

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)“

В. С. Асланов, А. С. Ледков

Нелинейная динамика

ЭЛЕКТРОННОЕ УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Самара 2010

УДК 531

Асланов В. С.

Нелинейная динамика: Электронное учебное пособие / *Асланов В. С., Ледков А. С.* Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2010. - 92 с.

В пособии изложен ряд базовых идей и методов, применяемых для исследования нелинейных механических систем. Излагаются классические результаты теории динамических систем: структурная устойчивость, аналитические методы локальной теории в окрестности особой точки, нормальные формы, теория бифуркации фазовых портретов при изменении параметров. Пособие снабжено примерами, иллюстрирующими приводимый теоретический материал.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов, обучающихся по направлению 010800–«Механика и математическое моделирование». Пособие может быть полезно при выполнении курсовых работ, при дипломном проектировании, а также аспирантам и специалистам, занимающимся вопросами нелинейной динамики.

©Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2010

Оглавление

Введение	4
1 Теория дифференциальных уравнений	5
1.1 Существование и единственность решения	5
1.2 Линейная система	9
1.3 Потоки и инвариантные подпространства	10
1.4 Нелинейная система, устойчивые и неустойчивые многообразия	12
1.5 Линейное и нелинейное отображение	16
1.6 Замкнутые орбиты, отображения Пуанкаре и вынужденные колебания	21
1.7 Блуждающие и предельные точки, аттракторы	26
1.8 Топологическая эквивалентность и структурная устойчивость .	30
1.9 Двумерные потоки	34
1.10 Теорема Пейксото	43
2 Локальные бифуркации	49
2.1 Понятие бифуркации и бифуркационные проблемы	49
2.2 Центральные многообразия	54
2.2.1 Система Лорнца	58
2.3 Нормальные формы	67
2.4 Бифуркации положений равновесия коразмерности один	74
2.4.1 Седло-узел	74
2.4.2 Транскритическая и виллообразная бифуркации	77
2.4.3 Бифуркация Пуанкаре-Андропова-Хопфа	79
2.5 Бифуркации отображений и периодических орбит коразмерности единица	81
Литература	89

Введение

Нелинейные динамические системы широко распространены в науке и технике. До недавнего времени основным инструментом исследования таких систем были методы усреднения и теория нелинейных резонансов. В рамках данного пособия используется геометрический подход к исследованию нелинейных систем. Рассматриваемые математические модели представляют собой множества обыкновенных дифференциальных уравнений и отображений конечной размерности.

Пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются методы исследования нелинейных динамических систем как потоков и дискретных отображений. Подробно изложены метод линеаризации и метод построения отображений Пуанкаре. В качестве иллюстрации рассмотрено несколько примеров двумерных механических систем.

Вторая часть посвящена теории локальных бифуркаций для потоков и отображений, включая центральные многообразия и нормальные формы. В наиболее общей понимании теория бифуркаций представляет собой теорию равновесных решений нелинейных уравнений. Под равновесными решениями понимаются, например, стационарные решения, решения периодические по времени, квазипериодические решения. Теория бифуркаций изучает изменение качественной картины при изменении параметров системы. При общих значениях параметров обычно приходится иметь дело с системами общего положения, для которых все особые точки простые. Если система зависит от параметров, то при некоторых их значениях неизбежно встречаются вырождения, например слияние двух особых точек векторного поля.

Нужно отметить, что в последние годы большой интерес проявляется к нелинейной динамике вообще и теории бифуркаций в частности. Значительный прогресс в этой области связан с применением идей и методов общей теории особенностей дифференцируемых отображений Х.Уитни.

Глава 1

Теория дифференциальных уравнений

1.1 Существование и единственность решения

Рассмотрим дифференциальное уравнение, как систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.1)$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор-функция, зависящая от времени, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкая функция, определенная на подмножестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что *векторное поле* f порождает *поток* $\phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\phi_t(x) = \phi(x, t)$ – гладкая функция, определенная для всех x из U и значений t из некоторого интервала $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, причем ϕ удовлетворяет (1.1) в том смысле, что

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi(x, t) \right|_{t=\tau} = f(\varphi(x, \tau)) \quad (1.2)$$

для всех $x \in U$ и $\tau \in I$. В своей области определения функция ϕ_t обладает групповыми свойствами, то есть ϕ_0 является тождественным оператором и $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$. Системы вида (1.1), в которых векторное поле не содержит времени явно, называются *автономными*.

Если для начального условия

$$x(0) = x_0 \in U \quad (1.3)$$

найдено решение, такое что

$$\phi(x_0, 0) = x_0, \quad (1.4)$$

то $\phi(x_0, t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ задает *фазовую кривую*, *траекторию* или *орбиту* дифференциального уравнения (1.1) с *базой* в точке x_0 . Поскольку векторное поле

автономной системы (1.1) инвариантно относительно сдвигов времени, решение с базой в моменты $t_0 \neq 0$ всегда можно переместить в момент $t = 0$.

Нужно отметить, что в учебниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям [1, 2] акцентируется внимание на отдельных фазовых кривых и их свойствах. В нелинейной динамике исследуются семейства таких кривых, то есть глобальное поведение потока $\phi_t : u \rightarrow \mathbb{R}^n$. Говоря о динамической системе будем иметь ввиду поток на дифференцируемом многообразии M , порождаемом векторным полем, рассматриваемом как отображение

$$f : M \rightarrow TM,$$

где TM – касательное расслоение многообразия M [3]. Почти во всех случаях, когда мы явно имеем дело с фазовыми пространствами, представляющими собой многообразия, мы будем иметь глобальную систему координат (единственную карту), что позволит нам по существу работать в накрывающем пространстве, т. е. в \mathbb{R}^n по некоторому подходящему модулю, как в случаях тора $T^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ и цилиндра $S^1 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$.

При обсуждении таких подмногообразий решений, как устойчивое, неустойчивое и центральное многообразие, будем работать с копиями вещественных евклидовых пространств, локально определяемых как графики.

Сформулируем без доказательства основную теорему локального существования и единственности решений.

Теорема 1.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое открытое подмножество евклидова пространства (или дифференциального многообразия M), $f : M \rightarrow TM$ – непрерывно дифференцируемое (класса C^1) отображение и $x_0 \in U$. Тогда существуют некоторая константа $c > 0$ и единственное решение $\phi(x_0, \cdot) : (-c, c) \rightarrow U$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению $\dot{x} = f(x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$.

На самом деле, функция f должна быть лишь (локально) липшицевой, т.е. $|f(y) - f(x)| \leq K|x - y|$ для некоторого $K < \infty$, где K называется константой Липшица для f . Следовательно, мы можем иметь дело с кусочно-линейными функциями типа тех, которые появляются в задачах с трением и переменным направлением скольжения.

Интуитивно ясно, что любое решение может покинуть U через достаточно большое время, именно поэтому мы говорим о локальности данной теоремы. Действительно, векторные поля $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $x(t)$ покидает любое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ за конечное время построить довольно легко. Например,

$$\dot{x} = 1 + x^2 \tag{1.5}$$

имеет общее решение $x(t) = \operatorname{tg}(t + c)$. Таким образом, хотя существует много уравнений на некомпактных фазовых пространствах (таких как \mathbb{K}^n), для которых решение существует во времени глобально, мы не можем утверждать этого в конкретных случаях без дальнейшего исследования.

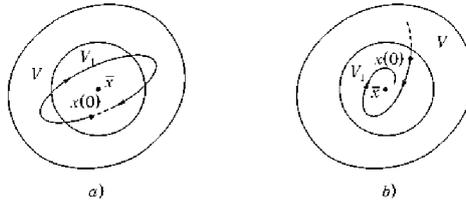


Рис. 1.1. Устойчивая (а) и асимптотически устойчивая (б) точки

Важный класс решений дифференциального уравнения составляют *неподвижные точки*, называемые также *положениями равновесия*. Неподвижные точки определяются как нули векторного поля $f(x) : f(\bar{x}) = 0$. Неподвижная точка называется *устойчивой*, если всякое решение с близкой базой остается близким к \bar{x} во все время, т. е. для любой окрестности V точки \bar{x} из U существует окрестность $V_1 \subset V$ такая, что любое решение $x(x_0, t)$ с $x_0 \in V_1$ определено и лежит в V при всех $t > 0$. Если, кроме того, V_1 можно выбрать так, что $x(t) \rightarrow \bar{x}$ при $t \rightarrow \infty$, то x называют *асимптотически устойчивой*. Примеры устойчивой и асимптотически устойчивой точки показаны на рисунке 1.1.

Тип устойчивости, показанный на рисунке 1.1(а) также называют нейтральным, он характерен для таких неподвижных точек, как *центры*. Асимптотически устойчивые неподвижные точки называют *стоками*. Неподвижная точка называется *неустойчивой*, если она не является устойчивой. Примерами таких положений равновесия являются *седловые точки* и *источники*.

Определенные выше понятия устойчивости локальны по своей природе, поскольку связаны лишь с поведением решений вблизи неподвижной точки x . Даже если такие решения остаются во все время ограниченными, другие решения могут глобально не существовать.

Часто для того чтобы показать ограниченность $x(t)$ для всех t и всех (ограниченных) начальных значений $x(0)$, достаточно использовать метод функций Ляпунова, связанный с построением некоторой величины типа энергии, убывающей для достаточно больших значений $|x|$ [4]. Данный метод предполагает отыскание некоторой положительно определенной функции $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, называемой *функцией Ляпунова*, которая убывает вдоль фазовых кривых дифференциального уравнения.

Теорема 1.2. Пусть \bar{x} – неподвижная точка уравнения (1.1), $V : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ – дифференцируемая функция, определенная в некоторой окрестности $W \subseteq U$ точки \bar{x} , такая, что:

- (i) $V(\bar{x}) = 0$ и $V(x) > 0$ для $x \neq \bar{x}$;
- (ii) $\dot{V}(x) \leq 0$ в проколотой окрестности $W - \{\bar{x}\}$.

Тогда неподвижная точка \bar{x} устойчива. Более того, если

(iii) $\dot{V}(x) \leq 0$ в $W - \{\bar{x}\}$;

то \bar{x} асимптотически устойчива.

Здесь

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x)$$

представляет собой производную от V вдоль фазовых кривых уравнения (1.1).

В случае, если можно выбрать $W = \mathbb{R}^n$ в соответствии с условием (iii), \bar{x} называют *глобально асимптотически устойчивой*, при этом все решения остаются ограниченными и в действительности приближаются к \bar{x} при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, устойчивость равновесий и ограниченность решений можно проверить, не решая фактически дифференциальное уравнение. Однако не существует общих методов отыскания подходящих функций Ляпунова, хотя в задачах механики зачастую хорошим кандидатом является энергия.

Для задач с несколькими положениями равновесия можно искать локальные функции Ляпунова или попытаться найти некоторую компактную гиперповерхность $S \subset \mathbb{R}^n$ такую, что векторное поле во всех точках S направлено внутрь нее. Если такая поверхность существует, то любое решение, начинающееся внутри или на S , никогда не сможет покинуть внутренности S и поэтому остается все время ограниченным.

Локальная теорема существования (1.1) превращается в глобальную во всех случаях, когда мы имеем дело с компактными многообразиями M вместо открытых пространств типа \mathbb{R}^n :

Теорема 1.3. *Фазовые кривые дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$, $x \in M$, где M компактно и $f \in C^1$, определены для всех $t \in \mathbb{R}$ [5].*

Так, потоки на сферах и торах определены глобально, поскольку не существует пути, по которому решение могло бы покинуть такое многообразие.

Локальную теорему можно дополнить утверждением о «хорошем» характере зависимости решений от начальных условий [6]:

Теорема 1.4. *Пусть множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, а функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладает липшицевой константой K . Пусть $y(t)$, $z(t)$ — решения уравнения $\dot{x} = f(x)$ на замкнутом интервале $[t_0, t_1]$. Тогда для всех $t \in [t_0, t_1]$ выполняется*

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| e^{K(t-t_0)}.$$

Такая непрерывная зависимость не исключает экспоненциально быстрого разбегания решений.

1.2 Линейная система

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.6)$$

где A – матрица размерности $n \times n$ с постоянными коэффициентами. Под решением (1.6) подразумевается векторнозначная функция $x(x_0, t)$, зависящая от времени t и начального условия

$$x(0) = x_0, \quad (1.7)$$

где $x(0) = x_0$ – решение задачи Коши (1.6)-(1.7). В терминах потока ϕ мы имеем $x(x_0, t) \equiv \phi_t(x_0)$. Теорема 1.4 гарантирует, что решение $x(x_0, t)$ линейной системы определено для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Такое глобальное существование во времени обычно не имеет места в нелинейных системах. Для системы (1.6) такой проблемы не существует, поскольку ее решение дается формулой

$$x(x_0, t) = e^{tA}x_0, \quad (1.8)$$

где e^{tA} – матрица $n \times n$. Она матрица определяется при помощи сходящегося ряда

$$e^{tA} = 1 + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots \quad (1.9)$$

Общее решение системы (1.6) можно получить как линейную комбинацию n линейно независимых решений $\{x^1(t), \dots, x^n(t)\}$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x^j(t), \quad (1.10)$$

где n неизвестных констант c_j определяются начальными условиями. Если матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов v^j , $j = 1, \dots, n$, то мы можем принять за базис пространства решений вектор-функции

$$x^j(t) = e^{\lambda_j t} v^j, \quad (1.11)$$

где λ_j – собственное значение, соответствующее v^j . Для простых комплексных собственных значений $\lambda_j, \bar{\lambda}_j = \alpha_j + i\beta_j$ можем принять

$$\begin{aligned} x^j &= e^{\alpha_j t} (v^R \cos \beta t - v^I \sin \beta t), \\ x^{j+1} &= e^{\alpha_j t} (v^R \sin \beta t + v^I \cos \beta t), \end{aligned} \quad (1.12)$$

в качестве соответствующей пары (вещественных) линейно независимых решений. При наличии кратных собственных значений и числе собственных векторов менее n можно построить *присоединенные* векторы[7]. В результате мы вновь получим множество из n линейно независимых решений. Обозначим

матрицу фундаментальных решений, столбцами которой являются эти n решений, как

$$X(t) = [x^1(t), \dots, x^n(t)]. \quad (1.13)$$

Столбцы $x^j(t)$, $j = 1, \dots, n$ матрицы $X(t)$ образуют базис в пространстве решений уравнения (1.6). Нетрудно показать, что

$$e^{tA} = X(t)X^{-1}(0). \quad (1.14)$$

Уравнение (1.6) также можно решить, предварительно отыскав обратимое преобразование T , которое диагонализует матрицу A или в случае кратных собственных значений приводит ее к жордановой нормальной форме. Уравнение (1.6) можно переписать в виде

$$\dot{y} = Jy, \quad (1.15)$$

где $J = T^{-1}AT$ и $x = Ty$. Уравнение (1.15) просто для работы, однако, поскольку столбцы матрицы T являются собственными (или присоединенными) векторами для A , общий объем вычислений будет таким же, как в предыдущем методе. Экспоненту e^{tA} можно вычислить как

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}. \quad (1.16)$$

Всякий собственный вектор v^j , отвечающий вещественному собственному значению λ_j матрицы A , является для матрицы e^{tA} собственным вектором с собственным значением $e^{\lambda_j t}$. Кроме того, если $\text{span}\{Re(v^j), Im(v^j)\}$ – собственное пространство, отвечающее комплексно сопряженной паре $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$, то оно также является собственным пространством, отвечающим $e^{\lambda_j t}, e^{\bar{\lambda}_j t}$.

1.3 Потоки и инвариантные подпространства

Матрицу e^{tA} можно рассматривать как отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n : для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $x(x_0, t) = e^{tA}x_0$ представляет собой точку, в которой будет находиться решение с базой в x_0 через время t . Следовательно, оператор e^{tA} содержит *глобальную* информацию о множестве всех решений уравнения (1.6), так как формула (1.8) справедлива для всех точек $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что e^{tA} определяет *поток* на \mathbb{R}^n и что этот поток (или «фазовый поток») порождается векторным полем Ax , определенном на \mathbb{R}^n : e^{tA} является примером потока ϕ_t .

Поток $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ можно понимать как множество всех решений уравнения (1.6). В этом множестве некоторые решения играют особую роль: те, которые лежат на линейных подпространствах, натянутых на собственные векторы. Эти подпространства *инвариантны* относительно e^{tA} , в частности, если

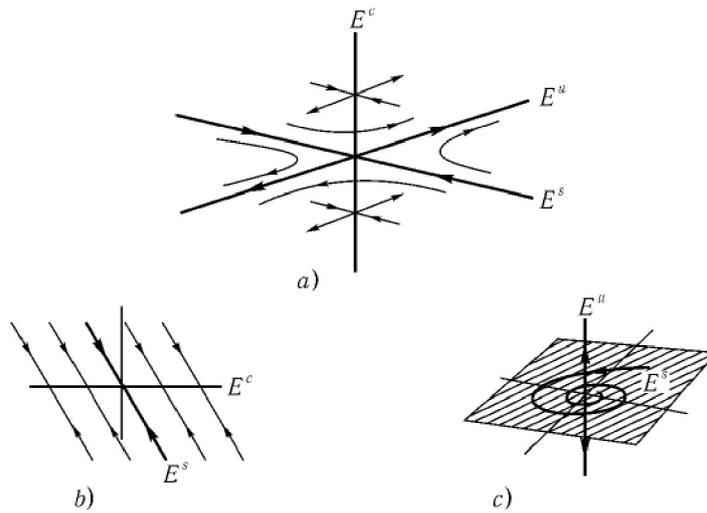


Рис. 1.2. Инвариантные подпространства

v^j — (вещественный) собственный вектор A , и, следовательно, e^{tA} , то решение с базой $c_j v^j$ остается в $\text{span} v^j$ все время. В самом деле,

$$x(cv^j, t) = cv^j e^{\lambda_j t}. \quad (1.17)$$

Аналогично, (двумерное) подпространство, натянутое на $\text{span}\{Re(v^j), Im(v^j)\}$, где v^j — комплексный собственный вектор, инвариантно относительно e^{tA} . То есть, собственные пространства A являются инвариантными подпространствами для потока.

Мы будем разделять подпространства, натянутые на собственные векторы, на три класса:

- устойчивое подпространство $E^s = \text{span}\{v^1, \dots, v^{n_s}\}$,
- неустойчивое подпространство $E^u = \text{span}\{u^1, \dots, u^{n_u}\}$,
- центральное подпространство $E^c = \text{span}\{w^1, \dots, w^{n_c}\}$,

где v^1, \dots, v^{n_s} — собственные (и присоединенные) векторы, отвечающие собственным значениям с отрицательными вещественными частями, u^1, \dots, u^{n_u} — собственные (и присоединенные) векторы, отвечающие собственным значениям с положительными вещественными частями, а векторы w^1, \dots, w^{n_c} отвечают собственным значениям с нулевыми вещественными частями. Очевидно, $n_s + n_u + n_c = n$. Данные названия отражают то обстоятельство, что решения, лежащие на E^s , характеризуются экспоненциальным затуханием (монотонным или осцилляционным), решения, лежащие на E^u , экспоненциально

растут, а решения из E^c не обладают экспоненциальным ростом или затуханием. В отсутствие кратных собственных значений решения последнего типа или осциллируют с постоянной амплитудой (если $\lambda, \bar{\lambda} = \pm i\beta$), или остаются постоянными (если $\lambda = 0$). Схематический чертеж приведен на рисунке 1.2 для конкретных примеров. В случае (а) показаны три подпространства, (б)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

и $E^s = \text{span}(1, -4)$, $E^c = \text{span}(1, 0)$, $E^u = \emptyset$; (с)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

и $E^s = \text{span}\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$, $E^c = \emptyset$, $E^u = (0, 0, 1)$.

При наличии кратных собственных значений с различными алгебраическими и геометрическими кратностями решения на E^c могут возрастать

1.4 Нелинейная система, устойчивые и неустойчивые многообразия

Из основной теоремы о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения (теорема 1.1), следует, что для гладких функций $f(x)$ решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, x(0) = x_0 \quad (1.18)$$

определено, по крайней мере, в некоторой окрестности $t \in (-c, c)$ точки $t = 0$. Таким образом, локальный поток $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ определяется формулой $\phi_t(x_0) = x(t, x_0)$ по аналогии с линейным случаем, хотя общую формулу типа e^{tA} для данного случая дать невозможно.

Хорошей стартовой точкой для изучения нелинейной системы $\dot{x} = f(x)$ является отыскание *нулей* функции $f(x)$ или *неподвижных точек* уравнения (1.18). Мы будем также называть их *нулями*, *положениями равновесия* или *стационарными решениями*. При исследовании практических задач даже отыскание стационарных решений может стать очень сложной задачей. Допустим, что мы имеем неподвижную точку \bar{x} , так что $f(\bar{x}) = 0$, и хотим охарактеризовать поведение решений вблизи этой точки. Для этого можно линеаризовать (1.18) в точке \bar{x} , и перейти к изучению линейной системы

$$\dot{\xi} = Df(\bar{x})\xi, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.19)$$

где $Df = [\partial f_i / \partial x_j]$ – матрица Якоби, составленная из частных производных первого порядка функции

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

$x = \bar{x} + \xi$, $|\xi| \ll 1$. Так как (1.19) является линейной системой вида (1.6), мы можем легко исследовать ее. В частности, линеаризованное отображение потока $D\phi_t(\bar{x})\xi$, порождаемое (1.18) в неподвижной точке \bar{x} , получается из (1.19) путем интегрирования:

$$D\phi_t(\bar{x})\xi = e^{tDf(\bar{x})}\xi. \quad (1.20)$$

Важный вопрос состоит в том, что же можно сказать о решениях уравнения (1.18), исходя из нашего знания уравнения (1.19)? Ответом являются два фундаментальных результата из теории динамических систем, приводимых ниже: резюмируя их, можно сказать, что локальное поведение (для малых $|\xi|$) допускает перенос в определенных «хороших» случаях.

Теорема 1.5 (Хартман-Гробмана). *Если $Df(\bar{x})$ не имеет нулевых или чисто мнимых собственных значений, то существует гомеоморфизм h , определенный в некоторой окрестности U точки \bar{x} в \mathbb{R}^n , локально переводящий орбиты нелинейного потока ϕ_t уравнения (1.18) в орбиты линейного потока $e^{tDf(\bar{x})}$ уравнения (1.19). Этот гомеоморфизм сохраняет направление орбит и может быть выбран так, чтобы сохранить параметризацию при помощи времени.*

Более деликатная ситуация, в которой нелинейные и линейные потоки связаны диффеоморфизмами (теорема Штернберга), требует определенных условий отсутствия резонансов между собственными значениями $Df(\bar{x})$.

Если $Df(\bar{x})$ не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью, то \bar{x} называется *гиперболической* или *невыврожденной* неподвижной точкой и асимптотическое поведение решений вблизи нее (и, следовательно, тип устойчивости) определяется при линеаризации. Если какое-то собственное значение имеет нулевую вещественную часть, то вопрос об устойчивости нельзя решить по линейному приближению, как показывает следующий пример:

Пример 1. *Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение*

$$\ddot{x} + \varepsilon x^2 \dot{x} + x = 0. \quad (1.21)$$

Перепишем его в виде системы, введя замену переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^2 x_2 \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

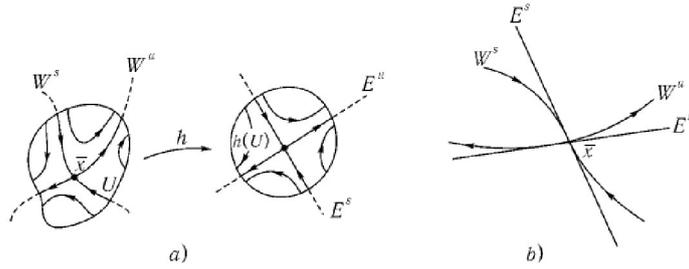


Рис. 1.3. Линеаризация и инвариантные подпространства: (а) теорема Хартмана; (б) локально устойчивое и неустойчивое многообразия.

найдем собственные значения λ , $\bar{\lambda} = \pm i$. Однако если $\varepsilon \neq 0$, то неподвижная точка $(x_1, x_2) = (0, 0)$ не является центром, как в линейной системе, а негиперболическим или слабо притягивающим устойчивым фокусом (спиральным стоком) при $\varepsilon > 0$ и неустойчивым фокусом (отталкивающим источником) при $\varepsilon < 0$.

Дадим определения. Определим локальное устойчивое и неустойчивое многообразия в точке \bar{x} , $W_{loc}^s(\bar{x})$ и $W_{loc}^u(\bar{x})$ так:

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(\bar{x}) &= \{x \in U \mid \varphi_t(x) \rightarrow \bar{x} \text{ при } t \rightarrow \infty \text{ и } \varphi_t(x) \in U \text{ для всех } t \geq 0\}, \\ W_{loc}^u(\bar{x}) &= \{x \in U \mid \varphi_t(x) \rightarrow \bar{x} \text{ при } t \rightarrow -\infty \text{ и } \varphi_t(x) \in U \text{ для всех } t \leq 0\}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где $U \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая окрестность неподвижной точки \bar{x} . Инвариантные многообразия W_{loc}^s и W_{loc}^u являются нелинейными аналогами плоских устойчивого и неустойчивого собственных пространств E^s , E^u линейной проблемы (1.19). Следующий результат говорит о том, что W_{loc}^s и W_{loc}^u в действительности касаются E^s , E^u в точке \bar{x} .

Теорема 1.6 (об устойчивом многообразии для неподвижной точки). *Допустим, что уравнение $\dot{x} = f(x)$ имеет гиперболическую неподвижную точку \bar{x} . Тогда существуют локальное устойчивое и неустойчивое многообразия W_{loc}^s , W_{loc}^u имеющие те же размерности n_s , n_u , что и собственные пространства E^s , E^u линеаризованной системы (1.19), и касающиеся E^s , E^u в точке \bar{x} . W_{loc}^s , W_{loc}^u имеют ту же гладкость, что и функция f .*

Доказательства теорем 1.5 и 1.6 приведены в [8]. На рисунке приведены иллюстрации этих теорем.

Локальные инвариантные многообразия W_{loc}^s , W_{loc}^u допускают глобальные аналогии W^s , W^u получаемые путем отображения точек из W_{loc}^s вдоль фазо-

вого потока назад во времени и точек из W_{loc}^u вперед во времени:

$$\begin{aligned} W^s(\bar{x}) &= \bigcup_{t \leq 0} \varphi_t(W_{loc}^s(\bar{x})), \\ W^u(\bar{x}) &= \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(W_{loc}^u(\bar{x})). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Существование и единственность решений уравнения (1.18) гарантируют, что два устойчивых (или неустойчивых) многообразия различных неподвижных точек \bar{x}^1, \bar{x}^2 не могут пересечься, кроме того, $W^s(\bar{x})$ (или $W^u(\bar{x})$) не имеет самопересечений. Тем не менее, пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий разных неподвижных точек или одной и той же неподвижной точки могут иметь место и, в действительности, являются источником многих сложностей, обнаруженных в поведении динамических систем. Глобальные устойчивое и неустойчивое многообразия не обязаны быть подмногообразиями, погруженными в \mathbb{R}^n , так как они могут извиваться некоторым сложным образом, приближаясь к себе произвольно близко.

Пример 2. Для иллюстрации идей данного раздела рассмотрим простую систему на плоскости

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= -y + x^2, \end{aligned} \quad (1.25)$$

имеющую единственную неподвижную точку в начале координат. Для линеаризованной системы мы имеем следующие инвариантные подпространства:

$$\begin{aligned} E^s &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}, \\ E^u &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

В данном случае мы можем проинтегрировать нелинейную систему точно. Вместо того чтобы получить решение в форме $(x(t), y(t))$, перепишем (1.25) как (линейную) систему первого порядка посредством исключения времени:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} + x. \quad (1.27)$$

Это уравнение можно проинтегрировать непосредственно и получить семейство фазовых кривых

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \quad (1.28)$$

где константа c определяется начальными условиями. Из теоремы 1.5 и формулы (1.26) следует, что $W_{loc}^u(0, 0)$ можно представить как график $y = h(x)$, причем $h(0) = h'(0) = 0$, так как W_{loc}^u касается E^u в точке $(0, 0)$. Следовательно, в (1.27) $c = 0$, и мы имеем

$$W^u(0, 0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{x^2}{3} \right\}. \quad (1.29)$$

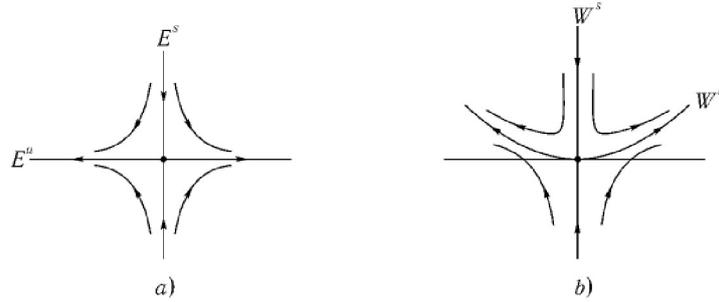


Рис. 1.4. Устойчивое и неустойчивое многообразия для уравнения (1.25): (a) линейная система; (b) нелинейная система.

Заметим, что если $x(0) = 0$, то $x \equiv 0$, откуда $x(t) \equiv 0$, и мы видим, что $W^s(0, 0)$. Заметим, что в данном примере мы нашли глобальные многообразия, см. рис. 1.4.

Как хорошо известно, нелинейные системы обладают предельными множествами, отличными от неподвижных точек; например, часто встречаются замкнутые, или *периодические орбиты*. Для периодической орбиты существует T , $0 < T < \infty$, такое, что $x(T) = x(t + T)$ для всех t . Они так же, как и неподвижные точки имеют устойчивые и неустойчивые многообразия.

Обозначим через γ замкнутую орбиту, через U — некоторую ее окрестность, тогда определим

$$W_{loc}^s(\gamma) = \{x \in U \mid |\varphi_t(x) - \gamma| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \text{ и } \varphi_t(x) \in U \text{ при } t \geq 0\},$$

$$W_{loc}^u(\gamma) = \{x \in U \mid |\varphi_t(x) - \gamma| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty \text{ и } \varphi_t(x) \in U \text{ при } t \leq 0\}.$$

1.5 Линейное и нелинейное отображение

Мы увидели, как линейная система (1.6) порождает отображение потока $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, когда e^{tA} — матрица $n \times n$. Для фиксированного $t = \tau$ положим $e^{tA} = B$, тогда матрица B постоянна и разностное уравнение

$$x_{n+1} = Bx_n \text{ или } x \mapsto Bx \quad (1.30)$$

представляет собой дискретную динамическую систему, полученную из потока (1.6). Точно так же нелинейная система и ее поток ϕ_t порождают нелинейное отображение

$$x_{n+1} = G(x_n) \text{ или } x \mapsto G(x) \quad (1.31)$$

где $G = \phi_\tau$ — нелинейная векторнозначная функция. Если поток ϕ_τ гладкий (скажем, r раз непрерывно дифференцируемый), то G — гладкое отображение,

имеющее гладкое обратное, т. е. *диффеоморфизм*. Это один из примеров того, как непрерывный поток порождает дискретное отображение.

Диффеоморфизмы или дискретные динамические системы можно также изучать сами по себе, можно также рассматривать с большей общностью необратимые отображения, такие как

$$x \mapsto x - x^2. \quad (1.32)$$

Орбита линейного отображения $x \mapsto Bx$ представляет собой последовательность точек $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, определенную формулой $x_{i+1} = Bx_i$. Любая начальная точка порождает единственную орбиту при условии, что B не имеет нулевых собственных значений.

Мы определим устойчивое, неустойчивое и центральное подпространства по аналогии с линейными векторными полями:

$E^s = \text{span}\{n_s \text{ собственных (присоединенных) векторов с собственными значениями, по модулю меньшими единицы}\}$,

$E^u = \text{span}\{n_u \text{ собственных (присоединенных) векторов с собственными значениями, по модулю большими единицы}\}$,

$E^c = \text{span}\{n_c \text{ собственных (присоединенных) векторов с собственными значениями, по модулю равными единице}\}$.

Орбиты на E^s и E^u характеризуются соответственно сжатием и расширением. В отсутствие кратных собственных значений сжатие и растяжение ограничены геометрическими прогрессиями: существуют постоянные $c > 0$, $a < 1$ такие, что для $n \geq 0$

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq ca^n |x_0|, \text{ если } x_0 \in E^s, \\ |x_{-n}| &\leq ca^n |x_0|, \text{ если } x_0 \in E^u. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Если имеются кратные собственные значения, тогда, как и в случае потоков, сжатие (или растяжение) не обязательно будет экспоненциальным. Тем не менее, экспоненциальная оценка по-прежнему может быть построена, если $\lambda_j < 1$ для всех собственных значений, по модулю равных единице, то \bar{x} называется гиперболической неподвижной точкой.

Существует *теория диффеоморфизмов*, параллельная теории потоков, в частности теорема Хартмана-Гробмана о линеаризации, и результаты об инвариантных многообразиях применимы к отображениям точно также, как к потокам:

Теорема 1.7. [Харман-Гробман] Пусть $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - C^{-1} -диффеоморфизм с гиперболической неподвижной точкой \bar{x} . Тогда существует гомеоморфизм h , определенный в некоторой окрестности U точки \bar{x} , такой что $h(G(\xi)) = DG(\bar{x})h(\xi)$ для всех $\xi \in U$

Теорема 1.8. [об устойчивом многообразии для неподвижной точки] Пусть $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - C^{-1} -диффеоморфизм с гиперболической неподвижной точкой

\bar{x} . Тогда существуют локальные устойчивое и неустойчивое многообразия $W_{loc}^s(\bar{x})$, $W_{loc}^u(\bar{x})$, касающиеся в точке \bar{x} собственных пространств E^s , E^u отображения $DG(\bar{x})$ и имеющие соответствующие размерности. $W_{loc}^s(\bar{x})$, $W_{loc}^u(\bar{x})$ имеют ту же гладкость, что и отображение G .

Глобальное устойчивое и неустойчивое многообразия определяются также, как для потоков, путем объединения последовательных прообразов и образов локальных многообразий. Имеем

$$W_{los}^s(\bar{x}) = \{x \in U | G^n(x) \rightarrow \bar{x} \text{ при } n \rightarrow +\infty \text{ и } G^n(x) \in U, \forall n \geq 0\},$$

$$W_{los}^u(\bar{x}) = \{x \in U | G^{-n}(x) \rightarrow \bar{x} \text{ при } n \rightarrow +\infty \text{ и } G^{-n}(x) \in U, \forall n \geq 0\},$$

и

$$W^s(\bar{x}) = \bigcup_{n \geq 0} G^{-n}(W_{los}^s(\bar{x})),$$

$$W^u(\bar{x}) = \bigcup_{n \geq 0} G^n(W_{los}^u(\bar{x})).$$

Нужно понимать, что потоки и отображения имеют принципиальное различие: если *орбита* или *траектория* потока $\phi_t(p)$ представляет собой *кривую* в \mathbb{R}^n , орбита отображения $\{G^n(p)\}$ это *последовательность точек*. Таким образом, если инвариантные многообразия потоков состоят из объединенных фазовых кривых, то в случае отображений они являются объединениями орбит, состоящих из дискретных точек.

Запись $G^2(p)$ означает $G(G(p))$, аналогично $G^n(p)$ означает n -ю итерацию p при отображении G . Таким образом, если имеется цикл из k различных точек $p_j = G^j(p_0)$, $j = 0, \dots, k-1$, и $G^k(p_0) = p_0$, то они образуют *периодическую орбиту* периода k .

Несмотря на проблемы, обусловленные кратностью, при отсутствии у матрицы B собственных значений, по модулю равных единице, знание собственных значений достаточно для вывода об устойчивости. В этом случае $(0, 0)$ называют *гиперболической* неподвижной точкой. Устойчивость такой орбиты определяется линеаризованным отображением $DG^k(p_0)$, или, равносильно, $DG^k(p_j)$ для любого j . В силу цепного правила, мы имеем

$$DG^k(p_0) = DG^k(G^{k-1}(p_0)) \cdot \dots \cdot DG(G(p_0)) \cdot DG(p_0).$$

Как и для потоков, поведение линейного отображения 1.30 определяется собственными значениями и собственными векторами матрицы B . Для одномерного отображения, когда $B = b$ есть скаляр, а орбита точки $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ задается просто геометрической прогрессией $p_j = b^j p_0$, существует четыре общих случая и три необычных, перечисленных ниже

1. $b < 1$ $- \leftarrow p_1 - 0 - p_0 - p_2 \rightarrow -$
2. $b \in (-1, 0)$ $- \rightarrow p_1 - 0 - p_2 - p_0 \leftarrow -$
3. $b \in (0, 1)$ $- \rightarrow 0 - p_2 - p_1 - p_0 \leftarrow -$
4. $b > 1$ $- \leftarrow 0 - p_0 - p_1 - p_2 \rightarrow -$
5. $b = -1$ $-- p_1 - -0 - -p_0 = p_2 --$
6. $b = 0$ $\rightarrow \rightarrow 0 = p_{j,(j \geq 1)} - p_0 - \leftarrow \leftarrow$
7. $b = +1$ $-- -0 - -p_0 = p_{j,(\forall j)} --$

1-Источник с переменной ориентацией. 2-Сток с переменной ориентацией. 3-Сток, сохраняющий ориентацию. 4-Источник, сохраняющий ориентацию. 5-Ориентация меняется, все точки периода 2. 6-Все точки переходят в 0 при первой итерации (необратимое). 7-Ориентация сохраняется, все точки неподвижные.

Тип устойчивости неподвижной точки $x = 0$ определяется абсолютной величиной собственных значений матрицы B . Если для всех собственных значений $|\lambda_j| < 1$, мы имеем сток, если $|\lambda_j| > 1$ для некоторых собственных значений и $|\lambda_i| < 1$ — для других, то седловую точку, а если $|\lambda_j| > 1$ для всех собственных значений, то источник. Если для некоторых собственных значений $|\lambda_j| = 1$, то в направлениях v^j , соответствующих этим собственным значениям, норма сохраняется (если только эти значения не являются кратными, с нетривиальными жордановыми блоками).

Если четное число собственных значений имеют отрицательные вещественные части, то отображение $x \mapsto Bx$ сохраняет ориентацию, а при наличии нечетного числа собственных значений с отрицательной вещественной частью оно изменяет ориентацию.

Пример 3 (Двумерное отображения). В качестве примера двумерного отображения с довольно сложной динамикой рассмотрим простое линейное отображение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (x, y) \in T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2, \quad (1.34)$$

где фазовым пространством является двумерный тор. На плоскости (накрывающее пространство) мы имеем просто седловую точку с собственными векторами

$$v^{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix},$$

отвечающими собственным значениям $\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Так как отображение линейно, то $W^s(0) = E^s$, $W^u(0) = E^u$, поэтому $\text{span}\{[1, (1 + \sqrt{5})/2]^T\}$ представляет собой неустойчивое многообразие, а $\text{span}\{[1, (1 - \sqrt{5})/2]^T\}$ — устойчивое многообразие. Однако нашим фазовым пространством является тор T^2 , полученный путем отождествления точек, координаты которых отличаются на целые числа. Отображение корректно определено на T^2 ,

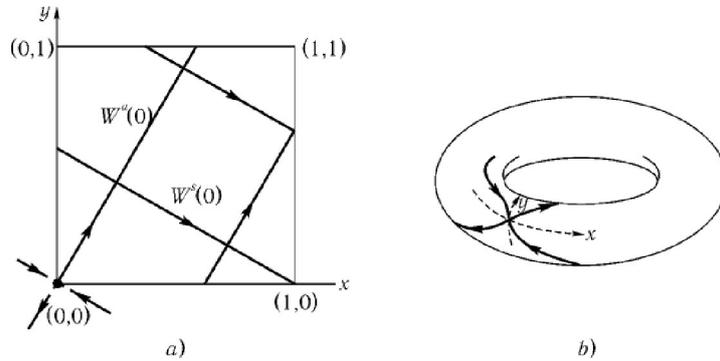


Рис. 1.5. Линейное отображение на торе (гиперболический торический автоморфизм): (а) на покрывающем пространстве \mathbb{R}^2 ; (б) на T^2 .

поскольку оно сохраняет периодическую решетку. Любая точка единичного квадрата $[0, 1) \times [0, 1)$, отображаемая в другой квадрат, перемещается назад в исходный квадрат; например, если $(x, y) = (-1, 4, +1, 2)$, мы устанавливаем $(x, y) = (0, 6; 0, 2)$ (рисунок 1.5). Таким образом, неустойчивое многообразие «выходит из квадрата» в точке $(2/(1 + \sqrt{5}), 1)$ и возникает вновь, с тем же угловым коэффициентом, в точке $(2/(1 + \sqrt{5}), 0)$, затем выходит в точке $(1, (\sqrt{5} - 1)/2)$ и т. д. Поскольку угловые коэффициенты W^s и W^u иррациональны $(1 \pm \sqrt{5})/2$, эти многообразия плотны на единичном квадрате (или плотно обматывают тор). Таким образом, каждое из многообразий приближается само к себе произвольно близко, поэтому оно не является вложенным подмногообразием T^2 .

Пример 4 (Уравнение Дуффинга). Этот пример может показаться довольно искусственным, но многие интересные с физической точки зрения системы обладают подобными свойствами. Рассмотрим уравнение Дуффинга с периодическим возбуждением и отрицательной линейной жесткостью

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x^3 = \beta \cos \omega t, \quad (1.35)$$

являющееся нелинейным диффеоморфизмом на плоскости, обладает гиперболической седловой точкой p , у которой устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально, в некотором смысле похоже на рассмотренное выше отображение тора (рисунок 1.6). Довольно легко увидеть, что если существует одна точка $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$, отличная от p , то должно существовать бесконечное множество таких гомоклинических точек: действительно, $G^n(q) \rightarrow p$ при $n \rightarrow \pm\infty$, и эта сходимость для малых значений $|q - p|$ описывается линейной системой. Более того, если отображение сохраняет ориентацию, то между двумя гомоклиническими точками q , $G(q)$ должна располагаться хотя бы одна дальнейшая точка из $W^u(p) \cap W^s(p)$

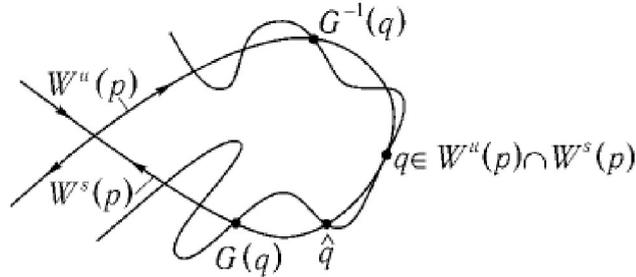


Рис. 1.6. Гомоклинические орбиты

(обозначенная \hat{q} на рисунке 1.6). Орбита $\{G^n(q)\}$ точки q называется гомоклинической орбитой, она играет важную роль в глобальной динамике отображения. В частности, весьма извилистый характер глобальных многообразий $W^u(p)$ и $W^s(p)$ в окрестности точки p обуславливает чувствительную зависимость орбиты $\{G^n(x_0)\}$ от начального условия x_0 , поэтому наличие гомоклинических орбит ведет к появлению сумасбродного поведения. Это лежит в основе хаотического поведения. Если устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(p_1)$, $W^u(p_2)$ двух различных неподвижных точек пересекаются, получающаяся в результате орбита называется гетероклинической.

1.6 Замкнутые орбиты, отображения Пуанкаре и вынужденные колебания

В классических учебниках по дифференциальным уравнениям устойчивость замкнутых орбит или периодических решений дифференциальных уравнений обсуждается в терминах мультипликаторов Флоке. Не будет представлена более геометрическую, хотя и эквивалентную по существу интерпретация: *отображение Пуанкаре*.

Пусть γ — периодическая орбита некоторого потока ϕ в \mathbb{R}^n , порожденного нелинейным векторным полем $f(x)$. Возьмем сначала *локальное сечение* $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ размерности $n - 1$. Гиперповерхность Σ не обязательно плоская, но она должна быть выбрана так, чтобы поток в каждой точке был ей *транsverсален*. Это достигается, если $f(x) \cdot n(x) \neq 0$ для всех $x \in \Sigma$, где $n(x)$ — единичная нормаль к Σ в точке x . Обозначим (единственную) точку, где γ пересекает Σ , как p и возьмем некоторую окрестность $U \subseteq \Sigma$ точки p . (Если γ имеет несколько пересечений с Σ , сократим Σ так, чтобы осталось только одно пересечение.) Тогда *первый возврат*, или *отображение Пуанкаре* $P : U \rightarrow \Sigma$ определяется

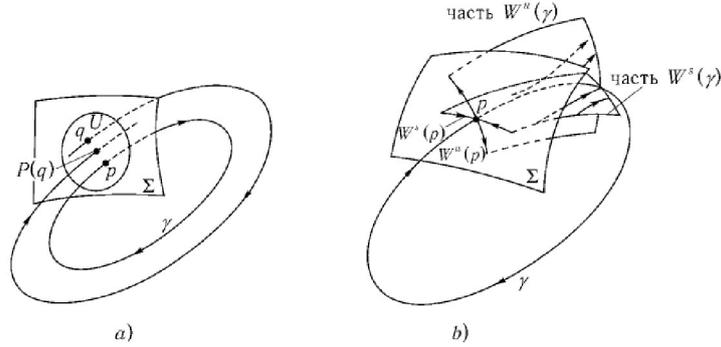


Рис. 1.7. Отображение Пуанкаре: (а) поперечное сечение и отображение; (б) замкнутая орбита

для некоторой точки $q \in U$ как

$$P(q) = \phi_\tau(q), \quad (1.36)$$

где $\tau = \tau(q)$ — время, требующееся для того, чтобы орбита $\phi_\tau(q)$ с базой в точке q впервые вернулась на Σ . Заметим, что обычно величина τ зависит от q и не обязана равняться $T = T(p)$, периоду орбиты γ . Тем не менее, $\tau \rightarrow T$ при $q \rightarrow p$.

Ясно, что p является неподвижной точкой отображения P , и нетрудно видеть, что устойчивость этой точки соответствует устойчивости γ для потока ϕ_t . В частности, если p — гиперболическая точка, и линеаризованное отображение $DP(p)$ имеет n_s собственных значений с модулями, меньшими единицы, и n_u — с модулями, большими единицы ($n_s - n_u = n - 1$), то для отображения $\dim W^s(p) = n_s$, $\dim W^u(p) = n_u$. Поскольку орбиты отображения P , лежащие на W^s и W^u , образованы пересечениями орбит (фазовых кривых) потока ϕ_t с Σ , размерности $W^s(\gamma)$ и $W^u(\gamma)$ превышают на единицу соответствующие размерности для отображения. Это проще всего уяснить из рисунка 1.7.

В качестве примера рассмотрим плоскую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (1.37)$$

и возьмем в качестве нашего сечения

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y = 0\}.$$

Преобразуя (1.37) к полярным координатам $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$, получим

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (1.38)$$

а сечение примет вид

$$\Sigma = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid r > 0, \theta = 0\}.$$

Глобальный поток несложно получить, решая (1.38):

$$\phi_t(r_0, \theta_0) = \left(\left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right)^{-1/2}, t + \theta_0 \right).$$

Время движения τ для каждой точки $q \in \Sigma$ равно просто $\tau = 2\pi$, поэтому отображение Пуанкаре дается формулой

$$P(r_0) = \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-1/2}. \quad (1.39)$$

Очевидно, P имеет неподвижную точку $r_0 = 1$, соответствующую круговой замкнутой орбите единичного радиуса для (1.38). Здесь P — одномерное отображение, а его линейная часть дается формулой

$$\begin{aligned} DP(1) &= \left. \frac{dP}{dr_0} \right|_{r_0=1} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-3/2} \cdot \left. \left(-\frac{2e^{-4\pi}}{r_0^3} \right) \right|_{r_0=1} = e^{-4\pi} < 1. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Таким образом, неподвижная точка $p = 1$ устойчива и γ — притягивающая замкнутая орбита.

Заметим, что мы могли бы вычислить $DP(1)$ немного проще, рассматривая поток векторного поля (1.38), линеаризованного вблизи замкнутой орбиты $r = 1$. Поскольку $\frac{d}{dr}(r - r^3) = 1 - 3r^2$, имеем линейную систему

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -2\xi, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (1.41)$$

с потоком

$$D\phi_t(\xi_0, \theta_0) = (e^{-2t}\xi_0, t + \theta_0) \quad (1.42)$$

Следовательно, $DP(1) = e^{-2(2\pi)} = e^{-4\pi}$, как и выше.

Для демонстрации общей взаимосвязи между отображениями Пуанкаре и линеаризованными потоками напомним некоторые результаты теории Флоке. Пусть $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + T)$ — решение с базой $x(0) = p \in \Sigma$, лежащее на замкнутой орбите γ . Линеаризуя дифференциальное уравнение вблизи γ , получаем систему

$$\dot{\xi} = Df(\tilde{x}(t))\xi, \quad (1.43)$$

где $Df(\tilde{x}(t))$ — T -периодическая матрица размерности $n \times n$. Можно показать, что любая матрица фундаментальных решений такой T -периодической системы представима в виде

$$X(t) = Z(t)e^{tR}, Z(t) = Z(t + T), \quad (1.44)$$

где X , Z и R – некоторые матрицы размерности $n \times n$. В частности, можно выбрать $X(0) = Z(0) = I$, так что

$$X(T) = Z(T)e^{TR} = Z(0) = Z(0)e^{TR} = e^{TR}, \quad (1.45)$$

Отсюда следует, что поведение решений в окрестности γ определяется собственными значениями постоянной матрицы e^{TR} . Эти собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ называются *характеристическими мультипликаторами (Флоке) или корнями*, а собственные значения μ_1, \dots, μ_n матрицы R являются *характеристическими показателями* замкнутой орбиты γ . Мультипликатор, соответствующий возмущениям вдоль γ , всегда равен единице; будем обозначать его λ_n . Если ни один из модулей остальных $n - 1$ мультипликаторов не равен единице, они определяют устойчивость γ .

При подходящем выборе базиса последний столбец матрицы e^{TR} равен $(0, \dots, 0, 1)^T$, и матрицу $DP(p)$ линеаризованного отображения Пуанкаре размерности $(n - 1) \times (n - 1)$ можно получить, просто удаляя из e^{TR} последние строку и столбец. Тогда первые $(n - 1)$ мультипликаторов $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ являются собственными значениями отображения Пуанкаре.

Хотя матрица R в (1.44) не определяется решением уравнения (1.43) однозначно, собственные значения матрицы e^{TR} однозначно определены (e^{TR} можно заменить любой подобной матрицей $C^{-1}e^{TR}C$). Однако для вычисления этих собственных значений нам все-таки нужно некоторое выражение для e^{TR} , которое можно получить лишь путем построения некоторого множества n линейно независимых решений, формирующих матрицу $X(t)$. Исключая особые случаи, подобные вышеприведенному примеру, эта задача обычно сложна и требует привлечения методов теории возмущений или использования специальных функций.

Мы видели, как векторное поле $f(x)$ на \mathbb{R}^n порождает отображение потока ϕ_t на \mathbb{R}^n и, в окрестности замкнутой орбиты, (локальное) отображение Пуанкаре P на некоторой трансверсальной гиперповерхности Σ . Другой важный способ получения отображения из потока используется для неавтономных, вынужденных периодических колебаний. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, t); \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (1.46)$$

где функция $f(\cdot, t) = f(\cdot, t + T)$ периодична по t с периодом T . Систему (1.46) можно переписать как автономную за счет увеличения размерности на единицу, добавляя время в качестве явной переменной состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta), \\ \dot{\theta} &= 1; \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Фазовым пространством является многообразие $\mathbb{R}^n \times S^1$, где круговая компонента $S^1 = \mathbb{R}(\text{ mod } T)$ отражает периодичность векторного поля f по θ . Для этой задачи мы можем определить *глобальное* сечение

$$\Sigma = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 | \theta = \theta_0\}, \quad (1.48)$$

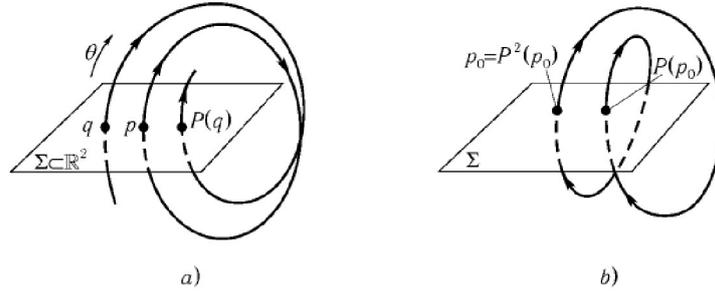


Рис. 1.8. Отображение Пуанкаре для вынужденных колебаний: (а) периодическая орбита с периодом T и неподвижная точка $p = P(t)$; (б) субгармоника периода $2T$

так как все решения пересекают Σ трансверсально ввиду равенства $\dot{\theta} = 1$ (1.47). Отображение Пуанкаре $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$, если оно определено глобально, задается формулой

$$P(x_0) = \pi \cdot \phi_T(x_0, \theta_0), \quad (1.49)$$

где $\phi_t : \mathbb{R}^n \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n \times S^1$ – поток системы (1.47), а π обозначает проекцию на первый аргумент. Заметим, что здесь время движения T одинаково для всех точек $x \in \Sigma$. Другими словами, $P(x_0) = x(x_0, T + \theta_0)$, где $x(x_0, t)$ – решение (1.47) с базой в точке $x(x_0, \theta_0) = x_0$

Отображение Пуанкаре можно также получить как дискретную динамическую систему, порождаемую потоком $\psi(x, t)$ зависящего от времени векторного поля (1.46). Так как f имеет период T , мы получаем $\psi(x, nT) \equiv \psi^n(x, T) = \psi_T^n(x)$. В этом смысле отображение $P(x_0) = \psi_T(x_0)$ представляет собой другой пример дискретной динамической системы.

Система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (1.50)$$

с решением

$$\phi_t(x_0, \theta_0) = \left(\left(\frac{1}{x_0} - t \right)^{-1}, t + \theta_0 \right)$$

и отображением Пуанкаре

$$P(x_0) = \left(\frac{1}{x_0} - 2\pi \right)^{-1}, \quad x \in \left(-\infty, \frac{1}{2\pi} \right)$$

на поверхности $\Sigma = \{(x, \theta) | \theta = 0\}$ показывает, что P может быть не определено глобально. Здесь траектории потока ϕ_t с базами $x_0 \geq 1/(2\pi)$ стремятся к бесконечности за время $t \leq 2\pi$. Однако $P : U \rightarrow \Sigma$ обычно определено для некоторого подмножества $U \subset \Sigma$.

На рисунке 1.8 приводится иллюстрация отображения Пуанкаре для вынужденных колебаний. Как и в предыдущем случае, легко увидеть, что неподвижная точка p отображения P соответствует некоторой периодической орбите периода T для потока. Вдобавок, периодическая точка периода $k > 1$ ($P^k(p) = p$, но $P^j(p) \neq p$ для $1 \leq j \leq k - 1$) соответствует субгармонике периода kT . Здесь P^k означает отображение P , повторенное k раз, т. е. $P^2(p_0) = P(P(p_0))$, и т. д. Разумеется, это применимо и к автономному случаю, обсуждавшемуся ранее. Такие периодические точки всегда входят в группы из k штук: p_0, \dots, p_{k-1} такие, что $P(p_i) = p_{i+1}$, $0 \leq i \leq k - 2$ и $p_0 = P(p_{k-1})$.

Поскольку определение отображения Пуанкаре основывается на знании потока дифференциального уравнения, это отображения нельзя вычислить, не обладая общим решением этого уравнения. Однако при помощи методов теории возмущений и усреднения в определенных случаях можно строить отображение приближенно, и таким образом может быть получена ценная информация при параллельном использовании обычных методов с геометрическим подходом теории динамических систем.

1.7 Блуждающие и предельные точки, аттракторы

Рассмотрим несколько вспомогательных технических приемов, которые нам понадобятся для дальнейшего изучения потоков и отображений.

Определим *инвариантное множество* S для потока ϕ_t или отображения G как такое подмножество \mathbb{R}^n , для которого

$$\phi_t(x) \in S \text{ (или } G(x) \in S) \text{ для } x \in S \text{ для всех } t \in \mathbb{R}. \quad (1.51)$$

Устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки или периодической орбиты представляют примеры инвариантных множеств. Однако более важными для изучения долговременного поведения являются *неблуждающие множества*. Как мы уже видели, неподвижные точки и замкнутые орбиты важны для изучения динамических систем, так как они отображают стационарное или повторяющееся поведение. Обобщением этих множеств является неблуждающее множество Ω . Точка p называется *неблуждающей для потока* ϕ_t (соответственно, для отображения G), если для любой окрестности U точки p найдется сколь угодно большое число t (соответственно, $n > 0$) такое, что $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$ (соответственно, $G^n(U) \cap U \neq \emptyset$). Ω является множеством всех таких точек p . Таким образом, неблуждающая точка лежит на или вблизи орбит, возвращающихся в свою заданную окрестность. Неподвижные точки и периодические орбиты являются, очевидно, неблуждающими множествами.

Пример 5. Рассмотрим гармонический осциллятор с вязким трением

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x = 0 \quad (1.52)$$

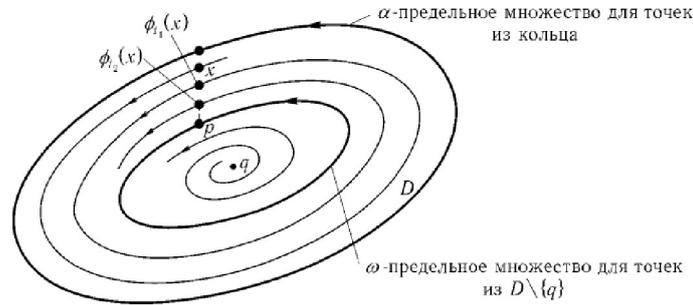


Рис. 1.9. Примеры α и ω предельных множеств. D – открытый круг, ограниченный внешней периодической орбитой

начало координат $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ – единственная неблуждающая точка, тогда как для осциллятора в отсутствие трения

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (1.53)$$

все точки $x \in \mathbb{R}^2$ будут неблуждающими, так как фазовая плоскость (x, \dot{x}) заполнена непрерывным семейством периодических орбит.

Не все инвариантные множества состоят из блуждающих точек.

Пример 6. Рассмотрим линейное отображение

$$x \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} x; \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (1.54)$$

имеет инвариантные (собственные) подпространства, натянутые на векторы

$$E^s = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad E^c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

однако все точки $p \in E^s$ (исключая начало) блуждающие. В свою очередь, точки $q \in E^c$ неблуждающие, так как все они неподвижны.

Так как множество блуждающих точек открыто, Γ_2 замкнуто, и оно должно включать в себя замыкания множеств неподвижных точек и периодических орбит.

Точка p называется ω -предельной точкой для x , если существуют такие точки $\phi_{t_1}(x), \phi_{t_2}(x), \dots$ на орбите с базой в x , что $\phi_{t_i}(x) \rightarrow p$ и $t \rightarrow \infty$. Точка q называется α -предельной точкой для x , если существует такая последовательность, для которой $\phi_{t_i}(x) \rightarrow q$ и $t \rightarrow -\infty$. Для отображений G числа t_i в этих определениях целые, α - (соответственно, ω -) предельные множества

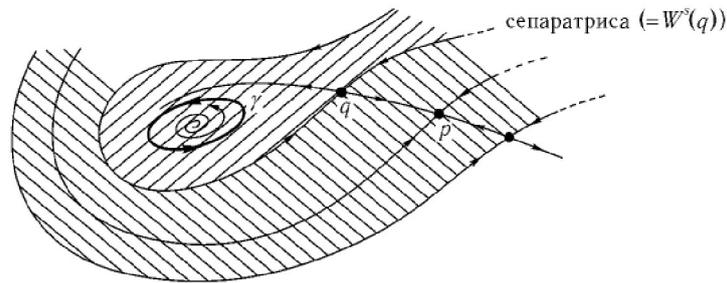


Рис. 1.10. Притягивающие области замкнутой орбиты γ и неподвижной точки p

$\alpha(x)$, $\omega(x)$ определяются как множества α - и ω -предельных точек для x . На рисунке 1.9 показан пример предельных множеств.

Замкнутое инвариантное множество $A \in \mathbb{R}^n$ называется *притягивающим множеством*, если существует некоторая окрестность U этого множества такая, что $\phi_t(x) \in U$ для $t \geq 0$ и $\phi_t(x) \rightarrow A$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $x \in U$. Множество $\bigcup_{t \leq 0} \phi_t(U)$ называется *областью притяжения* множества A (оно является устойчивым многообразием A). Притягивающее множество с течением времени захватывает все траектории, стартующие в его области притяжения. *Отталкивающее множество* определяется аналогично, с заменой t на $-t$. Области притяжения несвязных притягивающих множеств необходимо не пересекаются и разделяются устойчивыми многообразиями непритягивающих множеств (рисунок 1.10).

Во многих задачах мы в состоянии найти *область захвата* – замкнутое связное множество $D \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\phi_t(D) \subset D$ для всех $t > 0$. Для этого достаточно показать, что векторное поле во всех точках границы D направлено вовнутрь. В этом случае мы можем определить соответствующее притягивающее множество как

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(D)$$

Замкнутое множество A является притягивающим множеством для отображения G , если оно обладает некоторой окрестностью U такой, что $G^n(U) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$. Как и в случае потоков, если D – область захвата $G(U) \subset U$, то соответствующее притягивающее множество таково:

$$A = \bigcap_{n \geq 0} G^n(D).$$

Будем называть *аттрактором* притягивающее множество, содержащее плотную орбиту. Аналогично определяется *репеллер*, как отталкивающее множество.

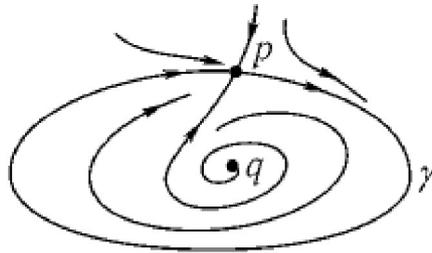


Рис. 1.11. Плоский фазовый портрет для усредненного уравнения ван дер Поля

Пример Рюэлля [9] показывает, что даже для одномерных потоков притягивающие множества могут быть очень сложными. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad (1.55)$$

имеющую счетное множество неподвижных точек $x = 0, \pm 1/n, n = 1, 2, \dots$. Отрезок $[-1, 1]$ является притягивающим множеством, которое содержит отталкивающие неподвижные точки $\pm 1/2n, n = 1, 2, \dots$ и притягивающие неподвижные точки $\pm 1/(2n-1), n = 1, 2, \dots$, что можно проверить, рассматривая линеаризованное векторное поле

$$\left(-4x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + \pi x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)\Big|_{x=\pm 1/n} = \frac{\pi}{n^2} \cos \pi n \quad (1.56)$$

Неподвижная точка $x = 0$ не является ни репеллером, ни аттрактором. Это, так называемый *квазиаттрактор* [10].

Проиллюстрируем понятия, введенные в данном разделе с помощью уравнения Ван дер Поля со слабым возбуждением

$$\ddot{x} + \alpha\varphi(x)\dot{x} + x = \beta p(t)$$

Не вдаваясь в детали отметим, что этому уравнению отвечает фазовый портрет, показанный на рисунке 1.11. Ясно, что замкнутая кривая $\gamma \cup \{p\}$, включающая неподвижную точку p , представляет собой притягивающее множество, однако точка p не является ни аттрактором, ни репеллером, так как она одновременно играет роль α - и ω -предельной точки для всех точек $x \in \gamma$. В действительности γ заполнена блуждающими точками, и неподвижные точки ряд являются единственными компонентами неблуждающего множества. Ввиду существования в притягивающем множестве $\gamma \cup \{p\}$ замкнутой орбиты она действительно является аттрактором, однако ясно, что в отсутствие возмущений все решения, за исключением имеющего базу в q , стремятся к p слева при $t \rightarrow +\infty$. Этот пример, среди прочих, должен служить предупреждением, что

данное выше определение аттрактора не очень подходит для физических приложений. Позже будет дано модифицированное определение, более пригодное для использования в физических задачах.

Этот пример также демонстрирует необходимость включения требования $\phi_t(x) \in U$ для всех $t \geq 0$, $x \in U$, так как существуют орбиты, стартующие справа от p и покидающие окрестность точки p лишь временно, возвращаясь в нее окончательно при $t \rightarrow \infty$.

Аттрактор не обязательно должен быть устойчивым по отношению к малым возмущениям векторного поля или отображения. Хотя это требование включено во многие предшествующие определения, в подавляющем большинстве физических примеров таких структурно устойчивых аттракторов не существует.

1.8 Топологическая эквивалентность и структурная устойчивость

Введем определение. Пусть $F \in C^r(\mathbb{R}^n)$, $r, k \in \mathbb{Z}^+$, $k \leq r$ и $\varepsilon > 0$. Назовем G возмущением класса C^k и величины $\varepsilon > 0$, если существует такое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$, что $F = G$ на множестве $\mathbb{R}^n - K$ и для всех таких (i_1, \dots, i_n) , для которых $i_1 + \dots + i_n = i \leq k$ выполнено

$$\left| \frac{\partial^i (F - G)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right| < \varepsilon.$$

Отметим, что в этом определении функции F и G могут быть как векторными полями, так и отображениями.

Теперь, когда мы можем говорить о «близости» отображений или векторных полей, рассмотрим вопросы топологической эквивалентности и структурной устойчивости.

Два отображения F, G класса C^r называются C^k -эквивалентными или C^k -сопряженными ($k \leq r$), если существует такой C^k -диффеоморфизм h , что $h \circ F = G \circ h$. C^0 -эквивалентность называется также *топологической эквивалентностью*.

Из этого определения следует, что h переводит орбиту $\{F^n(x)\}$ в орбиту $\{G^n(x)\}$.

Два векторных поля f, g класса C^r называются C^k -эквивалентными ($k \leq r$), если существует C^k -диффеоморфизм h , переводящий орбиты $\phi_r^f(x)$ поля f в орбиты $\phi_r^g(x)$ поля g и сохраняющий их ориентации, но не обязательно сохраняющий параметризацию по времени. Если h сохраняет параметризацию по времени, то это *влечет сопряженность*.

Для двух C^k эквивалентных систем ($k \geq 1$), линеаризованных в соответствующих неподвижных точках, собственные значения пропорциональны.

Из определения эквивалентности следует, что для любых x и t_1 найдется такое t_2 , что

$$h(\phi_{t_1}^f(x)) = \phi_{t_2}^g(x)(h(x)). \quad (1.57)$$

Одной из причин несохранения в общем случае параметризации является то, что периоды замкнутых орбит двух потоков могут различаться.

Отображение $F \in C^r(\mathbb{R}^n)$ (соответственно, векторное поле f класса C^r) называется *структурно устойчивым*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что любое возмущение F (соответственно, f) класса C^1 и величины ε топологически эквивалентно F (соответственно, f).

На первый взгляд, использование C^0 -эквивалентности может показаться слишком грубым, и возникает искушение заменить ее на C^k -эквивалентность, где $k > 0$. Однако такое требование было бы излишне жестким, так как из него следует, что для неподвижных точек p и $q = h(p)$ эквивалентных отображений f и g собственные значения линеаризованных систем $\dot{\xi} = Df(p)\xi$ и $\dot{\eta} = Dg(q)\eta$ должны быть пропорциональны друг другу. Например, линейные системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

и

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

не будут C^k -эквивалентными ни для каких $\varepsilon \neq 0$ и $k \geq 1$. В этом примере отсутствие дифференциальной эквивалентности очевидно, поскольку в первом случае фазовые кривые задаются графиками вида $y = C_1x$, а во втором — вида $y = C_2|x|^{1+\varepsilon}$. Любая такая пара кривых с постоянными $C_1, C_2 \neq 0$ недиффеоморфна в начале координат.

Гомеоморфная эквивалентность не делает различий между узлами, вырожденными узлами и фокусами: например, двумерные линейные векторные поля с матрицами

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

порождают потоки, C^0 -эквивалентные потоку узла с матрицей

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

Ясно, однако, что с точки зрения C^0 -эквивалентности стоки, седла и источники различаются.

В качестве следующей иллюстрации структурной устойчивости потоков и отображений рассмотрим двумерное линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (1.61)$$

и отображение

$$x \rightarrow Bx, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (1.62)$$

Допустим в первом случае, что A не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью, а во втором случае — что B не имеет собственных значений, по модулю равных единице. Мы утверждаем, что при выполнении этих условий обе системы структурно устойчивы.

Рассмотрим малое возмущение системы (1.61):

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon f(x), \quad (1.63)$$

где функция f имеет компактный носитель. Так как A обратимо, то, по теореме о неявной функции, уравнение

$$Ax + \varepsilon f(x) = 0, \quad (1.64)$$

для достаточно малых значений ε имеет единственное решение $\bar{x} = O(\varepsilon)$ вблизи точки $x = 0$. Кроме того, так как собственные значения матрицы линеаризованной системы

$$\dot{\xi} = [A + \varepsilon Df(\bar{x})]\xi$$

непрерывно зависят от ε , они не могут пересечь мнимую ось, если величина ε остается малой по сравнению с вещественными частями собственных значений матрицы A . Таким образом, возмущенная система (1.64) имеет единственную неподвижную точку с собственными пространствами и инвариантными многообразиями, имеющими те же размерности, что и невозмущенная система и локально ε -близкими по положению и градиенту к невозмущенным многообразиям. Такие же наблюдения применимы к дискретной системе (1.62) и соответствующему малому возмущению

$$x \rightarrow Bx + \varepsilon g(x). \quad (1.65)$$

В обоих случаях задача состоит в отыскании гомеоморфизма, переводящего орбиты линейной системы в орбиты возмущенной нелинейной системы. В частности, для дискретной системы мы должны доказать, что существует такой гомеоморфизм h , что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{B+\varepsilon g} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Для потока следует заменить B на e^{tA} , а $B + \varepsilon g$ — на поток ϕ_t , порождаемый векторным полем (1.64) (в данном случае они сопряжены). Дальнейшее доказательство, по существу, совпадает с доказательством теоремы Хартмана [11]).

Очевидно, векторное поле (или отображение), имеющее негиперболическую неподвижную точку, не может быть структурно устойчивым, так как малое возмущение может привести к исчезновению такой точки (если матрица линеаризованной системы необратима ввиду наличия нулевого собственного значения) или к превращению ее в гиперболический сток, седло или источник (если эта матрица имеет чисто мнимые собственные значения). Подобные рассуждения применимы и к периодическим орбитам, поэтому мы вправе сформулировать такое важное требование к структурно устойчивым потокам или отображениям: *все неподвижные точки и замкнутые орбиты должны быть гиперболическими*. Однако одного этого условия недостаточно, чтобы гарантировать структурную устойчивость, так как в игру могут вступить более тонкие, глобальные эффекты.

Важное достоинство структурно устойчивой системы заключается в том, что для нее любая достаточно близкая к ней система обладает теми же качественными свойствами. Однако, поведение структурно устойчивых систем для потоков размерности три и более или для диффеоморфизмов размерности два и более может быть предельно сложным. Структурная устойчивость не является даже *типичным свойством* в том смысле, что мы можем найти структурно неустойчивую (и сложную) систему, которая остается неустойчивой при малых возмущениях, при этом непрерывно изменяя свой класс топологической эквивалентности.

Определение структурной устойчивости зависит от класса систем, с которым мы имеем дело. В нашем основном определении мы считали допустимыми все C^1 , ε возмущения векторных полей класса C^r в \mathbb{R}^n . Если мы ограничиваемся некоторым подмножеством, скажем, *гамильтоновыми* векторными полями класса C^r в \mathbb{R}^2 , то ситуация меняется. Так, линейная система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x, \quad \omega \neq 0\end{aligned}\tag{1.66}$$

обладает эллиптической точкой (центр) $(x, y) = (0, 0)$, окруженной непрерывным семейством негиперболических замкнутых орбит и является устойчивой по отношению к возмущениям из данного подмножества. Напротив, система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= 0\end{aligned}\tag{1.67}$$

обладает прямой вырожденных неподвижных точек (ось x) и не является структурно устойчивой, так как мы можем найти такое гамильтоново возмущение, которое приводит к образованию изолированной неподвижной точки эллиптического либо седлового (гиперболического) типа вблизи начала. Очевидно, обе этих системы структурно неустойчивы по отношению к произвольным возмущениям класса C^r .

1.9 Двумерные потоки

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \quad (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{1.68}$$

где f, g — (достаточно гладкие) функции, описывающие некоторую физическую модель. При исследовании системы (1.68) обычно сначала находят неподвижные точки, в которых $f(x, y) = g(x, y) = 0$. Линеаризуя (1.68) в одной из таких точек (x, y) , получим

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \tag{1.69}$$

или в более компактном виде

$$\dot{\xi} = Df(\bar{x}, \bar{y})\xi. \tag{1.70}$$

Если собственные значения матрицы $Df(\bar{x}, \bar{y})$ имеют ненулевые вещественные части, то решение линейной системы (1.70) $\xi(t) = e^{tDf(\bar{x}, \bar{y})\xi(0)}$ не только определяет локальное асимптотическое поведение, но и описывает, в соответствии с теоремой Хартмана и теоремой об устойчивом многообразии, локальную топологическую структуру фазового портрета. Как показывает следующий пример, требование отсутствия нулевых собственных значений существенно.

После нахождения неподвижных точек и исследования их устойчивости (возможно, используя в случае негиперболических точек локальные функции Ляпунова), мы захотим проверить существование у системы (1.68) периодических орбит. При этом полезны следующие два результата.

Теорема 1.9 (Пуанкаре-Бендиксона). *Всякое непустое компактное ω - или α -предельное множество плоского потока, не содержащее неподвижных точек, является замкнутой орбитой.*

Данный результат поможет установить существование замкнутых орбит, в частности, в следующем упражнении.

Доказательство единственности в данном примере значительно сложнее, за исключением случая $\varepsilon \ll 1$. Однако если векторное поле таково, что C_1 и C_2 ограничивают некоторое узкое кольцо R , то можно доказать единственность, установив знакопостоянство величины $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$. Мы приведем пример такого типа в первом разделе второй главы.

Следующий результат в определенных случаях позволяет установить отсутствие замкнутых орбит.

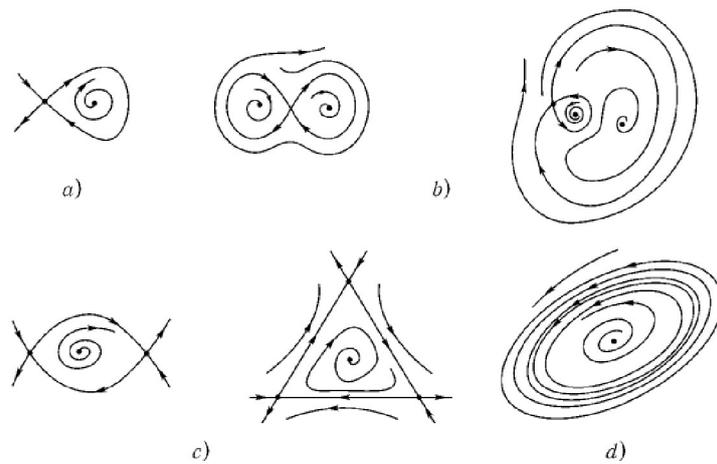


Рис. 1.12. Некоторые предельные множества для потоков на плоскости: (a) гомоклиническая орбита или седловая петля; (b) двойные седловые петли; (c) гомоклинические циклы, образованные гетероклиническими орбитами; (d) ленты периодических орбит

Теорема 1.10 (критерий Бендиксона). *Если в некоторой односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$ выражение $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ не равно нулю тождественно и не изменяет знака, то уравнение (1.68) не имеет замкнутых орбит, целиком лежащих в D .*

Все возможные неблуждающие множества для потоков на плоскости принадлежат к одному из следующих трех классов:

- 1) неподвижные точки;
- 2) замкнутые орбиты;
- 3) совокупности неподвижных точек и соединяющих их траекторий (То есть траектории асимптотически приближаются к этим точкам при $t \rightarrow \infty$).

Вышеупомянутые траектории называются *гетероклиническими орбитами*, если они соединяют разные точки, и *гомоклиническими орбитами*, если они соединяют некоторую точку саму с собой. Замкнутые пути, образованные гетероклиническими орбитами, называются *гомоклиническими циклами*. Заметим, что неподвижные точки, входящие в такие циклы, должны быть седловыми (если они гиперболичны), так как источники и стоки всегда имеют в своей окрестности блуждающие точки. Некоторые примеры таких предельных множеств показаны на рисунке 1.12.

Для потоков на неплоских двумерных многообразиях, таких как тор, могут существовать предельные множества, не являющиеся ни замкнутыми орбитами, ни предельными точками или гомоклинными циклами. В частности, иррациональный линейный поток, порожаемый векторным полем

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= 1, \\ \dot{\phi} &= \pi, \quad (\theta, \phi) \in T^2\end{aligned}\tag{1.71}$$

имеет всюду плотную орбиту, так что любая точка на T^2 — неблуждающая.

Таким образом, глобальная структура фазовых кривых для двумерных потоков обычно гораздо богаче по сравнению с одномерными системами, в которых периодических орбит нет, а неподвижные точки упорядочены и соединяются со своими непосредственными соседями и только с ними. Существование таких гетероклинных соединений в системах более высокой размерности зависит от соотношения размерностей устойчивых и неустойчивых многообразий соседних неподвижных точек; в любом случае отыскать такие соединения, как правило, очень трудно, если только система не обладает особой симметрией или другими свойствами. Наш первый главный пример иллюстрирует этот момент, а также знакомит с двумя важными специальными типами систем: гамильтоновы и градиентные потоки. В системах каждого из этих типов глобальная структура потока определяется линиями уровня некоторой вещественнозначной функции.

Рассмотрим пример системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\zeta x - \lambda y + xy, \\ \dot{y} &= \lambda x - \zeta y + \frac{1}{2}(x^2 - y^2),\end{aligned}\tag{1.72}$$

Здесь $0 \leq \zeta \leq 1$ - коэффициент затухания, а $\lambda(|\lambda| \ll 1)$ - параметр расстройки. При $\zeta = 0$ система (1.72) становится *гамильтоновой*:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}\tag{1.73}$$

для которой функция Гамильтона (энергия)

$$H(x, y) = -\frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}\left(xy^2 - \frac{x^3}{3}\right)\tag{1.74}$$

является отображением $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Критические точки H соответствуют неподвижным точкам потока гамильтоновых уравнений (1.73). Более того, поскольку

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} \equiv 0,\tag{1.75}$$

линии уровня $H(x, y) = const$, являются фазовыми кривыми для (1.73). Таким образом, в нашем примере нетрудно изобразить фазовый портрет — см.

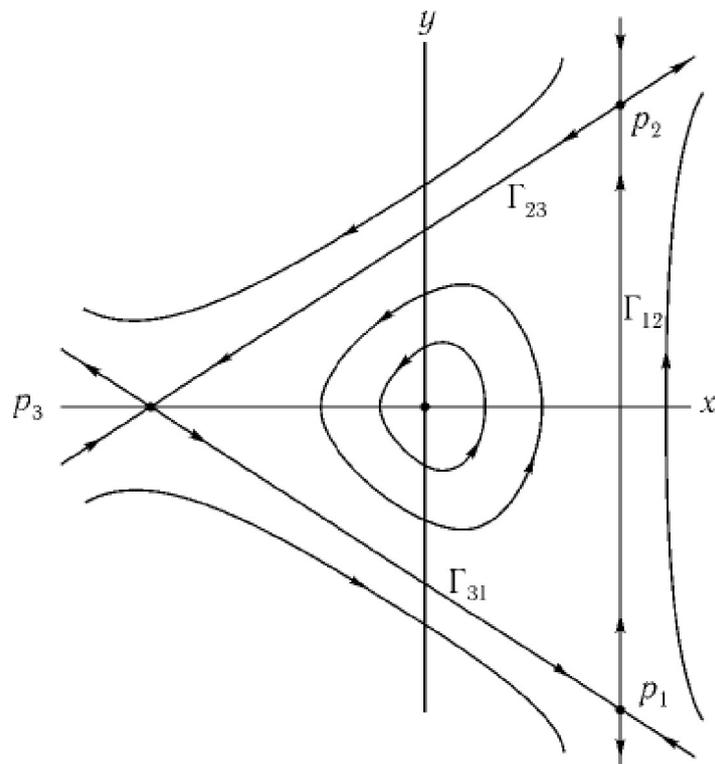


Рис. 1.13. Фазовый портрет уравнения (1.72); $\zeta = 0, \lambda > 0$

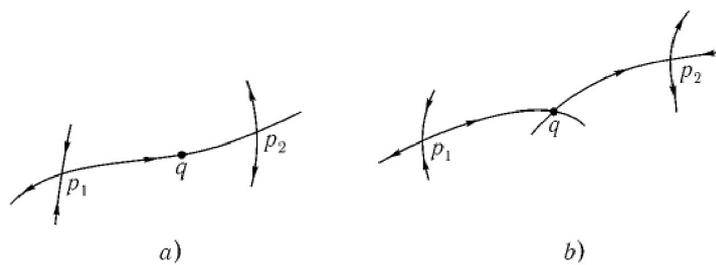


Рис. 1.14. Гетероклинические точки $q \in W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$ для потоков в \mathbb{R}^2 : (а) допустимые; (б) недопустимые

рис. 1.8.2. Такую систему называют интегрируемой, так как решения, или интегральные кривые, лежат на поверхностях уровня некоторой гладкой функции. Заметим, что три седловые точки $p_3 = (-2\lambda, 0)$ и $p_{2,1} = (\lambda, \pm\sqrt{3}\lambda)$ связаны между собой. Соединительные кривые $\Gamma_{ij} = W^u(p_i) \cap W^s(p_j)$ служат примерами седловых соединений или гетероклинических орбит (если такая кривая соединяет седловую точку саму с собой, ее называют гомоклинической орбитой). Здесь эти орбиты возникают как результат наличия интеграла Гамильтона, но седловые соединения могут иметь место и в негамильтоновых системах. Если $\zeta > 0$, то все три соединения разрушаются и неустойчивые многообразия $W^u(p_i)$ будут иметь компоненты, приближающиеся к неподвижной точке в начале координат при $t \rightarrow \infty$. Данная точка является, таким образом, стоком, имеющим собственные значения $-\zeta \pm i\lambda$. Отдавая себе отчет в том, что каждая из кривых Γ_{ij} является пересечением двух одномерных кривых $W^u(p_i)$ и $W^s(p_j)$ на плоскости, мы вправе ожидать, что они существуют лишь при некоторых особых обстоятельствах и что их можно разрушить произвольно малыми возмущениями. Следовательно, такие соединения структурно неустойчивы в пространстве всех векторных полей на \mathbb{R}^2 . Заметим, что из наличия пересечения $W^u(p_i)$ и $W^s(p_j)$ следует, что на самом деле эти кривые имеют *совпадающие* участки: они не могут просто пересечься, как показано на рисунке 1.14(b), так как в этом случае решение с базой в точке пересечения q имело бы два возможных пути эволюции вопреки единственности решения.

После линеаризации плоской гамильтоновой системы в неподвижной точке оказывается, что $\text{tr} Df \equiv 0$, вследствие чего все неподвижные точки будут или седлами, или центрами, а существование источников и стоков невозможно. Это отражает более общий факт, известный как теорема Лиувилля, что гамильтоновы потоки сохраняют объем (в двумерном случае — площадь).

Особый класс нелинейных систем, с которыми мы будем иметь дело в этой книге, описывается уравнением

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (1.76)$$

или векторным полем на плоскости $x, y = \dot{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -f(x). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Такая гамильтонова система всегда имеет первый интеграл (по крайней мере, с формальной точки зрения):

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int f(x) dx = \frac{y^2}{2} + V(x) \quad (1.78)$$

где функцию $V(x)$ иногда называют *потенциальной энергией*, так как в механических приложениях она часто имеет такой смысл [12].

Всякая неподвижная точка системы (1.77) лежит на оси x и соответствует некоторой критической точке функции $V(x)$. Таким образом, вещественная

функция $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ эффективно определяет локальную форму векторного поля и потока вблизи каждой неподвижной точки. Если критическая точка функции V невырождена (по второй производной), то неподвижная точка является либо гиперболическим седлом, либо центром. Если же главный член в разложении V по формуле Тейлора имеет третий или более высокий порядок, то неподвижная точка вырождена. Отметим, что особая структура рассматриваемой системы позволяет также получить информацию о глобальной структуре фазовых кривых, которые просто задаются уравнениями $H(x, y) = c = const$, или

$$y = \pm \sqrt{2(c - V(x))}, \quad (1.79)$$

и являются, таким образом, симметричными относительно оси x . Главный вывод отсюда таков: если на одном уровне энергии, соответствующем двум максимумам функции $V(x)$, имеются две седловых точки, они обязательно соединены гетероклиной орбитой, называемой *сепаратрисой*.

Уравнение (1.72) представляет пример другого специального типа систем. Если $\lambda = 0$, оно описывает *градиентное векторное поле*

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad V(x, y) = \frac{\zeta}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} - x^2 y \right), \quad (1.80)$$

со стоком $(0, 0)$ ($\zeta > 0$) и седлами $(0, -2\zeta)$ и $(\pm\sqrt{3}\zeta, \zeta)$. Заметим, что *потенциальную функцию* $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ можно рассматривать как функцию Ляпунова. Двигаясь по этому пути, можно показать, что минимумам (соответственно максимумам) функции V отвечают стоки (соответственно источники) n -мерных систем:

$$\dot{x} = -\text{grad}V(x) \quad (1.81)$$

с потенциальной функцией $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Действительно, любая критическая точка V , в которой $\text{grad}V = 0$, должна быть неподвижной точкой системы (1.81), причем седловые точки для V являются, очевидно, седловыми и для (1.81). Далее, пусть $V^{-1}(h)$ — (гипер-)поверхность уровня функции V . Тогда, поскольку для любой точки $x \in V^{-1}(h)$, в которой $\text{grad}V(x) \neq 0$, вектор $-\text{grad}V(x)$ нормален к поверхности уровня в точке x , фазовые кривые уравнения (1.81) перпендикулярны поверхностям уровня и пересекают их «сверху вниз», в направлении убывания V .

Особые свойства градиентных векторных полей позволили получить важный общий результат для таких систем в n -мерном случае.

Теорема 1.11. *Градиентные векторные поля, для которых все неподвижные точки гиперболически и все пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий трансверсальны, структурно устойчивы.*

Для рассмотрения этого результата перенесемся на некоторое время в n -мерное пространство ($n > 2$). Проверка гиперболичности не составляет трудности, но условия трансверсального пересечения требуют некоторого обсуж-

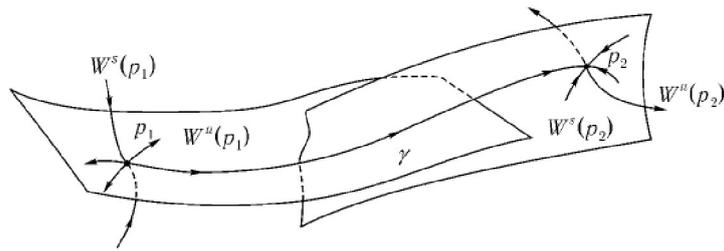


Рис. 1.15. Трансверсальная гетероклиническая орбита в \mathbb{R}^3

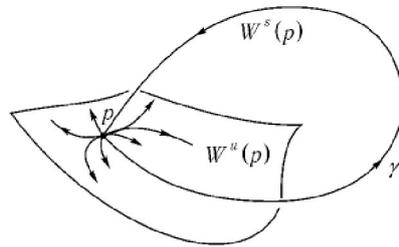


Рис. 1.16. Нетрансверсальная гомоклиническая орбита в \mathbb{R}^3

дения. Как мы увидим в наброске доказательства теоремы Пейксо, сепаратрисы, идущие из седла в седло, типа $\Gamma_{12} = W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$ (рисунок 1.12), могут быть устранены малыми возмущениями и потому структурно неустойчивы. Предположим, однако, что имеется трехмерная система с парой седловых точек p_1, p_2 , причем $\dim W^u(p_1) = \dim W^s(p_2) = 2$. В этом случае многообразия $W^u(p_1)$ и $W^s(p_2)$ могут пересекаться *трансверсально* по некоторой орбите γ так что в любой точке $q \in \gamma$ линейная оболочка касательных пространств $T_q W^u(p_1)$ и $T_q W^s(p_2)$ совпадает с \mathbb{R}^3 (рисунок 1.15). Если такая трансверсальная гетероклиническая орбита существует, то можно показать, что ее нельзя разрушить произвольно малыми возмущениями, так что она структурно устойчива. Однако трансверсальные *гомоклинические* орбиты не могут существовать, так как $\dim W^u(p) + \dim W^s(p) \leq n$, а необходимым условием трансверсального пересечения является неравенство $\dim W^u(p) + \dim W^s(p) > n$ (рисунок 1.16).

В двумерном случае сепаратрисы не могут трансверсально пересекаться, так как седловые точки имеют одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия, и соединительная кривая $\gamma = W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$ necessarily представляет собой некоторый открытый интервал, на котором $W^u(p_1)$ и $W^s(p_2)$ совпадают. Следовательно, линейная оболочка касательных пространств в любой точке $q \in \gamma$ одномерна (рисунок 1.14(a)).

Возвращаясь к плоским потокам, вспомним один важный результат, относящийся к замкнутым орбитам и неподвижным точкам. Он включает в себя

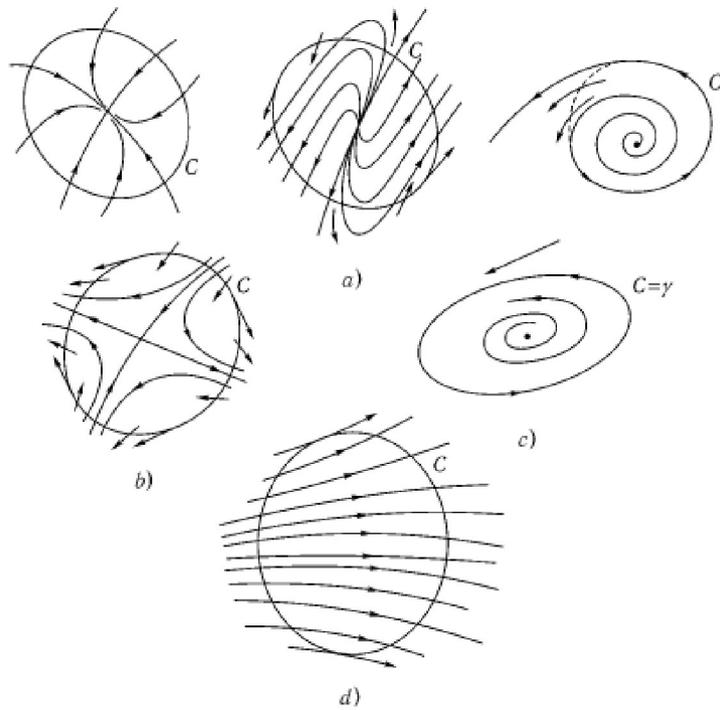


Рис. 1.17. Индексы неподвижных точек и замкнутых кривых: (а) источники и стоки; (б) гиперболическая седловая точка; (с) замкнутые орбиты; (д) C не содержит неподвижных точек

индекс Пуанкаре особой точки. Начнем с общего понятия индекса. Пусть дано плоское векторное поле. Нарисуем простую замкнутую кривую C , не содержащую положений равновесия, и рассмотрим ориентацию данного векторного поля в некоторой точке $p = (x, y) \in C$. При обходе точки p кривой C против часовой стрелки вектор $(f(x, y), g(x, y))$ будет непрерывно вращаться, и при возвращении в исходную позицию он должен повернуться на угол $2\pi k$, где k — некоторое целое число. (Угол также измеряется против часовой стрелки.) Число k называется *индексом замкнутой кривой C* . Можно показать, что индекс не зависит от формы C в том смысле, что он определяется исключительно характером неподвижных точек, лежащих внутри C .

Если C окружает единственную изолированную неподвижную точку \bar{x} , то индекс этой кривой называется *индексом точки \bar{x}* . Можно проверить справедливость следующих утверждений либо из непосредственного рассмотрения векторных полей (рисунок 1.17), либо вычисляя криволинейный интеграл

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_C d\left(\arctg \frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_C d\left(\arctg \frac{g(x, y)}{f(x, y)}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}, \quad (1.82)$$

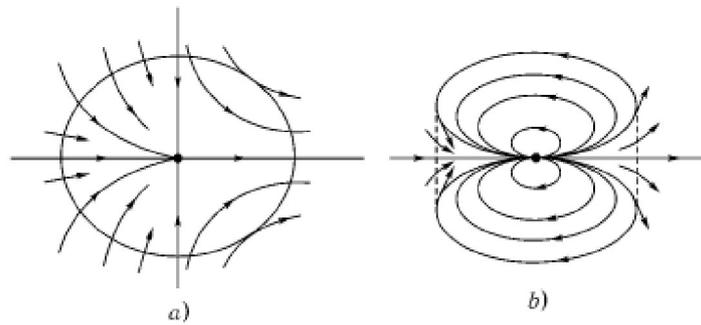


Рис. 1.18. Индексы некоторых негиперболических положений равновесия: (a) сед-ловая точка; (b) векторное поле системы (1.84)

Сформулируем некоторые утверждения

- 1) Индекс источника, стока или центра простых состояний равновесия равен единице.
- 2) Индекс гиперболической седловой точки равен -1 .
- 3) Индекс замкнутой орбиты равен $+1$.
- 4) Индекс замкнутой кривой, внутри которой нет особых точек, равен 0 .
- 5) Индекс замкнутой кривой равен сумме индексов неподвижных точек, лежащих внутри нее.

Сформулируем непосредственное следствие данного утверждения.

Следствие 1. *Внутри любой замкнутой орбиты γ содержится хотя бы одна неподвижная точка. Если все такие точки гиперболически, то число их необходимо нечетно $(2n + 1)$, включая n седла и $n + 1$ источников и стоков.*

Легко построить вырожденные неподвижные точки, индексы которых отличны от ± 1 . Например, для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2, \\ \dot{y} &= -y, \end{aligned} \tag{1.83}$$

начало координат является вырожденной точкой типа *седло-узел* с нулевым индексом, а для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - y^2, \\ \dot{y} &= 2xy, \end{aligned} \tag{1.84}$$

оно является вырожденной точкой индекса два (рисунок 1.18)

Следующий простой, но полезный прием приближенного построения глобального фазового портрета известен как метод изоклин. Исключая явную зависимость от времени из уравнений (1.68), получим систему первого порядка вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \quad (1.85)$$

Временно пренебрегая возможной неопределенностью системы (1.85) на кривой $f(x, y) = 0$, построим кривые $y = h(x)$ или $x = h(y)$, на которых угловой коэффициент векторного поля постоянен: $\frac{dy}{dx} = c$. Такие кривые задаются уравнением (возможно, неявным)

$$g(x, y) = cf(x, y) \quad (1.86)$$

и называются *изоклинами*.

Использование метода изоклин довольно утомительно и часто приводит к неполным результатам. Сегодня ему обычно предпочитают численное интегрирование системы. Однако в некоторых случаях понятия изоклин и инвариантных прямых могут использоваться для получения точной информации.

1.10 Теорема Пейксото

Теорема Пейксото является кульминацией многих предшествующих работ, Пуанкаре, Андронова, Понтрягина. Обозначим $\chi^r(M^2)$ множество всех векторных полей класса C^r на двумерных многообразиях.

Теорема 1.12. *Векторное поле класса C^r на компактном двумерном многообразии M^2 структурно устойчиво тогда и только тогда, когда*

- 1) *число неподвижных точек и замкнутых орбит конечно и все они гиперболически;*
- 2) *не существует орбит, соединяющих седловые точки;*
- 3) *неблуждающее множество состоит лишь из неподвижных точек и периодических орбит.*

Кроме того, если M^2 ориентировано, то множество структурно устойчивых векторных полей плотно в $\chi^r(M^2)$.

Можно оперировать векторными полями на плоскости при условии, что существует компакт $D \subset \mathbb{R}^2$ такой, что на границе D поток направлен внутрь (или наружу). В противном случае легко построить системы, имеющие счетное множество неподвижных точек или замкнутых орбит. Заметим также, что для плоского фазового пространства условие (3) автоматически следует из (1) и (2), так как

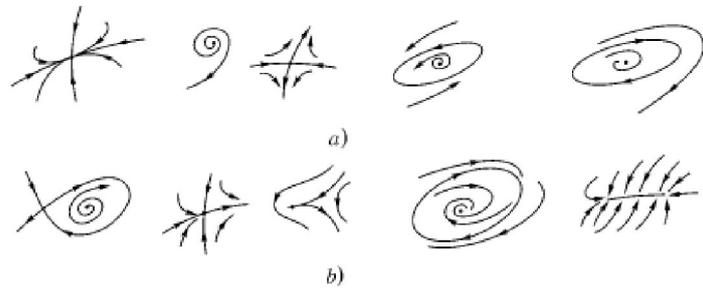


Рис. 1.19. (а) Некоторые структурно устойчивые неблуждающие множества в \mathbb{R}^2 . (б) Некоторые структурно неустойчивые неблуждающие множества в \mathbb{R}^2

не существует других предельных множеств, помимо неподвижных точек, замкнутых орбит и гомоклинных циклов, а последние исключены условием (2).

Из теоремы Пейксото следует, что типичное двумерное векторное поле будет содержать только стоки, седла, источники, а также притягивающие и отталкивающие замкнутые орбиты в качестве инвариантных множеств, рисунок 1.19(а). Структурная устойчивость является для двумерных систем на ориентированных многообразиях типичным свойством. Многие составные части теоремы Пейксото были доказаны в [12]. Наметим доказательство утверждения о структурной устойчивости.

Первое условие (гиперболичность неподвижных точек и периодических орбит) следует из рассмотрения линеаризованного потока или подходящих отображений Пуанкаре. Можно показать, что множества таких линейных потоков и отображений имеют плотные подмножества гиперболических потоков, соответственно, отображений [13]. Таким образом, если некоторый нелинейный поток содержит, к примеру, негиперболическую неподвижную точку, то достаточно малого возмущения, чтобы превратить ее в гиперболическую; кроме того, гиперболическая неподвижная точка остается гиперболической для всех достаточно малых возмущений.

Второе условие можно доказать следующим образом. Допустим, что две седловые точки p_1, p_2 потока векторного поля

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

соединены кривой $\Gamma = W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$ (рисунок 1.20). Возмутим векторное поле $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, добавляя к нему поле $(\varepsilon\phi_1(x_1, x_2), \varepsilon\phi_2(x_1, x_2))$, имеющее компактный носитель — некоторую (малую) область U , охватывающую кривую Γ , как показано на рисунке. Легко выбрать такое возмущение, что все орбиты, входящие в U , будут «повернуты вверх» (или вниз), и Γ разрушит-

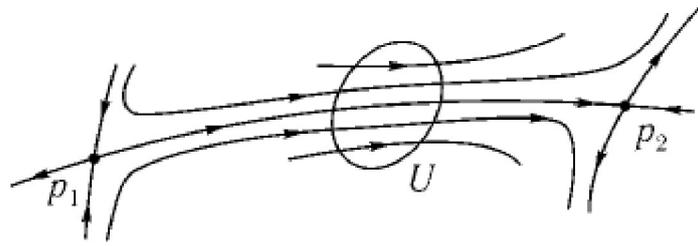


Рис. 1.20. Седловое соединение

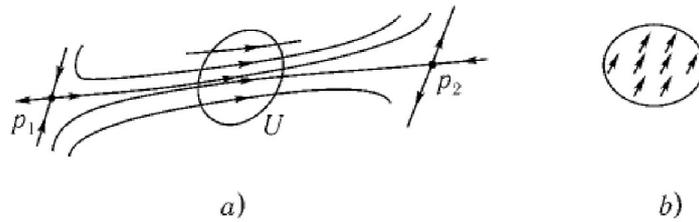


Рис. 1.21. (а) Нарушенное соединение; (б) $\varepsilon\phi_2(x_1, x_2)$

ся (рис. 1.21). Если же эти два многообразия не пересекаются, то достаточно малые возмущения не могут привести к их пересечению.

Третье условие необходимо для исключения структурно неустойчивых неблуждающих множеств, таких как тор T^2 с иррациональным потоком, который возникает в линейном потоке

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= a, \\ \dot{\phi} &= b, \quad (\theta, \phi) \in T^2, \end{aligned} \tag{1.87}$$

для иррационального отношения a/b . Разумеется, в случае рационального потока на T^2 этот тор заполнен непрерывным семейством негиперболических замкнутых орбит.

Доказательство утверждения, касающегося плотности структурно устойчивых потоков на ориентированных многообразиях более трудно и включает в себя лемму о замыкании [14]. Это доказательство можно найти, например, в [15]. Хотя теорема Пейксога гарантирует, что в типичных семействах плоских систем структурно устойчивые системы составляют множество полной меры, нельзя исключить и существования в некоторой окрестности бесконечного множества неустойчивых (*бифуркационных*) систем. Следующий пример был предложен Ж. Палисом. Рассмотрим однопараметрическое семейство $\dot{x} = f_\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, с фазовыми портретами, показанными на рис. 1.22(a)-(c) для $\mu < 0$, $\mu = 0$, $\mu > 0$. Для $\mu < 0$ существуют две периодические замкну-

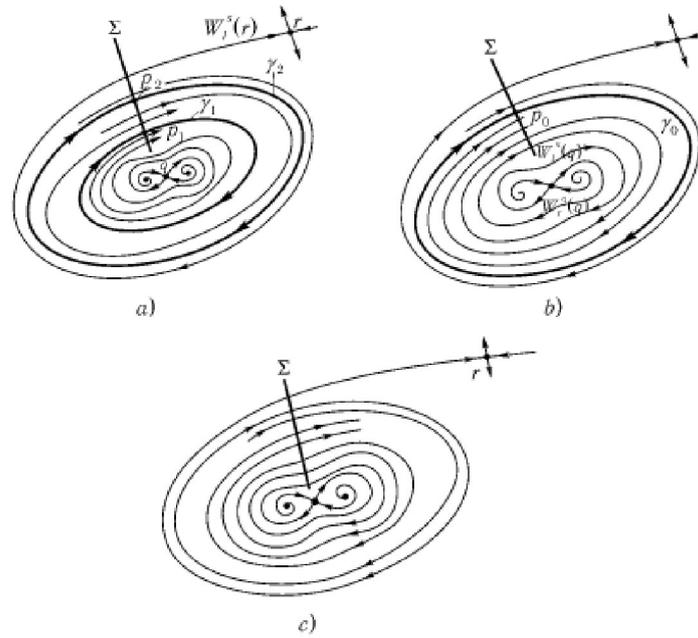


Рис. 1.22. (a) Нарушенное соединение; (b) $\varepsilon\phi_2(x_1, x_2)$

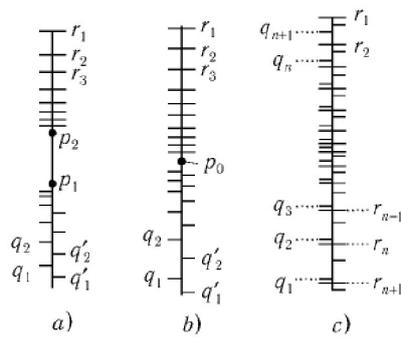


Рис. 1.23. Поперечное сечение: (a) $\mu < 0$, (b) $\mu = 0$, (c) $\mu > 0$

тые орбиты, а для $\mu = 0$ они соединяются в единственную «полуустойчивую» орбиту, являющуюся ω -предельным множеством для близлежащих внутренних точек и α -предельным множеством для близких точек вне границы. Для $\mu > 0$ замкнутых орбит не существует. В узком кольце, содержащем данные орбиты, перестройка фазового портрета наблюдается как локальная бифуркация замкнутых орбит типа «седло-узел», однако *глобально* решающую роль здесь играет поведение устойчивого и неустойчивого многообразий седловых точек r и q . Для $\mu < 0$ α -предельным множеством для точек, лежащих на левой ветви $W_l^s(r)$ многообразия $W^s(r)$, является отталкивающая замкнутая орбита γ_2 , а ω -предельным множеством для точек обеих ветвей многообразия $W^u(q)$ служит притягивающая замкнутая орбита γ_1 . При $\mu = 0$ эти две орбиты сливаются в орбиту γ_0 являющуюся ω -предельным множеством для точек из $W^u(q)$ и α -предельным множеством для точек из $W_l^s(r)$. Чтобы увидеть, что происходит с $W_l^s(r)$ и $W^u(q)$ при $\mu > 0$, построим локальное сечение Σ , изображенное на рисунке 1.22(Б). В случае $\mu = 0$ кривая γ_0 пересекает Σ в точке p_0 , и каждое из множеств $W_l^s(r) \cap \Sigma$, $W_l^u(q) \cap \Sigma$ и $W_r^u(q) \cap \Sigma$ представляет собой счетную последовательность точек, накапливающихся к p_0 , первая из них — сверху, остальные две — снизу, как показано на рисунке 1.23(a),(b). Положим $W_l^s(r) \cap \Sigma = \{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, $W_l^u(q) \cap \Sigma = \{q_i\}_{i=1}^{\infty}$, $W_r^u(q) \cap \Sigma = \{q'_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Мы имеем отображение Пуанкаре, определенное в некоторой окрестности $U \subset \Sigma$, причем по построению $P^{-1}(r_i) = r_{i+1}$, $P(q_i) = q_{i+1}$, $P(q'_i) = q'_{i+1}$. Ясно, что при $\mu > 0$ все орбиты пересекают вышеупомянутую кольцевую область и покидают ее сверху с ростом времени, а снизу — в противоположном направлении через некоторое конечное число итераций (данное число неограниченно растет при $\mu \implies +0$). Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ и $\mu \in [0, \varepsilon]$ существуют счетные множества точек r_j, q_j, q'_j , где $j > N$ на Σ . Следовательно, в интервале $\mu \in [0, \varepsilon]$ имеет место счетное число бифуркаций гетероклинных седловых соединений, и бифуркационное множество представляет собой последовательность точек μ_i , накапливающуюся сверху к нулю. Тем не менее, поскольку структурно неустойчивые системы существуют при изолированных значениях μ_i , мы все-таки имеем открытое плотное множество структурно устойчивых систем в окрестности системы $\dot{x} = f_0(x)$.

Принимая во внимание теорему Пейксото, Смейл предложил изучать системы на компактных «-многообразиях, удовлетворяющих условиям (1) и (3) теоремы 1.12 с подходящей модификацией условия (2) в свете теоремы 1.11. Такие системы называют *системами Морса-Смейла*. Они определяются следующими свойствами:

- 1) число неподвижных точек и периодических орбит конечно и все они гиперболичны;
- 2) все устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются транс-версально;
- 3) неблуждающее множество состоит только из неподвижных точек и периодических орбит.

В понятие трансверсального пересечения мы включаем и пустое множество, так как очевидно, что если два многообразия не пересекаются (т. е. удалены друг от друга), то никакое малое возмущение не приведет к их пересечению.

Системы Морса-Смейла являются структурно устойчивыми (обратное неверно).

Глава 2

Локальные бифуркации

2.1 Понятие бифуркации и бифуркационные проблемы

Интересные, с физической точки зрения, системы обычно включают некоторые параметры, появляющиеся при составлении систем уравнений. Когда эти параметры изменяются, при определенных их значениях могут произойти изменения в качественной структуре решений. Такие изменения называют *бифуркациями*, а соответствующие значения параметров — *бифуркационными значениями*. Ниже мы попытаемся провести анализ типичных встречающихся бифуркаций.

Необходимо отметить очевидные пределы, ограничивающие систематическое развитие теории бифуркаций. В областях параметров, состоящих из структурно неустойчивых систем, детальные изменения в классе топологической эквивалентности потоков могут быть чрезвычайно сложными. Многие важные аспекты этой ситуации остаются непонятными и требуют достаточно полной теории структурной устойчивости для систем второго порядка. Сфокусируемся на простейших бифуркациях изолированных положений равновесия и периодических орбит — части теории, отличающейся относительной полнотой. Поскольку анализ таких бифуркаций обычно связан с изучением векторного поля вблизи вырожденного (бифурцирующего) положения равновесия или замкнутой орбиты, а бифуркационные решения также ищутся вблизи этих предельных множеств, то эти бифуркации называют *локальными*. *Глобальные бифуркации*, в особенности те из них, которые характеризуются отсутствием трансверсальности между устойчивым и неустойчивым многообразиями периодических орбит и равновесий, будут обсуждаться ниже. Отметим, что изучение даже локальных двухпараметрических бифуркаций требует понимания глобальных бифуркаций, так как последние естественным образом возникают в двухпараметрических семействах.

Термин «*бифуркация*» был впервые применен Пуанкаре для описания «рас-

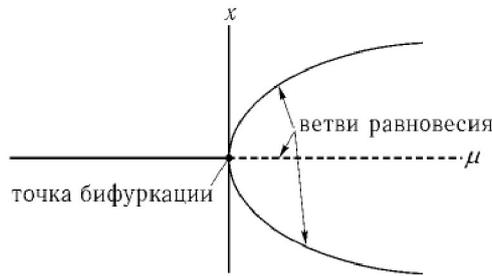


Рис. 2.1. Бифуркационная диаграмма для $f_\mu(x) = \mu x - x^3$
 - - - источники — стоки

«щепления» равновесных решений в семействе дифференциальных уравнений. Если

$$\dot{x} = f_\mu(x), x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

является системой дифференциальных уравнений, зависящая от k мерного параметра μ , то равновесные решения этой системы совпадают с корнями уравнения $f_\mu(x) = 0$. Как следует из теоремы о неявной функции, при изменении μ эти положения равновесия описываются гладкими функциями μ вне тех точек, в которых матрица Якоби, составленная из производных от $f_\mu(x)$ по x , $D_x f_\mu$, имеет нулевое собственное значение. График каждой из этих функций представляет собой некоторую ветвь положений равновесия системы (2.1). В положении равновесия (x_0, μ_0) , в котором $D_x f_\mu$ имеет нулевое собственное значение, могут сходиться несколько ветвей равновесий, такая точка (x_0, μ_0) называется *точкой бифуркации*.

В качестве примера рассмотрим уравнение (2.1), где $f_\mu(x) = \mu x - x^3$. Здесь $D_x f_\mu = \mu - 3x^2$, и единственной точкой бифуркации является $(x, \mu) = (0, 0)$. Легко проверить, что единственная неподвижная точка $x = 0$, существующая при $\mu < 0$ устойчива, а при $\mu > 0$ она становится неустойчивой, в то время как вновь рождающиеся неподвижные точки $x = \pm\sqrt{\mu}$ устойчивы. Мы получаем качественную картину, изображенную на рисунке 2.1, где ветви равновесия показаны в пространстве (x, μ) . Этот рисунок является примером *бифуркационной диаграммы*.

Бифуркации положений равновесия обычно приводят к изменениям топологического типа потока, но существует и много других типов изменений топологических классов потоков. В понятие бифуркации включаются все такие изменения.

Значение μ_0 , для которого поток уравнения (2.1) структурно неустойчив, называется *бифуркационным значением* параметра μ .

Это определение предполагает изучение тонкой структуры потоков, для которой не существует полного описания. Следовательно, попытки построить

систематическую теорию бифуркаций приводят к очень сложным техническим вопросам, не все из которых связаны с приложениями этой теории. Чтобы избежать этих трудностей, часто ослабляют данное выше определение и изучают только некоторые из качественных свойств систем дифференциальных уравнений.

Другая особенность данного определения состоит в том, что точка бифуркации не обязательно отвечает изменению класса топологической эквивалентности потока. Например, система $\dot{x} = -(\mu^2 x + x^3)$ имеет точку бифуркации $\mu = 0$, однако все потоки этого семейства имеют глобально притягивающее положение равновесия $x = 0$. Однако произвольные возмущения (деформации) действительно приводят к топологически различным потокам.

Изобразим *бифуркационное множество* для данной системы (2.1). Оно состоит из таких множеств точек в пространстве μ , для которых структурная устойчивость нарушается по одному из конкретных сценариев, которые мы попытаемся классифицировать в той степени, в какой сможем. Зачастую также удобно нарисовать *бифуркационные диаграммы*: множества точек в пространстве (x, μ) , составляющие инвариантные множества системы (2.1) (или части этих множеств). Такие инвариантные множества не обязательно являются просто неподвижными точками, как на рисунке 2.1; например, периодические орбиты часто изображают, используя некоторую меру ($|x|$) их амплитуды.

Особый интерес представляет существование распознаваемых типов бифуркаций, встречающихся раз за разом во многих задачах. В идеале нам хотелось бы иметь классификацию бифуркаций, предоставляющую конкретный список возможностей для каждого примера, исходя лишь из общих соображений, таких как число параметров в задаче, размерность фазового пространства, а также имеющиеся симметрии или другие особые системы. Такая классификация частично разработана.

Схемы классификации основаны на понятиях, взятых из *теории трансверсальности* в дифференциальной топологии. Из *теоремы трансверсальности* следует, что если два многообразия (поверхности) размерностей k и l лежат в n -мерном пространстве, то в общем случае их пересечение будет многообразием размерности $k + l - n$. Если $k + l < n$, то вообще не следует ожидать пересечения. Например, двумерные поверхности в трехмерном пространстве обычно пересекаются по кривым, а две кривых в трехмерном пространстве обычно не пересекаются. Смысл выражения обычно дается в терминах топологии функционального пространства вложений l -мерных многообразий в n -мерное пространство. Заметим лишь, что нетрансверсальные пересечения могут быть превращены в трансверсальные путем малых шевелений, а трансверсальные пересечения сохраняют свою топологию при возмущениях. *Общее положение* или *трансверсальное пересечение* многообразий в n -мерном пространстве характеризуется тем, что линейная оболочка касательных пространств к пересекающимся многообразиям совпадает со всем пространством. Формулу размерностей можно также переписать в терминах коразмерностей. *Коразмерность*

l -мерного подмногообразия n -мерного пространства равна $(n - l)$. Тогда для общего пересечения двух подмногообразий Σ_1, Σ_2 выполнено равенство

$$(n - l) + (n - k) = 2n - (l + k) = n - (l + k - n)$$

Следовательно, для трансверсального пересечения коразмерность пересечения $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ является суммой коразмерностей Σ_1 и Σ_2 .

В качестве примера рассмотрим две кривые на плоскости, одна из которых совпадает с осью x , а вторая является графиком некоторой функции f . Эти две кривые пересекаются трансверсально в точке x , если $f(x) = 0$ (условие пересечения) и $f'(x) \neq 0$ (трансверсальность). Можно сказать, что трансверсальное пересечение данных кривых является *простым нулем*. Если f имеет лишь простые нули, то и малые возмущения функции f имеют то же количество нулей, что и f . В семействе f_μ простые нули изменяются как гладкие функции μ (это утверждение следует из теоремы о неявной функции). Непростые нули не обладают этим свойством. Например, семейство $f_\mu(x) = \mu + x^2$ имеет непростой нуль в точке $(\mu, x) = (0, 0)$. Для $\mu > 0$ функции f_μ вовсе не имеют нулей. Заметим, однако, что если считать $f_\mu(x) = F(x, \mu)$ функцией двух переменных, то ее график пересекает координатную плоскость (x, μ) трансверсально по кривой $\mu + x^2 = 0$. Таким образом, хотя точка бифуркации $(x, \mu) = (0, 0)$ соответствует неустойчивой системе, бифуркационная диаграмма, соответствующая *семейству систем*, устойчива к малым возмущениям. Отметим, что в [16] проводится строгое различие между такими «точками поворота» или бифуркациями типа «складка» и бифуркациями разветвления, подобными показанной на рисунке 2.1.

Трансверсальность используется в теории бифуркаций следующим образом. Мы собираемся изучить бифуркации, встречающиеся в общих k -параметрических семействах (2.1) (возможно, в классе векторных полей с симметриями или другими особыми условиями). Попытаемся сделать это, сформулировав некоторый набор условий трансверсальности, которым удовлетворяет большинство семейств при бифуркационном значении μ_0 . При этом значении будут нарушены некоторые из условий структурной устойчивости, что и определяет тип происходящей бифуркации.

Если написать достаточно длинный список свойств трансверсальности, то имеется некоторая надежда, что семейства вида (2.1) с бифуркацией некоторого данного типа все будут иметь качественно одинаковую динамику вблизи бифуркации. Наилучшее определение «качественно одинаковой динамики» неясно. Существуют несколько альтернативных вариантов, и мы хотим выбрать из них тот, который был бы достаточно строгим и в то же время охватывал относящиеся к делу примеры. Данная дихотомия не имеет удовлетворительного решения, и попытки определить, какие из примеров удовлетворяют тому или иному альтернативному определению, связаны со многими спорными техническими вопросами. Вместо того чтобы иметь дело с конкретным определением, опишем для каждого рассматриваемого примера те динамические черты,

которые с очевидностью сохраняются при возмущениях. Список подходящих примеров одномерных и двумерных семейств, которые следует изучить, представляется довольно полным.

Таким образом, описанные выше методы позволяют составить такой список «нормальных форм» коразмерности один и два для матриц Якоби $D_x f_\mu$, вычисленных в точке бифуркации (x_0, μ_0) :

Коразмерность один

i Простое нулевое собственное значение:

$$D_x f_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix};$$

ii Простая пара чисто мнимых собственных значений:

$$D_x f_\mu = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Коразмерность два

iii Двойной нуль, недиагонализуемый:

$$D_x f_\mu = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix};$$

iv Простой нуль + чисто мнимая пара:

$$D_x f_\mu = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix};$$

v Две различных чисто мнимых пары:

$$D_x f_\mu = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & 0 \\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Во всех случаях A — матрица подходящей размерности $((n-1) \times (n-1), (n-2) \times (n-2))$, все собственные значения которой имеют ненулевые вещественные части.

При обсуждении отдельных бифуркаций мы будем использовать понятия *коразмерности* и *деформации*. *Коразмерностью* бифуркации является наименьшая размерность пространства параметров, которое содержит данную бифуркацию в устойчивой форме. *Деформация* — это некоторое семейство, содержащее данную бифуркацию в устойчивой форме.

2.2 Центральные многообразия

Перед тем как обсудить локальные бифуркации коразмерности один, рассмотрим два общих метода, позволяющих вводить системы координат, в которых вычисления облегчаются. Применение этих методов позволяет свести задачу к нескольким определенным системам дифференциальных уравнений, поведение которых определяет качественные черты каждого из типов бифуркаций. Еще раз подчеркнем, что эти методы по своей природе локальны и могут применяться лишь к бифуркациям положений равновесия и периодических орбит.

Начинаем развивать методы, необходимые для анализа бифуркационных проблем. Мы обсудим и сформулируем теорему о центральном многообразии, предоставляющую возможность систематического понижения размерности пространства состояний, которое следует рассматривать при анализе бифуркаций данного типа. Мы используем систему Лоренца и ее бифуркацию при $p = 1$ в качестве примера, иллюстрирующего роль центральных многообразий при расчете бифуркаций. Рассмотрению подлежат две аналогичных ситуации: положение равновесия векторного поля и неподвижная точка диффеоморфизма. Второй из случаев часто возникает при изучении отображения Пуанкаре для некоторой периодической орбиты или потока.

Допустим, что мы имеем некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, причем $f(0) = 0$. Если линейная часть f в начале координат не имеет чисто мнимых собственных значений, то, по теореме Хартмана (теорема 1.5), число собственных значений с положительными и отрицательными действительными частями определяет топологическую эквивалентность потоков вблизи нуля. При наличии собственных значений с нулевыми вещественными частями, поток вблизи начала координат может быть чрезвычайно сложным.

Метод центрального многообразия позволяет изолировать сложное асимптотическое поведение за счет определения инвариантного многообразия, касательного к подпространству, натянутому на (обобщенное) собственное пространство, соответствующее чисто мнимым собственным значениям. Здесь, однако, имеются технические трудности, не присутствующие в теореме об устойчивом многообразии. Они включают неединственность и потерю гладкости инвариантного центрального многообразия. Прежде чем сформулировать главный результат, проиллюстрируем эти соображения парой примеров.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Решения этой системы имеют вид $x(t) = x_0/(1 - tx_0)$, $y(t) = y_0e^{-t}$. Исключая t , получим фазовую кривую, являющуюся графиком функции $y(x) = (y_0e^{-1/x_0}e^{1/x})$. При $x < 0$ все эти фазовые кривые приближаются к началу «плоским образом», т. е. все их производные обращаются в нуль при $x = 0$.

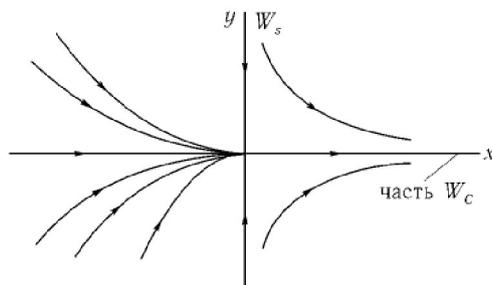


Рис. 2.2. Фазовый портрет уравнения (2.2), показывающий некоторые центральные многообразия

При $x > 0$ единственной фазовой кривой, приближающейся к началу (при $t \rightarrow \infty$), является ось абсцисс. Таким образом, центральное многообразие, касательное к направлению собственного вектора, отвечающего нулевому собственному значению (ось абсцисс), далеко не единственно. Мы можем построить C^∞ центральное многообразие, соединяя вместе любую фазовую кривую в левой полуплоскости с правой половиной оси абсцисс (рисунок 2.2) Заметим, однако, что единственным *аналитическим* центральным многообразием является сама ось абсцисс.

Для объяснения отсутствия у центрального многообразия гладкости сделаем сначала простое наблюдение, касающееся траекторий, приближающихся к некоторому узлу. Рассмотрим линейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax, \\ \dot{y} &= by, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $b > a > 0$. Разделив одно из этих уравнений на другое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b y}{a x}. \tag{2.4}$$

Как легко видеть, решения уравнения (2.4) имеют вид $y(x) = C|x|^{b/a}$. Графики функций $y(x)$ являются фазовыми кривыми для системы (2.3). Если мы продолжим одну из этих кривых вплоть до начала координат, то она не будет бесконечно дифференцируемой в случае, когда число b/a не является целым и $C \neq 0$. Если $r < b/a < r + 1$, то продолженная кривая принадлежит к C^r , но не к C^{r+1} . Даже если число b/a целое, кривая, образованная объединением начала координат и двух фазовых кривых справа и слева от него, будет в общем случае лишь b/a - один раз дифференцируемой.

Приведем теперь пример, показывающий, что можно вынудить центральное многообразие содержать кривые, полученные путем стыковки в узле, по-

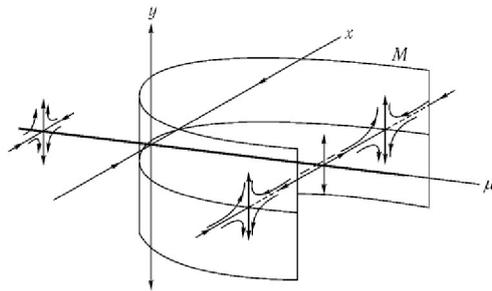


Рис. 2.3. Инвариантные многообразия для уравнения (2.5)

добные только что описанным. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^3, \\ \dot{y} &= y, \\ \dot{\mu} &= 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

в которой «параметр» μ играет роль (тривиальной) зависимой переменной.

Нетрудно проверить, что для данной системы, линеаризованной в начале координат, ось y является неустойчивым подпространством, а плоскость (x, μ) — центральным подпространством. Множество положений равновесия этой системы состоит из оси μ и параболы $\mu = x^2$ в координатной плоскости x, μ (рисунок 2.3). Поскольку $\dot{\mu} \equiv 0$, плоскости $\mu = \text{const}$ инвариантны относительно потока (2.5). В плоскости $\mu = \text{const} \neq 0$ все положения равновесия гиперболичны. Те из них, которые лежат на оси μ при $\mu < 0$ и на параболе, являются седлами, а те, которые лежат на положительной части оси μ , — неустойчивыми узлами. Мы хотим построить центральное многообразие в начале координат. При $\mu \leq 0$ поток системы (2.5), с топологической точки зрения, представляет собой однопараметрическое семейство седел, и единственный возможный выбор центрального многообразия — это точки координатной плоскости (x, μ) .

Если $\mu > 0$, неустойчивые многообразия седел, лежащих на параболе (каждое из них является вертикальной прямой $x = \pm\sqrt{\mu}$) образуют некоторое инвариантное многообразие M , разбивающее \mathbb{R}^3 на две инвариантных области. Центральное многообразие должно пересечь M , причем это пересечение должно содержать параболу равновесий. Отсюда следует, что центральное многообразие при $\mu > 0$ должно состоять из положений равновесия системы (2.5), а также устойчивых сепаратрис седел, лежащих на параболе. Для системы (2.5) все положения равновесия лежат на координатной плоскости (x, μ) и центральное многообразие представляет собой плоскость (x, μ) . Однако если мы заменим второе уравнение системы на $\dot{y} = y + x^4$, то по-прежнему можно утверждать (без доказательства), что центральное многообразие должно состоять из положений равновесия и их седловых сепаратрис. Однако, последние

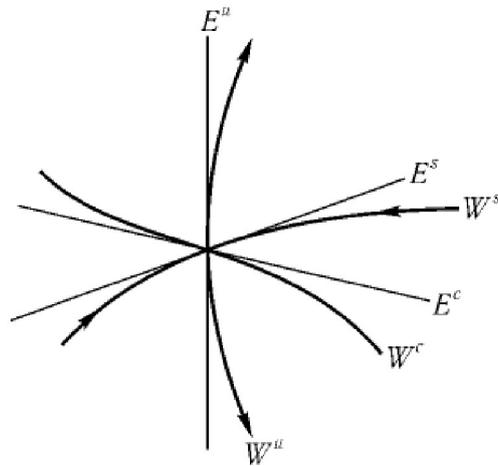


Рис. 2.4. Устойчивое, неустойчивое и центральное многообразия

теперь уже не будут стыковаться друг с другом бесконечно дифференцируемым образом вдоль кривой узлов на положительной половине оси μ . Степень гладкости убывает по мере удаления от начала, так как система (2.5), линеаризованная в точке $(0, 0, \mu_0)$, имеет собственные значения 1 и μ_0 в плоскости $\mu = \mu_0$. Следовательно, мы ожидаем, что степень гладкости ограничена величиной $1/\mu_0$. Если нас интересуют только C^r -инвариантные многообразия, где $r < \infty$, то поиск увенчается успехом, если мы ограничимся достаточно малой окрестностью начала координат (в данном примере диаметра не более $1/r$).

Данные примеры подводят нас к следующему утверждению.

Теорема 2.1 (о центральном многообразии для потоков). Пусть f — векторное поле в \mathbb{R}^n класса C^r , исчезающее в начале координат ($f(0) = 0$), положим $A = D_x f_\mu(0)$. Разобьем спектр A на три части: $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_u$, где

$$\operatorname{Re} \lambda \begin{cases} < 0, & \text{если } \lambda \in \sigma_s, \\ = 0, & \text{если } \lambda \in \sigma_c, \\ > 0, & \text{если } \lambda \in \sigma_u. \end{cases}$$

Обозначим (обобщенные) собственные пространства для $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_u$ как E^s, E^c, E^u соответственно. Тогда существуют устойчивое и неустойчивое многообразия W^u и W^s класса C^r , касающиеся E^u и E^s в начале координат, а также центральное многообразие W^c класса C^{r-1} , касающееся E^c в начале координат (если f класса C^∞ , то можно найти центральное многообразие класса C^r для любого конечного r). Многообразия W^u, W^s и W^c инвариантны относительно потока f . Устойчивое и неустойчивое многообразия единственны, а центральное многообразие может быть неединственным.

Данная ситуация иллюстрируется рисунком 2.4. Заметим, что мы не можем определить направление потока на W^c без дополнительной информации о членах старших порядков в разложении функции f вблизи нуля.

Может показаться, что более простой альтернативой теореме о центральном многообразии является проектирование данной системы на линейное подпространство, натянутое на E^c . Таким образом, если записать векторное поле f как $f = f_u + f_s + f_c$, где $f_u \in E^u$, $f_s \in E^s$ и $f_c \in E^c$, то можно надеяться, что вблизи положения равновесия сужение f_c на E^c правильно описывает качественную динамику на центральных направлениях. Однако *система Лоренца* показывает, что это не всегда имеет место, и служит, таким образом, поучительным примером важности вычисления центральных многообразий в бифуркационных проблемах.

2.2.1 Система Лоренца

Система Лоренца имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy.\end{aligned}\tag{2.6}$$

где $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma > 0$, $\rho > 0$, $\beta > 0$.

Изучим бифуркацию системы (2.6), происходящую при $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ и $\rho = 1$. Матрица Якоби в нуле такова:

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}\tag{2.7}$$

Если $\rho = 1$, то эта матрица имеет собственные значения $0, -\sigma, -1, -\beta$ с собственными векторами $(1, 1, 0)$, $(\sigma, -1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Принимая эти собственные векторы за базис новой системы координат, положим

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \sigma)^{-1} & \sigma(1 + \sigma)^{-1} & 0 \\ (1 + \sigma)^{-1} & -(1 + \sigma)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.\tag{2.8}$$

Это преобразование приводит (2.6) к виду

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{-\sigma}{1 + \sigma}(u + \sigma v)w, \\ \dot{v} &= -(1 + \sigma)v + \frac{1}{1 + \sigma}(u + \sigma v)w, \\ \dot{w} &= -\beta w + (u + \sigma v)(u - v),\end{aligned}\tag{2.9}$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \sigma) & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sigma(1 + \sigma)^{-1}(u + \sigma v)w \\ (1 + \sigma)^{-1}(u + \sigma v)w \\ (u + \sigma v)(u - v) \end{bmatrix}\tag{2.10}$$

так что линейная часть имеет теперь стандартную (диагональную) форму. В координатах (u, v, w) центральное многообразие является некоторой кривой, касательной к оси u . Заметим, что проектируя данную систему на ось u , полагая $v = w = 0$ в уравнении для \dot{u} , получим $\dot{u} = 0$. Однако ось u неинвариантна, поскольку уравнение для \dot{w} содержит член u^2 . Тем не менее, если мы сделаем еще одно (нелинейное) преобразование координат по формуле то получим $\tilde{w} = w - u^2/\beta$, то получим

$$\dot{\tilde{w}} = -\beta\tilde{w} + (\sigma - 1)u\tilde{w} - \sigma v^2 + \frac{2\sigma u(u + \sigma v)}{\beta(1 + \sigma)} \left(\tilde{w} + \frac{u^2}{\beta} \right). \quad (2.11)$$

В системе координат (u, v, \tilde{w}) имеем

$$\dot{u} = -\frac{\sigma(u + \sigma v)}{1 + \sigma} \left(\tilde{w} + \frac{u^2}{\beta} \right). \quad (2.12)$$

Проекция данного уравнения на ось u в новых координатах приводит к уравнению $\dot{u} = (-\sigma/\beta(1 + \sigma))u^3$. Заметим также, что в уравнениях для v и \tilde{w} отсутствуют члены вида u^2 , поэтому ось u инвариантна в преобразованной системе «во втором порядке».

Дальнейшие попытки отыскания центрального многообразия могут быть основаны на дополнительных преобразованиях координат, целью которых является превращение оси u в инвариантное относительно данного потока множество. Это можно сделать итеративно при помощи замен переменных v и \tilde{w} , добавляющих к этим координатам мономы относительно u подобно тому, как из w было получено \tilde{w} . Такие дополнительные замены координат не изменят коэффициент $(-\sigma/\beta(1 + \sigma))$ при u^3 в уравнении для \dot{u} , но повлияют на члены старшей степени вида $u^m, m \geq 4$. Как мы увидим в последующих разделах, уравнение $\dot{u} = (-\sigma/\beta(1 + \sigma))u^3$, наряду с эффектом изменения ρ вблизи единицы, позволяет сделать качественные выводы о бифуркации в системе Лоренца (и исходной жидкостной системе). Очевидно, что важно включить в этот анализ вычисление первых членов разложения центрального многообразия в ряд Тейлора. Если этого не сделать, получится ошибочная картина поведения в точке бифуркации.

При изучении примера Лоренца мы действительно сделали попытку аппроксимировать (одномерное) уравнение, описывающее поток на центральном многообразии. Представим теперь систематический метод построения таких аппроксимаций.

Как следует из теоремы о центральном многообразии, в окрестности точки бифуркации исследуемая система топологически эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{f}(\tilde{x}), \\ \dot{\tilde{y}} &= -\tilde{y}, \\ \dot{\tilde{z}} &= \tilde{z}. \end{aligned} \quad (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in W^c \times W^s \times W^u, \quad (2.13)$$

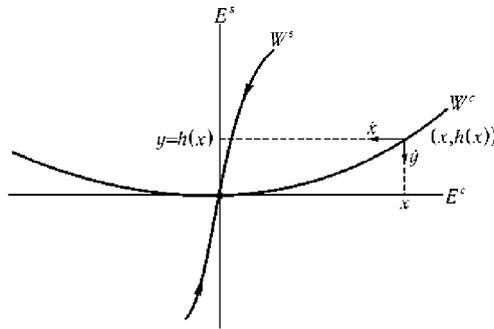


Рис. 2.5. Центральное многообразие и спроектированное векторное поле

Теперь мы возьмемся за решение задачи вычисления «редуцированного» векторного поля \tilde{f} . Для простоты, а также ввиду наибольшей важности в физических проблемах, мы ограничимся случаем, когда неустойчивое многообразие пусто (общий случай обсуждается в конце данного раздела), а линейная часть системы, испытывающей бифуркацию, имеет блочно-диагональную форму:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + f(x, y) \\ \dot{y} &= Cy + g(x, y) \end{aligned} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (2.14)$$

где B и C - квадратные матрицы порядков n и m , собственные значения которых имеют нулевые и отрицательные вещественные части соответственно, а функции f и g обращаются в начале координат в нуль вместе со своими частными производными первого порядка.

Поскольку центральное многообразие касается E^c (пространство $y = 0$), мы можем представить его (локально) в виде графика

$$W^c = \{(x, y) | y = h(x)\}; \quad h(0) = Dh(0) = 0, \quad (2.15)$$

где функция $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ определена в некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ начала координат (рисунок 2.5). Рассмотрим теперь проекцию векторного поля при $y = h(x)$ на E^c :

$$\dot{x} = Bx + f(x, h(x)). \quad (2.16)$$

Поскольку $h(x)$ касается подпространства $y = 0$, решение уравнения (2.16) дает хорошую аппроксимацию для потока $\tilde{x} = \tilde{f}(\tilde{x})$, суженного на W^c . Действительно, справедлив такой результат.

Теорема 2.2. *Если точка $x = 0$ в системе (2.16) локально асимптотически устойчива (соответственно, неустойчива), то и начало координат в системе (2.14) локально асимптотически устойчиво (неустойчиво).*

Покажем теперь, как можно вычислить, или, по крайней мере, аппроксимировать функцию $h(x)$. Подставляя равенство $y = h(x)$ во второе уравнение

(2.14) и используя теорему о дифференцировании сложной функции, получим

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x} = Dh(x)[Bx + f(x, h(x))] = Ch(x) + g(x, h(x)),$$

или

$$N(h(x)) = Dh(x)[Bx + f(x, h(x))] - Ch(x) - g(x, h(x)) = 0 \quad (2.17)$$

с граничными условиями

$$h(0) = Dh(0) = 0.$$

Данное уравнение в частных производных относительно h в большинстве случаев не может быть, разумеется, решено точно (это означало бы, что найдено решение исходного уравнения), однако его решение *можно* аппроксимировать с любой точностью рядом Тейлора в точке $x = 0$:

Теорема 2.3. *Если можно найти такую функцию $\psi(x)$, для которой $\phi(0) = D\phi(0) = 0$ и $N(\phi(x)) = O(|x|^p)$ при $|x| \rightarrow 0$ для некоторого $p > 1$, то*

$$h(x) = \phi(x) + O(|x|^p) \quad \text{при } |x| \rightarrow 0.$$

Таким образом, мы можем аппроксимировать $h(x)$ с любой желаемой точностью, отыскивая решения уравнения (2.17) в виде рядов. Однако, такие разложения в ряд Тейлора не всегда существуют, так как многообразие W^c может не быть аналитическим в начале координат.

Для иллюстрации применения теоремы 2.3 рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= -v + \alpha u^2 + \beta uv, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где параметры α и β определяются впоследствии. Имеется единственная неподвижная точка в начале координат, а собственные значения линеаризованной системы равны 0 и -1 . Используя для преобразования координат матрицу, столбцами которой являются собственные векторы:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad T = T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

мы можем привести (2.18) к стандартной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha(x+y)^2 - \beta(x+y)y \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

или

$$\dot{x} = \alpha(x+y)^2 - \beta(xy+y^2), \quad (2.21)$$

$$\dot{y} = -y - \alpha(x+y)^2 + \beta(xy+y^2). \quad (2.22)$$

Поскольку оба подпространства E^c и E^s одномерны, h является действительной функцией, и уравнение (2.17) примет вид

$$\begin{aligned} N(h(x)) &= h'(x)[\alpha(x+h(x))^2 - \beta(xh(x) + h^2(x))] + \\ &\quad + h(x) + \alpha(x+h(x))^2 - \beta(xh(x) + h^2(x)) = 0, \\ h(0) &= h'(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Положим $h(x) = ax^2 + bx^3 + \dots$, где неизвестные коэффициенты a, b, \dots определяются после подстановки в (2.23). В итоге получаем

$$h(x) = -\alpha x^2 + \alpha(4\alpha - \beta)x^3 + O(x^4), \quad (2.24)$$

следовательно, искомую аппроксимацию можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(x+h(x))^2 - \beta(xh(x) + h^2(x)) = \\ &= \alpha(x^2 + (\beta - 2\alpha)x^3 + (9\alpha^2 - 7\alpha\beta + \beta^2)x^4) + O(x^5) \end{aligned} \quad (2.25)$$

или, если $a \neq 0$,

$$\dot{x} = \alpha x^2 + (\alpha(\beta - 2\alpha)x^3) + O(x^4). \quad (2.26)$$

Заметим, что в данном случае во втором порядке такой же результат получается при помощи *аппроксимации касательным пространством*

$$h = 0 + O(x^2), \quad (2.27)$$

так как члены второго порядка определяют при $\alpha \neq 0$ качественное поведение вблизи начала координат.

В следующем примере

$$\dot{x} = xy, \quad (2.28)$$

$$\dot{y} = -y - \alpha x^2, \quad (2.29)$$

и касательная аппроксимация не позволяет определить устойчивость вблизи нуля, поскольку если $y = h(x) = 0$, то и $\dot{x} = 0$. В данной задаче h определяется из уравнения

$$h'(x)[xh(x)] + h(x) - \alpha x^2 = 0, \quad (2.30)$$

откуда, полагая $h = ax^2 + bx^3 + \dots$, получим

$$h = \alpha x^2 + O(x^4). \quad (2.31)$$

Таким образом, редуцированная система имеет вид

$$\dot{x} = \alpha x^3 + O(x^5). \quad (2.32)$$

Локальные фазовые портреты для этих двух примеров (вблизи начала координат) показаны на рисунке 2.6.

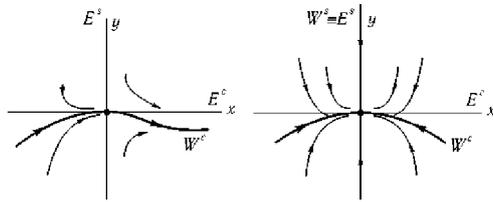


Рис. 2.6. Центральные многообразия для двух приемов: (а) уравнение (2.20), $a > 0$; (б) уравнение (2.28), (2.29) $a < 0$.

Отметим теперь несложное обобщение метода центрального многообразия, полезное при исследовании параметризованных семейств систем. Допустим, что в уравнении (2.14) матрицы B , C и функции f , g зависят от некоторого k -мерного вектора параметров μ , и запишем расширенную систему так:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= B_\mu x + f_\mu(x, y), \\ \dot{y} &= C_\mu y + g_\mu(x, y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^k, \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

В точке $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$ система (2.33) имеет $(n + k)$ -мерное центральное многообразие, касательное к пространству (x, μ) , которое можно аппроксимировать степенными рядами (по x и μ) для графика $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ точно так же, как ранее. Свойства инвариантности центрального многообразия гарантируют, что любые малые решения, бифурцирующие из точки $(0, 0, 0)$, должны лежать на некотором центральном многообразии, поэтому мы можем проследить за локальной эволюцией бифурцирующих семейств решений при помощи этого расширенного семейства центральных многообразий.

В качестве примера рассмотрим квадратичное уравнение Дуффинга

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= \beta u - u^2 - \delta v, \end{aligned} \quad (2.34)$$

при $\delta > 0$ и параметре β , изменяющемся вблизи нуля. При $\beta = 0$ линеаризованная в точке $(u, v) = (0, 0)$ система имеет собственные значения 0 и $-\delta$, и при помощи преобразования

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta^{-1} \\ 0 & -\delta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

уравнения (2.34) можно записать как расширенную систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} + \frac{\beta}{\delta} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} -(x+y)^2 \\ (x+y)^2 \end{bmatrix} \quad (\dot{\beta} = 0),$$

или

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\beta}{\delta}(x+y) - \frac{1}{\delta}(x+y)^2, \\ \dot{\beta} &= 0, \\ \dot{y} &= -\delta y - \frac{\beta}{\delta}(x+y) + \frac{1}{\delta}(x+y)^2.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Будем искать центральное многообразие в виде

$$y = h(x, \beta) = ax^2 + bx\beta + c\beta^2 + O(3),\tag{2.37}$$

где $O(3)$ обозначает члены порядков x^3 , $x^2\beta$, $x\beta^2$ и η^3 . Уравнение (2.17) в данном случае выглядит так:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial \beta}\right) \begin{pmatrix} \beta(x+h)/\delta - (x+h)^2/\delta \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + \delta h + \frac{\beta}{\delta}(x+h) - \frac{1}{\delta}(x+h)^2 = 0.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Подставляя (2.37) в (2.38), получим

$$\begin{aligned}(2ax + b\beta + \dots) \begin{pmatrix} (\beta/\delta)(x + \dots) + \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \delta(ax^2 + bx\beta + c\beta^2) + \\ + \frac{\beta}{\delta}(x + ax^2 + bx\beta + c\beta^2) - \frac{1}{\delta}(x + \dots)^2 = O(3).\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при степенях x^2 , $x\beta$ и β^2 , найдем

$$a = \frac{1}{\delta^2}, \quad b = -\frac{1}{\delta^2}, \quad c = 0,$$

откуда

$$y = \frac{x^2 - \beta x}{\delta^2} + O(3).\tag{2.39}$$

Следовательно, редуцированная система, определяющая устойчивость, имеет вид

$$\dot{x} = \frac{\beta}{\delta} \left(x + \frac{x^2 - \beta x}{\delta^2} \right) - \frac{1}{\delta}(x + \dots)^2 + O(3) \quad (\dot{\beta} = 0),$$

или

$$\dot{x} = \frac{\beta}{\delta} \left(1 - \frac{\beta}{\delta^2} \right) x - \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\beta}{\delta^2} \right) x^2 + O(3) \quad (\dot{\beta} = 0).\tag{2.40}$$

Отсюда для достаточно малых β ($|\beta| < \delta^2$) мы получаем бифуркационную диаграмму, построенную на рисунке 2.7, правильность которой можно проверить путем непосредственных вычислений. Расширенное семейство центральных многообразий для этого примера изображено на рисунке 2.8.

Заметим, что существует теорема о центральном многообразии для диффеоморфизмов в неподвижной точке, соответствующая теореме, которую мы сформулировали для потоков в положении равновесия. В неподвижной точке p диффеоморфизма G существуют инвариантные многообразия, соответствующие обобщенным собственным пространствам $DG(p)$ для собственных значений, лежащих внутри, на и вне единичной окружности.

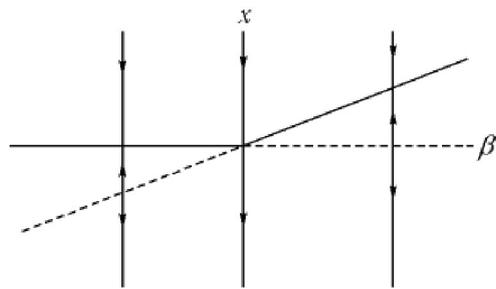


Рис. 2.7. Бифуркационная диаграмма для уравнения (2.34)

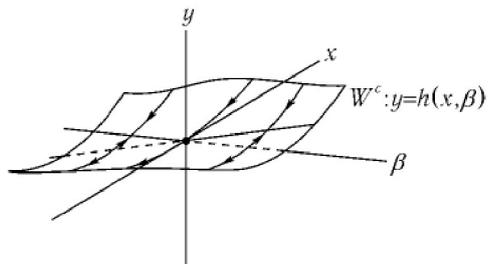


Рис. 2.8. Семейство центральных многообразий для уравнения (2.34)

Для аппроксимации центральных многообразий можно пользоваться, по существу, тем же способом, что и для потоков. Полагая, что наша дискретная система имеет вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Bx_n + F(x_n, y_n), \\y_{n+1} &= Cy_n + G(x_n, y_n),\end{aligned}\tag{2.41}$$

где все собственные значения матриц B и C лежат на и внутри единичной окружности соответственно, будем вновь искать центральное многообразие в виде графика $y = h(x)$. Подстановка этой формулы в (2.41) дает

$$y_{n+1} = h(x_{n+1}) = h(Bx_n + F(x_n, h(x_n))) = Ch(x_n) + G(x_n, h(x_n)),$$

или

$$N(h(x)) = h(Bx + F(x, h(x))) - Ch(x) - G(x, h(x)) = 0\tag{2.42}$$

и мы вновь можем воспользоваться методом аппроксимации при помощи степенных рядов.

В качестве примера рассмотрим отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + x_n y_n, \\y_{n+1} &= \lambda y_n - x_n^2, \quad 0 < \lambda < 1.\end{aligned}\tag{2.43}$$

Полагая $y = h(x) = ax^2 + bx^3 + O(x^4)$ и подставляя в (2.42), имеем

$$a(x + x(ax^2 + \dots))^2 + b(x + x(ax^2 + \dots))^3 - \lambda(ax^2 + bx^3) + x^2 = O(x^4),$$

или

$$ax^2 + bx^3 - \lambda ax^2 - \lambda bx^3 + x^2 = O(x^4).$$

Отсюда

$$a = \frac{1}{\lambda - 1}, \quad b = 0.\tag{2.44}$$

Таким образом, центральное многообразие описывается формулой

$$y = \frac{x^2}{\lambda - 1} + O(x^4),\tag{2.45}$$

а редуцированная система имеет вид

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^3}{\lambda - 1}.\tag{2.46}$$

Поскольку $\lambda - 1 < 0$, то нулевое решение уравнения (2.46) и, следовательно, системы (3.2.39) локально асимптотически устойчиво.

Выше мы предполагали, что в точке бифуркации неустойчивое многообразие пусто. Если это не так, мы должны иметь дело с системой вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Bx + f(x, y_s, y_u), \\ \dot{y}_s &= C_s y + g_s(x, y_s, y_u), \\ \dot{y}_u &= C_u z + g_u(x, y_s, y_u),\end{aligned}\quad (x, y_s, y_u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_u}, \quad (2.47)$$

где, как и прежде, собственные значения матрицы B имеют нулевые вещественные части, а вещественные части собственных значений матриц C_s и C_u соответственно отрицательны и положительны. Вновь будем искать центральное многообразие в виде графика на $U \subset E^c \sim \mathbb{R}^n : (y_s, y_u) = (h_s(x), h_u(x))$. Затем, записывая векторы $\begin{pmatrix} y_s \\ y_u \end{pmatrix}$ как y и $\begin{pmatrix} g_s \\ g_u \end{pmatrix}$ как g , а матрицу

$$\begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_u \end{bmatrix}$$

как C , можно действовать точно так же, как прежде. Аналогично можно поступать с отображениями: как и в случае потоков, можно добавлять параметры и составлять расширенные системы.

2.3 Нормальные формы

Продолжим знакомиться с техническими методами, составляющими фундамент для изучения качественных свойств потоков вблизи бифуркации. Мы полагаем, что теорема о центральном многообразии уже была применена к рассматриваемой системе, и потому ограничиваемся анализом потока на самом этом многообразии, т. е. приближенного уравнения (2.16). Мы попытаемся найти дополнительное преобразование координат, упрощающее аналитическое выражение для векторного поля на центральном многообразии. Полученные «упрощенные» векторные поля называют *нормальными формами*. Анализ динамики нормальных форм позволяет получить качественную картину потоков для каждого из типов бифуркаций.

Идея введения последовательных преобразований координат для упрощения аналитического выражения общей задачи является весьма плодотворной. На ней основывается теория Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ). Также эта идея используется в методах усреднения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.48)$$

имеющей положение равновесия в нуле. (В уравнении (2.48) опущена явная зависимость от параметра μ .) Мы хотим найти такое преобразование координат $x = h(y)$, где $h(0) = 0$, что система (2.48) станет «настолько простой,

насколько возможно». В координатах y имеем

$$Dh(y)\dot{y} = f(h(y))$$

или

$$\dot{y} = (Dh(y))^{-1}f(h(y)) \quad (2.49)$$

Лучшее, чего можно ожидать от системы (2.49), — это ее линейность. Формально (т. е. в терминах степенных рядов) можно попытаться итеративно построить последовательность преобразований координат h_1, h_2, \dots , уничтожающих члены возрастающих степеней в рядах Тейлора для правой части формулы (2.49) в начале координат. Процедура отыскания нормальной формы систематизирует эти вычисления, однако она не всегда приводит к описанному наиболее строгому результату. В общем случае «наибольшая возможная простота» означает удаление всех несущественных членов (до определенной степени) из рядов Тейлора. Если эта процедура применяется к равновесию гиперболического типа, она позволяет получить формальную часть теоремы Хартмана о линеаризации, что сейчас и будет показано. Докажем это утверждение.

Допустим на время, что $Df(0)$ имеет различные (возможно, комплексные) собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и что проделано предварительное линейное преобразование координат, диагонализующее $Df(0)$. Тогда система (2.48) в координатной форме выглядит так:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + g_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n + g_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.50)$$

или в векторном виде

$$\dot{x} = \Lambda x + g(x),$$

где в разложениях функций g_i в начале координат отсутствуют члены ниже второго порядка. Мы хотим найти преобразование координат h в виде суммы тождественного и членов старших порядков, в результате которого в уравнении (2.49) исчезнут нелинейные члены до порядка, более высокого, нежели для g . Пусть k — наименьший порядок отличной от нуля производной некоторой функции g_i , тогда будем искать h в виде

$$x = h(y) = y + P(y) \quad (2.51)$$

где P — полином степени k такой, что наименьшая степень нелинейных членов в преобразованном уравнении (2.49) равняется $(k+1)$. Теперь (2.49) имеет вид

$$\dot{y} = (I + DP(y))^{-1}f(y + P(y)) \quad (2.52)$$

Разложим данное выражение по степеням y , сохраняя *только члены не ниже порядка k* . Обозначая члены порядка k для g_i как g_i^k и полагая $P(y) = (P_1(y), \dots, P_n(y))$, получим

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \lambda_i P_i(y) + g_i^k(y) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j \quad (2.53)$$

При выводе этой формулы использовано соотношение $(I + DP)^{-1} = I - DP$, справедливое с точностью до членов порядка k и старше. (При вычислении (2.52) с точностью до членов порядка $(k + 1)$ нам нужно взять в $(I + DP)^{-1}$ лишь члены порядка k , поскольку f имеет первый порядок.) Следовательно, мы ищем P из уравнения

$$\lambda_i P_i(y) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j = -g_i^k(y) \quad (2.54)$$

Мы видим, что оператор, стоящий в левой части уравнения (2.54), линеен по отношению к коэффициентам многочлена P . Кроме того, если P_i представляет собой моном $y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$, то $\frac{\partial P_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j = a_j \lambda_j P_i$ и левая часть этого уравнения принимает вид $\left(\lambda_i - \sum_j a_j \lambda_j \right) P_i$. Следовательно, эти мономы являются собственными векторами данного оператора с собственными значениями $\lambda_i - \sum_j a_j \lambda_j$. Мы приходим к выводу: можно найти многочлен P , удовлетворяющий (2.54), при условии, что *ни одна из сумм $\lambda_i - \sum_j a_j \lambda_j$ не обращается в нуль для целых неотрицательных чисел a_1, \dots, a_n , сумма которых равна k* . Если ни одно из уравнений $\lambda_i - \sum_j a_j \lambda_j = 0$ не может быть удовлетворено ни для каких целых неотрицательных чисел a_j , сумма которых больше или равна двум, то рассматриваемое уравнение можно линеаризовать с точностью до любого алгебраического порядка.

Вопрос о существовании линеаризующего преобразования класса C^∞ или аналитического — более сложен по сравнению с рассмотренной выше формальной задачей. Пуанкаре удалось построить аналитическое преобразование в случае, если вещественные части всех собственных значений имеют одинаковый знак (при этом начало является источником либо стоком), Если начало — седловая точка и имеются собственные значения обоих знаков, то в задаче имеются *малые знаменатели*. Проблема аналитической линеаризации оказывается связанной с выполнением арифметических *диофантовых* условий для собственных значений. Она была решена Зигелем, а проблему C^∞ -линеаризации позже решил Стернберг. Тем не менее, вышеприведенные рассуждения помогают понять, почему теорема Хартмана гарантирует лишь возможность линеаризации при помощи гомеоморфизма.

В теории бифуркаций особый интерес представляют положения равновесия, в которых собственные значения имеют нулевые вещественные части. В таких случаях проблема линеаризации не может быть решена вследствие наличия (нелинейных) *резонансных членов* в функции f , которые не могут быть устранены путем замены переменных. Теорема о нормальной форме устанавливает, насколько далеко можно продвинуться при помощи процедуры, описанной выше для решения проблемы линеаризации гиперболического равновесия. Ключевые наблюдения, лежащие в основе расчетов, таковы:

- 1) разрешимость проблемы зависит лишь от линейной части векторного поля;
- 2) решение можно свести к совокупности линейных систем уравнений.

В результате решения получаем ряды Тейлора для векторного поля, содержащие *только* существенные резонансные члены.

Пусть $L = Df(0)x$ обозначает линейную часть функции (2.48) в точке $x = 0$, тогда L индуцирует отображение adL на линейном пространстве H_k векторных полей, коэффициентами которых являются однородные многочлены степени k . Отображение adL определяется так:

$$ad L(Y) = [Y, L] = DLY - DY L, \quad (2.55)$$

где $[\bullet, \bullet]$ обозначает *производную Ли*:

$$[Y, L]^i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L^i}{\partial y_j} Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial y_j} L^j \right). \quad (2.56)$$

Сформулируем теорему.

Теорема 2.4 (о нормальной форме). Пусть $\dot{x} = f(x)$ - система дифференциальных уравнений класса C^r , $f(0) = 0$, $Df(0) = L$. Возьмем дополнение G_k к $adL(H_k)$ в H_k так, что $H_k = adL(H_k) + G_k$. Тогда существует аналитическая замена координат в окрестности начала, преобразующая данную систему к виду

$$\dot{y} = g(y) = g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \dots + g^{(r)}(y) + R_r$$

где $L = g^{(1)}(y)$ и $g^{(k)} \in G^k$ для $2 \leq k \leq r$, а $R_r = o(|y|^r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дадим конструктивное доказательство, которое может быть использовано для вычисления нормальных форм на примерах. Предлагаемая процедура следует шаблону, использовавшемуся при обсуждении проблемы линеаризации. Воспользуемся индукцией и предположим, что система $\dot{x} = f(x)$ преобразована таким образом, что члены степени меньше s лежат в дополнительных подпространствах G_i , $2 \leq i \leq s$. Затем возьмем преобразование координат вида $x = h(y) = y + P(y)$, где P - некоторый однородный

полином степени s , коэффициенты которого подлежат определению. Замена приводит к уравнению

$$(I + DP(y))\dot{y} = f^{(1)}(y) + \dots + f^{(s)}(y) + Df(0)P(y) + o(|y|^s). \quad (2.57)$$

Члены степени меньше s при этом преобразовании остаются неизменными, а новые члены степени s таковы:

$$f^{(s)}(y) + DLP(y) - DP(y)L = f^{(s)}(y) + adL(P)(y), \quad (2.58)$$

где $L(y) = f^{(1)}(y)$. Ясно, что при подходящем выборе P сумма

$$f^{(s)}(y) + adL(P)(y)$$

будет лежать в G_s , что и требуется.

При данных вычислениях мы на каждом шаге пренебрегали членами старшего порядка $o(|y|^s)$. Это можно делать, если, как в данном случае, мы хотим получить нормальную форму векторного поля с определенной линейной частью L и нелинейной частью *общего вида*. Однако нужно понимать, что последовательные преобразования приводят на каждом шаге к появлению дополнительных членов старших порядков, которые (вплоть до некоторого порядка) необходимо учитывать, если требуется вычислить *определенные* коэффициенты данной нормальной формы.

Проиллюстрируем процедуру нормализации на примере плоской системы, имеющей положение равновесия с собственными значениями $\pm i$. В подходящей линейной системе координат преобразование DL задается матрицей $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, и мы имеем $L = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$. Вычислим действие оператора adL на H_2 для мономиальных векторных полей следующим образом. Для каждого базисного вектора Y_i из H_2 имеем

$$adL(Y_i) = DLY_i - DY_iL = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i^1 \\ Y_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_i^1}{\partial x} & \frac{\partial Y_i^1}{\partial y} \\ \frac{\partial Y_i^2}{\partial x} & \frac{\partial Y_i^2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Таким образом, к примеру,

$$adL \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}; \quad adL \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

В дальнейшем будем обозначать компоненты Y^1, Y^2 векторного поля Y при помощи операторов частного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ так, что, к примеру, $2xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}$ - обозначает векторное поле $\begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$.

Выбирая x^2 , xy , y^2 в качестве базиса для каждой из компонент $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ получим такую таблицу для H_2 :

$$\begin{array}{c|ccc} & x^2 & xy & y^2 \\ \hline \frac{\partial}{\partial x} & 2xy\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial y} & (y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} & -2xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} & -xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y} & y^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y} \end{array}$$

Таким образом, в базисе $\left\{x^2\frac{\partial}{\partial x}, xy\frac{\partial}{\partial x}, y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial y}, y^2\frac{\partial}{\partial y}\right\}$ оператор adL имеет следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Данная матрица невырождена, поэтому все квадратичные члены векторного поля с линейной частью $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ можно удалить преобразованием координат.

Что касается кубических членов, то аналогичные вычисления приводят к следующей матрице оператора adL

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

в базисе

$$\left\{x^3\frac{\partial}{\partial x}, x^3y\frac{\partial}{\partial x}, xy^2\frac{\partial}{\partial x}, y^3\frac{\partial}{\partial x}, x^3\frac{\partial}{\partial y}, x^2y\frac{\partial}{\partial y}, xy^2\frac{\partial}{\partial y}, y^3\frac{\partial}{\partial y}\right\}.$$

Можно проверить, что векторы $(3, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 3)$ и $(0, 1, 0, 3, -3, 0, -1, 0)$ являются левыми собственными векторами данной матрицы, отвечающими нулевому собственному значению. Следовательно, $adL(H_3)$ имеет дополнение размерности не менее двух. Дальнейшие несложные расчеты показывают, что столбцы 1, 2, 3, 4, 5 и 8 линейно независимы, так что $adL(H_3)$ имеет размерность шесть. В качестве базиса в дополнении G'_3 можно взять векторные поля $(x^2 + y^2)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$ и $(x^2 + y^2)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)$. В терминах систем дифференциальных уравнений мы показали, что теорема о нормальной форме

предоставляет преобразование координат, переводящее систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + o(|x|, |y|), \\ \dot{y} &= x + o(|x|, |y|)\end{aligned}\tag{2.61}$$

к виду

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v + (au - bv)(u^2 + v^2) + \dots, \\ \dot{v} &= u + (av + bu)(u^2 + v^2) + \dots,\end{aligned}\tag{2.62}$$

где a, b — подходящие константы, а многоточия обозначают члены более высокого порядка.

В общем случае, обозначая матрицу adL от H_4 как M_4 , получим, что $adL(H_4)$ является *пространством столбцов* этой матрицы (при подходящем обозначении векторных полей). Таким образом, если M_4 имеет нулевые собственные значения, то, как следует из известных результатов линейной алгебры, в качестве пространства G_k , дополнительного adL , можно взять линейную оболочку левых собственных векторов матрицы M_k с нулевым собственным значением: $G_k = span\{e_j\}$. (Каждый из векторов e_j автоматически ортогонален каждому столбцу M_4 .) Однако такой выбор G_k к далеко не единственен и не обязательно самый удобный. В частности, в вышеприведенном примере вместо выбора векторных полей $(3x^2 + y^2)x\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + 3y^2)y\frac{\partial}{\partial y}$ и $(x^2 + 3y^2)y\frac{\partial}{\partial x} - (3x^2 + y^2)x\frac{\partial}{\partial y}$ соответствующих упомянутым левым собственным векторам, лучше взять $G'_3 = span\{(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1), (0, -1, 0, -1, 1, 0, 1, 0)\}$, что приводит к нормальной форме (2.62).

Заметим также, что если линейная часть L исходного векторного поля симметрична относительно некоторой компактной группы преобразований (т. е. L эквивариантно), то G_k также можно выбрать инвариантным относительно той же группы. На примере системы с чисто мнимыми собственными значениями можно показать, что нормальная форма (2.62), усеченная до кубических членов, инвариантна относительно произвольных вращений точно так же, как и линейное поле $L = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$. Дальнейшие вычисления нормальной формы показывают, что эта инвариантность сохраняется во всех алгебраических порядках.

Обсудим роль параметров в вычислении нормальной формы. Применим прием расширения системы $\dot{x} = f(x, \mu)$ в большую систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \mu), \\ \dot{\mu} &= 0.\end{aligned}\tag{2.63}$$

В данной системе можно вычислить нормальную форму с дополнительным требованием, чтобы все преобразования координат $H(x, \mu)$ имели вид $H(x, \mu) = (h(x, \mu), \mu)$. Такие преобразования необходимо оставляют уравнение $\dot{\mu} = 0$ неизменным и приводят систему $\dot{x} = f(x, \mu)$ к нормальной форме с учетом зависимости от μ . На практике эти расчеты производят так, как показано выше, но коэффициенты считают степенными рядами по параметру μ .

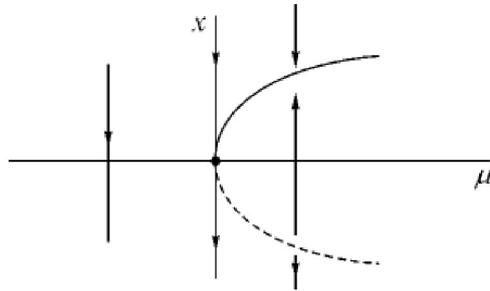


Рис. 2.9. Бифуркация седловой точки

2.4 Бифуркации положений равновесия координатности один

Простейшие бифуркации положений равновесия можно представить при помощи следующих четырех дифференциальных уравнений, зависящих от единственного параметра μ :

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad \text{седло-узел,} \quad (2.64)$$

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad \text{транскритическая,} \quad (2.65)$$

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad \text{вилка,} \quad (2.66)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} = x + y(\mu - (x^2 + y^2)) \end{cases} \quad \text{бифуркация Хопфа} \quad (2.67)$$

Бифуркационные диаграммы для этих четырех уравнений изображены на рисунках 2.9-2.67. Оказывается, что каждое из уравнений (2.64)-(2.67) естественным образом в том или ином контексте качественно определяет типичные бифуркации положения равновесия. Нашей задачей является подробное описание того, как и при каких условиях можно свести изучение общего уравнения (2.48) к одному из этих частных примеров.

2.4.1 Седло-узел

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f_\mu(x), \quad (2.68)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^n$, а f_μ — гладкая функция. Предположим, что при $\mu = \mu_0$, $x = x_0$ система (2.68) обладает положением равновесия, в котором одно из

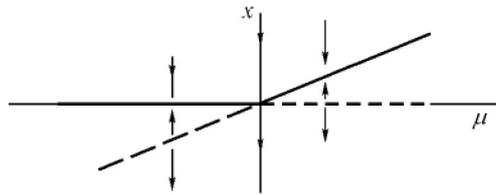


Рис. 2.10. Транскритическая бифуркация

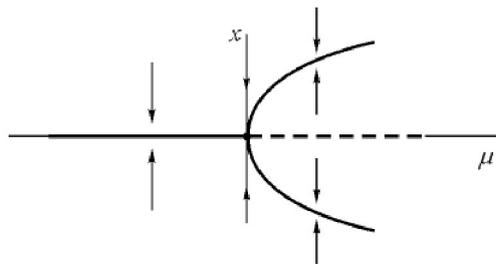


Рис. 2.11. Бифуркация типа "вилка"(сверхкритическая)

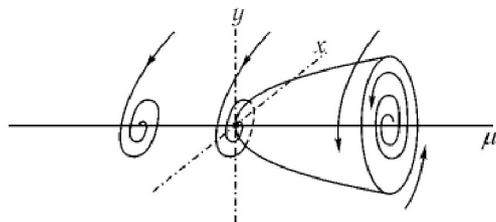


Рис. 2.12. Бифуркация Хопфа (сверхкритическая)

собственных значений (линеаризованной системы) равно нулю. Обычно это нулевое собственное значение простое, так что теорема о центральном многообразии позволяет свести изучение бифуркации этого типа к случаю, когда вектор x одномерен. Более точно можно найти некоторое двумерное центральное многообразие $\Sigma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, проходящее через точку (x_0, μ_0) такое, что

- Касательное пространство к Σ в точке x_0, μ_0 является линейной оболочкой собственного нуля-вектора для $Df_{\mu_0}(x_0)$ и некоторого вектора, параллельного оси μ .
- Для любого конечного r многообразие Σ будет класса C^r в достаточно малой окрестности точки (x_0, μ_0) .
- Векторное поле (2.68) касается Σ .
- Существует такая окрестность U точки (x_0, μ_0) в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, что все траектории, целиком содержащиеся в U , в любой момент времени лежат и в Σ .

Сужая систему (2.68) на Σ , получим однопараметрическое семейство уравнений, описывающих одномерные кривые Σ_μ на Σ , получаемые при фиксированном μ (рисунок 2.8). Это однопараметрическое семейство представляет собой нашу редукцию обсуждаемой бифуркационной проблемы.

Сформулируем теперь условия трансверсальности для системы (2.68), где $n = 1$, при которых возникает бифуркация седло-узел. Мы имеем всегда $\frac{df_{\mu_0}}{dx}(x_0) = 0$, но потребуем в качестве условия трансверсальности, чтобы $\frac{df_{\mu_0}}{d\mu}(x_0) \neq 0$. Как следует из теоремы о неявной функции, положения равновесия системы (2.68) образуют кривую, касающуюся прямой $\mu = \mu_0$. Дополнительное условие трансверсальности $\frac{d^2 f_{\mu_0}}{dx^2}(x_0) \neq 0$ гарантирует, что кривая равновесий имеет *квадратичное* касание с прямой $\mu = \mu_0$ и локально лежит по одну сторону от этой прямой. Данная информация уже достаточна для вывода, что локальный фазовый портрет данной системы топологически эквивалентен портрету системы $\dot{x} = \pm(\mu - \mu_0) \pm (x - x_0)^2$. Однако мы можем также сформулировать эти условия трансверсальности для n -мерной системы, не прибегая к редукции на центральное многообразие. Следующая теорема дает необходимые условия.

Теорема 2.5. Пусть $\dot{x} = f_\mu(x)$ — система дифференциальных уравнений в \mathbb{R}^n , зависящая от единственного параметра μ . При $\mu = \mu_0$ существует положение равновесия p , для которого удовлетворяются следующие гипотезы:

(SN1) $D_x f_{\mu_0}(p_0)$ имеет простое нулевое собственное значение с правым собственным вектором v и левым собственным вектором w , а также k собственных значений с отрицательными вещественными частями и $(n - k - 1)$ собственное значение с положительными вещественными частями (с учетом кратности).

$$(SN2) w \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial \mu}(p, \mu_0) \right) \neq 0.$$

(SN3) $w(D_2^x f_{\mu_0}(p)(v, v)) \neq 0$.

Тогда существует гладкая кривая равновесий в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, проходящая через точку (p, μ_0) , касающаяся гиперплоскости $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$. В зависимости от знаков выражений (SN2) и (SN3) вблизи этой точки не существует положений равновесия, если $\mu < \mu_0$ ($\mu > \mu_0$) и два положения равновесия для каждого из значений $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$). Эти два положения равновесия системы $\dot{x} = f_\mu(x)$ вблизи точки (p, μ_0) имеют гиперболический тип и имеют устойчивые многообразия размерностей k и $k + 1$ соответственно. Множество уравнений $\dot{x} = f_\mu(x)$, удовлетворяющих условиям (SN1)-(SN3), открыто и плотно в пространстве однопараметрических семейств векторных полей класса C^∞ , имеющих в (p, μ_0) положение равновесия с нулевым собственным значением.

Эта теорема всего лишь выражает тот факт, что «типичная» бифуркация седло-узел качественно подобна бифуркации в семействе уравнений $\dot{x} = \mu^- x^2$ в направлении собственного вектора с нулевым собственным значением и с гиперболическим поведением в дополнительных измерениях. Гипотезы (SN2) и (SN3) представляют собой условия трансверсальности, обуславливающие невырожденность поведения по отношению к параметру и преобладающее влияние квадратичных нелинейных членов.

Теорема 2.5 имеет два ограничения. С одной стороны, возможно извлечение количественной информации о потоках вблизи бифуркации. Например, можно использовать систему $\dot{x} = \mu^- x^2$ для получения оценок скорости сходимости к различным положениям равновесия. Для уточнения этих оценок можно использовать члены высших порядков в формуле Тейлора. Второе ограничение связано с возможностью глобальных изменений фазового портрета, ассоциированных с бифуркацией седло-узел. Рассмотрим, к примеру, потоки, изображенные на рисунке 2.13. Здесь имеет место бифуркация «седло-узел» в двумерной системе со слиянием стока и седла. После бифуркации появляется новая периодическая орбита, так как неустойчивая сепаратриса седло-узла лежит на устойчивом многообразии бифурцирующего положения равновесия. Это пример явления глобальной бифуркации, которое не может быть сведено к изучению окрестности положения равновесия или неподвижной точки отображения.

2.4.2 Транскритическая и вилообразная бифуркации

Важность бифуркации седло-узел обусловлена тем, что все бифуркации однопараметрических семейств для положений равновесия с нулевым собственным значением можно привести к этому типу путем малого возмущения. Поэтому можно ожидать, что встречающиеся в приложениях бифуркации с нулевым собственным значением являются седло-узлами. В противном случае следует ожидать наличия каких-либо особенностей и ограничений в формулировке задачи, препятствующих возникновению седло-узла. Одним из примеров,

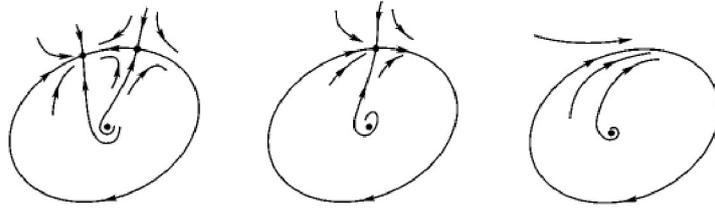


Рис. 2.13. Седловая точка, возникающая на замкнутой кривой приводит к глобальной бифуркации

показывающих несовместимость постановки задачи с бифуркацией седло-узел, является *транскритическая* бифуркация.

В классической теории бифуркаций часто предполагается существование тривиального решения, с которым должна произойти бифуркация. В частности, считают, что в (2.68) при всех μ выполнено условие $f_\mu(0) = 0$, т. е. $x = 0$ является положением равновесия для всех значений параметра. Поскольку семейства седло-узла допускают значения параметра, при которых в окрестности точки бифуркации *нет* положений равновесия, то такая ситуация качественно иная. Для формулировки подходящих условий трансверсальности посмотрим на однопараметрические семейства, для которых при всех μ выполнено равенство $f_\mu(0) = 0$: для них гипотеза (SN2) теоремы 2.5 не может быть выполнена. Если заменить ее требованием $w\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(v)\right) \neq 0$ в точке $(0, \mu_0)$, то фазовые портреты семейства вблизи бифуркации будут эквивалентны портретам на рисунке 2.10, и мы имеем *транскритическую бифуркацию*, или *смену устойчивости*.

Вторая постановка задачи, в которой невозможна бифуркация седло-узел, присуща системам с симметрией. Многие физические системы формулируются таким образом, что уравнения, определяющие систему, обладают симметрией того или иного рода. К примеру, уравнение Дуффинга инвариантно преобразованию $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$, а уравнение Лоренца симметрично при замене $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. В одномерном случае дифференциальное уравнение (2.68) симметрично или *эквивариантно* по отношению к симметрии $x \rightarrow -x$, если $f_\mu(-x) = -f_\mu(x)$. Таким образом, для эквивариантных векторных полей $f_\mu(x)$ является нечетной функцией от x . В частности, все такие уравнения имеют равновесие в нуле. В таких системах не может произойти и транскритическая бифуркация, так как нечетная функция не может удовлетворять условию $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$, необходимому для такой бифуркации (SN3). Если это условие заменить гипотезой $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \neq 0$, то получим бифуркацию типа «вилка». В точке бифуркации изменяется устойчивость тривиального решения, и с одной стороны от нее в пространстве параметра появляется пара (вследствие симметрии) новых положений равновесия, как на рисунке 2.11. Для транскритической би-

фуркации и «вилки» можно сформулировать результаты, аналогичные теореме 2.5.

Заметим, что направление бифуркации и устойчивость ветвей в этих примерах определяется знаком $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$. Во втором случае если $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} < 0$, то ветви существуют «выше» бифуркационного значения и мы имеем *суперкритическую* вилку, а при противоположном знаке данного неравенства — *субкритическую*.

2.4.3 Бифуркация Пуанкаре-Андронов-Хопфа

Допустим теперь, что при значении параметра $\mu = \mu_0$ система (2.68) имеет положение равновесия $p(\mu_0)$, в котором Df_{μ_0} имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$, $\omega > 0$, а все остальные собственные значения имеют ненулевую вещественную часть. Теорема о неявной функции гарантирует (так как матрица Df_{μ_0} обратима) существование для каждого значения μ вблизи μ_0 положения равновесия $p(\mu)$, близкого к $p(\mu_0)$ и зависящего от μ гладким образом. Тем не менее, при пересечении собственными значениями матрицы $Df(p(\mu))$ мнимой оси при $\mu = \mu_0$ происходит изменение размерностей устойчивого и неустойчивого многообразий для $p(\mu)$. Это качественное изменение в локальном потоке вблизи $p(\mu)$ должно быть отмечено некоторыми другими локальными изменениями фазового портрета, не касающимися неподвижных точек.

Ключом к проблеме типичной бифуркации положения равновесия с чисто мнимыми собственными значениями может служить изучение линейной системы, включающей изменение указанного типа. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \omega y, \\ \dot{y} &= \omega x + \mu y, \end{aligned} \tag{2.69}$$

решения которой имеют вид

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\mu t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

Если $\mu < 0$, то решение «навивается» на начало координат, а при $\mu > 0$ оно «свивается» с начала. Если $\mu = 0$, то все решения периодичны. Даже в однопараметрическом семействе уравнений наличие целого семейства периодических орбит при некотором значении параметра является весьма необычным, однако в общем случае возникает некоторая поверхность, заполненная периодическими орбитами.

Теорема о нормальной форме говорит нам о том, чем типичная задача отличается от системы (2.69). Посредством гладких замен координат разложение по формуле Тейлора до третьей степени в общем случае может быть приведено

к следующей форме:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (d\mu + a(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y, \\ \dot{y} &= (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + a(x^2 + y^2))y,\end{aligned}\quad (2.71)$$

которая в полярных координатах выражается соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (d\mu + ar^2)r, \\ \dot{\theta} &= (\omega + c\mu + br^2).\end{aligned}\quad (2.72)$$

Поскольку в уравнениях (2.72) выражение для \dot{r} не содержит θ , то мы видим, что существуют периодические орбиты системы (2.71), представляющие собой окружности $r = \text{const}$, получаемые из ненулевых решений уравнения $\dot{r} = 0$ в (2.72). Если $a \neq 0$ и $d \neq 0$, то эти решения лежат на параболе $\mu = -ar^2/d$. Отсюда следует, что поверхность периодических орбит имеет квадратичное касание со своей касательной плоскостью $\mu = 0$ в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Содержанием теоремы о бифуркации Хопфа является независимость качественных свойств системы (2.71) вблизи начала от добавления к ней членов более высокого порядка:

Теорема 2.6. *Допустим, что система $\dot{x} = f_\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ имеет положение равновесия (x_0, μ_0) со следующими свойствами:*

(H1) $D_x f_{\mu_0}(x_0)$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений и не имеет других собственных значений с нулевой вещественной частью.

Тогда существует гладкая кривая равновесий $(x(\mu), \mu)$, где $x(\mu_0) = x_0$. Собственные значения $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ матрицы $D_x f_{\mu_0}(x(\mu))$ являющиеся мнимыми при $\mu = \mu_0$, зависят от μ гладким образом.

(H2) Если, кроме того,

$$\frac{d}{d\mu} (\text{Re}\lambda(\mu))|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0,$$

то существует единственное трехмерное центральное многообразие, проходящее через точку $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, а гладкая система переменных (сохраняющая плоскости $\mu = \text{const}$), в которой разложение Тейлора до третьей степени на центральном многообразии дается формулой (2.71). Если $a \neq 0$, то существует поверхность периодических решений на центральном многообразии, имеющая квадратичное касание с собственным пространством для значений $\lambda(\mu_0)$, $\bar{\lambda}(\mu_0)$ и совпадающая во втором порядке с параболоидом $\mu = -(a/d)(x^2 + y^2)$. В случае $a < 0$ эти периодические решения являются устойчивыми предельными циклами, а в случае $a > 0$ периодические решения являются репеллерами.

Эту теорему можно доказать, непосредственно применяя приведенные выше теоремы о центральном многообразии и о нормальной форме.

В двумерной системе вида

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}, \quad (2.73)$$

где $f(0) = g(0) = 0$ и $Df(0) = Dg(0) = 0$, вычисление нормальной формы, кратко описанное в приложении к данному разделу, приводит к такому результату:

$$a = \frac{1}{16}[f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16\omega}[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]. \quad (2.74)$$

Здесь нижние индексы обозначают частные производные по соответствующим координатам. Применяя эту формулу в системах размерности больше двух, читатель должен помнить, что квадратичные члены играют роль в вычислении центрального многообразия и могут влиять на величину a . Нельзя найти a путем простой проекции системы уравнений на собственное пространство $\pm i\omega$, необходимо аппроксимировать центральное многообразие, по крайней мере, до квадратичных членов.

2.5 Бифуркации отображений и периодических орбит коразмерности единица

Рассмотрим простейшие бифуркации периодических орбит. Сфокусируем изложение бифуркаций периодических орбит на геометрических аспектах.

Имеется три случая негиперболичности неподвижной точки p дискретного отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : Df(p)$ может иметь собственное значение $+1$, собственное значение -1 или пару комплексных собственных значений $\lambda, \bar{\lambda}$, где $|\lambda| = 1$. (Будем далее называть собственные значения матрицы $Df(p)$ собственными значениями неподвижной точки p .) Теория бифуркаций неподвижных точек с собственным значением 1 вполне аналогична теории бифуркаций положений равновесия с нулевым собственным значением. Типичное однопараметрическое семейство имеет двумерное центральное многообразие (включая ось параметра), на котором оно топологически эквивалентно семейству типа *седло-узел*, определяемому отображением

$$f_\mu(x) = x + \mu - x^2. \quad (2.75)$$

Те же соображения, что и в предыдущем разделе, касающиеся ограничений и симметрии, приводят к изменениям типичного портрета, соответствующим либо *транскритической* бифуркации, либо *вилке*.

Бифуркации с собственным значением -1 не имеют аналогов для положений равновесия, а теория комплексных собственных значений тоньше, чем теория бифуркации Хопфа для потоков.

Собственное значение -1 ассоциируется с *бифуркацией удвоения периода*, или *субгармонической бифуркацией*. Пользуясь редукцией на центральное многообразие, мы ограничимся рассмотрением одномерных отображений f_μ , где μ — некоторый скалярный параметр. Если 0 является неподвижной точкой отображения $f_{\mu_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ собственным значением -1 , то разложение этого отображения по формуле Тейлора до третьей степени имеет вид

$$f_{\mu_0}(x) = -x + a_2x^2 + a_3x^3 + R_3(x), \quad R_3(x) = o(|x^3|). \quad (2.76)$$

Теорема о неявной функции гарантирует существование некоторой гладкой кривой $(x(\mu), \mu)$, состоящей из неподвижных точек на плоскости и проходящей через $(0, \mu_0)$, поэтому мы должны искать изменения в динамическом поведении, помимо изменения устойчивости, иначе. Составляя квадрат отображения f_{μ_0} , получим

$$\begin{aligned} f_{\mu_0}^2(x) &= -(-x + a_2x^2 + a_3x^3) + a_2(-x + a_2x^2)^2 + a_3(-x)^3 + \tilde{R}_3 = \\ &= x - (2a_2^2 + 2a_3)x^3 + \tilde{R}_3. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Поскольку отображение $f_{\mu_0}^2$ имеет собственное значение $+1$, его неподвижные точки не обязаны изменяться гладким образом, и мы можем ожидать существование у $f_{\mu_0}^2$ неподвижных точек вблизи $(0, \mu_0)$, не являющихся неподвижными точками f_μ . Такие точки являются, очевидно, периодическими орбитами периода 2. Исследуя разложение Тейлора для $f_{\mu_0}^2(x)$, мы видим, что коэффициент при квадратичном члене равен нулю, поэтому бифуркационное поведение напоминает «вилку» с тем основным отличием, что новые орбиты не являются неподвижными точками, а имеют период 2. Описанные выше идеи приводят к следующему результату.

Теорема 2.7. Пусть $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — однопараметрическое семейство отображений, причем f_{μ_0} имеет неподвижную точку x_0 с собственным значением -1 . Допустим, что в точке (x_0, μ_0) выполнены следующие условия

$$(F1) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \right) = \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} - 1 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \neq 0;$$

$$(F2) \quad a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right) \neq 0.$$

Тогда через точку (x_0, μ_0) проходит гладкая кривая, состоящая из неподвижных точек отображения f_μ , устойчивость которых меняется в этой точке. Кроме того, существует гладкая кривая γ , проходящая через (x_0, μ_0) , такая, что $\gamma - \{(x_0, \mu_0)\}$ представляет собой объединение гиперболических орбит периода 2. Кривая γ имеет квадратичное касание с прямой $\mathbb{R} \times \{\mu_0\}$ в точке (x_0, μ_0) .

Здесь величина (F1) представляет собой производную по μ от f' вдоль кривой неподвижных точек. Первое условие играет роль условий невырожденности SN2 и H2 в теоремах 2.5 и 2.6. В условии (F2) знак величины a определяет

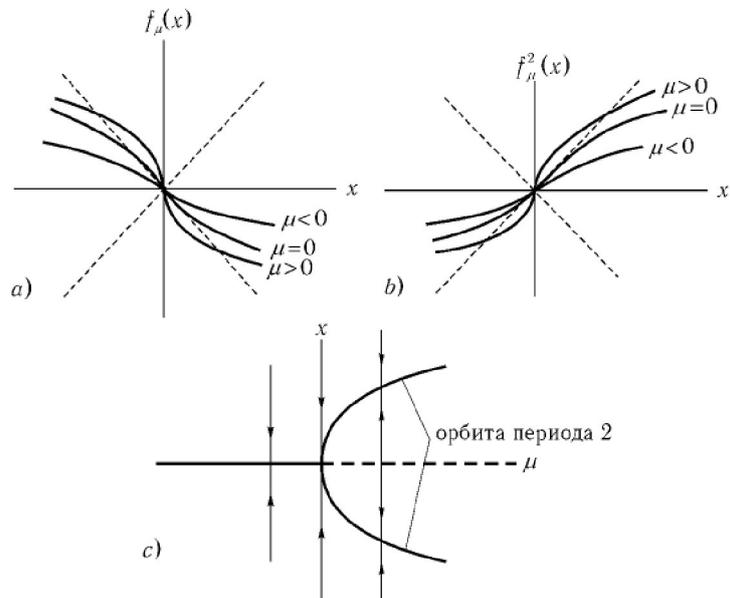


Рис. 2.14. Бифуркация переворачивания для уравнения (2.78): (а) графики $f_\mu(x)$ (б) графики $f_\mu^2(x)$; (с) бифуркационная диаграмма

устойчивость и направление бифуркации орбит периода 2. Если $a > 0$, орбиты устойчивы, а если $a < 0$ — то неустойчивы. Заметим, что для определения величины a необходим кубический член $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$.

На рисунке 2.14 показана бифуркационная диаграмма для семейства

$$f_\mu(x) = -(1 + \mu)x + x^3. \quad (2.78)$$

В качестве примера рассмотрим одномерное квадратичное отображение

$$f_\mu : x \rightarrow \mu - x^2. \quad (2.79)$$

Верхняя ветвь равновесия задается формулой (при $\mu > -\frac{1}{4}$)

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \mu}. \quad (2.80)$$

Линеаризация вдоль этой ветви приводит к соотношению

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 1 - \sqrt{1 + 4\mu} \quad (2.81)$$

откуда $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$ при $\mu = \frac{3}{4}$. Следовательно, $(x_0, \mu_0) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ является кандидатом на точку бифуркации удвоения периода. В данном примере легко

проверить, что условия F1 и F2 теоремы 2.75 выполнены, и бифуркация действительно имеет место.

Для определения устойчивости орбит периода два в данном примере заметим, что вторая и третья производные функции f в точке (x_0, μ_0) равны

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) = -2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \equiv 0, \quad (2.82)$$

следовательно, величина a в (F2) положительна и бифуркация суперкритическая.

Сделаем заключительное замечание, касающееся связи между отображением возврата P с собственным значением -1 в неподвижной точке p и непрерывным потоком вблизи соответствующей периодической орбиты. Траектории P переходят с одной стороны p на другую в направлении собственного вектора, соответствующего собственному значению -1 . Это означает, что двумерное центральное многообразие для этой периодической орбиты закручивается вокруг периодической орбиты, подобно тому, как лист Мебиуса закручивается вокруг своей центральной линии. Отображение P , склеивающее два конца листа друг с другом, обращает ориентацию вблизи p . Ввиду невозможности погрузить лист Мебиуса в ориентируемое двумерное многообразие (подобное плоскости) в двумерной системе не может произойти бифуркации удвоения периода. Однако, такая бифуркация может происходить, и происходит в действительности, в потоках размерности три или более.

Перейдем теперь к бифуркациям периодических орбит, имеющих комплексные собственные значения $\lambda, \bar{\lambda}$, где $|\lambda| = 1$. Аналогия с теорией бифуркации Хопфа подсказывает, что вблизи бифуркации будут существовать орбиты, окружающие неподвижную точку. Индивидуальная орбита дискретного отображения не может заполнить окружность целиком, поэтому структура бифуркации более сложна, чем это можно вывести на основании поиска новых периодических орбит. Действительно, некоторые потоки вблизи бифуркации *не имеют* новых периодических орбит вблизи обсуждаемой, но имеют вместо этого *квазипериодические* орбиты. Для отыскания последних требуется более тонкий анализ. Прежде чем провести такой анализ, отметим другую трудность, с которой приходится сталкиваться.

Пусть дано такое преобразование $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого начало является неподвижной точкой, а $Df(0)$ является матрицей поворота на угол $2\pi\theta$:

$$\begin{bmatrix} \cos 2\pi\theta & -\sin 2\pi\theta \\ \sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Мы хотим произвести вычисления нормальной формы, упрощающие члены старших порядков в ряде Тейлора для f посредством нелинейных преобразований координат. Как и в случае потоков, вычисления проще проводить в комплексной области. Если считать x, y комплексными числами, то собственные векторы $Df(0)$ равны $(1, -i)$ и $(1, i)$, они отвечают собственным значениям

$e^{2\pi i\theta}$ и $e^{-2\pi i\theta}$ и координатам z и \bar{z} соответственно. Допустим, что мы хотим изменить члены разложения степени k при помощи вещественного преобразования вида

$$h(z, \bar{z}) = id + \text{члены степени } k.$$

Поскольку координата \bar{z} образа k комплексно сопряжена с координатой z образа h , достаточно вычислить координату z образа сопряженного отображения hfh^{-1} . Если разложение Тейлора образа f по координате z до степени k имеет вид

$$f(z, \bar{z}) = e^{2\pi i\theta} z + f_2 + f_3 + \dots + R_k, \quad (2.84)$$

а координата z функции $h(z, \bar{z})$ равна

$$h(z, \bar{z}) = z + P_k(z, \bar{z}), \quad (2.85)$$

то координата z тейлоровского разложения сопряженного отображения hfh^{-1} описывается формулой

$$e^{2\pi i\theta} z + f_2 + f_3 + \dots + f_k + P_k(e^{2\pi i\theta} z, e^{-2\pi i\theta} \bar{z}) - e^{2\pi i\theta} P_k(z, \bar{z}). \quad (2.86)$$

Таким образом, мы можем удалить из f_k члены, представимые в виде

$$P_k(e^{2\pi i\theta} z, e^{-2\pi i\theta} \bar{z}) - e^{2\pi i\theta} P_k(z, \bar{z}). \quad (2.87)$$

Если обозначить выражение (2.87) как $adDf(P_k(z, \bar{z}))$, то $adDf$ определяет отображение на пространстве векторнозначных однородных полиномов, которое является линейным и диагонализуемым с собственными функциями $(z^l \bar{z}^{k-l}, 0)$ и $(0, z^l \bar{z}^{k-l})$ в координатах (z, \bar{z}) . Заметим, что

$$\begin{aligned} adDf \begin{bmatrix} z^l \bar{z}^{k-l} \\ 0 \end{bmatrix} &= (e^{2\pi i(2l-k)\theta} - e^{2\pi i\theta}) \begin{bmatrix} z^l \bar{z}^{k-l} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ adDf \begin{bmatrix} 0 \\ z^l \bar{z}^{k-l} \end{bmatrix} &= (e^{2\pi i(2l-k)\theta} - e^{2\pi i\theta}) \begin{bmatrix} 0 \\ z^l \bar{z}^{k-l} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Нулевые собственные значения у $adDf$ имеют место, если $(2l-k)\theta \equiv \pm\theta \pmod{1}$. Число θ иррационально, если k нечетно, а $l = (k \pm 1)/2$. При этом нулевые собственные векторы имеют вид $(z\bar{z})^l [z, 0]^T$ и $(z\bar{z})^l [0, \bar{z}]^T$. В вещественных координатах таким векторам отвечают отображения вида $(x^2 + y^2)^l g(x, y)$, где g — линейное отображение с матрицей

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Следовательно, если θ иррационально, то нормальные формы для f аналогичны нормальным формам, вычисленным для бифуркации Хопфа для потоков. Однако если θ рационально, то имеются дополнительные резонансные члены,

появляющиеся из других решений уравнения $2l - k)\theta \equiv \pm\theta \pmod{1}$. Знаменатель числа θ определяет наименьшую степень, в которой могут появиться эти члены.

Мы уже встречались со случаями $\theta = 0$ («седло-узел») и $\theta = 1/2$ (удвоенный период). Кроме того, при $\theta = \pm 3^{-1}$ или $\theta = \pm 4^{-1}$ в нормальную форму войдут члены степени два и три соответственно. Если $\theta = \pm 3^{-1}$, то эти члены имеют комплексную форму $\bar{z}^2[1, 0]^T$ и $\bar{z}^2[0, 1]^T$, а в случае $\theta = \pm 4^{-1}$ они имеют вид $\bar{z}^3[1, 0]^T$ и $\bar{z}^3[0, 1]^T$. Это означает, что бифуркационные структуры, ассоциированные с неподвижными точками, являющимися корнями третьей и четвертой степени из единицы, являются особыми. Если предположить, что λ не является корнем третьей или четвертой степени из единицы, то возможно провести общий анализ бифуркации Хопфа для периодических орбит (вторичной бифуркации Хопфа), и справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.8. Пусть $f_{\mu} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — некоторое однопараметрическое семейство отображений, имеющее гладкое семейство неподвижных точек $x(\mu)$, в которых собственные значения $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ комплексно сопряжены. Предположим, что

$$(SH1) \quad |\lambda(\mu_0)| = 1, \quad \text{но } \lambda^j(\mu_0) \neq 1 \quad \text{для } j = 1, 2, 3, 4.$$

$$(SH2) \quad \frac{d}{d\mu}(|\lambda(\mu_0)|) = d \neq 0.$$

Тогда существует такая гладкая замена координат h , что выражение для $hf_{\mu}h^{-1}$ в полярных координатах имеет вид

$$hf_{\mu}h^{-1}(r, \theta) = (r(1 + d(\mu - \mu_0) + ar^2), \theta + c + br^2) + \text{члены высших порядков.} \quad (2.89)$$

(Заметьте: в силу условий (SH1), (SH2), числа $c = |\arg(\lambda)|$ и d отличны от нуля.) Пусть, кроме того,

$$(SH3) \quad a \neq 0.$$

Тогда существует двумерная поверхность Σ (не обязательно бесконечно дифференцируемая) в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, имеющая квадратичное касание с плоскостью $\mathbb{R}^2 \times \{\mu_0\}$ и инвариантная относительно f . Если $\Sigma \cap (\mathbb{R}^2 \times \{\mu\})$ состоит более чем из одной точки, то это множество является простой замкнутой кривой.

Как и в случае потоков, знаки коэффициентов a и b определяют направление бифуркации и устойчивость рождающихся периодических орбит; c и b дают асимптотическую информацию о числах вращения, как сказано ниже.

Теорема утверждает, что (за исключением сильнорезонансных случаев $\lambda^3 = 1$ и $\bar{\lambda}^3 = 1$) на фазовом портрете отображения f_{μ} возникает нечто, похожее на предельные циклы из теоремы Хопфа. Это «нечто» представляет собой простые замкнутые кривые, ограничивающие области притяжения или отталкивания некоторой неподвижной точки. Однако теорема 2.8 не позволяет определить динамику на Σ . Во всех своих деталях, последняя проблема весьма сложна, она включает введение чисел вращения и рассмотрение тонкой проблемы

малых знаменателей. Укажем, что если в (2.89) $b \neq 0$, то можно доказать, что на Σ имеется сложно устроенная комбинация периодических и квазипериодических орбит. Для изучения такого поведения необходимо исследование глобальных бифуркаций диффеоморфизмов на окружности.

Формула устойчивости, дающая выражение коэффициента a в нормальной форме (2.89), может быть получена, по существу, тем же способом, как и в случае потоков. Полагая, что испытывающая бифуркацию система (суженная на центральное многообразие) имеет вид

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos c & \sin c \\ \sin c & \cos c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}, \quad (2.90)$$

с собственными значениями $\lambda, \bar{\lambda} = e^{\pm ic}$, получим

$$a = -\operatorname{Re} \left[\frac{(1-2\lambda)\bar{\lambda}^2}{1-\lambda} \xi_{11} \xi_{20} \right] - \frac{1}{2} |\xi_{11}|^2 - |\xi_{02}|^2 + \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \xi_{21}),$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{20} &= \frac{1}{8} [(f_{xx} - f_{yy} + 2g_{xy}) + i(g_{xx} - g_{yy} - 2f_{xy})], \\ \xi_{11} &= \frac{1}{4} [(f_{xx} + f_{yy}) + i(g_{xx} + g_{yy})], \\ \xi_{02} &= \frac{1}{8} [(f_{xx} - f_{yy} - 2g_{xy}) + i(g_{xx} - g_{yy} + 2f_{xy})], \\ \xi_{21} &= \frac{1}{16} [(f_{xxx} - f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + i(g_{xxx} - g_{xyy} - f_{xxy} - f_{yyy})]. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Рассмотрим пример

$$F_\mu : (x, y) \rightarrow (y, \mu y(1-x)). \quad (2.92)$$

Данное отображение имеет неподвижные точки $(x, y) = (0, 0)$ и $(x, y) = ((\mu - 1)/\mu, (\mu - 1)/\mu)$. Можно проверить, что при $\mu > 1$ точка $(0, 0)$ будет седловой. Матрица отображения, линеаризованного в другой, ненулевой, неподвижной точке, имеет вид

$$DF \left(\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{\mu-1}{\mu} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-\mu & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.93)$$

а собственные значения равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{5-4\mu}). \quad (2.94)$$

При $\mu > 5/4$ эти собственные значения будут комплексно сопряженными и могут быть записаны в следующей форме:

$$\lambda, \bar{\lambda} = (\mu - 1)e^{\pm ic}, \quad \operatorname{det} g c = \sqrt{4\mu - 5}. \quad (2.95)$$

Несложно проверить, что гипотезы (SH1) и (SH2) теоремы 2.8 выполнены при $\mu = 2$, так как при этом $\lambda, \bar{\lambda} = e^{\pm i\pi/3}$ являются корнями шестой степени из единицы, а

$$\frac{d}{d\mu}|\lambda(\mu)|_{\mu=2} = 1.$$

Для вычисления a из уравнения (2.91) и, тем самым, проверки (SH3) положим в (2.92) $\mu = 2$ и сделаем замены координат

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x - 1/2, y - 1/2)$$

и

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (2.96)$$

переводящие, испытывающее бифуркацию, положение равновесия в начало координат и приводящие линейную часть к нормальной форме. В новых переменных отображение (2.92) примет вид

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2uv + 2v^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.97)$$

а собственные значения равны $\lambda, \bar{\lambda} = 1/2 \pm i(\sqrt{3}/2)$. Нелинейные члены квадратичны, и мы имеем

$$\begin{aligned} f_{uu} &= 0, & f_{uv} &= -2, & f_{vv} &= -4, \\ g_{uu} &= 0, & g_{uv} &= 0, & g_{vv} &= 0. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Отсюда получаем

$$\xi_{20} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \quad \xi_{11} = -1, \quad \xi_{20} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \quad \xi_{11} = 0. \quad (2.99)$$

и подстановка в формулу для a дает

$$a = \frac{\sqrt{3} - 7}{4} < 0. \quad (2.100)$$

Поскольку $(d/d\mu)(|\lambda(\mu)|)_{\mu=2} = d = 1 > 0$, мы получаем из (2.89), что бифуркация суперкритическая и, следовательно, существует притягивающая инвариантная замкнутая кривая, окружающая точку $(x, y) = (1/2, 1/2)$ для $\mu > 2$, если величина $|\mu - 2|$ достаточно мала.

Литература

1. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] (4-е изд.)/Л.С. Понтрягин. - М.: Наука, 1974. - 331 с.
2. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [Текст]/Л.Э. Эльсгольц. - М.: Наука, 1969. - 424 с.
3. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения[Текст]/В.И. Арнольд. - Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. - 368 с.
4. Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения [Текст]/И.Г. Малкин. - М.: Наука, 1966. - 530 с.
5. Chillingworth, D.R.J. Differentiable Topology with a View to Applications[Text]/D.R.J. Chillingworth. - Pitman: London. 1976.
6. Hirsch, M.W. Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra [Text]/ M.W. Hirsch, S. Smale. - NY.: Academic Press, 1974. ???
7. Carr, J. Applications of Center Manifold Theory[Text]/J. Carr. - NY.:Springer-Verlag, 1981.
8. Nitecki, Z. Differentiable Dynamics[Text]/Z. Nitecki Cambridge.: M.I.T Press, 1971.
9. Ruelle, D. Small random perturbation of dynamical systems and the definition of attractors[Text]/D. Ruelle//Comm. Math. Phys. - 1981. -№82. - P. 137-151.
10. Conley, C. Isolated Invariant Sets and the Morse Index[Text]/ C. Conley//CBMS Regional Conferences in Mathematics, Vol. 38. - Providence: A.M.S. Publications, 1978.
11. Hartman, P. Ordinary Differential Equations[Text]/P. Hartman. - NY.:Wiley, 1964.
12. Андронов, А.А. Теория Колебаний[Текст]/А.А. Андронов,А.А. Витт, С.Э. Хайкин. М.:Физматгиз, 1959. - 914 с.

13. Hirsch, M.W. Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra[Text]/M.W. Hirsch, S. Smale. - NY.:Academic Press, 1974.
14. Pugh, C.C. The closing lemma[Text]C.C. Pugh//Amer. J. Math. - 1967. - №89. - P.956-1009.
15. Palis, J. Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction[Text]J. Palis, W de Melo. - NY.:Springer-Verlag, 1982.
16. Ioss, G. Elementary Stability and Difurcation Theory[Text]/G. Ioss, D.D. Joseph. - NY.:Springer-Verlag, 1981.

Предметный указатель

- C^k -сопряженные отображения, 30
- C^k -эквивалентные векторные поля, 30
- C^k -эквивалентные отображения, 30
- α -предельная точка, 27
- α -предельное множество, 27
- ω -предельная точка, 27
- ω -предельное множество, 28
- Автономная система, 5
- Асимптотическая устойчивость, 7
- Аттрактор, 28
- База, 5
- Бифуркации, 49
 - глобальные, 49
 - локальные, 49
- Бифуркационная диаграмма, 50, 51
- Бифуркационное значение параметра, 50
- Бифуркация удвоения периода, 82
- Векторное поле, 5
- Возмущение, 30
- Гамильтонова система, 36
- Гетероклинные траектории, 21
- Гетероклинные орбиты, 35
- Гиперболическая неподвижная точка, 13
- Гиперболическая точка, 18
- Глобально асимптотически устойчивая точка, 8
- Гомоклиническая орбита, 21
- Гомоклинные орбиты, 35
- Гомоклинный цикл, 35
- Деформация, 53
- Диффеоморфизм, 17
- Изоклина, 43
- Инвариантное множество, 26
- Индекс точки, 41
- Квазиаттрактор, 29
- Константа Липшица, 6
- Коразмерность, 53
- Локальное неустойчивое многообразие, 14
- Локальное устойчивое многообразие, 14
- Неблуждающая точка, 26
- Неблуждающие множества, 26
- Невырожденная неподвижная точка, 13
- Неподвижная точка, 7, 12
- Неустойчивая точка, 7
- Нормальная форма, 67
- Область захвата, 28
- Область притяжения, 28
- Орбита дифференциального уравнения, 5
- Отображение Пуанкаре, 21
- Отталкивающее множество, 28
- Периодическая орбита, 18
- Положение равновесия, 7, 12
- Потенциальная функция, 39
- Поток, 5
- Притягивающее множество, 28
- Производная Ли, 70
- Реплер, 28

Сепаратриса, 39
Система Лоренца, 58
Система Морса-Смейла, 47
Смена устойчивости, 78
Стационарное решение, 12
Сток, 7
Структурно устойчивое векторное поле, 31
Структурно устойчивое отображение, 31
Субгармоническая бифуркация, 82
Субкритическая вилка, 79
Суперкритическая вилка, 79

Теорема
 критерий Бендиксона, 35
 локального существования и единственности решений, 6
 о нормальной форме, 70
 о центральном многообразии для потоков, 57
 об устойчивом многообразии для неподвижной точки, 14, 17
Пейкото, 43
Пуанкаре-Бендиксона, 34
Хармана-Гробмана, 17
Хартман-Гробмана, 13

Точка бифуркации, 50
Трансверсальное пересечение, 51
Транскритическая бифуркация, 78

теория диффеоморфизмов, 17
топологическая эквивалентность, 30

Устойчивая неподвижная точка, 7

Фазовая кривая, 5
Фазовая траектория, 5
Функция Ляпунова, 7

Характеристический мультипликатор, 24

Центр, 7