

**Контрольный  
экземпляр**

СГАУ: 6(У)  
М239

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА

*А.И. Мантуров*

# МЕХАНИКА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

*Учебное пособие*

Самарский Государственный  
аэрокосмический университет  
№ 662832  
Научно-техническая  
библиотека

САМАРА 2003

СГАУ: 6(075) + 629:78(075)

55.49

УДК 629.78

**Маитуров А.И.** Механика управления движением космических аппаратов: Учеб. пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2003. 62 с.

ISBN 5-7883-0255-2

Учебное пособие содержит методические материалы по выбору параметров орбит космических аппаратов дистанционного зондирования Земли, определению параметров управления движением центра масс аппаратов для поддержания необходимых параметров орбит в процессе полета и оценке затрат массы топлива на поддержание параметров орбит в течение времени активного существования аппаратов.

Пособие предназначено для студентов старших курсов специальностей 010500, 130700 при выполнении курсовых и дипломных проектов.

Ил. 15. Табл. 4. Библиогр.: 7 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензенты: Балакин В.Л., Кузнецов В.И.



ISBN 5-7883-0255-2

© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2003.

## ВВЕДЕНИЕ

Космические аппараты (КА) дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), предназначенные для получения информации о планете и припланетном слое атмосферы, обеспечивают возможность решения широкого круга тематических задач в различных отраслях хозяйствования. Данные дистанционного зондирования из космоса используются для изучения и контроля природных ресурсов Земли, исследования динамики природных процессов и явлений, сбора информации о состоянии лесных и сельскохозяйственных территорий и для решения других прикладных и фундаментальных задач.

Характер и продолжительность обзора исследуемых районов поверхности Земли для обеспечения их зондирования определяется параметрами орбит КА ДЗЗ. Параметры орбит (период обращения КА, эксцентриситет, наклонение орбиты и другие) в значительной степени обуславливают качество получаемой информации, оперативность её получения и передачи с КА на наземные пункты потребителей. Для получения лучшего качества информации предпочтительным оказывается функционирование аппаратов в моменты зондирования на минимальных высотах полета над поверхностью Земли. Высота полета КА с течением времени может изменяться из-за влияния сопротивления атмосферы и прецессии линии апсид орбит. В связи с этим в процессе полета необходимо управлять движением центра масс КА с целью поддержания параметров орбиты в допустимой окрестности требуемых значений этих параметров с точки зрения выполнения условий зондирования.

Ниже рассмотрены методические вопросы выбора параметров орбит КА ДЗЗ в зависимости от условий зондирования, определения параметров управления движением центра масс для поддержания параметров орбит, а также оценки потребных затрат топлива для маневров поддержания в течение времени активного существования КА.

# 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТ КА ДЗЗ

## 1.1. Основные понятия

Возможность установки на космических аппаратах аппаратуры дистанционного зондирования позволяет осуществлять обзор поверхности Земли для решения различных задач научного и хозяйственного значения.

Одним из важных требований, предъявляемых к КА ДЗЗ, является требование осуществления сплошного обзора всех заданных участков поверхности. Для одиночных низкоорбитальных КА в силу их законов движения обзор отдельных районов поверхности может осуществляться, как правило, только периодически. При этом последовательность обзора соответствует последовательности прохождения трассы полета КА через заданные районы поверхности. Если специальная аппаратура, установленная на КА, обеспечивает характерную для нее полосу обзора, то возможность полного одно- или многократного обзора всей заданной поверхности определяется параметрами орбиты КА ДЗЗ.

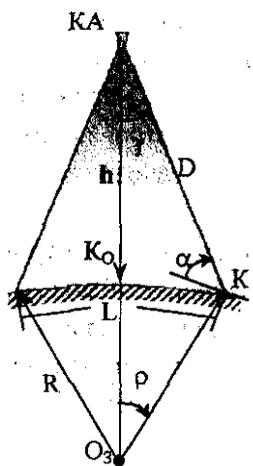


Рис. 1

Прежде чем перейти к определению параметров орбит, оптимальных с точки зрения сплошного обзора заданной поверхности, дадим некоторые определения.

**Мгновенная зона обзора** — часть поверхности Земли, ограниченная окружностью с центром в подспутниковой точке  $K_0$ . Радиус зоны обзора задается центральным углом  $\rho$  между линией, соединяющей границу зоны с центром Земли  $O_3$ , и линией, направленной из центра Земли в подспутниковую точку  $K_0$  (рис. 1).

Для произвольной высоты полета КА  $h$  значение центрального угла  $\rho$  можно задавать в зависимости от угла крена  $\gamma$ , угла места  $\alpha$ , а также в зависимости от максимально допустимой, с точки зрения осуществления процесса зондирования, дальности  $D$  от КА до границы мгновенной зоны обзора.

Под углом крена  $\gamma$  понимается максимальный угол между радиусом-вектором КА и вектором дальности "КА — точка зондирования", при котором возможно проведение зондирования поверхности Земли установленной на КА аппаратурой. Под углом места  $\alpha$  в некоторой точке  $K$  на поверхности Земли понимается минимальный угол  $\alpha$  между плоскостью местного горизонта и направлением на КА, при котором также возможно проведение зондирования.

Соотношение, определяющее  $\rho$  в зависимости от  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $D$ , а именно —  $\rho_\gamma$ ,  $\rho_\alpha$ ,  $\rho_D$ , нетрудно получить из рис. 1:

$$\rho_\gamma = \arcsin\left(\frac{R+h}{R}\sin\gamma\right) - \gamma; \quad (1.1)$$

$$\rho_\alpha = \arcsin\cos\alpha - \arcsin\left(\frac{R}{R+h}\cos\alpha\right); \quad (1.2)$$

$$\rho_D = \arccos\left(\frac{(R+h)^2 + R^2 - D^2}{2(R+h)R}\right); \quad (1.3)$$

где  $R$  — средний радиус Земли.

Линейное значение ширины  $L$  мгновенной зоны обзора (по поверхности Земли) определяется по формулам:

$$L = 2R \cdot \rho,$$

если  $\rho$  задано в радианах, и

$$L = 2R \cdot \rho \frac{\pi}{180},$$

если  $\rho$  задано в градусах.

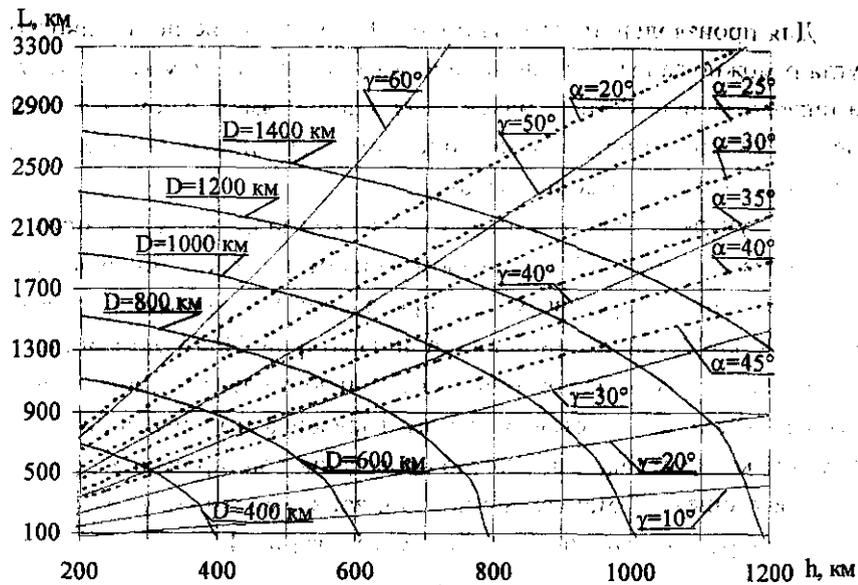


Рис. 2. Зависимости ширины зоны обзора от высоты полета

Зависимости ширины  $L$  мгновенной зоны обзора от высоты полета КА для некоторых значений углов крена  $\gamma$ , углов места  $\alpha$  и дальности  $D$  приведены на рис. 2.

**Полоса обзора** – шаровой пояс на поверхности Земли, образуемый перемещением мгновенной зоны обзора в процессе обращения КА по орбите и Земли вокруг своей оси. В связи с этим ширина полосы обзора по направлению нормали к трассе в любой момент времени равна ширине  $L$  мгновенной зоны обзора. Если не учитывать вращение Земли, то ширина полосы обзора вдоль экватора (при наклонении орбиты  $i \neq 0$ ) равна

$$d^* = 2 \arcsin \frac{\sin \rho}{\sin i} \quad (1.4)$$

На рис. 3 представлены зависимости ширины полосы обзора вдоль экватора от ширины мгновенной зоны обзора для различных наклонений орбит.

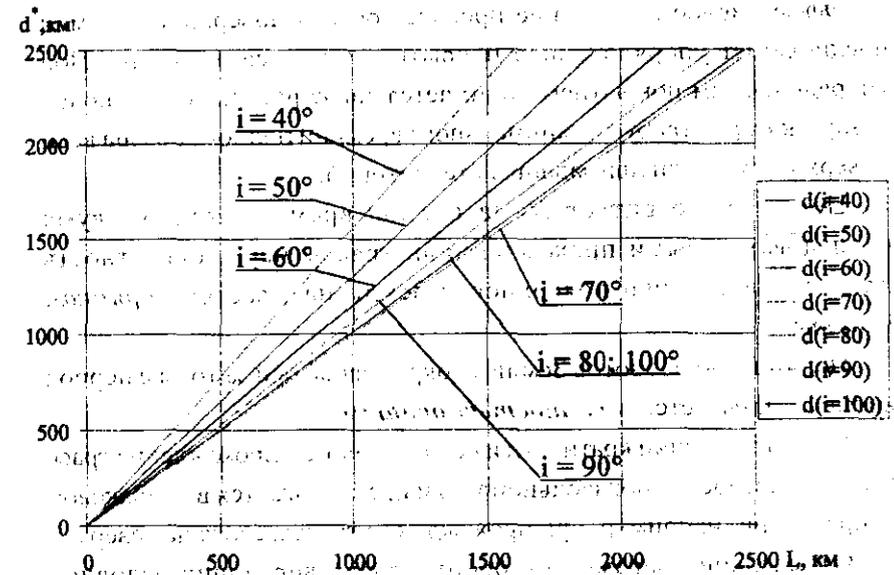


Рис. 3. Зависимости ширины полосы обзора вдоль экватора от ширины мгновенной зоны обзора для различных наклонений орбит

Будем полагать, что размеры территории, подлежащей обзору, сравнимы в широтном и долготном направлениях с одним или несколькими межвитковыми интервалами орбиты  $\Delta\lambda$ , то есть составляют значительную часть поверхности Земли или всю ее поверхность. Здесь  $\Delta\lambda$  – разность долгот начальных точек двух соседних витков полета КА, а начало каждого витка определяется моментами времени прохождения аппаратом восходящего узла орбиты.

Под сплошным однократным обзором таких участков поверхности понимается покрытие поверхности Земли полосами обзора без пропусков и перекрытий на широте экватора. При этом имеется в виду, что если осуществить такое покрытие без пропусков и перекрытий на экваторе в промежутке одного межвиткового интервала, то оно будет обеспечено, в силу периодического движения КА, и на любом другом межвитковом интервале.

Эффективное проведение процесса обзора поверхности Земли предполагает упорядоченное покрытие ее полосами обзора. Под упорядоченным покрытием понимается такое расположение полос обзора, которое требует минимального времени полного обзора всей поверхности Земли или заданных территорий.

Целое число витков  $N_k$  за период времени между двумя последовательными прохождениями трассы через окрестность произвольной точки поверхности Земли называется *порядком орбиты*.

Целое число оборотов Земли  $k$  вокруг своей оси за тот же период времени называется *кратностью орбиты*.

При определении кратности и порядка орбиты прохождение трассы через окрестность произвольной точки предполагается в одинаковом направлении (например, при прохождении трассы с юга на север).

Определение параметров орбит, удовлетворяющих условиям упорядоченности покрытия проводится далее без учета влияния атмосферы на движение КА. Под параметрами орбиты КА будем понимать следующие элементы кеплеровой орбиты, задаваемые на некоторый момент времени:

$T$  — период орбиты;

$h$  — высота в перигее;

$\omega$  — аргумент перигея орбиты;

$i$  — наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора;

$\Omega$  — долгота восходящего узла орбиты;

$u$  — аргумент широты КА.

Рассмотрим общие предпосылки определения указанных параметров.

Наклонение плоскости орбиты выбирается в зависимости от географического расположения районов, подлежащих обзору. Для покрытия поверхности на широте  $\varphi$  полосой обзора КА требуемое наклонение орбиты определяется из соотношения

$$\pi - \varphi + \frac{\rho}{R}(1 - k') \geq i \geq \varphi - \frac{\rho}{R}(1 - k'),$$

где  $k' = (0 - 1)$  — коэффициент, учитывающий требуемый процент перекрытия полосой обзора КА заданной широты  $\varphi$ . Если  $k' = 0$ , то широта  $\varphi$  находится на краю полосы обзора; если  $k' = 1$ , то трасса полета КА касается  $\varphi$ .

Долгота восходящего узла орбиты КА, которая вместе с наклонением  $i$  определяет положение плоскости орбиты в пространстве, не оказывает влияния на характер покрытия поверхности Земли полосами обзора. Значение этой долготы может, например, определяться требованиями по взаимному положению плоскостей орбит нескольких КА, если последние образуют некоторую систему для обзора Земли.

Аргумент широты КА, также не влияющий на характер покрытия, может быть связан с требованиями по моментам времени прохождения КА над требуемыми районами поверхности. В этом случае значение аргумента широты КА в начальный момент времени  $t$  определяет момент времени приведения КА в требуемую точку орбиты.

Из вышеприведенных определений кратности и порядка орбиты, а также ширины полосы обзора следует, что выполнение требований упорядоченности покрытия поверхности Земли полосами обзора определяется внутриплоскостными параметрами орбиты  $T$ ,  $h$ ,  $\omega$  и, в первую очередь, соотношением периода обращения КА с периодом вращения Земли вокруг своей оси. Именно внутриплоскостные параметры орбиты и подлежат далее определению. Другие параметры орбиты, определяемые из условий, не связанных с характером покрытия, как правило, будем рассматривать в качестве заданных (исходных).

## 1.2. Квазигеосинхронные орбиты

Пусть  $k$  – кратность орбиты, а  $N_k$  – порядок орбиты КА. Определим смещение трассы полета КА на экваторе за  $k$  суток или, что тоже самое, за  $N_k$  витков полета КА. Во вращающейся с угловой скоростью  $\omega_3$  геоцентрической системе координат угловое смещение  $\delta$  трассы за  $N_k$  витков составляет:

$$\delta = 2\pi \cdot k - N_k \Delta\lambda, \quad (1.5)$$

где  $\omega_3$  – угловая скорость вращения Земли.

Поскольку отсчет географической долготы на поверхности Земли принято проводить от гринвичского меридиана в восточном направлении, то при  $\delta > 0$  трасса полета КА через  $N_k$  витков смещается к востоку от начального положения на величину  $\delta$ , т.е. долгота восходящего узла  $N_k$ -го витка больше долготы восходящего узла первого витка на величину  $\delta$ .

при  $\delta < 0$  трасса полета КА через  $N_k$  витков смещается к западу от начального положения на величину  $\delta$ ;

при  $\delta = 0$  долгота восходящего узла  $N_k$  витка совпадает с соответствующей долготой первого витка полета КА.

В первом случае трасса полета КА имеет восточное смещение, во втором – западное.

Орбиты КА, трассы которых через  $N_k$  витков периодически проходят через одну и ту же долготу на экваторе, т.е. отвечают условию  $\delta = 0$ , называются *геосинхронными орбитами* кратности  $k$  и порядка  $N_k$ . Далее будем называть их *синхронными*, если не требуется использовать приставку "гео" по смыслу высказываний.

Примем, что ширина полосы обзора вдоль экватора, обеспечиваемая при движении космического аппарата, с учетом вращения Земли составляет некоторую угловую величину  $d$ . Орбиты КА, смещение трассы которых удовлетворяет условию  $|\delta| = d$ , называются *квазигеосинхронными орбитами* кратности  $k$  и порядка

$N_k$  (или квазисинхронными, если приставку "гео", как отмечено выше, можно не использовать).

Для синхронных орбит, поскольку  $\delta = 0$ , характерным является покрытие полосами обзора на каждом витке полета КА одних и тех же участков поверхности Земли. Взаимное расположение полос обзора на экваторе при осуществлении наблюдения с квазисинхронных орбит имеет характер, представленный на рис. 4, а, а для синхронных орбит – на рис. 4, б.

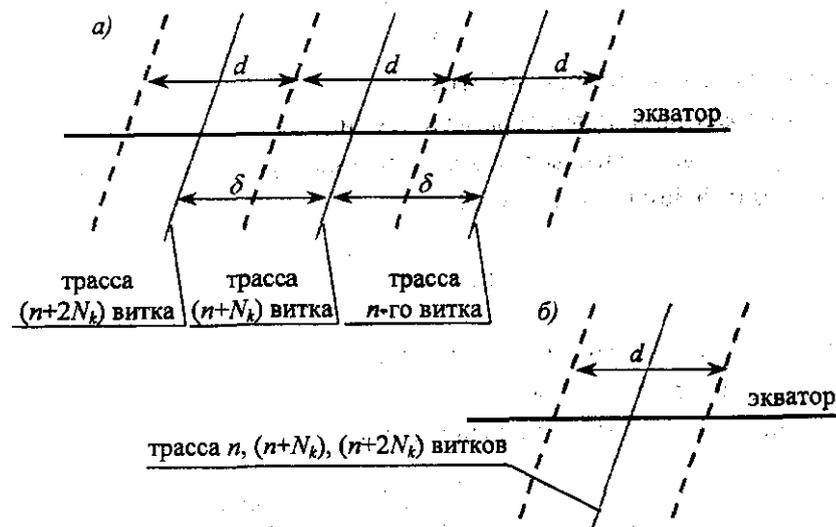


Рис. 4. Расположение полос обзора

Расположению полос обзора на рис. 4, а отвечает орбита КА с западным смещением трассы полета. На этом рисунке  $n$  – порядковый номер витка полета КА.

## 1.3. Определение периода квазисинхронных орбит для заданного наклонения

В соотношении (1.5) межвитковый интервал в общем случае можно определить следующим образом:

$$\Delta\lambda = T_{ДР} \omega_3 - \Delta\Omega, \quad (1.6)$$

где  $T_{ДР}$  – драконический период обращения КА по орбите;

$\Delta\Omega$  – вековая составляющая прецессии долготы восходящего узла орбиты за один виток.

Примем в качестве периода обращения КА за виток значение оскулирующего периода

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2},$$

где  $a$  – большая полуось орбиты,

$\mu$  – гравитационный параметр Земли.

Прецессию долготы восходящего узла орбиты определим для поля сжатой Земли по формуле

$$\Delta\Omega = -A \frac{\cos i}{p^2},$$

где  $A$  – постоянная гравитационного поля,

$p$  – параметр орбиты.

Теперь соотношение (1.5) примет вид

$$\delta = 2\pi \cdot k - N_k \left( 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \cdot \omega_3 + A \frac{\cos i}{p^2} \right). \quad (1.7)$$

Поскольку соотношение (1.7) инвариантно относительно эксцентриситета орбиты, то для заданного  $d = |\delta|$  его можно представить в виде, соответствующем движению КА по круговой орбите радиуса  $r$ :

$$\delta = 2\pi \cdot k - N_k \left( 2\pi \frac{r^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \cdot \omega_3 + A \frac{\cos i}{r^2} \right). \quad (1.8)$$

Для заданных или требуемых значений  $i$ ,  $k$ ,  $N_k$  и  $|\delta| = d$  из уравнения (1.8) можно определить значение радиуса круговой орбиты. Для этого представим  $r^{3/2}$  и  $r^2$  в виде ряда Тейлора, ограничившись двумя членами разложения:

$$r^{3/2} = r_o^{3/2} \left( 1 + \frac{3 \Delta r}{2 r_o} + \frac{3 \Delta r^2}{8 r_o^2} \right); \quad r^{-2} = r_o^{-2} \left( 1 - 2 \frac{\Delta r}{r_o} + 3 \frac{\Delta r^2}{r_o^2} \right); \quad (1.9)$$

где  $r_o$  – некоторое начальное приближение искомого значения  $r$ .

Подставляя (1.9) в (1.8), получим уравнение

$$\tilde{C}_1 \Delta r^2 + \tilde{C}_2 \Delta r + \tilde{C}_3 = 0,$$

где  $\tilde{C}_1 = \left( \frac{3}{8} a \frac{1}{\sqrt{r_o}} + 3b \frac{1}{r_o^4} \right),$

$$\tilde{C}_2 = \left( \frac{3}{2} a \sqrt{r_o} - 2b \frac{1}{r_o^3} \right),$$

$$\tilde{C}_3 = a r_o^{3/2} + b r_o^{-2} + \tilde{c};$$

$$a = 2\pi N_k \frac{\omega_3}{\sqrt{\mu}}; \quad b = A N_k \cos i; \quad \tilde{c} = d - 2\pi k.$$

Решение полученного уравнения имеет вид

$$\Delta r_1 = \frac{-\tilde{C}_2 - \sqrt{\tilde{C}_2^2 - 4\tilde{C}_1\tilde{C}_3}}{2\tilde{C}_1};$$

$$\Delta r_2 = \frac{-\tilde{C}_2 + \sqrt{\tilde{C}_2^2 - 4\tilde{C}_1\tilde{C}_3}}{2\tilde{C}_1}.$$

Значения  $r_1 = r_0 + \Delta r_1$  или  $r_2 = r_0 + \Delta r_2$  могут уточняться итерационно — в каждой последующей итерации для определения  $r_i$  в качестве начального приближения используется значение  $r_{i-1}$ , полученное в предыдущей итерации. Если  $|r_i - r_{i-1}| \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  — некоторая малая величина, то в качестве решения принимается значение  $r_i$ , в противном случае оно принимается в качестве начального приближения. При определении  $r_1$  и  $r_2$  необходимо также учитывать физически возможный диапазон значений  $r$ .

Заметим, что в качестве начального приближения можно рекомендовать значения  $r_0$ , соответствующее  $i = \pi/2$  и  $d = 0$ , а именно:

$$r_0 = \mu^{1/3} \cdot \omega_3^{-3/2} 3 \sqrt[3]{\left(\frac{k}{N_k}\right)^2}. \quad (1.10)$$

После определения  $r$  значение периода  $T$  определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{3/2}. \quad (1.11)$$

#### 1.4. Анализ кратности и порядка орбит

Исходя из определения кратности орбиты,  $k$  может принимать значения:

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Это означает, что орбиты КА могут быть суточной, двухсуточной и так далее кратности.

Порядок орбиты  $N_k$  представим следующим образом:

$$N_k = k \cdot N^* - b_k, \quad (1.12)$$

где  $N^* = \left[ \frac{2\pi}{\Delta\lambda^*} \right]$ ,  $\Delta\lambda^*$  — физически возможный минимальный

межвитковый интервал орбиты.

При  $k = 1$ :  $b_k$  — целые положительные числа и ноль.

При  $k > 1$ :  $b_k$  — положительные и отрицательные числа, кроме нуля и кратных простым делителям  $k$ .

Например, для орбит с кратностью  $k = 1, 2, 3, 4$  значения  $b_k$  могут принимать значения:

$$b_1 = 0, 1, 2, 3, 4, \dots;$$

$$b_2 = b_4 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots;$$

$$b_3 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7, \pm 8, \dots$$

При  $k > 1$ , в случае отрицательных  $b_k$ , исходя из физических соображений, следует рассматривать орбиты с  $\Delta\lambda \geq \Delta\lambda^*$ .

Отметим, что при  $k = 1$  значение порядка орбиты соответствует числу витков полета КА в одни сутки  $n_c$ .

Например, если  $N^* = 17$ , то в соответствии с (1.12)  $n_c$  может принимать, в зависимости от  $b_k$ , значения: 16, 15, 14, ... витков в сутки.

#### 1.5. Определение периода квазигеосинхронных изомаршрутных орбит суточной кратности

Пусть  $m$  — число полос обзора в межвитковом интервале таких, что границы соседних полос касаются друг друга, как это показано на рис. 4, а  $q$  — количество этапов однократного прохождения полосами обзора какого-либо межвиткового интервала при движении КА.

Исходя из геометрических соображений, зависимость межвиткового интервала от  $m, q, n_c$  можно записать в виде

$$\Delta\lambda = 2\pi \frac{m}{n_c m + q}, \quad (1.13)$$

где  $m, n_c$  — целые положительные числа;

$q$  – целое число, положительные значения которого соответствуют восточному, а отрицательные – западному смещению трассы.

Учитывая условие

$$\Delta\lambda = md, \quad (1.14)$$

нетрудно привести (1.13) к виду непосредственной зависимости  $\Delta\lambda$  от ширины полосы обзора  $d$ :

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi - qd}{n_c} \quad (1.15)$$

Выразим значение межвиткового интервала через параметры орбиты  $i$  и  $T$ :

$$\Delta\lambda = \omega_3 T + A \frac{\cos i}{r^2} \quad (1.16)$$

Для определения радиуса круговой орбиты, используя (1.15) – (1.16), составим уравнение

$$\frac{2\pi - qd}{n_c} - 2\pi \frac{r^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \omega_3 - A \frac{\cos i}{r^2} = 0 \quad (1.17)$$

Из уравнения (1.17) при заданных  $n_c$ ,  $m$ ,  $q$ ,  $d$  и фиксированном наклонении  $i$  определяется радиус орбиты  $r$ . Далее значение периода  $T$  определяется соотношением (1.11).

Численное решение (1.13)-(1.17) позволяет построить геометрическую картину вариантов обзора межвиткового интервала в зависимости от ширины полосы обзора и параметров орбиты. На рис. 5 представлен пример зависимости  $\Delta\lambda$  от соответствующих параметров круговой орбиты  $T$ ,  $i$  для  $n_c=15$  и от параметров  $d$ ,  $m$ ,  $q$ .

На этом рисунке прямые с  $q = \pm 1$  соответствуют последовательному обзору (восточное или западное смещение трассы), а прямые с другими значениями  $q$  – покрытию межвиткового интервала полосами обзора в  $q$  этапов.

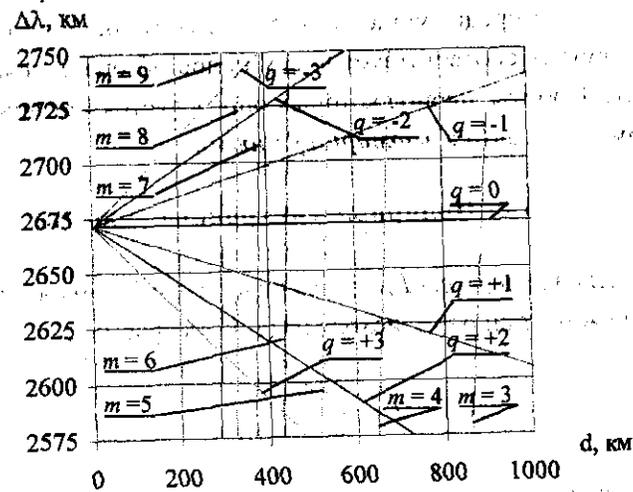
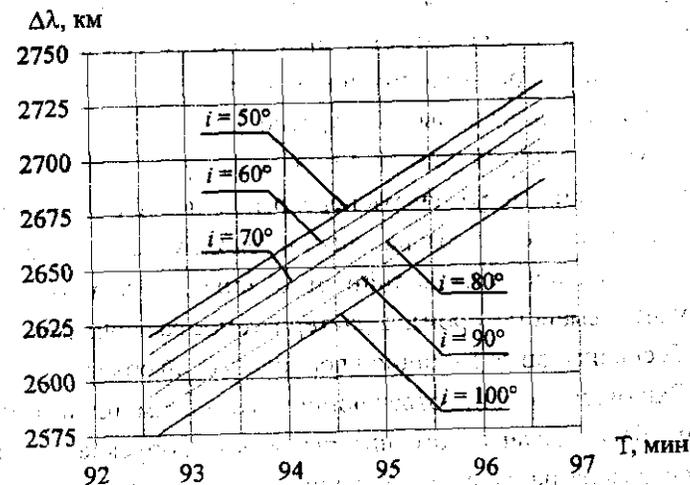


Рис. 5. К определению орбит суточной кратности

При этом такому характеру обзора отвечают лишь те точки на прямых (точки пересечения прямых с индексом "m" и прямых с индексом "q"), для которых выполняется условие (1.14). Для перекрестных прохождений полос обзора, т.е. обзора в q этапов, необходимо, чтобы m было не кратно q.

Другие точки на линиях с индексом "q", а также точки между этими линиями могут давать перекрытие полос обзора, пропуски в обзоре и повторение обзора одних и тех же участков поверхности.

В зависимости от вариантов обзора для каждого  $n_c$  можно получить семейство орбит, характеризуемое различными периодами, но обеспечивающее сплошной периодический обзор.

Параметры орбит, отвечающие указанным точкам, обеспечивают обзор межвиткового интервала без пропусков и перекрытий полос обзора на экваторе. С таких орбит через m суток осуществляется повторное покрытие одних и тех же участков поверхности Земли, что и за предыдущие m суток. То есть время однократного обзора в сутках соответствует числу полос обзора в межвитковом интервале. Орбиты, период которых определяется указанным выше способом, называются *изомаршрутными*.

### 1.6. Полярные синхронные орбиты

Определение периода T для полярных ( $i = 90^\circ$ ) синхронных орбит осуществляется при  $\delta = 0$ , исходя из (1.7), по формуле

$$T = \frac{2\pi k}{N_k \cdot \omega_3} \quad (1.18)$$

Для орбит суточной кратности

$$T = \frac{2\pi}{n_c \cdot \omega_3}$$

Период T и высота круговых полярных синхронных орбит суточной кратности для некоторых  $n_c$  приведены в табл. 1.1. При этом

$$h = r - R.$$

Таблица 1.1

Параметры полярных синхронных орбит

№ п/п	$n_c$	T, мин	h, км
1	16	89,75	272,45
2	15	95,73	564,40
3	14	102,57	890,70
4	13	110,46	1258,33
5	12	119,67	1676,34

### 1.7. Полярные квазисинхронные орбиты

Период таких орбит определяется из соотношения (1.8) при  $|\delta| = d$  по формуле

$$T = \frac{2\pi k - \delta}{N_k \cdot \omega_3} \quad (1.19)$$

Для орбит суточной кратности

$$T = \frac{2\pi - \delta}{n_c \cdot \omega_3}$$

На рис. 6 приведены зависимости периода полярных квазисинхронных орбит от ширины полосы обзора на экваторе.

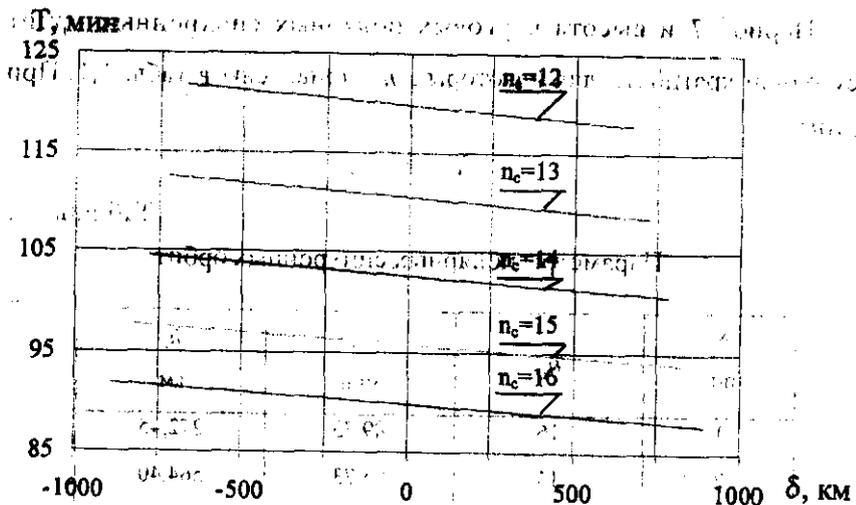


Рис. 6. Зависимость периода от ширины полосы обзора  $d = |\delta|$

### 1.8. Солнечно-синхронные орбиты

Орбита КА является солнечно-синхронной, если скорость прецессии долготы восходящего узла этой орбиты в геоцентрической системе координат равна по модулю и совпадает по направлению со скоростью движения среднего экваториального Солнца. В соответствии с этим определением прецессия долготы восходящего узла солнечно-синхронной орбиты составляет за один виток полета КА

$$\Delta\Omega = 2\pi \frac{\mu}{T_\gamma} \quad (1.20)$$

где  $T$  – период обращения КА;

$T_\gamma$  – тропический год.

С другой стороны, в зависимости от параметров круговой орбиты КА прецессия долготы ее восходящего узла

$$\Delta\Omega = -2\pi \frac{\mu \cos i}{\mu r^2} \quad (1.21)$$

Приравнявая (1.20) и (1.21), получим

$$i = \arccos \left( -\frac{T_\mu}{T_\gamma \epsilon} r^2 \right) \quad (1.22)$$

где  $\epsilon$  – постоянная гравитационного поля.

Выражая в (1.22) период  $T$  через радиус круговой орбиты  $r$ , получим

$$i = \arccos \left( -\frac{2\pi\sqrt{\mu}}{T_\gamma \epsilon} r^{7/2} \right) \quad (1.23)$$

На рис. 7 представлены графики зависимости наклонений солнечно-синхронных орбит от их высоты и периода.

Характерной особенностью солнечно-синхронных орбит является постоянство местного среднесолнечного времени прохождения траектории КА через фиксированную широту поверхности Земли.

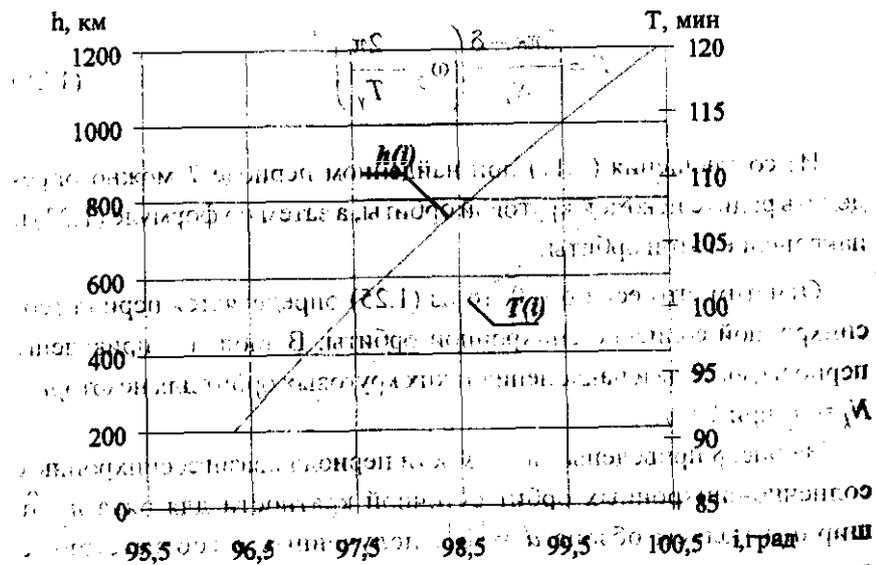


Рис. 7. Зависимость высоты и периода солнечно-синхронных орбит от их наклонений

### 1.9. Квазигеосинхронные солнечно-синхронные орбиты

Представим межвитковый интервал квазигеосинхронной орбиты  $\Delta\lambda$  с учетом (1.20) в виде

$$\Delta\lambda = T \cdot \omega_3 - 2\pi \frac{T}{T_Y} \quad (1.24)$$

Тогда уравнение для определения периода квазигеосинхронной солнечно-синхронной орбиты кратности  $k$  и порядка  $N_k$  для некоторой ширины обзора  $d = |\delta|$  можно представить аналогично (1.8) в виде

$$\delta = 2\pi k - N_k \left( \omega_3 - \frac{2\pi}{T_Y} \right) T$$

откуда

$$T = \frac{2\pi k - \delta}{N_k} \left( \omega_3 - \frac{2\pi}{T_Y} \right)^{-1} \quad (1.25)$$

Из соотношения (1.11) при найденном периоде  $T$  можно определить радиус искомой круговой орбиты, а затем по формуле (1.23) и наклонение этой орбиты.

Отметим, что если  $\delta = 0$ , то из (1.25) определяется период геосинхронной солнечно-синхронной орбиты. В табл. 1.2 приведены периоды, высоты и наклонения таких круговых орбит для некоторых  $N_k = n_c$  при  $k = 1$ .

На рис. 8 приведены зависимости периода квазигеосинхронных солнечно-синхронных орбит суточной кратности для ряда  $n_c$  от ширины полосы обзора  $d = |\delta|$ , полученные в соответствии с соотношениями (1.25). Соответствующие периодам значения наклонений можно определить из графика на рис. 7.

Таблица 1.2  
Параметры геосинхронных солнечно-синхронных орбит

№ п/п	$n_c$	$T$ , мин	$h$ , км	$i$ , град
1	12	120,00	1676,34	102,93
2	13	110,77	1258,33	100,70
3	14	102,86	890,71	98,99
4	15	96,00	564,40	97,65
5	16	90,00	272,46	96,57

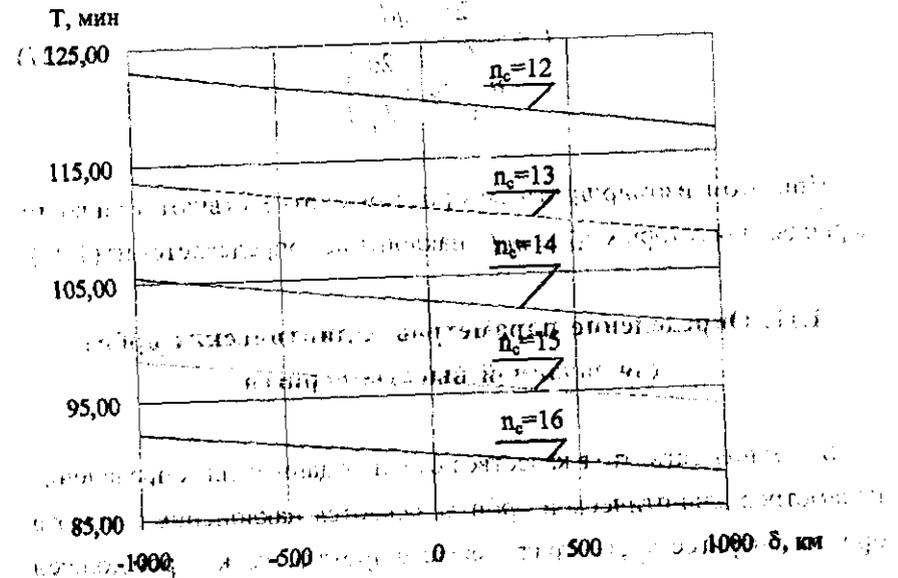


Рис. 8. Зависимость периода квазигеосинхронных солнечно-синхронных орбит суточной кратности для ряда  $n_c$  от ширины полосы обзора  $d = |\delta|$

**1.10. Квазигеосинхронные солнечно-синхронные изомаршрутные орбиты суточной кратности**

Используя (1.15) и (1.24), составим уравнение

$$\frac{2\pi - qd}{n_c} - \omega_z \cdot T + 2\pi \frac{T}{T_Y} = 0, \quad (1.26)$$

или

$$\frac{2\pi - qd}{n_c} - \left( \omega_z \cdot T + \frac{2\pi}{T_Y} \right) T = 0,$$

из которого

$$T = \frac{2\pi - qd}{n_c \left( \omega_z + \frac{2\pi}{T_Y} \right)}. \quad (1.27)$$

При этом изомаршрутным орбитам соответствуют только те периоды, для которых  $\Delta\lambda = md$ , наклонение  $i$  определяется из (1.23).

**1.11. Определение параметров эллиптических орбит для заданной высоты перигея**

Будем полагать, что в качестве исходных данных для определения параметров эллиптической орбиты задаются наклонение  $i$ , высота орбиты в перигее  $h_p$ , географическая широта  $\phi$ , над которой должен находиться перигей орбиты, кратность  $k$  и порядок  $N_k$  орбиты и значение полосы обзора  $d$ .

Исходя из упорядоченного покрытия поверхности Земли полосами обзора на широте экватора, к определяемым параметрам будем относить период орбиты  $T$ , ее эксцентриситет  $e$  и аргумент перигея  $\omega$ .

Как отмечено в п. 1.3, при одинаковых условиях упорядоченного покрытия период эллиптической орбиты должен совпадать с периодом круговой орбиты.

Поэтому для определения периода эллиптической орбиты должны использоваться соответствующие соотношения, приведенные в пп. 1.2-1.10. Если период искомой орбиты найден, то ее большая полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  определяются соотношениями

$$a = 3 \sqrt{\mu \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2}; \quad (1.28)$$

$$e = 1 - \frac{R + h_p}{a}.$$

Аргумент перигея орбиты  $\omega$  определяется по формуле

$$\omega = \arcsin \frac{\sin \phi}{\sin i}. \quad (1.29)$$

Высоту орбиты в апогее  $h_a$  можно найти по формуле

$$h_a = 2a - h_p. \quad (1.30)$$

На рис. 9 представлены зависимости периода орбиты от значений высоты в апогее и перигее.

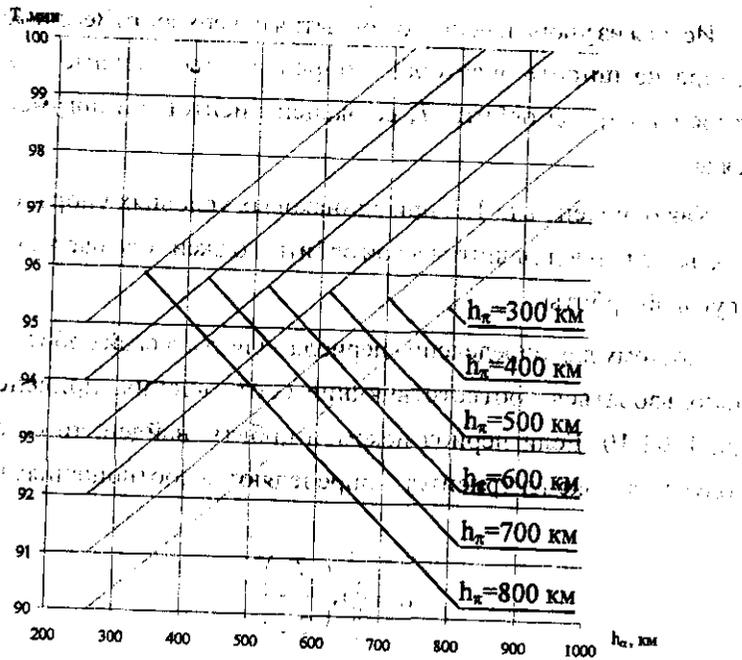


Рис. 9. Зависимость периода орбиты от высоты апогея и перигея

### 1.12. Определение параметров орбит для покрытия широтного пояса земной поверхности

Пусть требуется обеспечить упорядоченное покрытие земной поверхности полосами обзора в некотором широтном поясе. Нижняя граница такого пояса  $\varphi^H$  задается значением некоторой широты  $\varphi^H < (i - \rho)$  для северного полушария и  $|\varphi^H| < (i - \rho)$  для южного полушария. Верхняя граница  $\varphi^B$  определяется значением  $|\pm \varphi^B| \leq (i + \rho)$ . Например, для северного полушария при  $i = 50^\circ$  может быть задан широтный пояс, ограниченный широтами  $\varphi^H = 20^\circ$ ,  $\varphi^B = 40^\circ$ .

В этом случае в составе исходных данных для определения параметров орбит какого-либо типа, рассматривавшихся в пп. 1.2-1.11, вместо ширины полосы обзора  $d$  на экваторе должна задаваться ширина полосы обзора на широте  $\varphi^H$ .

При определении периода орбит для упорядоченного покрытия некоторого широтного пояса в соответствующих соотношениях (например, при определении радиуса квазигеосинхронных орбит в соотношении (1.8)) необходимо вместо значения  $d$  использовать значение ширины полосы обзора  $d_\varphi$ , отвечающее нижней границе заданного широтного пояса. Период, найденный по формуле (1.11), обеспечивает упорядоченное покрытие широтного пояса, начиная с широты  $\varphi^H$ , без пропусков. Схема расположения полос обзора соответствует схеме на рис. 4, если линию экватора представить параллелью с широтой  $\varphi^H$ , а  $d$  заменить на  $d_\varphi$ . Отметим, что если в южном полушарии задан симметричный широтный пояс с  $\varphi^H = -\varphi^H$ , то схема его покрытия полосами обзора будет аналогичной схеме покрытия пояса северного полушария. В поясе широт от  $\varphi^H$  до  $-\varphi^H$ , включая экватор, при выбранном в этом случае периоде орбиты, появятся пропуски в обзоре. При определении других параметров орбит для покрытия широтных поясов могут использоваться те же соотношения, что и в предыдущих разделах.

### 1.13. Определение ширины полосы обзора с учетом вращения Земли

Будем полагать, что мгновенная зона обзора представляет собой отрезок линии, расположенной в плоскости нормальной к трассе, и длина которого равна ширине мгновенной зоны обзора  $L$  (рис. 10).

При движении КА покрытие экватора полосой обзора с такой зоной начинается с момента касания экватора левым концом зоны и заканчивается в момент касания экватора правым концом зоны. Время  $\Delta t$ , в течение которого экватор может пересекаться, т.е.

покрываться зоной обзора, для круговой орбиты можно найти по формуле

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi} (U_0 - U_k), \quad (1.31)$$

где  $T$  – период орбиты,

$U_0$  – аргумент широты подспутниковой точки на момент входа экватора в зону обзора,

$U_k$  – аргумент широты подспутниковой точки на момент выхода экватора из зоны обзора.

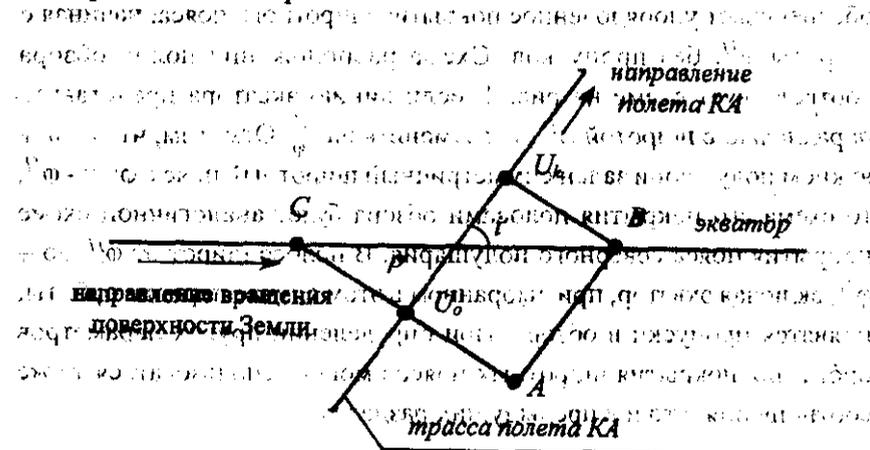


Рис. 10. К определению ширины полосы обзора

Из рассмотрения сферического треугольника  $ACB$ , интервал времени  $\Delta t$  можно определить по формуле

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{\sin \rho}{\sin i} \quad (1.32)$$

Для невращающейся Земли ширина полосы обзора по экватору – длина дуги  $CB$  – определяется в соответствии с (1.4). Если Земля

вращается, то за время  $\Delta t$  точка  $B$  по поверхности Земли переместится вправо относительно ее положения, соответствующего началу касания экватора зоной обзора. Это приводит к уменьшению ширины полосы обзора вдоль экватора.

Значение ширины полосы обзора с учетом вращения Земли можно определить с учетом (1.4) по формуле

$$d = 2 \arcsin \frac{\sin \rho}{\sin i} \mp \omega_z \frac{T}{\pi} \arcsin \frac{\sin \rho}{\sin i} \quad (1.33)$$

Знак “минус” соответствует орбитам КА с наклонением  $i < 90^\circ$ , а знак “плюс” орбитам с  $i \geq 90^\circ$ .

На рис. 11 представлены зависимости, характеризующие степень изменения ширины полосы обзора на экваторе для вращающейся Земли ( $d^* - d$ ) для некоторых  $i$  и  $T$  в зависимости от ширины мгновенной зоны обзора.

Для широт, отличных от широты экватора, как значение  $d^*$ , так и значение  $d$  могут определяться по соответствующим соотношениям (1.4) и (1.33).

Например, ширина полосы обзора  $d_\phi^*$  вдоль произвольной широты  $\phi$  для невращающейся Земли при  $\phi < (i - \rho)$  определяется соотношением

$$d_\phi^* = \arcsin \left( \frac{\sin \phi \cos i + \sin \rho}{\sin i \cos \phi} \right) - \arcsin \left( \frac{\sin \phi \cos i - \sin \rho}{\sin i \cos \phi} \right) \quad (1.34)$$

На рис. 12 представлены зависимости ширины полосы обзора  $d_\phi^*$  от широты для различной ширины мгновенной полосы обзора  $L$  при наклонении  $i = 50^\circ$ .

$d^* - d$ , км

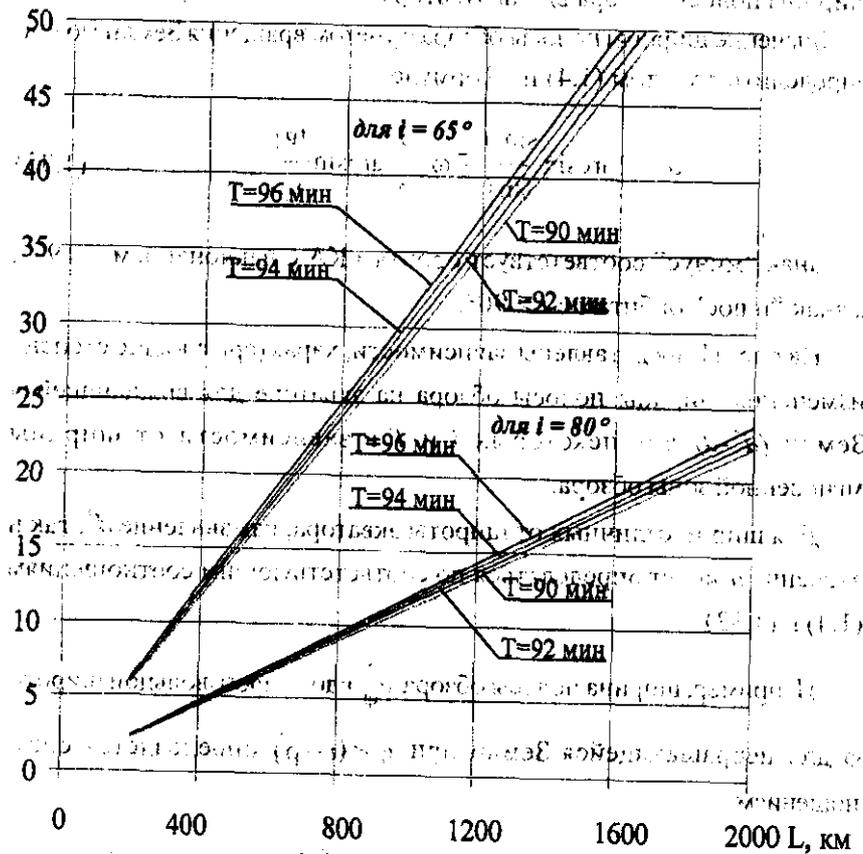


Рис. 11. Степень изменения ширины полосы обзора по экватору в зависимости от ширины мгновенной зоны обзора

Зависимость ширины полосы обзора от широты при  $i = 50^\circ$

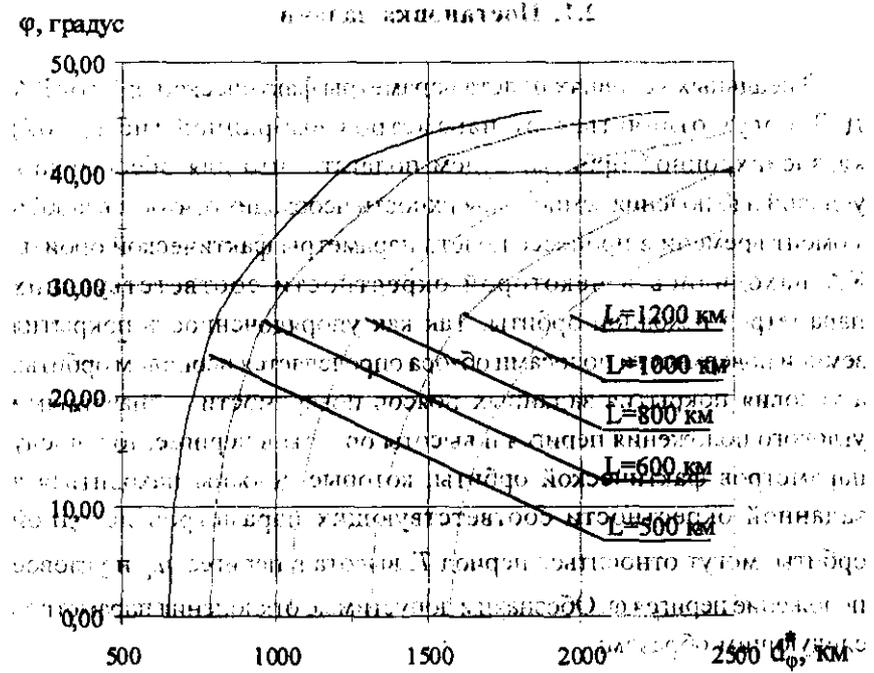


Рис. 12. Зависимость ширины полосы обзора от широты при  $i = 50^\circ$

Необходимо отметить, что для орбит с  $i = 90^\circ$  значение  $d_\phi = L$ . Поэтому упорядоченное покрытие любого широтного пояса при  $i = 90^\circ$  осуществляется с орбит, период которых выбирается исходя из условия аналогичного покрытия экватора.

## 2. Определение параметров управления движением центра масс КА ДЗЗ

### 2.1. Постановка задачи

В реальных условиях полета параметры фактической орбиты КА ДЗЗ могут отличаться от параметров выбранной (исходной) квазисинхронной орбиты. Будем полагать, что для обеспечения условий наблюдения земной поверхности необходимо, чтобы в любой момент времени в процессе полета параметры фактической орбиты КА находились в некоторой окрестности соответствующих параметров исходной орбиты. Так как упорядоченность покрытия земной поверхности полосами обзора определяется периодом орбиты, а условия покрытия заданных поясов поверхности — значениями углового положения перигея и высоты орбиты в перигее, то к числу параметров фактической орбиты, которые должны находиться в заданной окрестности соответствующих параметров исходной орбиты, могут относиться период  $T$ , высота в перигее  $h_{\pi}$  и угловое положение перигея  $\omega$ . Обозначим допустимые отклонения параметров следующим образом:

$\Delta T = (T^{\Phi} - T^H)$  — допустимое отклонение периода  $T^{\Phi}$  фактической орбиты от периода  $T^H$  исходной орбиты;

$\Delta h = (h_{\pi}^{\Phi} - h_{\pi}^H)$  — допустимое отклонение высоты  $h_{\pi}^{\Phi}$  в перигее фактической орбиты от высоты  $h_{\pi}^H$  в перигее исходной орбиты;

$\Delta \omega = (\omega^{\Phi} - \omega^H)$  — допустимое отклонение углового положения перигея  $\omega^{\Phi}$  фактической орбиты от углового положения перигея  $\omega^H$  исходной орбиты.

Интервал времени, на котором отклонение параметров фактической орбиты от параметров исходной орбиты не превышает допустимых значений, зависит от различных факторов: характеристик

КА; характеристик моделей движения центра масс КА, используемых для расчета исходной орбиты и для определения параметров фактической орбиты от действия возмущений.

Для поддержания параметров фактической орбиты в допустимой окрестности параметров исходной орбиты необходимо управление движением центра масс КА, а именно проведение космическим аппаратом активных маневров. Под активным маневром КА понимается преднамеренное изменение орбиты КА, осуществляемое посредством сообщения центру масс КА определенного по величине и направлению управляющего ускорения, вызываемого реактивной тягой от двигательной установки. Такие маневры, образующие основной тип маневров в космосе, в зависимости от величины управляющего ускорения и продолжительности работы двигательной установки разделяют:

- на маневры под действием импульсной тяги (импульсные маневры), когда участки полета с включенным двигателем малы по сравнению с участками свободного полета (на которых отсутствуют управляющие ускорения);

- маневры с непрерывно действующей тягой.

На интервалах полета КА, где необходимо проведение маневров, условия обеспечения работы аппаратуры зондирования могут не выполняться. Длительность интервалов проведения маневров с точки зрения эффективности проведения процесса зондирования должна быть минимальной. В связи с этим на низкоорбитальных КА ДЗЗ находят широкое применение импульсные маневры, что позволяет минимизировать участки полета, которые исключаются из интервалов возможной работы аппаратуры зондирования.

Поскольку допустимые отклонения  $\Delta T$ ,  $\Delta h$ ,  $\Delta \omega$  можно считать достаточно малыми, маневры поддержания параметров орбиты относятся к классу корректирующих маневров. Параметры орбиты, подлежащие изменению в процессе маневра коррекции, называются

корректируемыми параметрами. В рассматриваемом случае корректируемые параметры  $T$ ,  $h$ ,  $\omega$  являются внутриспоскостными параметрами и для их коррекции достаточно проведения компланарных маневров (далее индекс  $\pi$  при  $h$  может не использоваться).

Интервал времени (в витках полета КА) между  $j$ -м и  $(j-1)$ -м маневрами коррекции параметров фактической орбиты назовем интервалом поддержания параметров исходной орбиты и обозначим его  $\Delta n$ .

$$\Delta n = n^j - n^{j-1}, \quad (2.1)$$

где  $n^j$  – начальный виток проведения  $j$ -го маневра,

$n^{j-1}$  – начальный виток проведения  $(j-1)$ -го маневра.

Задачу управления движением центра масс для обеспечения функционирования КА ДЗЗ на исходной квазисинхронной орбите рассмотрим в следующей постановке.

*Дано:* параметры исходной орбиты, на которой в течение некоторого времени  $T_{AC}$  – времени активного существования – должен функционировать КА ДЗЗ;

допустимые отклонения параметров исходной орбиты  $\Delta T$ ,  $\Delta h$ ,  $\Delta \omega$ ;  
математическая модель движения центра масс;  
параметры двигательной установки.

*Определить* следующие параметры управления:

витки  $n_i$  проведения корректирующих маневров и интервалы поддержания  $\Delta n$  требуемых параметров орбиты;

величины импульсов скорости  $\Delta V_k$ , направления их выдачи и моменты выдачи импульсов для каждого корректирующего маневра, осуществляемого путем одного или нескольких включений и выключений двигательной установки для получения требуемых параметров орбиты на следующем после проведения маневра витке полета.

*Требуется найти* такие параметры управления, при которых минимизируются суммарные энергетические затраты  $\Delta V_{\Sigma}$  на проведение маневров на интервале активного существования  $T_{AC}$ , рассчитываемые в виде

$$\Delta V_{\Sigma} = \sum_{k=1}^N \Delta V_k, \quad (2.2)$$

где  $\Delta V_k$  – абсолютная величина  $k$ -го импульса скорости;

$N$  – количество импульсов скорости, выданных за  $T_{AC}$  при проведении всей совокупности маневров.

Решение задачи определения витков проведения маневров и интервала поддержания будем осуществлять на основе использования моделей движения центра масс, учитывающих характерный для низкоорбитальных КА состав возмущающих факторов. Прогнозирование параметров возмущенного движения КА позволит вычислять отклонения параметров орбиты, принимаемой за фактическую, от параметров исходной орбиты.

Решение задачи определения параметров управления маневрами будем осуществлять в рамках теории импульсных маневров с последующим уточнением получаемых параметров из-за ограниченной величины тяги двигательной установки. При определении параметров управления для проведения маневров в рамках теории импульсных маневров приращение скорости  $\Delta V_k$  отвечает мгновенному сжиганию соответствующей массы топлива двигательной установкой. В таком случае приращение скорости  $\Delta V_k$  называется характеристической скоростью, потребной для проведения  $k$ -го импульса маневра, а  $\Delta V_{\Sigma}$  – характеристической скоростью, потребной для проведения маневров на интервале  $T_{AC}$ . Знание характеристической скорости позволяет однозначно связать величину потребного для маневра импульса  $\Delta V_k$  с необходимым запасом топлива. Для этого воспользуемся формулой Циолковского:

$$\Delta V_{ид} = c \ln \frac{m_0}{m_k}, \quad (2.3)$$

где  $c$  — скорость истечения газов из реактивного сопла двигательной установки;

$m_0$  — начальная масса КА (до первого включения двигательной установки);

$m_k = m_0 - m_T$  — конечная масса КА после сжигания массы топлива  $m_T$  затраченной на приращение скорости  $\Delta V_{ид}$  (независимо от того, была ли эта масса израсходована при одном или нескольких включениях двигателя).

Формула Циолковского определяет идеальную скорость, т.е. приращение скорости КА под действием тяги в условиях отсутствия атмосферы и притяжения. Если в формулу (2.3) вместо  $\Delta V_{ид}$  подставить  $\Delta V_k$  — характеристическую скорость, потребную для проведения  $k$ -го импульса маневра — и обратить ее, то получим потребный запас массы топлива  $m_T^k$  на проведение  $k$ -го импульса:

$$m_T^k = m_0 \left[ 1 - \exp \left( - \frac{\Delta V_k}{c} \right) \right]. \quad (2.4)$$

Отметим, что если в (2.4) вместо  $m_T^k$  подставить запас массы топлива  $m_T^\Sigma$ , имеющегося на борту КА, то по этой формуле определяется располагаемый запас характеристической скорости  $\Delta V_\Sigma^{расч}$ , который можно израсходовать на проведение тех или иных маневров в процессе полета.

Соотношение (2.4) показывает, что определение параметров управления, исходя из обеспечения минимума критерия (2.2), однозначно определяет оптимальность параметров управления с точки зрения минимума потребных затрат топлива.

## 2.2. Уравнения движения центра масс КА $x^i = \dot{x}^i$

При описании движения центра масс КА используются дифференциальные уравнения движения, составляемые согласно второму закону Ньютона и учитывающие необходимую в каждом конкретном случае совокупность действующих на КА сил. В уравнениях движения для низкоорбитальных КА ДЗЗ кроме центральной силы притяжения планеты, действующей на центр масс, как правило, учитываются:

— сила, определяемая возмущающей частью нормального гравитационного поля Земли (от второй и четвертой зональных гармоник разложения потенциала поля тяготения);

— сила сопротивления воздуха; (2.5)

— реактивная сила, определяемая значением силы тяги двигательной установки КА.

Отметим, что если на некотором участке полета КА действует сила тяги двигателя, то такой участок называется *активным*. Участок полета, на котором движение КА происходит под воздействием только внешних сил, называется *пассивным*.

Движение КА ДЗЗ удобно рассматривать во вращающейся гринвичской прямоугольной системе координат  $Ox^i$ , начало которой совпадает с центром масс планеты. Основная плоскость  $Ox^i$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $Ox$  направлена в гринвичский меридиан, ось  $Oz$  — по оси вращения Земли, а ось  $Oy$  дополняет систему координат до правой. Будем далее обозначать эту систему ГСК (гринвичская система координат). Если ограничиться учетом вышеуказанных сил, то движение КА в ГСК описывается следующей системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= V_x \\
 \dot{y} &= V_y \\
 \dot{z} &= V_z \\
 \dot{V}_x &= -\frac{\mu}{r^3}x + \left[ \frac{3}{2}\bar{c}_{20} \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R_3}{r}\right)^2 \left(5\frac{z^2}{r^2} - 1\right) + \frac{5}{8}\bar{c}_{40} \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R_3}{r}\right)^4 \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( 3 + \left( 63\frac{z^2}{r^2} - 42\frac{z^2}{r^2} \right) \frac{z^2}{r^2} \right) \right] \frac{x}{r} - S_6 \cdot \rho \cdot V \cdot V_x + \omega_3^2 x + 2\omega_3 V_y + P_x \\
 \dot{V}_y &= -\frac{\mu}{r^3}y + \left[ \frac{3}{2}\bar{c}_{20} \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R_3}{r}\right)^2 \left(5\frac{z^2}{r^2} - 1\right) + \frac{5}{8}\bar{c}_{40} \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R_3}{r}\right)^4 \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( 3 + \left( 63\frac{z^2}{r^2} - 42\frac{z^2}{r^2} \right) \frac{z^2}{r^2} \right) \right] \frac{y}{r} - S_6 \cdot \rho \cdot V \cdot V_y + \omega_3^2 y - 2\omega_3 V_x + P_y \\
 \dot{V}_z &= -\frac{\mu}{r^3}z + \left[ \frac{3}{2}\bar{c}_{20} \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R_3}{r}\right)^2 \left(5\frac{z^2}{r^2} - 3\right) + \frac{5}{8}\bar{c}_{40} \times \frac{1}{2} \times \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R_3}{r}\right)^4 \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( 30 + \left( 63\frac{z^2}{r^2} - 70\frac{z^2}{r^2} \right) \frac{z^2}{r^2} \right) \right] \frac{z}{r} - S_6 \cdot \rho \cdot V \cdot V_z + P_z
 \end{aligned} \quad (2,5)$$

В этих уравнениях:

$x, y, z, V_x, V_y, V_z$  – параметры движения КА в ГСК;

$\vec{r}(x, y, z)$  – радиус-вектор положения центра масс КА в ГСК;

$\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$  – вектор скорости центра масс в ГСК;

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2;$$

$\omega_3^2 x, \omega_3^2 y$  – центробежные ускорения;

$2\omega_3 y, 2\omega_3 x$  – кориолисовы ускорения по осям  $Ox$  и  $Oy$ ;

$P_x, P_y, P_z$  – проекции ускорения от реактивной силы  $\bar{P}$  на соответствующие оси ГСК;

$\mu$  – гравитационный параметр Земли;

$C_{20}, C_{40}$  – коэффициенты второй и четвертой зональных гармоник разложения в ряд по сферическим функциям потенциала Земли;

$R_3$  – большая полуось общего земного эллипсоида.

$\omega_3$  – угловая скорость вращения Земли;

$S_6$  – баллистический коэффициент КА;

$\rho$  – плотность атмосферы в текущий момент времени полета КА.

Значение баллистического коэффициента  $S_6$  для КА определяется формулой

$$S_6 = \frac{C_x S_M}{2m_0}, \quad (2.6)$$

где  $C_x$  – коэффициент аэродинамического сопротивления КА;

$S_M$  – площадь миделевого сечения, определяемая для ориентированного КА как проекция КА на плоскость, перпендикулярную направлению скорости полета.

Для неориентированного КА площадь миделевого сечения приближенно определяется по формуле

$$S_M = \frac{1}{4} S_{\text{полн}}, \quad (2.7)$$

где  $S_{\text{полн}}$  – полная поверхность КА.

Таблица 2.1

Коэффициенты модели атмосферы

Номер слоя (i)	H <sub>i</sub> , км	ρ <sub>i</sub> , кг/км <sup>3</sup>	C <sub>i</sub> , км <sup>-3</sup>	B <sub>i</sub> , км <sup>-2</sup>	A <sub>i</sub> , км <sup>-1</sup>
1	1200	0	0	0	0
2	900	5,764 · 10 <sup>-6</sup>	-0,198 · 10 <sup>-7</sup>	0,134 · 10 <sup>-4</sup>	-0,587 · 10 <sup>-2</sup>
3	600	1,140 · 10 <sup>-4</sup>	0,150 · 10 <sup>-8</sup>	-0,150 · 10 <sup>-4</sup>	-0,146 · 10 <sup>-1</sup>
4	400	2,794 · 10 <sup>-3</sup>	0,690 · 10 <sup>-8</sup>	0,563 · 10 <sup>-5</sup>	-0,174 · 10 <sup>-1</sup>
5	250	6,057 · 10 <sup>-2</sup>	-0,813 · 10 <sup>-8</sup>	0,298 · 10 <sup>-4</sup>	-0,247 · 10 <sup>-1</sup>
6	170	7,557 · 10 <sup>-1</sup>	-0,734 · 10 <sup>-6</sup>	0,188 · 10 <sup>-3</sup>	-0,419 · 10 <sup>-1</sup>
7	120	2,440 · 10 <sup>0</sup>	0,326 · 10 <sup>-5</sup>	-0,397 · 10 <sup>-3</sup>	-0,970 · 10 <sup>-1</sup>
8	80	1,846 · 10 <sup>4</sup>	0,435 · 10 <sup>-4</sup>	-0,212 · 10 <sup>-2</sup>	-0,151 · 10 <sup>0</sup>
9	50	0,105 · 10 <sup>7</sup>	-0,121 · 10 <sup>-4</sup>	-0,223 · 10 <sup>-3</sup>	-0,117 · 10 <sup>0</sup>
10	6	0,673 · 10 <sup>9</sup>	0,276 · 10 <sup>-4</sup>	-0,175 · 10 <sup>-2</sup>	-0,123 · 10 <sup>0</sup>

Плотность атмосферы  $\rho$  на различных высотах  $H$  определяется приближенно по формуле

$$\rho = \rho_i \cdot \exp \left[ A_i (H - H_i) + B_i (H - H_i)^2 + C_i (H - H_i)^3 \right]. \quad (2.8)$$

Здесь  $\rho_i, A_i, B_i, C_i, H_i$  ( $i=1 \div 8$ ) – коэффициенты, постоянные в пределах изменения высоты в  $i$ -м слое от  $H_i$  до  $H_{i-1}$ .

Значения этих коэффициентов, соответствующие модели атмосферы ГОСТ 4401-81, приведены в табл. 2.1.

Текущая высота полета  $H$  над общим земным эллипсоидом вращения определяется как

$$H = r - R_3 \left( 1 - \alpha_{сж} \sin^2 \varphi \right), \quad (2.9)$$

где  $\alpha_{сж}$  – коэффициент сжатия общего земного эллипсоида вращения,

$\varphi$  – геоцентрическая широта КА.

При расчете силы сопротивления воздуха принимается, что атмосфера вращается вместе с Землей.

При наличии в некоторый момент времени  $t_0$  начальных условий движения, т.е. параметров движения КА –  $x_0, y_0, z_0, V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}$ , текущие параметры движения  $x, y, z, V_x, V_y, V_z$  в любой момент времени  $t$  на некотором интервале  $[t_0, T_{AC}]$  можно определить численным интегрированием системы уравнений (2.5).

Как наиболее экономичные по затратам времени расчета на электронных вычислительных машинах, для решения этой системы уравнений применяются методы Рунге-Кутты четвертого порядка или метод Адамса. По полученным в результате численного интегрирования системы уравнений параметрам движения можно определить значения любых искомым параметров орбиты на любом витке полета, например, период орбиты, положения перигея и т.п.

### 2.3. Определение параметров движения КА по заданным параметрам орбиты

Для прогнозирования параметров движения КА с использованием системы уравнений (2.5) необходимы начальные условия – параметры движения КА в ГСК в некоторый момент времени  $t$ . Пусть в момент времени  $t$  оси гринвичской системы координат совпадают с осями некоторой инерциальной системы координат (ИСК). Тогда определение параметров движения в ГСК по заданным параметрам орбиты  $T, h_{\pi}, \omega, i, \Omega, u$  можно осуществить по следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos\Omega \cos u - \sin\Omega \sin u \cos i), \\ y &= r(\sin\Omega \cos u + \cos\Omega \sin u \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \\ V_x &= V_r(\cos\Omega \cos u - \sin\Omega \sin u \cos i) - \\ &\quad - V_u(\cos\Omega \sin u + \sin\Omega \cos u \cos i) + \omega_3 y, \\ V_y &= V_r(\sin\Omega \cos u + \cos\Omega \sin u \cos i) - \\ &\quad - V_u(\sin\Omega \sin u - \cos\Omega \cos u \cos i) - \omega_3 x, \\ V_z &= V_r \sin u \sin i + V_u \cos u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где 
$$r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)} \quad (2.11)$$

$$p = a(1 - e^2), \quad (2.12)$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin(u - \omega), \quad (2.13)$$

$$V_u = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos(u - \omega)). \quad (2.14)$$

Значения большой полуоси  $a$  и эксцентриситета  $e$  по заданному периоду  $T$  и высоте  $h_{\pi}$  определяются соотношениями (1.28).

В выражениях (2.11)-(2.14):

$u$  – аргумент широты;

$p$  – фокальный параметр орбиты;

$V_r$  – составляющая скорости КА по его радиусу-вектору;

$V_u$  – составляющая скорости КА по нормали к его радиусу-вектору.

Для определенности примем, что параметры орбиты КА задаются на момент  $t_0$  пересечения космическим аппаратом плоскости экватора в восходящем узле орбиты, т.е. параметры орбиты  $T, h_{\pi}, \omega, i, \Omega, u$  известны на момент времени  $t_0$ . Поскольку при этом  $u=0$ , то соотношения (2.10) упрощаются, и параметры движения  $x, y, z, V_x, V_y, V_z$  на момент  $t_0$  можно определить по следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos\Omega, \\ y &= r \sin\Omega, \\ z &= 0, \\ V_x &= V_r \cos\Omega - V_u \sin\Omega \cos i + \omega_3 y, \\ V_y &= V_r \sin\Omega - V_u \cos\Omega \cos i - \omega_3 x, \\ V_z &= V_u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Значения  $r$ ,  $V_r$ ,  $V_u$  вычисляются по формулам (2.11)-(2.14) для заданных параметров орбиты на момент  $t_3$ .

#### 2.4. Определение интервалов поддержания параметров орбиты

Для определения интервалов поддержания параметров исходной орбиты: периода  $T - \Delta n^T$ , высоты в перигее  $h_\pi - \Delta n^h$ , углового положения перигея  $\omega - \Delta n^\omega$  необходимо рассчитывать отклонения параметров фактической орбиты  $T$ ,  $h_\pi$ ,  $\omega$  от соответствующих параметров исходной орбиты. Вычисление этих отклонений будем осуществлять на начало каждого текущего витка полета с номером  $n$  по результатам прогнозирования параметров движения КА, начиная с первого витка полета (или с витка проведения последнего маневра поддержания). Пусть на начало витка  $n$ , т.е. на момент прохождения аппаратом плоскости экватора  $t_3$ , путем интегрирования системы (2.5) получены параметры движения  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ . Тогда параметры фактической орбиты  $T$ ,  $h_\pi$ ,  $\omega$  на момент начала  $n$ -го витка будем рассчитывать следующим образом.

Период фактической орбиты для витка  $n$  определим значением драконического периода. Драконический период обращения  $T_\Omega^n$  - это интервал времени между двумя последовательными прохождениями КА через плоскость экватора при движении с юга на север. Иначе,  $T_\Omega^n$  - это интервал времени полета КА между началом  $n$ -го витка и началом  $(n-1)$ -го витка, определяемый по формуле

$$T_\Omega^n = t_n^3 - t_{n-1}^3, \quad (2.16)$$

где  $t_n^3$ ,  $t_{n-1}^3$  - соответствующие моменты времени начала  $n$ -го и  $(n-1)$ -го витков полета.

Приняв  $T_\Omega^n$  за период фактической орбиты  $T^n$  на  $n$ -м витке полета, можно определить отклонение этого периода от исходного:

$$\Delta T^n = |T^n - T^u|. \quad (2.17)$$

Теперь, если  $|\Delta T^n| \geq |\Delta T|$ , то интервал поддержания периода орбиты определяется следующим образом:

$$\Delta n^T = n^j - n^{j-1}, \quad (2.18)$$

где  $n^j$  - виток проведения  $j$ -го маневра поддержания периода орбиты, на котором выполняется (2.17);

$n^{j-1}$  - виток проведения  $(j-1)$ -го маневра поддержания периода орбиты.

Для определения параметров  $h_\pi$  и  $\omega$  фактической орбиты на  $n$ -м витке необходимо использовать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{C^2}{\mu}, \quad a = \mu^{1/3} \cdot \left( \frac{T^n}{2\pi} \right)^{2/3}, \\ e &= \left( 1 - \frac{p}{a} \right)^{1/2}, \\ h_\pi &= p(1+e)^{-1} - R, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega &= - \frac{C(f_1 C_1 + f_2 C_2)}{f C_3 \sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \\ \cos \omega &= \frac{(f_1 C_2 - f_2 C_1)}{f \sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

где  $C, f$  — модули векторов площадей и Лапласа:

$$C_1 = \tilde{y}\tilde{V}_z - \tilde{z}\tilde{V}_y; \quad C_2 = \tilde{z}\tilde{V}_x - \tilde{x}\tilde{V}_z;$$

$$C_3 = \tilde{x}\tilde{V}_y - \tilde{y}\tilde{V}_x;$$

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2};$$

$$f_1 = -\frac{\mu \tilde{x}}{r} + C_3\tilde{V}_y - C_2\tilde{V}_z;$$

$$f_2 = -\frac{\mu \tilde{y}}{r} + C_1\tilde{V}_z - C_3\tilde{V}_x;$$

$$f_3 = -\frac{\mu \tilde{z}}{r} + C_2\tilde{V}_x - C_1\tilde{V}_y;$$

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}.$$

При вычислении компонент векторов площадей и Лапласа должны использоваться параметры движения КА в инерциальной системе координат на каждый момент времени  $t_n^2$ :  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{V}_x, \tilde{V}_y, \tilde{V}_z$ . Они могут быть получены по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= x, & \tilde{y} &= y, & \tilde{z} &= z, \\ \tilde{V}_x &= V_x - \omega_3 y, \\ \tilde{V}_y &= V_y + \omega_3 x, & \tilde{V}_z &= V_z, \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

где  $x, y, z, V_x, V_y, V_z$  — параметры движения КА на тот же момент времени  $t_n^2$  в ГСК.

Интервалы поддержания параметров  $h_n$  и  $\omega$ , а именно  $\Delta n^h$  и  $\Delta n^\omega$ , определяются соотношениями, аналогичными (2.18):

$$\Delta n^h = n^k - n^{k-1}, \quad \Delta n^\omega = n^m - n^{m-1},$$

где  $n^k, n^m$  — текущие витки полета, на которых отклонения высоты в перигее и углового положения перигея фактической орбиты по модулю становятся равными или превышают допустимые значения;  $n^{k-1}, n^{m-1}$  — витки проведения  $(k-1)$ - и  $(m-1)$ - маневров поддержания соответственно высоты в перигее и его углового положения.

Наряду с системой уравнений (2.5) для прогнозирования движения центра масс КА может использоваться система дифференциальных уравнений Ньютона-Лагранжа, описывающая возмущенное движение в оскулирующих элементах. Если в качестве оскулирующих элементов принять параметры орбиты:  $\Omega, i, a, e, \omega, \vartheta$ , то такая система имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r}{p} W \cdot \frac{\sin u}{\sin i}; \\ \frac{di}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r}{p} W \cdot \cos u; \\ \frac{da}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2a}{1-e^2} \left( S \cdot e \cdot \sin \vartheta + T \frac{p}{r} \right); \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left( S \cdot \sin \vartheta + T \left[ \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \right); \\ \frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left( -S \cdot \frac{\cos \vartheta}{e} + T \frac{1}{e} \left[ \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - W \frac{r}{p} \operatorname{ctgi} \cdot \sin u \right] \right); \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left( \frac{\mu}{r^2} + S \cdot \frac{\cos \vartheta}{e} - T \cdot \frac{1}{e} \left[ 1 + \frac{r}{p} \right] \sin \vartheta \right); \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

$$\text{где } r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta};$$

$$\frac{r}{p} = \frac{1}{1 + e \cos \vartheta};$$

$$u = \omega + \vartheta;$$

$S, T, W$  — проекции возмущающего ускорения на оси орбитальной системы координат с центром, совпадающим с центром масс КА: на радиус-вектор КА —  $S$ ; на ось, перпендикулярную радиусу-вектору в плоскости орбиты —  $T$ ; на бинормаль к плоскости оскулирующей орбиты —  $W$ .

Если учитывать только полярное сжатие Земли и влияние сопротивления атмосферы, то проекции возмущающего ускорения можно записать в виде

$$S = -\frac{3}{2} c_{20} \frac{\mu R^2}{r^4} (3 \sin^2 u \cdot \sin^2 i - 1) - S_{\delta} V V_r;$$

$$T = \frac{3}{2} c_{20} \frac{\mu R^2}{r^4} \sin 2u \cdot \sin^2 i - S_{\delta} V V_u; \quad (2.23)$$

$$W = \frac{3}{2} c_{20} \frac{\mu R^2}{r^4} \sin u \cdot \sin 2i.$$

Здесь  $V_r$  — составляющая скорости КА по радиусу-вектору,

$V_u$  — составляющая скорости по нормали к радиусу-вектору.

Эти составляющие могут быть вычислены по соотношениям (2.13), (2.15).

При использовании системы уравнений (2.22) значение периода фактической орбиты определяется соотношением (2.16), значение высоты в перигее — соотношением (2.19), а значение  $\omega$  непосредственно определяется из пятого уравнения системы (2.22).

## 2.5. Кинематика импульсных маневров

В основу теории импульсных маневров положена гипотеза, в соответствии с которой действительное приращение скорости КА, определенное действием ограниченной тяги двигателя, отождествляется с мгновенным управляющим импульсом скорости. Следствием этой гипотезы является неизменность радиуса-вектора в момент сообщения аппарату управляющего импульса. Поэтому точка орбиты, в которой сообщается управляющий импульс, принадлежит одновременно исходной и новой орбитам.

Кинематика импульсного маневра графически представлена на рис. 2.1.

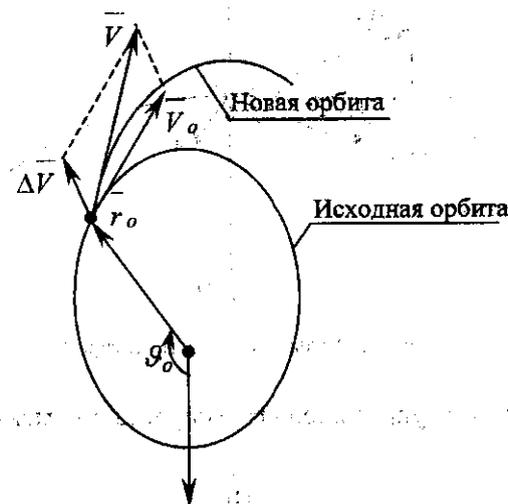


Рис. 2.1. Кинематика импульсного маневра

В некоторый момент времени  $t_0$ , которому соответствует некоторое значение истинной аномалии  $\vartheta_0$ ,  $\bar{r}_0$  и  $\bar{V}_0$ , происходит изменение скорости КА на величину управляющего импульса  $\Delta \bar{V}$ .

Вследствие этого, начиная с момента  $t_0$ , КА окажется на новой орбите, имеющей с исходной общую точку. В точке приложения управляющего импульса происходит разветвление траекторий.

Управляющий импульс определим в орбитальной системе координат ОСК, орты которой  $r, u, w$  показаны на рис. 2.2. В проекциях на радиальное, трансверсальное и бинормальное направления соответственно имеем:

$$\begin{aligned} \Delta V_r &= \Delta V \sin \alpha; \\ \Delta V_u &= \Delta V \cos \alpha \cos \beta; \\ \Delta V_w &= \Delta V \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.24)$$

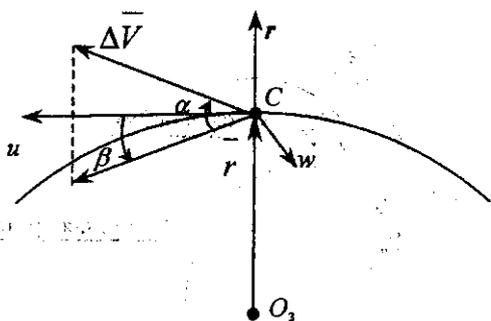


Рис. 2.2. Углы ориентации вектора  $\Delta \bar{V}$

До приложения управляющего импульса в момент  $t_0$  имеем:

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta_0;$$

$$V_u = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta_0);$$

$$V_w = 0,$$

где  $\vartheta_0$  – истинная аномалия точки приложения импульса.

После приложения управляющего импульса получаем следующие компоненты вектора скорости:

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta_0 + \Delta V \sin \alpha;$$

$$V_u = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta_0) + \Delta V \cos \alpha \cos \beta; \quad (2.25)$$

$$V_w = \Delta V \cos \alpha \sin \beta.$$

Таким образом, с математической точки зрения импульсный маневр эквивалентен изменению начальных условий в точке приложения импульса.

## 2.6. Одноимпульсные маневры поддержания внутривосьных параметров орбиты

Пусть требуется определить величину, направление и точку приложения управляющего импульса скорости, обеспечивающего изменение одного из параметров фактической орбиты – периода, высоты в перигее или углового положения перигея – с целью поддержания корректируемого параметра орбиты в допустимом диапазоне относительно исходного его значения. Полагаем, что критерием выбора управляющих параметров служит минимальное значение потребного импульса скорости. Расчетные формулы для определения оптимальных в этом смысле параметров приведены в табл. 2.2.

В табл. 2.2:  $\Delta T, \Delta h, \Delta \omega$  – требуемые (корректируемые) отклонения величины соответствующих параметров орбиты;

$\vartheta_{\text{опт}}$  – оптимальное значение истинной аномалии точки приложения импульса;

$r_\alpha$  – радиус орбиты в апогее.

Таблица 2.2

Формулы для расчета потребных импульсов

Наименование изменяемого параметра орбиты	Потребное значение управляющего импульса скорости
Период обращения (большая полуось орбиты)	$\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{\pi}}} \left( \sqrt{1 - \frac{r_{\pi}}{2(a + \Delta a)}} - \sqrt{1 - \frac{r_{\pi}}{2a}} \right);$ $\Delta a = a \left[ \left( 1 + \frac{\Delta T}{T} \right)^{2/3} - 1 \right]$
Радиус перигея	$\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{\alpha}}} \left( \sqrt{\frac{r_{\pi} + \Delta h}{r_{\pi} + r_{\alpha} + \Delta h}} - \sqrt{\frac{r_{\pi}}{r_{\alpha} + r_{\pi}}} \right)$
Аргумент широты перигея	$\Delta V = -2\sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \frac{\Delta \omega}{2}$

Ориентация управляющих импульсов при изменении периода обращения и радиуса перигея соответствует трансверсальным импульсам:

$$\alpha = 0 \text{ при } \Delta T > 0 \text{ и при } \Delta h > 0;$$

$$\alpha = \pi \text{ при } \Delta T < 0 \text{ и при } \Delta h < 0.$$

Оптимальная точка приложения импульсов при изменении периода соответствует  $\vartheta_{opt} = 0$  и при изменении радиуса перигея  $\vartheta_{opt} = \pi$ .

Ориентация управляющих импульсов при изменении аргумента широты перигея соответствует радиальным импульсам:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ при } \Delta \omega > 0;$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ при } \Delta \omega < 0.$$

Оптимальная точка приложения импульса в этом случае соответствует

$$\vartheta_{opt} = \frac{\Delta \omega}{2}$$

Все используемые в формулах параметры орбиты соответствуют параметрам фактической орбиты до приложения корректирующего импульса скорости.

## 2.7. Оценка потребных затрат топлива на поддержание параметров орбиты КА

Будем полагать, что определению подлежит масса топлива, которую необходимо затратить для поддержания параметров  $T, h_{\pi}, \omega$  исходной орбиты на некотором интервале времени активного существования КА —  $T_{AC}$ . Для низкоорбитальных КА основным фактором, определяющим изменение периода и высоты орбиты в перигее, является аэродинамическое торможение. При этом для эллиптических орбит из-за аэродинамического торможения наблюдается уменьшение высоты орбиты как в перигее, так и в апогее, и соответственно уменьшение большой полуоси и периода орбиты. Изменение углового положения перигея определяется, главным образом, влиянием на движение КА сжатия Земли. Для орбит с наклоном  $i \leq 63,4^\circ$  и  $i \geq 116,6^\circ$  наблюдается вековой уход углового положения перигея от начального в направлении, совпадающим с направлением движения КА, а для орбит с  $i > 63,4^\circ$  и  $i < 116,6^\circ$  уход положения перигея в направлении, противоположном движению КА. Учитывая отмеченный характер эволюции параметров орбиты, примем следующую схему проведения маневров для поддержания периода, высоты в перигее и углового положения перигея исходной орбиты в процессе полета КА, отвечающего модели движения (2.4).

Пусть  $n_i$  – виток, на котором прогнозируемое с помощью модели (2.4) отклонение высоты фактической орбиты в перигее от соответствующей высоты исходной орбиты равно или превышает допустимое (по модулю) значение  $|\Delta h_{дон}|$ . С целью поддержания высоты в перигее на витке  $n_i$  проводится одноимпульсный маневр.

Потребный импульс характеристической скорости  $\Delta V^h$  выдается в момент прохождения аппаратом точки апогея и рассчитывается в соответствии с соотношением из табл. 2.2. При этом значение  $\Delta h$  принимается равным  $2|\Delta h_{дон}|$ . Здесь  $\Delta h_{дон}$  – модуль заданного допустимого отклонения высоты в перигее для исходной орбиты.

После выдачи импульса  $\Delta V^h$  определяется период  $T^*$  полученной орбиты с использованием соотношений

$$a^* = \frac{r_\alpha + r_\pi + \Delta h}{2},$$

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{(a^*)^3}{\mu}},$$

где  $a^*$  – большая полуось полученной орбиты.

Затем находится отклонение  $\Delta T^*$  периода полученной фактической орбиты  $T^*$  от периода исходной орбиты  $T$ .

Для поддержания периода  $T$  исходной орбиты в перигее полученной орбиты с периодом  $T^*$ , т.е. через полвитка после выдачи импульса  $\Delta V^h$ , выдается импульс  $\Delta V^T$ . Значение  $\Delta V^T$  рассчитывается в соответствии с соотношением из табл. 2.2, при этом отклонение  $\Delta T$  принимается равным:

$$\Delta T = T + |\Delta T_{дон}| - T^*, \quad (2.26)$$

где  $\Delta T_{дон}$  – модуль заданного допустимого отклонения периода для исходной орбиты.

Таким образом, для поддержания периода и высоты орбиты в перигее на интервале поддержания  $\Delta n^h$  потребная характеристическая скорость  $\Delta V^{h,T}$  равна:

$$\Delta V^{h,T} = \Delta V^h + \Delta V^T. \quad (2.27)$$

Потребное значение характеристической скорости для поддержания углового положения перигея  $\Delta V^\omega$  будем определять для интервала поддержания  $\Delta n^\omega$  (независимо от маневров поддержания периода и высоты в перигее). Значение  $\Delta V^\omega$  рассчитывается в соответствии с соотношением из табл. 2.2, а отклонение  $\Delta \omega$  принимается равным:

$$\Delta \omega = 2|\Delta \omega_{дон}|$$

где  $|\Delta \omega_{дон}|$  – модуль заданного допустимого отклонения углового положения перигея для исходной орбиты.

Суммарное значение потребной характеристической скорости  $\Delta V_\Sigma$  на поддержание всех параметров  $T, h, \omega$  в течение времени активного существования  $T_{AC}$  определяется следующим соотношением:

$$\Delta V_\Sigma = k_1 \Delta V^{h,T} + k_2 \Delta V^\omega, \quad (2.28)$$

где  $k_1 = \frac{T_{AC}}{\Delta n^h \cdot T}$  – количество импульсов скорости, выданных за  $T_{AC}$  для поддержания периода и высоты перигея исходной орбиты;

$k_2 = \frac{T_{AC}}{\Delta n^\omega \cdot T}$  – количество импульсов скорости, выданных за  $T_{AC}$  для поддержания углового положения перигея исходной орбиты.

Теперь, если  $m_0$  – масса космического аппарата до момента проведения первого маневра поддержания, то масса топлива  $m_T$ , потребная для поддержания параметров орбиты  $T, h, \omega$  за время активного существования  $T_{AC}$ , определяется по формуле (2.4), в которой  $\Delta V_k = \Delta V_\Sigma$ .

### 2.3. Прогнозирование параметров движения КА

#### на активных участках полета

При прогнозировании параметров движения КА на активных участках полета при ограниченной (постоянной по модулю) величине тяги двигательной установки для правых частей уравнений движения (2.5) определяются составляющие ускорения  $\vec{P}$  от силы тяги двигательной установки по формуле

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}^*}{m_t} \quad (2.29)$$

где  $\vec{P}^*$  – вектор тяги двигательной установки в ГСК;

$m_t$  – текущая масса КА.

Полагаем, что направление вектора тяги совпадает с требуемым направлением выдачи импульса скорости, определяемым в соответствии с табл. 2.2 и рис. 2.2. В геоцентрической системе координат

$$\vec{P} = B^T \cdot \vec{P}_{оск}^* \quad (2.30)$$

где  $\vec{P}_{оск}^*$  – вектор тяги в ОСК (рис. 2.2),

$B^T$  – транспонированная матрица  $B$  преобразования вектора тяги из ГСК в ОСК:

$$B = \begin{pmatrix} C_2 \tilde{z} - C_3 \tilde{y} & C_3 \tilde{x} - C_1 \tilde{z} & C_1 \tilde{y} - C_2 \tilde{x} \\ C_3 \tilde{y} & C_1 \tilde{z} & C_2 \tilde{x} \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

где  $\tilde{r} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  – координаты КА в ИСК, оси которой совпадают в текущий момент времени с осями ГСК;

$\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$  – вектор интеграла площадей, вычисляемый по соотношениям из 2.4.

Текущая масса КА  $m_t$  на момент времени работы двигательной установки  $t$  вычисляется по формуле

$$m_t = m_{вкл} - \dot{m}(t - t_{вкл}), \quad (2.32)$$

где  $m_{вкл}$  – масса на момент включения двигательной установки (на начало каждого активного участка);

$\dot{m}$  – массовый расход топлива двигательной установки;

$t_{вкл}$  – время включения двигательной установки (начало активного участка).

Интегрирование уравнений движения (2.5) на активных участках следует проводить с малым шагом интегрирования – равным примерно одной секунде. Окончание активного участка осуществляется по достижении заданного времени выключения двигательной установки

где время работы двигательной установки  $\Delta t_{дв}$  для выдачи необходимого импульса определяется соотношением

$$\Delta t_{дв} = \frac{m_{вкл}}{\dot{m}} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Delta V}{C}\right) \right) \quad (2.33)$$

Здесь  $\Delta V$  – расчетный импульс скорости для необходимого маневра поддержания.

## 2.9. Угловые параметры орбиты

Угловые параметры орбиты представлены на рис. 2.3:

$i$  — наклонение орбиты,

$\Omega$  — значение долготы восходящего узла,

$\omega$  — угловое положение перигея орбиты,

$u$  — аргумент широты,

$\vartheta$  — истинная аномалия.



Рис. 2.3. Угловые параметры орбиты

На рис. 2.3 приняты обозначения

$Oxyz$  — вращающаяся гринвичская система координат,

$\pi$  — точка перигея,

$\Omega$  — восходящий узел орбиты,

$S$  — звездное время на гринвичском меридиане,

$TBP$  — направление на точку весеннего равноденствия,

$\lambda$  — геоцентрическая долгота подспутниковой точки,

$\varphi$  — геоцентрическая широта подспутниковой точки.

## Используемые константы

1. Угловая скорость вращения Земли  $\omega_3 = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ рад/сек}$
2. Средний радиус Земли  $R = 6371 \text{ км}$
3. Большая полуось общего земного эллипсоида  $R_3 = 6378,116 \text{ км}$
4. Гравитационный параметр Земли  $\mu = 3,9860044 \cdot 10^8 \text{ км}^3/\text{сек}^2$
5. Постоянная гравитационного поля  $g = 2,634 \cdot 10^{10} \text{ км}^5/\text{сек}^2$
6. Постоянная гравитационного поля  $g_2 = 411,196 \cdot 10^5 \text{ км}^2$
7. Тропический год  $T = 31556925 \text{ с}$
8. Коэффициент второй зональной гармоника  $C_{20} = -1082,62740 \cdot 10^{-6}$
9. Коэффициент четвертой зональной гармоника  $C_{40} = 0,16248330 \cdot 10^{-5}$
10. Коэффициент сжатия Земли  $\alpha_{\text{сж}} = 1/298,257$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Козлов Д.И., Аншаков Г.П., Фомин Г.Е. и др. Дистанционное зондирование Земли из космоса – универсальная технология получения информации для решения социально-экономических задач, исследования природных ресурсов и экологии: Сборник научно-технических статей по ракетно-космической тематике. Самара, 2001. С.7-13.
2. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г.С. Нариманова. – М.: Машиностроение, 1972. 601 с.
3. Мишин В.П. Механика космического полета. М.: Машиностроение, 1989. 408 с.
4. Баринов К.Н., Бурдаев М.Н., Мамон П.А., Динамика и принципы построения орбитальных систем космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975. 232 с.
5. Саульский В.К., Лукашевич Е.Л. Выбор орбит ИСЗ для круглосуточного обзора Земли // Исследования Земли из космоса. 1984. №1.
6. Бебин Г.Г., Скребушевский В.С., Соколов Г.А. Системы управления полетом космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 270 с.
7. Решетнев М.Ф., Лебедев А.А. и др. Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах. М.: Машиностроение, 1988. 335 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Определение параметров орбит КА ДЗЗ.....	4
1.1. Основные понятия.....	4
1.2. Квазигеосинхронные орбиты.....	10
1.3. Определение периода квазисинхронных орбит для заданного наклона.....	11
1.4. Анализ кратности и порядка орбит.....	14
1.5. Определение периода квазигеосинхронных изомаршрутных орбит суточной кратности.....	15
1.6. Полярные синхронные орбиты.....	18
1.7. Полярные квазисинхронные орбиты.....	19
1.8. Солнечно-синхронные орбиты.....	20
1.9. Квазигеосинхронные солнечно-синхронные орбиты.....	22
1.10. Квазигеосинхронные солнечно-синхронные изомаршрутные орбиты суточной кратности.....	24
1.11. Определение параметров эллиптических орбит для заданной высоты периода.....	24
1.12. Определение параметров орбит для покрытия широтного пояса земной поверхности.....	26
1.13. Определение ширины полосы обзора с учетом вращения Земли.....	27
2. Определение параметров управления движением центра масс КА ДЗЗ.....	32
2.1. Постановка задачи.....	32
2.2. Уравнения движения центра масс КА.....	37
2.3. Определение параметров движения КА по заданным параметрам орбиты.....	42
2.4. Определение интервалов поддержания параметров орбиты.....	44
2.5. Кинематика импульсных маневров.....	49
2.6. Одноимпульсные маневры поддержания внутриспосредственных параметров орбиты.....	51
2.7. Оценка потребных затрат топлива на поддержание параметров орбиты КА.....	53
2.8. Прогнозирование параметров движения КА на активных участках полета.....	56
2.9. Угловые параметры орбиты.....	58
2.10. Используемые константы.....	59
Библиографический список.....	60

Учебное издание

Мантуров Александр Иванович

**МЕХАНИКА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ**

**КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

Учебное пособие

Редактор Л. Я. Чегодаева

Компьютерная верстка Т. Е. Половнева

Подписано в печать 24.06.03 Формат 60 × 84/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 3,7. Усл. кр.-отт. 3,8. Уч.-изд. л. 4,0.

Тираж 200 экз. Заказ 62. Арт. С-3/2003.

Самарский государственный аэрокосмический  
университет имени академика С.П. Королева  
443086, Московское шоссе, 34

ИПО Самарского государственного  
аэрокосмического университета  
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151