

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(национальный исследовательский университет)» (СГАУ)**

А.А. Дегтярев

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Электронное учебное пособие

САМАРА

2011

Автор: ДЕГТЯРЕВ Александр Александрович

Учебное пособие содержит лекционные материалы по курсу «Численные методы математической физики».

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010400.62 – «Прикладная математика и информатика». Рекомендуется для подготовки к практическим занятиям, лабораторным работам, а также для выполнения индивидуальных заданий по курсу «Численные методы математической физики».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Классификация задач математической физики и методов их решения.....	4
1 Метод конечных разностей решения краевых задач математической физики. Основные понятия.....	7
1.1 Сетка, сеточные функции, сеточные и разностные уравнения.....	8
1.2 Сходимость последовательности сеточных функций. Теоремы о единственности предела сходящейся последовательности сеточных функций.....	15
2 Линейные разностные уравнения.....	20
2.1 Теоремы о линейных разностных уравнениях.....	20
2.2 Построение решения линейного разностного уравнения.....	27
2.3 Решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.....	29
3 Аппроксимация, устойчивость и сходимость разностной схемы..	31
3.1 Понятие аппроксимации дифференциальной краевой задачи разностной схемой.....	32
3.2 Свойство устойчивости разностной схемы.....	36
3.3 Свойство сходимости решения разностной краевой задачи к решению дифференциальной краевой задачи.....	39
4 Построение аппроксимирующих разностных схем.....	44
4.1 Метод замены производных разностными отношениями.....	44
4.2 Метод неопределенных коэффициентов.....	49
4.3 Интегро-интерполяционный метод.....	55
4.4 Аппроксимация краевых условий.....	59
5 Исследование устойчивости разностных схем.....	67
5.1 Исследование устойчивости на основе определения.....	67
5.2 Необходимый признак Неймана.....	74
6 Применение конечных рядов Фурье для решения разностных краевых задач.....	79

Введение

Классификация задач математической физики и методов их решения.

Говоря о задаче математической физики, будем иметь в виду математическую модель некоторого физического или иного рода явления, состоящую из одного или более дифференциальных уравнений, а также ряда дополнительных соотношений – начальных и (или) краевых условий.

Из курса “Уравнения математической физики” известно, что задачи математической физики делятся на корректные и некорректные.

Корректными называют такие задачи, решение которых, во-первых, существует, во-вторых, единственно и, в-третьих, обладает свойством устойчивости к “возмущениям” правых частей уравнений и условий входящих в математическую модель.

Если хотя бы одно из трех перечисленных условий не выполняется, то задачу называют некорректной.

В дальнейшем будем рассматривать только корректные задачи. Отметим лишь, что методы решения некорректных задач направлены на модификацию постановки задачи таким образом, чтобы новая задача была корректна.

Все задачи математической физики можно разделить на линейные задачи и нелинейные. Задачу называют линейной, если все уравнения и условия, входящие в ее описание являются линейными относительно искомой функции (нескольких функций). В противном случае задачу классифицируют как нелинейную.

Отметим, что решение нелинейной задачи является, как правило, более проблематичным, чем нелинейной.

В соответствии с классификацией дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка все такие уравнения делятся на три класса: уравнения параболического, эллиптического и гиперболического типов.

Уравнения параболического и гиперболического типов используются для описания так называемых нестационарных, динамических, эволюционных процессов (явлений), в которых одну из независимых переменных ассоциируют с переменной времени. Уравнения эллиптического типа используются для описания стационарных или установившихся полей.

Методы решения задач математической физики можно подразделять на следующие четыре класса.

1. *Аналитические методы* (метод разделения переменных, метод характеристик, метод функций Грина и др.). Эти методы обладают относительно невысокой степенью универсальности, т.е. ориентированы на решение довольно узких классов задач. В результате применения этих методов получают решение в виде аналитических формул. Использование этих формул для осуществления расчета может потребовать решения вспомогательных вычислительных задач (решение нелинейных уравнений, расчет спецфункций, численное интегрирование, суммирование бесконечного ряда). Тем не менее, в ряде случаев применение этих методов позволяет быстро и с высокой точностью вычислить искомое решение.

2. *Приближенно-аналитические методы* (проекционные, вариационные методы, метод малого параметра, операционные методы, разнообразные итерационные методы). Эти методы обладают большей универсальностью, чем аналитические. Применение таких методов предполагает модификацию исходной задачи или изменение постановки задачи таким образом, чтобы новая задача могла быть решена аналитическим методом, а само ее решение достаточно мало отличалось от решения исходной задачи.

3. *Численные методы* (метод конечных разностей, метод прямых, метод конечных элементов и др.). Эти методы весьма универсальны. Часто применяются для решения нелинейных задач математической физики, а также линейных задач с переменными операторными коэффициентами.

4. *Вероятностные методы* (методы Монте-Карло). Обладают высокой универсальностью. Могут применяться для вычисления разрывных решений. Однако требуют больших объемов вычислений и, как правило, проигрывают по вычислительной трудоемкости выше перечисленным методам при решении таких задач, к которым эти методы применимы.

1 Метод конечных разностей решения краевых задач

математической физики. Основные понятия.

Характеризуя метод конечных разностей, выделим его достоинства и недостатки в сравнении с другими методами.

Сравнивая методы решения задач математической физики невозможно отдать безусловное первенство какому-либо из них. Любой из них может оказаться наилучшим для решения задач определенного класса. В то же время, характеризуя конкретный метод, целесообразно выделить те его особенности, которые часто при практическом применении определяют его преимущества или недостатки по сравнению с альтернативным методом.

К достоинствам метода конечных разностей следует отнести его высокую универсальность, например, значительно более высокую, чем у аналитических методов. Применение этого метода нередко характеризуется относительной простотой построения решающего алгоритма и его программной реализации. Зачастую удается осуществить распараллеливание решающего алгоритма.

К числу недостатков метода следует отнести: проблематичность его использования на нерегулярных сетках; очень быстрый рост вычислительной трудоемкости при увеличении размерности задачи (увеличении числа неизвестных переменных); сложность аналитического исследования свойств разностной схемы.

Суть метода конечных разностей состоит в замене исходной (непрерывной) задачи математической физики ее дискретным аналогом (разностной схемой), а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

Ниже приведены основные этапы решения задачи математической физики методом конечных разностей.

1 этап (*дискретизация*). На этом этапе область непрерывного изменения аргументов заменяется конечным или счетным набором точек, называемых узлами. Совокупность всех узлов называют сеткой. Вместо функций непрерывных аргументов рассматриваются функции, определенные на сетке (сеточной области), называемые сеточными функциями. Уравнения и условия, входящие в описание задачи математической физики, заменяются их дискретными аналогами. В результате получается сеточная (разностная) схема.

2 этап (*аналитическое исследование схемы*). Проводится теоретическое исследование основных свойств разностной схемы: аппроксимации, устойчивости и сходимости. Определяются порядки сходимости схемы относительно параметров дискретизации.

3 этап (*алгоритмизация*). Осуществляется разработка алгоритма решения дискретной задачи, разработка компьютерной программы, реализующей алгоритм, проводится отладка программы.

4 этап (*экспериментальное исследование*). Формируются специальные тестовые задачи, решение которых удастся вычислить с высокой точностью, используя альтернативный метод. Далее с помощью разработанной программы проводится исследование сходимости сеточных решений тестовых задач к высокоточным при измельчении сетки. Анализируя результаты вычислительных экспериментов, проверяют соответствие фактических порядков сходимости теоретическим. Экспериментальное подтверждение сходимости на тестовых примерах является хорошей (но не абсолютной) гарантией практической пригодности разработанной схемы для решения исходной задачи.

1.1 Сетка, сеточные функции, сеточные и разностные уравнения.

Для обозначения краевой задачи математической физики будем использовать следующую операторную форму [1, 2, 3]:

$$Lu = f, u \in \tilde{U} \subset U, f \in F, \quad (1.1)$$

где u - искомое решение краевой задачи, представляющее собой функцию $u(x)$ векторного аргумента $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, определенную на области $\bar{D} = D + \Gamma$; D - множество внутренних точек области \bar{D} ; Γ - множество точек границы области \bar{D} ;

U - пространство функций, определенных на \bar{D} , которому принадлежит решение u ;

f - правая часть операторного уравнения, представляющая собой упорядоченный набор правых частей дифференциального уравнения и краевых условий задачи математической физики;

F - функциональное пространство, которому принадлежит правая часть f ;

L - оператор краевой задачи, представляющий собой упорядоченный набор операторов дифференциального уравнения и краевых условий этой задачи;

\tilde{U} - область определения оператора L .

Следует уточнить, что правая часть f состоит из набора функций, часть которых определена на области \bar{D} , а часть на границе Γ или на фрагменте границы Γ .

Форма (1.1) представляет собой символическую операторную запись краевой задачи математической физики, которая включает в себя как дифференциальное уравнение, так и краевые условия. Например, следующая краевая задача для волнового уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), & x \in [0, l], t \in [0, T]; \\ u|_{t=0} = \psi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \gamma(x), & x \in [0, l]; \\ u|_{x=0} = \alpha(t), \quad u|_{x=l} = \beta(t), & t \in (0, T) \end{cases}$$

может быть записана в форме (1.1), если использовать обозначения

$$Lu = \begin{pmatrix} L^1 u \\ L^2 u \\ L^3 u \\ L^4 u \\ L^5 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} \\ u|_{x=0} \\ u|_{x=l} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \\ f^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x, t) \\ \psi(x) \\ \gamma(x) \\ \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

Допустим, что для решения некоторой задачи математической физики выбран метод конечных разностей. Осуществим этап дискретизации.

Заменяем пространство R^n непрерывного изменения аргумента x счетным множеством точек R_h^n , которое будем называть *сеткой*, а точки из этого множества - *узлами*. Далее, изучая метод конечных разностей, будем рассматривать только регулярные сетки. Дадим определение регулярной сетки.

Выделим на выбранной оси x_k счетное множество точек: $\{x_k(i_k), i_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. На рисунке 1.1 изображены три соседних точки этого множества.

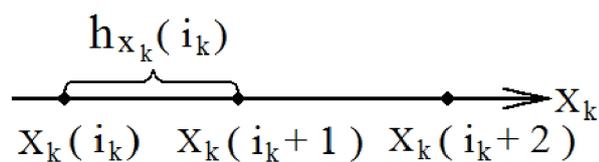


Рисунок 1.1 – Дискретизация оси x_k

То же самое сделаем для остальных осей.

Регулярной сеткой будем называть следующее декартово произведение множеств:

$$R_h^n = \{x_1(i_1), i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \times \{x_2(i_2), i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \times \dots \times \{x_n(i_n), i_n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

На рисунке 1.2 приведен фрагмент регулярной сетки, а на рисунке 1.3 – фрагмент нерегулярной сетки.

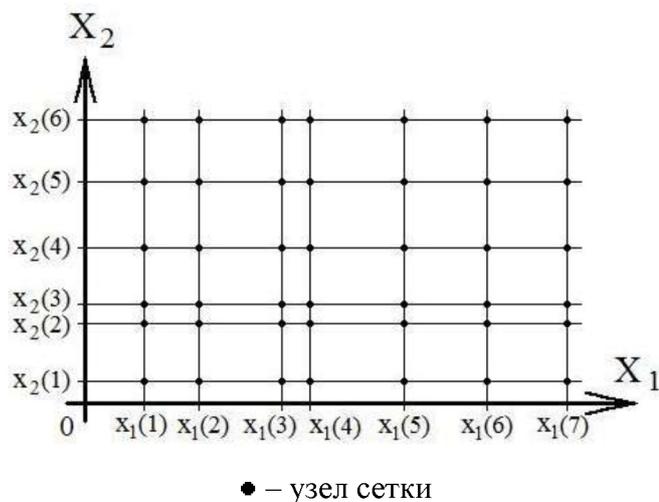


Рисунок 1.2 – Фрагмент регулярной сетки

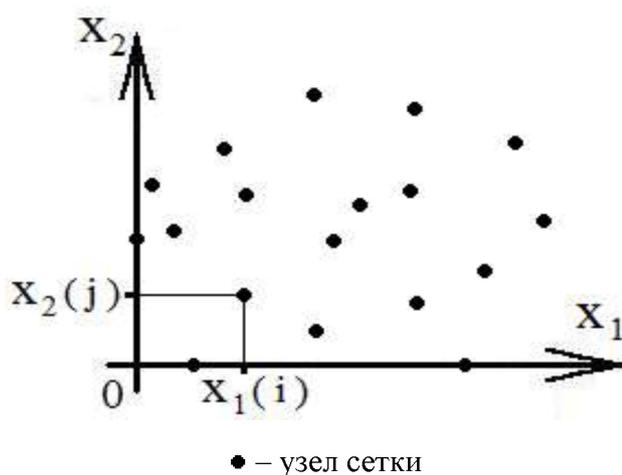


Рисунок 1.3 – Фрагмент нерегулярной сетки

Последовательность положительных величин $\{h_{x_k}(i_k), i_k = 0, \pm 1, \dots\}$, определяемых формулой $h_{x_k}(i_k) = x_k(i_k + 1) - x_k(i_k)$, будем называть последовательностью шагов сетки по переменной x_k .

Сетка называется *равномерной* по оси x_k , если все величины в соответствующей последовательности шагов одинаковы, т.е. $h_{x_k}(i_k) = h_{x_k}, i_k = 0, \pm 1, \dots$. В этом случае величину h_{x_k} называют *шагом сетки* по оси x_k .

Если сетка является равномерной по каждой из осей x_k , то ее называют просто *равномерной*.

Мелкостью сетки будем называть число

$$h = \max_{k=1,n} \sup_{i_k=0;\pm 1;\dots} h_{x_k}(i_k).$$

Для равномерной сетки мелкость определяется формулой

$$h = \max_{k=1,n} h_{x_k}.$$

В дальнейшем для простоты изложения и краткости записей будем предполагать, что сетка является равномерной, если не оговорено иное.

Рассмотрим последовательность сеток R_h^n с разными мелкостями h . Такую последовательность будем обозначать символом $\{R_h^n\}$, не выделяя номер элемента последовательности.

Последовательность $\{R_h^n\}$ будем называть *последовательностью сходящихся сеток*, если соответствующая ей последовательность мелкостей $\{h\}$ обладает свойством: $h \rightarrow 0$.

Множество узлов сетки R_h^n , принадлежащих некоторой области $\bar{D} \subset R^n$, будем называть *сеточной областью* и обозначать \bar{D}_h . Среди узлов сеточной области \bar{D}_h будем выделять *граничные узлы*, множество которых обозначим Γ_h . Остальные узлы будем называть *внутренними*, а их множество обозначим D_h . Таким образом, имеем: $\bar{D}_h = D_h + \Gamma_h$. Следует отметить, что на практике используют разные способы определения узлов сеточной границы Γ_h . Например, при некоторых способах задания сеточной границы к числу граничных узлов могут быть причислены узлы, расположенные вблизи границы Γ , но не принадлежащие области \bar{D} .

На рисунке 1.4 сплошной линией изображена граница Γ области \bar{D} , а также выделены внутренние узлы и узлы сеточной границы Γ_h . Здесь для определения граничных узлов было использовано следующее правило.

Через каждый узел, принадлежащий области \bar{D} , мысленно проводят две прямые, одну - параллельно оси x_1 , а другую - параллельно оси x_2 . Этот узел относят к числу граничных, если хотя бы один из его соседних узлов, лежащих на первой или на второй прямой, не будет принадлежать области \bar{D} .

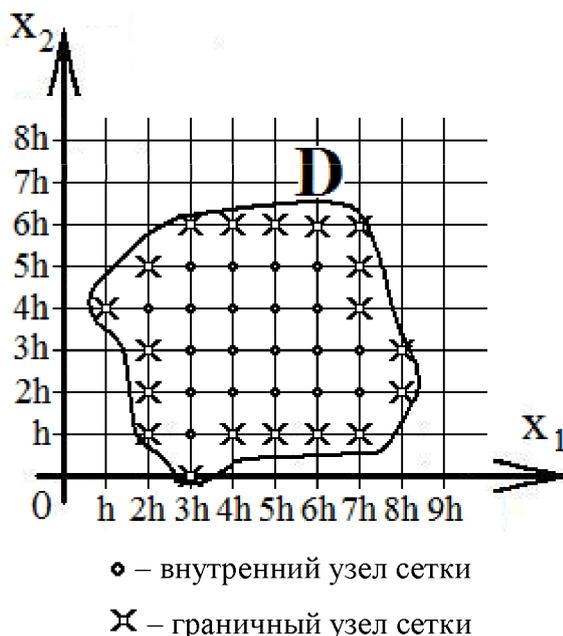


Рисунок 1.4 – Пример сеточной области \bar{D}_h

Функция, определенная на множестве \bar{D}_h называется *сеточной функцией*. Для обозначения сеточной функции будем использовать символ u_h , если не требуется выделять зависимость значений этой функции от узла сетки (например, при записи операторных уравнений). Если некоторая запись требует указать зависимость значений сеточной функции u_h от узла $(x_1(i_1) \dots x_n(i_n)) \in \bar{D}_h$, то будем использовать символ u_{i_1, i_2, \dots, i_n} (сравнить с соответствующими обозначениями функции непрерывного аргумента: u и $u(x_1, \dots, x_n)$).

Линейное пространство всевозможных сеточных функций u_h , определенных на сеточной области \bar{D}_h , обозначим символом U_h .

Отображение $[\cdot]_h : U \rightarrow U_h$, которое каждой функции непрерывных аргументов $u = u(x_1, \dots, x_n) \in U$ ставит в соответствие единственную сеточную функцию $[u]_h = u(x_1(i_1), \dots, x_n(i_n)) \in U_h$, называется *оператором дискретизации*.

Сеточную функцию $[u]_h$ будем называть *сеточным аналогом* функции непрерывных аргументов u .

Подобным образом можно ввести понятие сеточного аналога $[f]_h$ для рассмотренной выше составной функции f . При этом объект $[f]_h$ будет представлять собой упорядоченный набор сеточных функций, часть которых определена на области \bar{D}_h , а часть на границе Γ_h или на фрагменте границы Γ_h .

Уравнение, связывающее некоторые значения искомой сеточной функции u_h , будем называть *сеточным уравнением* относительно функции u_h .

В одномерном случае, когда имеется только одна независимая переменная, сеточное уравнение относительно конечного числа значений u_i функции u_h можно записать в виде

$$\Phi(u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+m}) = 0. \quad (1.2)$$

При этом индекс i может принимать только те значения, при которых узлы $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+m}$, не выходят за пределы сеточной области \bar{D}_h .

Определим разности для сеточной функции u_h следующими формулами:

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i;$$

$$\Delta^2 u_i = \Delta u_{i+1} - \Delta u_i;$$

.....

$$\Delta^m u_i = \Delta^{m-1} u_{i+1} - \Delta^{m-1} u_i.$$

Поскольку сеточное уравнение (1.2) может быть представлено в виде

$$\Phi(u_i, \Delta u_i, \Delta^2 u_i, \dots, \Delta^m u_i) = 0,$$

то его называют *разностным уравнением m -го порядка* [1, 2].

Разностное уравнение (1.2) фактически представляет собой систему уравнений, каждое из которых соответствует своему значению переменной i .

Аналогично можно ввести понятие разностного уравнения в многомерном случае.

Шаблон разностного уравнения называется структура, отражающая взаимное расположение тех узлов сетки, которым соответствуют значения искомой сеточной функции, входящие в разностное уравнение.

На рисунке 1.1 фактически изображен трехточечный шаблон, соответствующий, например, разностному уравнению:

$$2u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2} = 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Рассмотрим следующее операторное разностное уравнение:

$$L_h u_h = f_h, \quad u_h \in U_h, \quad f_h \in F_h, \quad (1.3)$$

где $L_h: U_h \rightarrow F_h$ - некоторый оператор, имеющий область определения

$U_h \subset U_h$ и принимающий значения $f_h \in F_h$;

F_h - линейное пространство составных сеточных функций определенной структуры.

Определение. Семейство (последовательность) операторных уравнений (1.3), соответствующее последовательности сгущающихся сеток $\{R_h^n\}$, будем называть *разностной схемой*.

1.2 Сходимость последовательности сеточных функций. Теоремы о единственности предела сходящейся последовательности сеточных функций.

Выберем произвольную последовательность сгущающихся сеток $\{R_h^n\}$. Тогда ей будет соответствовать вполне определенная последовательность сеточных областей $\{\bar{D}_h\}$. С любой сеточной областью \bar{D}_h связано пространство сеточных функций U_h . Если из каждого пространства U_h выбрать некоторую функцию u_h , то получим последовательность сеточных функций $\{u_h\}$.

Предположим, что пространства U_h и U являются нормированными.

Определение. Говорят, что последовательность сеточных функций $\{u_h\}$ сходится к элементу $u \in U$, если выполняется условие:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - [u]_h\|_{U_h} = 0.$$

Отметим, что понятие сходимости последовательности сеточных функций существенно отличается от понятия сходимости последовательности функций непрерывных аргументов в функциональном пространстве. Основные отличия состоят в следующем: во-первых, различные элементы u_h последовательности сеточных функций $\{u_h\}$ принадлежат различным пространствам U_h ; во-вторых, предельная функция u сходящейся последовательности сеточных функций $\{u_h\}$ не является сеточной и принадлежит принципиально иному функциональному пространству U ; в-третьих, для сходящейся последовательности сеточных функций $\{u_h\}$ не гарантируется единственность предельной функции.

С практической точки зрения вопрос о единственности предела любой сходящейся последовательности сеточных функций является принципиальным. Осуществляя замену исходной задачи математической физики дискретным аналогом – разностной схемой, естественно рассчитывать на то, что решение u_h дискретной задачи с измельчением сетки будет приближаться именно к решению u исходной непрерывной задачи, а не к какой-либо другой, посторонней функции.

Рассмотрим вопрос об условиях, гарантирующих единственность предела сходящейся последовательности сеточных функций.

Определение. Нормы семейства пространств $\{U_h\}$ называются невырожденными, если из факта существования функции $u \in U$, удовлетворяющей условию $\lim_{h \rightarrow 0} \|[u]_h\|_{U_h} = 0$, следует, что $u = 0$.

Теорема 1. Для того чтобы сходящаяся последовательность сеточных функций $\{u_h\}$ имела единственный предел, необходимо и достаточно, чтобы нормы семейства пространств $\{U_h\}$ были невырожденными.

Доказательство.

Достаточность. Предположим, что нормы семейства пространств $\{U_h\}$ являются невырожденными, и в то же время существует сходящаяся последовательность сеточных функций $\{u_h\}$, которая имеет два различных предела \tilde{u} и \hat{u} .

Оценим норму разницы дискретных аналогов функций \tilde{u} и \hat{u} в пространстве U_h следующим образом:

$$\begin{aligned} \|[\tilde{u} - \hat{u}]_h\|_{U_h} &= \|[\tilde{u}]_h - [\hat{u}]_h\|_{U_h} = \|[\tilde{u}]_h - u_h + u_h - [\hat{u}]_h\|_{U_h} \leq \\ &\leq \|[\tilde{u}]_h - u_h\|_{U_h} + \|u_h - [\hat{u}]_h\|_{U_h}. \end{aligned}$$

Выполнив в последнем неравенстве предельный переход при $h \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|[\tilde{u} - \hat{u}]_h\|_{U_h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|[\tilde{u}]_h - u_h\|_{U_h} + \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - [\hat{u}]_h\|_{U_h}. \quad (1.4)$$

Поскольку функции \tilde{u} и \hat{u} являются предельными для последовательности $\{u_h\}$, то на основании выше приведенного определения сходимости такой последовательности можем записать:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - [\tilde{u}]_h\|_{U_h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - [\hat{u}]_h\|_{U_h} = 0.$$

Но тогда из неравенства (1.4) вытекает следующий результат:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|[\tilde{u} - \hat{u}]_h\|_{U_h} = 0.$$

Но поскольку нормы семейства пространств $\{U_h\}$ являются невырожденными, то из предельного свойства (1.5) следует, что $\hat{u} - \tilde{u} = 0$, т.е. $\hat{u} = \tilde{u}$. Таким образом, у последовательности $\{u_h\}$ не может быть двух различных пределов.

Необходимость. Предположим, что любая сходящаяся последовательность сеточных функций $\{u_h\}$, имеет единственный предел. Докажем, что в этом случае нормы семейства $\{U_h\}$ являются невырожденными.

Пусть имеется функция $\hat{u} \in U$ такая, что выполняется предельное равенство $\lim_{h \rightarrow 0} \|[\hat{u}]_h\|_{U_h} = 0$. Покажем, что $\hat{u} = 0$.

Последнее предельное равенство можно записать так:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| [\hat{u}]_h - 0 \right\|_{U_h} = 0.$$

Следовательно, на основании определения сходимости последовательности сеточных функций $\{[\hat{u}]_h\}$ можем утверждать, что эта последовательность сходится к 0-функции.

С другой стороны, эта же последовательность на основании того же определения сходится к функции \hat{u} , поскольку справедливо следующее очевидное равенство $\lim_{h \rightarrow 0} \left\| [\hat{u}]_h - [\hat{u}]_h \right\|_{U_h} = 0$.

Но тогда на основании предположения о единственности предела любой сходящейся последовательности сеточных функций можем заключить, что $\hat{u} = 0$. Теорема доказана.

На практике, для получения гарантии единственности предела любой сходящейся последовательности сеточных функций $\{u_h\}$, можно вместо проверки свойства невырожденности норм семейства пространств $\{U_h\}$ осуществлять проверку справедливости другого свойства – свойства согласованности норм этого семейства с нормой в пространстве U .

Определение. Нормы семейства сеточных пространств $\{U_h\}$ называются согласованными с нормой в пространстве U , если для любых функций $u \in U$ выполняется условие $\lim_{h \rightarrow 0} \left\| [u]_h \right\|_{U_h} = \|u\|_U$.

Теорема 2. Для того чтобы нормы семейства пространств $\{U_h\}$ были невырожденными, достаточно, чтобы нормы этого семейства были согласованы с нормой в пространстве U .

Доказательство:

Предположим, что нормы семейства пространств $\{U_h\}$ согласованы с нормой в пространстве U . Это означает, что для произвольно выбранной функции $u \in U$ будет справедливо равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| [u]_h \right\|_{U_h} = \|u\|_U \quad (1.5)$$

Теперь выберем в пространстве U такую функцию \tilde{u} , которая обладает свойством:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\llbracket \tilde{u} \rrbracket_h\|_{U_h} = 0. \quad (1.6)$$

Для этой функции также будет справедливо равенство (1.5), т.е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\llbracket \tilde{u} \rrbracket_h\|_{U_h} = \|\tilde{u}\|_U \quad (1.7)$$

Из равенств (1.6) и (1.7) следует, что $\|\tilde{u}\|_U = 0$. Но поскольку норма в любом пространстве, в том числе и в пространстве U , обладает свойством невырожденности, то можно утверждать, что $\tilde{u} = 0$. Последнее позволяет заключить, что нормы семейства пространств $\{U_h\}$ являются невырожденными. Теорема доказана.

2 Линейные разностные уравнения.

Предположим, что на числовой оси, связанной с переменной x задано семейство точек $x_i, i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ($\dots < x_{-k-1} < x_{-k} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots$). Такое семейство будем называть сеткой, а принадлежащие ему точки x_i - узлами сетки. Всякую функцию $y_i, i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, определенную в узлах сетки, будем называть сеточной функцией. Очевидно, что семейство Y всевозможных сеточных функций, определенных на одной и той же сетке, образует линейное пространство.

Зададим на множестве значений сеточной функции $y_i, i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ некоторую функцию $F = F(\dots, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots)$. Уравнение вида

$$F(\dots, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots) = 0; \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1)$$

будем называть сеточным уравнением [1,2].

Предположим, что F зависит от некоторой конечной последовательности значений сеточной функции y_i , тогда уравнение (2.1) будет иметь вид:

$$F(y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+m}) = 0; \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.2)$$

Определим разности

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i; \\ \Delta^2 y_i &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta^m y_i &= \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i. \end{aligned}$$

Если уравнение (2.2) может быть представлено в виде

$$\tilde{F}(y_i, \Delta y_i, \dots, \Delta^m y_i) = 0; \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то оно называется разностным уравнением m -го порядка.

2.1 Теоремы о линейных разностных уравнениях

Рассмотрим линейное разностное уравнение вида:

$$a_0(i)y_i + a_1(i)y_{i+1} + \dots + a_m(i)y_{i+m} = \varphi(i); \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

или коротко

$$\sum_{j=0}^m a_j(i)y_{i+j} = \varphi(i), \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.3)$$

Будем полагать, что $a_0(i) \neq 0$ и $a_m(i) \neq 0$. Такое уравнение является разностным уравнением порядка "m".

Предположим сначала, что $\varphi(i) = 0$. Тогда уравнение (2.3) запишется в виде

$$\sum_{j=0}^m a_j(i)y_{i+j} = 0, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4)$$

Теорема 1. Если сеточные функции $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(k)}$ являются решениями уравнения (2.4), то и функция $y_i = \sum_{n=1}^k c_n v_i^{(n)}$ также является решением этого уравнения. Доказать самостоятельно.

Введем обозначение для следующего определителя:

$$\Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)}) = \begin{vmatrix} v_i^{(1)} & v_{i+1}^{(1)} & \dots & v_{i+m-1}^{(1)} \\ v_i^{(2)} & v_{i+1}^{(2)} & \dots & v_{i+m-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_i^{(m)} & v_{i+1}^{(m)} & \dots & v_{i+m-1}^{(m)} \end{vmatrix}.$$

Лемма 1. Пусть сеточные функции $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$ являются решениями уравнения (2.4), тогда определитель $\Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)})$ либо тождественно равен нулю для любых значений $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, либо не равен нулю ни при каких i .

Доказательство.

Поскольку функции $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$ являются решениями уравнения (2.4), то для любых $k = \overline{1, m}$ справедливо тождество

$$\sum_{j=0}^m a_j(i)v_{i+j}^{(k)} \equiv 0, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если перенести в правую часть слагаемое $a_m(i)v_{i+m}^{(k)}$, то последнее тождество запишется в виде

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_j(i) v_{i+j}^{(k)} \equiv a_m(i) v_{i+m}^{(k)}, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \forall k = \overline{1, m} \quad (2.5)$$

Поскольку $k = \overline{1, m}$, то (2.5) представляет собой систему тождеств. Эту систему будем рассматривать как систему тождественно выполнившихся линейных уравнений относительно элементов $a_j(i)$, $j = \overline{0, m-1}$. Заметим, что определитель этой системы равен $\Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)})$. Предположим, что $\Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)}) \neq 0$, тогда согласно правилу Крамера можно записать

$$a_0(i) \equiv - \frac{a_m(i)}{\Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)})} \begin{vmatrix} v_{i+m}^{(1)} & v_{i+1}^{(1)} & \dots & v_{i+m-1}^{(1)} \\ v_{i+m}^{(2)} & v_{i+1}^{(2)} & \dots & v_{i+m-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{i+m}^{(m)} & v_{i+1}^{(m)} & \dots & v_{i+m-1}^{(m)} \end{vmatrix},$$

или иначе

$$a_0(i) \Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)}) \equiv (-1)^m a_m(i) \Delta_{i+1}(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)}).$$

Из последнего тождества вытекает утверждение леммы.

Определение: Система сеточных функций $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$ называется линейно-независимой системой решений уравнения (2.4), если, во-первых, каждая из этих функций удовлетворяет уравнению (2.4) и, во-вторых, для произвольного набора вещественных чисел c_1, c_2, \dots, c_m одновременно не равных 0 существует значение i , для которого справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^m c_k v_i^{(k)} \neq 0.$$

Лемма 2. Если система сеточных функций $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$ представляет собой линейно-независимую систему решений уравнения (2.4), то для любых значений $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ справедливо неравенство $\Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)}) \neq 0$. Обратно: если существует такое значение i , для которого выполняется неравенство $\Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)}) \neq 0$, то система $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$ решений уравнения (2.4) будет линейно-независимой.

Доказательство.

Прежде всего, отметим, что для любой системы решений $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$ уравнения (2.4) определитель $\Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)})$ в силу леммы 1 либо равен нулю сразу для всех $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, либо отличен от нуля для любых значений i .

Предположим, что система $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$ линейно-независима.

Покажем, что для любых значений $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ справедливо неравенство $\Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)}) \neq 0$. Допустим противное, т.е. $\forall i \Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)}) = 0$.

Теперь запишем следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^m c_k v_i^{(k)} = 0, \quad i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + m - 1. \quad (2.6)$$

Неизвестными в этой системе считаем набор чисел c_1, c_2, \dots, c_m .

Поскольку определитель системы (2.6) $\Delta_{i_0}(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)})$ равен нулю в силу допущения, следовательно, существует ненулевое решение этой системы C_1, C_2, \dots, C_m . Иначе говоря, существует набор чисел C_1, C_2, \dots, C_m , одновременно не равных 0, таких, что для значений $i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + m - 1$ справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^m C_k v_i^{(k)} \equiv 0. \quad (2.7)$$

Если мы покажем, что это тождество будет справедливо и для всех других допустимых значений i , то в результате мы сможем заявить о линейной зависимости системы $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$ на основании определения.

Покажем справедливость тождества (2.7) при указанном выше наборе чисел C_1, C_2, \dots, C_m для значения $i = i_0 + m$. Учтем, что каждая из функций $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$, являясь решением уравнения (2.4), обращает его в тождество для любых $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, в частности, и для значения $i = i_0$ можем записать:

$$\sum_{j=0}^m a_j(i_0) v_{i_0+j}^{(k)} \equiv 0.$$

Умножив последнее тождество на C_k и проведя суммирование по $k = \overline{1, m}$, получим:

$$\sum_{k=1}^m C_k \sum_{j=0}^m a_j(i_0) v_{i_0+j}^{(k)} \equiv 0.$$

Последнее тождество можно переписать так:

$$a_m(i_0) \sum_{k=1}^m C_k v_{i_0+m}^{(k)} + \sum_{j=1}^{m-1} a_j(i_0) \sum_{k=1}^m C_k v_{i_0+j}^{(k)} \equiv 0. \quad (2.8)$$

Теперь учтем, что второе слагаемое левой части (2.8) равно нулю в силу (2.7), а также $a_m(i_0) \neq 0$. В результате приходим к тождеству:

$$\sum_{k=1}^m C_k v_{i_0+m}^{(k)} \equiv 0.$$

Аналогично можно показать справедливость тождества (2.7) для любых других значений i . Итак, исходя из сделанного допущения, мы приходим к заключению о линейной зависимости системы функций $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$, что противоречит исходной посылке. Следовательно, можно утверждать, что $\Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)}) \neq 0$ для любых $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Доказательство обратного утверждения провести самостоятельно.

Лемма 3. Каждая последовательность начальных значений

$$y_{i_0} = b_0, \quad y_{i_0+1} = b_1, \dots, \quad y_{i_0+m-1} = b_{m-1}$$

однозначно определяет решение уравнения (2.4).

Доказательство леммы 3 очевидно.

Теорема 2. Если $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$ – линейно-независимая система решений уравнения (2.4), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_i = \sum_{k=1}^m c_k v_i^{(k)}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.9)$$

где c_1, c_2, \dots, c_m – произвольные постоянные.

Доказательство.

Прежде всего отметим, что под общим решением уравнения (2.4) понимается множество всех решений этого уравнения.

На основании теоремы 1 можно утверждать, что любая сеточная функция y_i , определяемая равенством (2.9), есть решение уравнения (2.4). Покажем, что любое решение u_i уравнения (2.4) представимо в виде (2.9), т.е. справедлива формула

$$u_i = \sum_{k=1}^m c_k v_i^{(k)}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.10)$$

Найдем набор констант c_1, c_2, \dots, c_m , при которых верно представление (2.10). Воспользуемся леммой 3, в соответствии с которой решение u_i однозначно определяется заданием m начальных значений:

$$u_{i_0}, u_{i_0+1}, \dots, u_{i_0+m-1}.$$

Таким образом, если разложение (2.10) существует, то оно обязано удовлетворять начальным условиям:

$$\sum_{k=1}^m c_k v_{i_0+j}^{(k)} = u_{i_0+j}, \quad j = \overline{0, m-1} \quad (2.11)$$

Набор условий (2.11) будем рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных c_1, c_2, \dots, c_m . Определитель этой системы $\Delta_{i_0}(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)})$ в силу леммы 2 отличен от нуля, следовательно, эта система имеет единственное решение. Итак, любое решение u_i уравнения (2.4) представимо в виде (2.10), причем единственным образом.

Теорема полностью доказана.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение (2.3).

Теорема 3. Общее решение уравнения (2.3) может быть представлено в виде суммы его частного решения и общего решения однородного уравнения (2.4).

Доказательство:

Используем следующие обозначения:

\hat{u}_i - общее решение однородного уравнения (2.4);

\hat{y}_i - общее решение неоднородного уравнения (2.3);

\hat{y}_i - некоторое частное решение неоднородного уравнения (2.3).

Покажем, что общее решение уравнения (2.3) представимо в виде:

$$\bar{y}_i = \hat{u}_i + \hat{y}_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.12)$$

Для этого достаточно показать, что

1) любая сеточная функция из множества $\hat{u}_i + \hat{y}_i$ – есть решение уравнения (2.3);

2) всякое решение \bar{y}_i уравнения (2.3) представимо в виде суммы сеточной функции \hat{y}_i и некоторой сеточной функции из множества \hat{u}_i .

Первое утверждение доказывается непосредственно подстановкой суммы (2.12) в уравнение (2.3).

Для доказательства второго утверждения возьмём из множества \hat{y}_i произвольное решение \bar{y}_i уравнения (2.3).

Обозначим $z_i = \bar{y}_i - \hat{y}_i$. Выразим \bar{y}_i

$$\bar{y}_i = \hat{y}_i + z_i \quad (2.13)$$

Подставив (2.13) в уравнение (2.3) и учитывая, что функции \bar{y}_i и \hat{y}_i – решения этого уравнения, получаем:

$$\sum_{j=0}^m a_j(i) z_{i+j} = 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Видим, что сеточная функция z_i является решением уравнения (2.4).

Итак, второе утверждение, а значит и теорема, доказаны.

Теорема 4. Если правая часть $\varphi(i)$ уравнения (2.3) представляет собой сумму сеточных функций $\varphi_1(i)$ и $\varphi_2(i)$, т.е. $\varphi(i) = \varphi_1(i) + \varphi_2(i)$, то любое частное решение \hat{y}_i уравнения (2.3) можно представить в виде суммы:

$$\hat{y}_i = \hat{y}_{1i} + \hat{y}_{2i},$$

где \hat{y}_{ki} - частное решение уравнения (2.3) с правой частью $\varphi_k(i)$, $k=1,2$.

Доказать самостоятельно.

2.2 Построение решения линейного разностного уравнения

Сначала рассмотрим вопрос построения системы $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$ линейно-независимых решений однородного уравнения (2.4).

Зададим некоторую невырожденную квадратную матрицу

$$A = [\alpha_{kn}]; \quad k, n = \overline{1, m}.$$

Для каждой из искомых функций $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(m)}$ определим начальные условия следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{i_0}^{(1)} &= \alpha_{11}, \quad v_{i_0+1}^{(1)} = \alpha_{12}, \quad \dots, \quad v_{i_0+m-1}^{(1)} = \alpha_{1m}; \\ v_{i_0}^{(2)} &= \alpha_{21}, \quad v_{i_0+1}^{(2)} = \alpha_{22}, \quad \dots, \quad v_{i_0+m-1}^{(2)} = \alpha_{2m}; \\ &\dots\dots\dots \\ v_{i_0}^{(m)} &= \alpha_{m1}, \quad v_{i_0+1}^{(m)} = \alpha_{m2}, \quad \dots, \quad v_{i_0+m-1}^{(m)} = \alpha_{mm}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

На основании леммы 3 всякое решение однородного уравнения (2.4) однозначно определяется заданием последовательности m начальных значений. Очевидно, что для вычисления остальных значений для каждой сеточной функции $v_i^{(k)}$, $k = \overline{1, m}$ следует воспользоваться уравнением (2.4), записав его в рекуррентной форме.

Полученный таким путем набор сеточных функций $v_i^{(k)}$, $k = \overline{1, m}$ в силу леммы 2 будет представлять собой систему линейно-независимых решений однородного уравнения (2.4), ибо для этой системы справедливо неравенство

$$\Delta_{i_0} \left(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)} \right) = \det(A) \neq 0.$$

В качестве матрицы A удобно взять единичную матрицу. В этом случае условия (2.14) примут вид:

Уравнение (2.21) имеет m корней. Если все корни μ_k ($k = \overline{1, m}$) различны, то система сеточных функций $v_i^k = (\mu_k)^i$ ($k = \overline{1, m}$) будет линейно независимой в силу леммы 2, поскольку для этой системы определитель $\Delta_i(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)})$ при $i=0$ будет отличен от нуля, как определитель Вандермонда. Тогда общее решение уравнения (2.19) будет иметь вид (2.9).

Рассмотрим случай, когда имеются кратные корни. Пусть μ_k ($k = \overline{1, r}$) – корень кратности p_k , причем справедливо равенство $\sum_{k=1}^r p_k = m$. Тогда система линейно-независимых решений однородного уравнения (2.19) может быть получена объединением r подсистем вида [2]:

$$\left\{ (\mu_k)^i ; i(\mu_k)^i ; i^2(\mu_k)^i ; \dots ; i^{p_k-1}(\mu_k)^i \right\}, \quad k = \overline{1, r}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1..Самарский А.А. Введение в численные методы: Учебное пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1987.-288 с.
- 2..Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 591 с.

3 Аппроксимация, устойчивость и сходимость разностной схемы

Метод конечных разностей является одним из наиболее универсальных методов решения краевых задач, поставленных для дифференциальных уравнений математической физики. Применение метода предполагает построение разностной схемы, которая представляет собой некоторый дискретный аналог исходной (непрерывной) краевой задачи.

Решением разностной краевой задачи является так называемая сеточная функция, которая определена в конечном числе точек рассматриваемой области изменения независимых переменных, причем значения этой сеточной функции в указанных точках совсем не обязаны совпадать со значениями функции, являющейся решением исходной задачи. При практическом применении метода конечных разностей важно иметь возможность уменьшения различия между приближенным (сеточным) решением и точным решением исходной задачи до уровня допустимой погрешности. Такая возможность в первую очередь связывается со свойством сходимости разностной схемы.

Свойство сходимости является важнейшим свойством разностной схемы. Суть свойства сходимости заключается в сколь угодно хорошем приближении решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи математической физики при неограниченном измельчении сетки. Доказательство сходимости через непосредственное сравнение решений дискретной и непрерывной задач является, как правило, весьма проблематичным. В то же время свойство сходимости тесно связано со свойствами аппроксимации и устойчивости разностной схемы, причем при определенных условиях сходимость является следствием аппроксимации и устойчивости.

3.1 Понятие аппроксимации дифференциальной краевой задачи разностной схемой

Запишем краевую задачу математической физики в следующей операторной форме [1, 2, 3]:

$$Lu = f, u \in \tilde{U} \subset U, f \in F, \quad (3.1)$$

где u - искомое решение краевой задачи;

L - дифференциальный оператор краевой задачи;

U - функциональное пространство, которому принадлежит решение u ;

\tilde{U} - область определения оператора L ;

f - правая часть операторного уравнения, представляющая собой упорядоченный набор правых частей дифференциального уравнения и краевых условий задачи математической физики;

F - функциональное пространство, которому принадлежит правая часть f .

Будем предполагать, что задача (3.1) является корректно поставленной, в частности - имеет единственное решение.

Допустим, что для приближенного решения краевой задачи (3.1) построена разностная схема

$$L_h u_h = f_h, u_h \in \tilde{U}_h \subset U_h, f_h \in F_h, \quad (3.2)$$

где u_h - сеточная функция, являющаяся искомым решением разностной краевой задачи (3.2);

L_h - оператор, представляющий собой сеточный аналог дифференциального оператора L ;

U_h - линейное пространство сеточных функций, которому принадлежит функция u_h ;

\tilde{U}_h - область определения оператора L_h ;

f_h - сеточный аналог правой части f уравнения (3.1);

F_h - линейное пространство сеточных объектов, имеющих ту же структуру, что и f_h .

Будем также предполагать, что U_h и F_h являются нормированными пространствами, а множество \tilde{U}_h включает в себя сеточный аналог множества \tilde{U} , т. е. $[\tilde{U}]_h \subseteq \tilde{U}_h$, где $[\cdot]_h$ - оператор дискретизации.

Допустим, что решение u задачи (3.1) найдено. Подставим сеточный аналог этой функции, т.е. $[u]_h$, в уравнение (3.2). Поскольку сеточная функция $[u]_h$ вообще говоря не является решением уравнения (3.2), то результат действия оператора L_h на эту функцию будет отличаться от f_h на некоторую функцию δf_h , т.е.

$$L_h[u]_h = f_h + \delta f_h. \quad (3.3)$$

Функцию δf_h будем называть невязкой.

Определение. Говорят, что разностная схема (3.2) аппроксимирует задачу (3.1) на решении u , если для любой последовательности сгущающихся сеток выполняется условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f_h\|_{F_h} = \lim_{h \rightarrow 0} \|L_h[u]_h - f_h\|_{F_h} = 0. \quad (3.4)$$

Величину $\|\delta f_h\|_{F_h}$ называют **погрешностью аппроксимации схемы** (3.2).

Если погрешность аппроксимации обладает свойством

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = O(h^m),$$

где h - мелкость сетки; m - натуральное число, то говорят, что имеет место аппроксимация порядка m относительно мелкости h . Аналогично вводится понятие порядков аппроксимации схемы относительно шагов дискретизации h_x, h_y, h_t, \dots независимых переменных x, y, t, \dots

Определение. Говорят, что разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L , если для любой функции $u \in \tilde{U}$ и для любой последовательности сгущающихся сеток выполняется условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|L_h[u]_h - [Lu]_h\|_{F_h} = 0.$$

Величину $\|L_h[u]_h - [Lu]_h\|_{F_h}$ называют *погрешностью аппроксимации*

оператора L оператором L_h . Понятия порядков аппроксимации оператора вводятся аналогично рассмотренным выше для схемы.

Отметим, что форма (3.1) представляет собой символическую операторную запись краевой задачи математической физики, которая включает в себя как дифференциальное уравнение, так и краевые условия. Например, следующая краевая задача теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), & x \in [0, l], t \in [0, T]; \\ u|_{t=0} = \psi(x), & x \in [0, l]; \\ u|_{x=0} = \alpha(t), \quad u|_{x=l} = \beta(t), & t \in (0, T) \end{cases}$$

может быть записана в форме (3.1), если использовать обозначения

$$Lu = \begin{pmatrix} L^1 u \\ L^2 u \\ L^3 u \\ L^4 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} \\ u|_{x=0} \\ u|_{x=l} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x, t) \\ \psi(x) \\ \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

Форма (3.2) также представляет собой сокращенную запись разностной схемы, объединяющую несколько сеточных соотношений, т.е.

$$L_h u_h = \begin{pmatrix} L_h^1 u_h \\ L_h^2 u_h \\ \vdots \\ L_h^n u_h \end{pmatrix}, \quad f_h = \begin{pmatrix} f_h^1 \\ f_h^2 \\ \vdots \\ f_h^n \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим одно из сеточных соотношений, включенных в схему (3.2)

$$L_h^s u_h = f_h^s, \quad (3.6)$$

где $s = \overline{1, n}$.

Зафиксируем некоторый узел (x_i, y_j, t_k) сетки, в котором соотношение (3.6) определено.

Величину

$$\delta f_h^s \Big|_{x_i, y_j, t_k} = \left\{ L_h^s[u]_h - f_h^s \right\}_{x_i, y_j, t_k}$$

будем называть *погрешностью локальной аппроксимации* сеточного соотношения (3.6) в выделенном узле, если $\lim_{h \rightarrow 0} \delta f_h^s \Big|_{x_i, y_j, t_k} = 0$. При этом предполагается, что произвольно выбранная последовательность сгущающихся сеток сохраняет зафиксированный узел.

Понятия порядков локальной аппроксимации сеточного соотношения (3.6) вводятся аналогично понятиям, введенным выше для схемы (3.2).

При исследовании свойства аппроксимации разностной схемы (3.2) можно воспользоваться следующим планом.

План нахождения порядков аппроксимации разностной схемы

1 шаг. Выбрать одно из сеточных соотношений (3.6) схемы (3.2). Зафиксировать некоторый узел (x_i, y_j, t_k) сетки, в котором соотношение (3.6) определено. Разложить все функции, входящие в выражение локальной погрешности аппроксимации

$$\delta f_h^s \Big|_{x_i, y_j, t_k} = \left\{ L_h^s[u]_h - f_h^s \right\}_{x_i, y_j, t_k} \quad (3.7)$$

в окрестности узла (x_i, y_j, t_k) , используя формулу Тейлора.

2 шаг. Подставить полученные разложения в выражение (3.7), провести упрощения и затем выделить ненулевые слагаемые наименьших порядков относительно шагов дискретизации h_x, h_y, h_t . Порядки этих слагаемых будут порядками локальной аппроксимации соотношения (3.6) в выбранном узле. Здесь необходимо учесть, что функция u является решением уравнения (3.1) и, следовательно, обращает его в тождество, которое целесообразно использовать при проведении упрощений.

Шаг. Найти порядки локальной аппроксимации для каждого из соотношений (3.6) схемы (3.2) в соответствующих им узлах. Затем, используя определение нормы в пространстве F_h , записать выражение для погрешности аппроксимации схемы (3.2)

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \|L_h[u]_h - f_h\|_{F_h}. \quad (3.8)$$

Анализируя выражение (3.8), установить порядки аппроксимации схемы, выделив слагаемые наименьших порядков относительно шагов дискретизации.

Отметим, что план нахождения порядков аппроксимации разностного оператора L_h аналогичен выше изложенному. При этом необходимо выражения (3.7) и (3.8) заменить выражениями

$$\left\{ L_h^s[u]_h - [L^s u]_h \right\}_{x_i, y_j, t_k} \quad (3.9)$$

$$\|L_h[u]_h - [Lu]_h\|_{F_h} \quad (3.10)$$

соответственно.

3.2 Свойство устойчивости разностной схемы

Предположим, что для решения краевой задачи (3.1) построена разностная схема:

$$L_h u_h = f_h, \quad u_h \in \tilde{U}_h \subset U_h, \quad f_h \in F_h, \quad (3.11)$$

Допустим, что правая часть f_h разностной задачи (3.11) известна неточно, причем величина ее отклонения от точной правой части равна δf_h . При этом обычно говорят, что правая часть f_h получила некоторое возмущение δf_h .

Наряду с задачей (3.11) рассмотрим задачу с возмущенной правой частью:

$$L_h v_h = f_h + \delta f_h, \quad v_h \in \tilde{U}_h \subset U_h, \quad f_h + \delta f_h \in F_h. \quad (3.12)$$

Решение v_h задачи (3.12), если оно существует, вообще говоря, отличается от решения u_h задачи (3.11).

Сеточную функцию $\delta u_h = v_h - u_h$ будем называть возмущением решения u_h разностной задачи (3.11), вызванным возмущением δf_h правой части f_h .

С практической точки зрения очень важно, чтобы малым значениям $\|\delta f_h\|_{F_h}$ отвечали малые значения $\|\delta u_h\|_{U_h}$ не только для конкретной выбранной сетки, но и для любой другой из последовательности измельчающихся сеток.

Определение 1. Разностная схема (3.11) называется *устойчивой*, если существуют такие числа $c > 0$, $h_0 > 0$, $\delta > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и для любых возмущений $\delta f_h \in F_h$, таких, что $\|\delta f_h\|_{F_h} < \delta$ выполняются условия:

- 1) решение задачи (3.12) существует и единственно;
- 2) справедливо неравенство $\|\delta u_h\|_{U_h} \leq c \|\delta f_h\|_{F_h}$.

Приведенное определение устойчивости является весьма общим. Здесь разностный оператор L_h предполагается произвольным, не обязательно линейный.

Для линейного оператора L_h можно дать более короткую формулировку определения устойчивости.

Определение 2. Линейная разностная схема (3.11) называется *устойчивой*, если существуют такие числа $c > 0$, $h_0 > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и для любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются условия:

- 1) решение задачи (3.11) существует и единственно;
- 2) справедливо неравенство $\|u_h\|_{U_h} \leq c \|f_h\|_{F_h}$.

Подчеркнем, что во втором определении устойчивости под символом f_h подразумевается возмущение правой части уравнения (3.11), а не сама правая часть, а под символом u_h – соответствующее ему возмущение решения.

Отметим также, что во втором определении возмущение правой части предполагается совершенно произвольным, а в первом определении – достаточно малым. Тем не менее, в случае, когда оператор L_h является линейным, оба определения будут эквивалентными.

Действительно, если линейная разностная схема является устойчивой в смысле определения 2, т.е. для произвольных возмущений правой части, то она будет устойчивой и в смысле определения 1, где возмущения правой части выбираются достаточно малыми: $\|\delta f_h\|_{F_h} < \delta$.

Теперь покажем обратное. Пусть линейная разностная схема (3.11) устойчива в смысле определения 1. Из (3.11) и (3.12) вычитанием получаем

$$L_h v_h - L_h u_h = \delta f_h.$$

Из последнего уравнения и линейности оператора L_h следует:

$$L_h \delta u_h = \delta f_h. \quad (3.13)$$

Разностная схема (3.13) представляет собой неоднородную систему линейных уравнений, которая в силу определения 1 имеет единственное решение при выборе достаточно малой правой части δf_h . Тогда можно утверждать, что определитель системы (3.13) отличен от нуля и система будет иметь единственное решение при любом выборе правой части δf_h . Таким образом первое из двух условий, фигурирующих в определении 2, выполнено.

Теперь зададим правую часть системы (3.13) в виде $\delta \tilde{f}_h = \alpha \cdot (\delta f_h)$, где α - произвольное положительное число. В данном случае возмущение $\delta \tilde{f}_h$ может и не удовлетворять ограничению $\|\delta \tilde{f}_h\|_{F_h} < \delta$. Тогда решение этой системы будет иметь вид $\delta \tilde{u}_h = \alpha \cdot (\delta u_h) = \alpha v_h - \alpha u_h = \tilde{v}_h - \tilde{u}_h$. Далее, из

определения 1 следует, что для возмущений δf_h , удовлетворяющих условию $\|\delta f_h\|_{F_h} < \delta$ справедливо неравенство

$$\|\delta u_h\|_{U_h} \leq c \|\delta f_h\|_{F_h}.$$

Но тогда, умножая обе части последнего неравенство на число α , приходим к неравенству

$$\|\alpha \cdot (\delta u_h)\|_{U_h} \leq c \|\alpha \cdot (\delta f_h)\|_{F_h}.$$

Последнее можно записать так:

$$\|\delta \tilde{u}_h\|_{U_h} \leq c \|\delta \tilde{f}_h\|_{F_h}.$$

Видим, что второе условие в определении 2 оказывается справедливым при произвольном выборе возмущения правой части. Итак, схема (3.13) устойчива в смысле определения 2.

3.3 Свойство сходимости решения разностной краевой задачи к решению дифференциальной краевой задачи

Предположим, что для краевой задачи

$$Lu = f, \quad u \in \tilde{U} \subset U, \quad f \in F \quad (3.14)$$

построена разностная схема

$$L_h u_h = f_h, \quad u_h \in \tilde{U}_h \subset U_h, \quad f_h \in F_h. \quad (3.15)$$

Рассмотрим произвольную последовательность сгущающихся сеток. Этой последовательности будет соответствовать последовательность пространств U_h . Выберем из каждого пространства U_h некоторую сеточную функцию v_h . В результате получим последовательность сеточных функций v_h .

Определение. Говорят, что последовательность сеточных функций $v_h \in U_h$ сходится к функции $v \in U$ непрерывных аргументов, если выполняется условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v_h - [v_h]\|_{U_h} = 0.$$

Теперь предположим, что на каждой сетке из рассмотренной последовательности сгущающихся сеток разностная задача (3.15) имеет единственное решение u_h . Таким образом, выбранной последовательности сеток будет соответствовать последовательность сеточных функций u_h - решений задачи (3.15).

Определение. Разностную схему (3.15) будем называть сходящейся, если при любом выборе последовательности сгущающихся сеток соответствующая ей последовательность решений u_h будет сходиться к решению u задачи (3.14).

Следует отметить, что приведенное выше определение сходимости разностной схемы существенно привязано к функции u , а связь с дифференциальной задачей (3.14) весьма условна. Например, если функция u является решением двух различных дифференциальных задач, то разностная схема (3.15) будет сходящейся как для одной, так и для другой задачи.

Величину $\|u_h - [u]\|_{U_h}$ будем называть *погрешностью решения задачи* (3.14) с помощью разностной схемы (3.15). Эта величина характеризует методическую погрешность, вызванную переходом от исходной дифференциальной задачи к ее сеточному аналогу.

Теперь докажем теорему, которая устанавливает связь между понятиями аппроксимации, устойчивости и сходимости разностной схемы и представляет собой важнейшее утверждение теории разностных схем.

Теорема. Если разностная схема (3.15) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (3.14) с погрешностью $O(\psi(h))$, где

$\psi(h) \geq 0$ и $\lim_{h \rightarrow 0} \psi(h) = 0$, а также является устойчивой, то она сходится, причем погрешность разностного решения характеризуется величиной

$$\|u_h - [u]_h\|_{U_h} = O_1(\psi(h)).$$

Доказательство. Если в разностную задачу (3.15) подставить вместо ее решения u_h сеточный аналог $[u]_h$ точного решения задачи (3.14), то получим

$$L_h[u]_h = f_h + \delta \hat{f}_h,$$

где $\delta \hat{f}_h$ - возникшая при этом невязка.

Так как разностная схема (3.15) аппроксимирует задачу (3.14) с погрешностью $O(\psi(h))$, то на основании определения погрешности аппроксимации запишем:

$$\|\delta \hat{f}_h\|_{F_h} = O(\psi(h)),$$

т.е. существуют такие положительные числа c_1 и h_1 , что для любых сеток мелкостью $h < h_1$ справедливо неравенство

$$\|\delta \hat{f}_h\|_{F_h} \leq c_1 \psi(h). \quad (3.16)$$

Так как схема (3.15) устойчива, то на основании определения устойчивости можно утверждать: существуют такие числа $c_2 > 0$, $h_2 > 0$, $\delta > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_2$ и для любых возмущений $\delta f_h \in F_h$, удовлетворяющих условию $\|\delta f_h\|_{F_h} < \delta$, справедливо неравенство

$$\|v_h - u_h\|_{U_h} \leq c_2 \|\delta f_h\|_{F_h}, \quad (3.17)$$

где v_h - решение задачи (3.15) с правой частью $f_h + \delta f_h$.

Поскольку возмущение δf_h выбирается произвольно, то можно задать его равным невязке $\delta \hat{f}_h$. При этом необходимо учесть, что погрешность

аппроксимации $\|\delta \hat{f}_h\|_{F_h}$ обладает свойством $\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta \hat{f}_h\|_{F_h} = 0$. Следовательно, выполнение неравенства $\|\delta \hat{f}_h\|_{F_h} < \delta$ легко гарантировать, выбирая сетки достаточной мелкости $h < h_3$.

Для возмущения правой части задачи (3.15), равного $\delta \hat{f}_h$, неравенство (3.17) запишется в виде

$$\|[u]_h - u_h\|_{U_h} \leq c_2 \|\delta \hat{f}_h\|_{F_h}. \quad (3.18)$$

Из неравенств (3.16) и (3.18) вытекает неравенство

$$\|u_h - [u]_h\|_{U_h} \leq c_1 c_2 \psi(h), \quad (3.19)$$

которое будет справедливо для сеток мелкостью $h < \min(h_1, h_2, h_3)$.

Осуществляя в (3.19) предельный переход при $h \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - [u]_h\|_{U_h} = 0.$$

Таким образом, схема сходится, причем на основании неравенства (3.19) имеем право записать $\|u_h - [u]_h\|_{U_h} = O_1(\psi(h))$.

Теорема доказана.

Предположим, что погрешность сеточного решения может быть представлена в виде

$$\|u_h - [u]_h\|_{U_h} = O(h^k).$$

В этом случае говорят о k - том порядке сходимости схемы относительно мелкости сетки h . На практике чаще используют порядки сходимости не относительно мелкости, а относительно шагов сетки по независимым переменным. При этом погрешность сеточного решения может характеризоваться несколькими порядками, каждый из которых соответствует своей независимой переменной.

В заключение параграфа отметим, что из трех рассмотренных свойств разностных схем только свойство устойчивости является внутренним свойством схемы. Т.е. определение устойчивости разностной схемы никак не связано с дифференциальной задачей, для которой построена схема. Что касается свойств аппроксимации и сходимости, то они привязаны к точному решению дифференциальной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1..Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. 2-е изд. - М.: Научный мир, 2003.-316с.
- 2..Самарский А.А. Введение в численные методы: Учебное пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1987.-288 с.
- 3..Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы: введение в теорию: Учебное пособие. - М.: Наука, 1977. – 440 с.

4 Построение аппроксимирующих разностных схем

Существует множество методов построения аппроксимирующих разностных схем (см., например, [1, 2, 3, 4]). Ниже рассматриваются три метода, использование которых необходимо для выполнения самостоятельных и лабораторных работ по настоящей дисциплине.

4.1 Метод замены производных разностными отношениями

Этот метод является самым простым и весьма универсальным. Его можно использовать при построении разностных схем для дифференциальных уравнений как с постоянными, так и с переменными коэффициентами, а также для нелинейных дифференциальных уравнений. Однако качество таких схем может оказаться недостаточным для их успешного практического применения.

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \varphi(x,t), & 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq l; \\ u(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(l,t) = \beta(t), & 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (4.1)$$

Определим равномерную сетку как множество узлов (x_i, t_k) , где

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x, & i &= \overline{0, I}, & h_x &= l/I; \\ t_k &= kh_t, & k &= \overline{0, K}, & h_t &= T/K. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Запишем приближённые выражения для производных, входящих в задачу (4.1):

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{h_t}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1})}{h_t}. \quad (4.5)$$

Проводя дискретизацию задачи (4.1), заменим все функции непрерывных аргументов x, t их сеточными аналогами, а производные, входящие в уравнение (4.1), разностными отношениями (4.3) и (4.4). В результате получим так называемую *простейшую явную схему*

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \alpha^k; \quad u_I^k = \beta^k, & k = \overline{1, K}, \end{cases} \quad (4.6)$$

где $\varphi_i^k, \psi_i, \alpha^k, \beta^k$ - сеточные аналоги функций $\varphi(x, t), \psi(x, t), \alpha(t), \beta(t)$, например $\varphi_i^k = \varphi(x_i, t_k)$;

u_i^k - искомая сеточная функция, которую будем рассматривать как некоторое приближение к решению u задачи (4.1).

Очевидно, что схема (4.6) представляет собой систему линейных уравнений, допускающую возможность рекуррентного вычисления сеточного решения u_i^k для $k = 1, 2, \dots, K$ по явной формуле

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{h_t}{h_x^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + h_t \varphi_i^k. \quad i = 1, 2, \dots, I-1.$$

Отметим, что схеме (4.6) соответствует шаблон, приведенный на рисунке 4.1.

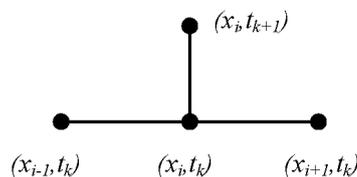


Рисунок 4.1 - Шаблон простейшей явной схемы

Если при построении разностной схемы для задачи (4.1) вместо формулы (4.4) использовать формулу (4.5), то будет получена *простейшая неявная схема*

$$\begin{cases} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \alpha^k, \quad u_I^k = \beta^k, & k = \overline{1, K}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Заметим, что схема (4.7) представляет собой систему линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей. Первое уравнение схемы (4.7) запишем в следующем виде:

$$-\gamma u_{i-1}^k + (1 + 2\gamma)u_i^k - \gamma u_{i+1}^k = u_i^{k-1} + h_t \varphi_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, I-1, \quad (4.8)$$

где $k = 1, 2, \dots, K$; $\gamma = h_t / h_x^2$.

Положим в (4.8) $i = 1$ и учтем граничное условие $u_0^k = \alpha^k$. В результате получим уравнение

$$(1 + 2\gamma)u_1^k - \gamma u_2^k = u_1^{k-1} + h_t \varphi_1^k + \gamma \alpha^k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.9)$$

Аналогично, полагая в (4.8) $i = I-1$ и используя граничное условие $u_I^k = \beta^k$, получим уравнение

$$-\gamma u_{I-2}^k + (1 + 2\gamma)u_{I-1}^k = u_{I-1}^{k-1} + h_t \varphi_{I-1}^k + \gamma \beta^k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.10)$$

С учетом (4.8) - (4.10) систему уравнений (4.7) можно записать в следующем векторно-матричном виде:

$$\begin{cases} P\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} + \bar{q}^k, & k = 1, 2, \dots, K; \\ \bar{u}^0 = \bar{\psi}, \end{cases} \quad (4.11)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma & 1+2\gamma & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix},$$

$$\bar{u}^k = \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{I-1}^k \end{pmatrix}, \quad \bar{q}^k = \begin{pmatrix} h_t \varphi_1^k + \gamma \alpha^k \\ h_t \varphi_2^k \\ \vdots \\ h_t \varphi_{I-2}^k \\ h_t \varphi_{I-1}^k + \gamma \beta^k \end{pmatrix},$$

$$\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{I-1})^T.$$

Для решения системы (4.11) следует использовать метод прогонки [5].

Шаблон простейшей неявной схемы представлен на рисунке 4.2.

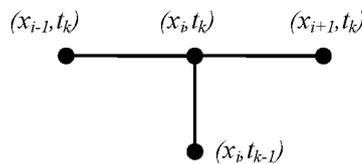


Рисунок 4.2 - Шаблон простейшей неявной схемы

Получим еще одну, часто используемую на практике схему, называемую *схемой Кранка-Николсона*. Шаблон этой схемы представлен на рисунке 4.3.

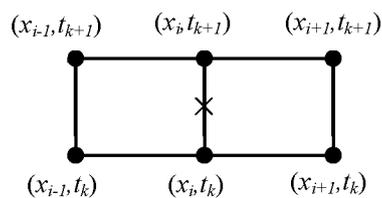


Рисунок 4.3 - Шаблон схемы Кранка-Николсона

• - основные узлы; × - вспомогательный узел.

Рассмотрим наряду с основными узлами шаблона вспомогательный узел $(x_i, t_k + h_t/2)$. Используя этот узел, запишем уравнения простейших явной и неявной схем для задачи (4.1)

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_i - u_i^k}{h_t/2} &= \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} + \varphi_i^k; \\ \frac{u_i^{k+1} - \tilde{u}_i}{h_t/2} &= \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2} + \varphi_i^{k+1}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где \tilde{u}_i - значение решения во вспомогательном узле.

Если умножить каждое из уравнений (4.12) на число 0,5 и сложить, а также дописать начальное и граничные условия, то получим схему Кранка-Николсона:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = \frac{1}{2}(\Lambda_x^h u_i^{k+1} + \Lambda_x^h u_i^k) + \frac{1}{2}(\varphi_i^{k+1} + \varphi_i^k), & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \alpha^k; \quad u_I^k = \beta^k, & k = \overline{1, K}, \end{cases} \quad (4.13)$$

где $\Lambda_x^h u_i^k = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}$.

Эта схема является неявной и для расчёта решения следует использовать метод прогонки.

По аналогии с выводом схемы Кранка-Николсона можно получить схему более общего вида, если в качестве вспомогательного узла использовать узел $(x_i, t_k + \theta h_t)$, где $0 \leq \theta < 1$. Эта схема запишется так:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = (1-\theta)(\Lambda_x^h u_i^{k+1} + \varphi_i^{k+1}) + \\ \quad + \theta(\Lambda_x^h u_i^k + \varphi_i^k), & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \alpha^k; \quad u_I^k = \beta^k, & k = \overline{1, K}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Схему (4.14) называют *обобщенной неявной* или *схемой с весами*.

4.2 Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод используется для построения, как правило, линейных разностных схем в тех случаях, когда решение краевой задачи математической физики обладает высокой степенью гладкости.

Суть метода состоит в том, что разностная схема задаётся с точностью до конечного набора коэффициентов в соответствии с выбранным шаблоном. Далее, используя определение аппроксимации, ищется множество тех значений коэффициентов, которые обеспечивают желаемый порядок аппроксимации разностной схемы.

Проведем построение разностной схемы для следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \varphi(x), & x \in [0, l]; \\ u(0) = \alpha. \end{cases} \quad (4.15)$$

Зададимся целью построить разностную схему наивысшего порядка аппроксимации относительно шага дискретизации, используя шаблон, представленный на рисунке 4.4.



Рисунок 4.4 – Шаблон для построения разностной схемы

Запишем задачу (4.15) в операторной форме:

$$Lu = f,$$

$$\text{где } Lu = \begin{Bmatrix} L^1 u \\ L^2 u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ u|_{x=0} \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi(x) \\ \alpha \end{Bmatrix}.$$

Воспользуемся сеткой: $x_i = ih$, $i = \overline{0, I}$; $h = \frac{l}{I}$.

Для первого уравнения $L^1 u = f^1$ задачи (4.15) будем искать аппроксимирующее сеточное уравнение $L_h^1 u_h = f_h^1$ в виде, соответствующем заданному шаблону:

$$a_0 u_{i-1} + a_1 u_i + a_2 u_{i+1} = b_0 \varphi(x_{i-1}) + b_1 \varphi(x_i) + b_2 \varphi(x_{i+1}) \quad (4.16)$$

Во-первых, потребуем, чтобы правая часть сеточного уравнения (4.16) сходилась с измельчением сетки к правой части соответствующего дифференциального уравнения, т.е. $f_h^1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} f^1$:

$$\begin{aligned} \{f_h^1\}_{x_i} &= b_0 \varphi(x_{i-1}) + b_1 \varphi(x_i) + b_2 \varphi(x_{i+1}) = \\ &= b_0 \left(\varphi(x_i) - h\varphi'(x_i) + O(h^2) \right) + b_1 \varphi(x_i) + b_2 \left(\varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + O(h^2) \right) = \\ &= (b_0 + b_1 + b_2) \varphi(x_i) + O(h) = (b_0 + b_1 + b_2) \{f^1\}_{x_i} + O(h). \end{aligned}$$

Очевидно, что такая сходимость будет гарантирована, если выполнится условие

$$(b_0 + b_1 + b_2) = 1. \quad (4.17)$$

Во-вторых, воспользуемся определением аппроксимации и потребуем, чтобы невязка $\delta f_h^1|_{x_i} = \{L_h^1[u]_h - f_h^1\}_{x_i}$ обладала максимальным порядком относительно шага h . Запишем выражение для этой невязки

$$\begin{aligned} \delta f_h^1|_{x_i} = \{L_h^1[u]_h - f_h^1\}_{x_i} &= a_0 u(x_{i-1}) + a_1 u(x_i) + a_2 u(x_{i+1}) - \\ &- b_0 \varphi(x_{i-1}) - b_1 \varphi(x_i) - b_2 \varphi(x_{i+1}). \end{aligned}$$

Проведем разложение функций, входящих в выражение невязки, в точке x_i , используя формулу Тейлора, а также учтем, что в силу (4.15) справедливы равенства $\varphi(x_{i-1}) = u'(x_{i-1})$, $\varphi(x_{i+1}) = u'(x_{i+1})$. В результате получим:

$$\begin{aligned} \delta f_h^1|_{x_i} = \{L_h^1[u]_h - f_h^1\}_{x_i} &= a_0 \left\{ u - u'h + \frac{1}{2} u''h^2 - \frac{1}{6} u'''h^3 + \frac{1}{24} u^{(4)}h^4 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{120} u^{(5)}h^5 + O(h^6) \right\}_{x_i} + a_1 u(x_i) + a_2 \left\{ u + u'h + \frac{1}{2} u''h^2 + \frac{1}{6} u'''h^3 + \frac{1}{24} u^{(4)}h^4 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{1}{120} u^{(5)} h^5 + O(h^6) \right\}_{x_i} - b_0 \left\{ u' - u'' h + \frac{1}{2} u''' h^2 - \frac{1}{6} u^{(4)} h^3 + \frac{1}{24} u^{(5)} h^4 + O(h^5) \right\}_{x_i} - \\
& - b_1 u(x_i) - b_2 \left\{ u' + u'' h + \frac{1}{2} u''' h^2 + \frac{1}{6} u^{(4)} h^3 + \frac{1}{24} u^{(5)} h^4 + O(h^5) \right\}_{x_i}.
\end{aligned}$$

Теперь, приравнявая нулю коэффициенты при $u(x_i)$, $u'(x_i)$, $u''(x_i)$, $u'''(x_i)$ и $u^{(4)}(x_i)$, придем к следующей системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases}
a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\
h(-a_0 + a_2) - b_0 - b_1 - b_2 = 0, \\
\frac{h^2}{2}(a_0 + a_2) + (b_0 - b_2)h = 0, \\
\frac{h^2}{2}(a_0 + a_2) + (b_0 - b_2)h = 0, \\
(a_0 + a_2)\frac{h^4}{24} + (b_0 - b_2)\frac{h^3}{6} = 0.
\end{cases}$$

Добавляя уравнение (4.17) к последней системе, будем иметь замкнутую систему уравнений для отыскания неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases}
b_0 + b_1 + b_2 = 1, \\
-a_0 + a_2 = -\frac{1}{h}, \\
a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\
a_0 + a_2 = (-b_0 + b_2)\frac{2}{h}, \\
-a_0 + a_2 = (b_0 + b_2)\frac{3}{h}, \\
a_0 + a_2 = (-b_0 + b_2)\frac{4}{h}.
\end{cases}$$

Решив эту систему, получим следующие значения искомых коэффициентов:

$$\begin{cases} a_0 = -\frac{1}{2h}, & a_1 = 0, & a_2 = \frac{1}{2h}, \\ b_0 = \frac{1}{6}, & b_1 = \frac{4}{6}, & b_2 = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Тогда сеточное уравнение (4.16) примет вид:

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{\varphi(x_{i+1}) + 4\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1}))}{6}. \quad (4.18)$$

Выясним, каким порядком аппроксимации относительно шага h , обладает уравнение (4.18). Подставим найденные значения коэффициентов в выражение невязки $\delta f_h^1|_{x_i}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \delta f_h^1|_{x_i} &= \{L_h^1[u]_h - f_h^1\}_{x_i} = (-a_0 + a_2) \frac{h^5}{120} u^{(5)}(x_i) - \\ &- (b_0 + b_2) \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x_i) + O(h^5) = \frac{h^4}{120} u^{(5)}(x_i) - \frac{h^4}{72} u^{(4)}(x_i) + O(h^5). \end{aligned}$$

Легко заметить, что при условии $\frac{1}{120} u^{(5)}(x_i) - \frac{1}{72} u^{(4)}(x_i) \neq 0$, или

$$\varphi^{(4)}(x_i) - \frac{15}{9} \varphi^{(3)}(x_i) \neq 0, \quad \text{порядок аппроксимации будет четвертым. В}$$

противном случае - более высоким.

Второе сеточное соотношение $L_h^2 u_h = f_h^2$, аппроксимирующее начальное условие задачи (4.15), целесообразно задать в виде

$$u_0 = \alpha, \quad (4.19)$$

поскольку погрешность аппроксимации в этом случае будет равна нулю.

Заметим, что условия (4.19) недостаточно для расчета сеточного решения с помощью уравнения (4.18). Построим еще одно сеточное условие $L_h^3 u_h = f_h^3$, которое устранил замеченный недостаток. Зададим его в виде

$$u_1 = \beta(h), \quad (4.20)$$

где $\beta(h)$ - неизвестная функция. Будем искать эту функцию, требуя, чтобы условие (4.20) имело порядок аппроксимации не ниже четвертого. Запишем невязку

$$\begin{aligned} \delta f_h^3 \Big|_{x_1} &= \{L_h^3[u]_h - f_h^3\}_{x_1} = u(x_1) - \beta(h) = u(h) - \beta(h) = \\ &= u(0) + u'(0)h + \frac{1}{2}u''(0)h^2 + \frac{1}{6}u'''(0)h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(0)h^4 + O(h^5) - \beta(h) = \\ &= \alpha + \varphi(0)h + \frac{1}{2}\varphi'(0)h^2 + \frac{1}{6}\varphi''(0)h^3 + \frac{1}{24}\varphi'''(0)h^4 + O(h^5) - \beta(h). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\beta(h) = \alpha + \varphi(0)h + \frac{1}{2}\varphi'(0)h^2 + \frac{1}{6}\varphi''(0)h^3. \quad (4.21)$$

Тогда будем иметь: $\delta f_h^3 \Big|_{x_1} = \frac{1}{24}\varphi'''(0)h^4 + O(h^5)$, т.е. порядок аппроксимации условия (4.20) будет не ниже четвертого.

Записывая сеточные соотношения (4.18), (4.19) и (4.20) в виде единой системы, будем иметь следующую разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{\varphi(x_{i+1}) + 4\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1}))}{6}, \quad i = \overline{1, I-2}; \\ u_0 = \alpha; \\ u_1 = \alpha + \varphi(0)h + \frac{1}{2}\varphi'(0)h^2 + \frac{1}{6}\varphi''(0)h^3. \end{cases} \quad (4.22)$$

Эта схема аппроксимирует задачу (4.15) с четвертым порядком относительно шага h .

Для построения разностной схемы методом неопределенных коэффициентов можно воспользоваться следующим *планом* действий:

1 шаг. Задать шаблон, в соответствии с которым будет строиться аппроксимирующая разностная схема (шаблон задает структуру будущей схемы).

2 шаг. Задать разностную схему $L_h u_h = f_h$ с помощью, например, линейной комбинации значений сеточной функции u_h и правой части f_h в узлах шаблона.

3 шаг. Для нахождения коэффициентов линейной комбинации необходимо:

во-первых, обеспечить за счет наложения ограничений на выбор коэффициентов выполнение свойства сходимости сеточной функции f_h к функции f при измельчении сетки, т.е. потребовать выполнения условия $f_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} f$;

во-вторых, записать разложения по формуле Тейлора всех значений функции u , входящих в выражение для невязки $\delta f_h = \{L_h[u]_h - f_h\}$, в окрестности выбранного узла шаблона;

в-третьих, подставить полученные разложения в выражение для невязки $\delta f_h = \{L_h[u]_h - f_h\}$ и, приравнявая к нулю коэффициенты при значении функции u в выбранном узле, а также ее производных первого, второго и т.д. порядков, получить систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов линейной комбинации;

в-четвертых, решить систему и найти значения коэффициентов.

4 шаг. Определить порядки аппроксимации относительно шагов сетки, подставив найденные значения коэффициентов в выражение для погрешности аппроксимации $\|\delta f_h\|_{F_h}$ и выделив ненулевые слагаемые наименьших порядков относительно шагов сетки.

4.3 Интегро-интерполяционный метод

В задачах математической физики часто исходят из законов сохранения субстанции (энергии, массы и др.) в дифференциальной форме. Однако, дифференциальная форма может давать корректное описание процесса не всегда. Интегральная же форма лишена этого недостатка. Дифференциальные уравнения математической физики получаются так: рассматривают малый объем вещества и для него записывают закон сохранения, он имеет интегральную форму для этого объема. Если подынтегральное выражение будет содержать разрывные в некоторых точках функции, то интегральная форма все же будет корректной. Поскольку дифференциальная форма получена в предположении, что все функции, входящие в подынтегральное выражение непрерывны по переменной интегрирования, то эта форма, вообще говоря, не описывает физического процесса в точках разрыва. Следовательно, если для описания процесса используются разрывные функции, то для построения разностной схемы целесообразно исходить из интегральной формы закона сохранения. Известно [6], что формальное использование дифференциальной формы закона сохранения в указанном случае может приводить к так называемой «ложной сходимости», когда с измельчением сетки схема сходится, но не к решению задачи математической физики.

Разностные схемы, при построении которых использовались интегральные формы законов сохранения, называют консервативными. Консервативные схемы свободны от ложной сходимости [1, 2, 6].

Рассмотрим пример построения консервативной разностной схемы для следующей стационарной задачи теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u + \varphi(x) = 0, & 0 \leq x \leq l; \\ u(0) = \alpha; \\ u(1) = \beta. \end{cases} \quad (4.23)$$

Будем предполагать, что функции $k(x)$, $q(x)$ и $\varphi(x)$ - кусочно-непрерывны, причем $k(x) \geq a > 0$.

Для построения разностной схемы воспользуемся сеткой:

$$x_i = ih, \quad i = \overline{0, I}; \quad h = \frac{l}{I}.$$

Вернемся к интегральной форме уравнения баланса тепла. Для этого проинтегрируем уравнение теплопроводности в пределах от $x_{i-1/2}$ до $x_{i+1/2}$.

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u(x) + \varphi(x) \right) dx = \\ = \frac{\omega(x_{i-1/2}) - \omega(x_{i+1/2})}{h} - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) \cdot u(x) dx + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(x) dx = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $\omega(x) = -k(x) \frac{du}{dx}$ - поток тепла через сечение стержня, соответствующее значению x . Из физических соображений будем считать функции $u(x)$ и $\omega(x)$ непрерывными. Преобразуем выражения, входящие в уравнение (4.24).

Учитывая, что функция $u(x)$ непрерывна, а $q(x)$ интегрируема, можем записать следующее приближенное равенство:

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x) dx \cong u(x_i)q_i, \quad q_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx. \quad (4.25)$$

Используем обозначение

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(x) dx. \quad (4.26)$$

Далее, используя выражение для потока тепла и учитывая, что $k(x) \neq 0$, запишем равенство

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\omega(x)}{k(x)}.$$

Проинтегрировав последнее равенство в пределах от x_{i-1} до x_i , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{du}{dx} dx &= -\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\omega(x)}{k(x)} dx \quad \text{или иначе} \\ \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} &= -\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\omega(x)}{k(x)} dx. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Поскольку функция $\omega(x)$ непрерывна, а $k(x)$ интегрируема, причем $k(x) \geq a > 0$, то можем записать следующее приближенное равенство:

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\omega(x)}{k(x)} dx \cong \omega(x_{i-1/2}) \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}.$$

Из равенства (4.27) с учетом последнего приближенного равенства, получаем приближение $\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} \cong -\omega(x_{i-1/2}) \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$, откуда следует формула для значения $\omega(x_{i-1/2})$:

$$\omega(x_{i-1/2}) \cong -a_i \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}, \quad a_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1}. \quad (4.28)$$

Учтем в уравнении (4.24) выражения (4.25), (4.26), (4.28), а также добавим сеточные аналоги граничных условий. В результате получим следующую разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \left\{ a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right\} - q_i u_i + \varphi_i = 0, & i = \overline{1, I-1}; \\ u_0 = \alpha, & u_I = \beta. \end{cases} \quad (4.29)$$

Схема (4.29) получена на основе интегрального уравнения баланса тепла, а потому является консервативной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1..Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. 2-е изд. - М.: Научный мир, 2003.-316с.
- 2..Самарский А.А. Введение в численные методы: Учебное пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1987.-288 с.
- 3..Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы: введение в теорию: Учебное пособие. - М.: Наука, 1977. – 440 с.
- 4..Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - 3-е изд. – М.: Наука, 1989. – 536 с.
- 5..Самарский А.А. Теория разностных схем. - 3-е изд. - М.: Наука, 1989. – 616 с.
- 6..Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие для университетов. - М.: Наука, 1972. – 736 с.

4.4 Аппроксимация краевых условий

4.4.1 Аппроксимация граничных условий второго и третьего рода

Рассмотрим физический процесс, протекающий в тонкой круговой пластине, и описываемый следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \varphi(r, t), \quad 0 < r \leq R, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

Предположим, что на краю $r = R$ задано граничное условие третьего рода

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + bu \right)_{r=R} = \alpha(t). \quad (2)$$

При построении разностной схемы необходимо заменить все соотношения, составляющие краевую задачу, в том числе и граничные условия, их сеточными аналогами. Будем использовать равномерную по осям r и t сетку с узлами

$$(r_i, t_k), \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K},$$

$$\text{где } r_i = ih_r, \quad h_r = \frac{R}{I}; \quad t_k = kh_t, \quad h_t = \frac{T}{K}.$$

Очевидно, что для аппроксимации производной $\frac{\partial u}{\partial r}$, входящей в условие (2), мы можем на каждом временном слое использовать граничный узел (r_I, t_k) , а также те соседние с ним узлы, которые не выходят за пределы рассматриваемой сеточной области.

Например, можно воспользоваться «левой» разностной аппроксимацией

$$\frac{\partial u(r_I, t_k)}{\partial r} \approx \frac{u(r_I, t_k) - u(r_{I-1}, t_k)}{h_r}. \quad (3)$$

Тогда сеточный аналог условия (2) примет вид

$$\frac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_r} + bu_I^k = \alpha^k, \quad (4)$$

где $\alpha^k = \alpha(t_k)$.

Исследуем свойство аппроксимации сеточного условия (4), для чего запишем невязку

$$\delta f_h|_{r_I, t_k} = \{L_h[u]_k - f_h\}_{r_I, t_k} = \frac{u(r_I, t_k) - u(r_{I-1}, t_k)}{h_r} + bu(r_I, t_k) - \alpha(t_k). \quad (5)$$

Используем разложение

$$u(r_{I-1}, t_k) = \left\{ u - \frac{\partial u}{\partial r} h_r + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \frac{h_r^2}{2} + O(h_r^3) \right\}_{r_I, t_k}.$$

Тогда выражение для невязки примет следующий вид:

$$\delta f_h|_{r_I, t_k} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \frac{h_r}{2} + O(h_r^2) + bu - \alpha \right\}_{r_I, t_k} \quad (6)$$

Если в (6) учесть условие (2), то в результате получим

$$\delta f_h|_{r_I, t_k} = \left\{ -\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \frac{h_r}{2} + O(h_r^2) \right\}_{r_I, t_k}.$$

Видим, что сеточное соотношение (4) обладает первым порядком аппроксимации относительно шага h_r .

Если требуется построить схему более высокого, чем первый, порядка аппроксимации относительно h_r , то сеточное условие (4) не годится.

Конечно, в этом случае можно при построении сеточного граничного условия использовать не двухточечный, а трехточечный шаблон, и повысить порядок аппроксимации до второго. Но можно добиться желаемого в рамках двухточечного шаблона. Рассмотрим подход, изложенный, например, в [1, 2, 3].

Запишем сеточный аналог условия (2.31) в следующем виде:

$$\frac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_r} + bu_I^k = \alpha^k + S_I^k, \quad (7)$$

где S_I^k – неизвестная сеточная функция, которую будем искать, исходя из требования квадратичной аппроксимации.

Очевидно, что для условия (7) невязка может быть приведена к виду

$$\delta f_h|_{r_l, t_k} = \left\{ -\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \frac{h_r}{2} + O(h_r^2) \right\}_{r_l, t_k} - S_I^k.$$

Квадратичная аппроксимация будет обеспечена, если гарантировать выполнение условия

$$S_I^k = -\frac{\partial^2 u(r_l, t_k)}{\partial r^2} \cdot \frac{h_r}{2}. \quad (8)$$

Однако в этом условии фигурирует вторая производная от решения уравнения (1), которая неизвестна. Выразим эту производную из уравнения (1) и учтем ее в (8). В результате получим:

$$S_I^k = -\frac{h_r}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi(r, t) \right\}_{r_l, t_k}. \quad (9)$$

Используя условие (2), исключим из (9) производную $\frac{\partial u}{\partial r}$. Производную

$\frac{\partial u}{\partial t}|_{r_l, t_k}$ заменим на разностное отношение $\frac{u_I^k - u_I^{k-1}}{h_t}$, предполагая, что

строится неявная разностная схема.

В результате будем иметь

$$S_I^k = -\frac{h_r}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{u_I^k - u_I^{k-1}}{h_t} - \frac{1}{r_l} (bu_I^k - \alpha^k) - \frac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi_I^k \right\}_{r_l, t_k}. \quad (10)$$

С учетом (10) условие (7) примет следующий, окончательный вид:

$$\frac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_r} + bu_I^k = \alpha^k - \frac{h_r}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{u_I^k - u_I^{k-1}}{h_t} - \frac{1}{r_l} (bu_I^k - \alpha^k) - \frac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi_I^k \right\}_{r_l, t_k}. \quad (11)$$

Для условия (11) невязка имеет вид:

$$\delta f_h|_{r_l, t_k} = \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \cdot \frac{h_r^2}{6} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{h_r h_t}{4} + O(h_r^3) + O(h_r h_t^2) \right\}_{r_l, t_k},$$

то есть является квадратичной относительно параметров дискретизации h_r, h_t .

Отметим, что в случае построения явной аппроксимирующей схемы необходимо в формуле (9) заменить производную $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{r_I, t_k}$ на следующее разностное соотношение $\frac{u_I^{k+1} - u_I^k}{h_t}$.

На этапе алгоритмизации удобно записать граничное условие (11) в виде, разрешенном относительно разностного отношения $\frac{u_I^k - u_I^{k-1}}{h_t}$, то есть

$$\frac{u_I^k - u_I^{k-1}}{h_t} = 2a^2 \frac{u_{I-1}^k - u_I^k}{h_r^2} - a^2 \left(\frac{2}{h_r} + \frac{1}{r_I} \right) (bu_I^k - \alpha^k) + \phi_I^k \quad (12)$$

Уравнение (12) по форме похоже на разностное уравнение простейшей неявной схемы, записанное для (1).

Аппроксимация граничного условия второго рода легко получается из (11), если положить $b = 0$.

Если для описания физического процесса вместо полярной системы координат используется декартова, цилиндрическая или сферическая система координат, то задача аппроксимации граничного условия второго или третьего рода решается аналогично.

4.4.2 Аппроксимация начальных условий для волнового уравнения

Рассмотрим процесс поперечных колебаний тонкой струны с жестко закрепленными концами $x = 0$, $x = l$, описываемый следующей краевой задачей:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), & 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T; \\ u|_{t=0} = \psi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \eta(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (13)$$

где $u = u(x, t)$ – функция поперечных перемещений струны;
 $\varphi(x, t)$ – линейная плотность вынуждающей поперечной силы, непрерывно
 распределенной по струне;

$\psi(x), \eta(x)$ – функции начальных перемещений и начальных скоростей
 соответственно, $\psi(0) = \psi(l) = 0, \eta(0) = \eta(l) = 0$.

Рассмотрим вопрос о построении разностной схемы, аппроксимирующей
 задачу (13).

Будем использовать равномерную по осям x и t сетку с узлами

$$(x_i, t_k), \quad i = \overline{0, I}; \quad k = \overline{0, K}, \quad \text{где} \quad x_i = ih_x, \quad t_k = kh_t, \quad h_x = l/I, \quad h_t = T/K.$$

Предположим, что решение $u(x, t)$ задачи (13) является достаточно
 гладким для корректности последующих выкладок.

Воспользовавшись для аппроксимации производных $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
 приближениями вида

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial t^2} \approx \frac{u(x_i, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i, t_{k-1}))}{h_t^2},$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2},$$

получим сеточное уравнение, которое аппроксимирует соответствующее
 дифференциальное со вторыми порядками относительно шагов h_x и h_t :

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{h_t^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} + \varphi_i^k, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K-1},$$

где $\varphi_i^k = \varphi(x_i, t_k)$.

Граничные условия задачи (13) естественно заменить следующими
 сеточными аналогами, обладающими точной аппроксимацией:

$$u_0^{k+1} = 0, \quad u_I^{k+1} = 0, \quad k = \overline{1, K-1}.$$

Очевидно, что решение u_i^{k+1} для $k = \overline{1, K-1}$ можно рассчитать по следующей явной формуле:

$$u_i^{k+1} = 2u_i^k - u_i^{k-1} + \gamma(u_{i+1}^k - 2u_i^k - u_{i-1}^k) + h_t^2 \varphi_i^k, \quad (14)$$

где $\gamma = a^2 h_t^2 / h_x^2$, $i = \overline{1, 2, \dots, K-1}$.

Для начала вычислений по формуле (14) нужно иметь значения u_i^0 и u_i^1 при $i = \overline{0, I}$. Простейшая аппроксимация первого начального условия системы (13) дает

$$u_i^0 = \psi(x_i), \quad i = \overline{0, I}.$$

Теперь остановимся на аппроксимации второго начального условия.

Используя «правую» разностную аппроксимацию производной $\frac{\partial u}{\partial t}$, получим следующий сеточный аналог второго начального условия:

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{h_t} = \eta_i, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad (15)$$

где $\eta_i = \eta(x_i)$.

Легко проверить, что условие (15) обладает лишь первым порядком аппроксимации относительно шага h_t .

Для повышения порядка аппроксимации до второго, запишем условие (15) в виде

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{h_t} = \eta_i + P_i, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad (16)$$

где P_i – неизвестная сеточная функция.

Запишем невязку для условия (16):

$$\begin{aligned} \delta_h^3 \Big|_{x_i, t_0} &= \left\{ L_h^3 [u]_h - f_h^3 \right\}_{x_i, t_0} = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, t_0)}{h_t} - \eta_i - P_i = \\ &= \frac{1}{h_t} \left(u(x_i, t_0) + \frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t} h_t + \frac{\partial^2 u(x_i, t_0)}{\partial t^2} \cdot \frac{h_t^2}{2} + O(h_t^3) - u(x_i, t_0) \right) - \eta_i - P_i = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x_i, t_0)}{\partial t^2} \cdot \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \eta_i - P_i = \frac{\partial^2 u(x_i, t_0)}{\partial t^2} \cdot \frac{h_t}{2} - P_i + O(h_t^2).$$

Видим, что при выполнении условия

$$P_i = \frac{\partial^2 u(x_i, t_0)}{\partial t^2} \cdot \frac{h_t}{2} \quad (17)$$

невязка δf_h^3 будет квадратичной относительно h_t . В условии (17) фигурирует вторая производная по времени от решения краевой задачи (13), которая в силу первого уравнения системы (13) может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_0)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_0)}{\partial x^2} + \varphi_i^0, \quad \text{где} \quad \varphi_i^0 = \varphi(x_i, t_0). \quad (18)$$

Теперь воспользуемся первым начальным условием задачи (13):

$$u(x, t_0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq l.$$

Если функция $\psi(x)$ является дважды дифференцируемой, то можно записать

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x_i)}{\partial x^2} \quad (19)$$

С учетом формул (18) и (19) выражение (17) примет вид:

$$P_i = \left(a^2 \frac{\partial^2 \psi(x_i)}{\partial x^2} + \varphi_i^0 \right) \cdot \frac{h_t}{2}, \quad i = \overline{1, I-1}. \quad (20)$$

Итак, для получения разностной схемы, обладающей квадратичной аппроксимацией относительно параметров h_t и h_x , можно воспользоваться следующим сеточным аналогом второго начального условия:

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{h_t} = \eta_i + \left(a^2 \frac{\partial^2 \psi(x_i)}{\partial x^2} + \varphi_i^0 \right) \cdot \frac{h_t}{2}, \quad i = \overline{1, I-1}.$$

Если функция $\psi(x)$ задается таблицей значений $\psi(x_i) = \psi_i$, $i = \overline{0, I}$, тогда вместо выражения (20) воспользуемся следующим:

$$P_i = \left(a^2 \frac{\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}}{h_x^2} + \varphi_i^0 \right) \cdot \frac{h_t}{2}, \quad i = \overline{1, I-1} \quad (21)$$

Запишем невязку δf_h^3 для условия (16), полагая, что P_i определяется формулой (21):

$$\begin{aligned} \delta f_h^3 \Big|_{x_i, t_0} &= \frac{\partial^2 u(x_i, t_0)}{\partial t^2} \cdot \frac{h_t}{2} - \left(a^2 \frac{u(x_{i+1}, t_0) - 2u(x_i, t_0) + u(x_{i-1}, t_0)}{h_x^2} + \varphi_i^0 \right) \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a^2 h_x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - O(h_x^4) - \varphi \right) \Big|_{x_i, t_0} \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) = O(h_t^2) + O(h_t h_x^2). \end{aligned}$$

Видим, что невязка $\delta f_h^3 \Big|_{x_i, t_0}$ обладает порядками не ниже второго относительно шагов h_t и h_x . Однако для справедливости этого результата необходимо, чтобы функция $\psi(x)$ обладала достаточной степенью гладкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. 2-е изд. - М.: Научный мир, 2003.-316с.
2. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы: введение в теорию: Учебное пособие. - М.: Наука, 1977. – 440 с.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский В.И., Вычислительные методы: Т.2. - М.: Наука, 1985. – 400 с.

5 Исследование устойчивости разностных схем

5.1 Исследование устойчивости на основе определения

Проведем исследование устойчивости простейшей явной схемы (4.6) для равномерных сеток. Поскольку эта схема линейна, то для простоты будем опускать символ δ при обозначении возмущений правых частей и решения, т.е. вместо обозначений $\delta\varphi_i^k$, $\delta\psi_i$, $\delta\alpha^k$, $\delta\beta^k$ и δu_i^k будем писать φ_i^k , ψ_i , α^k , β^k и u_i^k . Тогда задача относительно возмущений будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \alpha^k; \quad u_I^k = \beta^k, & k = \overline{1, K}, \end{cases} \quad (5.1)$$

который внешне не отличается от вида схемы (4.6).

Определим нормы в пространствах U_h и F_h следующим образом:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{1, K}}} |u_i^k|, \quad (5.2)$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \max \left\{ \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{0, K-1}}} |\varphi_i^k|, \max_{i=\overline{0, I}} |\psi_i|, \max_{k=\overline{1, K}} |\alpha^k|, \max_{k=\overline{1, K}} |\beta^k| \right\}. \quad (5.3)$$

Рассматриваемая схема линейна, поэтому воспользуемся вторым определением устойчивости, приведенным в параграфе 3.3. В соответствии с определением нужно доказать, что для произвольно выбранных возмущений φ_i^k , ψ_i , α^k , β^k и для достаточно мелких сеток справедливы следующие условия:

во-первых, решение задачи (5.1) существует и единственно;

во-вторых, имеет место неравенство

$$\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}, \quad (5.4)$$

где f_h – возмущение правой части операторной формы задачи (5.1);

u_h – отклик решения на это возмущение;

C – некоторая положительна константа, не зависящая от шагов сетки и возмущений правых частей.

Вопрос о существовании и единственности решения задачи (5.1) при любом выборе правых частей тривиален, поскольку это решение всегда может быть рассчитано по явной формуле.

Тогда для доказательства устойчивости схемы осталось убедиться в справедливости неравенства (5.4).

Запишем первое уравнение из системы (5.1) в виде:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{h_t}{h_x^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + h_t \varphi_i^k, \quad i = \overline{1, I-1}; \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Используя обозначение $\gamma = \frac{h_t}{h_x^2}$, перепишем последнее уравнение так

$$u_i^{k+1} = (1 - 2\gamma)u_i^k + \gamma(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) + h_t \varphi_i^k, \quad i = \overline{1, I-1}; \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (5.5)$$

После применения неравенства треугольника, будем иметь:

$$|u_i^{k+1}| \leq |1 - 2\gamma| |u_i^k| + \gamma(|u_{i+1}^k| + |u_{i-1}^k|) + h_t |\varphi_i^k|. \quad (5.6)$$

Воспользуемся следующими очевидными оценками:

$$|u_i^k| \leq \max_{j=0, I} \{ |u_j^k| \}, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K}; \quad |\varphi_i^k| \leq \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Тогда от неравенства (5.6) придем к неравенству

$$|u_i^{k+1}| \leq |1 - 2\gamma| \max_{j=0, I} \{ |u_j^k| \} + 2\gamma \max_{j=0, I} \{ |u_j^k| \} + h_t \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

С целью упрощений, потребуем, чтобы выполнялось условие $1 - 2\gamma \geq 0$,

или

$$\gamma = \frac{h_t}{h_x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (5.7)$$

В результате получим следующее простое рекуррентное неравенство:

$$|u_i^{k+1}| \leq \max_{j=0, I} \{ |u_j^k| \} + h_t \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (5.8)$$

Теперь запишем неравенство (5.8) при конкретных значениях индекса k .

Пусть $k = 0$. Тогда с учетом начального условия задачи (5.1) будем иметь:

$$|u_i^1| \leq \max_{j=0, I} \{\psi_j\} + h_t \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}.$$

Если в последнем неравенстве учесть оценку $\max_{j=1, I} \{\psi_j\} \leq \|f_h\|_{F_h}$, то придем к неравенству

$$|u_i^1| \leq (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}. \quad (5.9)$$

Зададим $k = 1$. То неравенство (5.8) примет следующий вид:

$$|u_i^2| \leq \max_{j=0, I} \{u_j^1\} + h_t \|f_h\|_{F_h} = \max \left\{ \max_{j=1, I-1} (|u_j^1|), |\alpha^1|, |\beta^1| \right\} + h_t \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}. \quad (5.10)$$

Используем в неравенстве (5.10) оценку (5.9), а также учтем, что $|\alpha^1| < (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h}$ и $|\beta^1| < (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h}$. В результате получим оценку

$$|u_i^2| \leq (1 + 2h_t) \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}. \quad (5.11)$$

Нетрудно догадаться, что последовательно перебирая все значения $k = \overline{2, K-1}$, мы в конце концов получим оценку

$$|u_i^K| \leq (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}. \quad (5.12)$$

Теперь, используя неравенства (5.9), (5.11) и (5.12) оценим норму $\|u_h\|_{U_h}$:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=1, I-1 \\ k=1, K}} |u_i^k| \leq \max_{\substack{i=1, I-1 \\ k=1, K}} (1 + kh_t) \|f_h\|_{F_h} = \max_{k=1, K} (1 + kh_t) \|f_h\|_{F_h} = (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h}.$$

Из определения сетки (4.2) следует, что $Kh_t = T$. Тогда последнее неравенство предстанет в виде

$$\|u_h\|_{U_h} \leq (1 + T) \|f_h\|_{F_h},$$

где величина $1 + T$ является постоянной, не зависящей от шагов сетки h_x , h_t и возмущения f_h .

Итак, неравенство (5.4) доказано с константой $C = 1 + T$ и, следовательно, явная схема (4.6) является устойчивой.

Теперь покажем, что эта схема неустойчива, если $\gamma > \frac{1}{2}$.

Для доказательства неустойчивости выберем частный случай возмущения правой части f_h , а именно:

$$\varphi_i^k = 0, \quad i = \overline{1, I-1}; \quad \psi_i = \varepsilon(-1)^i, \quad i = \overline{0, I}, \quad \varepsilon > 0;$$

$$\alpha^k = \varepsilon; \quad \beta^k = \varepsilon(-1)^I \text{ при всех } k \geq 0.$$

Покажем, что при таком выборе возмущения правой части невозможно указать константу $C > 0$, обеспечивающую выполнение неравенства (5.4) для любых сколь угодно мелких сеток.

Используя уравнение (5.5), найдем выражение для отклика решения u_i^k на выбранные возмущения.

При $k = 0$ будем иметь:

$$\begin{aligned} u_i^1 &= (1 - 2\gamma)u_i^0 + \gamma(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) + 0 = (1 - 2\gamma)(-1)^i \varepsilon + \gamma(\varepsilon(-1)^{i+1} + \varepsilon(-1)^{i-1}) = \\ &= (1 - 2\gamma)(-1)^i \varepsilon - 2\gamma(-1)^i \varepsilon = (1 - 4\gamma)(-1)^i \varepsilon = (1 - 4\gamma)\psi_i. \end{aligned}$$

При $k = 1$:

$$u_i^2 = (1 - 2\gamma)u_i^1 + \gamma(u_{i+1}^1 + u_{i-1}^1) + 0 = (1 - 4\gamma)^2 \psi_i.$$

Задавая $k = 2, 3, \dots, K - 1$, в итоге получим следующее равенство:

$$u_i^k = (1 - 4\gamma)^k \psi_i, \quad k = \overline{1, K}.$$

Теперь получим выражение для нормы $\|u_h\|_{U_h}$:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{1, K}}} |u_i^k| = \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{1, K}}} |(1 - 4\gamma)^k \psi_i| = |1 - 4\gamma|^K \varepsilon. \quad (5.13)$$

Учтем, что для выбранного частного случая возмущения правой части f_h справедливо равенство $\|f_h\|_{F_h} = \varepsilon$. Тогда равенство (5.13) можно записать в виде:

$$\|u_h\|_{U_h} = |1 - 4\gamma|^K \|f_h\|_{F_h}.$$

Для завершения доказательства неустойчивости схемы проанализируем выражение $|1 - 4\gamma|^K$. Поскольку мы предположили, что $\gamma > \frac{1}{2}$, то справедливо неравенство $1 - 4\gamma < -1$ и, следовательно, верно неравенство

$$|1 - 4\gamma| > 1.$$

Тогда выражение $|1 - 4\gamma|^K = |1 - 4\gamma|^{\frac{T}{h}}$ будет сколь угодно возрастать при стремлении мелкости сетки к нулю, т.е. его невозможно ограничить сверху какой-либо константой C , что фактически и доказывает неустойчивость явной схемы при невыполнении условия (5.6).

Поскольку явная схема (4.6) является устойчивой лишь при соблюдении условия (5.6), то ее называют *условно устойчивой*.

Теперь проведем исследование устойчивости простейшей неявной схемы (4.7).

Запишем задачу относительно возмущений:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2} + \varphi_i^{k+1}, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \alpha^k; \quad u_I^k = \beta^k, & k = \overline{1, K}, \end{cases} \quad (5.14)$$

где φ_i^k , ψ_i , α^k , β^k - возмущения правых частей сеточных соотношений; u_i^k - возмущение решения задачи (4.7), вызванное вышеуказанными возмущениями правых частей.

В параграфе 4.1 (см. тему «Построение аппроксимирующих разностных схем») было отмечено, что задача (5.14) представляет собой систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей. Решение этой системы существует и

единственно при произвольных правых частях φ_i^k , ψ_i , α^k , β^k и может быть получено прогонкой.

Следовательно, для доказательства устойчивости неявной схемы осталось убедиться в справедливости неравенства (5.4). При доказательстве будем использовать нормы (5.2) и (5.3).

Перепишем уравнение системы (5.14) в следующем виде:

$$(1 + 2\gamma)u_i^{k+1} = u_i^k + \gamma(u_{i+1}^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) + h_t \varphi_i^{k+1}, \quad i = \overline{1, I-1}; \quad k = \overline{0, K-1},$$

где $\gamma = \frac{h_t}{h_x^2}$. После применения неравенства треугольника будем иметь

$$(1 + 2\gamma)|u_i^{k+1}| \leq |u_i^k| + \gamma(|u_{i+1}^{k+1}| + |u_{i-1}^{k+1}|) + h_t |\varphi_i^{k+1}|, \quad i = \overline{1, I-1}; \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Далее воспользуемся следующими оценками:

$$|u_i^{k+1}| \leq \max \left\{ \max_{j=\overline{1, I-1}} |u_j^{k+1}|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\}, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K-1};$$

$$|u_i^k| \leq \max \left\{ \max_{j=\overline{1, I-1}} |u_j^k|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1};$$

$$|\varphi_i^{k+1}| \leq \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

В результате получим неравенство

$$(1 + 2\gamma)|u_i^{k+1}| \leq \max \left\{ \max_{j=\overline{1, I-1}} |u_j^k|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\} + 2\gamma \max \left\{ \max_{j=\overline{1, I-1}} |u_j^{k+1}|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\} + h_t \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}; \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Поскольку правая часть этого неравенства не зависит от значения индекса i , то в левой части можно записать максимальное значение по i :

$$(1 + 2\gamma) \max_{i=\overline{1, I-1}} |u_i^{k+1}| \leq \max \left\{ \max_{j=\overline{1, I-1}} |u_j^k|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\} + 2\gamma \max \left\{ \max_{j=\overline{1, I-1}} |u_j^{k+1}|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\} + h_t \|f_h\|_{F_h}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (5.15)$$

Запишем следующее очевидное неравенство:

$$(1 + 2\gamma) \max \left\{ |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\} \leq \max \left\{ \max_{j=1, I-1} |u_j^k|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\} + 2\gamma \max \left\{ \max_{j=1, I-1} |u_j^{k+1}|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\} + h_t \|f_h\|_{F_h}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (5.16)$$

Объединяя неравенства (5.15) и (5.16), получим

$$(1 + 2\gamma) \max \left\{ \max_{j=1, I-1} |u_j^{k+1}|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\} \leq \max \left\{ \max_{j=1, I-1} |u_j^k|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\} + 2\gamma \max \left\{ \max_{j=1, I-1} |u_j^{k+1}|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\} + h_t \|f_h\|_{F_h}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

После упрощений последнее неравенство примет вид

$$\max_{j=1, I-1} |u_j^{k+1}| \leq \max \left\{ \max_{j=1, I-1} |u_j^k|, |\alpha^{k+1}|, |\beta^{k+1}| \right\} + h_t \|f_h\|_{F_h}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (5.17)$$

Теперь запишем неравенство (5.17) при $k=0$ и учтем начальное условие задачи (5.14). В результате будем иметь:

$$\max_{j=1, I-1} |u_j^1| \leq \max \left\{ \max_{j=1, I-1} |\psi_j|, |\alpha^1|, |\beta^1| \right\} + h_t \|f_h\|_{F_h}.$$

Но поскольку $\max \left\{ \max_{j=1, I-1} |\psi_j|, |\alpha^1|, |\beta^1| \right\} \leq \|f_h\|_{F_h}$, то из последнего неравенства получим

$$\max_{j=1, I-1} |u_j^1| \leq (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h}. \quad (5.18)$$

Если записать неравенство (5.17) при $k=1$ и учесть оценку (5.18), то легко приходим к оценке

$$\max_{j=1, I-1} |u_j^2| \leq (1 + 2h_t) \|f_h\|_{F_h}. \quad (5.19)$$

Действуя аналогично, в конце концов, получим оценку

$$\max_{j=1, I-1} |u_j^K| \leq (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h}. \quad (5.20)$$

Используя определение нормы $\|u_h\|_{U_h}$ и неравенства (5.18) - (5.20), можем записать:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{i=1, I-1} |u_i^K| \leq (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h} = (1 + T) \|f_h\|_{F_h}.$$

Итак, фактически доказано неравенство (5.4) с константой $C = 1 + T$ и, следовательно, неявная схема (4.7) является устойчивой. При доказательстве устойчивости не использовались какие-либо условия или ограничения на выбор шагов дискретизации, поэтому неявную схему называют **абсолютно устойчивой**.

5.2 Необходимый признак Неймана

Этот признак строго доказывается для двухслойных линейных разностных задач Коши с постоянным оператором:

$$\begin{cases} u_i^{k+1} = R_h u_i^k + h_t \varphi_i^k, & i = 0, \pm 1, \dots \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = 0, \pm 1, \dots \end{cases} \quad (5.21)$$

Однако этот метод используется и для исследования устойчивости краевых задач. Если условия признака Неймана не выполняются, то делается вывод, о неустойчивости схемы.

В схеме (5.21) R_h - линейный постоянный оператор (т.е. коэффициенты, входящие в описание оператора, не зависят от узлов сетки).

Поскольку признак Неймана является необходимым, то для получения условий устойчивости следует предположить, что схема является устойчивой.

Если схема устойчива, то $\forall h < h_0$ и $\forall f \in F_h$ справедливо неравенство

$$\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}, \quad (5.22)$$

где $h = \max\{h_x, h_t\}$ - мелкость сетки.

Т.к. возмущения правых частей в схеме (5.21) могут быть любыми, то выберем их следующим образом: $\varphi_i^k = 0$, $\psi_i = \mathcal{G}_i$, где \mathcal{G}_i - некоторая собственная функция оператора R_h . Очевидно, что при таком выборе возмущений справедливо равенство

$$\|f_h\|_{F_h} = \max_{i=0, \pm 1, \dots} |\mathcal{G}_i|.$$

Найдем выражение для собственной функции \mathcal{G}_i . Рассмотрим спектральное уравнение для оператора R :

$$R_h \mathcal{G}_i = \lambda \mathcal{G}_i, \quad i = 0, \pm 1, \dots \quad (5.23)$$

Уравнение $(R_h - \lambda)\mathcal{G}_i = 0$ является разностным некоторого порядка r , следовательно, всякое ненулевое ограниченное решение этого уравнения имеет вид $\mathcal{G}_i = \mu^i$, где $\mu_i \neq 0$ - характеристическое число (корень характеристического уравнения). Заметим, что во-первых, μ - простое характеристическое число, т.к. в случае кратного характеристического числа наряду с указанным решением уравнение (5.23) будет иметь еще и такое решение $\mathcal{G}_i = i\mu^i$, которое неограниченно возрастает при $i \rightarrow +\infty$ или при $i \rightarrow -\infty$. Во-вторых, $|\mu| = 1$ - иначе функция \mathcal{G}_i будет также неограниченно возрастать при $i \rightarrow +\infty$ или при $i \rightarrow -\infty$.

Поскольку комплексное число μ обладает свойством $|\mu| = 1$, то его можно представить в виде $\mu = e^{q\alpha}$, где q - мнимая единица, а α - аргумент этого числа.

Тогда решение уравнения (5.23) может быть записано в виде

$$\mathcal{G}_i = e^{q\alpha i}. \quad (5.24)$$

Теперь получим формулу для решения задачи Коши (5.21). Поскольку \mathcal{G}_i - собственная функция оператора R_h , то имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} u_i^1 &= R_h u_i^0 = \lambda \mathcal{G}_i, \\ u_i^2 &= R_h u_i^1 = R_h(\lambda \mathcal{G}_i) = \lambda R_h(\mathcal{G}_i) = \lambda^2 \mathcal{G}_i, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_i^k &= R_h u_i^{k-1} = R_h(\lambda^{k-1} \mathcal{G}_i) = \lambda^k \mathcal{G}_i, \quad k = 3, \dots, K. \end{aligned}$$

Если в последней формуле учесть выражение (5.24) для собственной функции \mathcal{G}_i , то придем к следующей форме решения для задачи (5.21):

$$u_i^k = \lambda^k e^{q\alpha i} \quad (5.25)$$

Для отыскания собственного числа λ можно подставить формулу (5.25) в уравнение (5.21). В результате будем иметь:

$$\lambda^{k+1} e^{q\alpha i} = R \lambda^k e^{q\alpha i} \quad \text{или} \quad \lambda(\alpha) = e^{-q\alpha i} (R_h e^{q\alpha i}).$$

В последней записи отмечено, что собственное число $\lambda(\alpha)$ зависит от параметра α .

Для получения условия Неймана найдём норму:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=0,\pm 1,\dots \\ k=1,K}} |u_i^k| = \max_{\substack{i=0,\pm 1,\dots \\ k=1,K}} |\lambda^k e^{q\alpha i}| = \max_{k=1,K} |\lambda^k(\alpha)| = \max_{k=1,K} |\lambda(\alpha)|^k \|f_h\|_{F_h}. \quad (5.26)$$

Поскольку схема (5.21) устойчива по предположению, то для выбранного возмущения $f_h = \{\varphi_i^k = 0, \psi_i = \mathcal{G}_i\}$ справедливо неравенство (5.22). Сопоставляя равенство (5.26) и неравенство (5.22), приходим к следующему неравенству, справедливому для всех значений параметра α :

$$\max_{k=1,K} |\lambda(\alpha)|^k \leq C. \quad (5.27)$$

Но тогда можно утверждать, что существуют такие константы $C_1 > 0$ и $h_1 > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_1$ и для любых значений спектрального параметра α справедливо неравенство:

$$|\lambda(\alpha)| \leq 1 + C_1 h_t \quad (5.28)$$

Докажем справедливость последнего неравенства. Предположим, что для любых $C_1 > 0$ и $h_1 > 0$ найдутся сетка мелкостью $h < h_1$ и значение α такие, что будет справедливо неравенство

$$|\lambda(\alpha)| > 1 + C_1 h_t. \quad (5.29)$$

Но тогда будет верно неравенство $|\lambda(\alpha)|^k > (1 + C_1 h_t)^k$, а следовательно и неравенство $\max_{k=1,K} |\lambda(\alpha)|^k > (1 + C_1 h_t)^K$.

Учтем, что $h_t = \frac{T}{K}$, тогда будем иметь

$$\max_{k=1,K} |\lambda(\alpha)|^k > (1 + C_1 h_t)^{\frac{T}{h_t}} = \left[(1 + \eta)^{\frac{1}{\eta}} \right]^{TC_1},$$

где $\eta = C_1 h_t$. Поскольку h_t выбирается произвольно, то всегда можно обеспечить выполнение условия $h_t C_1 < 1$. В силу предположения мелкость сетки удовлетворяет неравенству $h < h_t$, но тогда тем более будет верно неравенство для шага по времени $h_t < h_t$. Итак, при указанном выборе числа h_t будет справедливо неравенство $\eta < 1$, следовательно, можно утверждать, что $(1 + \eta)^{\frac{1}{\eta}} > 2$. В результате будем иметь

$$\max_{k=1, \overline{K}} |\lambda(\alpha)|^k > \left[(1 + \eta)^{\frac{1}{\eta}} \right]^{TC_1} > 2^{TC_1}.$$

Если учесть, что число C_1 выбирается произвольно, то правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно большой, следовательно, левую часть невозможно ограничить сверху каким либо числом сразу для всех α .

Но этот вывод противоречит предположению о справедливости неравенства (5.29).

Итак, мы пришли к следующему утверждению.

Теорема (Необходимый признак Неймана).

Для устойчивости двухслойной разностной задачи Коши (5.21) с линейным постоянным оператором перехода R_h необходимо, чтобы существовали такие постоянные $C_1 > 0$ и $h_1 > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_1$ и для любых значений параметра α было справедливо неравенство (5.27).

Таким образом, в соответствии с признаком Неймана для устойчивой задачи Коши (5.21) спектр $\lambda(\alpha)$ должен находиться на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса, или может выйти за пределы этого круга, но на расстояние не более чем $C_1 h_t$.

Следовательно, если для некоторой разностной задачи Коши вида (5.21) спектр $\lambda(\alpha)$ не удовлетворяет условию (5.27), то эта задача неустойчива.

6 Применение конечных рядов Фурье для решения разностных краевых задач

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \varphi(x,t), & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T; \\ U(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l; \\ U(0,t) = U(l,t) = 0, & 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (6.1)$$

Граничные условия здесь взяты однородными, однако это не умаляет степень общности последующих результатов. Действительно, если граничные условия неоднородны, то есть

$$U(0,t) = \alpha(t) \quad \text{и} \quad U(l,t) = \beta(t),$$

то, используя замену переменной

$$U(x,t) = U(x,t) - \frac{x}{l} \beta(t) - \frac{l-x}{l} \alpha(t)$$

легко прийти к краевой задаче с однородными граничными условиями.

Запишем явную разностную схему, аппроксимирующую задачу (6.1).

$$\begin{cases} \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2} + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ U_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ U_0^k = U_I^k = 0, & k = \overline{1, K}, \end{cases} \quad (6.2)$$

где $h = \frac{l}{I}$, $\tau = \frac{T}{K}$.

Используя принцип суперпозиции, будем искать решение задачи (6.2) в виде

$$U_i^k = v_i^k + w_i^k, \quad (6.3)$$

где v_i^k и w_i^k - решения следующих задач:

$$\begin{cases} \frac{v_i^{k+1} - v_i^k}{\tau} = \frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{h^2}, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ v_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ v_0^k = v_I^k = 0, & k = \overline{1, K} \end{cases} \quad (6.4)$$

и

$$\begin{cases} \frac{w_i^{k+1} - w_i^k}{\tau} = \frac{w_{i+1}^k - 2w_i^k + w_{i-1}^k}{h^2} + \phi_i^k, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ w_i^0 = 0, & i = \overline{0, I}; \\ w_0^k = w_I^k = 0, & k = \overline{1, K}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении решения задач (6.4) и (6.5) в виде конечных рядов Фурье.

Сначала рассмотрим задачу (6.4). Перепишем уравнение этой задачи в виде

$$v_i^{k+1} = (E + \tau \Delta_x^h) v_i^k, \quad (6.6)$$

где E – единичный оператор, а Δ_x^h – оператор, определяемый равенством:

$$\Delta_x^h v_i^k = \frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{h^2}. \quad (6.7)$$

Учитывая рекурсивный характер уравнения (6.6), легко получить следующее выражения для решения задачи (6.4):

$$v_i^k = (E + \tau \Delta_x^h)^k \psi_i. \quad (6.8)$$

Известно, что ортонормированная система собственных функций оператора Δ_x^h , удовлетворяющих однородным граничным условиям, имеет следующий вид:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{I}} \sin \frac{s\pi i}{I}, \quad i = \overline{1, I-1} \right\}, \quad s = \overline{1, I-1}. \quad (6.9)$$

Система собственных чисел, отвечающая системе функций (6.9), определяется формулой

$$\lambda_s = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{s\pi}{2I}, \quad s = \overline{1, I-1}. \quad (6.10)$$

Легко показать, что для оператора

$$(E + \tau \Delta_x^h)^k \quad (6.11)$$

полная система собственных функций совпадает с системой (6.9), и соответствующая система собственных чисел выглядит так

$$\gamma_s^k = \left(1 - \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{s\pi}{2I} \right)^k. \quad (6.12)$$

Далее, для получения решения задачи (6.4), запишем разложение сеточной функции ψ_i по системе функций (6.9):

$$\psi_i = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{s=1}^{l-1} C_s \sin \frac{s\pi i}{l}, \quad i = \overline{1, l-1}, \quad (6.13)$$

где коэффициенты C_s определяются формулой

$$C_s = \sqrt{\frac{2}{l}} h \sum_{i=1}^{l-1} \psi_i \sin \frac{s\pi i}{l}, \quad s = \overline{1, l-1}. \quad (6.14)$$

Если подставить разложение (6.13) в формулу (6.8), то получим следующее выражение для решения задачи (6.4):

$$v_i^k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{s=1}^{l-1} C_s \gamma_s^k \sin \frac{s\pi i}{l}, \quad i = \overline{0, l}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (6.15)$$

где коэффициенты C_s определяются формулой (6.14), а числа γ_s^k - формулой (6.12).

Теперь рассмотрим задачу (6.5). Перепишем уравнение этой задачи в виде

$$w_i^{k+1} = (E + \tau \Delta_x^h) w_i^k + \varphi_i^k \quad (6.16)$$

Представим функцию φ_i^k конечным рядом Фурье по системе функций (6.9):

$$\varphi_i^k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{s=1}^{l-1} g_s^k \sin \frac{s\pi i}{l}, \quad s = \overline{1, l-1}; \quad k = \overline{0, k-1}. \quad (6.17)$$

где коэффициенты g_s^k определяются формулой

$$g_s^k = \sqrt{\frac{2}{l}} k \sum_{i=1}^{l-1} \varphi_i^k \sin \frac{s\pi i}{l}, \quad s = \overline{1, l-1}; \quad k = \overline{0, k-1}. \quad (6.18)$$

Будем искать решение задачи (6.5) в следующем виде:

$$w_i^k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{s=1}^{l-1} p_s^k \sin \frac{s\pi i}{l}, \quad i = \overline{1, l-1}; \quad k = \overline{1, K}. \quad (6.19)$$

Подставим разложения (6.17) и (6.19) в уравнение (6.16). В результате получим следующую рекуррентную формулу для расчета коэффициентов p_s^k :

$$p_s^{k+1} = \left(1 - \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{s\pi}{2I}\right) p_s^k + \tau g_s^k, \quad k = \overline{0, k-1}; \quad s = \overline{1, I-1}. \quad (6.20)$$

Из начального условия $w_i^0 = 0$ и разложения (6.19) вытекает равенство

$$p_s^0 = 0. \quad (6.21)$$

Итак, для расчета решения задачи (6.5) необходимо сначала вычислить коэффициенты g_s^k по формуле (6.18). Затем, используя коэффициенты g_s^k , следует рассчитать коэффициенты p_s^k по формулам (6.20) и (6.21). Наконец, решение задачи (6.5) следует вычислить по формуле (6.19).

Если функции v_i^k и w_i^k получены, то искомое решение задачи (6.2) можно вычислить по формуле (6.3).

Теперь обратимся ко 2-й краевой задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \varphi(x,t), & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T; \\ U(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l; \\ \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (6.22)$$

Запишем явную аппроксимирующую схему

$$\begin{cases} \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2} + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}; \quad k = \overline{0, K-1}; \\ \frac{U_0^{k+1} - U_0^k}{\tau} = 2 \frac{U_1^k - U_0^k}{h^2} + \varphi_0^k, \\ \frac{U_I^{k+1} - U_I^k}{\tau} = 2 \frac{U_{I-1}^k - U_I^k}{h^2} + \varphi_I^k, \\ U_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}. \end{cases} \quad (6.23)$$

Решение этой задачи в виде конечного ряда Фурье находится аналогично решению задачи (6.2) с тем отличием, что вместо синусного базиса следует использовать следующий косинусный:

$$\left\{ \rho_s \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{S\pi i}{I}, \quad i = \overline{0, I} \right\}, \quad S = \overline{0, I},$$

где

$$\rho_s = \begin{cases} 1, & s = \overline{1, I-1}; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & S = 0, I. \end{cases}$$

Следует отметить, что конечные ряды Фурье можно также использовать для решения гиперболических и эллиптических линейных краевых задач с постоянными коэффициентами в прямоугольных областях, как одномерных, так и многомерных.