Обозначая через  $A$  площадь сечения стержня, а через  $\rho$  плотность материала, запишем уравнение движения бесконечно малого элемента  $dx$  стержня:

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) A - \sigma A.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5.22)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (5.23)$$

Для стали и алюминиевых сплавов величина  $c$  составляет приблизительно 5100 м/с.

Общее решение уравнения (5.22) можно, как и ранее, записать в форме

$$u(x, t) = f(x - ct) + f_1(x + ct), \quad (5.24)$$

где первое слагаемое соответствует прямой волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , а второе – обратной волне, двигающейся в противоположном направлении.

Рассмотрим прямую волну, для которой  $u = f(\xi)$ , где  $\xi = x - ct$ . Скорость движения материальных частиц материала для неё составляет

$$\dot{u} = -cf'(\xi). \quad (5.25)$$

Продольная деформация определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = f'(\xi),$$

а напряжение в произвольном сечении стержня будет

$$\sigma = E\varepsilon = Ef'(\xi).$$

На основании (5.25) можно записать равенство

$$\sigma = -\frac{E}{c}\dot{u}.$$

С учётом формулы (5.23) приходим к соотношению

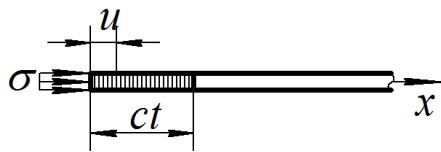
$$\sigma = -\sqrt{E\rho}\dot{u}. \quad (5.26)$$

В случае обратной волны, когда  $u = f_1(\xi)$ , где  $\xi = x + ct$ , будем иметь

$$\sigma = \sqrt{E\rho}\dot{u}.$$

Последние соотношения показывают, что в волне растяжения (когда  $\sigma > 0$ ), скорость движения частиц  $\dot{u}$  имеет направление, противоположное направлению распространения волны, а в волне сжатия скорость  $\dot{u}$  совпадает с направлением распространения волны.

Предположим, что к левому концу стержня, показанного на рисунке 5.3, мгновенно прикладываются равномерно распределённые по сечению сжимающие напряжения, которые затем сохраняются неизменными. Через  $\sigma$  обозначим абсолютное значение напряжений. Напряжения вызовут сжатие



**Рисунок 5.3 – Распространение вдоль стержня волны сжатия**

примыкающего к концу малого участка стержня, затем они будут передаваться на следующие слои – вдоль стержня с некоторой скоростью  $c$  начнёт распространяться волна сжатия. По прошествии времени  $t$  участок стержня длиной  $l = ct$  окажется сжатым. При этом во всех сечениях сжатого участка напряжения будут иметь одинаковое значение  $\sigma$ .

Применив к сжатому участку элементарные соображения, можно вывести все соотношения, полученные выше.

В самом деле, укорочение  $\bar{u}$  сжатого участка можно найти по формуле

$$\bar{u} = \frac{\sigma}{E} l = \frac{\sigma ct}{E},$$

где  $E$  – модуль упругости материала.

Дифференцируя данное выражение по времени, найдём скорость перемещения нагруженного конца. С такой же скоростью будет перемещаться любое сечение нагруженного участка, то есть мы получаем скорость движения частиц  $\dot{u}$ :

$$\dot{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{c}{E} \sigma.$$

Если  $A$  – площадь сечения стержня, то, импульс приложенной к стержню силы  $A\sigma$  за время  $t$  составит величину  $A\sigma t$ . Масса рассматриваемого участка стержня равна  $\rho Al = \rho Act$ , где  $\rho$  – плотность материала. По закону сохранения количества движения имеем

$$A\sigma t = \rho Act \dot{u},$$

откуда следует, что  $c = \frac{\sigma}{\rho \dot{u}}$ . Подставив сюда записанное выше выражение

для  $\dot{u}$ , приходим к равенству

$$c = \frac{E}{\rho c}$$

Из него вытекает формула

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

которая совпадает с формулой (5.23). Если подставить данное равенство в выражение для  $\dot{u}$ , получим соотношение

$$\dot{u} = \frac{\sigma}{\sqrt{E\rho}}, \quad (5.27)$$

которое также соответствует полученному ранее результату.

Найдём далее энергию рассматриваемого участка стержня. Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \rho A l \dot{u}^2 = \frac{1}{2} \rho A c t \dot{u}^2.$$

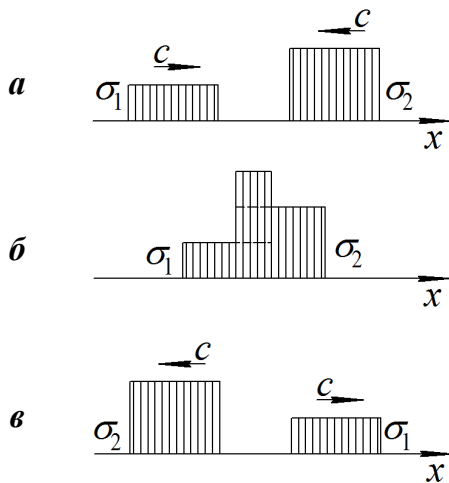
На основании равенства (5.27) имеем

$$T = \frac{A c t \sigma^2}{2 E}.$$

Потенциальная энергия деформации стержня равна

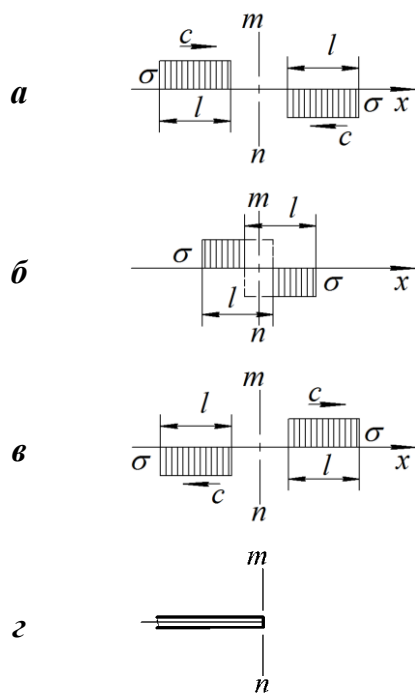
$$U = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma \cdot A l = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} A c t,$$

что совпадает с величиной кинетической энергии. Как видим, работа внешней силы



**Рисунок 5.4 – Суперпозиция двух волн сжатия**

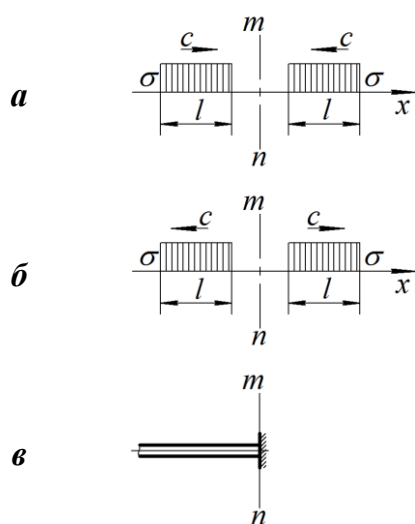
затраченная на деформирование стержня, состоит наполовину из кинетической, а наполовину из потенциальной энергии. Уравнение (5.22) линейно. Поэтому сумма двух любых его решений также будет его решением. Следовательно, при исследовании процессов распространения волн можно пользоваться принципом суперпозиции. Если, скажем, встречаются две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, то получающиеся при этом напряжения и скорости частиц можно найти с помощью суперпозиции. На рисунке 5.4,а показаны в качестве примера две волны сжатия, двигаю -



**Рисунок 5.5 – Суперпозиция встречных волн разного знака**

рону оси  $x$ .

После прохождения рассматриваемого участка волны продолжают движение, имея свою первоначальную форму (рисунок 5.5,в). На протяжении



**Рисунок 5.6 – Суперпозиция встречных волн одинакового знака**

всего этого процесса напряжение в среднем сечении  $mn$  остаётся равным нулю. Поэтому картина не изменится, если разрезать стержень в сечении  $mn$ . Но тогда рассмотренный процесс можно трактовать как отражение волны от свободного конца (рисунок 5.5,з). Сравнивая рисунки 5.5,а и в, можно заключить, что в случае свободного конца волна сжатия отражается от него в виде подобной волны растяжения и наоборот.

Если встречаются две волны одинакового знака (рисунок 5.6,а), то при их наложении напряжения будут удваиваться, а результирующие скорости частиц будут равны нулю. Следовательно, среднее сечение  $mn$ , которое всё время остаётся неподвижным, можно рассматривать как заделанный конец стержня (рисунок 5.6,в). Из сравнения рисунков 5.6,а и б следует вывод о том, что при отра-

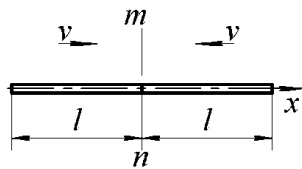
ющиеся навстречу друг другу. При их наложении результирующие напряжения будут равны сумме  $\sigma_1 + \sigma_2$  (рисунок 5.4,б), а результирующие скорости – разности скоростей. После прохождения общего участка волны продолжают движение, сохранив свою первоначальную форму (рисунок 5.4,в). Пусть вдоль оси  $x$  распространяется волна сжатия, а навстречу ей распространяется волна растяжения той же длины и с той же величиной напряжения (рисунок 5.5,а). Когда волны встретятся и произойдёт их наложение, напряжения сжатия и растяжения будут взаимно уничтожаться (рисунок 5.5, б). В то же время скорости частиц на участке наложения волн будут удваиваться, поскольку в каждой волне они направлены в положительную сторону оси  $x$ .

Если встречаются две волны одинакового знака (рисунок 5.6,а), то при их наложении напряжения будут удваиваться, а результирующие скорости частиц будут равны нулю. Следовательно, среднее сечение  $mn$ , которое всё время остаётся неподвижным, можно рассматривать как заделанный конец стержня (рисунок 5.6,в). Из сравнения рисунков 5.6,а и б следует вывод о том, что при отра-

жении волны от заделанного конца знак напряжений сохраняется неизменным.

#### 5.4 ПРОДОЛЬНОЕ СОУДАРЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

Рассмотрим процесс продольного соударения двух стержней одинакового сечения, изготовленных из одного и того же материала и движущихся вдоль одной прямой. Предположим вначале, что стержни имеют одинаковую длину  $l$  и движутся навстречу друг другу с одинаковой скоростью  $v$  (рисунок 5.7). В процессе соударения сечение контакта  $mn$  будет оставаться неподвижным. От него вдоль стержней будут распространяться волны сжатия со скоростью  $c$ . Скорости частиц в волновом движении накладываются на начальные скорости движения стержней, что приводит соответствующие сечения в состояние покоя. Таким образом, абсолютное значение  $\dot{u}$  равно  $v$ . Формула (5.27) позволяет установить величину сжимающего напряжения:



$$\sigma = v\sqrt{E\rho}.$$

Рисунок 5.7 – Встречное соударение одинаковых стержней

Как видим, напряжение при ударе определяется в данном случае только скоростью  $v$  и характеристиками материала стержней.

В тот момент, когда волны сжатия достигнут свободных концов (при  $t = l/c$ ), оба стержня будут находиться в состоянии покоя, испытывая при этом равномерное сжатие. Затем волны отразятся от свободных концов в виде волн растяжения, которые будут двигаться в направлении сечения  $mn$ , уничтожая имеющееся сжатие. В этих волнах скорость движения частиц  $\dot{u}$  также равна  $v$ , и она снова имеет направление от сечения  $mn$  к свободным концам. Когда волны достигнут места контакта, произойдет разделение стержней со скоростью, равной начальной скорости  $v$ . Продолжительность соударения равна, очевидно,  $2l/c$ .

Предположим далее, что два одинаковых стержня движутся в одном направлении со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  (рисунок 5.8), причём  $v_1 > v_2$ . В момент удара возникнут две волны сжатия, распространяющиеся со скоростью  $c$  от

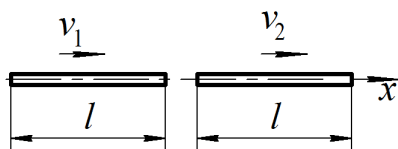


Рисунок 5.8 – Соударение при движении стержней в одном направлении

места контакта к свободным концам стержней. Напряжения  $\sigma$  и скорости движения частиц  $\dot{u}$  в обеих волнах будут одинаковыми. Направление  $\dot{u}$  совпадает с направлением распространения соот-



ветствующей волны. Абсолютные скорости находящихся в контакте концов стержней должны совпадать, так что мы имеем равенство

$$v_1 - \dot{u} = v_2 + \dot{u}.$$

Отсюда устанавливаем значение  $\dot{u}$ :

$$\dot{u} = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

В соответствии с формулой (5.27) находим напряжение

$$\sigma = \frac{v_1 - v_2}{2} \sqrt{E\rho}. \quad (5.29)$$

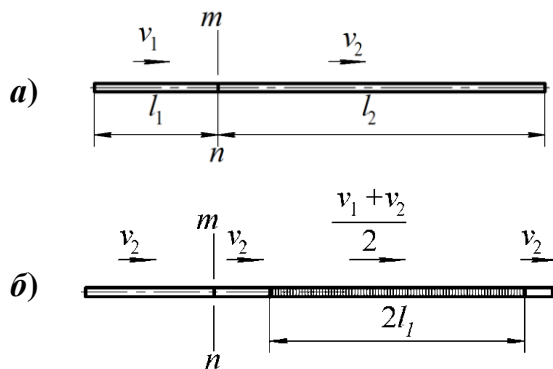
По прошествии времени  $l/c$  волны сжатия достигнут свободных концов стержней. В это время оба стержня будут испытывать однородное сжатие, а абсолютные скорости частиц для каждого стержня будут одинаковы по длине и составят значение

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 - \dot{u} = v_1 - \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}; \\ v_2' &= v_2 + \dot{u} = v_2 + \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Затем произойдёт отражение волн. Когда отражённые волны подойдут к месту контакта, оба стержня будут свободны от напряжений. Направление  $\dot{u}$  в отражённой волне растяжения такое же, как и в волне сжатия. Поэтому абсолютные значения скоростей определяются по формулам

$$\begin{aligned} v_1'' &= v_1' - \dot{u} = \frac{v_1 + v_2}{2} - \frac{v_1 - v_2}{2} = v_2; \\ v_2'' &= v_2' + \dot{u} = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 - v_2}{2} = v_1. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Можно сказать, что в процессе удара стержни обмениваются скоростями. После этого они продолжают движение как абсолютно жёсткие тела. Продолжительность соударения снова будет равна  $2l/c$ . Более сложная картина



**Рисунок 5.9 – Соударение стержней разной длины**

возникает в том случае, когда стержни имеют разную длину. Пусть, например, первый стержень короче второго, то есть  $l_1 < l_2$  (рисунок 5.9,а). Вначале процесс соударения протекает так же, как и в предыдущем случае. Скорости частиц в волновом движении и контактное напряжение по-прежнему определяются соотношениями (5.28) и (5.29). Но по

прошествии времени  $t = 2l_1/c$  отражённая волна в более коротком стержне достигнет места контакта, и напряжение в сечении  $mn$  окажется равным нулю. Короткий стержень согласно первому равенству (5.31) будет иметь скорость  $v_1'' = v_2$ . Во втором же стержне возникнет состояние, которое для случая  $l_2 > 2l_1$  показано на рисунке 5.9,б. Стержень будет содержать движущуюся в нём волну сжатия длиной  $2l_1$ . На участке волны абсолютные скорости составят согласно (5.30) величину  $v_2' = (v_1 + v_2)/2$ , а вне этого участка точки второго стержня будут иметь первоначальную скорость  $v_2$ . Как видим, контакт в сечении  $mn$  будет сохраняться и в условиях отсутствия контактного напряжения. Разделение стержней произойдёт, когда волна сжатия, отразившись от свободного конца второго стержня, вернётся к сечению  $mn$ . Длительность соударения составит, таким образом,  $t = 2l_2/c$ . Второй стержень после отскока будет содержать движущуюся в нём волну, и абсолютные скорости частиц будут различными в разных областях стержня.

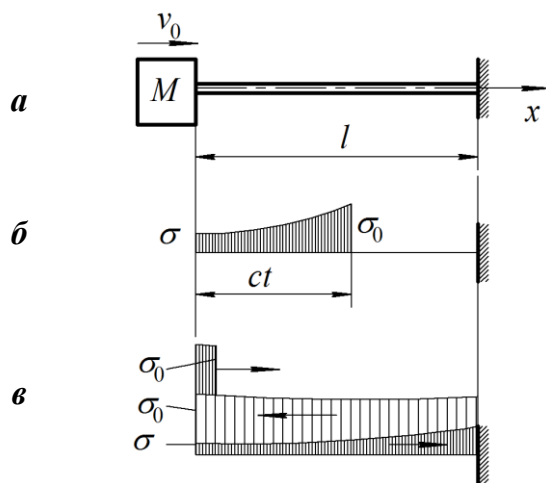
### 5.5 ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР МАССОЙ ПО СТЕРЖНЮ

Пусть стержень длиной  $l$  закреплён на одном конце и испытывает продольный удар абсолютно жёстким телом массой  $M$ , движущимся со скоростью  $v_0$  (рисунок 5.10,а). В момент удара частицы на конце стержня приобретут скорость

$$\dot{u}_0 = v_0,$$

и в месте контакта возникнет сжимающее напряжение, абсолютная величина которого определяется формулой (5.27):

$$\sigma_0 = \dot{u}_0 \sqrt{E\rho} = v_0 \sqrt{E\rho}.$$



**Рисунок 5.10 – Удар массой по стержню**

Затем движение массы начнёт замедляться, в результате чего скорость  $\dot{u}$ , а, соответственно, и напряжение станут уменьшаться. Вдоль стержня будет распространяться волна сжатия с напряжением  $\sigma_0$  на фронте и с уменьшающимся напряжением  $\sigma$  на ударяемом конце (рисунок 5.10,б). Чтобы установить зависимость  $\sigma$  от времени, запишем уравнение движения массы. Если

площадь сечения стержня равна  $A$ , то со стороны стержня на массу действует сила  $A\sigma$ , и согласно второму закону Ньютона будем иметь

$$M \frac{dv}{dt} = -\sigma A, \quad (5.32)$$

где  $v$  – скорость массы в текущий момент времени. Поскольку ударяющая масса находится в контакте со стержнем, скорость  $\dot{u}$  на конце стержня будет совпадать с  $v$ , и на основании (5.27) можно записать

$$\dot{u} = v = \frac{\sigma}{\sqrt{E\rho}}.$$

Подстановка данного соотношения в равенство (5.32) даёт уравнение относительно  $\sigma$ :

$$\frac{M}{\sqrt{E\rho}} \frac{d\sigma}{dt} = -\sigma A.$$

Обозначим через

$$\alpha = \frac{\rho A l}{M} \quad (5.33)$$

относительную массу стержня, а через

$$T = \frac{2l}{c} \quad (5.34)$$

– промежуток времени, требуемый для прохождения волны до конца стержня и обратно. Учитывая, что

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

уравнение движения можно привести к виду

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2\alpha}{T} \sigma. \quad (5.35)$$

Разделяя здесь переменные, запишем

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{2\alpha}{T} dt.$$

Интегрирование последнего равенства даёт

$$\ln \sigma - \ln c_0 = -\frac{2\alpha}{T} t$$

или

$$\ln \frac{\sigma}{c_0} = -\frac{2\alpha}{T} t,$$

где  $c_0$  – произвольная постоянная.

Отсюда

$$\sigma = c_0 e^{-\frac{2\alpha}{T}t}.$$

В момент времени  $t = 0$  имеем  $\sigma = \sigma_0$ , откуда следует, что  $c_0 = \sigma_0$ . Таким образом, приходим к экспоненциальной зависимости вида

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{2\alpha}{T}t} \quad (5.36)$$

Данное выражение справедливо лишь до тех пор, пока  $t < T$ . В момент времени  $t = T$  волна сжатия с напряжением  $\sigma_0$  на фронте возвратится к месту контакта массы со стержнем и начнёт отражаться от ударяемого конца. Скорость массы  $M$  не может измениться мгновенно, поэтому отражение будет происходить так же, как от заделанного конца. К имеющемуся напряжению  $\sigma$  скачком добавится величина  $2\sigma_0$ , и возникнет картина, показанная на рисунке 5.10,в. Полное напряжение сжатия будет создаваться двумя волнами, движущимися от ударяемого конца, и одной волной, движущейся к этому концу. Такое же скачкообразное изменение напряжения будет происходить в процессе удара в конце каждого интервала времени длиной  $T$ .

Пусть  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $s_3(t)$ , ... — сжимающие напряжения на ударяемом конце стержня, вызванные всеми волнами, уходящими от него по прошествии времени соответственно  $T$ ,  $2T$ ,  $3T$ , ... с начала удара. Через  $\tilde{s}_1(t)$ ,  $\tilde{s}_2(t)$ ,  $\tilde{s}_3(t)$  ... обозначим напряжения, которые вызываются волнами, приходящими к этому концу в те же интервалы времени. Уходящая в некоторый момент времени  $t$  волна с напряжением  $s_n(t)$  на фронте вернётся по прошествии времени  $T$  к ударяемому концу в виде приходящей волны  $\tilde{s}_{n+1}(t+T)$ . Следовательно, можно записать

$$s_n(t) = \tilde{s}_{n+1}(t+T)$$

или, иначе,

$$\tilde{s}_n(t) = s_{n-1}(t-T). \quad (5.37)$$

При этом под  $s_0(t)$  должна пониматься зависимость, выражаемая равенством (5.36):

$$s_0(t) = \sigma_0 e^{-\frac{2\alpha}{T}t}. \quad (5.38)$$

Таким образом, результирующее контактное напряжение в промежутке времени  $nT < t < (n+1)T$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , представляет собой сумму

$$\sigma = s_n(t) + s_{n-1}(t-T). \quad (5.39)$$

Скорость движения частиц на конце стержня в уходящей волне будет в указанном промежутке времени равна

$$\dot{u}_n = \frac{1}{\sqrt{E\rho}} s_n(t),$$

а в приходящей волне –

$$\dot{\tilde{u}}_n = \frac{1}{\sqrt{E\rho}} \tilde{s}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{E\rho}} s_{n-1}(t-T).$$

Скорости  $\dot{u}_n$  и  $\dot{\tilde{u}}_n$  имеют противоположные направления, поэтому результирующая скорость  $\dot{u}$  определится как разность  $\dot{u} = \dot{u}_n - \dot{\tilde{u}}_n$ . Находясь в контакте со стержнем, масса  $M$  также имеет скорость  $v = \dot{u}$ , так что

$$v = \frac{1}{\sqrt{E\rho}} [s_n(t) - s_{n-1}(t-T)].$$

Подставив данное выражение вместе с соотношением (5.39) в уравнение движения массы (5.32), придем вместо (5.35) к равенству

$$\frac{d}{dt} [s_n(t) - s_{n-1}(t-T)] = -\frac{2\alpha}{T} [s_n(t) + s_{n-1}(t-T)].$$

Если ввести обозначение

$$F(t) = s_n(t) - s_{n-1}(t-T), \quad (5.40)$$

то полученное равенство может быть представлено в форме

$$\frac{d}{dt} F(t) + \frac{2\alpha}{T} F(t) = -\frac{4\alpha}{T} s_{n-1}(t-T).$$

Данное уравнение легко проинтегрировать, если переписать его в следующем виде:

$$e^{\frac{2\alpha}{T}t} \frac{d}{dt} \left[ e^{\frac{2\alpha}{T}t} F(t) \right] = -\frac{4\alpha}{T} s_{n-1}(t-T).$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$F(t) = -\frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha}{T}t} \left[ \int e^{\frac{2\alpha}{T}t} s_{n-1}(t-T) dt + C_n \right],$$

где  $C_n$  – постоянная интегрирования.

Из соотношения (5.40) вытекает далее следующая формула для последовательного вычисления функций  $s_n(t)$ :

$$s_n(t) = -\frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha}{T}t} \left[ \int e^{\frac{2\alpha}{T}t} s_{n-1}(t-T) dt + C_n \right] + s_{n-1}(t-T). \quad (5.41)$$

Постоянная  $C_n$  определяется из условия (см. рисунок 5.10,б)

$$s_n(nT) = s_{n-1}(nT) + \sigma_0. \quad (5.42)$$

Подставив, в частности, выражение (5.38) в (5.41), получим

$$\begin{aligned} s_1(t) &= -\frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha}{T}t} \left[ \int e^{\frac{2\alpha}{T}t} \sigma_0 e^{-\frac{2\alpha}{T}(t-T)} dt + C_1 \right] + \sigma_0 e^{-\frac{2\alpha}{T}(t-T)} = \\ &= \sigma_0 e^{-2\alpha \frac{t-T}{T}} \left( 1 - \frac{4\alpha}{T}t \right) - C_1 \frac{4\alpha}{T} e^{-\frac{2\alpha}{T}t}. \end{aligned}$$

Для нахождения постоянной  $C_1$  имеем в соответствии с (5.42) условие

$$s_1(t) = s_0(T) + \sigma_0$$

или

$$\sigma_0(1 - 4\alpha) - C_1 \frac{4\alpha}{T} e^{-2\alpha} = \sigma_0 e^{-2\alpha} + \sigma_0.$$

Отсюда имеем

$$C_1 = -\frac{\sigma_0 T}{4\alpha} (1 + 4\alpha e^{2\alpha}).$$

С учётом этого результата выражение для  $s_1$  можно записать в виде

$$s_1 = s_0 + \sigma_0 e^{-2\alpha \left(\frac{t}{T}-1\right)} \left[ 1 + 4\alpha \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \right]. \quad (5.43)$$

Подобным же образом могут быть выведены соотношения

$$s_2 = s_1 + \sigma_0 e^{-2\alpha \left(\frac{t}{T}-2\right)} \left[ 1 + 2 \cdot 4\alpha \left( 2 - \frac{t}{T} \right) + 2 \cdot 4\alpha^2 \left( 2 - \frac{t}{T} \right)^2 \right]; \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} s_3 = s_2 + \sigma_0 e^{-2\alpha \left(\frac{t}{T}-3\right)} &\left[ 1 + 2 \cdot 6\alpha \left( 3 - \frac{t}{T} \right) + 2 \cdot 3 \cdot 4\alpha^2 \left( 3 - \frac{t}{T} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3} 8\alpha^2 \left( 3 - \frac{t}{T} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (5.45)$$

и т.д.

Зависимости (5.43)...(5.45) при  $\sigma_0 = 1$  показаны на рисунке 5.11 для четырёх различных значений параметра  $\alpha$  (5.33). Звёздочкой на кривых отмечен момент окончания удара. Он определяется из условия обращения в ноль контактного напряжения (5.39). Расчёты дают следующую величину продолжительности удара  $t^*$ :

$\alpha$	1/6	1/4	1/2	1
$2t^*/T$	7,419	5,900	4,708	3,068

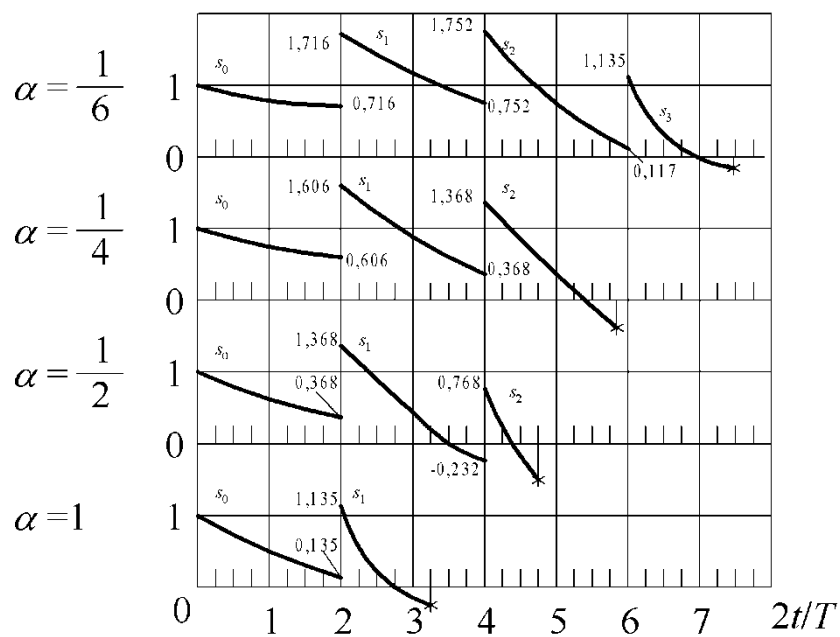


Рисунок 5.11 – Зависимости  $s_n(t)$

Чтобы получить значение сжимающих напряжений на ударяемом конце, нужно воспользоваться формулой (5.39). Получаемые при этом результаты представлены на рисунке 5.12.

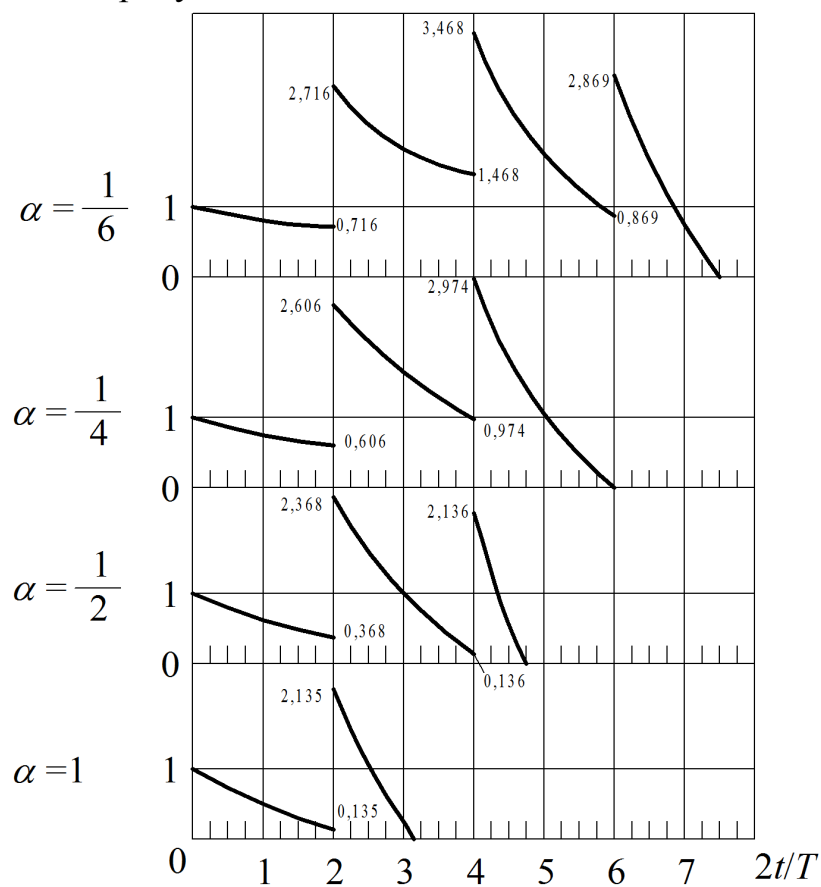


Рисунок 5.12 – Напряжения на ударяемом конце стержня

Максимальные напряжения при ударе возникают, однако, на противоположном конце. Когда уходящая волна с напряжением  $s_n$  достигает закреплённого конца и отражается от него, напряжение на заделанном конце будет равно  $2s_n$ . Следовательно, максимальное напряжение на закреплённом конце есть удвоенное максимальное значение  $s_n$ . Как видно из рисунка 5.11, при  $\alpha = 1/6; 1/4; 1/2; 1$  максимальные сжимающие напряжения составят  $2 \cdot 1,752$ ;  $2 \cdot 1,606$ ;  $2 \cdot 1,368$ ;  $2 \cdot 1,135$  соответственно.



## 6 АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 6.1 АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Представим себе длинное цилиндрическое тело, нагруженное по боковой поверхности усилиями, равномерно распределёнными вдоль образующих и направленными вдоль образующих. Направим ось  $x_3$  по оси цилиндра, оси  $x_\alpha$  ( $x_1$  и  $x_2$ ) – в плоскости поперечного сечения. Здесь и далее греческие индексы в обозначениях переменных принимают значения 1 и 2.

Контур, ограничивающий поперечное сечение цилиндра, обозначим буквой  $\Gamma$ , а направляющие косинусы к контуру обозначим через  $n_\alpha$ ;  $n_3 = 0$  на всей боковой поверхности.

Согласно сделанному предположению на боковой поверхности

$$p_3 = p_3(s); \quad p_1 = p_2 = 0,$$

где  $s$  – дуга, отсчитываемая в поперечном сечении цилиндра от некоторой произвольно выбранной образующей.

Граничные условия на торцах пока оставим в стороне. Будем рассматривать сечения, достаточно удалённые от торцов.

Будем предполагать, что деформация тела характеризуется перемещением  $u_3 = \frac{1}{G}u(x_\alpha)$ , в то время как перемещения точек сечения в плоскости сечения отсутствуют. Множитель  $\frac{1}{G}$  введён для удобства последующих выкладок. Такое деформированное состояние называется антиплоской деформацией.

В соответствии с формулами Коши будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} &= 0; \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2G} u_{,1}; \\ \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2G} u_{,2}. \end{aligned}$$

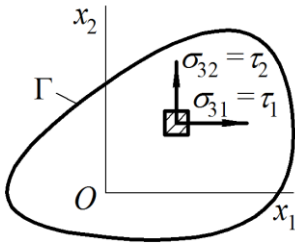
По формулам закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} &= 0; \\ \sigma_{31} = 2G\varepsilon_{31} = u_{,1}; \quad \sigma_{32} = 2G\varepsilon_{32} = u_{,2}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Отличные от нуля компоненты тензора напряжений представляют собой касательные напряжения в плоскости поперечного сечения (рисунок 6.1).

Будем обозначать их для краткости  $\sigma_{31} = \tau_1$ ;  $\sigma_{32} = \tau_2$ , так что

$$\tau_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}; \quad \tau_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}. \quad (6.2)$$



**Рисунок 6.1 – Касательные напряжения в сечениях тела**

Так как объёмные силы отсутствуют, из трёх уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + R_1 = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + R_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + R_3 = 0$$

два первых будут удовлетворяться тождественно, третье же примет простой вид

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} = 0. \quad (6.3)$$

Статические условия на боковой поверхности

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = p_1;$$

$$\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 = p_2;$$

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 = p_3$$

приводят к требованию, чтобы на контуре  $\Gamma$  выполнялось равенство

$$\tau_1 n_1 + \tau_2 n_2 = p_3(s), \quad (6.4)$$

остальные же условия удовлетворяются тождественно.

Если продифференцировать первое из соотношений (6.2) по  $x_2$ , а второе по  $x_1$  и вычесть результаты один из другого, то получим

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} = 0. \quad (6.5)$$

Равенства (6.3) и (6.5) аналогичны известным соотношениям Коши - Римана, которые связывают действительную и мнимую части функции комплексной переменной

$$z = x_1 + ix_2,$$

где  $i$  – мнимая единица. Благодаря этому оказывается, что решение задачи значительно упрощается с привлечением аппарата теории функций комплексной переменной.

Образую функцию комплексной переменной  $w(z)$  следующим образом:

$$w(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2).$$

Здесь в дополнение к искомой функции  $u(x_1, x_2)$  введена в качестве мнимой части  $w(z)$  ещё одна функция  $v(x_1, x_2)$ . Условие дифференцируемости (или условие аналитичности) функции  $w(z)$  устанавливается соотношениями Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad (6.6)$$

которым и необходимо подчинить функцию  $v(x_1, x_2)$ .

Запишем далее выражение для производной  $w'(z)$ . Производная от функции комплексной переменной  $z$  не зависит от того направления, по которому сообщается приращение независимой переменной. Поэтому можно записать

$$w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x_1} + i \frac{\partial v}{\partial x_1}.$$

На основании второго равенства (6.6) можно написать также

$$w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x_1} - i \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad (6.7)$$

что с учётом соотношений (6.2) приводит к выражению

$$w'(z) = \tau_1 - i\tau_2. \quad (6.8)$$

Выражение (6.8), где  $w(z)$  – любая дифференцируемая функция, представляет собой общее решение антиплоской задачи теории упругости. Для получения решения частных задач необходимо воспользоваться граничным условием (6.4).

## 6.2 ВИНТОВАЯ ДИСЛОКАЦИЯ

Остановимся на одном из решений для антиплоской деформации, которое выражается функцией

$$w(z) = -Ai \ln z,$$

где  $A$  – некоторая постоянная.

Воспользуемся представлением

$$z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta},$$

где  $r$ ,  $\theta$  – полярный радиус и полярный угол:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}.$$

Тогда имеем

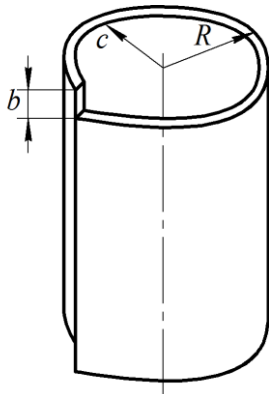
$$w(z) = -Ai \ln(re^{i\theta}) = -Ai(\ln r + i\theta) = A(\theta - i \ln r).$$

Перемещение  $u_3$  равно

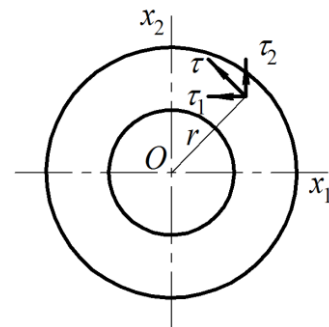
$$u_3 = \frac{1}{G} u = \frac{1}{G} \operatorname{Re} w = \frac{A}{G} \theta = \frac{A}{G} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}.$$

Полярный угол  $\theta$  при полном обходе вокруг начала координат изменяется на  $2\pi$ , и перемещение оказывается неоднозначной функцией координат. Смысл такой неоднозначности перемещения легко понять. Рассмотрим длинную трубу с внешним радиусом  $R$  и внутренним радиусом  $c$  (рисунок 6.2). Представим себе, что труба разрезана с одной стороны плоскостью, проходящей через её ось. Затем края разреза сдвинуты один относительно другого вдоль образующей на величину  $b$ , после чего плоскости разреза склеены или сварены между собой. В трубе возникнут некоторые напряжения и деформации. Если теперь вычислить перемещения по деформациям, то окажется, что при обходе по замкнутому пути перемещение  $u_3$  получит приращение  $b$ . Записанное решение как раз содержит такую особенность. Удобно переписать его в следующем виде:

$$w = -\frac{Gbi}{2\pi} \ln z; \quad u_3 = \frac{b}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}. \quad (6.9)$$



**Рисунок 6.2 – Труба с продольным разрезом**



**Рисунок 6.3 – Касательные напряжения в трубе**

Вычислим теперь напряжения. По формуле (6.8)

$$w'(z) = \tau_1 - i\tau_2 = -\frac{Gbi}{2\pi z} = -\frac{Gb}{2\pi} \frac{i}{x_1 + ix_2} = -\frac{Gb}{2\pi} \frac{x_2 + ix_1}{r^2}.$$

Отсюда

$$\tau_1 = -\frac{Gb}{2\pi} \frac{x_2}{r^2}; \quad \tau_2 = \frac{Gb}{2\pi} \frac{x_1}{r^2}. \quad (6.10)$$

На рисунке 6.3 показаны эти напряжения. Результирующий вектор напряжений направлен перпендикулярно радиусу; величина его

$$\tau = \frac{Gb}{2\pi r}.$$

В точках контура вектор  $\tau$  направлен по касательной к окружности, так что в этом случае  $p_3 = 0$ , как это и должно быть.

Можно представить себе, что после сварки поверхностей шов зачищен, концы обрезаны и нет никаких внешних признаков того, что над трубой произведена описанная операция. Однако в трубе существуют напряжения, при этом без внешних сил. Это можно обнаружить, если разрезать трубу, например, вдоль образующей. Она тотчас примет вид, показанный на рисунке 6.2. Начальные напряжения, существующие в теле, свободном от внешних сил, могут возникать при неравномерном затвердевании слитков, при остывании поковок, после сварки и других технологических операциях.

Полученное здесь решение описывает так называемую винтовую дислокацию.

Предположим теперь, что мы имеем дело не с трубой, а со сплошным цилиндром. Применим формулы (6.9) и (6.10) и к этому случаю. На оси цилиндра при  $x_1 = x_2 = 0$  напряжения получаются бесконечно большими, то есть мы приходим к сингулярному решению задачи теории упругости. В действительности бесконечно большие напряжения в теле невозможны. На самом деле уравнения линейной теории упругости утрачивают силу, если напряжения достаточно велики. Формулы (6.10) имеют смысл тогда, когда  $r > c$ , где  $c$  – некоторая определённая величина. При  $r < c$  нужно строить решения, основываясь на нелинейных зависимостях.

Линия, на которой напряжения, вычисленные с помощью линейной теории, обращаются в бесконечность, называется линией дислокации: вектор  $\vec{b}$  – вектором Бюргерса (см. рисунок 6.2). Область  $r < c$ , непосредственно примыкающая к линии дислокации, называется ядром дислокации. Теория упругости не даёт возможности судить о том, что происходит внутри ядра дислокации. Винтовая дислокация характеризуется тем, что её линия – прямая и вектор Бюргерса направлен по линии дислокации.

Вычислим энергию  $\bar{U}$  винтовой дислокации, приходящуюся на единицу длины цилиндра. Для этого существует два пути. Первый путь состоит в том, что мы берём выражение для удельной энергии  $W = \frac{1}{2G}(\tau_1^2 + \tau_2^2)$  и ин-

тегрируем его по объёму. Второй, более простой, основан на применении теоремы Клапейрона. Представим себе, что труба разрезана с одной стороны полуплоскостью  $x_1 O x_3$ . Чтобы удержать поверхность разреза на месте, к двум сторонам нужно приложить продольные касательные силы  $p_3 = \tau_2 = \frac{Gb}{2\pi x_1}$ .

Будем смотреть на  $p_3$  как на внешнюю силу, приложение которой создано дислокацией, то есть вызвано смещением поверхности разреза на величину  $b$ . Тогда по теореме Клапейрона

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_{\omega} p_3 b d\omega = \frac{1}{2} \int_c^R \frac{Gb^2}{2\pi x_1} dx_1 = \frac{Gb^2}{4\pi} \ln \frac{R}{c}. \quad (6.11)$$

Величина энергии стремится к бесконечности при  $R \rightarrow \infty$  и при  $c \rightarrow 0$ . Первое кажется естественным, второе же ещё раз подчёркивает, что для сплошного тела решение, соответствующим винтовой дислокации, невозможно в рамках линейной теории упругости.

### 6.3 ТРЕЩИНА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

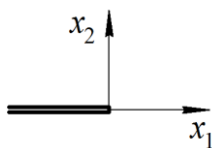
Рассмотрим ещё одну функцию  $w(z)$ , а именно,

$$w(z) = Ai\sqrt{z} = Ai(re^{i\theta})^{1/2} = Ai\sqrt{r} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) = A\sqrt{r} \left( -\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \right),$$

где  $A$  – постоянная. Действительная часть этой функции с точностью до множителя есть перемещение

$$u = \operatorname{Re} w = -A\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}.$$

При  $\theta = \pm\pi$  будет  $u = \mp A\sqrt{r}$ . Как видим, на отрицательной полуоси  $x_1$  перемещение претерпевает разрыв. Это соответствует случаю неограниченного упругого пространства, разрезанного по полуплоскости  $x_2 = 0$ ;  $x_1 < 0$  (рисунок 6.4). Края разреза получают взаимные перемещения в направлении оси  $x_3$ , причём величина перемещения пропорциональна корню квадратному из расстояния от края трещины.



**Рисунок 6.4 –  
Пространство  
с разрезом**

Выясним далее, при каких нагрузках возникает такое деформирование, и определим напряжённое состояние тела. Производная функции  $w(z)$

$$w'(z) = \frac{Ai}{2\sqrt{z}} = \frac{Ai}{2} (re^{i\theta})^{-1/2} = \frac{A}{2\sqrt{r}} \left( \sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \right).$$

При  $\theta = \pm\pi$  мнимая часть  $w'(z)$  равна нулю. Следо-

вательно, по формуле (6.8)  $\tau_2 = 0$ , и на поверхности разреза никакие силы не приложены. Положив теперь

$$A = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}K,$$

запишем полученное решение:

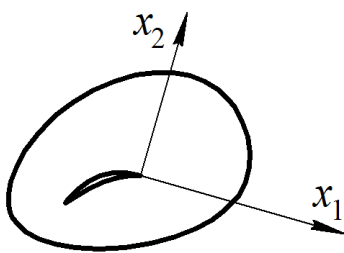
$$w(z) = -Ki\sqrt{\frac{2z}{\pi}}; \quad (6.12)$$

$$u_3 = \frac{K}{G}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2}; \quad (6.13)$$

$$\tau_1 = -\frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}; \quad \tau_2 = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}. \quad (6.14)$$

Постоянная  $K$ , фигурирующая в этом решении, имеет размерность силы, делённой на длину в степени  $3/2$ , и называется коэффициентом интенсивности. Существенно то, что напряжения обращаются в бесконечность при  $r = 0$ . То же самое было и в случае дислокации, но здесь особенность более слабая, а именно вида  $1/\sqrt{r}$ , тогда как для дислокации особенность была вида  $1/r$ .

Реальный смысл полученного результата сводится к следующему. Представим себе упругое цилиндрическое тело конечных размеров в поперечном сечении (рисунок 6.5). Тело содержит сквозную цилиндрическую трещину, имеющую в сечении конечную длину, и нагружено произвольным образом силами, приложенными к боковой поверхности параллельно оси  $x_3$ .



**Рисунок 6.5 –  
Цилиндрическое тело  
со сквозной трещиной**

Пусть в результате решения, более или менее сложного, найдено распределение напряжений во всех точках сечения. Полученное решения обязательно будет содержать особенность: по мере приближения к концу трещины напряжения неограниченно растут. Если направить координатные оси так, как показано на рисунке 6.5, то есть ось  $x_1$  по касательной к оси трещины, и поместить начало координат в вершине трещины, то формулы для напряжений обязательно будут иметь вид

$$\tau_1 = -\frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2} + \dots; \quad \tau_2 = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2} + \dots \quad (6.15)$$

Невыписанные члены остаются конечными при  $r = 0$ . Значит, при достаточно малых  $r$  выписанные члены являются главными, то есть только они

имеют значение, поскольку преобладают над остальными членами. Значение коэффициента интенсивности  $K$  зависит от формы сечения, формы щели и внешних нагрузок и находится в результате решения задачи теории упругости. При этом к полному решению обычно и не стремятся, основная цель состоит как раз в нахождении коэффициента интенсивности.

#### 6.4 ТРЕЩИНА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Рассмотрим теперь более реальную задачу о напряжениях в теле, содержащем трещину. Будем считать тело неограниченным; на бесконечности задано  $\tau_1 = 0$ ;  $\tau_2 = \tau_0$ . Трещина занимает отрезок действительной оси  $x_1 \in [-c, c]$  (рисунок 6.6). Рассмотрим функцию комплексной переменной

$$w(z) = Ai\sqrt{z^2 - c^2}. \quad (6.16)$$

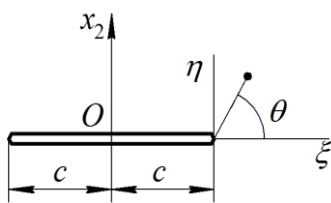


Рисунок 6.6 –  
Прямолинейная  
трещина конечной  
длины

Для точек действительной оси величина  $\sqrt{z^2 - c^2} = \sqrt{x_1^2 - c^2}$  будет вещественной при  $|x_1| > c$  и чисто мнимой при  $|x_1| < c$ . Поэтому на оси  $x_1$  действительная часть функции  $w(x_1)$  равна нулю вне трещины и равна  $\pm A\sqrt{c^2 - x_1^2}$  на берегах трещины; значения её на верхнем и нижнем берегах в соответствующих точках равны по величине и противоположны по знаку. Производная  $w'(z)$  равна

$$w'(z) = \frac{Aiz}{\sqrt{z^2 - c^2}}. \quad (6.17)$$

При  $z = x_1$  величина  $w'(z)$  будет действительной, если  $|x_1| < c$ . Поэтому в соответствии с (6.8) на берегах трещины  $\tau_2 = 0$ , то есть поверхность трещины свободна от напряжений. При  $z \rightarrow \infty$  имеем  $w'(z) \rightarrow Ai$ . Таким образом, на бесконечности должно выполняться равенство

$$Ai = 0 - i\tau_0.$$

Отсюда следует, что

$$A = -\tau_0. \quad (6.18)$$

Таким образом, формулы (6.16)...(6.18) дают решение поставленной задачи. Отделяя действительные и мнимые части, можно теперь выписать полные выражения для перемещения  $u_3$  и напряжений  $\tau_1, \tau_2$ . Но основной интерес представляет напряжённое состояние вблизи конца трещины. Поме-



тим на правом конце трещины начало вспомогательной системы координат  $\xi, \eta$  и положим  $\zeta = \rho e^{i\theta}$ . Тогда  $z = c + \zeta$  и

$$w = -i\tau_0 \sqrt{2c\zeta + \zeta^2}.$$

Разложим это выражение в ряд по степеням  $\zeta$

$$w = -i\tau_0 \sqrt{2c\zeta} \sqrt{1 + \frac{\zeta}{2c}} = -i\tau_0 \sqrt{2c\zeta} \left( 1 + \frac{\zeta}{4c} + \dots \right).$$

Первый член разложения содержит  $\zeta^{1/2}$ , второй  $\zeta^{3/2}$ , третий  $\zeta^{5/2}$  и так далее. При почленном дифференцировании только первый будет содержать  $\zeta$  в отрицательной степени, а именно  $\zeta^{-1/2}$ ; все остальные члены будут содержать положительные степени  $\zeta$ . Следовательно, при  $\zeta \rightarrow 0$  все члены разложения для  $w'(\zeta)$  будут стремиться к нулю, кроме первого, который стремится к бесконечности. Поэтому в окрестности конца трещины нам достаточно только первого члена, то есть можно принять

$$w(\zeta) = -i\tau_0 \sqrt{2c\zeta}. \quad (6.19)$$

Сравнивая с (6.12), убеждаемся, что (6.19) и (6.12) совпадают, если принять

$$K = \tau_0 \sqrt{\pi c}. \quad (6.20)$$

Выражения для напряжений вблизи конца трещины, соответствующие приближенному выражению (6.19), даются формулами (6.14) с заменой в них  $r$  на  $\rho$ . Если вычислить точные значения  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , то их выражения будут иметь структуру формул (6.15).

## 6.5 ОСВОБОЖДЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПРИ РАСКРЫТИИ ТРЕЩИНЫ

Обозначим через  $U_0$  приходящуюся на единицу длины (вдоль оси  $x_3$ ) упругую энергию тела, находящегося в условиях антиплоской деформации и не содержащего трещины. Если в теле образовалась трещина – например, прямолинейная длиной  $2c$ , энергия тела изменится и будет равна  $U$ . Появление трещины уменьшает упругую энергию, то есть  $U < U_0$ . Оценить разницу между  $U$  и  $U_0$  можно из очень простых соображений. На достаточно большом расстоянии от трещины касательное напряжение постоянно и равно  $\tau_0$ . Следовательно, удельная потенциальная энергия деформации есть  $\tau_0^2 / (2G)$ . В окрестности трещины напряжения в среднем уменьшаются. Площадь разгруженной части около трещины имеет порядок  $c^2$ , так как ни-

какого другого линейного размера, кроме  $c$ , в условии задачи не содержится. Отсюда следует, что

$$U_0 - U \sim \frac{\tau_0^2 c^2}{G}. \quad (6.21)$$

Это самая грубая оценка. Если тело имеет конечные размеры, то в оценке должен фигурировать ещё и некоторый характерный размер тела.

При более строгих вычислениях мы будем исходить из решения, полученного для бесконечного упругого пространства. Окружим трещину произвольным контуром  $\Gamma$  в плоскости  $x_1, x_2$  и выделим из неограниченного упругого пространства цилиндр, основание которого ограничено контуром  $\Gamma$ . Вектор касательного напряжения в плоскости  $x_1, x_2$  в точке контура  $\Gamma$  разложим на составляющие: нормальную к контуру  $\tau_n$  и касательную  $\tau_s$ . На боковой поверхности цилиндра будут действовать касательные напряжения, равные  $\tau_n$  и направленные вдоль образующей. Их можно рассматривать как внешние силы по отношению к цилиндру, поэтому упругая энергия на единицу длины цилиндра найдётся по теореме Клапейрона:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \tau_n u_3 ds.$$

Теперь можно сделать предельный переход, удаляя контур  $\Gamma$  в бесконечность. Очевидно, что  $U$  будет также стремиться к бесконечности, но нас интересует не сама величина  $U$ , а разность между  $U_0$  и  $U$ . Форма контура  $\Gamma$  при этом безразлична, её нужно выбирать из соображений удобства и простоты интегрирования. Пусть, например, контур  $\Gamma$  будет окружностью радиуса  $r$  с центром в начале координат (рисунок 6.7). Тогда

$$\tau_n = \tau_1 \cos \theta + \tau_2 \sin \theta. \quad (6.22)$$

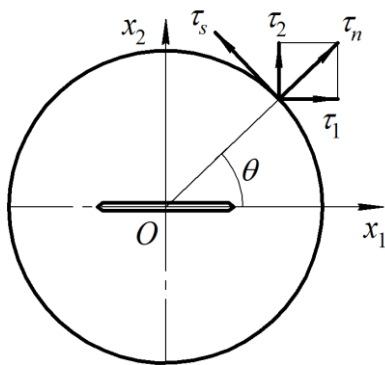


Рисунок 6.7 – Цилиндр, выделенный из тела

Согласно полученной ранее формуле (6.17),  
имеем

$$\tau_1 - i\tau_2 = -\frac{\tau_0 iz}{\sqrt{z^2 - c^2}}.$$

На контуре окружности  $|z| = r$ ; если  $|z| \gg c$ ,

то

$$\tau_1 - i\tau_2 = -i\tau_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{z^2}}} = -i\tau_0 \left(1 - \frac{c^2}{z^2}\right)^{-1/2}.$$

Разлагая это выражение в ряд по степеням  $\frac{c}{z}$ , будем иметь

$$\tau_1 - i\tau_2 = -i\tau_0 \left( 1 + \frac{c^2}{2z^2} + \dots \right). \quad (6.23)$$

Отделяя действительную часть от мнимой, находим

$$\tau_1 = -\tau_0 \frac{c^2}{2r^2} \sin 2\theta + \dots; \quad \tau_2 = \tau_0 \left( 1 + \frac{c^2}{2r^2} \cos 2\theta + \dots \right). \quad (6.24)$$

Теперь по формуле (6.22) имеем

$$\tau_n = \tau_0 \sin \theta \left( 1 - \frac{c^2}{2r^2} \sin^2 \theta + \dots \right). \quad (6.25)$$

Для вычисления  $u_3$  нужно разложить вытекающие из (6.16) выражение

$$w = -\tau_0 i \sqrt{z^2 - c^2}$$

в окрестностях бесконечно удалённой точки, то есть при больших значениях  $z$ :

$$w = -\tau_0 i z \left( 1 - \frac{c^2}{z^2} \right)^{-1/2} = -\tau_0 i z \left( 1 - \frac{c^2}{2z^2} + \dots \right).$$

Удержим только первый член в этом разложении и отделим действительную часть. Получим

$$u_3 = \frac{\tau_0}{G} r \sin \theta + \dots \quad (6.26)$$

Теперь по теореме Клапейрона

$$U = \frac{\tau_0^2}{2G} \int_0^{2\pi} r^2 \left( 1 - \frac{c^2}{2r^2} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\theta = \frac{\tau_0^2}{2G} \left( \pi r^2 - \frac{3}{4} \pi \frac{c^2}{2} \right).$$

При неограниченном увеличении  $r$  величина  $U$  стремится к бесконечности за счёт первого члена в скобках. Положив  $c = 0$  в формуле для  $U$ , мы получим энергию цилиндра, не содержащего трещины, то есть

$$U_0 = \frac{\tau_0^2}{2G} r^2 \pi.$$

Разница энергий

$$U_0 - U = \frac{3\pi}{4} \frac{\tau_0^2}{G} c^2 \quad (6.27)$$

не зависит от  $r$ , то есть  $r$  можно считать  $r$  бесконечным.

При выводе формулы (6.27) мы удержали лишь первые члены в разложениях для  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $u_3$ . Добавление других членов не изменит результат, по-

сколькx в выражении для  $U$  появятся отрицательные степени  $r$ , которые обращаются в ноль при предельном переходе когда  $r \rightarrow \infty$ .

Энергия тела, содержащего трещину, меньше, чем энергия тела, которое трещины не содержит.

Если длина  $c$  трещины увеличивается, то происходит освобождение упругой энергии. Если половина длины увеличилась на  $\Delta c$ , то из (6.27) следует, что

$$\Delta U = -\pi \frac{\tau_0^2 c}{2G} \Delta c = \frac{K^2}{2G} \Delta c. \quad (6.28)$$

Соотношение (6.28) получено для прямолинейной трещины длиной  $2c$  в бесконечном теле, нагруженном равномерно распределёнными усилиями на бесконечности. Но этот результат является универсальным. Чтобы понять это, рассмотрим случай трещины произвольной формы в цилиндрическом теле с конечными размерами поперечного сечения. Сделаем разрез впереди трещины на отрезке длиной  $\Delta c$ . Чтобы края разреза не разошлись, к ним нужно приложить распределённые силы, интенсивность которых равна касательному напряжению в неразрезанном теле, то есть вычисляется по формуле (6.14) при  $\theta = 0$ :

$$\tau = \tau_2 = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}.$$

Будем теперь уменьшать эти силы. Края разреза начнут расходиться. Когда силы обратятся в ноль, мы получим ту же трещину, что в исходном состоянии, но продвинутую вправо на длину  $\Delta c$ . Перемещение  $u_3$  будет определяться формулой (6.13) при  $\theta = \pi$  и при перенесённом на величину  $\Delta c$  начале координат. Таким образом,

$$u_3 = \frac{K}{G} \sqrt{\frac{2}{\pi} (\Delta c - x)}.$$

По теореме Клапейрона изменение упругой энергии равно половине работы сил  $\tau$  на перемещении  $u_3$ :

$$\Delta U = -\int_0^{\Delta c} \tau u_3 dx.$$

Множитель  $\frac{1}{2}$  сократился, потому что расхождение берегов равно  $2u_3$ .

Подставляя выражения  $\tau$  и  $u_3$ ,

$$\Delta U = -\frac{K^2}{\pi G} \int_0^{\Delta c} \sqrt{\frac{\Delta c - x}{x}} dx.$$

Интеграл в этой формуле легко вычислить, он равен  $\pi/2$ . Поэтому

$$\Delta U = -\frac{K^2}{2G} \Delta c. \quad (6.29)$$

Разница между этим результатом и формулой (6.28) связана с тем, что в первом случае изменение длины трещины равнялось  $2\Delta c$ ; трещина расширялась влево и вправо с сохранением симметрии. При выводе же формулы (6.29) считалось, что трещина распространяется вправо на длину  $\Delta c$ , и только.

## 7 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 7.1 ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И ОБОБЩЁННОЕ ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ

Плоская задача теории упругости охватывает два класса задач, различных по физической природе, но имеющих одинаковое математическое описание – плоскую деформацию и плоское напряжённое состояние.

Для плоской деформации перемещения имеют вид

$$u_1 = u_1(x_1, x_2); \quad u_2 = u_2(x_1, x_2); \quad (7.1)$$

$$u_3 = 0; \quad (7.2)$$

все производные по  $x_3$  обращаются в нуль.

Такие перемещения возникают в длинном цилиндрическом теле с продольной осью  $x_3$ , которое нагружается поверхностными силами, не зависящими от  $x_3$  и не имеющими составляющей в направлении оси  $x_3$  (рисунок 7.1). По торцам тело должно быть закреплено в осевом направлении, но свободно от закреплений в отношении перемещений  $u_1, u_2$ . Составляющая объёмной силы  $R_3$  должна равняться нулю, а  $R_1$  и  $R_2$  не должны меняться в направлении  $x_3$ , то есть

$$R_1 = R_1(x_1, x_2); \quad R_2 = R_2(x_1, x_2); \quad R_3 = 0.$$

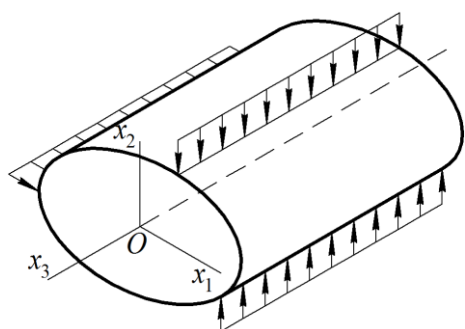


Рисунок 7.1 – К определению плоской деформации

Формулы Коши в этом случае сводятся к равенствам

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \quad (7.3)$$

в то время как остальные компоненты тензора деформации отсутствуют:

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0. \quad (7.4)$$

Из шести условий совместности деформаций Сен-Венана остаётся только одно

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad (7.5)$$

остальные же превращаются в тождества. Формулы закона Гука (4.15) принимают вид

$$\sigma_{11} = \lambda \theta + 2G \varepsilon_{11}; \quad \sigma_{22} = \lambda \theta + 2G \varepsilon_{22}; \quad \sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12}. \quad (7.6)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Что касается напряжения  $\sigma_{33}$ , которое в случае плоской деформации отлично от нуля, то его значение можно найти из условия

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \mu\sigma_{11} - \mu\sigma_{22}) = 0,$$

из которого следует

$$\sigma_{33} = \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (7.7)$$

Первые инварианты тензоров деформации и напряжения имеют выражения

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}; \quad \Sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (1 + \mu)(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (7.8)$$

Из уравнений равновесия остаются два:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + R_1 = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + R_2 = 0. \quad (7.9)$$

Статические условия на боковой поверхности тела сводятся к равенствам

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = p_1; \quad \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = p_2 \text{ на } \Gamma, \quad (7.10)$$

где  $\Gamma$  – контур, ограничивающий поперечное сечение;  $n_1$  и  $n_2$  – направляющие косинусы нормали к контуру  $\Gamma$ .

На торцевых поверхностях, где  $n_1 = n_2 = 0$ ;  $n_3 = \pm 1$ , имеем равенство

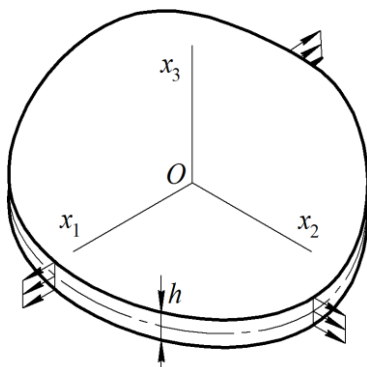
$$p_3 = \pm \sigma_3,$$

которое устанавливает значения реакций на тело со стороны связей, запрещающих перемещение  $u_3$ .

При плоском напряжённом состоянии имеем

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2); \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2); \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2); \quad (7.11)$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (7.12)$$



**Рисунок 7.2 – Пластина, нагруженная в своей плоскости**

При этом компоненты деформации и перемещения, не зависят от  $x_3$ . Такое напряжённое состояние возникает в тонкой пластине, которая нагружается только силами в своей плоскости (рисунок 7.2). Приложенные силы равномерно распределены по толщине и, следовательно, не зависят от  $x_3$ .

Плоское напряжённое состояние реализуется не точно, а лишь приближённо. Для достаточно тонких пластин можно пренебречь напряжением  $\sigma_{33}$ , а остальные компоненты осреднить по толщине. Если приложенные силы симметрично распределены относительно средней плоскости, а касательные

напряжения на верхней и нижней поверхностях отсутствуют, то средние значения  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{23}$  будут нулевыми, а средние значения  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$  окажутся функциями координат  $x_1$ ,  $x_2$ . Задача снова сводится к исследованию плоского напряжённого состояния, которое в этом случае называется обобщённым.

Различие между плоским напряжённым состоянием и плоской деформацией проявляется лишь в записи закона Гука. Из формулы (4.23)

$$\sigma_{33} = \lambda\theta + 2G\varepsilon_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{11} = 0$$

следует, что в этом случае

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}).$$

С учётом формул (4.22) эту формулу можно представить в виде

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\mu}{1 - \mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \quad (7.13)$$

Таким образом, первые инварианты тензоров деформации и напряжений имеют выражения

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{1 - 2\mu}{1 - \mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}); \quad \Sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}. \quad (7.14)$$

При учёте этих выражений соотношения (7.6) сохраняют силу. В силе остаются также геометрические равенства (7.3)...(7.5) и уравнения статики (7.9), (7.10).

Используя соотношения закона Гука в форме (4.23)

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{11} - \frac{\mu}{1 + \mu} \Sigma \right); \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{22} - \frac{\mu}{1 + \mu} \Sigma \right);$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}, \quad (7.15)$$

можно выразить условие совместности деформаций через напряжения. Воспользовавшись также уравнениями равновесия, представим его в случае плоской деформации в виде

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{1}{1 - \mu} \left( \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \frac{\partial R_2}{\partial x_2} \right), \quad (7.16)$$

а в случае плоского напряжённого состояния – в виде

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \mu) \left( \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \frac{\partial R_2}{\partial x_2} \right). \quad (7.17)$$



Если объёмные силы постоянны или равны нулю, уравнения равновесия тождественно удовлетворяются введением функции напряжений Эри по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + x_1 R_2 + x_2 R_1. \quad (7.18)$$

Уравнение относительно функции  $F$  получается из соотношений (7.16) или (7.17):

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0. \quad (7.19)$$

## 7.2 СООТНОШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Эффективность перехода к комплексной переменной продемонстрирована выше применительно к антиплоской деформации. Весьма плодотворно использование теории функций комплексной переменной и в плоской задаче.

Обратимся к уравнениям Ламе (4.33), ограничившись случаем отсутствия объёмных сил:

$$G \nabla^2 u_i + (G + \lambda) \theta_{,i} = 0. \quad (7.20)$$

Покажем прежде всего, что объёмная деформация  $\theta$  является бигармонической функцией, то есть что она удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (7.21)$$

Для этого нужно продифференцировать равенство (7.20) по  $x_j$  и осуществить свёртывание по индексам  $i$  и  $j$ . В итоге получим

$$G \nabla^2 u_{,i,i} + (G + \lambda) \theta_{,ii} = 0.$$

Так как  $u_{,i,i} = \varepsilon_{ii} = \theta$ ;  $\theta_{,ii} = \nabla^2 \theta$ , приходим отсюда к равенству (7.21).

В случае плоской задачи из трёх уравнений (7.20) останется два:

$$\begin{aligned} G \nabla^2 u_1 + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= 0; \\ G \nabla^2 u_2 + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= 0, \end{aligned} \quad (7.22)$$

где оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Объёмная деформация в случае плоской деформации есть сумма

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22},$$

а в случае плоского напряжённого состояния справедливо соотношение (7.14)

$$\theta = \frac{1-2\mu}{1-\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \quad (7.23)$$

Перейдём к комплексным переменным, полагая, как обычно,

$$z = x_1 + ix_2; \quad \bar{z} = x_1 - ix_2.$$

На эти формулы можно смотреть как на формулы преобразования координат, поскольку они устанавливают взаимно однозначное соответствие между  $x_1$  и  $x_2$  с одной стороны, и  $z$  и  $\bar{z}$  с другой. Любая функция координат  $x_1$  и  $x_2$  может быть представлена как функция переменных  $z$  и  $\bar{z}$ . Пусть  $f(z, \bar{z})$  – такая функция. Если необходимо продифференцировать её по  $x_1$  или  $x_2$ , нужно воспользоваться правилами дифференцирования сложной функции. При этом будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = i \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right). \quad (7.24)$$

Оператор Лапласа от функции  $f$  преобразуется так:

$$\nabla^2 f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Возвращаясь к уравнениям (7.22), остановимся вначале на случае плоской деформации. Будем считать, что  $u_1$  и  $u_2$  являются функциями  $z$  и  $\bar{z}$ . Умножив второе из уравнений (7.22) на  $i$  и сложив результат с первым из них, заменим оба эти уравнения одним комплексным:

$$4G \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = -(G + \lambda) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + i \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right). \quad (7.25)$$

Здесь

$$w = u_1 + iu_2. \quad (7.26)$$

Как показано выше,  $\theta$  есть гармоническая функция. Следовательно, она может рассматриваться как действительная часть некоторой аналитической функции комплексной переменной

$$f(z) = \theta + i\psi. \quad (7.27)$$

Функция  $\psi$  должна быть связана с  $\theta$  соотношениями Коши-Римана

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

из которых следует, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + i \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - i \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \bar{f}'(\bar{z}).$$

Здесь  $\bar{f}'(\bar{z})$  – функция, комплексно сопряжённая с  $f'(z)$ . Уравнение (7.25) примет вид

$$4G \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = -(G + \lambda) \bar{f}'(\bar{z}).$$

Проинтегрируем обе части по  $\bar{z}$ :

$$4G \frac{\partial w}{\partial z} = -(G + \lambda) \bar{f}(\bar{z}) + g'(z), \quad (7.28)$$

где  $g'(z)$  – произвольная функция аргумента  $z$ . Проинтегрировав далее это равенство по  $z$ , приходим к следующему результату:

$$4Gw = -(G + \lambda) z \bar{f}(\bar{z}) + g(z) + \bar{h}(\bar{z}), \quad (7.29)$$

где  $\bar{h}(\bar{z})$  – произвольная функция аргумента  $\bar{z}$ .

В соответствии с (7.24) можно написать

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + i \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \equiv \frac{\partial w}{\partial x_2} = i \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right).$$

Если умножить второе равенство на  $-i$  и сложить его с первым, получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + i \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = 2 \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Следовательно,

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 2 \operatorname{Re} \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (7.30)$$

В силу обозначения (7.27) можно записать также

$$\operatorname{Re} f(z) = 2 \operatorname{Re} \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Сопоставление данного результата с равенством (7.28) показывает, что

$$\operatorname{Re} [-(G + \lambda) \bar{f}(\bar{z}) + g'(z)] = \operatorname{Re} 2Gf(z). \quad (7.31)$$

Функции  $\bar{f}(\bar{z})$  и  $f(z)$  отличаются лишь знаком при мнимой части. Действительные части у них совпадают. Поэтому вместо  $\bar{f}(\bar{z})$  в левой части равенства (7.31) можно писать  $f(z)$ . Далее, если действительные части двух функций переменной  $z$  совпадают, то их мнимые части могут различаться

лишь на некоторую константу. Таким образом, с точностью до чисто мнимой постоянной справедливо равенство

$$-(G + \lambda)f(z) + g'(z) = 2Gf(z).$$

Отсюда

$$f(z) = \frac{g'(z)}{3G + \lambda}.$$

С учётом этого результата формула (7.29) принимает вид

$$4Gw = -\frac{G + \lambda}{3G + \lambda} z\bar{g}'(\bar{z}) + g(z) + \bar{h}(\bar{z}).$$

Эту формулу, полученную Колосовым и Мусхелишвили, принято записывать в следующем виде:

$$2G(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}), \quad (7.32)$$

где

$$\kappa = \frac{3G + \lambda}{G + \lambda} = 3 - 4\mu. \quad (7.33)$$

Полученная формула представляет общее решение задачи о плоской деформации, выраженное через две произвольные аналитические функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ . Функции  $\varphi$  и  $\psi$  отличаются от  $g$  и  $h$  лишь постоянными множителями:

$$\varphi = \frac{g}{2\kappa}; \quad \psi = -\frac{h}{2}.$$

Такое представление удобно тем, что формулы для напряжений не содержат упругих констант.

Из формул закона Гука

$$\sigma_{11} = \lambda\theta + 2G\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = \lambda\theta + 2G\varepsilon_{22}; \quad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}$$

следует, что

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(G + \lambda)\theta.$$

Но

$$\theta = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} \frac{g'(z)}{3G + \lambda} = \frac{2}{G + \lambda} \operatorname{Re} \varphi'(z).$$

Таким образом,

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\operatorname{Re} \varphi'(z). \quad (7.34)$$

Рассмотрим далее следующую комплексную комбинацию из компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} = 2G(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} - 2i\varepsilon_{12}) = 2G\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - i\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right).$$

Перегруппировав слагаемые в правой части, будем иметь

$$-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + i\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = -\frac{\partial w}{\partial x_1} = -\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right);$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -i\frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Таким образом,

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} = -4\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 2\left[z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})\right]. \quad (7.35)$$

Можно также писать

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = -4G\frac{\partial w}{\partial z} = 2\left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right]. \quad (7.36)$$

Кривая в плоскости  $x_1, x_2$  задаётся уравнением  $x_\alpha = x_\alpha(s)$  или в комплексной форме  $z = z(s)$  или  $\bar{z} = \bar{z}(s)$ . За параметр  $s$  всегда можно выбрать длину дуги этой кривой, отсчитываемую от произвольной точки.

Пусть кривая  $z = z(s)$  есть след пересечения с плоскостью  $x_1, x_2$  цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси  $x_3$ . Компоненты усилий на этой поверхности

$$p_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2; \quad p_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2.$$

Полагая  $n_1 = dx_2/ds$ ;  $n_2 = -dx_1/ds$ , запишем

$$p_1 ds = \sigma_{11}dx_2 - \sigma_{21}dx_1; \quad p_2 ds = \sigma_{12}dx_2 - \sigma_{22}dx_1.$$

Образует комплексную комбинацию  $p_1 + ip_2$ . Полагая  $dx_1 = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$ ;

$dx_2 = -\frac{i}{2}(dz - d\bar{z})$ , получим

$$2i(p_1 + ip_2)ds = (\sigma_{11} + \sigma_{22})dz + (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12})d\bar{z}.$$

По формулам (7.34), (7.35)

$$i(p_1 + ip_2)ds = (\varphi' + \bar{\varphi}')dz + (z\bar{\varphi}'' + \bar{\psi}')d\bar{z}.$$

Выражение, стоящее в правой части, есть полный дифференциал функции двух комплексных переменных:  $\varphi + z\bar{\varphi}' + \bar{\psi}$ . Таким образом,

$$i\int(p_1 + ip_2)ds = \varphi + z\bar{\varphi}' + \bar{\psi}. \quad (7.37)$$

Полученные формулы применимы также и к плоскому напряжённому состоянию. Отличие от рассмотренного случая вытекает из выражения (7.14)

для  $\theta$  и приводит к тому, что вместо выражения (7.23) для  $\kappa$  должна использоваться формула

$$\kappa = \frac{3 - \mu}{1 + \mu}. \quad (7.38)$$

### 7.3 СИЛА И МОМЕНТ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА КОНТУР

Если силы  $p_1, p_2$  заданы на замкнутом граничном контуре односвязной или многосвязной области, то по формуле (7.37) можно определить главный вектор  $T_1 + iT_2$  усилий, приложенных к контуру. Действительно,

$$T_1 + iT_2 = \oint (p_1 + ip_2) ds,$$

откуда

$$i(T_1 + iT_2) = [\varphi + z\bar{\varphi}' + \psi]_{\Gamma}. \quad (7.39)$$

Обозначение  $[\dots]_{\Gamma}$  используется для приращения заключённого в скобки выражения при обходе контура по часовой стрелке. Из формулы (7.39) следует, что если область многосвязна и главный вектор сил, приложенных к одному из граничных контуров, отличен от нуля, то функции  $\varphi$  или  $\psi$  (или и та и другая) должны быть неоднозначными. Тело, сечение которого представляет собой односвязную область, должно быть в равновесии под действием внешних сил. Если при этом во внутренних точках не приложены сосредоточенные силы, то  $T_1 + iT_2 = 0$  и функции  $\varphi$  и  $\psi$  однозначны.

Вычислим далее главный момент приложенных к контуру  $\Gamma$  сил по формуле

$$M = \oint (x_1 p_2 - x_2 p_1) ds = -\operatorname{Re} \oint i(p_1 + ip_2) \bar{z} ds.$$

С помощью (7.37) представим это выражение следующим образом:

$$M = -\operatorname{Re} \oint \bar{z} d(\varphi + z\bar{\varphi}' + \bar{\psi}).$$

Выполним интегрирование по частям:

$$M = -\operatorname{Re} \left\{ \left[ \bar{z} (\varphi + z\bar{\varphi}' + \bar{\psi}) \right] - \oint (\varphi + z\bar{\varphi}' + \bar{\psi}) d\bar{z} \right\}.$$

Так как

$$\oint \varphi d\bar{z} = \varphi \oint d\bar{z} = 0; \quad \int z\bar{\varphi}' d\bar{z} = z \int \bar{\varphi}' d\bar{z} = z\bar{\varphi},$$

будем иметь

$$M = -\operatorname{Re} \left[ \bar{z} (\varphi + z\bar{\varphi}' + \bar{\psi}) - z\bar{\varphi} - \int \bar{\psi} d\bar{z} \right]_{\Gamma}.$$

Поскольку  $\operatorname{Re} \bar{z}\varphi$  и  $\operatorname{Re} z\bar{\varphi}$  совпадают, соответствующие члены взаимно уничтожаются. Учитывая также что  $\operatorname{Re} \bar{z}\bar{\psi} = \operatorname{Re} z\psi$  и  $\operatorname{Re} \bar{\psi}d\bar{z} = \operatorname{Re} \psi dz$ , запишем окончательно

$$M = \operatorname{Re} \left[ \int \psi(z) dz - z\psi(z) - z\bar{z}\bar{\varphi}'(\bar{z}) \right]_{\Gamma}.$$

Если область поперечного сечения тела многосвязная, обозначим наружный контур  $\Gamma_0$ , а внутренние  $\Gamma_k$ . В частности, контур  $\Gamma_0$  может быть стянут к бесконечно удалённой точке. Тогда область  $S$  представляет собой бесконечную плоскость с отверстиями, ограниченными контурами  $\Gamma_k$ . Пусть  $T_{1k}$  и  $T_{2k}$  – составляющие главного вектора усилий, приложенных к контуру  $\Gamma_k$ . Функции  $\varphi$  и  $\psi$ , голоморфные (то есть регулярные) в области сечения  $S$ , должны обладать такими особенностями в области  $S_k$ , ограниченной контуром  $\Gamma_k$  и не принадлежащей телу, чтобы при обходе контура  $\Gamma_k$  выполнялось условие (7.39). В то же время напряжения и перемещения, а, следовательно, правые части (7.32), (7.34) и (7.35) должны оставаться однозначными. Примем

$$\varphi = A \ln(z - z_k) + \varphi_1; \quad \psi = B \ln(z - z_k) + \psi_1.$$

Здесь  $z_k$  – произвольная точка, расположенная в области  $S_k$ ,  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  – однозначные функции, голоморфные в  $S$ . Поскольку производные от  $\varphi$  и  $\psi$  однозначны, требование однозначности напряжений удовлетворяется автоматически. Учитывая, что

$$\left[ \ln(z - z_k) \right]_{\Gamma} = 2\pi i; \quad \left[ \ln(\bar{z} - \bar{z}_k) \right]_{\Gamma} = -2\pi i,$$

в соответствии с (7.32) приходим к выводу, что однозначность перемещений будет обеспечена при условии

$$2\pi i(A\kappa + \bar{B}) = 0.$$

В то же время из условия (7.39) следует, что

$$i(T_{1k} + iT_{2k}) = -2\pi i(A - \bar{B}). \quad (7.42)$$

Найдя из последних равенств  $A$  и  $B$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{T_{1k} + iT_{2k}}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z - z_k) + \varphi_1; \\ \psi(z) &= \frac{\kappa(T_{1k} - iT_{2k})}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z - z_k) + \psi_1. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Пусть далее контур  $\Gamma_k$  стягивается в точку, причём главный вектор  $T_{1k} + iT_{2k}$  остаётся неизменным. Формулы (7.43) сохраняют силу и в пределе.

Когда контур  $\Gamma_k$  стягивается к точке  $z_k$ , мы получаем сосредоточенную силу в точке  $z_k$ . Таким образом, формулы (7.43) дают решение для сосредоточенной силы, приложенной внутри области.

Предположим теперь, что область  $S$  представляет собой всю плоскость переменной  $z$ , содержащую либо отверстия  $S_k$ , либо сосредоточенные силы в точках  $z_k$ . В этом общем случае

$$\varphi = \sum_{k=1}^N A_k \ln(z - z_k) + \varphi_*; \quad \psi = \sum_{k=1}^N B_k \ln(z - z_k) + \psi_*. \quad (7.44)$$

Здесь  $\varphi_*$  и  $\psi_*$  – аналитические и однозначные в области  $S$  функции. Вне круга радиуса  $R$ , заключающего в себе все контуры  $\Gamma_k$ , можно записать

$$\varphi_* = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n; \quad \psi_* = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n. \quad (7.45)$$

Потребуем, чтобы компоненты тензора напряжений остались на бесконечности ограниченными. Для этого нужно, чтобы в разложениях (7.45) исчезли все члены, соответствующие положительным значениям  $n \geq 2$ . Таким образом,

$$\varphi_* = \Phi z + \varphi_0(z); \quad \psi_* = \Phi' z + \psi_0(z),$$

где  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  – функции, голоморфные на бесконечности. При  $z \rightarrow \infty$  из (7.34) и (7.36) следует:

$$\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} = 2(\Phi + \bar{\Phi}); \quad \sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty} + 2i\sigma_{12}^{\infty} = 2\Phi'.$$

Отсюда

$$\Phi = \frac{1}{4}(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}) + iC; \quad \Phi' = \frac{1}{2}(\sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty} + 2i\sigma_{12}^{\infty}). \quad (7.46)$$

Что касается величины перемещения при  $z \rightarrow \infty$ , то по формуле (7.32) оно равно нулю лишь тогда, когда

$$\sum_{k=1}^N (T_{1k} + iT_{2k}) = 0; \quad \Phi = 0; \quad \Phi' = 0.$$

Это значит, что в главный вектор приложенных к телу сил и напряжения на бесконечности равны нулю.

Выясним, в какой мере определены введенные функции  $\varphi$  и  $\psi$ . Если заданы напряжения, мы отправляемся от формул (7.34)...(7.36). В них входят только производные от функций  $\varphi$  и  $\psi$ . Следовательно, сами эти функции определены с точностью до постоянных  $\alpha + i\beta$  и  $\alpha' + i\beta'$  соответственно. Более того, от производной  $\varphi'$  входит только действительная часть. Следовательно, сама функция  $\varphi$  определяется с точностью до слагаемого



$$i\gamma z + \alpha + i\beta.$$

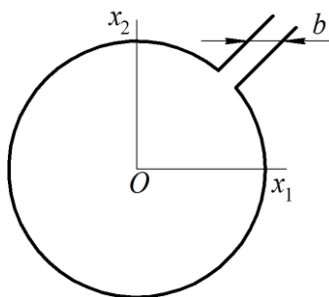
В формуле (7.46) появляется мнимая константа  $iC$ , соответствующая  $i\gamma$ . Таким образом, если задавать напряжения то функции  $\varphi$  и  $\psi$  могут содержать пять произвольных констант  $\gamma, \alpha, \beta, \alpha'$  и  $\beta'$ . Теперь комплексное перемещение по формуле (7.32) определяется с точностью до слагаемого, соответствующего перемещению тела как твёрдого целого

$$i(\kappa - 1)\gamma z + (\alpha - \alpha') + i(\beta - \beta').$$

Накладывая определённые связи, например, закрепляя тело, мы подчиним пять констант трём условиям. Две постоянные по-прежнему остаются неопределёнными и их можно устанавливать произвольно. В дальнейшем будем полагать  $\alpha = \beta = 0$ , то есть  $\varphi(0) = 0$ .

#### 7.4 КРАЕВАЯ ДИСЛОКАЦИЯ

Подобно тому, как это делалось при рассмотрении винтовой дислокации, можно построить сингулярное решение для случая плоской деформации. Будем называть краевой такую дислокацию, для которой вектор Бюргера перпендикулярен оси дислокации. Если принять ось  $x_3$  за линию дислокации, перемещение при обходе контура, окружающего ось  $x_3$ , получает приращение, равное  $\vec{b}$ . Мы предположим, что  $u_2$  при этом остаётся однозначным. Это предположение не нарушает общности, поскольку направление оси  $x_1$  всегда можно выбрать совпадающим с направлением вектора  $\vec{b}$ . Образование краевой дислокации можно представить себе так. В бесконечной упругой среде вырезан цилиндр, ось которого есть ось  $x_3$ . Рассечём среду полуплоскостью параллельной оси  $x_3$  и пересекающей поверхность цилиндра, как показано на рисунке 7.3. Затем раздвинем края разреза на расстояние  $b$  вдоль оси  $x_1$  и заполним образовавшуюся щель материалом. После создания дислокации никаких следов от разреза не остаётся, материал снова становится сплошным и однородным.



**Рисунок 7.3 – Краевая дислокация**

Чтобы найти точное решение поставленной задачи, мы должны ещё удовлетворить граничным условиям на поверхности цилиндрической полости. Вместо этого мы поступим следующим образом. Будем стягивать контур основания цилиндра в точку  $x_\alpha = 0$ . В пределе мы получим уже сплошное упругое пространство, в котором осуществлено некоторое на-

пряжённое состояние. Следует ожидать, что на оси  $x_3$  напряжения обладают особенностью и здесь, так же как при решении задачи о сосредоточенной силе или о внутреннем контуре, несущем неравномерную нагрузку, следует выбрать функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  содержащими логарифмические члены, но теперь уравнения для коэффициентов при них изменятся, условие однозначности перемещений примет вид

$$2Gb = 2\pi i(\kappa A + \bar{B}), \quad (7.47)$$

а в уравнении (7.42) нужно принять силу равной нулю, и мы получим

$$0 = 2\pi i(A - \bar{B}). \quad (7.48)$$

Таким образом, краевой дислокации соответствуют следующие функции  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\varphi = \frac{Gb}{\pi(1+\kappa)} \ln(z - z_k) + \varphi_*; \quad (7.49)$$

$$\psi = \frac{Gb}{\pi(1+\kappa)} \ln(z - z_k) + \psi_*. \quad (7.50)$$

Дислокации рассмотренного типа называют дислокациями Бюргера. Вольтерра рассмотрел более общий тип дислокации, когда кроме относительного поступательного перемещения имеется ещё относительный поворот краёв разреза.

Положим

$$\varphi = cz \ln(z - z_k) + \varphi_2; \quad \psi = \psi_2.$$

Здесь  $\varphi_2$  и  $\psi_2$  – функции, определённые формулами (7.49), (7.50). Теперь производная  $\varphi'(z)$  неоднозначна. На самом деле,

$$\varphi'(z) = c \ln(z - z_k) + \dots; \quad [\varphi'(z)]_{\Gamma} = 2\pi ic,$$

но действительная часть  $\varphi'(z)$  остаётся однозначной, если  $c$  вещественно. Вторая производная  $\varphi''(z)$  остаётся однозначной, поэтому условие однозначности напряжений выполняется. Добавляя к функции  $\varphi_2$  слагаемые с  $\ln(z - z_k)$  мы должны потребовать, чтобы главный вектор сил, приложенных к контуру, по-прежнему равнялся нулю. По формуле (7.39) мы проверяем, что условие выполняется тождественно, если оно выполняется для функций  $\varphi_2$  и  $\psi_2$ . Теперь дополнительное приращение перемещения при обходе контура, заключающего в себе точку  $z_k$  будет

$$2Gi[u_1 + iu_2]_{\Gamma_k} = 2\pi ic(1 + \kappa)z.$$

Таким образом, кроме поступательного относительного перемещения краёв разреза происходит поворот их на угол  $\pi c(1+\kappa)/G$ .

Возвращаясь к дислокации Бюргера, приведём явные формулы для перемещений и напряжений в случае напряжённой упругой среды, когда  $\varphi_* = \psi_* = 0$ . Подставляя (7.49) и (7.50) в (7.32) и отделяя действительную часть от мнимой, мы получаем выражения для перемещений, а именно:

$$u_1 = \frac{A(1+\kappa)}{2\pi} \left[ \alpha + \frac{2}{1+\kappa} \frac{x_1 x_2}{r^2} \right] \quad (z = re^{i\alpha});$$

$$u_2 = -\frac{A(1+\kappa)}{2\pi} \left[ \frac{\kappa-1}{1+\kappa} \ln r - \frac{1}{1+\kappa} \frac{x_2^2}{r^2} \right].$$

Обращаясь к выражению для  $A$  и вспоминая, что  $\kappa = 3 - 4\mu$ , перепишем эти формулы следующим образом:

$$u_1 = \frac{b}{2\pi} \left[ \alpha + \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{x_1 x_2}{r^2} \right];$$

$$u_2 = -\frac{b}{2\pi} \left[ \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \ln r - \frac{1}{4(1-\mu)} \frac{x_2^2}{r^2} \right]; \quad (7.51)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}; \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Для вычисления напряжений находим прежде всего

$$\varphi'(z) = -\frac{iA}{z} = -iA \frac{x_1 - ix_2}{r^2} = -\psi'(z); \quad \varphi''(z) = \frac{2iA}{z^2};$$

$$\bar{z}\varphi''(z) = 2iA \frac{\bar{z}}{z^2} = 2iA \frac{\bar{z}^3}{r^4} = \frac{2iA}{r^4} (x_1^3 - 3x_1 x_2^2 - 3ix_1^2 x_2 + ix_2^3).$$

Далее подставляем эти выражения в формулы (7.34) и (7.35). В итоге можно прийти к соотношениям

$$\sigma_{11} = -D \frac{x_2(3x_1^2 + x_2^2)}{r^4}; \quad \sigma_{22} = D \frac{x_2(x_1^2 - x_2^2)}{r^4}$$

$$\sigma_{12} = D \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{r^4}; \quad D = 2iA = \frac{Gb}{2\pi(1-\mu)}. \quad (7.52)$$

Формулы (7.51) и (7.52) определяют поле перемещений и напряжений в зависимости от вектора Бюргера  $\vec{b}$ . При этом совершенно безразлично, по какой поверхности производился разрез и была ли эта поверхность плоскостью, как показано на рисунке 7.3. В частности, разрез можно произвести по полуплоскости  $x_2 = 0$ ,  $x_1 > 0$  и сдвинуть нижний край разреза относительно

верхнего на величину  $b$ . Такой способ создания краевой дислокации не требует удаления либо добавления материала.

Энергию упругого объёма, содержащего краевую дислокацию, можно вычислить точно таким же способом как вычислялась энергия винтовой дислокации в разделе 5.2. Касательные напряжения  $\sigma_{12}$  в плоскости  $x_2 = 0$  есть

$$\tau = \sigma_{12} = \frac{Gb}{2\pi(1-\mu)} \frac{1}{x_1}.$$

По теореме Клапейрона

$$U = \frac{1}{2} \int_c^R \tau b ds = \frac{Gb^2}{4\pi(1-\mu)} \ln \frac{R}{c}. \quad (7.53)$$

Рассуждения здесь в точности совпадают с теми, которые были приведены в разделе 5.2 применительно к винтовой дислокации. Точно так же интеграл оказывается расходящимся, если подставлять пределы интегрирования 0 и  $\infty$ . Выражение (7.53) отличается от (5.11) только множителем  $(1-\mu)$  в знаменателе.

## 7.5 НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ОКОЛО ТРЕЩИНЫ

Пусть упругое пространство разрезано по части плоскости  $-a \leq x_1 \leq a$ ;  $x_2 = 0$ . На бесконечности  $\sigma_{22} = \sigma$ ;  $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$ . В плоскости  $x_1 x_2$  трещине

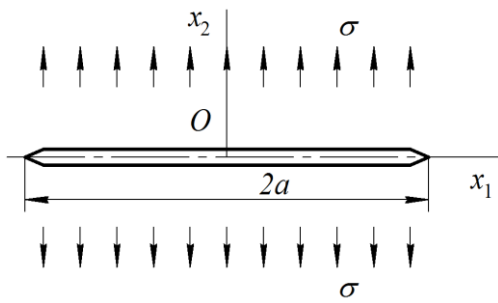


Рисунок 7.4 – Упругое полупространство с трещиной

соответствует разрез между зонами  $x_1 = \pm a$  (рисунок 7.4). Из условий симметрии следует, что на оси  $x_1$  должно быть  $\sigma_{12} = 0$ . Мы удовлетворим этому условию, если примем

$$\psi(z) = -z\varphi'(z) + \varphi(z). \quad (7.54)$$

Подставим это выражение  $\psi(z)$  в формулу (7.32). Получим

$$2G(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - (z - \bar{z})\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\varphi}(\bar{z}).$$

Отделяя действительную и мнимую части, будем иметь

$$\begin{aligned} Gu_1 &= (1-2\mu)\text{Re}\varphi + x_2 \text{Im}\varphi'; \\ Gu_2 &= 2(1-\mu)\text{Im}\varphi - x_2 \text{Re}\varphi'. \end{aligned} \quad (7.55)$$

По формуле (7.36)

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = -2(z - \bar{z})\varphi''(z).$$

Отсюда и из формулы (7.34) находим

$$\sigma_{11} = 2(\text{Re}\varphi' + x_2 \text{Im}\varphi''); \quad \sigma_{22} = 2(\text{Re}\varphi' - x_2 \text{Im}\varphi'');$$

$$\sigma_{12} = -2x_2 \operatorname{Re} \varphi'' . \quad (7.56)$$

Формулы (7.55) и (7.56) определяют поле перемещений и напряжений с помощью одной только функции комплексной переменной  $\varphi(z)$ . При  $x_2 = 0$  будет  $\sigma_{12} = 0$ ;  $\sigma_{11} = 2 \operatorname{Re} \varphi' = \sigma_{22}$ ;  $Gu_1 = (1 - 2\mu) \operatorname{Re} \varphi$ ;  $Gu_2 = 2(1 - \mu) \operatorname{Im} \varphi$ .

Для решения задачи о трещине следует выбрать функцию  $\varphi(z)$  таким образом, чтобы  $\operatorname{Re} \varphi'$  была равна нулю на отрезке  $-a \leq x_1 \leq a$ . Так же, как и в случае антиплоского состояния, положим

$$\varphi(z) = c\sqrt{z^2 - a^2}; \quad \varphi'(z) = \frac{cz}{\sqrt{z^2 - a^2}} . \quad (7.57)$$

Выясним поведение напряжений при  $z \rightarrow \infty$ . В формулы для напряжений входит  $\varphi'(z)$ , при этом  $\varphi'(\infty) = c$ . Произведение  $x_2 \varphi''(z)$  при  $z \rightarrow \infty$ , как нетрудно показать, стремится к нулю.

Таким образом, при  $z \rightarrow \infty$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 2c; \quad \sigma_{12} = 0.$$

Если принять  $2c = \sigma$ , функция

$$\varphi(z) = c\sqrt{z^2 - a^2}$$

служит решением задачи о всестороннем растяжении тела, содержащего трещину. Эта задача отличается от той, которая была поставлена вначале: мы потребовали, чтобы  $\sigma_{22} = \sigma$ , а  $\sigma_{11} = 0$ . Но это несущественно. Предположим, что тело, содержащее трещину, растягивается вдоль оси  $x_1$ . Наличие трещины, очевидно, никак не повлияет на напряжённое состояние, которое остаётся однородным. Поэтому для того, чтобы перейти от найденного решения к решению первоначально поставленной задачи, достаточно прибавить к напряжению  $\sigma_{11}$ , даваемому первой из формул (7.56), постоянное сжимающее напряжение  $-\sigma$ . Нас, однако, будет, прежде всего, интересовать распределение напряжений около конца трещины, где напряжения велики. Поэтому указанная поправка никакой роли не играет, и мы её вводить не будем.

По формулам (7.55) и (7.56) для точек плоскости  $x_2 = 0$  получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = 0; \quad u_2 = \frac{\sigma(1-\mu)}{G} \sqrt{a^2 - x_1^2}, \quad |x_1| < a; \\ \sigma_{22} = \frac{\sigma x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}; \quad u_2 = 0, \quad |x_1| > a. \end{aligned} \quad (7.58)$$

В непосредственной близости кончика трещины  $|x_1 - a| = r \ll a$ , разлагая выражения для  $u_2$  и  $\sigma_{22}$  по степеням  $r$ , мы получим для главных членов разложения следующие формулы:

$$u_2 = \frac{K_I(1-\mu)}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}}; \quad \sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}; \quad K_I = \sigma \sqrt{\pi a}. \quad (7.59)$$

Как видно, характер особенностей у конца трещины совершенно такой же, как в случае трещины продольного сдвига. Коэффициент интенсивности  $K_I$  определяется точно так же, с заменой  $\tau$  на  $\sigma$ .

Подобным образом решается задача о трещине в поле чистого сдвига, расположенной по оси  $x_1$ , при следующих условиях на бесконечности:

$$\sigma_{12}^{\infty} = \tau; \quad \sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = 0.$$

В этом случае следует вместо (7.54) принять

$$\psi = -\varphi - z\varphi'.$$

Согласно (7.32) будем иметь

$$2G(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi - (z - \bar{z})\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\varphi}(\bar{z}),$$

и после отделения действительной и мнимой частей получаем

$$\begin{aligned} Gu_1 &= 2(1-\mu)\operatorname{Re}\varphi + x_2 \operatorname{Im}\varphi'; \\ Gu_2 &= (1-2\mu)\operatorname{Im}\varphi - x_2 \operatorname{Re}\varphi'. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Далее находим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2(\operatorname{Re}\varphi' + x_2 \operatorname{Im}\varphi''); \\ \sigma_{22} &= 2x_2 \operatorname{Im}\varphi''; \\ \sigma_{12} &= 2(-\operatorname{Im}\varphi' - x_2 \operatorname{Re}\varphi''). \end{aligned} \quad (7.61)$$

Заметим, что теперь при  $x_2 = 0$  выполняется условие  $\sigma_{22} = 0$ .

Положим далее

$$\varphi = c\sqrt{a^2 - z^2}; \quad \varphi' = -\frac{cz}{\sqrt{a^2 - z^2}}. \quad (7.62)$$

Так же, как и выше, убеждаемся, что произведение  $x_2\varphi''(z)$  стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ , тогда как  $\varphi'(\infty) = ci$ . Таким образом, при  $z \rightarrow \infty$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0; \quad \sigma_{12} = -2c = \tau.$$

Полагая  $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$ , убеждаемся в том, что все компоненты напряжения имеют особенность типа  $1/\sqrt{r}$  около кончика трещины и на оси  $x_1$ :

$$\tau = K_{II}/\sqrt{2\pi r}.$$