

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

А. Г. Шляпугин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И ОБЪЕКТОВ ОМД

Электронный конспект лекций

Самара 2013

УДК 621.73.681.3

Ш 706

Автор: **Шляпугин Алексей Геннадьевич**

**Шляпугин, А. Г. Моделирование процессов и объектов ОМД [Электронный ресурс]:** электрон. конспект лекций / А. Г. Шляпугин; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т) - Электрон. текстовые и граф. дан. (0,57 Мбайт). - Самара, 2013.

Изучение основ моделирования процессов обработки металлов давлением является важной составляющей подготовки специалистов в области металлургического производства. Приведены основные сведения необходимые бакалаврам для успешного освоения дисциплины Моделирование процессов и объектов ОМД.

Лекции предназначены для студентов инженерно-технологического факультета, обучающихся по направлению подготовки 150400.62 «Металлургия», изучающих дисциплину «Моделирование процессов и объектов ОМД» в 7 семестре.

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ЛЕКЦИЯ № 1.....	5
ЛЕКЦИЯ № 2.....	9
ЛЕКЦИЯ № 3.....	18
ЛЕКЦИЯ № 4.....	24
ЛЕКЦИЯ № 5.....	32
ЛЕКЦИЯ №6.....	44
ЛЕКЦИЯ № 7.....	49
ЛЕКЦИЯ № 8.....	54
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	60
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	61

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение основ моделирования процессов обработки металлов давлением является важной составляющей подготовки специалистов в области металлургического производства.

На практике специалисты предприятий обладают следующими возможностями моделирования процессов и объектов металлургического производства:

- оценка эффективности показателей процесса по экспериментальным данным или за счет постановки эксперимента;
- аналитическое моделирование с использованием современных программных средств.

В лекционном материале как раз и приводятся основные сведения по данным возможностям.

## ЛЕКЦИЯ № 1

### Общие понятия и определения МТП

*Место технологии в жизни людей.* В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с выражением «технологический процесс» или «технология». Как правило, под этим понимается определенный ряд действий, направленных на получение какого-либо продукта. Термин технология употребляется в отношении процессов изготовления кондитерских изделий, деталей интерьера автомобиля, компьютера и т.д.

Для удобства технологический процесс делят на операции – ряд действий выполняемых с помощью одного оборудования или комплекта оснастки. В свою очередь операции состоят из переходов – отдельных действий.

На предприятиях авиационной промышленности мы сталкиваемся со следующими видами технологий: литье, ОМД, ТО, сварка, пайка, мех. обработка, аддитивные технологии. Рассмотрим эти процессы подробнее.

✓ Литье – процесс получения детали за счет перевода заготовки в жидкое (вязкое) состояние, осуществляют, как правило, за счет нагрева заготовки с последующим охлаждением заготовки в литейной форме. Другими словами для получения из заготовки детали необходимо изменить ее агрегатное состояние.

✓ Обработка металлов давлением (ОМД) – процесс перераспределения материала заготовки под воздействием деформирующего инструмента. В ходе ОМД всегда стремятся к тому, чтобы материал за меньшее количество переходов наиболее близко принял форму детали.

✓ Термическая обработка (ТО) – процесс изменения свойств детали, за счет осуществления превращений протекающих в материалах при нагреве.

✓ Сварка – процесс создания неразъемного соединения между частями детали, осуществляемый за счет непосредственного разогрева материала деталей до температуры плавления в зоне соединения с последующим затвердеванием (кристаллизацией).

✓ Пайка – процесс создания неразъемного соединения за счет соединения частей детали с помощью специального компонента, который для осуществления пайки переводят в жидкое состояние, а затем охлаждают на поверхностях частей будущих деталей.

✓ Механическая обработка – поэтапный процесс удаления части материала заготовки с образованием отхода (стружка, опилки и др.).

✓ Аддитивные технологии – технологии, обеспечивающие изготовление детали за счет поэтапного добавления материала. В привычном виде заготовки не существует, есть материалы части, которого за счет определенного воздействия (распыления, нагрева и пр.) придается определенная форма с последующей фиксацией этой части с созданной ранее. Аддитивные технологии по своей сути являются обратным процессом по отношению к механической обработке.

Как отмечалось выше в технологическом процессе участвуют заготовка и инструмент при этом, например, для процесса мех. обработки как правило используются заготовка, полученная литьем или ОМД с необходимой структурой полученной в ходе ТО. Для того чтобы получить заготовку для последующей обработки совершают – первый передел. Технологические процессы обеспечивают осуществление первичного передела: извлечение металлов из руд, их обогащение, литье, ОМД, ТО и др. относятся к металлургическим процессам, а отрасль промышленности, в которой они осуществляются, называется металлургия.

Технологические процессы литья, ОМД, ТО и пр. также широко применяются и в др. отраслях промышленности: авиационной, общем и тяжелом машиностроении, судостроении и пр.

Разработкой технологии занимается технолог-специалист, хорошо понимающий специфику протекающих в ходе обработки процессов. Технолог устанавливает количество и последовательность операций, выполняет эскизное проектирование оснастки, назначает режимы обработки заготовки. Свои рекомендации он оформляет в виде технологических и маршрутных карт, эскизов полученных деталей (изделий).

Проектированием оснастки занимается технолог-конструктор. Результатом его работы являются 3D-модели и чертежи оснастки, согласованные с технологом и службами (другими предприятиями) занимающимися изготовлением этой оснастки.

***Общие сведения о моделировании ТП.*** В своей деятельности конструкторам-технологам и технологам приходится сталкиваться с моделированием и моделями. В самом широком понимании модель – это упрощенное представление исследуемого объекта. Соответственно моделирование – это процесс создания и исследования модели. На основании исследования модели мы получаем информацию об интересующем нас объекте.

В связи с широким кругом использования существует огромное разнообразие моделей и их классификаций. Модели можно разделить на физические и абстрактные. Физические модели – это модели, выражающие своими физическими характеристиками свойства исследуемого объекта. Для исследования физической модели требуется проведение эксперимента или наличие накопленной статистической информации о поведении объекта исследования.

Абстрактные модели (модели спецификации) описывают поведение объекта исследования с помощью принятых обозначений (устных или письменных). Среди абстрактных моделей наиболее важными являются математические модели – записываются с помощью математических обозначений. Использование математических моделей не всегда удобно в связи с тем, что необходимо выполнять значительное количество математических операций в связи, с чем в настоящее время широкое распространение получили программы, реализованные на их основе. Другими словами компьютерная программа это электронный аналог математической модели, который обеспечивает более удобную работу.

Существующее многообразие программ можно разделить на несколько групп. Наиболее важные из них для конструкторов и технологов, это:

- CAD – системы проектирования трехмерных геометрических моделей и чертежей (Компас, NX, Catia и др.);
- CAE – системы инженерных расчетов – обеспечивают моделирование физических процессов, протекающих в твердых телах, потоках газов под воздействием электромагнитных и температурных полей. CAE – системы условно можно разделить на универсальные (Ansys, Abaqus) и технологические (Deform, Pam-Stamp, Pro-Cast). Технологические программы в отличие от универсальных созданы специально для решения узкого круга задач литья, ОМД, сварки и пр.
- CAM – системы технологической подготовки производства – программы, позволяющие упростить труд технологов и рабочих при осуществлении управления сложным производственным оборудованием с числовым программным управлением (ЧПУ). Фактически это программы, которые позволяют создать программы управления станками с ЧПУ.



## ЛЕКЦИЯ № 2

### Общие сведения о математических моделях, используемых для компьютерного моделирования

**Общие сведения о математических моделях (ММ).** Как отмечалось выше для осуществления компьютерного моделирования необходимо создать ММ. Рассмотрим подробно, что такое ММ и способы их создания. *Математическая модель* – это, записанный с помощью средств математики алгоритм вычисления вектора выходных параметров  $Y$  при заданных входных параметрах  $X$ . Под выходными параметрами выступают интересующие исследователя свойства, в качестве входных выступают свойства, на которые исследователь может повлиять.

Математические модели являются представлением физических или иных процессов, протекающих в объектах.

В самом простом случае структуру математической модели мы можем представить в следующем:

$$\begin{cases} Y = f(x, z) \\ x \leq X \end{cases},$$

где  $Y=f(x,z)$  – целевая функция,  $x \leq X$  – возможные ограничения,  $Y$  – результат действия системы;  $x, z$  – переменные и параметры;  $f$  – функциональная зависимость между параметрами и переменными определяющая величину  $Y$ . Данная система содержит одну целевую функцию и одно ограничение. В общем случае математическая модель может содержать несколько целевых функций и несколько ограничений.

Тогда любая математическая модель может содержать следующие составляющие:

- компоненты,

- переменные,
- параметры,
- функциональные зависимости,
- ограничения,
- целевые функции.

Под *компонентами* понимают составные части, образующие систему. В качестве компонентов могут выступать ограничения и целевые функции. Иногда под компонентами понимаются элементы системы или ее подсистемы. Например, если в качестве системы рассматривать технологический процесс, то компонентами этой системы будут отдельные операции. Полное количество компонентов участвующих в моделировании выбирается исследователем.

*Параметры* это величины, выбирающиеся произвольно в отличие от переменных, которые принимают только значения, определяемые видом используемой функции, т.е. параметры являются постоянными величинами, не подлежащими изменению. Например, в законе Гука (1.1):  $E$  является параметром постоянной величиной для заданного материала, а  $\sigma$  и  $\varepsilon$  — переменными.

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.1)$$

где  $\sigma$  – напряжения,  $E$  – модуль Юнга,  $\varepsilon$  – деформации.

Переменные могут быть двух видов - *внутренними* и *внешними*. *Внешние* переменные называют также входными, поскольку они являются результатом воздействия внешних причин. Переменные, возникающие в системе, называются *внутренними*. Они появляются в результате воздействия внутренних причин. Внутренние переменные могут быть переменными состояния, если они характеризуют состояние или условия, имеющие место в

системе или выходными переменными, если они описывают состояние на выходах системы.

*Функциональные* зависимости характеризуют переменные и параметры в пределах компонента или выражают соотношения между компонентами системы. Эти соотношения, могут быть различными по своей природе и используемому математическому аппарату. По природе исследуемого объекта соотношения могут быть *детерминированными*, или *стохастическими*. *Детерминированные* соотношения – это уравнения устанавливающие зависимость между переменными или параметрами в случае, когда процесс однозначно определен. *Стохастические* соотношения однозначно не определяются с помощью входных параметров.

Функциональные зависимости могут быть получены в соответствии с двумя способами (подходами): *теоретическим (аналитическим)* или *информационным (кибернетическим)*.

Ограничения являются математической записью пределов изменения значений переменных. Они могут быть поставлены разработчиком – искусственные ограничения, или природой исследуемых объектов в соответствии с присущими им свойствами – естественные ограничения. Как правило, искусственные ограничения являются техническими требованиями к объекту или процессу. Например, требование, предъявляемое к поковке по штамповочному уклону служит ограничением при моделировании процесса заполняемости штампа при штамповке.

Примером естественного ограничения может быть максимальное и минимальное значение процентов содержания компонента сплава, которое может изменяться от 0 до 100%. В качестве примера искусственного ограничения можно привести ограничения связанные с поиском сплава с

наибольшей прочностью при изменении процентного содержания одного из компонентов в диапазоне от 10 до 25%.

Целевая функция, или функция критерия, - является отражением целей или задач моделирования. Уравнение целевой функции должно быть, как можно более точно определено относительно целей задач исследования. Под критерием понимается конкретная мера оценки позволяющая давать верное суждение о сути происходящих явлений. Такое определение критерия объясняется двумя причинами. Во-первых, выбор критерия влияет на процесс создания модели и работу с ней. Во-вторых, неправильное определение критерия обычно ведет к неправильным заключениям. Функция критерия (целевая функция) является основой модели. Практически процесс исследования модели и решения задачи оптимизации полностью связан с исследованием целевой функции.

В зависимости от сложности поставленной задачи математическая модель может содержать несколько целевых функций, в этом случае говорят, что задача моделирования является многокритериальной.

### **Этапы создания программы, описывающей ТП.**

Процесс создания программы описывающей ТП, содержит следующие этапы:

1. постановка задачи,
2. анализ и упрощение данных,
3. синтез структуры модели,
4. проверка адекватности модели,
5. принятие решения о доработке модели или ее использовании.

На первом этапе необходимо определить, в чем именно заключается цель исследования, и какие результаты необходимо получить.

Как правило, при постановке ограничений для установления области исследования пользуются здравым смыслом (например, при моделировании свойств нового сплава состоящего из большого количества компонентов содержание любого из компонентов не может быть более 100%). В другом случае ограничения могут быть сформулированы при постановке задачи (например, постановка задачи звучит следующим образом: уточнить концентрацию компонента в сложном сплаве в интервале от 10 до 15% так чтобы прочность сплава была наибольшей).

На втором этапе исследователю необходимо на основании анализа элементов упростить реальный объект или процесс. Процесс упрощения формализации достаточно подробно изложен ниже.

На третьем этапе, на основании уже формализованных описанных математических данных создается сама модель. Этот этап можно разделить на две части. Во-первых, записывается сама модель (система уравнений) без конкретизации числовых значений используемых параметров. Во-вторых, осуществляется расчет и уточнение числовых значений ранее записанной модели.

На четвертом этапе осуществляется проверка адекватности и прочности построенной модели. На этом этапе желательно осуществить постановку эксперимента с целью подтверждения созданной модели.

На пятом этапе, на основании теоретической или экспериментальной проверки принимается решение о доработке модели или ее использовании. В случае, если для моделирования использовалось несколько различных вариантов моделей, производится выбор наиболее подходящего варианта.

Для того чтобы использовать ЭВМ в процессе моделирования необходимо, чтобы исходный объект или процесс был *формализован*, т.е. описан математическими зависимостями. Построение математической

модели объекта или процесса называют её *формализацией*. В ходе формализации происходит описание исходного объекта с заданной точностью.

Следует заметить, что реальные процессы, как правило, включающие в себя огромное число переменных, параметров, факторов, элементов, соотношений, ограничений и т. д. Соответственно и при построении модели, в нее можно включить бесконечное число переменных параметров и т.д., что значительно усложнит процесс поиска верного варианта решения.

При создании модели следует пренебречь частью реальных факторов, переменных, параметров и т.п. изучаемого объекта и выделить только те особенности, которые необходимы для описания идеализированного варианта реального объекта или процесса. При оценке процессов и объектов ОМД можно воспользоваться правилом Паретто справедливым для большинства технических систем. Правило Паретто заключается в том, что на интересующие исследователя характеристики системы оказывает существенное влияние лишь несколько из множества факторов. Как правило, 20% факторов определяют 80% интересующих свойств, в то время как оставшиеся 80% факторов определяют оставшиеся 20% свойств.

Таким образом, важной задачей моделирования является правильный выбор исследуемых факторов, поскольку именно правильное решение этой задачи позволяет значительно сэкономить силы и средства исследователей.

В большинстве случаев выбор исследуемых факторов осуществляется на основании уже накопленной информации, опыта и интуиции исследователя. Поэтому моделирование является творческим процессом, который может быть сравнен с искусством.

Любая модель является упрощением реального процесса. Если это упрощение выполнено правильно, то с помощью модели можно получить верные результаты.

Для того чтобы модель была “похожа” на объект необходимо, чтобы выполнялись следующие условия. Во-первых, должно существовать однозначное соответствие между элементами модели и элементами представляемого объекта. Во-вторых, должны быть сохранены точные соотношения или взаимодействия между элементами.

При разработке модели систему обычно разбивают на части, т.е. проводят анализ. Анализ необходим для выявления взаимодействия между элементами исследуемого объекта или процесса.

При анализе очень часто приходится сталкиваться с другого рода упрощениями исследуемого объекта. Данное упрощение, как правило, связано с заменой сложного характера зависимости реального объекта на более простой закон, используемый при построении модели. Например, при моделировании процессов ОМД зависимость между напряжениями и деформациями кривой упрочнения часто заменяют на более простой линейный закон аппроксимации. В этом случае известно, что зависимость между напряжениями и деформациями является нелинейной, однако если принятое допущение о линейном характере зависимости на взгляд исследователя оправдано (например, если исследование проводится на участке где линейная зависимость достаточно точно описывает кривую упрочнения), то мы можем принять данное допущение.

Еще одна сторона упрощения связана со сравнением порядка различных величин, фигурирующих в модели.

После того как отдельные элементы системы были проанализированы и упрощены, очевидно, что необходимо осуществить задачу синтеза модели.

Здесь надо учесть, что в ходе синтеза элементы должны быть собраны корректно, как с точки зрения характера взаимодействия, так и с точки зрения соединения объектов. Другими словами при передаче информации от одной части системы к другой передача должна осуществляться в одинаковом виде и в правильной последовательности. При этом не должно происходить потерь информации.

Например, на этапе анализа было выяснено, что кривую упрочнения можно разделить на два участка упругий и пластический и что каждый из участков можно заменить линейными зависимостями, с устраивающей исследователя точностью. Тогда на этапе синтеза необходимо объединить уравнения этих прямых в одну систему таким образом, чтобы полученная система полностью определяла исследуемую зависимость на исследуемом участке. Для этого необходимо найти точку пересечения этих прямых. Полученная в результате зависимость носит название билинейного закона и широко применяется при описании процессов пластического деформирования.

Следует заметить, что прямая описывающая пластические свойства может быть неограниченна справа по оси деформаций. Однако, с увеличением деформаций достоверность описания прямой пластического участка кривой упрочнения становится ниже, поэтому необходимо ввести критерий, позволяющий судить о возможности использования принятой модели. Для оценки соответствия модели и исследуемого объекта или процесса, существует понятие *адекватности* (достоверности).

Существует несколько аспектов проверки адекватности. Во-первых, сама модель должна быть непротиворечивой и подчиняться законам логики. Во-вторых, достоверность модели во многом зависит от способности



правильно описывать исходную ситуацию, т.е. от тех исходных допущений, которые были приняты при создании модели.

При получении достоверного решения нужно помнить о том, что уточнение решения для модели, должно быть оправдано, прежде всего, самой постановкой задачи. В первую очередь это касается точности имеющихся данных. Если исходные данные известны с погрешностью 10% (большинство задач ОМД), то смысла искать решение с точностью 1%, нет. В этом случае можно сказать – “всякое уравнение длиной более двух дюймов, скорее всего, неверно!”.

При оценке достоверности необходимо помнить также и о затратах времени и ресурсов, связанных с получением более точного решения. Порой менее точное решение, полученное своевременно может дать больше выгоды.

Например, для получения быстрого решения при моделировании процесса вытяжки в программе AutoForm предусмотрен специальный модуль, который позволяет получить приближенное решение задачи и оценить с технологической точки зрения возможность изготовления изделия. На основании полученного решения у компании, использующей программу AutoForm, есть возможность быстро ответить потенциальному заказчику сможет ли она изготовить изделие и какова будет его примерная стоимость изготовления.

В заключение еще раз следует сказать то, что математическая модель представляет собой упрощение реальной ситуации. “Ощутимое упрощение наступает тогда, когда несущественные особенности ситуации отбрасываются и исходная сложная задача сводится к идеализированной задаче, поддающейся математическому анализу”.

## ЛЕКЦИЯ № 3

### Основные допущения механики сплошных сред.

**Механика сплошных сред** — раздел механики, физики сплошных сред и физики конденсированного состояния, посвящённый движению газообразных, жидких и твёрдых деформируемых тел, а также силовым взаимодействиям в таких телах.

Академик А. А. Ильюшин характеризовал механику сплошных сред как «обширную и очень разветвлённую науку, включающую теорию упругости, вязкоупругости, пластичности и ползучести, гидродинамику, аэродинамику и газовую динамику с теорией плазмы, динамику сред с неравновесными процессами изменения структуры и фазовыми переходами»<sup>[1]</sup>.

Помимо обычных материальных тел, подобных воде, воздуху или железу, в механике сплошных сред рассматриваются также особые среды — поля: электромагнитное поле, поле излучений, гравитационное поле и другие.

Механика сплошных сред делится на такие основные разделы: механика деформируемого твёрдого тела, гидродинамика, газовая динамика. Каждая из этих дисциплин также делится на разделы (уже более узкие); так, механика деформируемого твёрдого тела делится на теорию упругости, теорию пластичности, теорию трещин и т. д.

### ***Основные допущения, используемые при создании аналитических математических моделей технологических процессов***

Использование аналитического подхода позволяет получать математическое описание объекта, основываясь на анализе физических, химических и др. явлений, протекающих в исследуемом объекте.

Существенным недостатком аналитических моделей, как правило, является сложный характер взаимосвязи, участвующих при построении модели параметров, что создает неудобства при дальнейшем использовании полученной модели, например, в поиске оптимального значения исследуемых параметров, или в автоматическом управлении технологическим процессом.

Сложный характер явлений, возникающих при обработке материалов, требует упрощения математических моделей.

Каждый из технологических процессов всегда можно рассмотреть как совокупность физических явлений. Например, литье это гидродинамическое заполнение формы, последующее отвердевание (кристаллизация), а также физические процессы изменения структуры материала при охлаждении.

Рассмотрим некоторые из физических процессов, возникающих в технологических процессах.

Задачи теплопроводности. Как правило, задачи этой группы являются наиболее простыми с точки зрения моделирования, поскольку рассчитывают перенос тепла в твердом теле теплопроводностью. Напомним, что в общем случае перенос тепла может осуществляться тремя способами: теплопроводностью, конвективным теплообменом и лучистым теплообменом.

В случае теплопроводности перенос тепла осуществляется между твердыми соприкасающимися частицами. Поэтому используемая в моделировании теория теплопроводности рассматривает исследуемое тело, как непрерывную среду – континуум. В этом случае не учитывается реальное молекулярное или атомное взаимодействие частиц реального тела. На самом деле как процессы, протекающие внутри тела, так и процессы, связанные с

взаимодействием тел объясняются именно взаимодействием частиц на атомном и молекулярном уровнях.

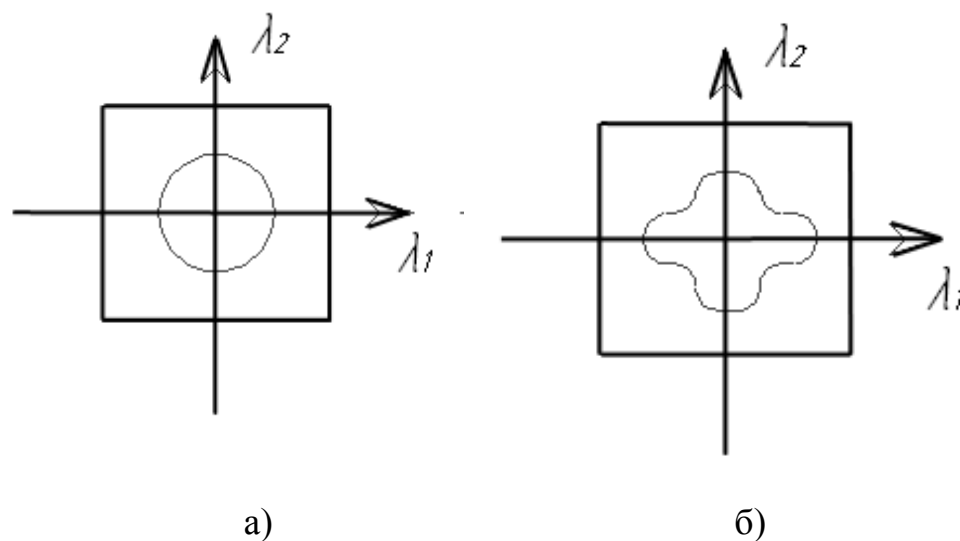
Более того при описании тел приходится пренебречь тем, что атомное и молекулярное строение отличается не столько в малых объемах, на уровне отдельных атомов, но и отлично в различных частях заготовки из-за несовершенства процессов их изготовления. Это явление называется неоднородность.

На практике неоднородностью пренебрегают и считают, что тело однородно, более того при моделировании теплопроводности могут использоваться изотропные и ортотропные модели. В *изотропной* модели свойства теплопроводности одинаковы во всех направлениях по всему телу, в то время как в *ортотропной* модели свойства различны в зависимости от направления (рисунок 1). Если выделить в теле элемент сплошной среды и считать, что оси координат совпадают с главными направлениями теплопроводности, то количество теплоты, проходящее через изотермическую площадку в единицу времени определяется величиной коэффициента теплопроводности в указанном направлении (рисунок 3.1).

Гидродинамическое заполнение и кристаллизация литейной формы.

Гидродина́мика — раздел физики сплошных сред, изучающий движение идеальных и реальных жидкости и газа. Как и в других разделах физики сплошных сред, прежде всего осуществляется переход от реальной среды, состоящей из большого числа отдельных атомов или молекул, к абстрактной сплошной среде, для которой и записываются уравнения движения.

В основе течения металла рассматривается идеальное жесткое тело— вещество в котором взаимодействием между отдельными частицами можно пренебречь.



$\lambda_1$  - коэффициент теплопроводности в направлении 1  
 $\lambda_2$  - коэффициент теплопроводности в направлении 2

Рисунок 3.1 – Иллюстрация к свойствам теплопроводности: а – изотропное тело; б – ортотропное тело

Различают ламинарное и турбулентное течение, переход от одного вида течения к другому определяется числом Рейнольдса. В качестве основного уровня определяющего состояние среды выступает уравнение Навье-Стокса. Материал после заполнения литейной формы кристаллизуется, образуя твердое вещество. Процесс кристаллизации сопровождается выделением скрытой теплоты кристаллизации. Следовательно, процесс кристаллизации тесно связан с теплообменом.

Задачи формоизменения (обработки металлов давлением).

В данной группе задач помимо допущения о сплошности тела и однородности его свойств используется также допущение (гипотеза) о несжимаемости тела. Согласно данному допущению осуществляется

пренебрежение упругим сжатием тела изменение его объёма за счёт существующих дефектов структуры. Наиболее распространена запись этой гипотезы в виде условия постоянства объёма, по которому изменение объёма тела в трех взаимно перпендикулярных направлениях равно нулю.

Из курса теории обработки металлов давлением известно, что детали меняют форму под действием внешних сил. Действие внешних сил вызывает в теле внутренние усилия, значение и распределение которых зависит от геометрии тела и характера приложения нагрузки.

Рассмотрим тело, находящееся под действием внешних сил. Внешние силы вызывают в теле реактивные силы, которые противодействуют внешним силам. Если мысленно выделить внутри такого тела бесконечно малый элемент в виде прямоугольного параллелепипеда, то действие внутренних сил сопротивления на его гранях эквивалентно действию сил со стороны отброшенных внешних частей и противоположны по знаку.

Здесь допущение принять на философском, мировоззренческом уровне. За бесконечно малый элемент принят самый малый объём, который сохраняет механические свойства основного металла. Другими словами остаётся вне рассмотрения свойства на атомном уровне.

В соответствии с теорией механики сплошных сред напряженное состояние тела в точке характеризуется с помощью тензора напряжений. Под тензором напряжений понимается совокупность в общем случае девяти напряжений, действующих на бесконечно малых площадках вокруг рассматриваемой элемента (рисунок 3.2).

Если рассматривать элементарный прямоугольный параллелепипед, находящийся в равновесии под действием внутренних сил, то его длина по отношению к исходному состоянию, когда усилие не было приложено, изменится. Это явление называется деформированием, а мера изменения

размера – деформацией. Аналогично тензору напряжений деформированное состояние тела принято описывать с помощью тензора деформаций. Здесь деформации сдвига, имеющие в индексах одинаковые буквы, равны между собой, поэтому неизвестными являются только шесть компонентов деформаций.

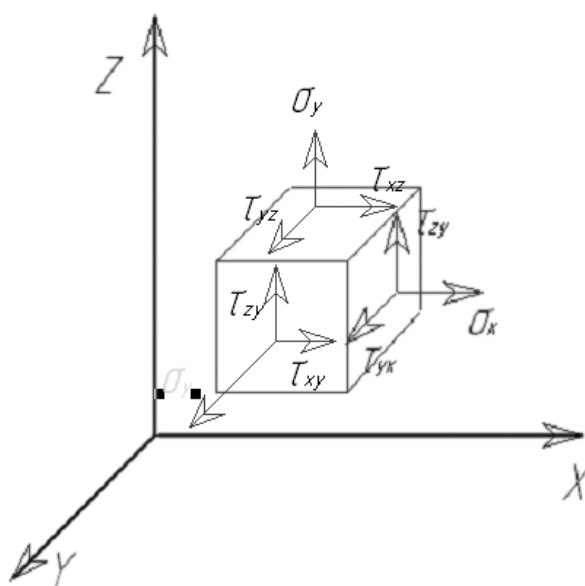


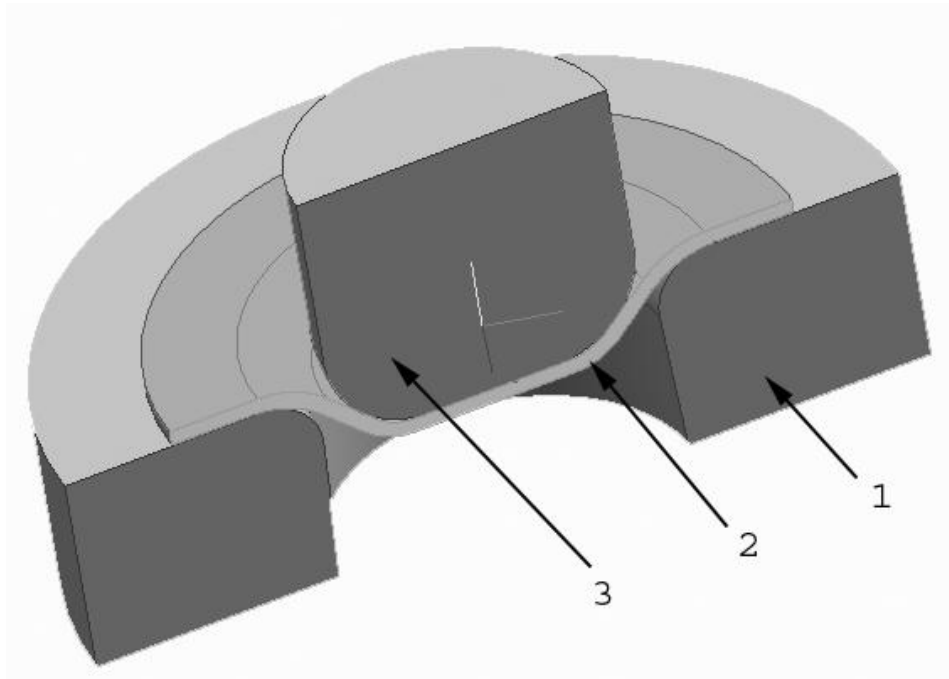
Рисунок 3.2 – Напряженное состояние бесконечно малого элемента

## ЛЕКЦИЯ № 4

### Методы решения задач механики сплошных сред

#### *Инженерный метод решения*

Рассмотрим процесс вытяжки (рисунок 4.1).



1 – матрица; 2 – заготовка; 3 – пуансон; 4 – прижим

Рисунок 4.1 – Вытяжка цилиндрической детали из круглой плоской заготовки

Согласно теории листовой штамповки надо воспользоваться уравнением связи напряжений и деформаций и условием постоянства объема, которые для листовой штамповки могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_\theta} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_z}{\varepsilon_\theta - \varepsilon_z},$$



$$\varepsilon_{\rho} = -\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_z,$$

где  $\sigma_{\rho}, \sigma_{\theta}$  - меридиональное и широтное напряжения;  $\varepsilon_{\rho}, \varepsilon_{\theta}$  - деформации в соответствующих направлениях,  $\varepsilon_z$  - деформация по толщине.

Откуда:

$$\frac{\sigma_{\rho}}{\sigma_{\theta}} = \frac{-\varepsilon_{\theta} - 2\varepsilon_z}{\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_z} = \frac{\varepsilon_{\theta} + 2\varepsilon_z}{\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_z}.$$

После преобразований получим:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_{\theta} + \sigma_{\rho}}{2\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}} \varepsilon_{\theta}.$$

Считаем, что  $\varepsilon_z = \ln \frac{S}{S_0}$ , а  $\varepsilon_{\theta} = \frac{\rho}{r}$  можно записать:

$$S = S_0 \int_r^{\rho} \frac{\sigma_{\rho} + \sigma_{\theta}}{\sigma_{\theta} - 2\sigma_{\rho}} ,$$

где  $S, S_0$  - соответственно толщины до и после деформации рассматриваемого элемента с координатой  $\rho$ ,  $r$  - радиус рассматриваемого элемента до деформации. Поскольку при  $\rho = R_H$   $\sigma_{\rho} = 0$ , то для кромки деформируемой заготовки можно записать:

$$S = S_0 \sqrt{\frac{R_3}{R_H}},$$

где  $R_3, R_H$  - радиусы заготовки и кромки в рассматриваемый момент деформации. Основываясь на этом соотношении, можно примерно оценить толщину фланца заготовки при вытяжке. В случае использования данного подхода моделирования решение было получено “на бумаге” и практически все затраты сводятся лишь к затратам времени на теоретическое исследование.

### ***Вариационные методы решения задач ОМД***

В ряде случаев задача интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений может быть заменена на задачу поиска некоторого значения энергетического функционала. Методы, использующие данный математический подход, называются вариационными.

Наиболее широко используемый в настоящее время в программных продуктах метод конечных элементов (МКЭ) тоже является вариационным. Данный метод является одним из вариантов решения метода Ритца, который путем минимизации потенциальной энергии тела сводит задачу к системе линейных уравнений. Данный метод нашел применение не только для решения задачи механики сплошных сред, но и для описания многих других физических процессов.

Суть МКЭ заключается в том, что непрерывные величины можно заменить на модель, состоящую из отдельных участков (элементов). При этом на каждом из участков исследуемая непрерывная величина заменяется кусочно-линейной непрерывной функцией, построенной на значениях непрерывной исследуемой величины в конечном числе точек.

Распределение значений исследуемой величины внутри области и сама непрерывная величина, могут быть неизвестны. При построении дискретной модели мы предполагаем, что численные значения исследуемой величины в конкретных точках (узлах) на границах нам известны. После этого можно перейти к определению значений кусочно-непрерывной функции, за счет подбора значений в узловых точках так, чтобы выполнялось условие минимизации потенциальной энергии.

Таким образом, осуществляется следующая последовательность действий:

Область определения исследуемой величины разбивают на КЭ. Эти элементы связаны друг с другом с помощью узлов. Элементы в совокупности аппроксимируют (описывают) форму исследуемого тела.

Значение исследуемой непрерывной величины в каждом узле предстоит определить в зависимости от поставленных граничных условий.

Подбирая значения непрерывной исследуемой величины в узловых точках, определяют ее значения внутри рассматриваемой области (тела).

Аппроксимирующие функции подбираются таким образом, чтобы сохранить непрерывность исследуемой величины вдоль границ элемента. В виде аппроксимирующей функции могут выступать линейные, квадратичные и кубические полиномы, которые для данного элемента называются функцией элемента.

Рассмотрим в качестве примера расчет с помощью МКЭ осевого растяжения ступенчатого стержня. Ступенчатый стержень жестко заделан с левого края и имеет сечения  $A_1$  и  $A_2$ , нагружен с правого торца растягивающим усилием  $P$ . Требуется определить перемещение сечений 1, 2, 3 (рисунок 4.2).

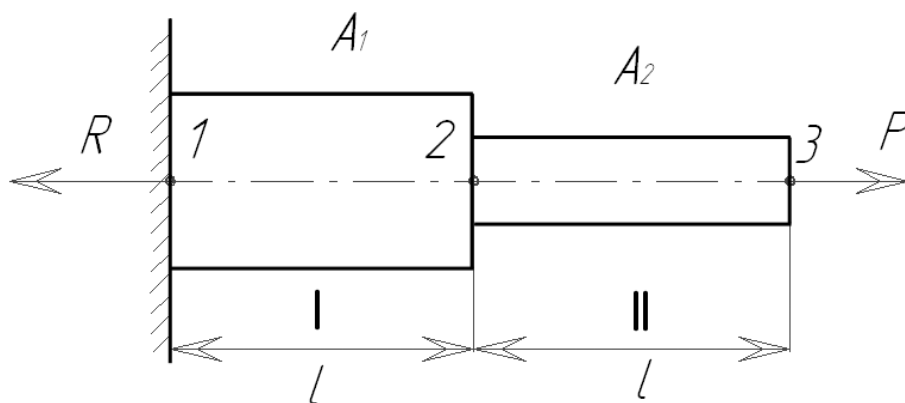


Рисунок 4.2 – Ступенчатый стержень

Разобьем стержень на два элемента (I, II) так, чтобы граница между элементами проходила в месте изменения перпендикулярного к длине сечения стержня. Введем на границах элементов узлы 1, 2, 3, в которых будем искать перемещения  $u$ . В результате такого упрощения мы будем решать задачу растяжения двух стержневых элементов, каждый из которых имеет длину  $l_1$  и  $l_2$ , площадь ( $A_1$  и  $A_2$ ) приложенное к узлам усилие ( $P_1$  и  $P_2$ ) и смещения ( $u_1, u_2$ ), которые появляются от действия этого усилия (рисунок 4.3).

Для любого из этих элементов согласно теории сопротивления материалов можно записать значения усилия действующего в узлах:

$$P_1 = \frac{E * A}{l} (u_1 - u_2);$$

$$P_2 = \frac{E * A}{l} (u_2 - u_1),$$

где  $E$  – модуль упругости.

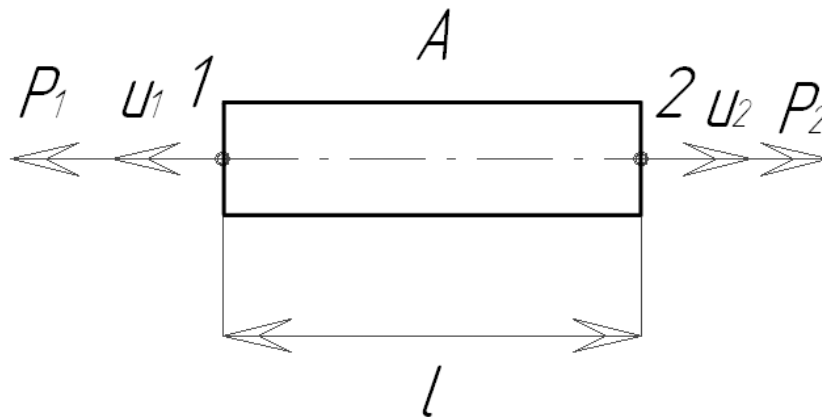


Рисунок 4.3 – Элемент стержня

Для каждого элемента систему узловых усилий можно записать следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{E * A}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

или

$$\vec{P} = \mathbf{k} \cdot \vec{u}$$

Рассмотрим последнее уравнение более подробно. В нем  $\vec{P}$  называется матричным вектором усилий,  $\vec{u}$  – вектором перемещений или степеней свободы,  $\mathbf{k}$  – матрицей жесткости.

Вернемся к ступенчатому стержню. Очевидно, что поскольку стержень состоит из нескольких элементов, то для решения задачи необходимо объединить соотношения для элементов 1 и 2 с учётом их положения в пространстве (или взаимодействия по узлам). Тогда можно записать  $\vec{P} = \mathbf{k} \cdot \vec{u}$  или

$$\begin{Bmatrix} -R \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{A_1}{l_1} & -\frac{A_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{A_1}{l_1} & \frac{A_1}{l_1} + \frac{A_2}{l_2} & -\frac{A_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{A_2}{l_2} & \frac{A_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix},$$

где в векторе усилий  $\vec{P}$  уже учтено то, что R является реакцией опоры приложенной в узле 1, а P является растягивающим усилием, приложенным в узле 3, а узел 2 свободен от нагрузок.

У нас осталось неиспользованное ограничение по перемещению ( $u_1=0$ ). Его можно использовать для упрощения решения системы, если заменить в матрице жесткости первую строку и первый столбец на нули а элемент

матрицы, стоящий на главной диагонали заменить на единицу. Тогда уравнение примет вид:

$$E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left( \frac{A_1}{l_1} + \frac{A_2}{l_2} \right) & -\frac{A_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{A_2}{l_2} & \frac{A_2}{l_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}.$$

Решением этого уравнения являются следующие значения перемещений.

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{Pl_1}{EA_1}; \quad u_3 = \frac{P}{E} \left( \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} \right).$$

Пространственное положение каждого из элементов приведённой выше системы описывается с помощью числа степеней свободы  $\vec{u}_i$  или вектором узловых перемещений. Обычно каждой степени свободы (узловому перемещению) соответствует сопрягаемые переменные усилия. Для расчета эти переменные усилия собираются в матричной вектор  $\vec{F}_i$ . Произведение вектора сил  $\vec{F}_i$  на вектор степеней свободы  $\vec{u}_i$  является внешней энергией или работой совершаемой над телом внешними силами.

В приведенном примере одноосного растяжения стержня решение системы уравнений может быть получено просто и в явном виде. В случае моделирования более сложных тел приходится, задаваясь значениями перемещений, искать решение так, чтобы выполнялось условие минимизации энергии. В ходе такого решения значениями перемещений приходится задаваться неоднократно, поэтому МКЭ носит название вариационного метода.

Рассмотренный нами пример позволяет определить напряжено-деформированное состояние тела на основании варьирования перемещений.

В действительности термин МКЭ определяет более широкий набор математических способов расчета, среди которых в зависимости от того, какой величиной варьируют можно выделить следующие способы расчета:

- в перемещениях (минимум потенциальной энергии Лагранжа) – варьируются перемещения;
- в напряжениях (минимум дополнительной работы Кастильо) – варьируются напряжения;
- смешанные (принцип Райснера) – варьируются перемещения и напряжения;
- гибридные (принцип Ху-Вашицу) – варьируются перемещения, напряжения и деформации.

Наиболее часто используется принцип Лагранжа.

В зависимости от области науки, в которой используются МКЭ, смысл векторов  $\vec{u}^k$  и  $\vec{F}^k$  может измениться (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Физический смысл векторов  $\vec{u}^k$  и  $\vec{F}^k$ .

Область приложения	Вектор состояния $\vec{u}^k$	Вектор $\vec{F}^k$
Механика твердых тел	Перемещение	Механическое усилие
Теплопроводность	Теплопроводность	Тепловой поток
Потенциальное течение	Давление	Скорость частицы
Общий вид течения	Скорость	Поток
Электростатика	Электрический потенциал	Плотность заряда
Магнитостатика	Магнитный потенциал	Интенсивность магнитного поля

## ЛЕКЦИЯ № 5

### Основные понятия планирования эксперимента

При разработке моделей техпроцессов необходимо исследовать возможность аппроксимации сложного процесса с помощью простой модели, степень учета нелинейности, априорных данных и т.д.

Выбор метода зависит от постановки задачи. Применение того или иного метода определяется характером зависимости между параметрами (статистическая или динамическая), свойством объекта управления (одномерной или многомерной), характером возмущений (случайные или регулярные), уровнем помех и точками приложения (вход, выход или вход и выход), допустимым способом экспериментирования и т.д.

Выделяют два подхода к построению моделей техпроцессов:

- физико – математический анализ явлений, обуславливающих динамику процесса,
- экспериментальная идентификация, при которой основную информацию о процессе получают путем непосредственных измерений.

Из-за сложности и многообразия процессов, протекающих на таких объектах как

прокатные станы, кузнечно - прессовое оборудование и т.д. методы построения моделей на основе рассмотрения физико – химических закономерностей исследуемых процессов не всегда оказываются эффективными. Поэтому в промышленных условиях более приемлемы экспериментальные методы идентификации.

Основной этап экспериментальной идентификации – выбор математической модели процесса, т.е. выбор вида соотношений между



входными и выходными переменными, зависящий от большого числа факторов (цель эксперимента, физическая природа процесса и т.д.). Применение данного метода не исключает использования априорной информации о физико – химических свойствах исследуемых процессов.

Характеристики модели должны как можно больше соответствовать характеристикам объекта. Однако, использование слишком сложных моделей лишает их гибкости и универсальности, затрудняет их применение в реальных АСУ ТП. Поэтому выбор модели определяется не только сведениями об объекте и режимах, но и требуемой степенью точности соответствия модели реальному объекту и сложностью реализации полученного решения.

В ряде задач управления оказывается достаточным построение статистической модели исследуемого процесса с использованием стандартных методов корреляционного и регрессионного анализа.

Для многофакторных технологических процессов статистическую взаимосвязь факторов можно определить методами математического планирования эксперимента.

Мысль о том, что эксперимент можно планировать восходит к глубокой древности. (Пример с острым камнем, превратившимся в копье, дротик, лук со стрелами).

Первая работа в области ПЭ была опубликована в 1951 г. Боксом и Уилсоном в Англии. Их идея проста: экспериментатор ставит последовательно небольшие серии опытов, в каждой из которых одновременно варьируются по определенным правилам все факторы. Серии организуются таким образом, что после математической обработки предыдущей, можно было выбрать условия проведения, т.е. спланировать

следующую серию. Так, последовательно, шаг за шагом, достигается область оптимума.

*Планирование эксперимента* – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

При этом существенно следующее:

- Стремление к минимизации общего числа опытов,
- Одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс, по специальным правилам – алгоритмам,
- Использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора,
- Выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии эксперимента.

Встает вопрос – когда можно и нужно применять планирование эксперимента. Можно ответить так: там, где есть эксперимент, имеет место и наука о его проведении – ПЭ.

Поиск оптимальных условий, построение интерполяционных формул, выбор существенных факторов – это примеры задач, где применяется ПЭ.

Эксперимент, который ставится для установления связи между факторами называется интерполяционным.

Эксперимент, который ставится для решения задач оптимизации называется экстремальным.

Дадим определение еще и такому понятию как объект исследования. Для описания объекта исследования удобно пользоваться представлением о кибернетической системе, которую называют «Черным ящиком» (рисунок 5.1).



Рисунок 5.1 – система «черный ящик»

Стрелки справа – изображают численные характеристики целей исследования. Обозначим их  $y$  (игрек) и назовем их параметрами оптимизации. Читая литературу, можно обнаружить другие названия: критерий оптимизации, целевая функция.

Для проведения эксперимента необходимо надо иметь возможность воздействовать на поведение «черного ящика». Все способы такого воздействия обозначим буквой  $x$  (икс) и назовем факторами. (Иногда их называют входами черного ящика).

При решении задачи будем использовать математические модели объекта исследования. Под математической моделью будем понимать уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. Это уравнение в общем виде можно записать так:

$$Y = F(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k),$$

где  $F(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$  заменяет слова «функция от». Такая функция называется Функцией отклика.

Рассмотрим, как проводится эксперимент. Каждый фактор может принимать одно или несколько значений. Такие значения называются Уровнями. Реально, на практике, всякий фактор имеет определенное число дискретных уровней. Фиксированный набор уровней факторов определяет

одно из возможных состояний «черного ящика». Одновременно это есть условия проведения одного из возможных опытов. Если перебрать все возможные наборы состояний, то мы получим множество состояний «черного ящика». Одновременно это будет число возможных различных опытов. Число различных состояний определяется по формуле  $P^k$ , где  $P$  – число уровней (оно одинаково для всех факторов),  $k$  – число факторов.

В реальных условиях просто нельзя провести такое количество экспериментов. Здесь-то и приходит на помощь ПЭ.

В зависимости от объекта и цели исследования параметры оптимизации могут быть весьма разнообразны: экономические (прибыль, себестоимость, рентабельность), технико – экономические (производительность, надежность, долговечность), технико = технологические (выход продукта), и другие (статистические, психологические). При этом движение к оптимуму возможно, если выбран один параметр оптимизации. Тогда другие параметры процесса уже не выступают в качестве параметров оптимизации, а служат ограничениями. Второй вариант – это строят некий обобщенный параметр оптимизации как функцию от множества исходных.

Итак, параметр оптимизации – это признак, по которому мы хотим оптимизировать процесс. Он должен быть количественным, т.е. задаваться числом. Мы должны уметь измерять его при любой возможной комбинации выбранных факторов. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, называется Областью его определения. Они могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными.

Параметр оптимизации должен выражаться одним числом. Это может быть показание прибора (скорость прессования), иногда результат расчета (величина обжатия в клети прокатного стана).

Следующее требование - однозначность. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно значение параметра оптимизации. (Однако, обратное неверно. Одному значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов.)

И главное требование - Параметр оптимизации действительно должен оценивать эффективность функционирования системы в заранее выбранном смысле. Представление об эффективности не остается постоянным в ходе исследования. Оно меняется по мере накопления информации и в зависимости от достигнутых результатов.

Кроме того, что параметр должен быть эффективным, он должен быть эффективным в статистическом смысле. Это требование фактически сводится к выбору параметра оптимизации, который определяется с наибольшей возможной точностью. Если же и эта точность недостаточна, то приходится увеличивать число повторных опытов.

Желательно, чтоб параметр оптимизации имел физический смысл, был простым и легко вычислялся. Требование физического смысла связано с дальнейшей интерпретацией результатов эксперимента.

Существует еще одно требование к параметру оптимизации – требование универсальности или полноты. Под универсальностью понимается способность параметра всесторонне характеризовать объект. Чаще всего универсальностью обладают обобщенные параметры оптимизации, которые строятся как функция от нескольких частных параметров.

Рассмотрим способы воздействия на оптимизируемый объект, которые были названы факторами.

*Фактором* называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение. Каждый фактор (как и

параметр оптимизации) имеет область определения. Фактор считается заданным, если вместе с его названием указана область его определения. Под областью определения понимается совокупность всех значений, которые в принципе может принимать данный фактор. Область определения может быть непрерывной, а может быть дискретной. Однако в задачах ПЭ мы всегда рассматриваем только дискретные уровни определения, а для факторов с непрерывной областью определения (время, температура и т.д.) выбираются дискретные множества уровней.

Факторы могут быть количественными величинами и качественными. Первые – можно измерять количественно, а вторые – это некоторые переменные, характеризующие качественные свойства (разные вещества, технологические способы, исполнители и т.д.)

Для использования качественных факторов производят их кодирование, т.е. строят условную порядковую шкалу, которая ставит в соответствие уровням качественного фактора числа натурального ряда.

К факторам предъявляются определенные требования:

1. Факторы д.б. управляемы, т.е. выбрав нужное значение фактора, мы можем поддерживать его постоянным в течение всего опыта. В этом собственно и состоит особенность активного эксперимента.

2. Факторы д.б. однозначны.

3. К совокупности факторов предъявляется требование совместимости – это означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны.

4. Независимость факторов, т.е. возможность установления фактора на любом уровне вне зависимости от уровней других факторов.

Мы говорили, что под моделью мы понимаем вид функции отклика  $y = F(x_1, x_2, x_3, \dots)$

Выбрать модель – это значит выбрать вид этой функции, записать ее уравнение. Тогда останется спланировать и провести эксперимент для оценки числовых значений констант (коэффициентов) этого уравнения. Но возникает вопрос – как выбрать уравнение? Чтобы выбрать модель (уравнение), надо понять, что мы хотим от модели, какие требования мы к ней предъявляем. Для выработки требований проведем некоторые рассуждения.

Для наглядности рассмотрим геометрический аналог функции отклика – поверхность отклика. Рассмотрим случай с 2-мя факторами. Для изображения геометрически возможного состояния «черного ящика» с двумя входами необходимо на плоскости в декартовой системе координат по одной оси отложить значения (уровни) одного фактора, а по другой оси – другого. Тогда каждому состоянию ящика будет соответствовать точка на плоскости (Рисунок 5.2). Пунктирными линиями обозначены границы областей определения каждого из факторов, а сплошными – границы их совместной области определения.  $X1_{мин}$ ,  $X1_{мах}$ ,  $X2_{мин}$ ,  $X2_{мах}$  – это минимальные и максимальные возможные значения каждого фактора.

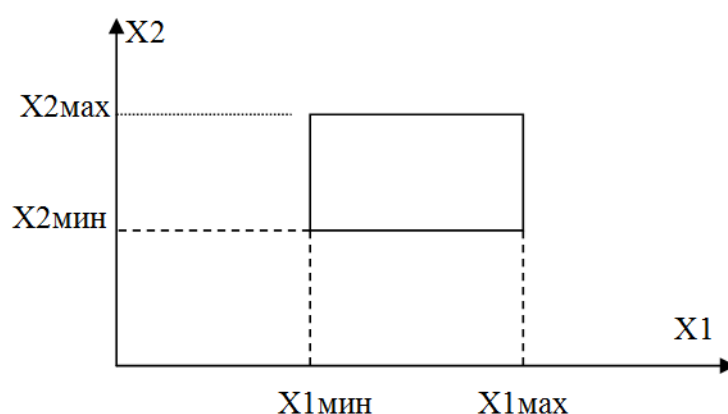


Рисунок 5.2 – Область определения факторов

Чтоб указать значение параметра оптимизации, нужна еще одна ось. Если ее ввести, то поверхность отклика будет выглядеть следующим образом (Рисунок 5.3).

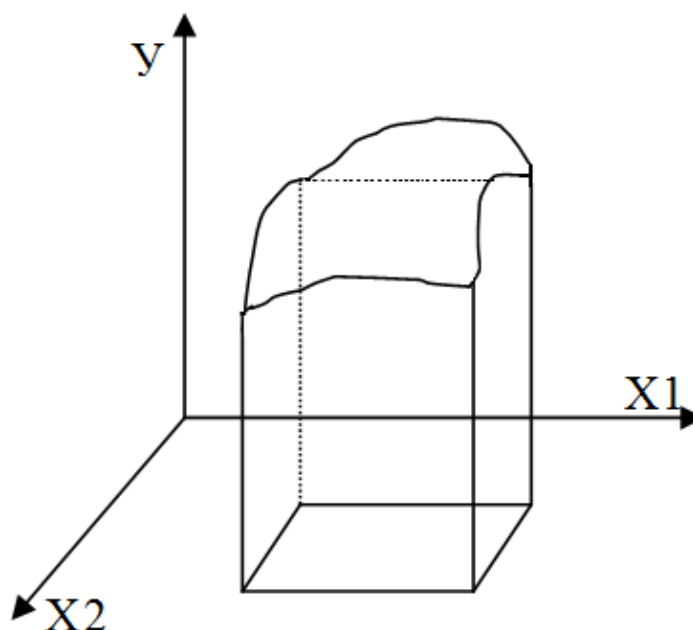


Рисунок 5.3 – Поверхность отклика

Пространство, в котором строится поверхность отклика, будем называть факторным пространством.

Оно задается координатными осями, по которым откладываются значения факторов и параметра оптимизации. При многих факторах поверхность отклика уже нельзя изобразить наглядно и приходится ограничиваться только алгебраическим языком.

При двух факторах можно ограничиться плоскостью для изучения факторного пространства. Для этого надо произвести сечение поверхности отклика плоскостями параллельными плоскости  $X1OX2$  и полученные в



сечениях линии спроектировать на эту плоскость. Каждая линия соответствует постоянному значению параметра оптимизации.

Такая линия называется Линией равного отклика.

Существует соответствие между состоянием «черного ящика» и значением параметра оптимизации – каждому возможному состоянию «ящика» соответствует одно значение параметра оптимизации. Обратное, строго говоря, неверно.

Итак, представляя поверхность отклика, возвращаемся к основному вопросу: как ставить эксперимент, чтобы найти оптимум при минимуме затрат.

Можно рассмотреть следующие возможности:

1. Мы располагаем таблицей, в которой содержатся все возможные состояния объекта и соответствующие им отклики. И мы выбираем то или те состояния, которые соответствуют наилучшему отклику. Недостаток: огромное количество состояний. Пример: нахождение оптимального положения канала на матрице.

2. Случайный выбор некоторого числа состояний и определение откликов в них, надеясь, что среди них попадутся оптимальное или близкое к нему состояние.

3. Строить математическую модель, чтоб с ее помощью предсказывать значения откликов в тех состояниях, которые не изучались экспериментально. Если мы не можем измерить отклик в каждом состоянии, то хоть сумеем предсказать результат. Причем нам интересны не все состояния, а лишь те, которые приближают нас к оптимуму. Такая стратегия приводит нас к пошаговому принципу, лежащему в основе метода ПЭ.

Итак, за отказ от полного перебора надо чем-то платить. Цена – это предположения, которые следует сделать относительно свойств неизвестной нам модели до начала эксперимента (априорные положения).

Некоторые из предположений мы никогда не сможем проверить. Такие предположения называются постулатами. Если реально они не выполняются, то возможно, что мы найдем не оптимум (хотя найденное может нас устроить).

Какие предположения о свойствах поверхности отклика мы делаем? Главное – это непрерывность и гладкость поверхности и наличие единственного оптимума (Рисунок 5.4).

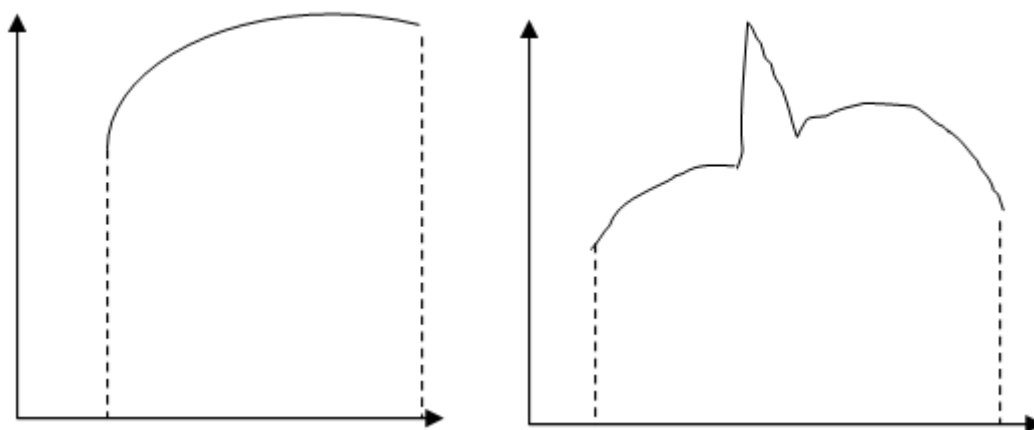


Рисунок 5.4 – Примеры функций отклика для одного фактора

Итак, если предпосылки выполняются, а мы будем знать значения параметра оптимизации в нескольких соседних точках факторного пространства, то мы сможем представить себе результаты, которые можно ожидать в других соседних точках. Значит можно найти такие точки, для которых ожидается наибольшее увеличение (или уменьшение) параметра

оптимизации. Тогда ясно, что следующий эксперимент надо переносить именно в эти точки. Надо продвигаться в этом направлении, минуя остальные.

Сделав новый эксперимент, снова можно (и нужно) оценить направление, в котором, скорее всего и следует двигаться. В силу единственности оптимума мы, таким образом, рано или поздно его достигнем. Это и есть пошаговый принцип.

## ЛЕКЦИЯ №6

### Ошибки эксперимента

Каждый эксперимент содержит элемент неопределенности вследствие ограниченности экспериментального материала. Постановка повторных (параллельных) опытов не дает полностью совпадающих результатов, т.к. всегда существует ошибка опыта (ошибка воспроизводимости). Эту ошибку и следует оценить по параллельным опытам. Для этого опыт воспроизводится по возможности в одинаковых условиях несколько раз и затем берется среднее арифметическое всех результатов:

$$U_{\text{ср}} = (U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n) / n,$$

где  $n$  – количество параллельных опытов.

Отклонение результата любого опыта от среднего арифметического можно представить как разность  $U_q - U_{\text{ср}}$ , где  $U_q$  – результат отдельного опыта. Наличие отклонений свидетельствует об изменчивости значений повторных опытов. Для измерения изменчивости используют дисперсию. Дисперсией называется среднее значение квадрата отклонений величины от ее среднего значения. Дисперсия обозначается  $S$  и выражается формулой:

$$S_{y_i} =$$

где  $(n - 1)$  - число степеней свободы, равное количеству опытов минус 1.

Корень квадратный из дисперсии, взятый с положительным знаком, называется средним квадратичным отклонением, стандартом или квадратичной ошибкой. Стандарт имеет размерность той величины для которой он вычислен.

Дисперсия и стандарт – это меры рассеяния, изменчивости. Чем они больше, тем больше рассеяны значения параллельных опытов около среднего значения.

Ошибка опыта является суммарной величиной, результатом многих ошибок: измерений факторов, измерений параметра оптимизации и т.д. Каждую из этих ошибок в свою очередь можно разделить на составляющие. Существует много вариантов классификации ошибок. Мы рассмотрим одну из них (Рисунок 6.1).

Согласно этого варианта все ошибки делятся на два класса: систематические и случайные. Систематические ошибки порождаются причинами, действующими регулярно, в определенном направлении. Чаще всего их можно изучить и определить количественно. Эти ошибки находят, калибруя измерительные приборы и сопоставляя опытные данные с изменяющимися внешними условиями. Если систематические ошибки вызываются внешними условиями (сырье, изменение температуры), то следует компенсировать их влияние. Случайными ошибками называются те, которые появляются нерегулярно и причины, возникновения которых неизвестны и которые невозможно учесть заранее. Систематические и случайные ошибки состоят из множества элементарных ошибок. Чтоб исключить инструментальные ошибки, следует проверять приборы перед опытом, во время опыта и после него. Ошибки при проведении опыта возникают вследствие неравномерного нагрева материалов, разного способа перемешивания, применения разных приемов и т.д.

При повторении опытов такие ошибки могут вызвать большой разброс экспериментальных данных.

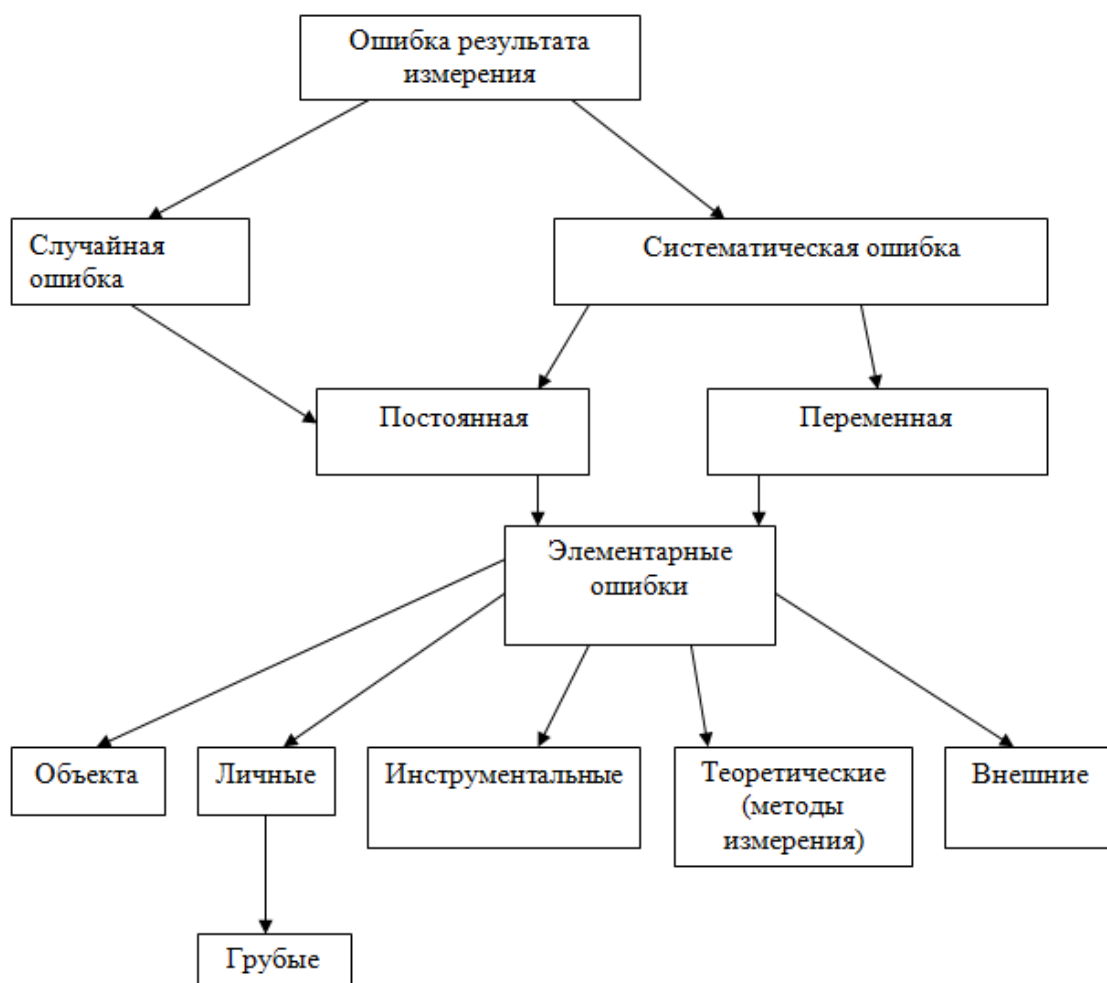


Рисунок 6.1 – Классификация ошибок

Для исключения влияния систематических ошибок, вызванных внешними условиями (переменной температуры, сырья, исполнителя) рекомендуется случайная последовательность при постановке опытов. Опыты необходимо рандомизировать во времени. Термин «рандомизация» происходит от английского слова RANDOM – случайный.

Пример: Влияние, которое оказывала открытая форточка на отливки блока двигателя на АвтоВАЗе.

Пример:

Предположим, что мы ставим в первый и второй день по четыре опыта согласно следующей матрицы:

Номер опыта	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y	Номер опыта	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y
1	+	+	+	Y1	5	+	+	-	Y5
2	-	-	+	Y2	6	-	-	-	Y6
3	+	-	+	Y3	7	+	-	-	Y7
4	-	+	+	Y4	8	-	+	-	Y8

Пусть в первый день мы ставим опыты 1,2,3,4, а во второй – 5,6,7,8.

Если внешние условия в первый день каким-то образом отличались от внешних условий второго дня, то это способствовало возникновению некоторой систематической ошибки. Обозначим ошибку E. Тогда четыре значения параметра оптимизации сдвинуты на величину E по сравнению с истинными значениями. Пусть это будут параметры, входящие в первый блок:  $y_1 + E$ ,  $y_2 + E$ ,  $y_3 + E$ ,  $y_4 + E$ . Матрица построена так, что в первом блоке значения  $x_3$  находятся на верхнем уровне, а во втором – на нижнем. Тогда при подсчете B3 получится следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 B_3 &= \frac{1}{8} \left[ (y_1 + E) + (y_2 + E) + (y_3 + E) + (y_4 + E) - y_5 - y_6 - y_7 - y_8 \right] \\
 &= B_{3\text{истин}} + \frac{E}{2}
 \end{aligned}$$

Итак, возможные различия во внешних условиях смешались с величиной линейного коэффициента ВЗ и исказили это значение.

Вывод: в такой последовательности опыты ставить нельзя Их надо рандомизировать во времени, т.е. придать последовательности опытов случайный характер. В нашем примере это будет выглядеть следующим образом: предположим, что каждое значение параметра оптимизации определяется по двум параллельным опытам. Т.е. случайно нужно расположить 16 опытов, причем 9 опыт будет повторным (параллельным) для 1, 10 – для 2 и т.д.

Следующий этап рандомизации – использование таблицы случайных чисел. Обычно они приводятся в руководствах по математической статистике. По таблице в случайном месте выписываются числа с 1 до 16, например: 2,15,9,5,12,14,8,13,16,1,3,7,4,6,11,10.

Это значит, что первым реализуют опыт №2, вторым - №7 и т.д. Нарушать выбранную случайным образом последовательность опытов не рекомендуется.



## ЛЕКЦИЯ № 7

### Регрессионные уравнения

При поиске функциональной связи между исследуемыми параметрами обычно появляется необходимость ввести некоторую гипотезу о характере функциональной зависимости между параметрами, т.е. *аппроксимировать* ее некоторым относительно простым математическим выражением, например линейной, квадратичной, экспоненциальной или какой либо другой.

Для поиска таких функциональных математических зависимостей между двумя или более переменными по накопленным экспериментальным данным используются методы *регрессионного* и *корреляционного анализа*. Регрессионный анализ дает возможность построить по имеющимся экспериментальным данным, уравнение, а корреляционный анализ позволяет судить о том, насколько хорошо экспериментальные точки согласуются с выбранным уравнением (“ложатся” на соответствующую кривую).

Первым шагом при выводе уравнения, аппроксимирующего требуемую зависимость, является сбор данных, отражающих соответствующие значения рассматриваемых переменных. Следующим шагом будет нанесение этих точек  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$ , ...,  $(x_N; y_N)$  на графическую плоскость с прямоугольной системой координат. В результате получается *диаграмма разброса*, на которой можно определить вид, аппроксимирующей зависимости.

Задача нахождения такого уравнения, которое наилучшим образом отражает экспериментальную зависимость, называется *задачей подгонки кривой по точкам*.

Наиболее распространенным методом, для определения параметров уравнения аппроксимации является **метод наименьших квадратов** (МНК).

Данный метод формализует процедуру подбора аппроксимирующей кривой с минимальным отклонением экспериментальных точек от подбираемой кривой.

Например на рис.1, где через  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , ...  $(x_n, y_n)$  обозначены координаты экспериментальных точек, для любого заданного  $x_i$  будет иметь место разница между  $y_i$  и соответствующим значением, получающимся по теоретической кривой. Обозначим эту разницу символом  $D_i$ , и назовем ее **отклонением**. Тогда мерой качества приближения кривой к экспериментальным данным можно считать сумму абсолютных отклонений, т. е.  $|D_1| + |D_2| + \dots + |D_n|$ .

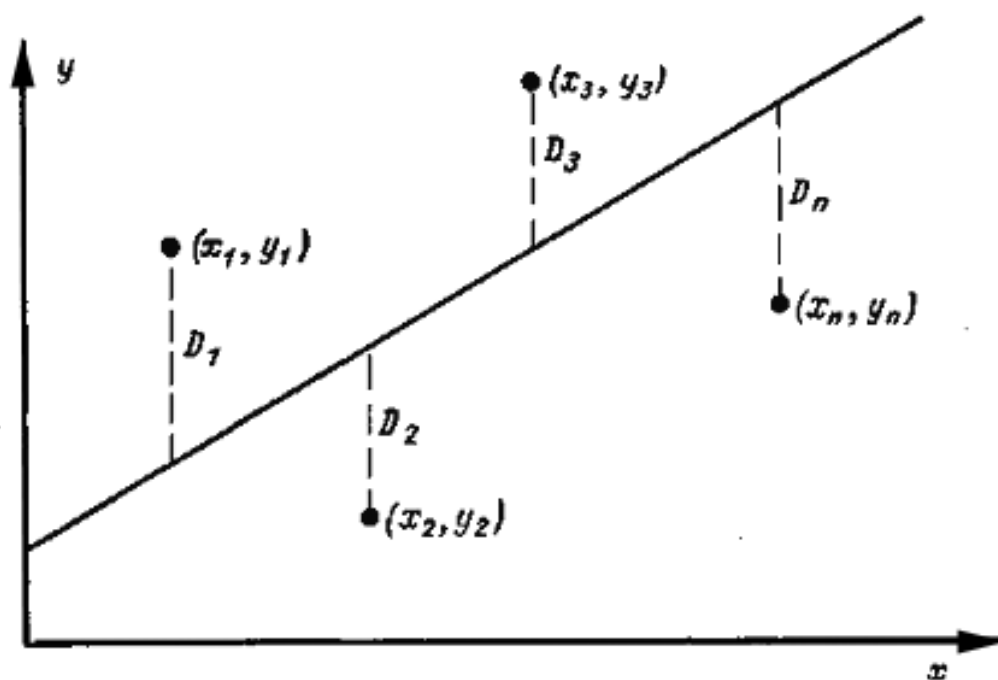


Рисунок 7.1 – Иллюстрация к методу наименьших квадратов.

Поскольку отклонения могут быть положительными или отрицательными, с математической точки зрения предпочтительнее возвести их значения в квадрат и в дальнейшем иметь дело с **квадратичными отклонениями**. Их сумма даст адекватную меру качества приближения. Очевидно, что из всех возможных аппроксимирующих кривых кривой наилучшего приближения для данной совокупности экспериментальных точек будет та, для которой сумма  $D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_N^2$  минимальна. Последнее условие является критерием наилучшего приближения по методу наименьших квадратов.

Математический метод, обеспечивающий такую подгонку выбранной кривой, при которой экспериментальные точки ложатся на нее наилучшим образом называется **регрессионным анализом**.

Для оценки того, насколько хорошо регрессионная прямая согласуется с экспериментальными данными, используется **корреляционный анализ**. Корреляционный анализ дает возможность судить о том, насколько тесно ложатся экспериментальные точки на аппроксимирующую кривую.

Количественную оценку этой взаимосвязи дает **коэффициент корреляции  $R$** , определяемый по формуле:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (7.1)$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ;  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  - средние значения  $x$  и  $y$ .

Коэффициент корреляции изменяется в пределах от -1 до +1. Значение “-1” соответствует максимальной отрицательной корреляции, когда  $y$  уменьшается с увеличением  $x$ , а все экспериментальные точки лежат точно

на кривой. Значение “0” соответствует полному отсутствию корреляции когда зависимости между величинами  $x$  и  $y$  нет, а значение “+1” — максимальной положительной корреляции.

Чем ближе абсолютное значение  $R$  к единице, тем теснее связь между исследуемыми переменными.

На практике маловероятно встретить значение коэффициента корреляции равное единице, или нулю. Чтобы определить значимость и окончательно ответить на вопрос о наличии связи необходимо сравнить коэффициент корреляции с критическим значением. Критические значения коэффициента корреляции при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  приведены в таблице 1. Процедура сопоставления вычисленной характеристики с табличным критическим значением называется *проверкой гипотезы*.

Таблица 7.1 – Критические значения коэффициента корреляции при  $\alpha = 0,05$

$f=N-2$	$R^{kp}$	$f=N-2$	$R^{kp}$	$f=N-2$	$R^{kp}$
1	0,997	9	0,602	17	0,456
2	0,950	10	0,576	18	0,444
3	0,878	11	0,553	19	0,433
4	0,811	12	0,532	20	0,423
5	0,754	13	0,514	30	0,349
6	0,707	14	0,497	50	0,273
7	0,666	15	0,482	100	0,195
8	0,632	16	0,468		

Опыт использования статистики в разнообразных ситуациях показал, что обычно в практических инженерных расчетах подходящим значением  $\alpha$  является 0,05. Такое значение, называемое еще 5% уровнем риска,

соответствует вероятности верного ответа при проверке нашей гипотезы в 95% случаев.

Проверка гипотезы в нашем случае сводится к сравнению абсолютной величины вычисленной характеристики коэффициента корреляции  $R$  с его критическим значением. При этом если вычисленное значение  $R$  меньше критического, то считается, что связь отсутствует, а если больше или равно, то связь есть.

## ЛЕКЦИЯ № 8

### Симплекс метод

Симплекс метод или точнее группа методов изначально разрабатывался как развитие идеи планирования эксперимента в постоянно изменяющихся условиях производства. Важно отметить тот факт, что симплекс метод позволяет получить обратную связь от объектов исследования что очень важно для автоматизации производственного процесса это и послужило толчком к развитию данной группы методов. Вскоре основываясь на симплекс методе (СМ) появилось целое научное направление в области исследования процессов и объектов называемое адаптивной автоматизацией.

Смысл СМ можно изложить следующим образом на примере геодезического корабля осуществляющего промеры глубин в поиске фарватера. Поиск фарватера осуществляется с помощью лота опускаемого с корабля, когда корабль находится непосредственно в месте замера глубины.

Задачу, стоящую перед исследователями можно поставить так – как с помощью наименьшего количества замеров глубины найти наиболее глубокое место. При этом условимся, что в области исследования геодезистов дно плавно сходиться к наиболее глубокой точке и такая точка на данном участке дна одна.

Поскольку с корабля не видно направления, в котором дно более крутое то приходится последовательно промерять глубину в нескольких направлениях. Конечно, исследователям хочется как можно быстрее достичь глубокого места и соответственно не ставить лишние ненужные промеры, то есть ненужно осуществлять промеры во всех направлениях сразу, а необходимо сконцентрировать свое внимание в одном направлении, двигаясь по которому можно попасть в наиболее глубокое место за наиболее короткий

срок. Для определения данного направления геодезистам необходимо обладать какой-то информацией о глубине дна, на основании которой они смогли бы сделать вывод о дальнейшем направлении исследований. Как получить эту информацию? Очевидно, что для ответа на этот вопрос нужно провести замеры глубины. Тогда встает очередной вопрос, а, сколько необходимо производить замеров? Если бы корабль двигался все время в одном направлении (например, от одного берега к другому в поисках наиболее глубокого места), то для определения направления ему достаточно поставить два опыта, если же необходимо осуществить замеры глубины в двух направлениях (найти наиболее глубокий участок дна на всем озере), то исследователю необходимо иметь данные хотя бы о трех точках дна.

Получается, что для определения направления движения для постановки дальнейших экспериментов в  $N$  мерном факторном пространстве необходимо поставить  $N+1$  эксперимент.

Заметим что в отличие от метода Бокса-Уилсона, где на основании серии опытов известно направление для постановки дальнейших экспериментов в СМ известно лишь направления для постановки эксперимента на следующем шаге.

Таким образом, для принятия решения о дальнейшем движении в направлении более глубокого участка дна необходимо осуществить замер глубины в трех точках при этом замеры не должны осуществляться на одной прямой, поскольку в этом случае у нас будет избыточная информация об одном направлении и отсутствие информации о другом направлении. Получается, что при поиске наиболее глубокого участка дна озера необходимо осуществлять замеры по вершинам треугольника относительно возможных осей направления движения. Желательно так же чтобы все точки

лежали друг относительно друга на одинаковом расстоянии, т.е. треугольник был равнобоким.

Таким образом, мы получаем план эксперимента, который задается с помощью координат вершин треугольника.

Как мы уже и говорили выше для определения направления движения в  $N$  мерном факторном пространстве нужно  $N+1$  экспериментов. В общем случае геометрическая фигура образованная  $N+1$  вершинами и лежащая в пространстве, имеющем  $N$  координат называется симплексом. В двухмерном пространстве симплексом является треугольник, в трехмерном – пирамида.

Теперь имея данные о трех опытах, геодезисты должны принять решение о дальнейшем направлении движения корабля. Очевидно, что правильным решением будет двигаться в направлении, проходящем через точку, имеющую наименьшую глубину, при этом постановку эксперимента можно поставить в точке тоже равно удаленной относительно двух других точек. В результате такого выбора места новой постановки эксперимента мы получаем как бы отраженную плохую точку относительно противолежащей ей грани треугольника. Данное правило называется правилом отражения.

В основе данного правила лежит очевидное предположение о том, что линия, которую можно провести через отраженную (новую) и отражаемую (отбрасываемую) точки совпадает с направлением градиента функции отклика.

Описанная последовательность действий легко формализуется и может, заполнена в алгоритм для управления расчетом на ЭВМ.

Общие правила расчета СМ.

Вернемся к нашим исследователям и посмотрим, каким образом они будут выполнять поставленную передними задачу в соответствии с СМ.



В начале для сбора исходной информации необходимо поставить серию из трех опытов и получить значения функции отклика, т.е. глубины. Далее для определения направления движения необходимо сравнить между собой значения функции отклика. Зная наихудшее значение и правило отражения, мы можем найти значения факторов (координаты в которых нужно оказаться кораблю для осуществления следующего замера) и поставить эксперимент с рассчитанными значениями факторов (измерить глубину в месте с рассчитанными координатами).

Для определения значений факторов в месте постановки нового эксперимента, в случае если треугольник равносторонний можно воспользоваться формулой:

где  $N=k+1$  – число точек в исходном симплексе,  $k$  – размерность факторного пространства,  $XXX$  – натуральное значение координаты новой точки для фактора с номером  $j$ ,  $XXX$  – натуральное значения координаты фактора в отброшенном опыте.

Заметим что, получив новую точку и отбросив старую, мы вновь получаем треугольник (симплекс) к которому вновь можно применить правило отражения.

Таким образом, последовательно отражая наихудшую вершину, мы будем двигаться к поставленной цели. Но как определить где наибольшая глубина, по достижению которой можно будет закончить постановку экспериментов? Очевидно, что одним из критериев для “остановки” будет достижение максимального из возможных значений функции отклика. Например, получение функции годного 100%. Вторым критерием для остановки может стать заикленное движение симплекса вокруг одной из его вершин. В этом случае оптимальное значение очень близко к вершине, вокруг которой осуществляется вращение симплекса.

Признаком подобного заикливания может быть сохранение одной из вершин симплекса своих значений факторов на протяжении  $N+1$  отражений. В реальном производстве при постановке задачи адаптивного управления, как правило, это и есть критерий достижения оптимального значения исследуемых параметров. Поскольку производственный процесс не останавливается на достижении факторами оптимального значения, то постоянное заикливание симплекса относительно одной из вершин может говорить о нахождении факторов в оптимальном диапазоне. Как только произойдет изменение внешних условий сказывающихся на процессе, так что произойдет смещение оптимального значения функции отклика относительно уже установившегося значения факторов так тут же и симплекс начинает двигаться в нужном направлении. В этом и заключается адаптивность данного метода.

Теперь давайте обратимся к симплексу, а точнее к расстояниям между его вершинами и постараемся сделать так чтобы движение в направлении оптимума было, как можно более быстрым и для этого будем увеличивать симплекс в нужном направлении. Очевидно, что в этом случае движение в этом направлении будет осуществляться тем быстрее, чем больше будет увеличение симплекса в нужном направлении. Данный метод нахождения оптимального значения исследуемой модели называется пульсирующим симплекс методом.

Помимо пульсирующего симплекс метода существует множество различных симплекс методов основанных на изменении расстояния между вершинами и выборе направления для отображения.

Перечислим основные достоинства симплекс метода:

- адаптивность – к производственным условиям и ошибкам, возникающим при проведении эксперимента;

- легко поддается формализации и удобен для использования на ЭВМ;
- совместно с процедурой ранжирования может быть использован для качественной оценки процесса или объекта;
- при использовании нет необходимости описывать поверхность отклика с помощью плоскости или иного уравнения, что упрощает расчеты и уменьшает погрешность;
- позволяет на каждом шаге при необходимости ввести дополнительную размерность путем введения еще одной вершины симплекса. Например, вначале можно осуществить поиск оптимального значения по двум наиболее значимым факторам, а затем скорректировать поиск с учетом третьего фактора.

К недостаткам симплекс методов относят:

- ограниченность информации о поверхности отклика;
- с уменьшением градиента функции отклика эффективность симплекс метода уменьшается, поскольку начинает сказываться стандартная ошибка измерений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методических указаниях приведены основные сведения необходимые бакалаврам для успешного освоения дисциплины Моделирование процессов и объектов ОМД.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Математическое моделирование / под ред. Дж. Эндрюса, Р. Мак-Лоуна, пер. с англ. Ю.П. Гупало.: Мир.- Москва, 1979. – 279с.
2. А.А. Беленький Математическое моделирование и оптимизация процессов литья и прокатки цветных металлов / под ред. В.П. Молокова.: Металлургия. – Москва, 1983. – 160с.
3. Р. Шеннон. Имитационное моделирование систем – искусство и наука / пер. с англ. под ред. Е.К. Масловского. : Изд-во «Мир». – Москва, 1978. – 423с.
4. Прудковский Б.А. Зачем металлургу математические модели? – М.: Наука, 1989. – 192 с.