

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика  
С.П.Королева**

**Ю.М.Заболотнов**

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**Учебное пособие**

**Самара 2005**

УДК 519.9+534.1

Оптимальное управление непрерывными динамическими системами / Ю.М.Заболотнов; Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2005. 129 с.

Пособие включает в себя описание методов оптимального управления динамическими системами. Особое внимание уделено оптимальному решению задачи стабилизации для линейных динамических систем. Наряду с изложением классических методов оптимального управления линейными системами, основанными главным образом на принципе динамического программирования Беллмана, рассматривается приближенно оптимальное управление колебательными динамическими системами с использованием метода усреднения.

Материал пособия входит в курс лекций «Теоретические основы автоматизированного управления», читаемых автором для студентов специальности 230102 – автоматизированные системы обработки информации и управления на кафедрах информационных систем и технологий, математики и механики СГАУ. Однако пособие может быть полезно для студентов других специальностей при изучении теории оптимального управления динамическими системами.

Ил. 12 Библиогр.: 22 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. Академика С.П.Королева

Рецензенты: С.А.Ишков, Л.В.Кудюров

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	5
1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ .....	8
1.1. Постановка задачи оптимального управления динамическими системами	8
1.2. Программное оптимальное управление и задача стабилизации .....	10
1.3. Невозмущенное и возмущенное движения динамической системы .....	11
1.4. Постановка задачи оптимальной стабилизации движения для линейной динамической системы .....	13
2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	16
2.1. Подобные преобразования линейных динамических систем .....	16
2.2. Управляемость динамических систем .....	17
2.3. Наблюдаемость динамических систем .....	21
3. ПРИНЦИП ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БЕЛЛМАНА И ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА .....	23
3.1. Принцип динамического программирования Беллмана .....	23
3.2. Оптимальное управление линейными динамическими системами .....	27
3.3. Теория устойчивости Ляпунова .....	30
3.4. Связь метода динамического программирования с теорией устойчивости Ляпунова .....	34
4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	37
4.1. Решение уравнения Беллмана для линейных стационарных динамических систем .....	37
4.2. Решение уравнения Беллмана для линейных нестационарных динамических систем .....	39
4.3. О выборе критерия оптимальности при решении задачи стабилизации	41
4.4. Пример оптимального выбора коэффициентов регулятора при управлении линейной системой второго порядка .....	44

5. ДИНАМИЧЕСКИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ .....	52
5.1. Малые колебания динамических систем .....	52
5.2. Управляемость и наблюдаемость линейных колебательных динамических систем .....	60
5.3. Метод малого параметра .....	63
5.4. Метод усреднения .....	67
5.5. Метод усреднения для системы с одной степенью свободы .....	70
5.6. Метод усреднения для систем с несколькими быстрыми фазами .....	72
5.7. Метод усреднения для системы с двумя степенями свободы .....	77
6. ПРИБЛИЖЕННО ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ .....	83
6.1. Управление линейной колебательной системой с одной степенью свободы .....	83
6.2. Управление линейной колебательной системой с двумя степенями свободы .....	92
6.3. Влияние нелинейных возмущений на решение задачи оптимального управления .....	99
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	109
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Подобные преобразования линейных динамических систем ...	111
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Качественное исследование линейных динамических систем на фазовой плоскости .....	115
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Дифференцирование функций с векторным аргументом .....	123
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Основные понятия теории асимптотических рядов .....	124
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Усреднение тригонометрических функций .....	128

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Традиционно в классической теории управления рассматриваются две основные задачи: задача определения программного движения динамической системы и задача о проектировании регуляторов, реализующих заданное программное движение объекта управления (задача стабилизации). Основное внимание в пособии уделяется решению задачи стабилизации, при решении которой обычно используются линейные динамические модели. По сравнению со статическими системами в динамических системах процесс развивается во времени и управление в общем случае тоже является функцией времени.

При решении задачи стабилизации могут быть использованы различные методы. Здесь, прежде всего, следует отметить классические методы теории автоматического управления, основанные на аппарате передаточных функций и частотных характеристик. Однако появление быстродействующих ЭВМ привело к развитию новых методов, составляющих основу современной теории управления. В современной теории управления поведение системы описывается в пространстве состояний и управление системой сводится к определению оптимальных в некотором смысле управляющих воздействий на систему в каждый момент времени. Причем математическими моделями непрерывных динамических систем обычно являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, независимой переменной в которых является время.

При решении задачи стабилизации оптимальность управления понимается в смысле минимума некоторого критерия оптимальности (функционала), который записывается в виде определенного интеграла. Критерий оптимальности может характеризовать различные аспекты качества управления: затраты на управление (энергии, топлива и др.), ошибки управления (по различным переменным состояниям) и т.д. Для определения оптимального управления при решении задачи стабилизации

используется классический принцип динамического программирования Беллмана.

Первый раздел пособия является вводным: в нем производится математическая постановка задач, решаемых при управлении непрерывными динамическими системами. Второй раздел посвящен вопросам, предваряющим построение оптимального управления для линейных систем: вопросам управляемости и наблюдаемости. В третьем разделе выводятся основные соотношения принципа динамического программирования Беллмана, из которых далее определяется оптимальное управление для линейной динамической системы при решении задачи стабилизации. В этом же разделе показывается, что принцип динамического программирования Беллмана для линейных систем органически связан со вторым методом Ляпунова, выполнение теорем которого обеспечивает решение задачи стабилизации. В четвертом разделе пособия излагаются алгоритмы определения оптимального управления при решении задачи стабилизации при заданном квадратичном критерии оптимальности (подынтегральная функция функционала является квадратичной формой от управления и переменных состояния системы). Приводится пример определения оптимального управления с заданным критерием оптимальности для конкретной линейной системы. В пятом разделе излагаются основы теории динамических колебательных систем. Выводятся основные соотношения принципа усреднения, позволяющего во многих случаях существенно упростить анализ и синтез колебательных систем. В шестом разделе рассматривается метод определения приближенно оптимального управления для задачи стабилизации колебательными системами. Приводятся примеры управления колебательными системами с одной и с двумя степенями свободы. Анализируются вопросы возможного влияния нелинейных возмущений на решение задач стабилизации колебательных систем.

Методы, изложенные в пособии, позволяют найти оптимальное управление для решения задач стабилизации динамических систем в виде аналитических функций, зависящих от переменных состояния системы. В этом случае говорят, что решается задача синтеза управления. Эти методы можно отнести к теории аналитического конструирования регуляторов, являющейся одной из важных направлений развития современной теории управления.

Материал пособия основывается на работах в области теории управления, которые с течением времени уже стали классическими. Здесь прежде всего необходимо отметить работы Понтрягина Л.С. [2], Летова А.М. [3], Демидовича Б.П. [4], Гропа Д. [6], Беллмана Р. [7], Моисеева Н.Н.[13], Боголюбова Н.Н., Митропольского Ю.А. [14] и др. известных отечественных и зарубежных ученых.

# 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

## 1.1. Постановка задачи оптимального управления динамическими системами

Математические модели динамических систем могут быть построены в различных формах. Это могут быть системы обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, соответствующие дискретные модели и др. Отличительной особенностью математического описания любой динамической системы является то, что ее поведение развивается во времени и характеризуется  $n$  функциями  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , которые называются переменными состояния (фазовыми координатами) системы. В дальнейшем будем рассматривать системы с непрерывным временем. Движение динамической системы может быть управляемым и неуправляемым. При реализации управляемого движения поведение динамической системы зависит также от  $r$  управляющих функций  $u_1(t), \dots, u_r(t)$ . Предположим также, что поведение системы определяется однозначно, если задана вектор-функция управления  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$  и начальное фазовое состояние  $x_0 = x(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$ , где  $t_0$  - начальное время.

В качестве математической модели динамической системы будем рассматривать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, записанную в нормальной форме Коши

$$\frac{dx}{dt} = F(x, u), \quad (1.1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_r)$ ,  $F(x, u) = (F_1(x, u), \dots, F_n(x, u))$  - известная вектор-функция.

К системе (1.1) чаще всего приводятся разнообразные математические модели динамических систем с непрерывным временем. Так, например, если поведение динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений в



частных производных и происходит в пространстве и во времени (математические модели механики сплошной среды), то, производя дискретизацию по пространству (конечно элементный подход), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений подобной (1.1), решение которой ищутся как функции времени.

Введенное ранее предположение об однозначности процесса управления для системы (1.1) определяется выполнением условий теоремы о существовании и единственности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши [1].

Сформулируем задачу оптимального управления системой (1.1) [2]. В начальный момент  $t_0$  система (1.1) находится в состоянии  $x_0$ , необходимо определить такое управление  $u(t)$ , которое переведет систему в заданное конечное состояние  $x_T = x(T)$  (отличное от начального), где  $T \leq \infty$  - конечное время. Обычно требуется, чтобы переход из точки  $x_0$  в точку  $x_T$  (переходный процесс) был в определенном смысле наилучшим из всех возможных переходов. Например, если рассматривается некоторая техническая система, то переходный процесс должен удовлетворять условию минимума затраченной энергии или условию минимума времени перехода. Такой наилучший переходный процесс принято называть оптимальным процессом.

Функция управления  $u(t)$  обычно принадлежит некоторой области управления  $u(t) \in U$ , которое является множеством  $r$ -мерного евклидова пространства. В технических приложениях предполагают, что область  $U$  есть замкнутая область, то есть область, включающая свои границы. Допустимым управлением будем называть любое управление  $u(t) \in U$ , переводящее систему из точки  $x_0$  в точку  $x_T$ . Для количественного сравнения различных допустимых управлений вводят критерий оптимальности, который, как правило, представляют в виде некоторого функционала

$$I = \int_0^T w(x(t), u(t)) dt \quad . \quad (1.2)$$

Функционал вычисляется на решениях системы (1.1)  $x(t)$ , удовлетворяющих условиям  $x(t_0) = x_0$  и  $x(T) = x_T$ , при заданном допустимом управлении  $u(t) \in U$ .

Окончательно, задача оптимального управления формулируется следующим образом: в фазовом пространстве даны две точки  $x_0$  и  $x_T$ ; среди всех допустимых управлений  $u(t) \in U$ , переводящих фазовую точку из положения  $x_0$  в положение  $x_T$ , найти такое, для которого функционал (1.2) принимает наименьшее значение.

Управление  $u(t)$ , дающее решение поставленной выше задачи, называется оптимальным управлением и обозначается  $u^0(t)$ , а соответствующая траектория  $x^0(t)$  - оптимальной траекторией.

Замечание. Если необходимо обеспечить максимум некоторого критерия, то можно свести данную задачу к задаче поиска минимума формально изменив знак перед функционалом (1.2).

Частным случаем поставленной задачи оптимального управления является случай, когда  $w(x, u) \equiv 1$ . Тогда функционал (1.2) принимает вид  $I = T - t_0$  и оптимальность заключается в реализации минимального времени перехода из точки  $x_0$  в точку  $x_T$ . Такую задачу оптимального управления называют задачей быстрогодействия.

## 1.2. Программное оптимальное управление и задача стабилизации

Рассмотрим движение динамической системы (1.1). Пусть для этой системы найдено оптимальное управление  $u^0(t)$  и получена соответствующая оптимальная траектория  $x^0(t)$ . При реализации оптимальной траектории в технических задачах неизбежно наталкиваются на существенные трудности, заключающиеся в невозможности, во-первых, точно установить реальную систему (или объект управления) в начальное состояние  $x_0$ , во-вторых, точно реализовать само оптимальное управление  $u^0(t)$ , в третьих, точно предсказать заранее внешние

условия функционирования системы (приближенность исходной математической модели). Все это приводит к необходимости решать задачу о коррекции закона оптимального управления в процессе функционирования любой технической системы (или объекта). Таким образом, задачу оптимального управления в реальных условиях можно разделить на две части: 1) построение номинального оптимального управления  $u^O(t)$  исходной динамической системой в идеальных условиях в рамках математической модели (1.1); 2) построение корректирующих управляющих воздействий  $\Delta u(t)$  с целью реализации заданного номинального оптимального управления  $u^O(t)$  и оптимальной траектории  $x^O(t)$  в процессе функционирования системы. Первую часть задачи оптимального управления принято называть задачей построения оптимального программного управления [3], причем она решается в рамках априорной информации, известной заранее о рассматриваемой системе. Вторую часть задачи называют задачей стабилизации заданной номинальной программы управления [3] и решается она должна в процессе функционирования системы по информации, поступающей от измерительных устройств системы управления. Задача стабилизации номинальной программы управления тоже может быть поставлена как задача поиска оптимального управления  $\Delta u(t)$  по соответствующему критерию, что будет сделано ниже (см. раздел 1.4).

Замечание. Очевидно, что в качестве номинальной программы управления может быть использована не только оптимальное управление  $u^O(t)$ , но и любое другое допустимое управление (если задача оптимизации программного управления не решается). В частном самом простом случае может быть, например, поставлена задача о стабилизации некоторого постоянного положения системы  $x(t) = const$ .

### 1.3. Невозмущенное и возмущенное движения динамической системы

Так как реальное движение системы неизбежно отличается от номинального программного, то этот факт привел к концепции невозмущенного и возмущенного движений Ляпунова А.А. [4]. Так, любое программное движение системы (1.1),

независимо от того является ли оно оптимальным или допустимым называется невозмущенным движением. Причем этому движению соответствует некоторое частное решение системы (1.1). Возмущенное движение оценивается при этом некоторыми отклонениями от невозмущенного движения. Следовательно, возмущенное движение будет описываться следующими переменными

$$x = x^0 + \Delta x, \quad u = u^0 + \Delta u, \quad (1.3)$$

где переменные  $x^0$  и  $u^0$  характеризуют номинальную программу управления, а переменные  $\Delta x$  и  $\Delta u$  - отклонения от номинальной программы.

Подставляя соотношения (1.3) в систему (1.1), получим

$$\frac{dx^0}{dt} + \frac{d\Delta x}{dt} = F(x^0 + \Delta x, u^0 + \Delta u). \quad (1.4)$$

Прибавляя и отнимая в правой части системы (1.4) одинаковое слагаемое  $F(x^0, u^0)$  и учитывая, что

$$\frac{dx^0}{dt} = F(x^0, u^0), \quad (1.5)$$

получим систему в отклонениях от номинального движения

$$\frac{dy}{dt} = Y(y, \Delta u) - F(x^0, u^0), \quad (1.6)$$

где  $y = \Delta x$ ,  $Y(y, \Delta u) = F(x^0 + \Delta x, u^0 + \Delta u)$ , а  $x^0, u^0$  определяются в результате решения системы (1.5).

Обычно считают, что отклонения  $\Delta x$  и  $\Delta u$  от номинального движения являются малыми величинами. Поэтому, если разложить функцию  $Y(y, \Delta u)$  в ряд

Тейлора и ввести обозначения  $b_{k,l} = \left(\frac{dY_k}{dy_l}\right)_0$ ,  $m_{k,l} = \left(\frac{dY_k}{du_l}\right)_0$ , где индекс (0) означает, что частные производные определяются для заданной номинальной программы, то получим

$$\frac{dy}{dt} = By + m\Delta u + F_2(y, \Delta u). \quad (1.7)$$

Здесь функция  $F_2(y, \Delta u)$  определяет слагаемые второго порядка и выше по отклонениям  $y, \Delta u$ ; матрицы  $B$  и  $m$  выделяют линейную часть ряда и имеют компоненты  $b_{k,l}$  и  $m_{k,l}$ ;  $Y(0,0) = F(x^0, u^0)$ .

Уравнения, записанные в отклонениях (1.7), имеют большое значение в теории управления. На основании этих уравнений производится постановка большого количества задач оптимизации, имеющих практический интерес. Одна из этих задач – задача стабилизации, сформулированная выше. При решении этой задачи требуется определить, как следует выбрать корректирующие управляющие воздействия  $\Delta u$ , чтобы уменьшить отклонения  $y$  в некотором смысле наилучшим образом.

#### 1.4. Постановка задачи оптимальной стабилизации движения для линейной динамической системы

Чаще всего при решении задачи стабилизации движения системы или объекта управления используется линейная динамическая система в отклонениях, получающаяся из системы (1.7) отбрасыванием нелинейных слагаемых  $F_2(y, \Delta u)$ .

Тогда

$$\frac{dy}{dt} = By + m\Delta u, \quad (1.8)$$

где матрицы  $B$  и  $m$  в общем случае являются функциями времени, так как зависят от номинальной программы управления  $x^0(t), u^0(t)$ .

Рассмотрим для простоты случай, когда управление  $u$  является скалярной величиной. При рассмотрении задачи управления линейной динамической системой обычно в качестве критерия оптимальности применяется функционал с квадратичной подинтегральной функцией [3]

$$I = \int_0^T (\Psi(y) + c \Delta u^2) dt \quad . \quad (1.9)$$

Здесь  $c > 0$ ,  $\Psi(y)$  - симметричная квадратичная форма вектора  $y$

$$\Psi(y) = y^* a y, \quad (1.10)$$

где  $y^*$  - транспонированный вектор  $y$  (вектор-строка),  $a$  - квадратная симметричная матрица.

Предполагается, что функция  $\Psi(y)$  есть положительно определенная квадратичная форма  $\Psi(y) \geq 0$ , причем  $\Psi(0) = 0$  только при  $y = 0$ . Проводя перемножения в соотношении (1.10) в скалярном виде можно записать

$$\Psi(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} y_k y_l, \quad (1.11)$$

где  $a_{kl}$  - компоненты матрицы  $a$ .

Для того, чтобы квадратичная форма (1.11) была положительно определена необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры вещественной симметричной матрицы  $a$  были положительны (условие Сильвестра) [5]:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.12)$$

В качестве допустимых функций управления обычно принимаются кусочно-непрерывные функции  $\Delta u(t)$ , принадлежащие некоторой области  $\Delta u(t) \in U$ . Если управление определяется как функция вектора фазовых переменных  $\Delta u(y)$ , то говорят, что решается задача синтеза управления. После подстановки закона  $\Delta u(y)$  в систему (1.8) получается автономная линейная система (правые части дифференциальных уравнений зависят только от вектора фазовых переменных  $y$ ), которая в теории управления называется замкнутой системой.

Таким образом, задача оптимальной стабилизации движения линейной динамической системой формулируется так: среди допустимых управлений  $\Delta u$  системой (1.8) найти такое управление, которая доставляет минимум функционалу (1.9) и переводит систему из начального положения  $y(t_0)$  в начало координат  $y(T) = 0$ , где  $T \leq \infty$  - время перехода.

Если рассматривается частный случай, когда  $I = T$ , то задача называется задачей быстрогодействия.

## 2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 2.1. Подобные преобразования линейных динамических систем

При исследовании движения линейных динамических систем вида (1.8) часто используются так называемые подобные преобразования. Пусть  $P$  - невырожденная квадратная матрица (см. Приложение 1). Введем линейную замену переменных

$$y = P y_*. \quad (2.1)$$

Рассмотрим преобразование системы (1.8), где матрицы  $B$  и  $m$  для простоты будем считать постоянными, подставив замену (2.1) в соотношение (1.8). Тогда

$$P \frac{dy_*}{dt} = B P y_* + m \Delta u,$$

или, умножая слева на обратную матрицу  $P^{-1}$ , получим линейную систему относительно новых переменных  $y_*$

$$\frac{dy_*}{dt} = A y_* + m_* u, \quad (2.2)$$

где  $A = P^{-1} B P$ ,  $m_* = P^{-1} m$ , и для сокращения обозначений полагается  $u = \Delta u$ .

Определение. Преобразование матрицы  $P^{-1} B P$ , где квадратная матрица  $P$  не вырождена, называется подобным преобразованием.

Подобные преобразования матриц и, следовательно, линейных динамических систем обладают рядом важных свойств (см. Приложение 1). В частности, при подобных преобразованиях собственные значения матриц не изменяются. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - собственные значения матрицы  $B$ , а  $V^{(1)}, \dots, V^{(n)}$  - соответствующие им собственные вектора (см. Приложение 1). Введем матрицу  $V$ , столбцами которой являются собственные вектора  $V^{(1)}, \dots, V^{(n)}$ . Рассмотрим случай, когда матрица  $B$  не имеет кратных (одинаковых) собственных значений. В этом случае подобное преобразование  $V^{-1} B V$  приводит матрицу  $B$  к диагональному виду  $D = V^{-1} B V$ ,



где  $D$  - диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $B$  (доказательство приводится в Приложении 1).

Рассмотрим неуправляемую линейную систему

$$\frac{dy}{dt} = By. \quad (2.3)$$

Тогда преобразование  $V^{-1}BV$  (если оно существует) приводит систему (2.3) к диагональному виду

$$\frac{dy_*}{dt} = Dy_*. \quad (2.4)$$

В системе (2.4) все уравнения разделяются

$$\frac{dy_{1*}}{dt} = \lambda_1 y_{1*}, \dots, \frac{dy_{n*}}{dt} = \lambda_n y_{n*},$$

интегрируются раздельно и имеют решения

$$y_{1*} = C_1 \exp(\lambda_1 t), \dots, y_{n*} = C_n \exp(\lambda_n t),$$

где  $C_1, \dots, C_n$  - произвольные постоянные.

Если линейная система (2.3) приводится к диагональному виду (2.4), то фазовые переменные  $y_{1*}, \dots, y_{n*}$  называются главными координатами.

## 2.2. Управляемость динамических систем

Перед решением задачи оптимального управления динамической системой иногда (если это возможно) проводится анализ системы на управляемость.

**Определение** [6].

Динамическая система (1.1) является управляемой, если она может быть переведена из любого начального состояния  $x(t_0)$  в любое другое желаемое состояние  $x(T)$  за некоторый промежуток времени  $T - t_0$  путем приложения кусочно-непрерывного допустимого управления  $u(t)$ .

Понятие управляемости и связанное с ним понятие наблюдаемости (оно будет рассмотрено ниже) впервые были введены Калманом [6].

Определить априори управляемость нелинейной динамической системы общего вида (1.1) не представляется возможным. Вывод об управляемости в этом случае делается в процессе решения задачи оптимального управления. Однако для линейной динамической системы (1.8) это можно сделать заранее. Наиболее известным является критерий управляемости Гильберта [6]. Этот критерий предполагает приведение линейной системы (1.8) к главным координатам (приводится часть системы, зависящая от фазовых переменных  $y$ ).

В соответствии с критерием Гильберта система (1.8), приведенная к главным координатам

$$\frac{dy_*}{dt} = Dy_* + m_*u, \quad (2.5)$$

управляема, если ни одна из строк матрицы  $m_* = V^{-1}m$  не является нулевой (то есть для управляемости в каждой строке матрицы  $m_*$  должен быть по крайней мере один ненулевой элемент).

Если матрица  $m_*$  представляет собой матрицу-столбец (это будет тогда, когда управление  $u$  - скалярная величина), то критерий управляемости требует, чтобы ни одна компонента этого столбца не была нулевой. Следовательно, для определения управляемости линейной системой (1.8) она должна быть приведена к главным координатам и представлена в виде (1.17). Система (1.8) приводится к виду (2.5), где  $D$  диагональная матрица, тогда, когда матрица  $B$  имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов (см. Приложение 1). В этом случае доказать неуправляемость системы, если хотя бы одна строка матрицы  $m_*$  нулевая, не представляет трудности. Поскольку взаимодействие между главными координатами в системе (2.5) отсутствует, то становится очевидным, что если любая строка, например  $i$ -ая, равна нулю, то на соответствующую  $i$ -ую главную координату не может повлиять выбор управления. Следовательно, по этой переменной система неуправляема.

Если среди собственных значений матрицы  $B$  есть кратные, то эта матрица, как известно [4], не может быть приведена к диагональной форме. Однако в этом

случае она может быть преобразована к форме Жордана (см. Приложение 1). Тогда система (1.8) представляется в виде

$$\frac{dy_*}{dt} = Jy_* + m_*u. \quad (2.6)$$

Здесь жорданова форма  $J$  матрицы  $B$  имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \delta_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_{n-1} & \delta_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

где компоненты  $\delta_i = 0$ , если  $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ , и  $\delta_i = 1$ , если  $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ .

В жордановой форме (2.7) обычно кратные собственные значения располагаются рядом. Поэтому в матрице  $J$  имеются так называемые клетки Жордана. Так, например, двум кратным собственным значениям  $\lambda_1 = \lambda_2$

соответствует клетка Жордана вида  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ , трем кратным собственным

значениям  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  - клетка Жордана вида

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

и т.д.

Если линейная динамическая система (1.8) приведена к виду (2.6), где  $J$  - жорданова форма (2.7), то для управляемости необходимо, чтобы по крайней мере один элемент матрицы  $m_*$  в строке, соответствующей нижней строке каждой клетки Жордана, и как минимум один элемент матрицы  $m_*$  в каждой другой строке (не входящей в клетку Жордана) были отличны от нуля [6].

Чтобы понять суть данного условия управляемости рассмотрим линейную систему третьего порядка с двумя кратными собственными значениями  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,

приведенную к форме (2.6). В случае скалярного управления  $u$  она для этого случая примет вид

$$\begin{aligned}\frac{dy_{1*}}{dt} &= \lambda_1 y_{1*} + y_{2*} + m_{1*} u, \\ \frac{dy_{2*}}{dt} &= \lambda_2 y_{2*} + m_{2*} u, \\ \frac{dy_{3*}}{dt} &= \lambda_3 y_{3*} + m_{3*} u.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Система (2.8) будет управляемой согласно сформулированному выше критерию, если  $m_{2*} \neq 0$  и  $m_{3*} \neq 0$ . При этом элемент  $m_{1*}$  может быть равен нулю:  $m_{1*} = 0$ . Здесь элемент  $m_{2*}$  соответствует нижней строке клетки Жордана, а элемент  $m_{3*}$  соответствует строке матрицы Жордана, не входящей в клетку Жордана. Фазовая переменная  $y_{1*}$  оказывается управляемой, так как правая часть первого уравнения системы (2.8) зависит от переменной  $y_{2*}$ .

Для определения управляемости линейной динамической системы (1.8) можно также воспользоваться критерием Калмана [6]. Этот критерий является менее наглядным, но с другой стороны более универсальным, так как его применение не зависит от того, имеются ли в системе кратные собственные значения или нет. В этом случае приведение системы к главным координатам не требуется. В соответствии с критерием Калмана для определения управляемости системы необходимо составить матрицу

$$M = (m, Bm, B^2m, \dots, B^{n-1}m)\tag{2.9}$$

размерностью  $n \times nr$ , в которой ее составляющие матрицы соединяются по горизонтали.

В соответствии с критерием Калмана [6] система (1.8) будет управляема, если матрица  $M$  (2.9) имеет ранг  $n$ .

Замечание. Ранг матрицы равен  $n$ , если по крайней мере один определитель этой матрицы  $n$ -ого порядка отличен от нуля.

Следовательно, для определения управляемости системы (1.8), необходимо составить матрицу  $M$  (2.9) и определить ее ранг.

### 2.3. Наблюдаемость динамических систем

Понятие наблюдаемости дополняет понятие управляемости [6]. Эти два понятия, как правило, имеет смысл рассматривать только совместно. Если управляемость требует, чтобы каждое состояние (каждая переменная состояния  $y_{i*}$ , где  $i = 1, \dots, n$ ) было чувствительно к управляющему воздействию  $u$ , то наблюдаемость требует, чтобы каждая переменная состояния влияло на вектор измеренных переменных  $z_j$ , где  $i = 1, \dots, k$ .

#### **Определение** [6].

Система наблюдаема, если все ее переменные состояния  $y_{i*}$  можно непосредственно или косвенно (посредством других переменных  $z_j$ ) определить посредством измерений.

Получим критерий наблюдаемости для линейных динамических систем. Исходную систему уравнений (1.8) рассмотрим совместно с математической моделью измерительного устройства

$$z = Cy, \quad (2.10)$$

где матрица  $C$  определяет линейную связь между вектором состояния системы  $y$  и вектором измеряемых переменных  $z$ .

В частном случае, когда матрица  $C$  единична, переменные состояния непосредственно измеряются и система наблюдаема. В общем случае для определения наблюдаемости линейной системы (1.8) необходимо для анализа соотношения (2.10) перейти к главным координатам по формуле  $y = V y_*$ , где  $V$  - определенная ранее матрица собственных векторов матрицы  $B$ . После проведения данного преобразования модель измерительного устройства (2.10) примет вид

$$z = C_* y_*, \quad (2.11)$$

где  $C_* = CV$ .

Тогда критерий наблюдаемости для системы (1.8) формулируется следующим образом: система (1.8) наблюдаема, если ни один из столбцов матрицы  $C_* = CV$  не является нулевым.

Так, например, если первый столбец матрицы  $C_* = CV$  нулевой, то переменная  $y_{1*}$  не наблюдаема (от нее не зависит вектор  $z$  измеряемых переменных). Данный критерий применяется тогда, когда система (1.8) приводится к диагональной форме (2.5) (то есть матрица  $B$  не имеет кратных собственных значений).

Более универсальным методом определения наблюдаемости линейных систем является критерий, не требующий перехода к главным координатам [6]. В соответствии с этим критерием для определения наблюдаемости системы (1.8) необходимо составить матрицу

$$L = (C^T, B^T C^T, \dots, (B^T)^{n-1} C^T) \quad . \quad (2.12)$$

Система (1.8) будет наблюдаема, если матрица  $L$  будет иметь ранг  $n$ .

### 3. ПРИНЦИП ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БЕЛЛМАНА И ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА

#### 3.1. Принцип динамического программирования Беллмана

Для определения оптимального управления линейными динамическими системами при решении задачи стабилизации могут быть применены различные методы [3]. Это могут быть классические методы вариационного исчисления, принцип оптимальности Беллмана [3], принцип максимума Понтрягина [2] и др. Здесь остановимся на изложении принципа динамического программирования Беллмана, с помощью которого были решены ряд важных практических задач оптимальной стабилизации движения объектов управления [3]. В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом [7]. «Оптимальные стратегии управления обладают тем свойством, что каково бы ни было начальное состояние системы и управление в начальный момент, последующее управление должно быть оптимальным в смысле заданного критерия относительно любого другого состояния, которое могло бы явиться естественным следствием управления в начальный момент». Этот принцип для динамических систем (1.1) и (1.8) может быть сформулирован короче: любой отрезок оптимальной траектории есть тоже оптимальная траектория. Последнее означает, что независимо от того, каким было управление на начальном отрезке  $[t_0, T]$ , последующее управление на отрезке  $[t, T]$  должно обладать свойством оптимальности по выбранному критерию. Следовательно, если ставится задача поиска оптимального управления на всем отрезке  $[t_0, T]$ , то управление  $u$  должно быть оптимальным в каждый момент времени  $t \in [t_0, T]$ . Применение принципа оптимальности Беллмана для динамических систем (1.1) и (1.8) приводит к необходимости решения некоторого уравнения в частных производных – уравнения Беллмана относительно функции  $v$  вектора переменных состояния  $x$  (или  $y$ ). Данную функцию обычно называют

производящей [3] и ее определение позволяет найти оптимальное управление  $u^o$  как функцию от вектора состояния  $x$  (или  $y$ ), то есть решить задачу синтеза.

Выведем уравнение Беллмана для задачи быстродействия  $I=T$  при управлении динамической системой общего вида (1.1) [3]. Пусть  $x_o = x(t_o)$  - начальное положение системы (1.1). Необходимо найти управление  $u^o \in U$ , переводящее систему (1.1) из положения  $x_o = x(t_o)$  в заданное положение  $x_T = x(T)$  за минимальное время. Возьмем некоторый момент времени  $t \in [t_o, T]$ . Переход из состояния  $x_o$  в состояние  $x = x(t)$  осуществляется за время  $t - t_o$  (это время не обязательно минимально). Двигаясь затем из состояния  $x(t)$  в состояние  $x(T)$  оптимально затратим минимальное время  $T(x)$ . Общее время перехода будет равно  $t - t_o + T(x)$ . Пусть  $T(x_o)$  минимальное время перехода из состояния  $x_o$  в состояние  $x_T$ , тогда справедливо неравенство  $T(x_o) \leq t - t_o + T(x)$  или

$$0 \leq 1 + \frac{v(x) - v(x_o)}{t - t_o},$$

где введено обозначение  $v(x) = T(x)$ .

При  $t \rightarrow t_o$  получаем

$$0 \leq 1 + \left. \frac{dv(x)}{dt} \right|_{t=t_o}$$

или

$$0 \leq 1 + \left. \frac{\partial v(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_o} = 1 + \left. \frac{\partial v(x)}{\partial x} F(x, u) \right|_{t=t_o}. \quad (3.1)$$

Так как начальная точка  $x(t_o)$  была выбрана произвольно, то согласно принципу динамического программирования соотношение (3.1) должно быть справедливо для любой точки  $x(t)$ , а не только для  $x(t_o)$ . Следовательно, для любого момента времени  $t$  имеем неравенство

$$1 + \frac{\partial v(x)}{\partial x} F(x, u) \geq 0,$$

где знак равенства соответствует оптимальной траектории.



Таким образом, оптимальное управление должно быть вычислено из условия

$$\min_u \left[ 1 + \frac{\partial v(x)}{\partial x} F(x, u) \right] = 0. \quad (3.2)$$

Определив из условия минимума (3.2) функцию  $u^o(x, \frac{\partial v}{\partial x})$  и подставив в это же соотношение, получим дифференциальное уравнение в частных производных (уравнение Беллмана) в виде

$$1 + \frac{\partial v}{\partial x} F(x, u^o(x, \frac{\partial v}{\partial x})) = 0 \quad (3.3)$$

относительно производящей функции  $v(x)$ .

Решая уравнение (3.3) и, тем самым, определяя функцию  $v(x)$ , затем находим оптимальное управление  $u^o(x, \frac{\partial v}{\partial x})$ , так как вид этой функции известен.

Замечание. При определении управления и при выводе уравнения Беллмана (3.3) было сделано два предположения: 1) о существовании оптимальной (в смысле быстродействия) фазовой траектории системы (1.1); 2) о непрерывности функции  $v(x)$  и ее частных производных  $\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}$ .

Второе предположение при решении конкретных задач может оказаться слишком обременительным [2], особенно при решении задачи быстродействия. Дело в том, что функция управления  $u$ , как правило, принадлежит некоторой области допустимых управлений  $u \in U$ , которая является замкнутой (содержит свои границы). Так, например, в простейшем случае, когда управление  $u$  скаляр, оно может удовлетворять неравенству  $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ . При построении управления часто оказывается, что оптимальное управление находится в классе кусочно-непрерывных функций и заключается в постоянном переключении управления с одного предельного значения на другое. В этом случае функция  $v(x)$  становится не дифференцируемой в точках переключения управления и применение изложенного метода становится не обоснованным. Однако существуют модификации метода

динамического программирования [3], а также другие методы (например, принцип максимума Понтрягина [2]), которые позволяют избежать эти трудности.

Рассмотрим более общий случай управления динамической системой (1.1), когда критерий оптимальности имеет вид

$$I = \int_0^T w(x(t), u(t)) dt, \quad (3.4)$$

где функция  $w(x, u) \geq 0$  является положительно определенной квадратичной формой векторов  $x, u$ . При этом функция  $w(x, u)$  обращается в ноль только при  $x = u = 0$ . В частности, этому условию удовлетворяет функционал (1.9) линейной системы (1.8).

Введем новое время

$$\tau(t) = \int_{t_0}^t w(x, u) dt, \quad (3.5)$$

где в силу автономности системы (1.1) можно положить  $t_0 = 0$ .

Тогда, дифференцируя соотношение (3.5) по времени, получим дифференциальное уравнение для нового времени

$$\frac{d\tau}{dt} = w(x, u). \quad (3.6)$$

Переходя в системе (1.1) к интегрированию по новому времени  $\tau$ , получим

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{F(x, u)}{w(x, u)}. \quad (3.7)$$

В этом случае критерий оптимальности примет вид

$$I = \tau(T), \quad (3.8)$$

где  $T$  - конечное время.

Следовательно, приходим к той же задаче быстрогодействия, только с другим временем  $\tau$ . Здесь предполагается, что допустимые траектории системы (3.7) не проходят через точку  $x = u = 0$ . Исключение может составлять лишь конечная точка траектории (при  $t = T$ ) [3]. Тогда, применяя ту же схему вывода уравнения Беллмана, как для классической задачи быстрогодействия, получим

$$\min_u \left[ 1 + \frac{\partial v(x)}{\partial x} \frac{F(x, u)}{w(x, u)} \right] = 0$$

или

$$\min_u \left[ w(x, u) + \frac{\partial v(x)}{\partial x} F(x, u) \right] = 0. \quad (3.9)$$

В этом случае схема определения оптимального управления методом динамического программирования состоит из двух этапов.

1. Определение из условия минимума (3.9) функции  $u^o(x, \frac{\partial v}{\partial x})$  (находится вид функции).
2. Подстановка этой функции в соотношение (3.9) и решение дифференциального уравнения в частных производных

$$w(x, u^o(x, \frac{\partial v}{\partial x})) + \frac{\partial v(x)}{\partial x} F(x, u^o(x, \frac{\partial v}{\partial x})) = 0 \quad (3.10)$$

относительно  $v(x)$ .

3. Определение оптимального управления  $u^o(x, \frac{\partial v}{\partial x})$  в явном виде при известной функции  $v(x)$ .

### 3.2. Оптимальное управление линейными динамическими системами

Рассмотрим определение оптимального управления линейной динамической системой вида (1.8)

$$\frac{dy}{dt} = By + tu, \quad (3.11)$$

при решении задачи стабилизации (см. подробно раздел 1.4) с квадратичным критерием оптимальности

$$I = \int_0^T (y^* a y + c u^2) dt \quad . \quad (3.12)$$

Здесь квадратная матрица  $a$  удовлетворяет условиям Сильвестра (1.12),  $c > 0$  - некоторая константа,  $T \leq \infty$  - конечное время,  $u$  - управление (скаляр),  $(*)$  - знак транспонирования,  $y^*$  - матрица-строка. В системе (3.11) матрица  $B$  и вектор  $m$  считаются заданными (в общем случае они могут зависеть от времени  $t$ ).

Ставится задача об оптимальном переводе системы (3.11) из начального положения  $y(t_0)$  в начало координат  $y(T) = 0$ . Для решения этой задачи используется принцип Беллмана (3.9), который для линейной системы (3.11) и критерия (3.12) приводит к соотношению

$$\min_u [y^* a y + c u^2 + \frac{\partial v(y)}{\partial y} (B y + m u)] = 0. \quad (3.13)$$

Выражение, стоящее под знаком минимума в соотношении (3.13), представляет собой квадратичную функцию управления  $u$ . Выделяя слагаемые, зависящие только от управления, получим

$$f(u) = c u^2 + \frac{\partial v(y)}{\partial y} m u.$$

Необходимое условие минимума этой функции по управлению будет иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2c u + \frac{\partial v(y)}{\partial y} m = 0. \quad (3.14)$$

Причем выполняется достаточное условие минимума

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 2c > 0.$$

Поэтому оптимальное управление определится из условия (3.14) в виде

$$u^o \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{1}{2c} \frac{\partial v}{\partial y} m, \quad (3.15)$$

где выражение  $\frac{\partial v}{\partial y} m$  рассматривается как скалярное произведение векторов

$\frac{\partial v}{\partial y}$  и  $m$ , то есть

$$\frac{\partial v}{\partial y} m = \frac{\partial v}{\partial y_1} m_1 + \dots + \frac{\partial v}{\partial y_n} m_n.$$

Подставляя управление (3.15) в условие (3.13) и приводя подобные члены, получим уравнение Беллмана для линейной динамической системы (3.11)

$$y^* a y + \frac{\partial v}{\partial y} B y - \frac{1}{4c} \left( \frac{\partial v}{\partial y} m \right)^2 = 0. \quad (3.16)$$

В этом случае определение оптимального управления для линейной системы осуществляется следующим образом: 1) из уравнения в частных производных (3.16) находится функция  $v(y, t)$ ; 2) функция  $v(y, t)$  подставляется в выражение (3.15) и определяется оптимальное управление  $u^O(y, t)$ .

После подстановки оптимального управления  $u^O(y, t)$  в исходную систему (3.11) решения полученной замкнутой системы должны удовлетворять (в соответствии с постановкой задачи стабилизации) некоторым условиям устойчивости, в частности, они должны стремиться с течением времени к началу координат  $y(T) = 0$ . Здесь следует отметить, что уравнение Беллмана (3.16) может иметь несколько решений  $v(y, t)$ . Необходимо из этих возможных решений выбрать такое, которое будет обеспечивать указанное выше условие устойчивости. Выбор необходимого решения может быть осуществлен на основе теории устойчивости Ляпунова А.А. [4], которая будет изложена ниже.

### 3.3. Теория устойчивости Ляпунова

Основополагающие понятия Ляпунова А.А. об устойчивости движения динамических систем и методы, позволяющие устанавливать свойства устойчивости, находят непосредственное применение при решении задачи стабилизации, сформулированной выше.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения (1.6), записав их в виде

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y, t), \quad (3.17)$$

где вектор  $y$  определяет отклонения от невозмущенного движения  $y = 0$ , при этом в силу вида системы (1.6)  $\Phi(0, t) = 0$ .

Причем в форме (3.17) может быть записана как исходная система (1.1) без управления  $u = 0$ , так и система с выбранным управлением  $u^0(y, t)$ . И в том и в другом случае нас будут интересовать свойства устойчивости некоторого частного решения системы (1.1)  $x^0(t)$ , то есть поведение вектора отклонений  $y = x(t) - x^0(t)$ .

#### **Определение (устойчивость по Ляпунову А.А.) [4].**

Невозмущенное движение  $y = 0$  называется устойчивым по Ляпунову, если для любого заданного числа  $\varepsilon > 0$ , как бы оно мало не было, найдется другое число  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что выполнение неравенства

$$\|y(t_0)\| \leq \delta$$

влечет за собой как следствие выполнение неравенства

$$\|y(t)\| < \varepsilon$$

при любом  $t > t_0$ ; в противном случае невозмущенное движение неустойчиво.

В этом определении обозначения  $\|y(t_0)\|$  и  $\|y(t)\|$  означают евклидову норму вектора отклонений  $y$  в начальный  $t_0$  и текущий  $t$  моменты времени, например,

$$\|y(t)\| = \sqrt{y_1^2(t) + \dots + y_n^2(t)}.$$

Так как уравнения  $\|y(t_0)\| = \delta$  и  $\|y(t)\| = \varepsilon$  в пространстве переменных  $y_1, \dots, y_n$  задают гиперсферы, то геометрическое истолкование устойчивости по Ляпунову следующее: каково бы не было число  $\varepsilon > 0$ , а значит какова бы не была заданная сферическая область в пространстве переменных  $y_1, \dots, y_n$ , найдется такое число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что если начальное положение системы (1.39) находится внутри или на поверхности сферы  $\|y(t_0)\| \leq \delta$ , то фазовая траектория системы (1.39) будет находиться внутри сферы  $\|y(t)\| < \varepsilon$  во все время движения системы  $t > t_0$ .

**Определение( асимптотическая устойчивость) [4].**

Невозмущенное движение  $y = 0$  устойчиво асимптотически, если 1) оно устойчиво по Ляпунову; 2) выполняется предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 0.$$

Сформулируем здесь основные теоремы так называемого прямого (второго) метода Ляпунова решения задач устойчивости для системы (3.17). Теоремы эти основываются на свойствах некоторых скалярных функций  $W(y, t)$ , которые определяются следующим образом.

**Определение [4].** Функция  $W(y)$  называется знакоопределенной положительной (положительно определенной) в некоторой области  $D$ , если 1)  $W(y) = 0$  только при  $y = 0$ , 2)  $W(y) > 0$  всюду в  $D$  при  $y \neq 0$ .

Пример:  $W(y) = \|y\|^2$ .

**Определение.** Функция  $W(y)$  называется знакоопределенной отрицательной (отрицательно определенной) в некоторой области  $D$ , если функция  $-W(y)$  является знакоопределенной положительной.

**Определение.** Функция  $W(y)$  называется знакопостоянной положительной (отрицательной) в некоторой области  $D$ , если она неотрицательна (неположительна) в этой области.

Пример знакопостоянной положительной функции:  $W(y) = (y_1 + \dots + y_n)^2$ .

**Определение.** Функция  $W(y, t)$ , зависящая от времени  $t$ , называется знакоопределенной положительной в некоторой области  $D$ , если найдется другая знакоопределенная положительная функция  $W^*(y)$  такая, что соблюдается неравенство  $W(y, t) \geq W^*(y)$  при всех  $y \in D$  и  $t \in [t_0, T]$ .

Говорят, что знакоопределенная положительная функция  $W(y, t)$  допускает бесконечно малый высший предел, если существует знакоопределенная положительная функция  $W_*(y)$  такая, что выполняется неравенство  $W_*(y) \geq W(y, t)$  при всех  $y \in D$  и  $t \in [t_0, T]$ .

Знакоопределенные функции  $W(y)$  обладают тем свойством, что равенство  $W(y) = C$  ( $C > 0$ ) задает в пространстве переменных  $y_1, \dots, y_n$  замкнутую гиперповерхность, если постоянная  $C$  достаточно мала.

Если функция  $W(y, t)$  знакоопределенная положительная и имеет бесконечно малый высший предел, то поверхность  $W(y, t) = C$ , зависящая от времени, располагается в слое  $W^*(y) = C$ ,  $W_*(y) = C$ , так как

$$W_*(y) \geq W(y, t) \geq W^*(y) \geq 0.$$

**Теорема 1 (об устойчивости по Ляпунову) [4].**



Если уравнения движения системы (3.17) таковы, что можно найти знакоопределенную положительную функцию  $W(y, t)$ , полная производная которой

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y} \Phi(y, t), \quad (3.18)$$

вычисленная в силу этих уравнений, есть знакопостоянная отрицательная функции или тождественно равная нулю, то невозмущенное движение  $y = 0$  устойчиво по Ляпунову.

Доказательство теоремы 1 в случае, когда функция  $W(y)$  не зависит от времени (это имеет место, например, для автономных систем, правые части которых не зависят от времени) сравнительно простое [4]. Действительно, в этом случае

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial y} \Phi(y)$$

есть скалярное произведение вектора градиента функции  $W(y)$  с

компонентами  $(\frac{\partial W}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial y_n})$  и вектора скорости  $(\frac{dy_1}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt})$  изображающей

точки в фазовом пространстве. По условию производная  $\frac{dW}{dt}$  отрицательна или нуль. С учетом того, что вектор градиента всегда направлен по нормали к поверхности  $W(y) = C$  в сторону возрастания функции  $W(y)$ , то траектории системы пересекают (в силу отрицательности скалярного произведения) замкнутую поверхность  $W(y) = C$  из вне во внутрь или располагаются на ней (если  $\frac{dW}{dt} = 0$ ). В любом случае при любом  $\varepsilon > 0$  всегда можно выбрать

$\delta \leq C < \varepsilon$  такое, что если неравенство  $\|y(t_0)\| \leq \delta$  выполняется при условии

$\frac{dW}{dt} \leq 0$ , то любая траектория системы может покинуть поверхность  $W(y) = C$

только в сторону убывания  $W(y)$ , и неравенство  $\|y(t)\| < \varepsilon$  будет соблюдаться при любом  $t > t_0$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 2 (об асимптотической устойчивости) [4].**

Если уравнения движения системы (3.17) таковы, что можно найти знакоопределенную положительную функцию  $W(y, t)$ , допускающую бесконечно малый высший предел при  $\|y\| \rightarrow 0$  и имеющую знакоопределенную производную по времени в силу этой системы, то невозмущенное движение  $y = 0$  асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы 2 достаточно простое [4] в случае, когда функция  $W$  не зависит от времени. Так как производная  $\frac{dW}{dt} \leq 0$  и обращается в ноль только в начале координат  $y = 0$ , то любая траектория системы будет пересекать поверхность  $W(y) = C$  снаружи внутрь. Поскольку число  $\varepsilon > 0$  можно выбирать сколь угодно малым, то такое поведение траекторий можно проследить до момента прихода их в точку  $y = 0$ , откуда следует теорема 2.

Теоремы 1 и 2 составляют основу прямого (второго) метода Ляпунова исследования устойчивости невозмущенного движения системы (3.17).

### 3.4. Связь метода динамического программирования с теорией устойчивости Ляпунова

Допустим, что в результате решения уравнения Беллмана (3.16) определена какая-либо функция  $v(y)$  и отвечающая ей управление

$u^0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = u^0(y)$ . Подставим это управление в систему (3.11) и в уравнение

(3.13), тогда

$$\frac{dv}{dt} = -w(y, u^O(y)), \quad (3.19)$$

где  $w(y, u^O(y))$  - подинтегральная функция в критерии (3.12).

По определению  $w(y, u^O(y))$  - знакоопределенная положительная функция. С другой стороны, если удастся удовлетворить уравнение Беллмана (3.16) какой-либо знакоопределенной положительной функцией  $v(y)$ , то эта функция будет функцией Ляпунова для системы (3.11). Причем она будет соответствовать условиям теоремы 2 об асимптотической устойчивости второго метода Ляпунова, что следует из уравнения (3.19). В этом случае замкнутая система, получающаяся подстановкой управления  $u^O(y)$  в систему (3.11), будет обладать свойством асимптотической устойчивости  $\|y\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Если время  $T$  конечно  $T < \infty$ , то можно воспользоваться преобразованием [3]

$$\tau = \frac{T}{T-t} - 1, \quad (3.20)$$

вводя новое время  $\tau$ . В этом случае  $0 \leq \tau \leq \infty$ , а система (3.19) примет вид

$$\frac{dv}{d\tau} = -\frac{T}{(1+\tau)^2} w(y, u^O(y)), \quad (3.21)$$

и преобразование (3.20) не меняет знака  $\frac{dv}{d\tau}$ . Поэтому и при  $T < \infty$

формально функцию  $v(y)$  можно трактовать как функцию Ляпунова, удовлетворяющую теореме 2 об асимптотической устойчивости. Отсюда следует следующая

**Теорема 3 [3].**

Для того, чтобы управление  $u^O(y)$ , определенное методом динамического программирования, давало оптимальное решение задачи стабилизации, достаточно, чтобы соответствующая ему функция  $v(y)$  1)

удовлетворяла уравнению Беллмана (3.16), 2) была функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Функцию  $v(y)$ , удовлетворяющую условиям этой теоремы, обычно называют оптимальной функцией Ляпунова [3].

## 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 4.1. Решение уравнения Беллмана для линейных стационарных динамических систем

Уравнение Беллмана (3.16) для линейной динамической системы (3.11), где матрица  $B$  и вектор  $m$  для стационарного случая не зависят от времени  $t$ , можно удовлетворить квадратичной формой [3]

$$v(y) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} y_{\alpha} y_{\beta} = y^* A y, \quad (4.1)$$

где  $A$  - симметричная матрица.

Для определения решения в виде (4.1) необходимо подставить выражение (4.1) в уравнение (3.16) и приравнять коэффициенты при подобных слагаемых по переменным  $y_1, \dots, y_n$ . Можно доказать следующие тождества.

$$\frac{\partial v}{\partial y} B y = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left[ \sum_{k=1}^n (A_{k\alpha} b_{k\beta} + A_{k\beta} b_{k\alpha}) \right] y_{\alpha} y_{\beta}, \quad (4.2)$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial y} m \right)^2 = 4 \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left[ \sum_{k=1}^n (A_{k\alpha} m_k) \sum_{k=1}^n (A_{k\beta} m_k) \right] y_{\alpha} y_{\beta}. \quad (4.3)$$

Подставляя выражения (4.2), (4.3) в уравнение Беллмана (3.16), получим

$$a_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^n (A_{k\alpha} b_{k\beta} + A_{k\beta} b_{k\alpha}) - \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n (A_{k\alpha} m_k) \sum_{k=1}^n (A_{k\beta} m_k) = 0, \quad (4.4)$$

где индексы  $\alpha = 1, \dots, n$ ,  $\beta = 1, \dots, n$  и  $\alpha \leq \beta$  в силу симметричности матриц  $a$  и  $A$ .

Поэтому выражения (4.4) представляют собой систему алгебраических нелинейных уравнений для определения всех коэффициентов  $A_{\alpha\beta}$  ( $\alpha \leq \beta$ ) симметричной квадратичной формы (4.1). Как нетрудно установить количество уравнений, входящих в систему (4.4), равно  $n(n+1)/2$ .

Очевидно, система (4.4) может иметь несколько решений, из которых следует выбрать такое решение, которое удовлетворяет условиям Сильвестра

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{i1} & \dots & A_{ii} \end{vmatrix} > 0. \quad i = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

В этом случае функция (4.1) будет знакоопределенной положительной. Тогда в соответствии с теоремой 3 функция  $v(y)$  будет являться функцией Ляпунова для замкнутой системы. Следовательно, определяя оптимальное управление из выражения (3.15), получим

$$u^0(y) = \sum_{k=1}^n p_k y_k. \quad (4.6)$$

Здесь

$$p_k = -\frac{1}{c} \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha k} m_{\alpha}, \quad (4.7)$$

где  $k = 1, \dots, n$ .

В этом случае коэффициенты  $p_k$  называют коэффициентами усиления автомата стабилизации. Таким образом, управление, стабилизирующее систему (3.11) при условии минимума квадратичного критерия (3.12), является линейным с коэффициентами усиления (4.7).

## 4.2. Решение уравнения Беллмана для линейных нестационарных динамических систем

При рассмотрении линейных нестационарных систем предполагается, что матрица  $B$  и вектор  $m$  зависят от времени  $t$  вследствие зависимости от времени программного оптимального управления (см. раздел 1.2). В этом случае перепишем систему (1.8) в следующем виде

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + m(t)u, \quad (4.8)$$

где  $B(t)$  и  $m(t)$  - известные функции времени.

Решается та же задача оптимального управления о переводе системы (4.8) из начального положения  $y(t_0)$  в начало координат  $y(T) = 0$  с критерием оптимальности

$$I = \int_0^T (y^* a y + c u^2) dt. \quad (4.9)$$

Решение данной задачи проводится также как для стационарной системы (3.11), отличие лишь заключается в том, что функция  $v$  явно зависит от времени:  $v(y, t)$ . Поэтому соотношение (3.9), выражающее принцип оптимальности Беллмана, для системы (4.8) примет вид

$$\min_u [y^* a y + c u^2 + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v(x)}{\partial x} (B(t)y + m(t)u)] = 0. \quad (4.10)$$

Так как слагаемые, зависящие от управления  $u$ , остались теми же как для стационарного случая, то вид оптимального закона управления тот же

$$u^0 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2c} \frac{\partial v}{\partial y} m. \quad (4.11)$$

Подставляя выражение (4.11) в соотношение (4.10), получим уравнение Беллмана для нестационарной линейной системы (4.8)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + y^* a y + \frac{\partial v}{\partial y} B y - \frac{1}{4c} \left( \frac{\partial v}{\partial y} m \right)^2 = 0. \quad (4.12)$$

Решение уравнения Беллмана (4.12) ищем в виде квадратичной формы [3]

$$v(y,t) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} A_{\alpha\beta}(t) y_{\alpha} y_{\beta} = y^* A(t) y, \quad (4.13)$$

где  $A_{\alpha\beta}(t)$  - определяемые компоненты матрицы  $A(t)$ .

Далее необходимо подставить квадратичную форму (4.13) в уравнение (4.12) и приравнять коэффициенты при одинаковых слагаемых. В результате получим

$$\frac{dA_{\alpha\beta}}{dt} = -a_{\alpha\beta} - \sum_{k=1}^n (A_{k\alpha} b_{k\beta} + A_{k\beta} b_{k\alpha}) + \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n (A_{k\alpha} m_k) \sum_{k=1}^n (A_{k\beta} m_k), \quad (4.14)$$

где  $\alpha = 1, \dots, n$ ,  $\beta = 1, \dots, n$  и  $\alpha \leq \beta$ .

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.14) необходимо проинтегрировать по времени. В работе [3] предлагается определять коэффициенты  $A_{\alpha\beta}(t)$  методом численного интегрирования с учетом требуемых конечных граничных условий  $y(T) = 0$ . Тогда можно задать  $A_{\alpha\beta}(T) = 0$  и проинтегрировать систему (4.14) обратно с отрицательным шагом до начального времени  $t = t_0$ . Если  $T = \infty$ , то время  $T$  берется достаточно большим, чтобы при его изменении в большую сторону величины  $A_{\alpha\beta}(t_0)$  практически не изменялись. После того, как с помощью этого способа определены функции  $A_{\alpha\beta}(t)$ , управление определяется из выражения (4.11) в виде

$$u^0(y) = \sum_{k=1}^n p_k(t) y_k. \quad (4.15)$$

Здесь

$$p_k(t) = -\frac{1}{c} \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha k}(t) m_k, \quad (4.16)$$



где  $\alpha = 1, \dots, n$ .

#### 4.3. О выборе критерия оптимальности при решении задачи стабилизации

При решении задачи оптимальной стабилизации систем (1.8) и (4.8) предполагалось, что критерий оптимальности (4.9) выбран заранее и вид его известен. Фактически выбор критерия должен производить специалист, проектирующий систему стабилизации. Если подинтегральная функция в интеграле (4.9) не принимает отрицательных значений, то критерий (4.9) выражает меру отклонения действительного движения от номинального программного движения. Искомый закон управления должен обеспечить минимизацию этой меры вдоль всей программной траектории системы. Если структура критерия (4.9) известна, то необходимо задать матрицу  $a$  и коэффициент  $c$ . Оказывается, выбирая эти параметры, можно удовлетворить некоторым требованиям, которым должен удовлетворять переходный процесс в системе. Эти требования иногда называют вторичными критериями оптимальности [3]. Перечислим наиболее важные из них.

1. Критерий «время регулирования». Даны две сферы

$$\|y(t_0)\| = \delta \text{ и } \|y(t^*)\| = \varepsilon$$

такие, что  $\delta > \varepsilon$ . Рассмотрим все множество допустимых управлений  $u(y, t)$ , при которых фазовая точка, начинающая свое движение на первой сфере, приходит под действием управления на вторую сферу и остается внутри нее при любом  $t > t^*$ . Такое время всегда существует, поскольку замкнутая система асимптотически устойчива. Будем называть  $t^*$  временем регулирования. В общем случае можно ввести некоторое ограничение

$$t^* < T, \tag{4.17}$$

где  $T$  - заданное число.

Ограничение (4.17) отбирает среди всех допустимых управлений те, которые гарантируют замкнутой системе определенную быстроту затухания переходного процесса.

2. Критерий монотонности. Этот критерий обеспечивает некоторые определенные свойства гладкости переходному процессу, например, апериодичность. Апериодичность для линейной замкнутой системы достигается, если ее собственные значения вещественны и отрицательны (см. Приложение 2). В этом случае переходный процесс не обладает колебательными свойствами.

3. Критерий, учитывающий ограничения, накладываемые на управления  $u(y, t)$ . Например, допустимые управления могут принадлежать некоторой области  $u(t) \in U$ . В случае скалярного управления эта область может быть задана в виде неравенства

$$|u(t)| \leq \bar{u}, \quad (4.18)$$

где  $\bar{u}$  - заданная величина.

4. Критерий, обеспечивающий принадлежность фазовой траектории заданной области. С помощью этого критерия можно удовлетворить некоторым ограничениям, накладываемым на фазовые переменные замкнутой системы. Например, можно сформулировать требование, чтобы фазовые переменные удовлетворяли неравенствам

$$|y_i| \leq \bar{y}_i, \quad (4.19)$$

где  $i = 1, \dots, n$ ;  $\bar{y}_i$  - заданные числа.

5. Критерий, учитывающий ограничение на производные функции управления. Например, могут быть заданы неравенства

$$\left| \frac{du_i}{dt} \right| \leq \dot{U}_i, \quad (4.20)$$

где  $i = 1, \dots, r$ ;  $\dot{U}_i$  - заданные числа.

Существуют также другие вторичные критерии переходного процесса [3].

Задача выбора управления с учетом некоторых перечисленных вторичных критериев (или ограничений) может быть сформулирована следующим образом [3]. Рассмотрим множество  $\Omega$  определено положительных по  $y$  и  $u$  функций  $w(y, u)$ , входящих в основной критерий

$$I = \int_0^T w(x, u) dt. \quad (4.21)$$

Примером множества  $\Omega$  может служить множество функций

$$w(y, u) = y^* a y + c u^2,$$

где матрица  $a$  удовлетворяет условиям Сильвестра и  $c > 0$ .

Задача выбора. Среди функционалов вида (4.21), в которых функции  $w(y, u)$  принадлежат заданному множеству  $\Omega$ , требуется указать те, при которых: 1) разрешима основная задача управления и замкнутая система оптимальна; 2) удовлетворяется заданная совокупность вторичных критериев (ограничений).

Очевидно, сформулированная задача выбора заданного функционала (4.21) сводится к выбору матрицы  $a$  и коэффициента  $c > 0$ . В общем случае эта задача сложна и не всегда может иметь решение. Однако здесь можно дать некоторые рекомендации по ее решению, основанные на проведенных численных исследованиях. Так, вторичным критериям по времени регулирования (4.17) и ограничению на управление (4.18) можно удовлетворить, изменяя коэффициент  $c > 0$ . При увеличении этого коэффициента передаточные числа  $p_k$  в оптимальном управлении (4.15) уменьшаются, что ведет к уменьшению значений функции управления  $u(t)$  в каждый момент времени. С другой стороны при этом увеличивается время

регулирования  $t^*$  при реализации переходного процесса. Поэтому в каждой конкретной задаче необходимо осуществлять некоторый компромиссный выбор коэффициента  $c > 0$  по результатам решения нескольких задач оптимизации. Аналогично, выбирая компоненты матрицы  $a$  можно добиться более быстрого регулирования по какой-либо фазовой переменной  $y_i$  и, следовательно, удовлетворить некоторым ограничениям вида (4.19). Так, например, если исходная линейная система приведена к главным координатам (см. раздел 2.1) то увеличение коэффициента  $a_{ii}$  матрицы  $a$  ведет к более быстрому регулированию по переменной  $y_i$ . Для удовлетворения ограничению (4.20) на производную функции управления в работе [3] предлагается ввести эту производную в критерий оптимизации, изменяя вид функции  $w$

$$w(y, u) = y^* ay + cu^2 + c_1 \left( \frac{du}{dt} \right)^2,$$

где  $c_1 > 0$ .

В этом случае решение задачи оптимизации усложняется [3], однако изменяя коэффициент  $c_1 > 0$  можно, как и раньше, удовлетворить ограничениям (4.20) на производную функции управления.

#### 4.4. Пример оптимального выбора коэффициентов регулятора при управлении линейной системой второго порядка

Пусть уравнения объекта управления имеют вид

$$\frac{dy_1}{dt} = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + m_1u, \quad \frac{dy_2}{dt} = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + m_2u, \quad (4.22)$$

где  $y_1, y_2$  - переменные состояния системы,  $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, m_1, m_2$  - заданные параметры системы,  $u$  - скалярное управление.

Необходимо для системы (4.22) решить задачу стабилизации, то есть найти управление  $u$ , переводящее систему из некоторого начального состояния  $y_1(t_0), y_2(t_0)$  в начало координат  $y_1(T) = y_2(T) = 0$ , где  $T \leq \infty$  - заданное время. При этом критерий оптимальности

$$I = \int_0^T (a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 + cu^2) dt, \quad (4.23)$$

должен быть минимальным. Коэффициенты  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, c$  считаются заданными, а функция, стоящая под знаком интеграла (4.23), является определено положительной.

Задача оптимального управления решается в классической постановке без задания дополнительных ограничений. Решение поставленной задачи как показано выше (см. раздел 4.1) сводится к решению системы алгебраических уравнений (4.4), из которой находятся параметры  $A_{11}, A_{12}, A_{22}$ , определяющие коэффициенты  $p_1, p_2$  оптимального регулятора (4.7) и, следовательно, оптимальное управление (4.6).

Для системы второго порядка (4.22) и критерия (4.23) система алгебраических уравнений (4.4) примет вид

$$\begin{aligned} a_{11} + 2(A_{12}b_{21} + A_{11}b_{11}) - \frac{1}{c}(A_{11}m_1 + A_{12}m_2)^2 &= 0, \\ a_{22} + 2(A_{12}b_{12} + A_{22}b_{22}) - \frac{1}{c}(A_{12}m_1 + A_{22}m_2)^2 &= 0, \\ a_{12} + A_{11}b_{12} + A_{12}b_{11} + A_{12}b_{22} + A_{22}b_{21} - \frac{1}{c}(A_{11}m_1 + A_{12}m_2)(A_{12}m_1 + A_{22}m_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Система алгебраических уравнений (4.24) может быть решена каким-либо численным методом и может иметь несколько решений. Из всех возможных решений необходимо выбрать такое, которое удовлетворяет условиям Сильвестра

$$A_{11} > 0, A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0, \quad (4.25)$$

обеспечивающим положительную определенность функции Ляпунова как квадратичной формы (4.1). Тогда оптимальное управление будет иметь вид

$$u^O(y_1, y_2) = p_1 y_1 + p_2 y_2. \quad (4.26)$$

Здесь

$$p_1 = -\frac{1}{c}(A_{11}m_1 + A_{12}m_2), \quad p_2 = -\frac{1}{c}(A_{12}m_1 + A_{22}m_2)$$

коэффициенты оптимального регулятора (стабилизатора).

Пример.

Рассмотрим некоторый объект управления, поведение которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (4.22) с матрицей  $B$  и вектором  $m$  вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и критерием оптимальности (4.23) с параметрами  $a_{11} = 1$ ,  $a_{22} = 1$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $c = 1$ . Данный пример был решен в математическом пакете Mathcad. При решении подобных задач рекомендуется придерживаться следующего плана:

1. Определение управляемости линейной системы.
2. Построение фазового портрета исходной системы без управления  $u = 0$ .
3. Определение оптимального управления с помощью принципа динамического программирования Беллмана.
4. Построение фазового портрета полученной системы с выбранным управлением.

Определение управляемости линейной системы производится по методике, изложенной в разделе 2.2. На этом этапе решаются следующие задачи: а) определение собственных значений матрицы  $B$ ; б) определение собственных векторов матрицы  $B$ ; в) приведение исходной системы к главным координатам с помощью матрицы преобразования  $V$ , составленной из собственных векторов матрицы  $B$ . Управляемость линейной системы в конечном счете определяется по вектору управления  $m_* = V^{-1}m$  для системы (2.5), записанной в главных координатах. В соответствии с критерием Гильберта линейная система управляема, если ни одна компонента вектора  $m_*$  не является нулевой (см. раздел 2.2).

Для рассматриваемого примера решение задачи определения управляемости имеет вид:

собственные значения матрицы  $B$

$$\lambda_1 = 0.05 + 2i, \quad \lambda_2 = 0.05 - 2i;$$

собственные вектора матрицы  $B$

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.005 - 0.707i \\ 0.707 - 0.013i \end{pmatrix}, \quad V^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.005 + 0.707i \\ 0.707 + 0.013i \end{pmatrix};$$

матрицы  $V$  и  $V^{-1}$

$$V = \begin{pmatrix} 0.005 - 0.707i & 0.005 + 0.707i \\ 0.707 - 0.013i & 0.707 + 0.013i \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} -0.013 + 0.707i & 0.707 - 0.005i \\ -0.013 - 0.707i & 0.707 + 0.005i \end{pmatrix};$$

вектор  $m_*$

$$m_* = \begin{pmatrix} 0.694 + 0.703i \\ 0.694 - 0.703i \end{pmatrix}.$$

Здесь  $i$  - мнимая единица ( $i^2 = -1$ ).

Так как компоненты вектора  $m_*$  отличны от нуля, то рассматриваемая система управляема.

Фазовый портрет линейной системы второго порядка это изображение поведения динамической системы на фазовой плоскости в координатах  $(y_1, y_2)$ . Фазовый портрет линейной системы полностью определяется ее собственными значениями  $\lambda_1, \lambda_2$ . Методика построение фазовых портретов линейных систем второго порядка приводится в Приложении 2. В рассматриваемом примере собственные значения исходной системы без управления  $\lambda_1, \lambda_2$  - комплексно сопряженные числа, причем вещественные части этих чисел положительны. Поэтому фазовый портрет исходной системы соответствует особой точке типа «неустойчивый фокус» и приводится на рис. 1. На фазовой плоскости необходимо также получить характерную фазовую траекторию системы с помощью метода численного интегрирования. Эти вычисления также можно провести с помощью программных средств математического пакета Mathcad.

Фазовый портрет исходной линейной системы без управления

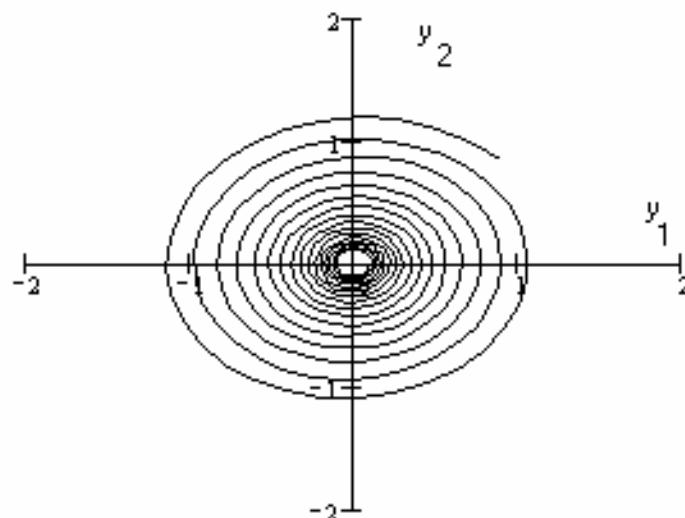


Рис. 4.1



Для определения оптимального управления с помощью принципа Беллмана необходимо решить систему алгебраических уравнений (4.24) относительно параметров  $A_{11}, A_{22}, A_{12}$ . Анализ численных решений этой системы для рассматриваемого примера показывает, что данная система имеет два вещественных решения 1)  $A_{11} = -1.187, A_{22} = -1.583, A_{12} = 0.103$ ; 2)  $A_{11} = 1.884, A_{22} = 1.347, A_{12} = -0.133$ . Первое решение не удовлетворяет условиям Сильвестра (4.25), поэтому оно должно быть отброшено. Второе решение удовлетворяет условиям (4.25) и соответствующая этому решению функция Ляпунова дает решение задачи оптимального управления для рассматриваемой линейной системы. Тогда оптимальное управление принимает вид (4.26)

$$u^O(y_1, y_2) = -0.876y_1 - 0.607y_2. \quad (4.27)$$

Здесь коэффициенты оптимального регулятора  $p_1 = -0.876$  и  $p_2 = -0.607$ .

Формула (4.27) дает решение задачи оптимального управления в форме синтеза, так как оптимальное управление получено как функция фазовых переменных  $u^O(y_1, y_2)$  и это управление определено для любой точки фазовой плоскости  $(y_1, y_2)$ .

После определения оптимального управления необходимо подставить функцию  $u^O(y_1, y_2)$  в систему (4.22) и привести подобные члены.

Приведение несложных преобразований дает

$$\frac{dy_1}{dt} = (b_{11} + m_1 p_1)y_1 + (b_{12} + m_1 p_2)y_2, \quad (4.28)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = (b_{21} + m_2 p_1)y_1 + (b_{22} + m_2 p_2)y_2.$$

Полученная система (4.28) в теории автоматического управления называется замкнутой системой, так как в нее уже подставлена функция управления  $u^O(y_1, y_2)$ . При этом управление осуществляется следующим образом: в системе производится измерение фазовых переменных  $y_1, y_2$  и на ее вход подается управление (4.27). Тем самым производится замыкание системы и получается классическая система с обратной связью.

Подставив в систему (4.28) числовые значения параметров, для рассматриваемого примера получим

$$\frac{dy_1}{dt} = -0.876y_1 + 1.393y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -2.876y_1 - 0.507y_2. \quad (4.29)$$

Фазовый портрет замкнутой линейной системы (4.29) также определяется ее собственными числами:

$\lambda_1 = -0.691 + 1.993i, \lambda_2 = -0.691 - 1.993i$ , значения которых соответствуют особой точке типа «устойчивый фокус» (см. Приложение 2). Линейная замкнутая система получается асимптотически устойчивой, так как с течением времени фазовая точка стремится к началу координат  $\|y\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . При этом функции  $y_1(t), y_2(t)$  совершают колебания относительно оси времени  $t$ .

## Фазовый портрет замкнутой линейной системы с управлением

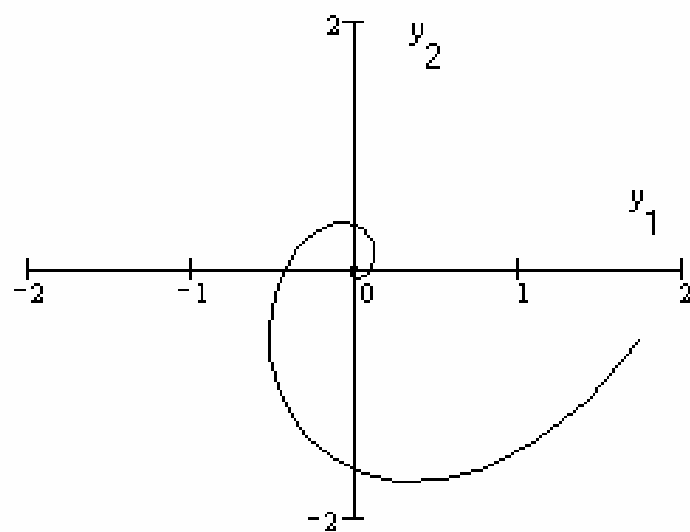


Рис.4.2

## 5. ДИНАМИЧЕСКИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

### 5.1. Малые колебания динамических систем

Важный класс динамических систем составляют колебательные динамические системы, описывающие поведение различных процессов, переменные состояния которых изменяются периодически или почти периодически во времени. Управляемые динамические колебательные системы широко распространены в различных областях науки и техники, физики, радиоэлектроники, механики и др. Если рассматриваются линейные или близкие к линейным динамические системы, то в этом случае периодические или близкие к периодическим решения получаются при наличии у линейной системы комплексно сопряженных собственных значений. Для линейных систем второго порядка это соответствует особым точкам типа «центр» (рис.П3) и «фокус» (рис.4.1 и рис.4.2). Построение оптимального управления для динамических колебательных систем можно существенно упростить, так как во многих случаях достаточно управлять не всеми переменными системы, а только некоторыми (наиболее важными). Для колебательных динамических систем такими переменными могут быть, например, амплитуды колебаний отдельных переменных, полная энергия колебаний и др. Мощным математическим средством исследования и управления динамическими колебательными системами являются разнообразные методы малого параметра [13], в которых определяются приближенные решения дифференциальных уравнений при действии малых возмущений. В этих методах приближенные решения ищутся в виде рядов по некоторому малому параметру  $\varepsilon$ , который характеризует величину действующих возмущений. В математическом смысле такие ряды чаще всего получаются асимптотическими (определение асимптотических рядов будет дано в приложении 4), поэтому рассматриваемые методы часто называют асимптотическими методами малого параметра [13],[14]. Одним из

самых эффективных асимптотических методов при исследовании поведения колебательных систем является метод усреднения [13],[14], который позволяет получать усредненные характеристики колебательного процесса. Применение метода усреднения совместно с классическими методами определения оптимального управления [15] (динамического программирования Беллмана, принципа максимума Понтрягина и др. ) позволяет эффективно строить оптимальные и так называемые приближенно оптимальные управления для динамических колебательных систем.

Рассмотрим линейную динамическую систему вида

$$\frac{dy_1}{dt} = -\omega y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = \omega y_1, \quad (5.1)$$

где параметр  $\omega > 0$ .

Система (5.1) является частным случаем линейной динамической системы второго порядка (4.22), когда  $b_{11} = b_{22} = 0$ ,  $b_{12} = -\omega$ ,  $b_{21} = \omega$ ,  $u = 0$ . Приведем систему (5.1) к одному дифференциальному уравнению второго порядка, тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (5.2)$$

где введено обозначение  $x = y_1$ .

Характеристическое уравнение, соответствующее (5.2), имеет вид  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ , из которого определяются собственные значения системы  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ , где  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица. Если собственные значения чисто мнимые, то из теории дифференциальных уравнений известно [1], что в этом случае общее решение уравнения (5.2) записывается в виде

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad (5.3)$$

где  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Решение (5.3) можно также записать и в другой форме

$$x = K \cos(\omega t + \varphi_0) \quad . \quad (5.4)$$

Связь между постоянными  $C_1, C_2$  и  $K, \varphi_0$  следующая

$$K = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad , \quad \cos \varphi_0 = \frac{C_1}{K} \quad , \quad \sin \varphi_0 = -\frac{C_2}{K} \quad .$$

Из решения (5.4) следует, что постоянная  $K$  представляет собой амплитуду колебаний гармонического осциллятора (5.2) (максимальное расстояние от положения равновесия  $x=0$ ), а постоянная  $\varphi_0$  - начальную фазу колебаний. Постоянная  $\omega$  в теории колебаний называется круговой частотой и связана с периодом колебаний  $T$  равенством  $T = 2\pi/\omega$ . Иногда используется частота колебаний в герцах  $f = 1/T$  (количество колебаний в одну секунду).

Дифференциальное уравнение второго порядка (5.2) и его решение (5.4) описывают линейные периодические колебания гармонического осциллятора, причем в различных областях науки и техники осциллятор может иметь разный физический смысл. Например, в теоретической механике математическая модель гармонического осциллятора описывает колебания математического или физического маятника без трения, в радиоэлектронике – колебания внутри колебательного контура без потери энергии и т.д. Одно уравнение второго порядка (5.2) описывает в теории колебаний [12] колебания с одной степенью свободы. Это колебания одного маятника, одного колебательного контура и т.д. Существуют также математические модели колебаний со многими степенями свободы [12]. Эти математические модели описывают связанные колебания нескольких маятников, нескольких колебательных контуров и т.д.

При построении математических моделей колебательных систем применяются два основных способа их построения: теоретический и эмпирический. При теоретическом способе для построения математической модели используются известные физические законы: в механике это законы Ньютона [5], в радиоэлектронике это законы Ома и Кирхгофа [16] и т.д. При эмпирическом способе построения обычно задаются видом математической модели и, далее, по результатам специально спланированных и проводимых экспериментов решается задача определения параметров заданной модели [6]. Сформулированная задача называется задачей параметрической идентификации модели. Так, например, для простейшей линейной колебательной системы (5.2) необходимо определить единственный параметр системы – частоту колебаний  $\omega$ .

Рассмотрим теоретический способ построения математической модели малых свободных колебаний динамической системы со многими степенями свободы на основе так называемых уравнений Лагранжа. Такой способ построения математической модели применяется как в механике [5], так и в радиоэлектронике [16]. В этом случае для построения математической модели достаточно знать (или построить) две функции: кинетической ( $T$ ) и потенциальной ( $\Pi$ ) энергий.

Введем в рассмотрение вектор переменных состояния колебательной системы  $x = (x_1, \dots, x_\nu)$  (матрица – столбец), где  $\nu$  - число степеней свободы, и вектор соответствующих производных по времени (скоростей)  $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_\nu)^*$ , где  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . Потенциальная энергия по своему определению зависит только от вектора состояния:  $\Pi(x)$ , а кинетическая энергия – от вектора состояния и вектора скоростей:  $T(x, \dot{x})$ . Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_j}, \quad (5.5)$$

где  $j = 1, \dots, \nu$ .

Причем кинетическая энергия является в прикладных задачах [5],[16] квадратичной формой скоростей

$$T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^* A(x) \dot{x} \quad , \quad (5.6)$$

где  $A(x)$  - квадратная матрица размерностью  $\nu$ , компоненты которой являются функциями переменных состояния  $x$ ,  $\dot{x}^*$  - матрица-строка.

Малые колебания системы (5.5) рассматриваются в окрестности ее устойчивых положений равновесия, которые определяются из условия равенства нулю правых частей дифференциальных уравнений (5.5), то есть

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad (5.7)$$

где  $j = 1, \dots, \nu$ . Следовательно, положения равновесия системы (5.5) являются экстремальными точками функции потенциальной энергии. Кроме того, для выделения из всех возможных положений равновесия устойчивых положений используется теорема Дирихле-Лагранжа [5].

**Теорема.** Положение равновесия, определяемое из условий (5.7), системы (5.5) устойчиво по Ляпунову, если в этом положении равновесия потенциальная энергия системы имеет изолированный минимум.

Теорема Дирихле-Лагранжа определяет достаточные условия устойчивости положений равновесия, при этом изолированность минимума означает, что существует некоторая окрестность минимума не содержащая других точек минимума. Для упрощения дальнейших выкладок условимся, что координаты системы  $x_1, \dots, x_\nu$  будем отсчитывать от исследуемого положения равновесия, тогда в положении равновесия имеем  $x_1 = \dots = x_\nu = 0$ . Кроме того, известно [5], что потенциальная энергия систем определяется с точностью до произвольной постоянной. Выберем эту постоянную так, чтобы в положении равновесия потенциальная энергия системы равнялась нулю



$$\Pi(0) = 0 \quad . \quad (5.8)$$

Как известно из математического анализа функций нескольких переменных [17], условия (5.7) представляют собой необходимые условия экстремума дифференцируемой функции  $\Pi(x)$ , а достаточными условиями изолированного минимума дифференцируемой функции  $\Pi(x)$  является положительная определенность квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} x_i x_j \quad , \quad (5.9)$$

где  $c_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_i \partial x_j}(0)$  - компоненты матрицы  $c$  вторых производных,

определенные в положении равновесия. Необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной формы определяются условиями Сильвестра

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, \nu .$$

Проведем вывод приближенных дифференциальных уравнений малых колебаний системы (5.5). Для этого разложим функцию  $\Pi(x)$  в точке  $x=0$  в ряд Тейлора как функцию нескольких переменных

$$\Pi(x) = \Pi(0) + \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0)x + \frac{1}{2} x^* c x + \dots \quad , \quad (5.10)$$

где  $\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0)x = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(0)x_i$ .

При малых колебаниях (малых отклонениях  $x$  от положения равновесия) можно пренебречь в выражении (5.10) слагаемыми порядка выше второго (по степеням  $x$ ), тогда с учетом (5.7),(5.8) получим

$$\Pi(x) \approx \frac{1}{2} x^* c x \quad . \quad (5.11)$$

Соответственно для кинетической энергии  $T(x, \dot{x})$ , представляющей собой квадратичную форму скоростей, при малых колебаниях используется приближенное выражение

$$T(\dot{x}) \approx \frac{1}{2} \dot{x}^* a \dot{x} \quad , \quad (5.12)$$

где  $a = A(0)$  - квадратная матрица размерностью  $\nu$ , представляющая собой матричную функцию  $A(x)$ , определенную в положении равновесия.

Подставим квадратичные формы (5.11),(5.12) в уравнения Лагранжа (5.5), записав их также в матричной форме

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad . \quad (5.13)$$

Тогда, используя правила дифференцирования квадратичных форм (см. Приложение 3), получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2c\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 2c\ddot{x}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 2ax, \quad (5.14)$$

где  $\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$ .

Подставив соотношения (5.14) в уравнения Лагранжа (5.13), найдем линейную систему уравнений малых колебаний динамической системы (5.13) в матричной форме

$$a\ddot{x} + cx = 0 \quad . \quad (5.15)$$

Эта система в обычной форме имеет вид

$$a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + \dots + a_{1\nu}\ddot{x}_\nu + c_{11}x_1 + \dots + c_{1\nu}x_\nu = 0,$$

..... (5.16)

$$a_{\nu 1}\ddot{x}_1 + a_{\nu 2}\ddot{x}_2 + \dots + a_{\nu\nu}\ddot{x}_\nu + c_{\nu 1}x_1 + \dots + c_{\nu\nu}x_\nu = 0.$$

В теории колебаний доказывается [12], что если выполняются условия теоремы Дирихле-Лагранжа (в частности, выполняются условия Сильвестра для квадратичных форм (5.11) и (5.12)), то решения системы (5.16) имеют периодический или почти периодический характер и ищутся в виде

$$x = V \cos(\omega t + \varphi_0) \quad , \quad (5.17)$$

где  $V$  и  $\varphi_0$  - произвольные постоянные,  $\omega$  - скалярный параметр, характеризующий частоты колебаний систем (5.15) и (5.16).

Подставив решение (5.17) в систему (5.15), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$(c - a\omega^2)V = 0 \quad . \quad (5.18)$$

Система линейных уравнений имеет ненулевые решения  $V \neq 0$  тогда и только тогда, когда определитель

$$\det(c - a\omega^2) = 0 \quad . \quad (5.19)$$

Соотношение (5.19) фактически представляет собой характеристическое уравнение системы (5.15) относительно параметра  $\omega^2$ . После раскрытия определителя соотношение (5.19) преобразуется в многочлен  $\nu$ -ой степени по параметру  $\omega^2$  и имеет ровно  $\nu$  положительных корней:  $\omega_i^2$ , где  $i = 1, \dots, \nu$ . В теории колебаний показывается [12], что положительность корней обеспечивается положительной определенностью квадратичных форм (5.11) и (5.12). Совокупность положительных значений  $\omega_i^2$ , где  $i = 1, \dots, \nu$ , определяет собственные частоты малых колебаний системы (5.15), поэтому уравнение (5.19) иногда называют частотным уравнением. В теории малых колебаний обычно рассматривается случай, когда среди корней частотного уравнения (5.19) нет кратных (равных). В этом случае каждой собственной частоте  $\omega_i$  системы соответствует ненулевой собственный вектор  $V^{(i)}$ , который находится из условия

$$(c - a\omega_i^2)V^{(i)} = 0 \quad . \quad (5.20)$$

Из однородности системы (5.20) следует, что любой собственный вектор определяется с точностью до множителя, что характерно для любой линейной динамической системы (см. Приложение 1). После определения собственных частот и собственных векторов можно записать общее решение линейной однородной системы (5.15), которое будет иметь вид

$$x = \sum_{i=1}^{\nu} C_i V^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_{0i}) \quad , \quad (5.21)$$

где  $C_i$  и  $\varphi_{0i}$  ( $i=1, \dots, \nu$ ) - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ .

Таким образом, колебание любой переменной системы  $x_j$  ( $j=1, \dots, \nu$ ) представляет собой суперпозицию  $\nu$  колебаний системы с собственными частотами  $\omega_i$  ( $i=1, \dots, \nu$ ).

## 5.2. Управляемость и наблюдаемость линейных колебательных динамических систем

Рассмотрим линейную колебательную динамическую систему с управлением

$$a\ddot{x} + cx = tu \quad , \quad (5.22)$$

где  $a$  и  $c$  - квадратные матрицы размерностью  $\nu$ , определенные в предыдущем разделе;  $u = (u_1, \dots, u_r)$  - вектор управления,  $t$  - матрица коэффициентов управления, размерностью  $\nu \times r$ .

Для определения управляемости и наблюдаемости системы (5.22) необходимо также как для произвольной линейной системы (см. раздел 2.2) перейти к главным или нормальным координатам [12]. Главные координаты

линейной системы  $x_*$  характеризуются тем, что при переходе к ним все дифференциальные уравнения в системе (5.16) полностью отделяются друг от друга, если рассматривается система (5.22) без управления ( $u=0$ ). В главных координатах система (5.22) принимает вид

$$\ddot{x}_* + W^2 x_* = 0 \quad , \quad (5.23)$$

где  $W^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \omega_\nu^2 \end{pmatrix}$  - диагональная матрица.

Ясно, что все уравнения системы (5.23) легко интегрируются и имеют решение вида

$$x_{*j} = C_j \cos(\omega_j t + \varphi_{0j}) \quad , \quad (5.24)$$

где  $j=1, \dots, \nu$ ;  $C_j, \varphi_{0j}$  - произвольные постоянные.

Теперь, если ввести матрицу  $V = (V^{(j)})$ , составленную из собственных векторов системы, и сравнить решения в обычных (5.21) и в главных (5.24) координатах, нетрудно найти связь между этими координатами

$$x = Vx_* \quad . \quad (5.25)$$

Определим управляемость линейной колебательной системы, используя тот же метод, что и для произвольной линейной системы (см. раздел 2.2). Подставив замену переменных (5.25) в систему с управлением (5.22) и умножив слева на обратную матрицу  $V^{-1}a^{-1}$ , получим

$$\ddot{x}_* + V^{-1}a^{-1}cVx_* = m_*u \quad , \quad (5.26)$$

где  $m_* = V^{-1}a^{-1}m$ ,  $V^{-1}a^{-1}cV = W^2$ . Причем последнее соотношение может служить проверочным при преобразовании к главным координатам.

В соответствии с критерием Гильберта [6] линейная система (5.26), приведенная к главным координатам, управляема, если ни одна из строк матрицы  $m_* = V^{-1} a^{-1} m$  не является нулевой (то есть для управляемости в каждой строке матрицы  $m_*$  должен быть по крайней мере один ненулевой элемент). Если матрица  $m_*$  представляет собой матрицу-столбец (это будет тогда, когда управление  $u$  - скалярная величина), то критерий управляемости требует, чтобы ни одна компонента этого столбца не была нулевой.

Замечание. Система с управлением (5.26) распадается на  $\nu$  уравнений вида

$$\ddot{x}_{*j} + \omega_j^2 x_{*j} = m_{*j} u, \quad (5.27)$$

где  $m_{*j}$  -  $j$ -ая строка матрицы  $m_*$ . Это уравнение при отличии от нуля хотя бы одной компоненты строки  $m_{*j}$  управляемо. Для доказательства этого утверждения достаточно привести любое уравнение второго порядка (5.27) к двум уравнениям первого порядка

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\omega_j^2 y_1 + m_{*j} u,$$

где  $y_1 = x_{*j}$ ,  $y_2 = \dot{x}_{*j}$ , и определить управляемость методом, описанным в разделе 2.2 для систем уравнений первого порядка.

Получим критерий наблюдаемости для линейных колебательных динамических систем вида (5.22). Понятие наблюдаемости введено в разделе 2.3. Исходную систему уравнений (5.22) рассмотрим совместно с математической моделью измерительного устройства

$$z = Cx, \quad (5.28)$$

где матрица  $C$  как и раньше определяет линейную связь между вектором состояния системы  $x$  и вектором измеряемых переменных  $z$ .

Для того, чтобы определить наблюдаемость колебательной системы (5.22) необходимо также как и раньше перейти к главным координатам (5.25), тогда

$$z = CVx_* = C_* x_* \quad (5.29)$$

Таким образом, критерий наблюдаемости для системы (5.22) формулируется следующим образом: система наблюдаема, если ни один из столбцов матрицы  $C_* = CV$  не является нулевым.

Замечание. В системах автоматического управления могут производиться измерения не только переменных состояния  $z$ , но и скоростей  $\dot{z}$ . В этом случае математическая модель измерительного устройства (в рамках линейной модели) будет иметь вид  $\dot{z} = C\dot{x}$  и наблюдаемость системы (5.22) определяется аналогично, так как постоянная матрица  $C$  и главные координаты системы остаются теми же. Если производятся измерения скоростей  $\dot{z}$ , то для определения вектора  $z$  необходимо в системах управления установить так называемое интегрирующее звено [18].

### 5.3. Метод малого параметра

При разнообразных качественных, аналитических и численных исследованиях колебательных систем, при построении оптимальных и приближенно оптимальных законов их управления широкое распространение получили методы малого параметра [12],[13],[15]. В частности, в теории управления колебательных систем эффективным является использование метода усреднения [13].

Применение методов малого параметра позволяет: 1) уменьшить размерность задачи, а в некоторых случаях получить аналитические решения; 2) проводить более эффективное качественное исследование колебательных систем; 3) разрабатывать экономичные численные алгоритмы исследования колебательных систем, учитывающие аналитическую природу решаемых задач.

Малый параметр задачи обычно обозначают  $\varepsilon$ . Существует два основных способа введения малого параметра в динамическую систему.

Первый способ заключается в приведении системы к безразмерному виду и в сравнении величин коэффициентов в безразмерной системе. В этом случае малыми считаются коэффициенты, которые принимают значения много меньше единицы. Данный способ введения малого параметра используется для сравнительно простых уравнений и систем, когда количество уравнений невелико.

Пример. Рассмотрим динамическое уравнение, описывающее колебательное движение с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(x, \dot{x}) \quad , \quad (5.30)$$

где  $\omega$  - частота колебаний,  $F(x, \dot{x})$  - функция, характеризующая действие на колебательную систему возмущений (например, сил сопротивления). Приведем уравнение (5.30) к безразмерному виду, введя безразмерное время  $\tau = \omega t$  и безразмерное отклонение  $\bar{x} = x/x_0$  от положения равновесия  $x = \dot{x} = 0$ ,  $x_0 = x(t_0)$  - начальное отклонение. Тогда, учитывая тождества

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega \frac{dx}{d\tau} = \omega x_0 \frac{d\bar{x}}{d\tau}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x_0 \frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2},$$

получим

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} + \bar{x} = \frac{1}{\omega^2 x_0} F(\bar{x}, \omega x_0 \frac{d\bar{x}}{d\tau}) \quad .$$

Теперь, если рассмотреть какую-либо конкретную возмущающую функцию, а именно  $F(x, \dot{x}) = k\dot{x}$  (такая функция характеризует действие на систему сил сопротивления пропорциональных скорости, где  $k$  - некоторый постоянный коэффициент), то придем к безразмерному уравнению

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} + \bar{x} = \varepsilon \frac{d\bar{x}}{d\tau} \quad ,$$



причем решения этого уравнения зависят от одного безразмерного параметра  $\varepsilon = \frac{k}{\omega}$ .

Величина параметра  $\varepsilon$  сравнивается с единицей. Возмущение считается малым, если  $\varepsilon \ll 1$ . В прикладных задачах малыми считаются параметры  $\varepsilon < \frac{1}{3}$ . Ясно, что такой метод введения малых параметров приводит к большому их количеству, если в возмущающей функции  $F(x, \dot{x})$  присутствует большое количество отдельных слагаемых. В этом случае последующее применение метода малого параметра становится громоздким, что является недостатком такого способа введения малых параметров.

Второй способ введения малого параметра  $\varepsilon$  связан с предположением, что решения системы с возмущением мало отличается от известного (невозмущенного) решения определенного вида, например, гармонических колебаний. При этом все слагаемые в системе делятся на две группы: основные и возмущающие. Возмущающие функции масштабируются путем введения перед ними множителя – малого параметра  $\varepsilon$ . В этом случае успех применения асимптотического метода определяется близостью решений рассматриваемой системы к известным решениям.

Пример. Рассмотрим опять динамическое уравнение, описывающее колебательное движение с одной степенью свободы (5.30). Пусть  $F(x, \dot{x})$  является ограниченной функцией своих переменных  $|F(x, \dot{x})| < M$ , где  $M$  – некоторая константа, и заранее известно, что эта функция оказывает малое влияние на движение системы. Проведем масштабирование функции  $F(x, \dot{x})$  с помощью множителя – малого параметра  $\varepsilon$ , то есть положим  $F(x, \dot{x}) = \varepsilon f(x, \dot{x})$ , где  $f(x, \dot{x})$  – некоторая новая функция. Ясно, что если функция  $F(x, \dot{x})$  (константа  $M$ ) имела порядок  $\varepsilon$  (см. Приложение 4), то функция  $f(x, \dot{x})$  будет иметь порядок единицы. После введения таким образом малого параметра  $\varepsilon$  уравнение (5.30) примет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (5.31)$$

где параметр  $\varepsilon$  показывает, что возмущающая функция  $\mathcal{E}^f$  является малой по сравнению с основными членами, описывающими движение невозмущенной системы

$$\ddot{x}^0 + \omega^2 x^0 = 0 \quad . \quad (5.32)$$

Уравнение (5.32) получило название порождающего или невозмущенного, оно имеет известное решение (5.4)

$$x^0 = K \cos \varphi \quad , \quad (5.33)$$

где  $K$  и  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  - амплитуда и фаза колебаний.

Основной задачей асимптотических методов является определение решений уравнений в виде рядов по степеням малого параметра

$$x = x^0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad , \quad (5.34)$$

где  $x^0(t), x_1(t), x_2(t), \dots$  - ограниченные функции, подлежащие определению.

Нулевой член ряда (5.34) представляет собой решение порождающего уравнения, а последующие члены определяют поправки к этому решению. Ясно, что определяя в виде ряда (5.34) решение исходного уравнения, мы предполагаем тем самым, что оно мало отличается от решения порождающего уравнения. После построения решения в виде ряда (5.34) при необходимости можно перейти к исходным функциям, положив формально в разложениях  $\varepsilon=1$  и рассматривать полученный ряд как некоторый ряд, члены которого определены через функции, входящие в исходное уравнение. Справедливость полученных решений в каждом конкретном случае можно проверить, сопоставляя значения учтенных и отброшенных членов ряда, а также численным моделированием на ЭВМ по исходным уравнениям.

Одним из основоположников применения асимптотических методов при исследовании динамических систем был великий французский

математик А.Пуанкаре, который дал строгое определение асимптотическому ряду. Это определение и другие обозначения, используемые в теории асимптотическим рядов, приводятся в Приложении 4.

#### 5.4. Метод усреднения

Рассмотрим колебательную систему с одной степенью свободы, на которую действует некоторая возмущающая функция (5.31)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) . \quad (5.35)$$

При  $\varepsilon = 0$  получаем невозмущенную систему (5.32), которая имеет решение (5.33). Решение для производной  $\dot{x}^0$  в этом случае будет иметь вид

$$\dot{x}^0 = -K\omega \cos \varphi . \quad (5.36)$$

Приведем исходное уравнение (5.35) к двум уравнениям первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = z , \quad \frac{dz}{dt} = -\omega^2 x + \varepsilon f(x, z) . \quad (5.37)$$

Сделаем в системе (5.37) замену переменных

$$x = K \cos \varphi , \quad z = -K\omega \cos \varphi . \quad (5.38)$$

Вид замены переменных (5.38) повторяет решение невозмущенной системы (5.33), (5.36), однако при подстановке в возмущенную систему (5.37) параметры  $K$  и  $\varphi_0$  уже считаются не постоянными. Эти параметры теперь будут зависеть от времени и будут изменяться согласно действующему на колебательную систему возмущению  $\varepsilon f(x, z)$ . Фактически в этом случае используется метод вариации произвольных постоянных. После подстановки замены (5.38) в систему (5.37) получим

$$\frac{dK}{dt} \cos \varphi - \frac{d\varphi}{dt} K \sin \varphi = -\omega K \sin \varphi \quad ,$$

$$-\frac{dK}{dt} \omega \sin \varphi - \frac{d\varphi}{dt} \omega K \cos \varphi = -\omega^2 K \cos \varphi + \varepsilon f(K \cos \varphi, -\omega K \sin \varphi) \quad .$$

Выразив из этой системы производные  $\frac{dK}{dt}$  и  $\frac{d\varphi}{dt}$ , получим

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(K \cos \varphi, -\omega K \sin \varphi) \sin \varphi \quad , \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega K} f(K \cos \varphi, -\omega K \sin \varphi) \cos \varphi \quad , \quad (5.39)$$

где  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \frac{d\varphi_0}{dt}$ , и правые части дифференциальных уравнений согласно проведенной замене есть периодические функции угла  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ .

Переход к переменным  $K$  и  $\varphi$  называется переходом к переменным амплитуда – фаза и часто производится при применении метода усреднения [13],[14]. После приведения системы к виду (5.39) согласно методу усреднения проводится процедура усреднения системы по быстрой фазе  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , где  $\omega > 0$ . Усредненная система имеет вид

$$\frac{dK^0}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \left\langle f(K^0 \cos \varphi, -\omega K^0 \sin \varphi) \sin \varphi \right\rangle_{\varphi} = \varepsilon A_1(K^0) \quad , \quad (5.40)$$

$$\frac{d\varphi^0}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega K^0} \left\langle f(K^0 \cos \varphi, -\omega K^0 \sin \varphi) \cos \varphi \right\rangle_{\varphi} = \omega + \varepsilon B_1(K^0) \quad ,$$

где скобками  $\langle \dots \rangle_{\varphi}$  обозначается оператор усреднения, имеющий следующую форму

$$\left\langle f(K^0 \cos \varphi, -\omega K^0 \sin \varphi) \sin \varphi \right\rangle_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K^0 \cos \varphi, -\omega K^0 \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad ,$$

$$\left\langle f(K^0 \cos \varphi, -\omega K^0 \sin \varphi) \cos \varphi \right\rangle_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K^0 \cos \varphi, -\omega K^0 \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi .$$

Причем интегралы по фазе  $\varphi$  берутся согласно принципу усреднения [13],[14] при постоянной амплитуде  $K^0$  (считается, что амплитуда за период колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  невозмущенной системы мало изменяется).

Полученная усредненная система (5.40) существенно проще исходной системы (5.39), так как ее первое уравнение

$$\frac{dK^0}{dt} = \varepsilon A_1(K^0) , \quad (5.41)$$

может быть исследовано отдельно от второго уравнения. В частности, оно может быть проинтегрировано методом разделения переменных. После определения решения для амплитуды  $K^0(t)$  решение для фазы  $\varphi^0(t)$  находится из второго уравнения системы (5.40) взятием квадратуры (интеграла по времени  $t$ ).

Изложенный вариант метода усреднения принято связывать с именем голландского инженера Ван-дер-Поля, впервые применившего описанную процедуру усреднения при исследовании нелинейных колебаний [13]. Современный вариант метода усреднения включает в себя метод Ван-дер-Поля как нулевое приближение, при этом приближенные решения метода усреднения ищутся в виде асимптотического ряда

$$x = K^0 \cos \varphi^0 + \varepsilon u_1(K^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 u_2(K^0, \varphi^0) + \dots ,$$

где  $u_1(K^0, \varphi^0)$ ,  $u_2(K^0, \varphi^0), \dots$  - ограниченные функции, периодичные по фазе  $\varphi^0$ , подлежащие определению.

Более общий вариант метода усреднения будет рассмотрен ниже для системы с двумя быстрыми фазами.

## 5.5. Метод усреднения для системы с одной степенью свободы

Метод усреднения позволяет исследовать колебания в нелинейных системах, в частности, обнаружить и изучить такие эффекты присущие только нелинейным системам, как режимы автоколебаний. Под автоколебаниями понимают колебания с постоянной или с почти постоянной амплитудой, которые поддерживаются несмотря на неизбежные потери энергии в системе. Для существования автоколебаний необходим приток энергии в систему, причем источник энергии обычно не обладает колебательными свойствами. Примером возникновения автоколебаний может служить колебательный контур [16] при наличии в нем нелинейного элемента, на который подается дополнительный ток специального вида. Если рассматривается возникновение автоколебаний в системе с одной степенью свободы, то режиму автоколебаний на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$  соответствует некоторая замкнутая кривая, которая называется предельным циклом.

**Определение.** Замкнутая траектория на фазовой плоскости называется предельным циклом, если она изолирована от других замкнутых траекторий.

Замкнутая траектория называется изолированной от других замкнутых траекторий, если существует некоторая окрестность этой траектории, не содержащая других замкнутых траекторий.

**Замечание.** Замкнутая траектория, существующая в окрестности особой точки типа центра, не является предельным циклом, так как любая ее окрестность содержит другие замкнутые траектории.

Известна теорема о существовании предельных циклов в системах, к которым применим метод усреднения.

**Теорема** [14],[19]. Пусть усредненная система имеет невырожденное положение равновесия, отличное от нуля. Тогда исходная система имеет предельный цикл. Если все собственные значения

усредненной системы, линеаризованной около этого положения равновесия, имеют отрицательные вещественные части, то цикл асимптотически устойчив. Если вещественная часть хотя бы одного из собственных значений положительна, то цикл неустойчив.

Положение равновесия называется невырожденным, если линеаризованная около него система не имеет нулевых собственных значений [19].

Поясним эти теоретические положения на примере системы с одной степенью свободы (5.35), имеющую усредненную систему вида (5.41). Пусть  $K_*^o$  есть некоторый корень функции  $A_1(K^o)$ , отличный от нуля. Тогда уравнение в отклонениях  $\Delta K = K^o - K_*^o$  от этого корня (линеаризованное уравнение) будет иметь вид

$$\frac{d\Delta K}{dt} = \varepsilon \frac{\partial A_1}{\partial K^o} \Delta K, \quad (5.42)$$

где производная от функции  $A_1(K^o)$  определяется в положении равновесия  $K^o = K_*^o$ . Так как мы имеем дело с одномерным случаем, то значение этой производной совпадает с собственным значением линеаризованного уравнения. Таким образом, при  $\frac{\partial A_1}{\partial K^o} < 0$  цикл будет

устойчив, а при  $\frac{\partial A_1}{\partial K^o} > 0$  неустойчив.

Пример. Характерным примером определения предельных циклов является исследование известного уравнения Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon(\nu_0 + \nu_2 x^2) \frac{dx}{dt}, \quad (5.43)$$

где  $\nu_0$  и  $\nu_2$  - некоторые постоянные.

Усредненное уравнение для (5.43) ищется в форме (5.40), где возмущающая функция имеет вид  $f = (v_0 + v_2 x^2) \frac{dx}{dt}$ . Подставляя в эту функцию замену (5.38), получим

$$f = -(v_0 + v_2 K^2 \cos^2 \varphi) K \omega \sin \varphi.$$

Проводя процедуру усреднения (5.40), приходим к приближенному уравнению

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon K (v_0 + \frac{1}{4} v_2 K^2) \quad , \quad (5.44)$$

описывающему усредненное движение исходного уравнения Ван-дер-Поля. Здесь для упрощения обозначений верхний индекс у переменной  $K$  опущен. При этом

$$A_1(K) = \frac{1}{2} K (v_0 + \frac{1}{4} v_2 K^2).$$

Уравнение (5.44) имеет невырожденное положение равновесия, отличное от нуля, когда параметры  $v_0$  и  $v_2$  тоже отличны от нуля и имеют разные знаки. Причем  $K_* = 2\sqrt{-v_0/v_2}$ . Нетрудно проверить, что при  $v_0 > 0$  и  $v_2 < 0$  цикл будет асимптотически устойчив, а при  $v_0 < 0$  и  $v_2 > 0$  - нет.

## 5.6. Метод усреднения для систем с несколькими быстрыми фазами

При анализе движения колебательных систем с несколькими степенями свободы используется усреднение по нескольким быстрым фазам. Рассмотрим формальную процедуру построения асимптотических решений для таких систем с помощью метода усреднения [13]. Стандартная система с быстрыми фазами имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon Y(y, \varphi) \quad , \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(y) + \varepsilon \Phi(y, \varphi), \quad (5.45)$$



где  $y = (y_1, \dots, y_n)$  - вектор медленных переменных системы,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  вектор быстрых фаз,  $\omega(y) = (\omega_1(y), \dots, \omega_m(y))$  - вектор-функция частот системы,  $Y(y, \varphi)$  и  $\Phi(y, \varphi)$  - вектор-функции, периодически зависящие от фаз  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  с периодом  $2\pi$ .

Асимптотические решения системы (5.45) будем искать в виде следующих рядов по малому параметру  $\varepsilon$

$$y = y^0 + \varepsilon u_1(y^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 u_2(y^0, \varphi^0) + \dots, \quad (5.46)$$

$$\varphi = \varphi^0 + \varepsilon U_1(y^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 U_2(y^0, \varphi^0) + \dots.$$

Здесь  $y^0$  и  $\varphi^0$  - усредненные переменные системы,  $u_j(y^0, \varphi^0)$  и  $U_j(y^0, \varphi^0)$  ( $j=1, 2, \dots$ ) - неизвестные функции, подлежащие определению и имеющие нулевое среднее  $\langle u_j(y^0, \varphi^0) \rangle_\varphi = \langle U_j(y^0, \varphi^0) \rangle_\varphi = 0$ , где усреднение производится независимо по всем быстрым фазам.

Ряды (5.46) можно рассматривать как своеобразную замену переменных  $(y, \varphi) \rightarrow (y^0, \varphi^0)$ . Причем новые переменные  $(y^0, \varphi^0)$  должны удовлетворять уравнениям, правые части которых не содержат фазы (усредненные уравнения)

$$\frac{dy^0}{dt} = \varepsilon A_1(y^0) + \varepsilon^2 A_2(y^0) + \dots, \quad \frac{d\varphi^0}{dt} = \omega(y^0) + \varepsilon B_1(y^0) + \dots, \quad (5.47)$$

где функции  $A_j, B_j$  также определяются в процессе построения асимптотических решений.

Рассмотрим определение асимптотических решений для медленных переменных  $y$  (построение решений для фаз  $\varphi$  проводится аналогично).

Подставляя замену переменных (5.46) в первое уравнение системы (5.45) и раскладывая функцию  $Y(y, \varphi)$  в ряд Маклорена по параметру  $\varepsilon$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dy^0}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y^0} \frac{dy^0}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \varphi^0} \frac{d\varphi^0}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial y^0} \frac{dy^0}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi^0} \frac{d\varphi^0}{dt} + \dots = \\ = \varepsilon Y(y^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 \left. \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \dots, \end{aligned} \quad (5.48)$$

где  $\left. \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial Y}{\partial x} u_1 + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} U_1$ .

Определяя производные  $\frac{dy^0}{dt}, \frac{d\varphi^0}{dt}$  в соответствии с выражениями (5.47), представим соотношение (5.48) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon A_1(y^0) + \varepsilon^2 A_2(y^0) + \dots + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y^0} (\varepsilon A_1(y^0) + \dots) + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \varphi^0} (\omega(y^0) + \varepsilon B_1(y^0) + \dots) \\ + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi^0} (\omega(y^0) + \dots) + \dots = \varepsilon Y(y^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial Y}{\partial y} u_1 + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} U_1 \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.49)$$

В соответствии с общей схемой построения асимптотических разложений приравняем далее в выражении (5.49) слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Тогда

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varphi^0} \omega(y^0) = Y(y^0, \varphi^0) - A_1(y^0) \quad ,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \varphi^0} \omega(y^0) = \frac{\partial Y}{\partial y} u_1 + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} U_1 - \frac{\partial u_1}{\partial y} A_1 - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} B_1 - A_2(y^0) \quad ,$$

..... (5.50)

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi^0} \omega(y^0) = D_j(y^0, \varphi^0) - A_j(y^0) \quad ,$$

где  $D_j(y^0, \varphi^0)$  - функции, периодичные по фазам с периодом  $2\pi$ .

Аналогично могут быть получены решения для быстрых переменных  $\varphi$  [13].

Замечание. В левой части дифференциальных уравнений (5.50) стоят выражения  $\frac{\partial u_j}{\partial \varphi^o} \omega(y^o)$ , которые в многомерном случае следует понимать как скалярные произведения соответствующих векторных функций, например,

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi^o} \omega(y^o) = \frac{\partial u_j}{\partial \varphi_1^o} \omega_1(y^o) + \dots + \frac{\partial u_j}{\partial \varphi_m^o} \omega_m(y^o) \quad .$$

Дифференциальные уравнения (5.50) представляют собой линейные дифференциальные уравнения с периодической правой частью, поэтому для их решения воспользуемся методом Фурье [13].

Так как все дифференциальные уравнения решаются одинаково, рассмотрим, например, первое уравнение системы (5.50). Будем искать его решение в виде ряда Фурье [12]

$$u_1(y^o, \varphi^o) = \sum_{s_1 \dots s_m} a_{s_1 \dots s_m}(y^o) \exp[i(s_1 \varphi_1 + \dots + s_m \varphi_m)] \quad , \quad (5.51)$$

где  $a_{s_1 \dots s_m}(y^o)$  - коэффициенты ряда Фурье,  $s_1, \dots, s_m$  - целые числа (индексы ряда),  $\sum_{s_1 \dots s_m}$  -  $m$ -кратные суммы.

Причем из условия равенства нулю усредненной функции  $u_1(y^o, \varphi^o)$  следует  $a_{0 \dots 0}(y^o) = 0$ . В соответствии с методом Фурье разложим функцию  $Y(y^o, \varphi^o)$  также в ряд Фурье

$$Y(y^o, \varphi^o) = \sum_{s_1 \dots s_m} b_{s_1 \dots s_m}(y^o) \exp[i(s_1 \varphi_1 + \dots + s_m \varphi_m)] \quad . \quad (5.52)$$

Подставляя ряды (5.51) и (5.52) в дифференциальное уравнение для  $u_1(y^o, \varphi^o)$  (5.50) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим

$$a_{s_1 \dots s_m}(y^o) = \frac{b_{s_1 \dots s_m}(y^o)}{i[s_1 \omega_1(y^o) + \dots + s_m \omega_m(y^o)]} . \quad (5.53)$$

Для обеспечения равенства нулю среднего от функции  $u_1(y^o, \varphi^o)$  неизвестную функцию  $A_1(y^o)$  следует выбрать из условия  $A_1(y^o) = b_{0 \dots 0}(y^o)$ , то есть функция  $A_1(y^o)$  определяется как среднее от функции  $Y(y^o, \varphi^o)$  по фазам  $\varphi_1^o, \dots, \varphi_m^o$ , а именно

$$A_1(y^o) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} Y(y^o, \varphi_1^o, \dots, \varphi_m^o) d\varphi_1^o \dots d\varphi_m^o ,$$

что соответствует принципу усреднения [13].

Аналогично могут быть решены все уравнения, входящие в систему (5.50), при этом

$$A_j(y^o) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} D_j(y^o, \varphi_1^o, \dots, \varphi_m^o) d\varphi_1^o \dots d\varphi_m^o .$$

Параллельно определению функций  $A_j(y^o)$  по тому же алгоритму производится определение функций  $B_j(y^o)$  [12] при решении дифференциальных уравнений для функций  $U_j(y^o, \varphi^o)$ .

Найденными решениями метода усреднения можно пользоваться при условии

$$s_1 \omega_1(y^o) + \dots + s_m \omega_m(y^o) \neq 0 , \quad (5.54)$$

в противном случае функции  $u_j(y^o, \varphi^o)$ ,  $U_j(y^o, \varphi^o)$  становятся неограниченными, а ряды (5.46) уже не будут удовлетворять определению асимптотического ряда (Приложение 4).

Однако даже в этом случае ряды (5.46) не являются бесполезными, так как их анализ позволяет определить резонансы, возникающие в исследуемой системе уравнений [12]. Резонанс в системе возникает при выполнении двух условий: 1) соответствующие коэффициенты ряда Фурье (5.52) отличны от нуля  $b_{s_1 \dots s_m}(y^o) \neq 0$ ; 2) обращается в ноль или близка к нулю целочисленная комбинация частот  $s_1 \omega_1(y^o) + \dots + s_m \omega_m(y^o)$ , входящая в знаменатель выражения (5.53). Резонансные случаи движения системы (5.45) требуют особого рассмотрения и соответствующей модификации процедуры усреднения [12],[13].

Применение метода усреднения для анализа и управления колебательными системами обосновывается рядом теорем [14],[15],[19], наиболее важной из которых является теорема Боголюбова Н.Н. [14]. Не формулируя эту теорему полностью из-за ее громоздкости, перечислим основные условия применения метода усреднения.

1. Исходная система дифференциальных уравнений, например (5.45), должна удовлетворять стандартным условиям теоремы о единственности и существовании решений [1] при некоторых начальных условиях  $x(t_0), \varphi(t_0)$ , где  $t_0$  - начальное время.

2. Существуют и могут быть определены средние от функций  $Y(y, \varphi)$ ,  $\Phi(y, \varphi)$ , стоящих в правых частях системы (5.45).

3. Метод усреднения имеет смысл применять только при достаточно малом значении малого параметра  $\varepsilon$ , который определяет погрешность решений усредненной системы:  $\|y - y^o\| < \eta(\varepsilon)$ , где  $\|y - y^o\|$  - некоторая норма (обычно евклидова), причем  $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

При использовании процедуры усреднения для системы с быстрыми фазами (5.45), описанной выше, к перечисленным условиям необходимо добавить еще условие отсутствия резонансов частот (5.54).

### 5.7. Метод усреднения для системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим колебательную динамическую систему с двумя степенями свободы вида (5.16) при действии на нее возмущающей векторной функции  $\varepsilon Q = (\varepsilon Q_1, \varepsilon Q_2)$ , записав ее в скалярной форме

$$a_{11} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_{12} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_{11} x_1 + c_{12} x_2 = \varepsilon Q_1(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}) \quad , \quad (5.55)$$

$$a_{21} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_{22} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_{21} x_1 + c_{22} x_2 = \varepsilon Q_2(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}) \quad , \quad (5.56)$$

где  $a_{ij}, c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – заданные коэффициенты.

При  $\varepsilon = 0$  получаем невозмущенную систему

$$a_{11} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_{12} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_{11} x_1 + c_{12} x_2 = 0 \quad ,$$

$$a_{21} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_{22} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_{21} x_1 + c_{22} x_2 = 0 \quad .$$

Определим решение этой системы в виде (5.21)

$$x_1 = C_1 V_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_{o1}) + C_2 V_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_{o2}) \quad ,$$

$$x_2 = C_1 V_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_{o1}) + C_2 V_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_{o2}) \quad , \quad (5.57)$$

где собственные вектора находятся из условия (5.20)

$$\begin{pmatrix} c_{11} - a_{11}\omega_{1,2}^2 & c_{12} - a_{12}\omega_{1,2}^2 \\ c_{12} - a_{12}\omega_{1,2}^2 & c_{22} - a_{22}\omega_{1,2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^{(1,2)} \\ V_2^{(1,2)} \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad (5.58)$$

а собственные частоты из уравнения (5.19)

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & c_{12} - a_{12}\omega^2 \\ c_{12} - a_{12}\omega^2 & c_{22} - a_{22}\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad . \quad (5.59)$$

Обычно матрицу собственных векторов  $V$  представляют в виде

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \chi_1 & \chi_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

где параметры  $\chi_1, \chi_2$  называются в теории колебаний коэффициентами распределения и вычисляются из уравнения (5.58) в виде

$$\chi_{1,2} = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_{1,2}^2}{c_{12} - a_{12}\omega_{1,2}^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}\omega_{1,2}^2}{c_{22} - a_{22}\omega_{1,2}^2} \quad .$$

Применим к исследованию возмущенной системы (5.55-5.56) метод усреднения (метод Ван-дер-Поля), используя методику подробно изложенную в разделе 5.4 для системы с одной степенью свободы. В соответствии с этим приведем систему (5.55-5.56) к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = z_1 \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = z_2 \quad ,$$

$$a_{11} \frac{dz_1}{dt} + a_{12} \frac{dz_2}{dt} + c_{11}z_1 + c_{12}z_2 = \varepsilon Q_1(x_1, x_2, z_1, z_2, u) \quad , \quad (5.60)$$

$$a_{12} \frac{dz_1}{dt} + a_{22} \frac{dz_2}{dt} + c_{12}z_1 + c_{22}z_2 = \varepsilon Q_2(x_1, x_2, z_1, z_2, u) \quad .$$

Сделаем в системе в соответствии с видом решения (5.57) замену переменных

$$x_1 = K_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + K_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) \quad ,$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= K_1 \chi_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{o1}) + K_2 \chi_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{o2}) \quad , \\
 z_1 &= -K_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{o1}) - K_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{o2}) \quad , \\
 z_2 &= -K_1 \omega_1 \chi_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{o1}) - K_2 \omega_2 \chi_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{o2}) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{5.61}$$

где в качестве новых переменных в соответствии с методом вариации произвольных постоянных взяты амплитуды  $K_1, K_2$  и начальные фазы  $\varphi_{o1}, \varphi_{o2}$ . После подстановки замены (5.61) в систему (5.60) и проведения дифференцирования получится система линейных алгебраических уравнений относительно производных  $\frac{dK_1}{dt}, \frac{dK_2}{dt}, \frac{d\varphi_{o1}}{dt}, \frac{d\varphi_{o2}}{dt}$  вида [22]

$$\begin{pmatrix}
 \cos \varphi_1 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_1 & -\sin \varphi_2 \\
 \chi_1 \cos \varphi_1 & \chi_2 \cos \varphi_2 & -\chi_1 \sin \varphi_1 & -\chi_2 \sin \varphi_2 \\
 -\omega_1 D_1 \sin \varphi_1 & -\omega_2 D_2 \sin \varphi_2 & -\omega_1 D_1 \cos \varphi_1 & -\omega_2 D_2 \cos \varphi_2 \\
 -\omega_1 D_3 \sin \varphi_1 & -\omega_2 D_4 \sin \varphi_2 & -\omega_1 D_3 \cos \varphi_1 & -\omega_2 D_4 \cos \varphi_2
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \frac{dK_1}{dt} \\
 \frac{dK_2}{dt} \\
 K_1 \frac{d\varphi_{o1}}{dt} \\
 K_2 \frac{d\varphi_{o2}}{dt}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \varepsilon Q_1 \\
 \varepsilon Q_2
 \end{pmatrix}$$

где  $\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{o1}$ ,  $\varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{o2}$  - фазы,  $D_1 = a_{11} + a_{12} \chi_1$ ,  $D_2 = a_{11} + a_{12} \chi_2$ ,  
 $D_3 = a_{12} + a_{22} \chi_1$ ,  $D_4 = a_{12} + a_{22} \chi_2$ .

Решая эту систему методом Крамера, например, относительно  $\frac{dK_1}{dt}$ , найдем

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad ,$$

где определители системы  $\Delta = \omega_1 \omega_2 (\chi_2 - \chi_1) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)$ ,

$$\Delta_1 = -\varepsilon (\chi_2 - \chi_1) \omega_2 (D_4 Q_1 - D_2 Q_2) \sin \varphi_1 .$$

Поэтому



$$\frac{dK_1}{dt} = -\frac{\varepsilon(D_4Q_1 - D_2Q_2)\sin\varphi_1}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \quad (5.62)$$

Аналогично для других производных

$$\frac{dK_2}{dt} = \frac{\varepsilon(D_3Q_1 - D_1Q_2)\sin\varphi_2}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \quad (5.63)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 - \frac{\varepsilon(D_4Q_1 - D_2Q_2)\cos\varphi_1}{K_1\omega_1(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \quad (5.64)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 + \frac{\varepsilon(D_3Q_1 - D_1Q_2)\cos\varphi_2}{K_2\omega_2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \quad (5.65)$$

При определении уравнений (5.62-5.65) учитывается, что

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 + \frac{d\varphi_{01}}{dt}, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 + \frac{d\varphi_{02}}{dt}.$$

Система (5.62-5.65) представляет собой преобразованную к другим переменным исходную систему (5.55-5.56), причем правые части этой системы в силу сделанной замены переменных периодичны по фазам  $\varphi_1, \varphi_2$  с периодом  $2\pi$ .

Поэтому усредняя правые части уравнений (5.62-5.63) по быстрым фазам  $\varphi_1, \varphi_2$ , получим

$$\frac{dK_1^o}{dt} = \varepsilon A_1(K_1^o, K_2^o), \quad \frac{dK_2^o}{dt} = \varepsilon A_2(K_1^o, K_2^o) \quad (5.66)$$

где

$$A_1(K_1^o, K_2^o) = -\frac{\langle (D_4Q_1 - D_2Q_2)\sin\varphi_1 \rangle}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}, \quad A_2(K_1^o, K_2^o) = \frac{\langle (D_3Q_1 - D_1Q_2)\sin\varphi_2 \rangle}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)},$$

$$\left\langle (D_3 Q_1 - D_1 Q_2) \sin \varphi_2 \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (D_3 Q_1 - D_1 Q_2) \sin \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2 \quad ,$$

$$\left\langle (D_4 Q_1 - D_2 Q_2) \sin \varphi_2 \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (D_4 Q_1 - D_2 Q_2) \sin \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2 \quad .$$

Исследование усредненной системы (5.66) осуществляется в следующем порядке:

1) определяются особые точки системы (5.66) из условий

$$A_1(K_{1*}^o, K_{2*}^o) = 0 \quad , \quad A_2(K_{1*}^o, K_{2*}^o) = 0 \quad , \quad (5.67)$$

которые должны выполняться одновременно;

2) после нахождения особых точек для исследования их устойчивости составляют линеаризованную относительно  $K_{1*}^o, K_{2*}^o$  систему, тогда

$$\frac{d\Delta K_1}{dt} = d_{11}\Delta K_1 + d_{12}\Delta K_2 \quad , \quad \frac{d\Delta K_2}{dt} = d_{21}\Delta K_1 + d_{22}\Delta K_2 \quad , \quad (5.68)$$

где  $d_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial K_j^o}(K_{1*}^o, K_{2*}^o)$  ( $i, j = 1, 2$ ) ,  $\Delta K_1 = K_1^o - K_{1*}^o$  ,  $\Delta K_2 = K_2^o - K_{2*}^o$  .

3) записывают характеристическое уравнение системы (5.68)

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad (5.69)$$

откуда определяются собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  .

По значению собственных чисел  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  судят об устойчивости или неустойчивости стационарных значений  $K_{1*}^o, K_{2*}^o$  , о типе особой точки (см. приложение 2) и о наличии предельных циклов в системе. Здесь используется теорема, приведенная в разделе 5.5, которая остается справедливой и для систем с двумя степенями свободы.

## 6. ПРИБЛИЖЕННО ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

### 6.1. Управление линейной колебательной системой с одной степенью свободы

Рассмотрим колебательную динамическую систему с одной степенью свободы (5.31) при действии на нее возмущающей функции  $\varepsilon f(x, \frac{dx}{dt})$  и управления  $\varepsilon m u$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \frac{dx}{dt}) + \varepsilon m u \quad . \quad (6.1)$$

В системе (6.1)  $m$  - заданный параметр управления, который предполагается малым (масштабируется малым параметром  $\varepsilon$ ), что является обычным предположением при управлении колебательными системами [15]. Дело в том, что управляемое движение системы должно оставаться по характеру колебательным, что может быть гарантировано только при достаточно малых возмущающих функциях.

Поставим задачу о переводе системы (6.1) из некоторой точки фазовой плоскости  $(x, \frac{dx}{dt})$  в начало координат  $x = \frac{dx}{dt} = 0$  исходя из минимума функционала вида

$$I = \varepsilon \int_0^T (bK^2 + cu^2) dt \quad , \quad (6.2)$$

где  $b$  и  $c$  - заданные весовые коэффициенты критерия оптимальности,

$K = \sqrt{x^2 + (\frac{dx}{dt})^2} / \omega^2$  - амплитуда колебаний.

Вид критерия оптимальности отличается от классического, так как при построении приближенно оптимального управления будет применяться метод усреднения, который позволяет управлять только медленными переменными системы. В системе с одной степенью свободы к медленно изменяющимся переменным относится амплитуда, что следует из вида системы (5.39), записанной в переменных амплитуда – фаза. Таким образом, ставится задача о переводе системы, имеющей некоторую заданную амплитуду  $K$ , в начало координат  $K = 0$ .

Осуществляя в системе (6.1) переход к новым переменным амплитуда – фаза (аналогичные преобразования описаны в разделе 5.4), получим

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} [f(K \cos \varphi, -K\omega \sin \varphi) + mu] \sin \varphi, \quad (6.3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{K\omega} [f(K \cos \varphi, -K\omega \sin \varphi) + mu] \cos \varphi.$$

Применим к системе (6.3) принцип Беллмана (подробно описанный в разделе 3), приводящий к условию (3.9), которое для системы (6.3) примет вид

$$\min_u (\varepsilon b K^2 + \varepsilon c u^2 + \frac{\partial v}{\partial K} \frac{dK}{dt} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt}) = 0. \quad (6.4)$$

Подставив в соотношение (6.4) производные  $\frac{dK}{dt}$  и  $\frac{d\varphi}{dt}$  из системы (6.3), получим

$$\min_u \left\{ \varepsilon b K^2 + \varepsilon c u^2 + \frac{\partial v}{\partial K} \left[ -\frac{\varepsilon}{\omega} (f + mu) \sin \varphi \right] + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left[ \omega - \frac{\varepsilon}{K\omega} (f + mu) \cos \varphi \right] \right\} = 0 \quad (6.5)$$

Выделяя в этом выражении отдельно слагаемые, зависящие от управления  $u$ , получим функцию

$$F(u) = \varepsilon c u^2 - \frac{\partial v}{\partial K} \frac{\varepsilon}{\omega} mu \sin \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\varepsilon}{K\omega} mu \cos \varphi.$$

Необходимое условие минимума этой функции по управлению будет иметь вид

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2\varepsilon c u - \frac{\partial v}{\partial K} \frac{\varepsilon}{\omega} m \sin \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\varepsilon}{K \omega} m \cos \varphi = 0 \quad , \quad (6.6)$$

Причем выполняется достаточное условие минимума  $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 2\varepsilon c > 0$ .

Поэтому оптимальное управление определится из условия (6.6) в виде

$$u^0 = \frac{m}{2c\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial K} \sin \varphi + \frac{1}{K} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \quad . \quad (6.7)$$

Подставляя управление (6.7) в условие (6.5) и приводя подобные члены, получим уравнение Беллмана для динамической системы (6.3)

$$\varepsilon b K^2 - \frac{\varepsilon}{\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial K} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{K} \right) f + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \omega - \frac{\varepsilon m^2}{4c\omega^2} \left( \frac{\partial v}{\partial K} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{K} \right)^2 = 0 \quad (6.8)$$

Из уравнения (6.8) необходимо определить функцию  $v(K, \varphi)$ . Решение данного уравнения не может быть найдено в виде полинома методом, изложенным в разделе 3, так как вид функции  $v(K, \varphi)$  должна быть в этом случае совсем другой. В частности, функция  $v(K, \varphi)$  должна быть периодична по фазе  $\varphi$ . Поэтому решим дифференциальное уравнение в частных производных (6.8) совместно с уравнениями системы (6.3) приближенно методом усреднения. В соответствии с этим методом будем искать решение этих уравнений в виде асимптотических рядов

$$\begin{aligned} K &= K^0 + \varepsilon u_1(K^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 u_2(K^0, \varphi^0) + \dots \quad , \\ \varphi &= \varphi^0 + \varepsilon U_1(K^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 U_2(K^0, \varphi^0) + \dots \quad , \\ v &= v^0(K^0) + \varepsilon v_1(K^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 v_2(K^0, \varphi^0) + \dots, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где  $K^0, \varphi^0$  - новые переменные системы (6.3), а функции  $u_j(K^0, \varphi^0), U_j(K^0, \varphi^0), v^0(K^0), v_j(K^0, \varphi^0)$  ( $j=1, 2, \dots$ ) подлежат определению.

Причем в соответствии с принципом усреднения

$$\left\langle u_j(K^0, \varphi^0) \right\rangle_{\varphi^0} = \left\langle U_j(K^0, \varphi^0) \right\rangle_{\varphi^0} = \left\langle v_j(K^0, \varphi^0) \right\rangle_{\varphi^0} = 0.$$

Так как определение приближенных решений дифференциальных уравнений (6.3) проводилось ранее, рассмотрим здесь определение только решения уравнения (6.8).

Подставляя ряды (6.9) в уравнение (6.8) и учитывая, что  $\frac{\partial v}{\partial \varphi^0} = \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \varphi^0} + \varepsilon^2 \dots$ ,

получим (с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon^2$ )

$$\varepsilon b(K^0)^2 - \frac{\varepsilon}{\omega} \frac{\partial v^0}{\partial K^0} f \sin \varphi^0 + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \varphi^0} \omega - \frac{\varepsilon m^2}{4c\omega^2} \left( \frac{\partial v^0}{\partial K^0} \right)^2 \sin^2 \varphi = O(\varepsilon^2). \quad (6.10)$$

Проводя усреднение соотношения (6.10) и учитывая, что

$$\left\langle \frac{\partial v_1}{\partial \varphi^0} \omega \right\rangle_{\varphi^0} = 0, \text{ в первом приближении найдем}$$

$$\varepsilon b(K^0)^2 - \frac{\varepsilon}{\omega} \frac{\partial v^0}{\partial K^0} \left\langle f \sin \varphi^0 \right\rangle_{\varphi^0} - \frac{\varepsilon m^2}{8c\omega^2} \left( \frac{\partial v^0}{\partial K^0} \right)^2 = 0. \quad (6.11)$$

Далее при написании переменной  $K^0$  для простоты индекс будет опущен. В случае, когда возмущающая функция  $f(x, \frac{dx}{dt})$  содержит только линейные слагаемые по  $x, \frac{dx}{dt}$ , решение уравнения (6.11) может быть найдено в виде квадратичной функции

$$v^0(K) = AK^2, \quad (6.12)$$

методом неопределенных коэффициентов. Причем, для обеспечения условия асимптотической устойчивости решения  $K = 0$  усредненной системы в соответствии с методом Ляпунова функция  $v^0(K)$  должна быть положительно определена, то есть необходимо потребовать чтобы  $A > 0$ . После подстановки функции  $v(K^0, \varphi^0)$  в выражение для определения оптимального управления (6.7), получим

$$u^0 = \frac{m}{2c\omega} \frac{\partial v^0}{\partial K^0} \sin \varphi^0 + \varepsilon \dots, \quad (6.13)$$

где выписаны лишь члены порядка единицы, так как после подстановки выражения (6.13) в динамическую систему (6.3) слагаемые порядка  $\varepsilon$  умножаются еще  $\varepsilon$  и входят лишь во второе приближение метода усреднения.

Подставляя функцию (6.13) в дифференциальное уравнение (6.3) и учитывая выражение (6.12), после усреднения в первом приближении получим

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \langle f \sin \varphi \rangle_{\varphi} + \frac{m^2}{2c\omega} AK, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{K\omega} \langle f \cos \varphi \rangle_{\varphi}. \quad (6.14)$$

Пример. Рассмотрим простой модельный пример определения оптимального управления для системы с одной степенью свободы вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon \mu \frac{dx}{dt} + \varepsilon m u, \quad (6.15)$$

где  $\omega, \varepsilon, \mu, m$  - заданные положительные параметры.

Решим задачу поиска оптимального управления о переводе системы из некоторой точки фазового пространства  $(x, \frac{dx}{dt})$  в начало координат

$x = \frac{dx}{dt} = 0$  в соответствии с критерием оптимальности (6.2). Предварительно

заметим, что в силу положительности параметров  $\varepsilon, \mu$  движение системы без управления  $u = 0$  неустойчиво, а фазовый портрет системы соответствует неустойчивому фокусу (рис.4.1). Для системы (6.15) имеем

$f = \mu \frac{dx}{dt}$ . Поэтому, делая замену  $\frac{dx}{dt} = -K\omega \sin \varphi$  и подставляя ее в

приближенное уравнение Беллмана (6.11), получим

$$\varepsilon b K^2 + \varepsilon \frac{\partial v^0}{\partial K} \left\langle \mu K \sin^2 \varphi \right\rangle_{\varphi} - \frac{\varepsilon m^2}{8c\omega^2} \left( \frac{\partial v^0}{\partial K} \right)^2 = 0 \quad . \quad (6.16)$$

Учитывая, что  $\left\langle \sin^2 \varphi \right\rangle_{\varphi} = \frac{1}{2}$  и подставляя функцию (6.12) в уравнение

(6.16), приходим к квадратному уравнению относительно коэффициента  $A$  вида

$$A^2 - \frac{2c\mu\omega^2}{m^2} A - \frac{2cb\omega^2}{m^2} = 0 \quad ,$$

имеющему решение

$$A_{1,2} = \frac{c\mu\omega^2}{m^2} \pm \sqrt{\frac{c^2\mu^2\omega^4}{m^4} + \frac{2cb\omega^2}{m^2}} \quad . \quad (6.17)$$

Из двух решений выбираем положительное решение  $A = A_1$ , что гарантирует положительную определенность функции (6.12) и ведет, как показано в разделе 3.4, к асимптотической устойчивости решения  $K = 0$  для усредненной системы.

При этом приближенно оптимальное управление (6.13) примет вид

$$u^0 = \frac{m}{c\omega} A_1 K \sin \varphi \quad . \quad (6.18)$$

Приближенно оптимальное управление (6.18) в исходных переменных будет иметь вид



$$u^o = -\frac{m}{c\omega^2} A_1 \frac{dx}{dt} . \quad (6.19)$$

После подстановки управления (6.17) в уравнение для амплитуды (6.14) и усреднения по фазе, получим уравнение

$$\frac{dK}{dt} = \lambda K ,$$

где  $\lambda = -\frac{\varepsilon m^2}{2c\omega^2} \sqrt{\frac{c^2 \mu^2 \omega^4}{m^4} + \frac{2cb\omega^2}{m^2}} < 0$  - собственное значение линейной усредненной системы, отрицательность которого ведет к асимптотической устойчивости решения  $K = 0$ .

Проведем сравнение полученного приближенно оптимального управления (6.19) с оптимальным управлением, найденным классическим методом с использованием результатов раздела 4, для системы (6.15). Приведем эту систему к двум уравнениям первого порядка

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 , \quad \frac{dy_2}{dt} = -\omega^2 y_1 + \varepsilon \mu y_2 + \varepsilon m u , \quad (6.20)$$

где  $y_1 = x$ ,  $y_2 = \frac{dx}{dt}$ , и возьмем при определении оптимального управления функционал в виде

$$I = \varepsilon \int_0^T (a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + c u^2) dt , \quad (6.21)$$

который совпадет с критерием (6.2) при  $a_{11} = b$ ,  $a_{22} = \frac{b}{\omega^2}$ .

Составляя уравнение Беллмана (3.16) для системы (6.20), получим

$$\varepsilon a_{11} y_1^2 + \varepsilon a_{22} y_2^2 + \frac{\partial v}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial v}{\partial y_2} (-\omega^2 y_1 + \varepsilon \mu y_2) - \frac{1}{4c} \left( \frac{\partial v}{\partial y_2} m \right)^2 = 0 . \quad (6.22)$$

Определяя функцию в виде  $v = A_{11}y_1^2 + A_{22}y_2^2 + 2A_{12}y_1y_2$ , подставляя ее в уравнение (6.22) и приравнявая к нулю коэффициенты при подобных слагаемых, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon a_{11} - 2A_{12}\omega^2 - \frac{\varepsilon^2}{c}A_{12}^2m^2 &= 0, \\ \varepsilon a_{22} + 2A_{12} + \varepsilon A_{22}\mu - \frac{\varepsilon^2}{c}A_{22}^2m^2 &= 0, \\ A_{11} + \varepsilon A_{12}\mu - A_{22}\omega^2 - \frac{\varepsilon^2}{c}A_{12}A_{22}m^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Последовательно решая систему алгебраических уравнений (6.23), найдем

$$\begin{aligned} A_{12} &= -\frac{c\omega^2}{\varepsilon m^2} + \sqrt{\frac{c^2\omega^4}{\varepsilon^2 m^4} + a_{11}\frac{c}{m^2}}, \\ A_{22} &= -\frac{c\mu}{m^2} + \sqrt{\frac{c^2\mu^2}{m^4} + a_{22}\frac{c}{m^2} + \frac{2c}{\varepsilon m^2}A_{12}}, \\ A_{11} &= A_{22}\omega^2 - \varepsilon A_{12}\mu + \frac{\varepsilon}{c}m^2 A_{12}A_{22}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Оптимальное управление находится из выражения (3.15) в виде

$$u^0(y_1, y_2) = p_1 y_1 + p_2 y_2, \quad (6.25)$$

где коэффициенты обратной связи определяются формулами

$$p_1 = \frac{\omega^2}{\varepsilon m} - \sqrt{\frac{\omega^4}{\varepsilon^2 m^2} + \frac{a_{11}}{c}}, \quad p_2 = -\frac{\mu}{m} - \sqrt{\frac{\mu^2}{m^2} + \frac{2}{\varepsilon c}A_{12} + \frac{a_{22}}{c}}. \quad (6.26)$$

Для сравнения оптимальных решений управление (6.25) удобно представить в другом виде, умножив на параметр  $\varepsilon m$

$$\varepsilon m u^0(y_1, y_2) = \bar{p}_1 y_1 + \bar{p}_2 y_2, \quad (6.27)$$

где

$$\bar{p}_1 = \omega^2 - \sqrt{\omega^4 + \frac{a_{11}}{c} \varepsilon^2 m^2} , \quad \bar{p}_2 = -\varepsilon \mu - \sqrt{\varepsilon^2 \mu^2 + \frac{2\varepsilon}{c} A_{12} m^2 + \frac{a_{22}}{c} \varepsilon^2 m^2} . \quad (6.28)$$

Проведем сравнение приближенно оптимального управления (6.19) и оптимального управления, полученного классическим методом (6.27). Ясно, что точность полученного приближенного управления будет зависеть от величины действующих возмущающих функций, то есть от значения малого параметра задачи  $\varepsilon$ . При достаточно малом значении малого параметра  $\varepsilon$  они должны быть приближенно равны. Поэтому управление (6.19) также умножим на  $\varepsilon m$  и представим в виде

$$\varepsilon m u^0 = \bar{p}_{2n} y_2 , \quad (6.29)$$

где

$$\bar{p}_{2n} = -\varepsilon \mu - \varepsilon \sqrt{\mu^2 + \frac{2bm^2}{\omega^2 c}} . \quad (6.30)$$

Раскладывая в ряд Маклорена коэффициенты  $\bar{p}_1(\varepsilon), \bar{p}_2(\varepsilon)$  по параметру  $\varepsilon$ , получим

$$\bar{p}_{1,2}(\varepsilon) = \bar{p}_{1,2}(0) + \left. \frac{\partial \bar{p}_{1,2}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \bar{p}_{1,2}}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 + \dots , \quad (6.31)$$

причем  $\bar{p}_{1,2}(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -\mu - \sqrt{\mu^2 + \frac{2bm^2}{\omega^2 c}} ,$

где  $b = a_{22} = \frac{a_{11}}{\omega^2}$ .

Поэтому с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon^2$ , получим

$$\bar{p}_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 + \dots = O(\varepsilon^2) , \quad \bar{p}_2(\varepsilon) = \bar{p}_{2n}(\varepsilon) + O(\varepsilon^2) ,$$

где коэффициент  $\bar{p}_{2n}(\varepsilon)$  определяется выражением (6.30).

Таким образом, приближенно оптимальное управление (6.29), определенное с использованием метода усреднения, с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon^2$  совпадает с оптимальным управлением (6.25), найденным классическим методом.

Приведем пример расчета и сравнения приближенно оптимального и оптимального управления при следующих значениях параметров системы (6.15) и критерия оптимальности (6.21):  $\varepsilon = 0.3$ ,  $\omega = m = \mu = a_{11} = a_{22} = 1$ .

Определенные приближенно оптимальное и оптимальное управления имеют вид:

$$u^O(y_1, y_2) = -2.732y_2, \quad u^O(y_1, y_2) = -0.147y_1 - 2.726y_2.$$

На рис.6.1 показано сравнение приближенно оптимальной (сплошная линия) и оптимальной траекторий (пунктирная линия), при этом значения критерия оптимальности соответственно равны  $I_n = 3.046$  и  $I = 2.802$  на интервале времени  $t \in [0, 50c]$ .

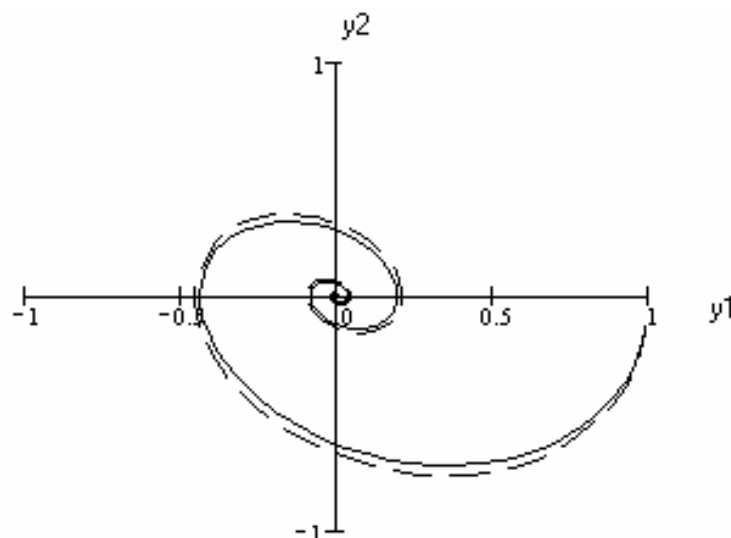


Рис.6.1

## 6.2. Управление линейной колебательной системой с двумя степенями свободы

Рассмотрим колебательную динамическую систему с двумя степенями свободы вида (5.55-5.56) при действии на нее возмущающей векторной функции  $\varepsilon Q = (\varepsilon Q_1, \varepsilon Q_2)$  и управления  $u$

$$a_{11} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_{12} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_{11} x_1 + c_{12} x_2 = \varepsilon Q_1(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}) + \varepsilon m_1 u \quad , \quad (6.32)$$

$$a_{21} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_{22} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_{21} x_1 + c_{22} x_2 = \varepsilon Q_2(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}) + \varepsilon m_2 u \quad , \quad (6.33)$$

где  $a_{ij}, c_{ij} (i, j = 1, 2)$ ,  $m_1, m_2$  - заданные коэффициенты. В данном разделе предполагается, что возмущающие функции  $Q_1, Q_2$  являются линейными функциями переменных  $x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}$ .

Имея в виду применение в последующем метода усреднения и управление амплитудами колебаний, зададим критерий оптимальности в виде

$$I = \varepsilon \int_0^T (b_{11} K_1^2 + b_{22} K_2^2 + 2b_{12} K_1 K_2 + c u^2) dt \quad , \quad (6.34)$$

где  $b_{11}, b_{22}, b_{12}$  и  $c$  - заданные весовые коэффициенты критерия оптимальности;  $K_1, K_2$  - амплитуда главных колебаний системы.

Ставится задача о переводе системы, имеющей некоторые заданные амплитуды  $K_1, K_2$ , в начало координат  $K_1 = K_2 = 0$ .

Осуществляя в системе (6.32-6.33) переход к новым переменным амплитуды – фазы (аналогичные преобразования описаны в разделе 5.7), получим

$$\begin{aligned}\frac{dK_1}{dt} &= -\varepsilon[\bar{D}_4(Q_1 + m_1u) - \bar{D}_2(Q_2 + m_2u)] \sin \varphi_1, \\ \frac{dK_2}{dt} &= \varepsilon[\bar{D}_3(Q_1 + m_1u) - \bar{D}_1(Q_2 + m_2u)] \sin \varphi_2,\end{aligned}\quad (6.35)$$

где

$$\bar{D}_{1,3} = \frac{D_{1,3}}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}, \quad \bar{D}_{2,4} = \frac{D_{2,4}}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}.$$

Применим к системе (6.35) принцип Беллмана (подробно описанный в разделе 3), приводящий к условию (3.9), которое для системы (6.35) примет вид

$$\min_u (\varepsilon b_{11} K_1^2 + \varepsilon b_{22} K_2^2 + 2b_{12} K_1 K_2 + \varepsilon c u^2 + \frac{\partial v}{\partial K} \frac{dK}{dt} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt}) = 0, \quad (6.36)$$

где 
$$\frac{\partial v}{\partial K} \frac{dK}{dt} = \frac{\partial v}{\partial K_1} \frac{dK_1}{dt} + \frac{\partial v}{\partial K_2} \frac{dK_2}{dt}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial v}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial v}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt}.$$

Выделяя в этом выражении отдельно слагаемые, зависящие от управления  $u$ , получим функцию

$$F(u) = \varepsilon c u^2 - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial K_1} (\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2) u \sin \varphi_1 + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial K_2} (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2) u \sin \varphi_2 + \dots,$$

где из-за громоздкости не выписаны слагаемые, зависящие от частных производных  $\frac{\partial v}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial v}{\partial \varphi_2}$ . Как показано в разделе 6.1 аналогичные слагаемые

(в первом приближении метода усреднения) не влияют на определяемое приближенно оптимальное управление.

Необходимое условие минимума функции  $F(u)$  по управлению будет иметь вид

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2\varepsilon c u - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial K_1} (\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2) \sin \varphi_1 + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial K_2} (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2) \sin \varphi_2 + \dots = 0,$$

причем выполняется достаточное условие минимума  $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 2\varepsilon c > 0$ .

Поэтому оптимальное управление определится из условия  $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$  в виде

$$u^0 = \frac{1}{2c} \left[ \frac{\partial v}{\partial K_1} (\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2) \sin \varphi_1 - \frac{\partial v}{\partial K_2} (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2) \sin \varphi_2 + \dots \right] \quad (6.37)$$

Подставляя управление (6.37) в условие (6.36) и приводя подобные члены, получим уравнение Беллмана для динамической системы (6.35)

$$\begin{aligned} & \varepsilon a_{11} K_1^2 + \varepsilon a_{22} K_2^2 + 2\varepsilon a_{12} K_1 K_2 - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial K_1} (\bar{D}_4 Q_1 - \bar{D}_2 Q_2) \sin \varphi_1 + \\ & + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial K_2} (\bar{D}_3 Q_1 - \bar{D}_1 Q_2) \sin \varphi_2 - \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$- \frac{\varepsilon}{4c} \left[ \frac{\partial v}{\partial K_1} (\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2) \sin \varphi_1 - \frac{\partial v}{\partial K_2} (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2) \sin \varphi_2 \right]^2 + \dots = 0$$

Решим дифференциальное уравнение в частных производных (6.38) совместно с уравнениями системы (6.35) приближенно методом усреднения. В соответствии с этим методом будем искать решение этих уравнений в виде асимптотических рядов

$$\begin{aligned} K &= K^0 + \varepsilon u_1(K^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 u_2(K^0, \varphi^0) + \dots, \\ \varphi &= \varphi^0 + \varepsilon U_1(K^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 U_2(K^0, \varphi^0) + \dots, \\ v &= v^0(K^0) + \varepsilon v_1(K^0, \varphi^0) + \varepsilon^2 v_2(K^0, \varphi^0) + \dots, \end{aligned} \quad (6.39)$$

где  $K^0 = (K_1^0, K_2^0)$  и  $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0)$  - новые переменные системы (6.35), а вектор-функции  $u_j(K^0, \varphi^0), U_j(K^0, \varphi^0)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) и функции

$v^o(K^o), v_1(K^o, \varphi^o), \dots$  подлежат определению. Причем в соответствии с принципом усреднения

$$\langle u_j(K^o, \varphi^o) \rangle_{\varphi^o} = \langle U_j(K^o, \varphi^o) \rangle_{\varphi^o} = \langle v_j(K^o, \varphi^o) \rangle_{\varphi^o} = 0.$$

Так как определение приближенных решений дифференциальных уравнений (6.35) проводилось ранее, рассмотрим здесь определение только решения уравнения (6.38). Подставляя ряды (6.39) в уравнение (6.38) и учитывая, что  $\frac{\partial v}{\partial \varphi^o} = \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \varphi^o} + \varepsilon^2 \dots$ , после усреднения получим (с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon^2$ )

$$b_{11}K_1^2 + b_{22}K_2^2 + 2b_{12}K_1K_2 - \frac{\partial v^o}{\partial K_1} \langle (\bar{D}_4 Q_1 - \bar{D}_2 Q_2) \sin \varphi_1 \rangle + \frac{\partial v^o}{\partial K_2} \langle (\bar{D}_3 Q_1 - \bar{D}_1 Q_2) \sin \varphi_2 \rangle - \quad (6.40)$$

$$- \frac{1}{8c} \left[ \left( \frac{\partial v^o}{\partial K_1} \right)^2 (\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2)^2 + \left( \frac{\partial v^o}{\partial K_2} \right)^2 (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2)^2 \right] = 0, \quad ,$$

где верхний индекс ( $^o$ ) для усредненных переменных  $K_1^o, K_2^o$  для простоты опущен.

Из дифференциального уравнения в частных производных (6.40) находится положительно определенная функция  $v^o(K_1, K_2)$ , которая определяет управление (6.37)  $u^o$ . Подставляя найденное приближенно оптимальное управление (6.37) в систему (6.35) и усредняя по фазам  $\varphi_1, \varphi_2$ , получим

$$\frac{dK_1}{dt} = -\varepsilon \left[ \langle (\bar{D}_4 Q_1 - \bar{D}_2 Q_2) \sin \varphi_1 \rangle - \frac{\varepsilon}{4c} \frac{\partial v^o}{\partial K_1} (\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2)^2 \right],$$



$$\frac{dK_2}{dt} = \varepsilon \left\langle (\bar{D}_3 Q_1 - \bar{D}_1 Q_2) \sin \varphi_2 \right\rangle - \frac{\varepsilon}{4c} \frac{\partial v^o}{\partial K_2} (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2)^2 . \quad (6.41)$$

Так как функция  $v^o(K_1, K_2)$  находится в классе положительно определенных функций, то в соответствии с рассмотренным выше методом Беллмана-Ляпунова решение  $K_1 = K_2 = 0$  усредненной системы (6.41) будет асимптотически устойчивым.

Пример. Найдем приближенно оптимальное управление для системы (6.32-6.33) в частном случае, когда  $Q_1 = Q_2 = 0$  и  $b_{12} = 0$ . Будем искать функцию Ляпунова в виде

$$v^o(K_1, K_2) = A_{11} K_1^2 + A_{22} K_2^2 + 2A_{12} K_1 K_2 . \quad (6.42)$$

Подставим функцию (6.42) в уравнение (6.40) и приравняем к нулю коэффициенты при  $K_1^2$ ,  $K_2^2$  и  $K_1 K_2$ , тогда

$$\begin{aligned} b_{11} - \frac{1}{2c} (\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2)^2 A_{11}^2 - \frac{1}{2c} (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2)^2 A_{12}^2 &= 0 , \\ b_{22} - \frac{1}{2c} (\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2)^2 A_{12}^2 - \frac{1}{2c} (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2)^2 A_{22}^2 &= 0 , \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$[(\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2)^2 A_{11} + (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2)^2 A_{22}] A_{12} = 0 .$$

Откуда получаем

$$A_{12} = 0 , \quad A_{11} = \frac{\sqrt{2cb_{11}}}{|\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2|} , \quad A_{22} = \frac{\sqrt{2cb_{22}}}{|\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2|} \quad (6.44)$$

Нетрудно проверить, что для этих значений условия Сильвестра  $A_{11} > 0$ ,  $A_{11} A_{22} - A_{12}^2 > 0$  выполняются, что обеспечивает асимптотическую устойчивость усредненной системе. Подставив выражения (6.44) в систему (6.41), получим

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{2b_{11}}{c}} \frac{(\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2)^2}{|\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2|} K_1, \\ \frac{dK_2}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{2b_{22}}{c}} \frac{(\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2)^2}{|\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2|} K_2. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Систему (6.45) можно представить в виде

$$\frac{dK_1}{dt} = \lambda_1 K_1, \quad \frac{dK_2}{dt} = \lambda_2 K_2.$$

Поэтому система (6.45) есть линейная система, записанная в главных координатах, и ее собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2$  вещественны и отрицательны. Следовательно, особая точка  $K_1 = K_2 = 0$  на фазовой плоскости  $(K_1, K_2)$  представляет собой устойчивый узел.

Замечание. Если решать задачу оптимального управления для системы с двумя степенями свободы (6.32-6.33) классическим методом без использования принципа усреднения, то это может привести с серьезным трудностям. Дело в том, что порядок системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_{ij}$  функции Ляпунова быстро увеличивается с возрастанием порядка системы. Если  $n$  это порядок системы, то количество алгебраических уравнений, которые необходимо решать совместно равно  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Система (6.32-6.33) имеет четвертый порядок ( $n = 4$ ), поэтому порядок системы алгебраических уравнений равен десяти. Решить совместно десять алгебраических уравнений и найти решение удовлетворяющее условию Сильвестра чрезвычайно трудно даже с использованием современных численных методов.

### 6.3. Влияние нелинейных возмущений на решение задачи оптимального управления

В разделах 6.1-6.2 было рассмотрено построение приближенно оптимального управления для линейных колебательных систем. Проведем анализ влияния нелинейных возмущений, не учитываемых ранее, на решение задачи оптимального управления. При использовании нелинейных моделей возможно два подхода: во-первых, можно учесть нелинейные слагаемые при построении оптимального управления; во-вторых, определять оптимальное управление только с учетом линейных слагаемых, но в этом случае необходимо указать ту область фазовой плоскости, где задача определения оптимального управления будет иметь решение. Первый подход существенно усложняет решение задачи оптимального управления, так как приходится решать в общем случае нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных (например, вида (6.38)) относительно функции Ляпунова. Кроме того, первый способ можно применить если известны нелинейные слагаемые, входящие в модель, что в прикладных задачах не всегда имеет место. Поэтому здесь рассмотрим лишь анализ возможного влияния нелинейных слагаемых на решение задачи оптимального управления, определенного исходя из линейной модели.

Рассмотрим сначала систему с одной степенью свободы (6.1). Нелинейную возмущающую функцию  $\varepsilon f(x, \frac{dx}{dt})$  зададим в соответствии с классическим уравнением Ван-дер-Поля (5.43)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon(v_0 + v_2 x^2) \frac{dx}{dt} + \varepsilon mu \quad . \quad (6.46)$$

Получение усредненного уравнения Ван-дер-Поля при  $u = 0$  проведено разделе 5.3. Оно имеет вид

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon K (v_0 + \frac{1}{4} v_2 K^2). \quad (6.47)$$

Рассмотрим случай, когда параметр  $v_0 > 0$ . Это приводит к неустойчивости положения равновесия  $K = 0$ . Возможные варианты поведения системы (6.47) определим, построив зависимости производной  $\frac{dK}{dt}$  от амплитуды  $K$ . Так как система (6.47) автономна (правые части не зависят от времени  $t$ ), ее поведение полностью определяется знаком производной  $\frac{dK}{dt}$ . На рис.6.2 и рис.6.3 соответственно приведены зависимости  $\frac{dK}{dt}(K)$  при  $v_2 > 0$  и при  $v_2 < 0$ . Рис.6.2 иллюстрирует поведение системы (6.47), когда всегда  $\frac{dK}{dt} > 0$ , и фазовый портрет системы аналогичен фазовому портрету неустойчивого фокуса (рис.4.1). Рис.6.3 иллюстрирует поведение системы, когда производная  $\frac{dK}{dt}$  меняет знак при

$$K_* = 2 \sqrt{-\frac{v_0}{v_2}} = 1 \quad (v_0 = 1, v_2 = -4) \text{ и при этом значении амплитуды система}$$

имеет устойчивый предельный цикл.

Определим приближенно оптимальное управление системой (6.46) с учетом линейного слагаемого пропорционального параметру  $v_0$ . Аналогичная задача была решена в разделе 6.1, где управление определялось функцией (6.18) с учетом (6.17) (необходимо только положить  $\mu = v_0$ ). Тогда, подставив управление (6.18) в уравнение (6.46) и проводя усреднение по фазе  $\varphi$ , получим

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon K (v_0^* + \frac{1}{4} v_2 K^2) \quad , \quad (6.48)$$

где 
$$v_0^* = -\sqrt{v_0^2 + \frac{2bm^2}{c\omega^2}}.$$

Следовательно, структура усредненной системы с управлением (6.48) осталась такой же, как и без управления, только изменился знак параметра  $v_0^* < 0$ , что вне зависимости от первоначального знака параметра  $v_0$  приводит к асимптотической устойчивости решения  $K = 0$  усредненной системы (6.48). При этом изменяется вид зависимости  $\frac{dK}{dt}(K)$  для системы с управлением. Так, система, поведение которой соответствует зависимости, изображенной на рис.6.2, переходит в систему, где имеется неустойчивый предельный цикл (рис.6.4). А система, где имелся устойчивый предельный цикл (6.3), переходит в систему (рис. 6.5), фазовый портрет которой аналогичен устойчивому фокусу. В последнем случае область решения задачи стабилизации ограничена начальными значениями амплитуды из интервала  $0 < K < K_* = 2\sqrt{-\frac{v_0^*}{v_2}}$ . Графики, приведенные на рис. 6.2 и рис.6.4,

построены при следующих исходных данных:  $v_0 = v_2 = \omega = m = b = c = 1$ ,  $\varepsilon = 0.3$ . На графиках, приведенных на рис.6.3 и рис.6.5, изменено значение параметра  $v_2 = -4$ .

Рассмотрим теперь систему с двумя степенями свободы (6.32-6.33). Возможное влияние нелинейных слагаемых на решение задачи оптимизации проанализируем на примере нелинейного возмущения вида

$$Q_1 = (v_0 + v_2 x_1^2) \frac{dx_1}{dt}, \quad Q_2 = 0,$$

где  $v_0, v_2$  - заданные параметры.

Для анализа движений в системе (6.32-6.33) воспользуемся методом усреднения, изложенным в разделе 5.7. Сначала рассмотрим систему (6.32-6.33) без управления ( $u = 0$ ). Делая в системе (6.32-6.33) замену переменных (5.61) и повторяя преобразования раздела 5.7, получим усредненную для амплитуд колебаний  $K_1, K_2$  (5.66) в виде

$$\frac{dK_1}{dt} = -\varepsilon \langle \bar{D}_4 Q_1 \sin \varphi_1 \rangle, \quad \frac{dK_2}{dt} = \varepsilon \langle \bar{D}_3 Q_1 \sin \varphi_2 \rangle. \quad (6.49)$$

После подстановки замены переменных (5.61) в функцию  $Q_1$  и усреднения по фазам  $\varphi_1, \varphi_2$ , получим

$$\frac{dK_1}{dt} = -\varepsilon \bar{D}_4 \omega_1 K_1 \left( \nu_0 + \frac{\nu_2 K_1^2}{4} + \frac{\nu_2 K_2^2}{2} \right), \quad (6.50)$$

$$\frac{dK_2}{dt} = \varepsilon \bar{D}_2 \omega_2 K_2 \left( \nu_0 + \frac{\nu_2 K_2^2}{4} + \frac{\nu_2 K_1^2}{2} \right). \quad (6.51)$$

Система (6.50-6.51) при разных знаках параметров  $\nu_0, \nu_2$  имеет четыре особые точки, определяемые из условий  $\frac{dK_1}{dt} = \frac{dK_2}{dt} = 0$  :

- 1)  $K_{1*} = 0, K_{2*} = 0$ ; 2)  $K_{1*} = 0, K_{2*} = 2\sqrt{-\nu_0 / \nu_2}$ ;
- 3)  $K_{1*} = 2\sqrt{-\nu_0 / \nu_2}, K_{2*} = 0$ ; 4)  $K_{1*} = K_{2*} = \frac{2}{3}\sqrt{-3\nu_0 / \nu_2}$ .

Тип этих особых точек устанавливается посредством анализа собственных значений линеаризованной системы (5.68) путем решения характеристического уравнения (5.69). Для построения фазового портрета системы (6.50) на плоскости  $(K_1, K_2)$  зададим конкретные значения параметрам  $\nu_0, \nu_2$ :  $\nu_0 = 0.1$  и  $\nu_0 = -0.2$ . Вычисляя координаты особых точек, получаем

$$1) K_{1*} = 0, K_{2*} = 0; \quad 2) K_{1*} = 0, K_{2*} = \sqrt{2};$$

$$3) K_{1*} = \sqrt{2}, K_{2*} = 0; \quad 4) K_{1*} = K_{2*} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Если  $\bar{D}_4 < 0$  и  $\bar{D}_2 > 0$ , то вычисляя собственные значения из решения характеристического уравнения (5.69) нетрудно установить, что первая

особая точка является неустойчивым узлом ( $\lambda_1 > 0$  и  $\lambda_2 > 0$ ), вторая и третья точки – устойчивыми узлами ( $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_2 < 0$ ), а четвертая точка – седлом ( $\lambda_1 > 0$  и  $\lambda_2 < 0$ ). Тогда, в силу теоремы о существовании предельных циклов (раздел 5.5), в рассматриваемой системе возможны устойчивые автоколебания с амплитудами, близкими к значениям  $K_{1*} = 0$ ,  $K_{2*} = \sqrt{2}$  (вторая точка) и к значениям  $K_{1*} = \sqrt{2}$ ,  $K_{2*} = 0$  (третья точка). В четвертой точке  $K_{1*} = K_{2*} = \frac{\sqrt{6}}{3}$  также существует предельный цикл, но он неустойчив.

Фазовый портрет усредненной системы показан на рис.6.6 и построен непосредственным численным интегрированием системы (6.50-6.51) с различными начальными условиями по амплитудам  $K_1, K_2$ .

Если параметры  $\nu_0, \nu_2$  имеют одинаковые знаки, то в системе имеется только одна особая точка  $K_{1*} = 0$ ,  $K_{2*} = 0$ , которая является узлом. При  $\nu_0 < 0$  и  $\nu_2 < 0$  узел будет устойчивым, а при  $\nu_0 > 0$  и  $\nu_2 > 0$  – неустойчивым. Фазовый портрет системы в этом случае изображен на рис.6.7 ( $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ ).

Рассмотрим теперь систему (6.32-6.33) с управлением. При определении оптимального управления в функции  $Q_1$  учтем только линейное слагаемое пропорциональное параметру  $\nu_0$ . В этом случае оптимальное управление определится из выражения (6.37), а функция Ляпунова – из уравнения Беллмана (6.40). Подставляя функцию  $Q_1$  в уравнение (6.40), усредняя по фазам  $\varphi_1, \varphi_2$  и приравнивая к нулю коэффициенты при  $K_1^2, K_2^2$  и  $K_1 K_2$ , получим

$$b_{11} + \bar{D}_4 \nu_0 \omega_1 A_{11} - \frac{1}{2c} (\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2)^2 A_{11}^2 - \frac{1}{2c} (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2)^2 A_{12}^2 = 0 ,$$

$$b_{22} - \bar{D}_3 \nu_o \omega_2 A_{22} - \frac{1}{2c} (\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2)^2 A_{12}^2 - \frac{1}{2c} (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2)^2 A_{22}^2 = 0, \quad (6.52)$$

$$\left[ \frac{1}{c} (\bar{D}_4 m_1 - \bar{D}_2 m_2)^2 A_{11} + \frac{1}{c} (\bar{D}_3 m_1 - \bar{D}_1 m_2)^2 A_{22} - \bar{D}_4 \nu_o \omega_1 + \bar{D}_3 \nu_o \omega_2 \right] A_{12} = 0.$$

Откуда получаем  $A_{12} = 0$ , а коэффициенты  $A_{11}, A_{22}$  определяются из первых двух уравнений системы (6.52) как решения квадратных алгебраических уравнений. Причем для выполнения условий Сильвестра необходимо выбрать положительные корни  $A_{11} > 0, A_{22} > 0$ . Усредненная система с управлением (6.41) будет иметь вид

$$\frac{dK_1}{dt} = -\varepsilon \bar{D}_4 \omega_1 K_1 \nu_o^* - \varepsilon \bar{D}_4 \omega_1 K_1 \left( \frac{\nu_2 K_1^2}{4} + \frac{\nu_2 K_2^2}{2} \right), \quad (6.53)$$

$$\frac{dK_2}{dt} = \varepsilon \bar{D}_2 \omega_2 K_2 \nu_o^* + \varepsilon \bar{D}_2 \omega_2 K_2 \left( \frac{\nu_2 K_2^2}{4} + \frac{\nu_2 K_1^2}{2} \right). \quad (6.54)$$

где  $\nu_o^*$  - пересчитанный с учетом управления коэффициент  $\nu_o$ .

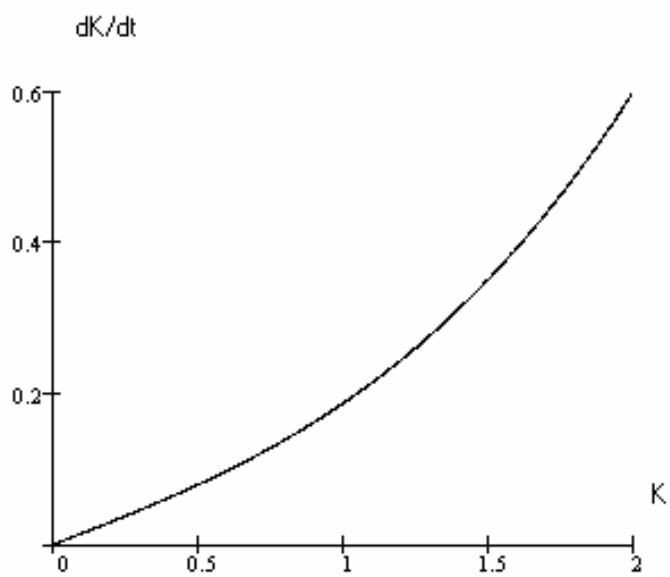
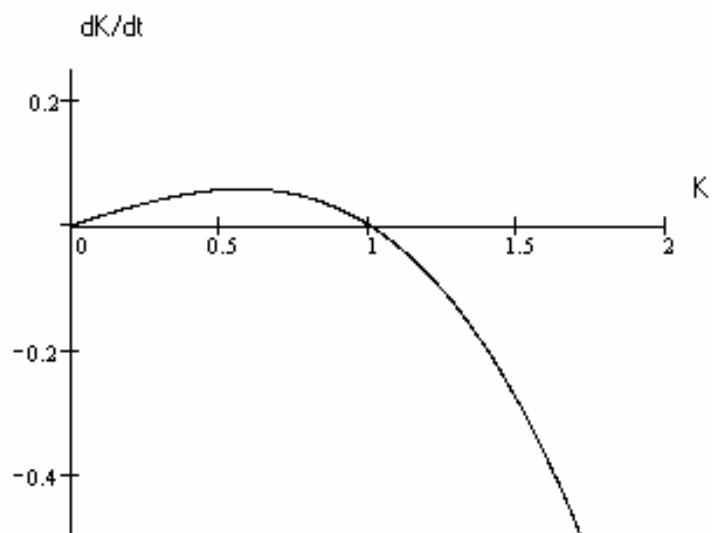
Особенностью усредненной системы (6.53-6.54) с управлением является то, что собственные значения линеаризованной относительно начала координат  $K_1 = K_2 = 0$  системы отрицательны  $\lambda_1 = -\varepsilon \bar{D}_4 \omega_1 \nu_o^* < 0$ ,  $\lambda_2 = \varepsilon \bar{D}_2 \omega_2 \nu_o^* < 0$ , что обеспечивается выполнением условий Сильвестра для функции Ляпунова  $\nu^o(K_1, K_2)$  (положительная определенность этой функции). Поэтому для рассмотренного примера коэффициент  $\nu_o^* < 0$ . Здесь следует также отметить, что нелинейные слагаемые систем (6.50-6.51) и (6.53-6.54) одинаковы, так как управление выбиралось только с учетом линейных слагаемых исходной системы.

Нетрудно заметить, что структура усредненных систем (6.50-6.51) и (6.53-6.54) одинакова, поэтому возможные фазовые портреты системы (6.53-6.54) те же самые, что и системы (6.50-6.51) (рис.6.6 и рис.6.7). Разница



состоит лишь в том, что особая точка  $K_1 = K_2 = 0$  системы (6.53-6.54) всегда асимптотически устойчива ( $\lambda_{1,2} < 0$ ).

После того, как стали известны структура и возможные фазовые портреты систем без управления (6.50-6.51) и с управлением (6.53-6.54), можно установить возможные изменения фазового портрета системы после введения оптимального управления. Для рассмотренного примера могут иметь место следующие случаи: 1) система, первоначально имеющая четыре особые точки (рис.6.6), после введения управления превращается в систему, имеющую одну устойчивую точку (рис.6.7) (предельные циклы исчезают); 2) система, первоначально имеющая одну неустойчивую особую точку (рис.6.7), превращается в систему имеющую четыре особые точки (рис.6.6). Причем в последнем случае узлы, расположенные на осях координат являются неустойчивыми, а четвертая особая точка остается седлом, то есть в системе имеются только неустойчивые предельные циклы. Второй случай характерен еще и тем, что влияние нелинейных слагаемых приводит к тому, что область решения задачи стабилизации является ограниченной и определяется положением сепаратрис седла (рис.6.6).

Рис. 6.2 ( $u = 0, v_2 > 0$ )Рис. 6.3 ( $u = 0, v_2 < 0$ )

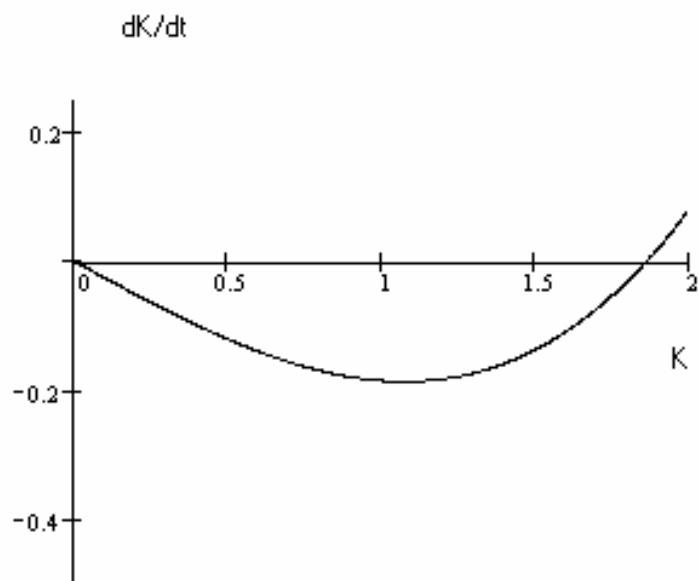


Рис. 6.4 ( $u = u^0, v_2 > 0$ )

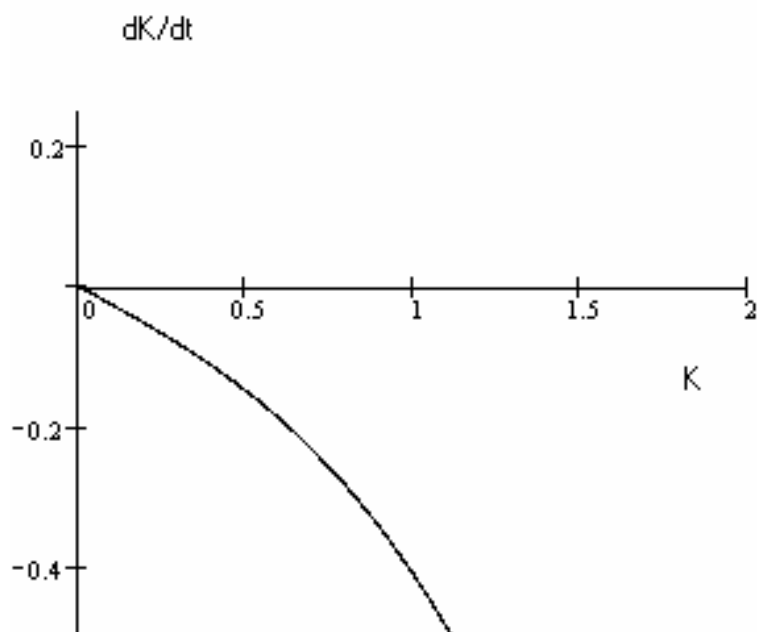


Рис. 6.5 ( $u = u^0, v_2 < 0$ )

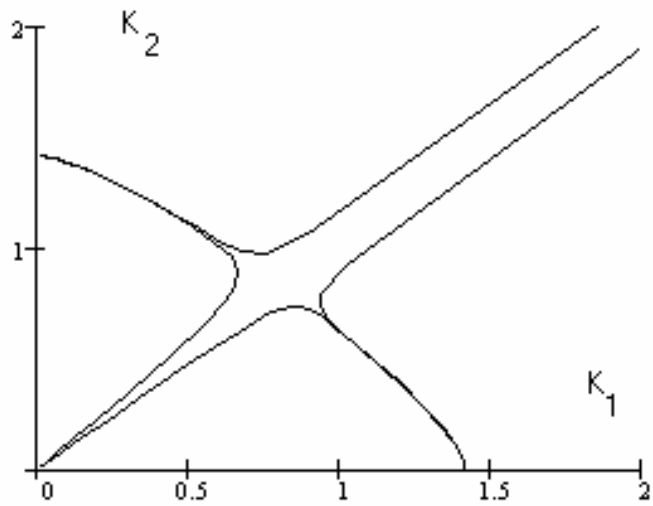


Рис. 6.6

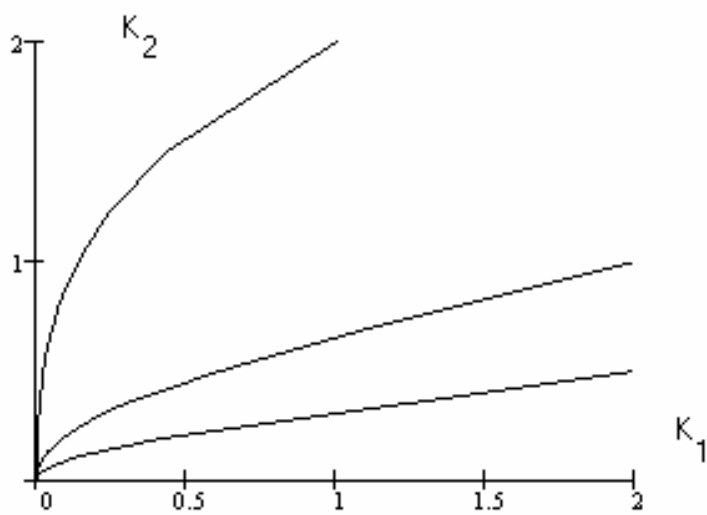


Рис. 6.7

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тихонов А.Н., Васильева А.В., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1986. 232 с.
2. Математическая теория оптимальных процессов // Понтрягин Л.С. и др. М.: Наука, 1976, 392 с.
3. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969, 360 с.
4. Демидович Б.П. Лекции по теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 472 с.
5. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 2. М.: Наука, 1972, 332 с.
6. Гроп Д. Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979, 304 с.
7. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
8. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984, 320 с.
9. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986, 288 с.
10. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на фазовой плоскости. М.: Наука, 1976, 496 с.
11. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981, 568 с.
12. Заболотнов Ю.М. Теория колебаний. Самара: СГАУ, 1999, 168 с.
13. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1980, 400 с.
14. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 504 с.

15. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980, 384 с.
16. Основы теории колебаний // Мигулин В.В. и др. М.: Наука, 1978, 392 с.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.
18. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы. М.: Машиностроение, 1977, 464 с.
19. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.3. М.: АН СССР, 1985. с.5-304.
20. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
21. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
22. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

## Подобные преобразования линейных динамических систем

Рассмотрим линейную динамическую систему вида

$$\frac{dy}{dt} = By \quad , \quad (\text{П1.1})$$

где  $y$  -  $n$ -мерный вектор состояния системы,  $B$  - заданная квадратная матрица.

В разнообразных задачах исследования движения линейных систем часто бывает удобно воспользоваться линейным преобразованием

$$y = P y_* \quad , \quad (\text{П1.2})$$

где  $P$  - квадратная невырожденная матрица линейного преобразования.

Определение П1.1. Матрица  $P$  называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля:  $\det(P) \neq 0$ .

Подставляя замену переменных (П1.2) в систему (П1.1) нетрудно получить систему линейных динамических уравнений для новых переменных  $y_*$

$$\frac{dy_*}{dt} = Ay_* \quad , \quad (\text{П1.3})$$

где

$$A = P^{-1}BP \quad . \quad (\text{П1.4})$$

Определение П1.2. Преобразование  $A = P^{-1}BP$ , где  $P$  - невырожденная матрица, называется преобразованием подобия для матрицы  $B$ .

Преобразования подобия обладают рядом важных свойств [8].

Утверждение 1. Преобразования подобия не изменяют собственных значений матриц.

Доказательство. Как известно [8], собственные значения матрицы определяются из решения алгебраического уравнения

$$\det(B - \lambda E) = 0 \quad , \quad (\text{П1.5})$$

где  $E$  - единичная матрица,  $\lambda$  - скалярный параметр. Уравнение (П1.4) имеет ровно  $n$  корней  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), которые называются собственными значениями матрицы  $B$ .

Найдем собственные значения матрицы  $A$ . Тогда

$$\det(A - \lambda E) = \det(P^{-1}BP - \lambda E) = 0. \quad (\text{П1.6})$$

Используя основные свойства определителя от суммы и произведения матриц [8], найдем

$$\det(P^{-1}BP - \lambda E) = \det(P^{-1}BP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}) \det(B - \lambda E) \det(P) = 0.$$

Так как для невырожденной матрицы  $\det(P) \neq 0$  и  $\det(P^{-1}) \neq 0$ , то корни уравнений (П1.5) и (П1.6) тождественно совпадают, а, следовательно, совпадают собственные значения матриц  $A$  и  $B$ , что и требовалось доказать.

Как известно [8], каждому собственному значению  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) матрицы  $B$  соответствует  $n$ -мерный собственный вектор  $V^{(i)}$ , который вычисляется исходя из решения однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$(B - \lambda_i E)V^{(i)} = 0, \quad (\text{П1.7})$$

где  $i=1, \dots, n$ .

Утверждение 2. При проведении преобразования подобия (П1.4) собственные вектора матрицы изменяются, причем собственные вектора матриц  $A$  и  $B$  связаны соотношением

$$V^{(i)} = PC^{(i)}, \quad (\text{П1.8})$$

где  $C^{(i)}$  собственные вектора матрицы  $A$ , определяемые из соотношения

$$(A - \lambda_i E)C^{(i)} = 0. \quad (\text{П1.9})$$

Таким образом, старые  $V^{(i)}$  и новые  $C^{(i)}$  ( $i=1, \dots, n$ ) собственные вектора связаны также, как старые  $y$  и новые  $y_*$  переменные состояния линейной динамической системы (П1.2).



Доказательство. Перепишем систему (П1.7) в виде  $BV^{(i)} = \lambda_i V^{(i)}$ . Так как преобразование (П1.4) можно записать в форме  $B = PAP^{-1}$ , то отсюда получим  $PAP^{-1}V^{(i)} = \lambda_i V^{(i)}$  или, умножая слева, на  $P^{-1}$  найдем  $AP^{-1}V^{(i)} = \lambda_i P^{-1}V^{(i)}$ . Сравнивая эту систему с системой (П1.9), найдем  $C^{(i)} = P^{-1}V^{(i)}$ , что тождественно (П1.8). Это и требовалось доказать.

Замечание. Собственный вектор матрицы всегда определяется с точностью до множителя, так как он находится из решения линейной однородной системы (П1.7). Поэтому всегда одну из компонент вектора  $V^{(i)}$  можно задать произвольно (например, равной единицы), а остальные компоненты определить из системы (П1.7).

Существенным при подобных преобразованиях является вопрос, к насколько простому виду может быть приведена матрица  $B$  с помощью преобразования подобия. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Матрица  $B$  подобна диагональной матрицы в том и только в том случае, если она имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов.

Доказательство. Пусть  $V^{(1)}, \dots, V^{(n)}$   $n$ -мерные собственные вектора матрицы  $B$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Составим матрицу  $V$  из собственных векторов  $V^{(1)}, \dots, V^{(n)}$ , как из столбцов  $V = \begin{bmatrix} V^{(i)} \end{bmatrix}$ . Так как столбцы матрицы линейно независимы, то  $\det(V) \neq 0$ . Для каждого собственного вектора  $V^{(i)}$  справедливо соотношение  $BV^{(i)} = \lambda_i V^{(i)}$ , где  $i = 1, \dots, n$ . Запишем эти соотношения в виде одного матричного равенства

$$BV = DV \quad , \quad (\text{П1.10})$$

где  $D$  - диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $B$ . Умножим левую и правую часть равенства (П1.10) слева на  $V^{-1}$ , тогда  $V^{-1}BV = D$ . Таким образом, матрица  $B$  с помощью подобного преобразования приведена к диагональному виду, что и требовалось сделать.

Матрицы, удовлетворяющие утверждению 3, называются матрицами простой структуры [8].

Замечание. Если все собственные значения матрицы различны, то она подобна диагональной матрице, то является матрицей простой структуры [8].

Утверждение 4. Если  $B$  - вещественная симметричная матрица, то есть  $B = B^*$ , где  $B^*$  - транспонированная матрица  $B$ , то она подобна диагональной матрице, причем матрица преобразования является ортогональной  $P^{-1} = P^*$  [8].

Если матрица не обладает  $n$  линейно независимыми векторами, то она обязательно имеет кратные собственные значения [8]. В этом случае матрица с помощью подобного преобразования может быть приведена к форме Жордана  $P^{-1}BP = J$ , где

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \delta_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_{n-1} & \delta_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (\text{П1.11})$$

где компоненты  $\delta_i = 0$ , если  $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ , и  $\delta_i = 1$ , если  $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ .

В жордановой форме (П1.11) обычно кратные собственные значения располагаются рядом. Поэтому в матрице  $J$  имеются так называемые клетки Жордана. Так, например, двум кратным собственным значениям  $\lambda_1 = \lambda_2$

соответствует клетка Жордана вида  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ , трем кратным собственным

значениям  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  - клетка Жордана вида

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

и т.д.

Утверждение 5. Любая квадратная матрица ортогонально подобна верхней треугольной матрице [8], то есть  $P^T B P = G$ . Здесь

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & g_{nn} \end{bmatrix},$$

причем на главной диагонали треугольной матрицы стоят собственные значения матрицы  $B$ :  $g_{ii} = \lambda_i$ .

Утверждение 5 является теоретической основой для разнообразных численных методов поиска собственных значений матриц [9].

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Качественное исследование линейных динамических систем на фазовой плоскости

Очень часто для наглядности представления решений динамических систем второго порядка рассматривают их поведение на фазовой плоскости [10],[11],[12].

Рассмотрим линейную динамическую систему второго порядка вида

$$\frac{dy_1}{dt} = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = b_{21}y_1 + b_{22}y_2, \quad (\text{П2.1})$$

где  $y_1, y_2$  - переменные состояния системы,  $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$  - заданные постоянные параметры системы. Состояние системы (П2.1) на фазовой плоскости  $(y_1, y_2)$  в любой момент времени определяется парой соответствующих значений переменных  $y_1$  и  $y_2$ . В процессе движения изображающая (фазовая) точка перемещается по фазовой плоскости, описывая фазовую траекторию. Совокупность фазовых траекторий представляет все возможные движения рассматриваемой системы и называется фазовым портретом системы.

Уравнения движения системы на фазовой плоскости можно получить, если известно решение  $y_1(t), y_2(t)$  системы (П2.1), которое для линейных

систем с постоянными параметрами может быть всегда найдено [1]. Тогда задаваясь различными начальными условиями для переменных  $y_1(t_0), y_2(t_0)$  и строя фазовые траектории, можно получить представление о поведении системы на фазовой плоскости. То же самое можно сделать и с помощью численного интегрирования системы (П2.1). Однако такой подход построения фазовых портретов является нерациональным.

Другой подход использует свойство автономности системы (П2.1) (для автономной системы правые части не зависят от времени  $t$ ). В этом случае время  $t$  можно исключить из рассмотрения, поделив второе уравнение системы (П2.1) на первое. Тогда

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{b_{21}y_1 + b_{22}y_2}{b_{11}y_1 + b_{12}y_2} . \quad (\text{П2.2})$$

Если уравнение удастся проинтегрировать аналитически, то в этом случае его решение  $y_2(y_1)$  представляет собой уравнение фазовой траектории на фазовой плоскости. В любом случае уравнение (П2.2) позволяет определить направление касательной к фазовой траектории в любой точке фазовой плоскости, так как  $dy_2/dy_1$  представляет собой тангенс угла, определяющего направление касательной относительно оси  $y_1$ . В этом случае в каждой точке фазовой плоскости можно изобразить направление касательной и на ней стрелкой направление движения точки. Такой способ построения фазовых портретов как для линейных, так и для нелинейных динамических систем используется в некоторых современных математических пакетах, например, в пакете Maple.

Существуют точки на фазовой плоскости, в которых направление касательной к фазовой траектории не определено. Такие точки фазовой плоскости называются особыми точками динамической системы второго порядка. Для линейной динамической системы (П2.1) существует одна особая точка, которая совпадает с началом координат  $y_1 = y_2 = 0$ . Можно

получить представление о фазовом портрете линейной системы (П2.1) не находя ее решения и не анализируя уравнение касательных (П2.2), определяя лишь тип особой точки системы. Французский математик Пуанкаре А., анализируя решения системы (П2.1), показал, что линейная система второго порядка с постоянными параметрами может иметь в зависимости от собственных значений матрицы  $B$  только следующие основные типы особых точек [10]

1. Если собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  матрицы  $B$  комплексные с положительными действительными частями, то особая точка называется неустойчивым фокусом и фазовая траектория представляет собой раскручивающуюся спираль (рис.4.1).

2. Если собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  матрицы  $B$  комплексные с отрицательными действительными частями, особая точка называется устойчивым фокусом и фазовая траектория представляет собой скручивающуюся спираль (рис. 4.2).

3. Если собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и положительны, то особая точка называется неустойчивым узлом (рис. П 1). Фазовая траектория системы в этом случае аperiodически удаляется от начала координат.

4. Если собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и отрицательны, то особая точка называется устойчивым узлом. Она имеет такой же вид, что и неустойчивый узел (рис. П 1), только фазовая траектория системы в этом случае аperiodически приближается к началу координат.

5. Если собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и разных знаков, то особая точка называется седлом (рис.4). В нее входят и из нее выходят две предельные траектории (сепаратрисы), остальные траектории удаляются от особой точки.

Собственные значения для линейной системы второго порядка (П2.1) определяются из условия

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{П2.3})$$

которое после раскрытия определителя сводится к решению квадратного уравнения.

Если определенные собственные значения системы соответствуют особым точкам типа «фокус», то в этом случае представление о фазовом портрете можно получить, вычислив лишь одну фазовую траекторию системы, например, с помощью некоторого численного метода (рис.4.1 и рис.4.2). Если собственные значения соответствуют особым точкам типа «седло» или «узел», то в этом случае необходимо определить положения некоторых предельных траекторий. Для седла это положение сепаратрис. Для узла (устойчивого или неустойчивого) это положение двух предельных прямых, причем одна из них является касательной ко всем фазовым траекториям, кроме одной, а другая представляет собой эту одну изолированную траекторию. Определим положение этих предельных прямых для особой точки типа «узел» ( те же самые формулы справедливы и для сепаратрис седла [11]).

Рассмотрим случай различных собственных значений  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  линейной системы. Тогда с помощью линейного преобразования переменных матрица  $B$  и, следовательно, и система (П2.1) может приведена к диагональной форме (см. Приложение 1)

$$\frac{dy_{1*}}{dt} = \lambda_1 y_{1*}, \quad \frac{dy_{2*}}{dt} = \lambda_2 y_{2*}, \quad (\text{П2.4})$$

где  $y_{1*}, y_{2*}$  - главные координаты.

Поделим второе уравнение системы (П2.4) на первое, исключив время, тогда

$$\frac{dy_{2*}}{dy_{1*}} = \frac{y_{2*}}{y_{1*}} a, \quad (\text{П2.5})$$

где  $a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ .

Уравнение нетрудно проинтегрировать аналитически

$$y_{2*} = C y_{1*}^a, \quad (\text{П2.6})$$

где  $C$  - произвольная постоянная. Так как для узла собственные значения одного знака, то фазовые траектории представляют собой кривые параболического типа. Причем при  $a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$  все фазовые траектории (кроме одной  $y_{1*} = 0$ ) на плоскости главных координат  $(y_{1*}, y_{2*})$  касаются оси  $y_{1*}$ . Если  $a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$ , то фазовые траектории (кроме одной  $y_{2*} = 0$ ) касаются оси  $y_{2*}$ . Перейдем теперь обратно на фазовую плоскость  $(y_1, y_2)$ . Как известно (см. Приложение 1), связь между переменными  $y_1, y_2$  и переменными  $y_{1*}, y_{2*}$  имеет вид  $y = V y_*$ , где матрица  $V$  составлена из собственных векторов матрицы  $B$ . Обратное преобразование координат имеет форму  $y_* = V^{-1} y$ . Так как на фазовой плоскости  $(y_{1*}, y_{2*})$  предельным прямым соответствуют координатные оси  $y_{1*} = 0, y_{2*} = 0$ , то на фазовой плоскости  $(y_1, y_2)$  этим прямым будут соответствовать прямые

$$y_{1*} = V_{11}^{-1} y_1 + V_{12}^{-1} y_2 = 0, \quad y_{2*} = V_{21}^{-1} y_1 + V_{22}^{-1} y_2 = 0,$$

где  $V_{11}^{-1}, V_{12}^{-1}, V_{21}^{-1}, V_{22}^{-1}$  - компоненты обратной матрицы  $V^{-1}$ . В этом случае уравнения предельных прямых будут иметь вид

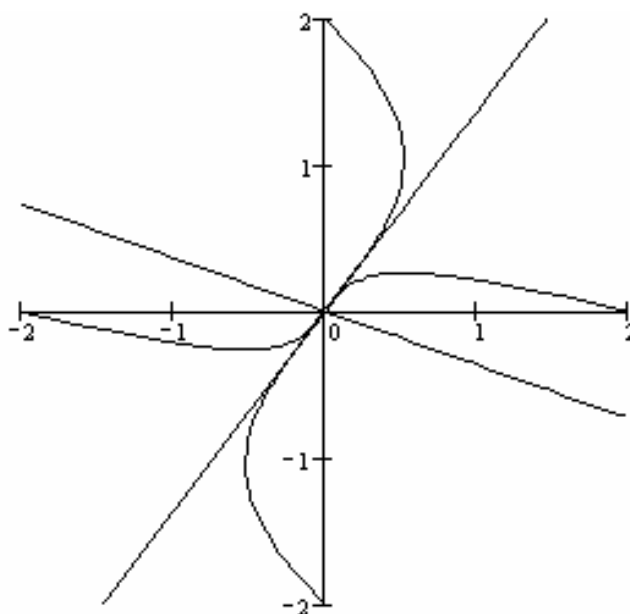
$$y_2 = \chi_1 y_1, \quad y_2 = \chi_2 y_1, \quad (\text{П2.7})$$

где  $\chi_1 = -\frac{V_{11}^{-1}}{V_{12}^{-1}}$ ,  $\chi_2 = -\frac{V_{21}^{-1}}{V_{22}^{-1}}$  - угловые коэффициенты.

Аналогично может быть рассмотрено определение сепаратрис для особой точки типа «седла». Повторяя приведенные выше преобразования нетрудно получить уравнение для фазовых траекторий, которое будет иметь тот же вид (П2.6), что и для узла. Только в этом случае  $a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ , так как собственные числа разных знаков. Поэтому уравнение (П2.6) определяет семейство кривых гиперболического типа, имеющих обе оси координат асимптотами. Движение по одной сепаратрисе будет устойчивым. Этой сепаратрисе соответствует уравнение в системе (П2.4) с отрицательным собственным числом. Другая сепаратриса будет неустойчивой. Уравнения сепаратрис будет определяться теми же соотношениями (П2.7).

На рис.П1 и рис.П4 приводятся примеры построения фазовых портретов для особых точек типа «узел» и «седло».

Вид особой точки типа «узел»»





## Рис. П 1

Большое значение для качественной теории динамических систем имеет понятие «грубости» системы. Свойство «грубости» системы можно трактовать как устойчивость вида фазового портрета системы по отношению к малым изменениям правых частей дифференциальных уравнений (П2.1). По отношению к особым точкам оно заключается в том, что при малых изменениях системы (П2.1) тип особых точек не изменяется. Строгое определение «грубости» системы дали А.А.Андронов и Л.С.Понтрягин [11]. Перечисленные выше пять основных типов особых точек являются «грубыми». Наряду с «грубыми» особыми точками существуют также «негрубые» особые точки, которые при малом изменении системы переходят в основные. Так, например, если собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются чисто мнимыми, то мы имеем дело с особой точкой, являющейся переходной между устойчивым и неустойчивым фокусами. Такая точка получила название центра (рис.П5). Ясно, что малом при изменении правых частей или параметров системы центр переходит или в устойчивый, или в неустойчивый фокус. Поэтому «негрубые» особые точки представляют собой предельные случаи фазовых портретов системы, которые практически трудно реализовать в реальных динамических системах, так как их параметры обычно известны с некоторой погрешностью.

Вид особой точки типа «седло»»

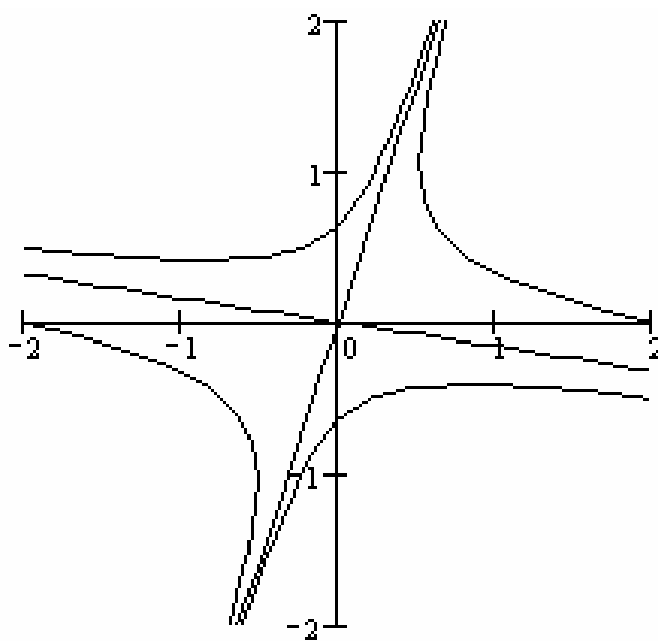


Рис. П 2

## Особая точка типа «центр»

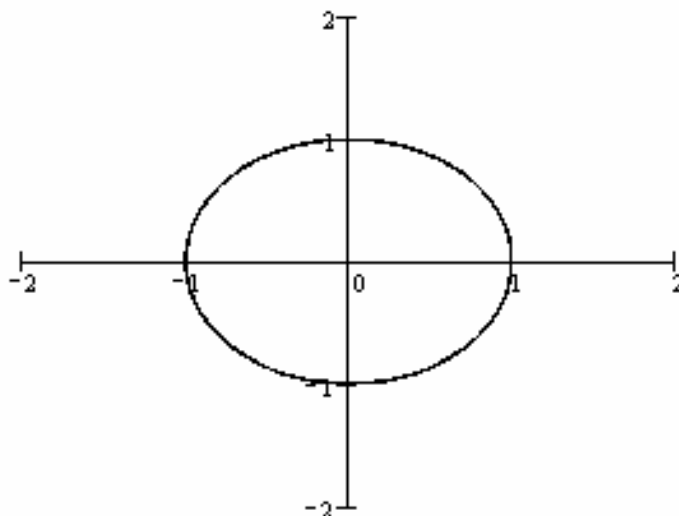


Рис. П 3

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

## Дифференцирование функций с векторным аргументом

Рассмотрим скалярную функцию с векторным аргументом вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x) \quad , \quad (\text{П3.1})$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^*$  - матрица-столбец,  $(*)$  – знак транспонирования.

Тогда под первой производной функции  $f(x)$  по вектору  $x$  понимается матрица-столбец

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^* .$$

Для линейной функции векторного аргумента

$$f(x) = b^* x \quad . \quad (\text{П3.2})$$

где  $b^* = (b_1, \dots, b_n)$  - матрица-строка заданных коэффициентов, производная по вектору  $x$  будет иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (b^* x) = (b_1, \dots, b_n)^* = b \quad . \quad (\text{ПЗ.3})$$

Здесь  $b$  - матрица-столбец.

Для квадратичной формы, записанной в виде функции вектора  $x$

$$f(x) = x^* Ax = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta} \quad , \quad (\text{ПЗ.4})$$

где  $A$  - квадратная матрица размерностью  $n \times n$ , первая производная по вектору  $x$  равна

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^* Ax) = 2Ax \quad , \quad (\text{ПЗ.5})$$

что может быть проверено непосредственным дифференцированием и перемножением соответствующих определенных выше матриц.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### Основные понятия теории асимптотических рядов

Пусть  $f(\varepsilon)$  некоторая функция малого параметра  $\varepsilon$ . В теории асимптотических рядов обычно изучают поведение функций при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Это поведение характеризуется:

1. Величиной предела  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon)$ .
2. Скоростью стремления  $f(\varepsilon)$  к заданному пределу.

Если предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon)$  существует, то возможны следующие случаи: а)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0; \quad \text{б)} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = B < \infty; \quad \text{в)} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = \infty. \quad \text{Причем случаи (а) и (б)}$$

можно объединить в один, если ввести функцию  $f(\varepsilon) - B$ .

Чтобы охарактеризовать скорость стремления функции  $f(\varepsilon)$  к нулю (или к бесконечности) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ее сравнивают со скоростью стремления к нулю (или к бесконечности) некоторых известных элементарных функций, которые называют калибровочными. За калибровочные функции  $\varphi(\varepsilon)$  обычно принимают следующие:

1,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{1/2}, \varepsilon^{3/2}, \dots, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \dots, \exp(-\varepsilon^{-1}), \ln(\varepsilon^{-1}), \dots$ . Для сравнения скоростей стремления к нулю (или к бесконечности) функций  $f(\varepsilon)$  и  $\varphi(\varepsilon)$  определяют предел их отношения  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = C$  и по его значению судят о поведении функции  $f(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Возможны следующие случаи:

1. Если  $C = 1$ , то пишут  $f(\varepsilon) \sim \varphi(\varepsilon)$  и говорят, что функция  $f(\varepsilon)$  асимптотически приближается к функции  $\varphi(\varepsilon)$  или  $\varphi(\varepsilon)$  является асимптотическим приближением для  $f(\varepsilon)$ .

2. Если  $C = 0$ , то пишут  $f(\varepsilon) = o(\varphi(\varepsilon))$  и говорят, что порядок функции  $f(\varepsilon)$  меньше, чем порядок функции  $\varphi(\varepsilon)$ .

3. Если  $0 < |C| < \infty$ , то пишут  $f(\varepsilon) = O(\varphi(\varepsilon))$  и говорят, что функция  $f(\varepsilon)$  имеет порядок, не превосходящий порядка функции  $\varphi(\varepsilon)$  или упрощенно: функция  $f(\varepsilon)$  имеет порядок  $\varphi(\varepsilon)$ .

Символы  $\sim$ ,  $o$  и  $O$  характеризуют порядок функции  $f(\varepsilon)$  и получили название символы порядка. Очевидно, что символы порядка  $\sim$  и  $o$  являются частными случаями по отношению к символу  $O$ , когда  $C = 1$  или  $C = 0$ , то есть они содержат больше информации о порядке функции  $f(\varepsilon)$ , чем символ  $O$ .

Примеры.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1 \text{ или } \sin(\varepsilon) \sim \varepsilon ;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2} \text{ или } 1 - \cos(\varepsilon) = O(\varepsilon^2) ;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\varepsilon)}{\varepsilon^2 / 2} = 1 \text{ или } 1 - \cos(\varepsilon) \sim \varepsilon^2 / 2 ;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(-\varepsilon^{-1})}{\varepsilon^n} = 0 \text{ или } \exp(-\varepsilon^{-1}) = o(\varepsilon^n),$$

где  $n \geq 0$  - любое натуральное число.

Первые три предела находятся с помощью разложения функций  $\sin(\varepsilon)$  и  $\cos(\varepsilon)$  в ряды Тейлора в точке  $\varepsilon = 0$ . Последний предел определяется введением нового параметра  $\lambda = 1/\varepsilon$ , после этого полученная неопределенность  $\frac{\infty}{\infty}$  в пределе раскрывается  $n$ -кратным применением правила Лопиталя, то есть

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(-\varepsilon^{-1})}{\varepsilon^n} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{\exp(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{n!}{\exp(\lambda)} = 0 ,$$

Следовательно, функция  $\exp(-\varepsilon^{-1})$  стремится к нулю быстрее любой степени параметра  $\varepsilon^n$ .

На основании описанных определений введем понятие асимптотического ряда. Рассмотрим некоторый ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $|a_n| < \infty$  - вещественные коэффициенты, полученный каким-либо способом для функции  $f(\varepsilon)$  и определенный в некоторой ограниченной области  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  - постоянная.

Определение. Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n$  называется асимптотическим рядом функции  $f(\varepsilon)$  тогда и только тогда, когда

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^N a_n \varepsilon^n + o(\varepsilon^N) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 . \quad (\text{П4.1})$$

Условие (П4.1) эквивалентно условию

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varepsilon^n + O(\varepsilon^N) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 ,$$

так как  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_N \varepsilon^N + o(\varepsilon^N)}{\varepsilon^N} = a_N$ , где  $|a_n| < \infty$ .

Таким образом, ошибка, совершаемая при усечении асимптотического ряда по определению имеет порядок первого отброшенного члена ( $N$ ) и,

следовательно, стремится к нулю со скоростью порядка  $O(\varepsilon^N)$ . Это определение асимптотического ряда соответствует определению, данному французским математиком Пуанкаре, поэтому асимптотический ряд иногда называют асимптотическим рядом Пуанкаре.

Как известно, наряду с асимптотическими рядами существуют сходящиеся ряды. Введем в рассмотрение частичную сумму ряда

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \varepsilon^n.$$

Определение. Ряд  $S_N = \sum_{n=0}^N a_n \varepsilon^n$  называется сходящимся, если

существует  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$ .

В этом случае величина  $S$  называется суммой ряда и пишется

$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n$ . Если последовательность частичных сумм  $S_N$  не имеет

предела, то ряд называется расходящимся. Определение асимптотического ряда никак не связано с определением сходящегося ряда, поэтому асимптотический ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся, однако в любом случае он может быть полезен при приближенном вычислении функции  $f(\varepsilon)$ , так как ошибка, возникающая при усечении асимптотического ряда, может быть сделана сколь угодно малой надлежащим выбором параметра  $\varepsilon$ . Обратно, при заданном значении параметра  $\varepsilon$ , оценка величины ошибки может быть произведена путем оценки величины последнего отброшенного члена асимптотического ряда.

Численные расчеты на компьютере приближенных решений алгебраических и дифференциальных уравнений показывают [20], [21] показывают, что возникающая погрешность вычислений, соответствующая асимптотическим и сходящимся рядам, ведет себя в зависимости от количества учтенных членов ряда по-разному. Если для сходящихся рядов она монотонно уменьшается с ростом  $N$  ( $\varepsilon = const$ ), то для асимптотических

рядов погрешность уменьшается только до определенного номера  $N_{\min}$ , а затем начинает увеличиваться. Причем, как правило, этот номер  $N_{\min}$  небольшой. Поэтому при использовании асимптотических рядов для приближенного вычисления функций не имеет смысла определять большое число членов ряда. В практических расчетах обычно ограничиваются лишь несколькими первыми членами асимптотического ряда. С другой стороны, сходящиеся ряды обладают, как правило, медленной сходимостью, поэтому для достижения заданной точности вычислений необходимо брать большое количество членов. Обычно при использовании небольшого числа членов ряда асимптотические ряды дают большую точность вычислений по сравнению со сходящимися рядами.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5

### Усреднение тригонометрических функций

Основываясь на разложении функций  $\sin^n \theta$  и  $\cos^n \theta$  для четных степеней  $n$  [20]

$$\sin^n \theta = \frac{1}{2^{n-1} i^n} \left[ (-1)^{n/2} \frac{n!}{2 \binom{n}{2}! \binom{n}{2}!} + \cos n\theta - n \cos(n-2)\theta + \dots \right],$$

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[ \frac{n!}{2 \binom{n}{2}! \binom{n}{2}!} + \cos n\theta + n \cos(n-2)\theta + \dots \right],$$

где  $i$  - мнимая единица, и учитывая, что средние значения функций

$$\langle \sin m\theta \rangle_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin m\theta d\theta = 0, \quad \langle \cos m\theta \rangle_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos m\theta d\theta = 0$$

при  $m = 1, 2, \dots$ , нетрудно получить следующие часто встречающиеся средние

$$\langle \sin^2 \theta \rangle_{\theta} = \langle \cos^2 \theta \rangle_{\theta} = \frac{1}{2}, \quad \langle \sin^4 \theta \rangle_{\theta} = \langle \cos^4 \theta \rangle_{\theta} = \frac{3}{8},$$



$$\langle \sin^2 \theta \cos^2 \theta \rangle_{\theta} = \frac{1}{8} . \quad (\text{П5.1})$$

Здесь следует заметить, что, если под знаком средней величины в любом сочетании встречаются нечетные степени тригонометрических функций  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$ , то соответствующие средние будут равны нулю.