МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра алгебры и геометрии

М. В. Игнатьев, С. Ю. Попов

ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРЫ АЛГЕБРЫ

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Самара
Издательство «Самарский университет»
2014

УДК 512.64
ББК 22.143
И 26

Рецензент
д-р. физ.-мат. наук, проф. А. Н. Панов

Игнатьев, М. В.
И 26 **Основные структуры алгебры** : учебн. пособие / М. В. Игнатьев, С. Ю. Попов. — Самара : Изд-во "Самарский университет", 2014. — 108 с.
ISBN 978-5-86465-636-5

Учебное пособие состоит из трёх частей. В первой части «Основные структуры алгебры» изложены основы теории групп и теории коммутативных колец и полей в объёме программы дисциплины «Алгебра» Федерального государственного образовательного стандарта по специальности «Компьютерная безопасность». Задавая жесткие логические рамки, изложение подразумевает активную самостоятельную работу студентов посредством решения большого количества задач. Во второй части «Задачи по алгебре» представлены задачи по всем темам программы дисциплины «Алгебра». В отличие от традиционных курсов высшей алгебры, изучаемых на математических факультетах университетов, данный курс характеризуется углубленным изучением дискретных алгебраических объектов: конечных колец, полей, векторных пространств, групп подстановок. В третьей части «Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$» содержится в виде серии задач изложение теории представлений указанной группы и алгебры; почти все задачи снабжены ответами или указаниями.

Набор задач из второй части пособия полностью соответствует программе курса «Алгебра» и предназначен для студентов первого и второго курсов специальности «Компьютерная безопасность». Некоторые задачи из второй и третьей частей могут служить основой для написания курсовых работ.

УДК 512.64
ББК 22.143

ISBN 978-5-86465-636-5

Предисловие

По нашему мнению, алгебра — одна из самых красивых и интересных дисциплин на первом курсе любой специальности, связанной с математикой или с компьютерными науками. Второй автор неоднократно читал лекции, а первый — вёл практические занятия по этому курсу в академических группах механико-математического СамГУ. Кроме того, оба автора проводили учебно-исследовательские семинары по различным разделам алгебры для студентов младших курсов, интересующихся математикой.

В первую часть пособия включён теоретический материал о группах, кольцах и полях, являющийся — с нашей точки зрения — абсолютно необходимым алгебраическим «бэкграундом» для всех, кто хочет получить качественное математическое образование.

Задачник, содержащийся во второй части, ориентирован, в первую очередь, на студентов младших курсов. Он полностью соответствует программе курса алгебры, читаемого в СамГУ студентам специальности «Компьютерная безопасность». Не слишком большое количество часов, отводимое учебным планом на практические занятия, заставило *чрезвычайно* тщательно подойти к выбору излагаемых тем; впрочем, задача несколько облегчалась в связи с абсолютной «классичностью» части материала и наличием достаточного числа *прекрасных* учебников и сборников задач по алгебре и её многочисленным приложениям.

Третья часть посвящена классификации неприводимых представлений группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ и её алгебры Ли. Хотя, на первый взгляд, эти вопросы выглядят более специальными, чем излагаемые в первых двух частях, на самом деле, оба этих примера являются модельными для теории представлений. При их изучении становятся видны очень многие «пружины» доказательств, которые работают для весьма широкого класса алгебраических групп и алгебр Ли — объектов, лежащих в центре современной математики и обладающих рядом важных приложений, к примеру, в теории кодирования.

В список литературы включены только *первоклассные* книги, которые мы *без малейшего сомнения* советуем как для первого ознакомления с алгеброй, так и для изучения более глубоких разделов этого удивительно красивого и стройного раздела математики. Классические учебники [16]–[18] и [2] великолепно подходят и для того, и для другого; в книгах [9], [10] содержится подробное и чёткое изложение ряда более тонких вопросов современной алгебры: тензорные алгебры, алгебры Клиффорда и Вейля и т.д.

Алгоритмические аспекты и вопросы, связанные с дискретными объектами (например, с конечными полями и кольцами) хорошо освещены в учебниках [4], [5], а также, конечно, в фундаментальной книге [21]. Теорию представлений проще всего выучить по книгам [3], [28]. Невероятно интересно курс алгебры изложен в учебниках [20] и [6].

При подборе стандартных упражнений мы в известной степени опирались на задачники [19], [7], [8], [22], [24]. При этом мы всегда стремились демонстрировать применение разных алгоритмов на одних и тех же «модельных» примерах (пространства многочленов, матриц и т.д.). Более сложные задачи можно почерпнуть в замечательных сборниках [23], [25], которые мы горячо рекомендуем всем желающим *действительно* изучить алгебру.

Первые две части пособия (вместе с дополнениями) написаны вторым автором, третья часть — первым автором. Авторы выражают самую искреннюю признательность всем сотрудникам кафедры алгебры и геометрии СамГУ за чудесную атмосферу, за помощь и поддержку при работе над пособием. Пособие подготовлено при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания. Первый автор также был поддержан фондом Дмитрия Зимина «Династия».

Часть 1. Основные структуры алгебры

Группы

Напомним основные понятия, необходимые для понимания дальнейшего изложения.

Декартово произведение множеств A и B — это множество упорядоченных пар (a, b), где a «пробегает» множество A, а b — множество B, то есть $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Если множества совпадают, то говорят о декартовом квадрате данного множества. Пример: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ — декартова плоскость.

Бинарная операция на множестве A — это произвольное отображение $m\colon A \times A \to A$. Примеры: сложение, вычитание, умножение на множестве целых чисел, вычитание на множестве натуральных чисел не является бинарной операцией.

Основное определение. Группа — это непустое множество G, на котором введена бинарная операция $*\colon G \times G \to G$, обладающая следующими свойствами (эти свойства ещё называют аксиомами группы):

1 (ассоциативность операции). $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$;

2 (существование нейтрального элемента). $\exists e \in G :$

$$\forall a \in G \ a * e = e * a = a;$$

3 (существование симметричного элемента). $\forall a \in G \ \exists a' \in G :$

$$a * a' = a' * a = e.$$

Замечание. Если групповая операция — умножение (multiplication), то группа называется мультипликативной, нейтральный элемент — единицей, симметричный элемент — обратным. Если групповая операция — сложение (addition), то группа называется аддитивной, нейтральный элемент — нулём, симметричный элемент — противоположным.

Коммутативная группа. Если групповая операция дополнительно обладает свойством коммутативности: $\forall a, b \in G \ a * b = b * a$, — то группа G называется абелевой, или коммутативной.

Порядок группы — это количество элементов в группе, если G — конечное множество, и символ ∞ в противном случае. Обозначение $|G|$. Если $|G| \in \mathbb{N}$, то группу называют конечной. Нас, в основном, будут интересовать конечные группы. Примеры, как я думаю, известные Вам:

1. **Симметрическая группа.** Множество подстановок степени n. Напомним, что подстановка степени n — это биекция из множества $\{1,\ldots,n\}$ в него же, в табличной записи каждая подстановка имеет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Бинарная операция — это композиция (произведение, сложная функция) подстановок. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (проводим вычисления справа налево, так как правая подстановка — это внутренняя функция, а левая — внешняя, но это только договорённость, возможен и другой вариант). Обозначение — S_n, $|S_n| = n!$.

?? Как устроены единица этой группы? обратный элемент к данной подстановке?

2. **Группа вычетов.** Множество классов вычетов по натуральному модулю n, бинарная операция — сложение классов вычетов. Это аддитивная группа порядка n, обозначается $\mathbb{Z}_n$.

?? На множестве классов вычетов по модулю n есть ещё одна бинарная операция — умножение классов вычетов. Почему нельзя определить мультипликативную группу классов вычетов? Какие классы вычетов по нужно оставить в рассмотрении, чтобы получить мультипликативную группу?

3. **Группа корней из единицы.** Множество всех комплексных корней из 1 степени n. Групповая операция — умножение. Обозначение μ_n, $|\mu_n| = n$. Можно описать эту группу и так:

$$\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \text{ или } \mu_n = \left\{\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k = 0,\ldots,n-1\right\}.$$

4. **Группа движений.** Множество движений плоскости (пространства). Операция — это композиция движений. Это бесконечная группа.

Далее идут менее классические примеры групп в виде задач.

Задача 1. Пусть G — мультипликативная группа. Зафиксируем элемент a в G и зададим операцию в G по правилу: $x \circ y = x \cdot a \cdot y$.

Докажите, что G относительно новой операции также является группой.

Задача 2. Пусть M — произвольное множество, а 2^M — его булеан (множество всех подмножеств множества M). Докажите, что 2^M — коммутативная группа относительно операции

$$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X),$$

которая называется симметрической разностью множеств.

Задача 3. Пусть X — множество точек кривой $y = x^3$, l — прямая, проходящая через точки a и b на X (если $a = b$, то l — касательная к X в точке a), c — ее третья точка пересечения с X, и m — прямая, проходящая через начало координат O и точку c (если $c = 0$, то m — касательная к X в точке O). Положим $a \oplus b = d$, где d — третья точка пересечения m и X или точка O, если m — касательная к X в точке O. Докажите, что $(X, \oplus)$ — коммутативная группа.

Определение. Подгруппой группы G называется непустое подмножество H в G такое, что

1. подмножество H замкнуто относительно групповой операции, то есть $\forall a, b \in H \ a * b \in H$;

2. подмножество H замкнуто относительно взятия симметричного элемента, то есть $\forall a \in H \ a' \in H$.

Обозначение: $H < G$.

Замечание. Если подгруппу рассматривать как самостоятельное множество, то она сама является группой относительно операции, которую она унаследовала от содержащей её группы. Таким образом, перечисляя подгруппы известных групп, мы можем получить новые примеры групп.

Примеры:

1. **Знакопеременная группа.** Пусть имеем перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_n$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Говорят, что пара (i, j) $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ даёт инверсию в перестановке, если j идёт раньше i. Подстановка σ называется чётной/нечётной, если количество инверсий во второй строке табличной записи чётно/нечётно. Докажите, что множество всех чётных подстановок из S_n образует подгруппу, которую обозначают A_n и называют знакопеременной группой (alternating group), причём $|A_n| = n!/2$.

2. **Группа симметрий фигуры.** Пусть X — фигура на плоскости (в пространстве). Симметрий фигуры X называется движение плоскости (пространства), такое что образ фигуры X при этом движении совпадает с ней. Проверьте, что множество симметрий фигуры X является подгруппой в группе движений плоскости (пространства). Эта группа называется группой симметрий фигуры X и обозначается $Sym(X)$ (symmetry). Это может быть как бесконечная группа (например, группа симметрий точки), так и конечная группа (примеры ниже).

3. **Группа диэдра.** Важным частным случаем предыдущего примера является группа симметрий правильного n-угольника на плоскости. Название: группа диэдра. Обозначение D_n. (Понятно, что просто по определению в этом обозначении $n \geqslant 3$.)

4. **Циклическая подгруппа.** Пусть G — группа с групповой операцией $*$. Определим целую степень элемента группы: $\forall a \in G$ и $\forall m \in \mathbb{Z}$

$$a^m := \begin{cases} a * a * \ldots * a \ (m \text{ сомножителей}), \text{ если } m \in \mathbb{N}; \\ a' * a' * \ldots * a' \ (m \text{ сомножителей}), \text{ если } m < 0. \end{cases}$$

Если G — аддитивная группа, то говорят не о целой степени, а о кратном элементе и обозначают его ma. Для данного элемента $a \in G$ рассмотрим подмножество $\langle a \rangle = \{a^m,\ m \in \mathbb{Z}\}$ всех целых степеней данного элемента. Проверьте, что $\langle a \rangle < G$. Эта подгруппа называется циклической подгруппой, порождённой элементом a. Говорят, что сама группа G называется **циклической группой**, если существует элемент $a \in G$ такой, что $G = \langle a \rangle$, то есть G состоит из всех целых степеней некоторого элемента этой группы.

Далее идут задачи на подгруппы:

Задача 4. Докажите, что во всякой группе

а) пересечение любого набора подгрупп снова является подгруппой;

б) если подгруппа C содержится в объединении подгрупп A и B, то либо $C \subseteq A$, либо $C \subseteq B$.

Задача 5. Докажите, что непустое подмножество H в группе G является подгруппой тогда и только тогда, когда $xy^{-1} \in H$ для любых x и y из H.

Задача 6. Докажите, что *конечное* непустое подмножество в группе, замкнутое относительно групповой операции, является подгруппой.

Задача 7. а) Опишите группу симметрий ромба, не являющегося квадратом.

б) Опишите группы D_3, D_4. Запишите для них таблицу групповой операции (таблицу Кэли).

в) Найдите порядок группы D_n и опишите её элементы. *Указание:* Введём на плоскости декартову систему координат так, что её начало находится в центре правильного многоугольника. Всякая симметрия сохраняет центр тяжести многоугольника, то есть движение из D_n можно рассматривать как линейный оператор на плоскости. Далее нужно вспомнить, что всякий линейный оператор однозначно задаётся образами базисных векторов, а также тот факт, что движение переводит сторону многоугольника в сторону его образа.

г) Найдите порядки группы симметрий правильных многогранников: правильного тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра.

Задача 8. Докажите следующую теорему о структуре циклической группы: *Всякая подгруппа циклической группы является циклической.*

Задача 9. Перечислите все подгруппы группы a) μ_6, b) $\mathbb{Z}_{2^m}$, c) D_4.

Задача 10. Множество всех ненулевых комплексных чисел (обозначается $\mathbb{C}^*$ или $\mathbb{C}^\times$) — это мультипликативная группа относительно умножения комплексных чисел (это несложно проверить). Докажите, что всякая конечная подгруппа этой группы является циклической.

Сейчас мы обсудим три не очень сложных сюжета: порядок элемента группы, отношения сопряжённости и смежности элементов группы. Если не оговорено противное, то в общих рассуждениях группа подразумевается мультипликативной.

Определение. Порядком элемента группы называется порядок циклической подгруппы, порождённой этим элементом, то есть $\operatorname{ord} g = |\langle g\rangle|$.

Например, порядок нейтрального элемента равен 1, причём нейтральный элемент — единственный элемент группы, порядок которого равен 1. Порядок единицы в группе $(\mathbb{Z}, +)$ равен ∞, порядок мнимой единицы в группе $\mathbb{C}^*$ равен 4, так как $\langle i\rangle = \{i^{0+4k} = 1, i^{1+4k} = i, i^{2+4k} = -1, i^{3+4k} = -i\}$.

Задача 11 (эквивалентное определение порядка элемента группы). Докажите, что порядок элемента a группы G равен наименьшему натуральному числу m такому, что $a^m = e$, и символу ∞, если никакая натуральная степень элемента a не совпадает с нейтральным элементом группы.

Задача 12. Докажите следующие свойства функции $\operatorname{ord}\colon G \to \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$. Пусть a — элемент конечного порядка m в группе G. Тогда:

а) элемент a^{-1} равен неотрицательной степени элемента a: $a^{-1} = a^{m-1}$;

б) если $k \in \mathbb{Z}$, то $(a^k = e) \Leftrightarrow m|k$;

в) если $k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ord} a^k = \frac{m}{(m,k)}$;

г) если $b \in G$ — элемент порядка n, где $(m, n) = 1$ и $a \cdot b = b \cdot a$ (говорят, что элементы коммутируют), то $\operatorname{ord}(a \cdot b) = m \cdot n$.

Задача 13. Докажите, что

а) элемент $\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$ группы $\mathbb{C}^*$ имеет бесконечный порядок;

б) число $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ иррационально.

Задача 14. Покажите, что если порядок каждого элемента группы не превосходит двух, то группа абелева.

Определение. Элементы a и b группы G называются сопряжёнными, если существует элемент $t \in G$ такой, что $b = t^{-1} \cdot a \cdot t$. Следуя Гильберту, $t^{-1} \cdot a \cdot t$ обозначают a^t (не путать с целой степенью!).

Задача 15. Докажите свойства сопряжения:

а) $\forall a, t, s \in G\ (a^t)^s = a^{t\cdot s}$;

б) $\forall a_1, a_2, t \in G\ (a_1 \cdot a_2)^t = a_1^t \cdot a_2^t$;

в) $\forall a, t \in G\ \forall m \in \mathbb{Z}\ (a^t)^m = (a^m)^t$;

г) порядки сопряжённых элементов равны.

Замечание. Из доказанных свойств сопряжения следует, что сопряжение является отношением эквивалентности на группе, а значит, группа разбивается на классы эквивалентности, которые называются **классами сопряжённости.** Например, класс сопряжённости нейтрального элемента группы состоит только из этого элемента.

?? Что можно сказать об элементах группы, чьи классы сопряжённости одноэлементны? что можно сказать о конечной группе, в которой количество классов сопряжённости равно порядку этой группы?

Задача 16. Найдите все классы сопряженных элементов в группе S_3 и группе D_4 движений квадрата.

Задача 17. Кроме табличной записи подстановок, есть ещё разложение подстановки в независимые циклы. Так, подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ можно записать в виде (16543)(2), так как она переводит 1 в 6, 6 в 5, 5 в 4, 4 в 3, 3 в 1 (цикл замкнулся) и, наконец, 2 — в 2. Докажите, что две подстановки сопряжены в группе S_n, если и только если они имеют одинаковую *цикловую структуру*, то есть их разложения в произведение независимых циклов для любого k содержат одинаковое число циклов длины k.

Задача 18. Используя результат задачи 17, найдите число классов сопряженности в группах $S_m,\ m = 4, 5, 6, 7$.

Задача 19 (сопряжённая подгруппа). Пусть $H < G$ — произвольная подгруппа в группе G, $t \in G$ — произвольный элемент группы. Докажите, что подмножество

$$t^{-1}Ht = \{t^{-1} \cdot h \cdot t, h \in H\}$$

является подгруппой в G (эта подгруппа называется сопряжённой к H.)

Рассмотрим ещё одно важное отношение эквивалентности на группе.

Определение. Пусть H — произвольная подгруппа в группе G. Левым (правым) смежным классом элемента $g \in G$ по подгруппе H называется подмножество вида $gH = \{g \cdot h, h \in H\}$ ($Hg = \{h \cdot g, h \in H\}$). Множество левых смежных классов по подгруппе H обозначается G/H, правых — $H\backslash G$.

Задача 20. Выпишите все левые и правые смежные классы группы S_3 по подгруппе а) $< (123) >$; б) $< (12)(3) >$ (для элементов используем разложение в произведение независимых циклов см. задачу 17).

Замечание. Легко проверить, что отображение $gH \mapsto Hg^{-1}$ из G/H в $H\backslash G$ является биекцией. Так что множества левых и правых смежных классов по одной и той же подгруппе равномощны, а значит, если эти множества конечны, то *количество левых смежных классов по подгруппе равно количеству правых смежных классов по той же подгруппе.*

Определение. Индексом подгруппы H в группе G называется количество левых (правых) смежных классов по подгруппе H, если множество G/H конечно, и символ ∞, если множество G/H бесконечно. Обозначение $[G : H]$.

Теперь докажите свойства классов смежности.

Задача 21. Пусть G — группа, H — подгруппа в G. Тогда

а) два левых (правых) смежных класса по подгруппе H либо совпадают, либо не пересекаются;

б) (критерий принадлежности смежному классу) Элементы $a, b \in G$ принадлежат одному левому (правому) смежному классу по подгруппе H тогда и только тогда, когда $a^{-1} \cdot b \in H$ $(b \cdot a^{-1} \in H)$;

в) каждый левый (правый) смежный класс по подгруппе H равномощен подгруппе H, в частности, если H — конечная подгруппа порядка m, то и все левые (правые) смежные классы по H состоят из m элементов.

Далее Вам предлагается доказать очень простые, но очень важные факты из теории конечных групп.

Задача 22. Докажите теорему Лагранжа и следствия из неё.

а) (теорема Лагранжа). Пусть G — конечная группа. Тогда порядок любой её подгруппы является делителем порядка группы. Более того, $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$.

б) Порядок любого элемента конечной группы делит порядок этой группы.

в) Всякая группа простого порядка является циклической.

г) (мультипликативность индекса). Пусть $H < F < G$ и G — конечная группа. Тогда $[G : H] = [G : F] \cdot [F : H]$.

Наконец, ещё несколько задач на специфические свойства индекса подгруппы, смежных классов.

Задача 23. Пусть g_1, g_2 — элементы группы G, а H_1, H_2 — подгруппы в G. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

$$a)\ g_1H_1 \subset g_2H_2 \quad b)\ H_1 \subset H_2 \text{ и } g_2^{-1}g_1 \in H_2.$$

Задача 24. Докажите, что пересечение двух подгрупп конечного индекса есть снова подгруппа конечного индекса.

Определение. Подгруппа H группы G называется нормальной (нормальным делителем), если для любого элемента g группы G левый смежный класс этого элемента по подгруппе H как множество совпадает с правым смежным классом по этой подгруппе, то есть

$$\forall g \in G gH = Hg.$$

Обозначение $H \lhd G$.

Замечание. В абелевой группе любая подгруппа является нормальной. В задаче 20 приведены примеры как нормальной подгруппы в группе S_3, так и подгруппы, которая не является нормальной.

Определение 2. Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого элемента g группы G сопряжённая к H подгруппа $g^{-1}Hg$ совпадает с H.

Задача 25. Докажите эквивалентность определений 1 и 2.

Задача 26. Докажите, что пересечение нормальных подгрупп группы G есть снова нормальная подгруппа группы G.

Задача 27. Докажите, что любая подгруппа индекса 2 является нормальным делителем группы.

Задача 28. Докажите, что если F и H — подгруппы в G, причем $H \lhd G$, то $H \cap F \lhd F$.

Задача 29. (*Теорема Оре.*) Пусть A и B — нормальные подгруппы в группе G и $A \cap B = \{e\}$ — единичная подгруппа. Тогда $xy = yx$ для любых $x \in A$ и $y \in B$.

Конструкция факторгруппы. Пусть $H \lhd G$ (!), рассмотрим множество левых (или правых) смежных классов G/H по подгруппе H. С одной стороны, левый смежный класс является подмножеством в группе, и мы обозначали его gH, а с другой, — элементом в G/H, и в этом случае мы будем его обозначать $[g]$, где в квадратных скобках может стоять любой представитель этого левого смежного класса. В этом двойном подходе и состоит главная трудность в понимании этой конструкции, так как множество нужно мыслить как один элемент. Введём на множестве G/H бинарную операцию по правилу:

$$\forall [a], [b] \in G/H \ \ [a] * [b] = [a \cdot b]. \tag{1}$$

Задача 30. Докажите корректность определения введённой бинарной операции, то есть независимость результата операции от выбора представителей a и b левых смежных классов.

Задача 31. Докажите, что относительно введённой бинарной операции множество G/H является группой.

Определение. Группа левых смежных классов группы G по нормальной подгруппе H с групповой операцией (1) умножения классов называется факторгруппой группы G по подгруппе H и обозначается G/H или $\frac{G}{H}$.

Замечание. Следует отметить, что Вы сталкивались с этой конструкцией в некоторых частных случаях. Например, аддитивная группа классов вычетов по модулю n — это факторгруппа аддитивной группы целых чисел $\mathbb{Z}$ по её циклической подгруппе $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ целых чисел, кратных числу n.

Задача 32. Постройте таблицу Кэли для факторгруппы а) мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел по подгруппе положительных вещественных чисел; б) группы A_4 по *четверной группе Клейна* $H = \{(1)(2)(3)(4),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$.

Задача 33. Докажите, что каждый элемент факторгруппы аддитивной группы $\mathbb{Q}$ по аддитивной группе $\mathbb{Z}$ имеет конечный порядок и для каждого натурального n имеется в точности одна подгруппа порядка n.

Задача 34. Докажите *теорему о соответствии.* Пусть G — группа, H — ее нормальная подгруппа. Тогда существует биективное отображение множества всех подгрупп группы G, содержащих H, на множество всех подгрупп факторгруппы $\overline{G} = G/H$, эта биекция задается следующим образом: любой подгруппе F в G такой, что $H < F$, соответствует $\overline{F} = F/H$. Более того, $F \lhd G \ \Leftrightarrow\ \overline{F} \lhd \overline{G}$, причем $G/F \cong \overline{G}/\overline{F}$.

В современной алгебре слово «морфизм» — одно из самых часто употребляемых. Современная алгебра изучает множества со структурой, в классическом случае структура — это одна или несколько n-арных операций. Отображения, сохраняющие структуру, и принято называть морфизмами. Образно говоря, эти отображения определяют «социологическую» сторону жизни алгебраических структур.

Определение. Пусть G — группа с бинарной операцией $*$, а F — группа с бинарной операцией $\circ$. Отображение $\varphi : G \to F$ называется гомоморфизмом групп (морфизмом групп, представлением группы G в группе F), если

$$\forall a, b \in G :\ \ \varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b).$$

Легко предложить для любых двух групп G и F тривиальный гомоморфизм, который «отправляет» любой элемент из G в нейтральный элемент группы F. Другие естественные примеры гомоморфизмов групп: 1) пусть $H < G$, рассмотрим H как самостоятельную группу, тогда вложение $i\colon H \to G$ по правилу $\forall h \in H\ i(h) = h$ — это гомоморфизм вложения подгруппы в группу; 2) пусть $H \lhd G$, тогда отображение $\varphi\colon G \to G/H$ (факторгруппа) такое, что $\varphi(a) = [a]$ для всех $a \in G$ (левый смежный класс элемента по подгруппе H), — это канонический гомоморфизм факторизации.

Задача 35. Докажите простейшие свойства гомоморфизмов групп. Пусть $\varphi : G \to F$ — гомоморфизм групп, тогда

а) образ нейтрального элемента группы G — это нейтральный элемент группы F;

б) образ симметричного элемента равен симметричному элементу образа;

в) композиция гомоморфизмов групп — это гомоморфизм групп.

Задача 36. Докажите, что комплекснозначная функция действительного аргумента $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ — это гомоморфизм аддитивной группы вещественных чисел в мультипликативную группу $\mathbb{C}^*$.

Задача 37. Перечислите все гомоморфизмы групп из μ_6 в S_3.

У всякого гомоморфизма групп есть два важнейших для его характеристики подмножества.

Определение. Ядром гомоморфизма групп $\varphi\colon G \to F$ называется подмножество группы G, состоящее из всех элементов группы G, образ которых есть нейтральный элемент группы F, то есть

$$\ker \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = e_F\} \text{ (kernel — ядро).}$$

Определение. Образом гомоморфизма групп $\varphi\colon G \to F$ называется подмножество группы F, состоящее из всех элементов группы F, имеющих прообраз при отображении φ, то есть

$$\mathrm{Im}\varphi = \{f \in F \mid \exists a \in G : \varphi(a) = f\} \text{ (image — образ).}$$

Задача 38. Найдите ядро и образ гомоморфизмов групп из задач 36 и 37.

Задача 39. Докажите свойства ядра и образа гомоморфизма групп:

а) ядро гомоморфизма групп $\varphi : G \to F$ — нормальная подгруппа в G;

б) образ гомоморфизма групп $\varphi : G \to F$ — это подгруппа в F.

Среди гомоморфизмов групп выделяют следующие специальные типы.

Определение. Гомоморфизм групп $\varphi : G \to F$ называется

мономорфизмом,		инъекцией.
эпиморфизмом,	если φ как отображение является	сюръекцией.
изоморфизмом,		биекцией.

Примером мономорфизма является вложение подгруппы в группу, примером эпиморфизма является канонический гомоморфизм факторизации.

Задача 40. Докажите критерий мономорфизма групп: гомоморфизм групп $\varphi : G \to F$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $\ker \varphi = \{e_G\}$, то есть когда его ядро — это единичная подгруппа в G.

Замечание. Из задачи 40 следует критерий изоморфизма: ($\varphi : G \to F$ — изоморфизм групп) $\Leftrightarrow \begin{cases} \ker \varphi = \{e_G\}; \\ \mathrm{Im}\varphi = F. \end{cases}$ Если существует изоморфизм между группами, то группы называются **изоморфными**. Обозначение: $G \cong F$. Вообще, изоморфные группы неразличимы с точки зрения теории групп: они могут различаться реализацией элементов, различаться реализацией группової операции, но с точностью до переобозначений это одна и та же группа. Например, $\mu_6 \cong \mathbb{Z}_6$, несмотря на то, что одна группа состоит из комплексных чисел, а другая — из классов вычетов, одна группа мультипликативная, другая — аддитивная. Изоморфизм задаётся так: $\forall [m] \in \mathbb{Z}_6 \ \varphi([m]) = \cos\frac{\pi m}{3} + i \sin\frac{\pi m}{3}$.

Задача 41. Докажите *теорему о каноническом изоморфизме групп.* Пусть $\varphi\colon G \to F$ — произвольный гомоморфизм групп, тогда

$$\frac{G}{\ker\varphi} \cong \mathrm{Im}\varphi.$$

Указание. Рассмотрите отображение $\overline{\varphi}\colon \frac{G}{\ker\varphi} \to F'$, где F' — это образ гомоморфизма φ, рассматриваемый как самостоятельная группа, такое что $\forall [a] \in \frac{G}{\ker\varphi} \ \overline{\varphi}([a]) = \varphi(a)$. Докажите корректность этого отображения, то есть то, что оно не зависит от выбора представителя левого смежного класса, затем докажите, что это — гомоморфизм групп. Наконец, вычислив ядро и образ этого гомоморфизма, докажите, что он на самом деле является изоморфизмом групп.

Задача 42. Классифицируйте с точностью до изоморфизма группы порядков

а) 2 — 7;

б) 8 — 12.

Кольца, поля и идеалы

Мы переходим к изучению новой алгебраической структуры — кольца, а также к частного случая этой структуры — поля.

Определение. Кольцо — это непустое множество R с двумя бинарными операциями: сложение и умножение, такими что относительно сложения R является коммутативной группой, а умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения, то есть

$$\forall a, b, c \in R \ (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c, \ c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b.$$

Упражнение. Запишите подробное определение кольца по аналогии с данным выше определением группы с указанием всех аксиом сложения и умножения.

Определение. Кольцо R называется **коммутативным**, если умножение на R — коммутативная операция.

Определение. Кольцо R называется **кольцом с единицей**, если существует элемент $1 \in R, \ 1 \neq 0$ такой, что $\forall a \in R: \ a\cdot 1 = 1\cdot a = a$.

Определение. Поле — это коммутативное кольцо k с единицей, в котором любой ненулевой элемент обратим, то есть

$$\forall a \neq 0,\ a \in k:\ \exists a^{-1} \in k:\ a \cdot a^{-1} = 1.$$

Упражнение. Запишите подробное определение поля. Сколько аксиом Вы выписали?

Замечание. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, употребляя термин «кольцо» мы будем подразумевать коммутативное кольцо с единицей. Теория некоммутативных колец — это интересная и сложная теория, но мы не будем её рассматривать в данном пособии.

Базовые примеры колец: $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел с «обычными» операциями сложения и умножения целых чисел, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ — кольцо классов вычетов по натуральному модулю m с операциями сложения и умножения классов вычетов по модулю m, $k[x]$ — кольцо многочленов от одной переменной x с коэффициентами из поля k относительно «обычного» сложения и умножения многочленов. Вообще, если A — кольцо, то $A[x]$ — кольцо многочленов от одной переменной x с коэффициентами из кольца A. Обобщением последнего примера является кольцо $A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ многочленов от n независимых переменных с коэффициентами из кольца A. Также примерами колец являются кольцо $C(\mathbb{R})$ непрерывных вещественнозначных функций на $\mathbb{R}$ и кольцо $C^\infty(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ относительно «поточечных» сложения и умножения функций.

Базовые примеры полей: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p — простое число (это поле обозначают $\mathbb{F}_p$ или $GF(p)$ (последнее обозначение объясняется тем, что конечные поля называют полями Галуа (Galois Field)).

Определение. Подкольцом кольца $(R, +, \cdot)$ называется непустое подмножество S в R, которое является подгруппой группы $(R, +)$ и замкнуто относительно умножения, а также содержит единицу 1 кольца R. Обозначение: $S < R$.

Ясно, что подкольцо как самостоятельное множество само является кольцом относительно операций сложения и умножения, унаследованных от исходного кольца. Имеем цепочки колец: $\mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R} < \mathbb{C}$, $\mathbb{Z} < \mathbb{Z}[x] < \mathbb{Q}[x] < \mathbb{R}[x] < \mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x] < C^\infty(\mathbb{R}) < C(\mathbb{R})$, $A[x_1] < A[x_1, x_2] < \ldots < A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Упражнение. Определите подполе в поле.

Замечание. Со всяким кольцом $(R, +, \cdot)$ можно связать две группы: **аддитивная группа кольца** $(R, +)$ и **мультипликативная группа кольца**

$$R^* = \{a \in R : \exists b \in R : a \cdot b = 1\},$$

которая состоит из всех обратимых элементов кольца R (проверьте сами, что это подмножество является группой относительно умножения в кольце). Из определения поля следует эквивалентность: (A — поле) $\Leftrightarrow$ ($A^* = A \backslash \{0\}$).

Задача 1. а) Вычислите группы: $\mathbb{Z}^*$, $(A[x])^*$, $C(\mathbb{R})^*$.

Определение. Говорят, что в кольце R есть **делители нуля**, если существуют элементы $a \neq 0$ и $b \neq 0$ из R такие, что $a \cdot b = 0$. Если в R нет делителей нуля, то кольцо R называется **целостным** кольцом или **областью целостности.**

Задача 2. Докажите, что

а) кольцо $A[x]$ — область целостности тогда и только тогда, когда A — область целостности;

б) поле — это область целостности;

в) конечная область целостности — это поле;

г) $C(\mathbb{R})$, $C^\infty(\mathbb{R})$ не являются областями целостности.

Определение. Идеалом кольца R называется непустое подмножество I в R, которое

1) является подгруппой в аддитивной группе кольца, то есть $\forall x, y \in I$ $x - y \in I$, и

2) $\forall a \in R$ и $\forall x \in I$ $a \cdot x \in I$.

Обозначение: $I \lhd R$. Например, множество чётных чисел — это идеал в кольце $\mathbb{Z}$.

Задача 3. Докажите простейшие свойства идеала:

а) если единица кольца принадлежит идеалу, то идеал совпадает со всем кольцом;

б) если пересечение идеала и мультипликативной группы кольца непусто, то есть в идеале есть обратимые элементы кольца, то идеал совпадает со всем кольцом;

в) пусть $a \in R$ — произвольный элемент кольца R, подмножество кольца R вида $\{a \cdot b,\ b$ «пробегает» $R\}$ является идеалом кольца;

г) (идеалы поля) кольцо A является полем тогда и только тогда, когда все идеалы в кольце A тривиальны (нулевой идеал и всё кольцо).

Определение. Идеал из задачи 3 (в) называется **главным** идеалом кольца R, порождённым элементом a. Обозначение: (a). Если в кольце все идеалы главные, то оно называется **кольцом главных идеалов**.

Задача 4. Докажите, что следующие кольца являются кольцами главных идеалов: а) $\mathbb{Z}$, б) $k[x]$, где k — поле; в) кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$.

Задача 5. Рассмотрим в кольце $\mathbb{Z}[x]$ подмножество

$$I = \{2P(x) + xQ(x), P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]\}.$$

Докажите, что $I \lhd \mathbb{Z}[x]$, причём идеал I не является главным. Приведите пример неглавного идеала в $k[x_1, x_2]$.

Теперь у нас есть возможность получать из кольца новые кольца, отличные от его подколец.

Конструкция факторкольца. Пусть $I \neq R$ — идеал кольца R. Забудем об операции умножения в кольце R, тогда имеем нормальную (почему?) подгруппу I в аддитивной группе кольца $(R, +)$. Рассмотрим факторгруппу R/I, это аддитивная группа смежных классов $[a]$, которые как подмножества в R имеют вид $a + I = \{a + x, x \in I\}$. Введём на множестве R/I бинарную операцию умножения классов по правилу:

$$\forall [a], [b] \in R/I \ [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

Задача 6. Докажите корректность определения введённой операции умножения классов.

Задача 7. Докажите, что множество R/I является коммутативным кольцом с единицей относительно операций сложения и умножения классов. (Можно ссылаться на некоторые факты из теории групп.) Это кольцо и называется **факторкольцом** кольца R по идеалу I.

Примером факторкольца является кольцо классов вычетов по натуральному модулю m: кольцо — это $\mathbb{Z}$, а идеал — $(m) = m\mathbb{Z}$. Далее рассмотрим ещё один базовый пример факторкольца, который мы будем часто использовать в дальнейшем.

Факторкольцо кольца многочленов. Пусть $k[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из поля (!) k, $I \neq k[x]$ — идеал кольца. Так как $k[x]$ — кольцо главных идеалов (задача 4), то существует многочлен $f(x)$ положительной степени, такой что $I = (f(x))$. Введём на кольце многочленов отношение эквивалентности (убедитесь, что это действительно отношение эквивалентности сами): $u(x) \equiv v(x) \pmod{f(x)} \Leftrightarrow f(x)|(u(x) - v(x))$.

Задача 8. а) Докажите, что классы эквивалентности, на которые разбивается кольцо $k[x]$ относительно введённого отношения эквивалентности, — это в точности смежные классы по идеалу I.

б) Два многочлена сравнимы по модулю $f(x)$ тогда и только тогда, когда эти многочлены дают один и тот же остаток при делении на $f(x)$.

Из задачи 8 следует, что аналогично кольцу классов вычетов каждый смежный класс по идеалу $I = (f(x))$ однозначно характеризуется остатком от деления любого из его представителей на многочлен $f(x)$. Тогда в качестве модели для множества $k[x]/(f(x))$ будем рассматривать множество всех многочленов степени меньше, чем степень многочлена $f(x)$. Осталось перенести операции с факторкольца на эту модель. Покажите, что перенесённое сложение — это обычное сложение многочленов, а результат перенесённого умножения — это остаток от деления результата обычного умножения многочленов на многочлен $f(x)$.

Задача 9. Постройте таблицы сложения и умножения (можно и нужно использовать программную реализацию) для следующих факторколец и выясните, являются ли эти факторкольца полями:

а) $\mathbb{F}_2[x]/(x^2+1)$,

б) $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$.

Задача 10. Докажите, что факторкольцо $k[x]/(f(x))$ является полем тогда и только тогда, когда $f(x)$ — неприводимый над k многочлен.

Для колец так же, как и для групп, можно рассмотреть отображения, сохраняющие структуру этой алгебраической структуры. Из замечания выше о морфизмах нетрудно предложить следующее

Определение. Пусть $(A, +, \cdot)$ и $(B, +, \cdot)$ — кольца. Гомоморфизмом колец называется отображение $\varphi : A \to B$, обладающее свойствами:

1) $\forall a, b \in A$: $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;

2) $\forall a, b \in A$: $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$;

3) $\varphi(1_A) = 1_B$ (это специфическое требование для колец с единицей).

Замечание. Первое свойство гомоморфизма колец показывает, что если забыть об умножениях в кольцах, то гомоморфизм колец становится гомоморфизмом аддитивных групп колец, а значит, появляется возможность ссылаться на свойства гомоморфизмов групп.

Определение ядра гомоморфизма колец.

$$\ker \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0_B\}.$$

Определение образа гомоморфизма колец.

$$\mathrm{Im}\varphi = \{b \in B \mid \exists a \in A : \varphi(a) = b\}.$$

Задача 11. Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец. Докажите, что

а) ядро φ — это идеал в кольце A,

б) образ φ — это подкольцо в B.

Задача 12. Пусть A — произвольное кольцо. Пусть $\varphi\colon \mathbb{Z} \to A$ — гомоморфизм колец. Найдите ядро и образ этого гомоморфизма.

Задача 13. Пусть поле k является подкольцом в кольце A. Пусть $a \in A$ — произвольный элемент кольца. Рассмотрим отображение **вычисления значения в точке** a, обозначаемое $ev_a \colon k[x] \to A$, которое определяется так: $ev_a(f(x)) = f(a)$ (evaluation — вычисление значения). Докажите, что ev_a — это гомоморфизм колец, и найдите его образ и ядро.

Среди гомоморфизмов колец выделяют следующие специальные типы.

Определение. Гомоморфизм колец $\varphi \colon A \to B$ называется

мономорфизмом,		инъекцией.
эпиморфизмом,	если φ как отображение является	сюръекцией.
изоморфизмом,		биекцией.

Эпиморфизмом является канонический гомоморфизм факторизации: пусть R — кольцо, $I \neq R$ — идеал в R, тогда отображение $\varphi \colon R \to R/I$ такое, что $\forall a \in R\ \varphi(a) = [a]$, и есть канонический гомоморфизм факторизации.

Задача 14. Докажите критерий мономорфизма колец: гомоморфизм колец $\varphi \colon A \to B$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $\ker\varphi = \{0_A\}$ — это нулевой идеал в A. (А может, нечего и доказывать?)

Замечание. Из задачи 14 следует критерий изоморфизма: ($\varphi : A \to B$ — изоморфизм колец) $\Leftrightarrow \begin{cases} \ker\varphi = \{0_A\}; \\ \mathrm{Im}\varphi = B. \end{cases}$ Если существует изоморфизм между кольцами, то кольца называются **изоморфными**. Обозначение: $A \cong B$. Вообще, изоморфные кольца неразличимы с точки зрения теории колец.

Задача 15. Докажите, что $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$. (Конструкцию поля комплексных чисел как факторкольца кольца многочленов предложил Коши, Гаусс осуждал этот подход, так как он убивает геометрию в теории комплексных чисел. Но с точки зрения алгебры претензий нет!)

Задача 16. Докажите *теорему о каноническом изоморфизме колец*. Пусть $\varphi \colon A \to B$ — произвольный гомоморфизм колец, тогда

$$\frac{A}{\ker\varphi} \cong \mathrm{Im}\varphi.$$

Заметьте, что с учётом аналогичной теоремы из теории групп Вам осталось доказать совсем немного.

Часть 2. Задачи по алгебре

Первый семестр

Занятие 1. Основные алгебраические структуры

1.1. Является ли операция $*$ на множестве A ассоциативной, если
a) $A = \mathbb{N},\ x * y = x^y$; b) $A = \mathbb{N},\ x * y = \text{НОД}(x, y)$;
c) $A = \mathbb{N},\ x * y = 2xy$; d) $A = \mathbb{Z},\ x * y = x^2 + y^2$;
e) $A = \mathbb{R},\ x * y = \sin x \cdot \sin y$; f) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x * y = x \cdot y^{x/|x|}$?

1.2. Составьте таблицу Кэли для следующих бинарных операций на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:
a) $a * b = \min\{2a, b\}$,
b) $a * b = a + b - \max\{a, b\}$.
По таблице определите, является ли эта операция коммутативной, имеет ли она нейтральный элемент.

1.3. Являются ли группами:
a) множество всех вещественных чисел, отличных от -1, относительно умножения
$$x * y = x + y + xy;$$
b) множество действительных чисел промежутка $[0, 1)$ с операцией $*$, где $a * b$ — дробная часть числа $a + b$;
c) множество всех подмножеств множества $M \neq \emptyset$ относительно операции $*$, где
$$A * B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)?$$

1.4. Являются ли кольцами (полями) относительно операций сложения и умножения чисел множества:
a) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;
b) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;
c) $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$?

1.5. Является ли кольцом (полем) множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с операциями:
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);\ (a, b) \cdot (c, d) = (ad + bc, bd)\ ?$$

1.6. На множестве классов вычетов $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ введем две бинарные операции — сложение и умножение:

$$[a]_m + [b]_m := [a+b]_m,\ [a]_m \cdot [b]_m := [a \cdot b]_m,\ \forall\ [a]_m, [b]_m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Докажите, что эти операции определены корректно, то есть результат обеих операций не зависит от выбора представителей классов вычетов.

1.7. Составьте таблицы Кэли для операций сложения и умножения на множестве

a) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, b) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Найдите все пары противоположных друг другу элементов и все пары обратных друг другу элементов.

Занятие 2. Перестановки и подстановки

2.1. Докажите, что от любой перестановки n-элементного множества можно перейти к любой другой перестановке посредством последовательного выполнения нескольких транспозиций.

Выпишите транспозиции, посредством которых от перестановки 1, 2, 4, 3, 5 можно перейти к перестановке 2, 5, 3, 4, 1.

2.2. Определите число инверсий в перестановках:

a) $6, 3, 1, 2, 5, 4$;

b) $1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8$;

c) $2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4$;

d) $9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$;

e) $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$;

f) $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, 1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1$;

g) $3, 6, 9, ..., 3n, 2, 5, 8, ..., 3n-1, 1, 4, 7, ..., 3n-2$;

h) $2, 5, 8, ..., 3n-1, 3, 6, 9, ..., 3n, 1, 4, 7, ..., 3n-2$;

i) $2, 5, 8, ..., 3n-1, 1, 4, 7, ..., 3n-2, 3, 6, 9, ..., 3n$;

j) $3n, 1, 4, 7, ..., 3n-2, 2, 5, 8, ..., 3n-1, 3, 6, 9, ..., 3n-3$.

2.3. Подберите i и k так, чтобы перестановка

a) 1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9 была четной;

b) 1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7 была нечетной.

2.4. Пусть в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ имеется k инверсий.

а) Сколько инверсий в перестановке $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$?

б) Какое наибольшее значение может принимать k?

2.5*. Докажите, что число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ равно минимальному числу транспозиций типа $(q, q+1)$, $1 \leqslant q \leqslant n-1$, переводящих данную перестановку в натуральное расположение 1, 2,…, n.

2.6. Составьте таблицу умножения (таблицу Кэли) для множества S_3.

2.7. Для подстановок σ и τ найдите $\sigma \circ \tau$ и $\tau \circ \sigma$.

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2.8. Найдите натуральную степень подстановки

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^3$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{98}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{102}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}^{100}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}^{150}$.

2.9. Следующие подстановки разложите в произведение независимых циклов и по декременту определите их четность.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.10. Перемножьте перестановки и результат запишите в виде таблицы:

a) $[(135)(2467)]\cdot[(147)(2356)]$; b) $[(13)(57)(246)]\cdot[(135)(24)(67)]$.

2.11*. Докажите, что всякая подстановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена как произведение транспозиций вида:

a) (12), (13),..., $(1n)$; b) (12), (23),..., $(n-1\ n)$.

Занятие 3. Методы решения систем линейных уравнений: метод Гаусса и метод Крамера

3.1. Следующие системы линейных уравнений решите, пользуясь методом Крамера.

a) $\begin{cases} 4x + 7y + 13 = 0; \\ 5x + 8y + 14 = 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \bar{2}x - y = \bar{1}; \\ x + \bar{2}y = \bar{2} \end{cases}$ над $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

c) $\begin{cases} \bar{3}x - \bar{2}y = \bar{3}; \\ \bar{3}x + \bar{4}y = \bar{2} \end{cases}$ над $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. d) $\begin{cases} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y - \cos\beta = 0; \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y - \sin\beta = 0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = -4; \\ 6x - 2y + 3z = -1; \\ 5x - 3y + 2z = -3. \end{cases}$ f) $\begin{cases} \bar{3}x - \bar{2}y + z = \bar{1}; \\ -x + \bar{2}y + \bar{4}z = \bar{3}; \\ \bar{4}x - \bar{2}y + \bar{2}z = \bar{4} \end{cases}$ над $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

g) $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2 = 0; \\ -\frac{2y}{b} + \frac{3z}{c} - 1 = 0; \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0. \end{cases}$ h) $\begin{cases} 4bcx + acy - 2abz = 0; \\ 5bcx + 3acy - 4abz + abc = 0; \\ 3bcx + 2acy - abz - 4abc = 0, \end{cases}$
где $abc \neq 0$.

3.2. Следующие системы линейных уравнений решите методом Гаусса.

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_2+x_3+x_4=\bar{0}; \\ x_1+x_3+x_4=\bar{1}; \\ x_1+x_2+x_4=\bar{0}; \\ x_1+x_2+x_3=\bar{0} \end{cases}$ над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d) $\begin{cases} \bar{2}x_1-x_2+x_3+\bar{2}x_4=\bar{2}; \\ x_1-\bar{2}x_2-\bar{2}x_3+x_4=\bar{1}; \\ x_1-x_3+\bar{2}x_4=\bar{0}; \\ \bar{2}x_1-x_2+x_3+x_4=\bar{1} \end{cases}$ над $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

e) $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4-6=0; \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4-2=0; \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4-6=0; \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4+7=0. \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3+2x_4=3; \\ 6x_1+9x_2-2x_3-x_4=-4; \\ 10x_1+3x_2-3x_3-2x_4=3; \\ 8x_1+6x_2+x_3+3x_4=-7. \end{cases}$

Занятие 4. Понятие определителя

4.1. Выясните, какие из следующих произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

a) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$; b) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$;

c) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; d) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$;

e) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$; f) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

4.2. Подберите значения i, j и k так, чтобы указанные произведения входили в определитель соответствующего порядка с указанным знаком:

a) $a_{1i}a_{j2}a_{4k}a_{25}a_{53}$, знак плюс; b) $a_{6i}a_{j5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$, знак минус;

c) $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$, знак минус; d) $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$, знак плюс.

4.3. Выпишите все слагаемые, входящие в определитель 5-го порядка и имеющие вид $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4}a_{5\alpha_5}$, определив их знаки.

4.4. Найдите все члены определителя 4-го порядка, содержащие множитель a_{32} и входящие в определитель со знаком минус.

4.5. Найдите все члены определителя, содержащие x^4 и x^3:

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}.$$

4.6. Пользуясь только определением, вычислите определители:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix};$$

$$\text{c)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{d)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{e)}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \text{f)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.7. Вычислите определитель, у которого все элементы главной диагонали равны 1, элементы столбца с номером j равны a_1, a_2,..., a_{j-1}, a_{j+1},..., a_n, а остальные элементы равны 0.

4.8. Представьте определитель

$$\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix}$$

в виде многочлена, расположенного по убывающим степеням t.

4.9. Докажите, что $\det A = \operatorname{sgn}\sigma$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \in S_n$ и A — квадратная матрица порядка n с элементами a_{st}, причем

$$a_{st} = \begin{cases} 1, & \text{если } t = j_s, \\ 0, & \text{если } t \neq j_s. \end{cases}$$

Занятие 5. Свойства определителей. Разложение определителя по строке и столбцу

5.1. Как изменится определитель порядка n, если:

а) у всех его элементов изменить знак на противоположный;

б) каждый его элемент a_{ij} умножить на число c^{i-j}, где $c \neq 0$;

в) его строки записать в обратном порядке;

г) его первый столбец поставить на последнее место, а остальные сдвинуть влево, сохраняя их расположение;

д) каждый его элемент заменить элементом, симметричным относительно побочной диагонали;

е) из каждой строки, кроме последней, вычесть следующую за ней строку, а из последней вычесть прежнюю первую строку?

5.2. Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?

5.3. Не развертывая определитель, докажите следующие тождества:

a) $$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = 0;$$

b) $$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = 0;$$

c) $$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix} = 0;$$

d) $$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

e) $$\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

f) $$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0;$$

g) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

h) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5.4. Докажите, что если все элементы одной строки (одного столбца) определителя равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю.

5.5. Вычислите определители, разложив их по по элементам строки (столбца), содержащей буквы.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \ \text{b)} \begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}, \ \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \ \text{d)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

5.6. Используя свойства определителей, а также разложение определителя по строке и столбцу, докажите следующие тождества:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b);$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b).$$

Занятие 6. Вычисление определителей

6.1. Вычислите определители

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \text{d)} \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix},$$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}, \qquad \text{f)} \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix},$$

$$\text{g)} \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}, \quad \text{h)} \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix},$$

$$g) \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}, \qquad h) \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix},$$

$$i) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \qquad j) \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix},$$

$$k) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}, \qquad l\,) \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & 4\frac{1}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix},$$

$$m) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}, \quad n) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ b_5 & b_5 & b_5 & b_6 & 0 \\ b_7 & b_7 & b_7 & b_7 & b_8 \\ b_9 & b_9 & b_9 & b_9 & b_{10} \end{vmatrix}.$$

6.2. Вычислите определители, пользуясь теоремой Лапласа, предварительно преобразовав их, если это необходимо.

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$d) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \\ -6 & 4 & -9 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad e) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad f) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\text{g)} \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{h)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{i)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{j)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{k)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{l)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

6.3. Вычислите следующие определители n-го порядка методом рекуррентных соотношений.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

6.4. Вычислите определители, пользуясь теоремой о значении определителя Вандермонда.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix},$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

c) $\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \dots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \dots & n^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$,

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 & \dots \\ 1 & 7 & 7^2 & 7^3 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & (n-1)^3 & \dots \\ 1 & n & n^2 & n^3 & \dots \end{vmatrix}$.

Занятие 7. Примерный вариант контрольной работы по теме «Определители»

7.1. Решите следующую систему линейных уравнений, используя а) метод Крамера, б) метод Гаусса,

$$\begin{cases} \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 = \bar{3}; \\ x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{2}x_3 = \bar{3}; \quad \text{над } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\ . \\ x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 = \bar{2} \end{cases}$$

7.2. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} y & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & y & 0 & x \\ x & 7 & 1 & 2 & y \end{vmatrix}$, используя только определение детерминанта.

7.3. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, пользуясь теоремой Лапласа.

7.4. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 5 & 11 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \\ 5 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, пользуясь свойствами.

7.5. Восстановите последний столбец определителя и вычислите его, пользуясь теоремой о значении определителя Вандермонда,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & \dots \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 & \dots \\ 1 & 8 & 8^2 & 8^3 & \dots \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 2n & (2n)^2 & (2n)^3 & \dots \end{vmatrix}.$$

Занятие 8. Арифметические пространства

8.1. Пусть k — произвольное поле. Рассмотрим в арифметическом n-мерном пространстве k^n некоторую систему векторов. Из координат каждого вектора данной системы векторов выберем координаты, стоящие на определенных (одних и тех же для всех векторов) местах, и сохраним их порядок; полученную систему векторов будем называть *укороченной* для первой системы, а первую систему будем называть *удлиненной* для второй.

Докажите, что

а) укороченная система любой линейно зависимой системы векторов линейно зависима;

б) удлиненная система любой линейно независимой системы векторов линейно независима.

8.2. Докажите, что если векторы $a_1,\ a_2,\ a_3$ линейно зависимы и вектор a_3 не выражается линейно через a_1 и a_2, то a_1 и a_2 различаются между собой лишь числовым множителем.

8.3. Найдите все значения $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых вектор $b \in \mathbb{R}^3$ линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3 из $\mathbb{R}^3$:

а) $a_1 = (2, 3, 5),\ a_2 = (3, 7, 8),\ a_3 = (1, -6, 1),\ b = (7, -2, \lambda)$;

b) $a_1 = (4, 4, 3),\ a_2 = (7, 2, 1),\ a_3 = (4, 1, 6),\ b = (5, 9, \lambda)$;

c) $a_1 = (3, 2, 5),\ a_2 = (2, 4, 7),\ a_3 = (5, 6, \lambda),\ b = (1, 3, 5)$;

d) $a_1 = (3,4,2),\ a_2 = (6,8,7),\ a_3 = (15,20,11),\ b = (9,12,\lambda)$.

8.4. Найдите все базы системы векторов:

a) $a_1 = (\bar 1, \bar 2, \bar 0, \bar 0),\ a_2 = (\bar 1, \bar 2, \bar 3, -\bar 1), a_3 = (\bar 3, \bar 1, \bar 0, \bar 0)$ в $\mathbb{F}_5^4$;

b) $a_1 = (\bar 1, \bar 2, \bar 3, \bar 4),\ a_2 = (\bar 2, \bar 3, \bar 4, \bar 5), a_3 = (\bar 3, \bar 4, \bar 5, \bar 6),\ a_4 = (\bar 4, \bar 5, \bar 6, \bar 0)$ в $\mathbb{F}_7^4$;

c) $a_1 = (2,1,-3,1),\ a_2 = (2,2,-6,2),\ a_3 = (6,3,-9,3),\ a_4 = (1,1,1,1)$ в пространстве $\mathbb{R}^4$,

d) $a_1 = (3,2,3),\ a_2 = (2,3,4),\ a_3 = (4,3,4),\ a_4 = (1,1,1)$ в $\mathbb{R}^3$.

8.5. Найдите какую-либо базу системы векторов в $\mathbb{R}^4$ и выразите через эту базу остальные векторы системы:

a) $a_1 = (5,2,-3,1),\ a_2 = (4,1,-2,3),\ a_3 = (1,1,-1,-2),\ a_4 = (3,4,-1,2)$;

b) $a_1 = (2,-1,3,5),\ a_2 = (4,-3,1,3),\ a_3 = (3,-2,3,4),\ a_4 = (4,-1,15,17)$, $a_5 = (7,-6,-7,0)$;

c) $a_1 = (1,2,3,-4),\ a_2 = (2,3,-4,1),\ a_3 = (2,-5,8,-3)$, $a_4 = (5,26,-9,-12),\ a_5 = (3,-4,1,2)$.

8.6. В каком случае система векторов обладает единственной базой?

8.7*. Пусть k — конечное поле, состоящее из q элементов. Найдите количество линейно независимых систем векторов в k^n, состоящих из r векторов.

Занятие 9. Ранг матрицы и методы его вычисления

9.1. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, k),\ B \in \mathrm{Mat}(m \times l, k)$, k — произвольное поле. Докажите, что если ранг матрицы A не меняется при приписывании к ней любого столбца матрицы B, то он не меняется при приписывании к матрице A всех столбцов матрицы B.

9.2. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, k),\ B \in \mathrm{Mat}(m \times l, k)$, k — произвольное поле. Докажите, что ранг матрицы $(A\,|B\,)$, полученной приписыванием к матрице A матрицы B, не превосходит суммы рангов матриц A и B.

9.3. Найдите ранг следующих матриц методом окаймления миноров:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

9.4. Вычислите ранг следующих матриц с помощью элементарных преобразований:

a) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 156 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

9.5. Найдите ранг следующих матриц при различных значениях λ :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

9.6. Докажите, что если ранг матрицы равен r, то минор, стоящий на пересечении любых r линейно независимых строк и линейно независимых столбцов, отличен от нуля.

Занятие 10. Однородные системы линейных уравнений

10.1. Пусть A и B — матрицы одинаковых размеров, причем для однородных систем линейных уравнений с матрицами A и B одна и та же система векторов является фундаментальной системой решений. Докажите, что от матрицы A можно перейти к матрице B элементарными преобразованиями строк метода Гаусса.

10.2. Для следующих однородных систем линейных уравнений найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений и общее решение системы:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0; \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0; \\ x_2 - x_4 = 0; \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0; \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0; \\ -x_3 + x_5 = 0; \\ -x_4 + x_6 = 0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0; \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0; \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0; \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0; \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0; \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

10.3. Найдите все решения следующих систем линейных уравнений:

a) $\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = \bar{0}; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = \bar{0}; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \bar{0}; \\ x_4 + x_6 = \bar{0}; \\ x_2 + x_3 + x_4 = \bar{0}; \\ x_1 + x_5 + x_6 = \bar{0} \end{cases}$ над $\mathbb{F}_2$;

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = \bar{0}; \\ -x_1 + x_3 + x_4 = \bar{0}; \\ \bar{2}x_1 + x_2 - x_4 + \bar{2}x_5 = \bar{0}; \\ -x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = \bar{0}; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = \bar{0} \end{cases}$ над $\mathbb{F}_3$.

10.4. Сколько решений может иметь однородная система из $n-1$ линейных уравнений с n неизвестными над полем $\mathbb{F}_2$?

10.5. Пусть k — произвольное поле. Предложите и обоснуйте метод, позволяющий для любой линейно независимой системы векторов a_1, $a_2, \ldots,$ a_m

из k^n найти однородную систему линейных уравнений, для которой векторы a_1, $a_2, \ldots$, a_m составляют ее фундаментальную систему решений.

Найдите какую-нибудь систему линейных уравнений над полем k, со следующей фундаментальной системой решений:

a) $k = \mathbb{R}$, $a_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $a_2 = (5, 4, 3, 2, 1)$;

b) $k = \mathbb{F}_5$, $a_1 = (\bar{2}, \bar{4}, \bar{1}, \bar{3})$.

10.6*. Сколько фундаментальных систем решений имеет однородная система из m линейных уравнений с n неизвестными над полем k, если ранг матрицы этой системы равен r?

Занятие 11. Неоднородные системы линейных уравнений

11.1. Назовем линейное уравнение с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *следствием совместной системы линейных уравнений* с теми же неизвестными, если ему удовлетворяют все решения этой системы. Докажите, что уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

является следствием некоторой системы линейных уравнений тогда и только тогда, когда вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ является линейной комбинацией строк расширенной матрицы этой системы.

11.2. Приведите примеры систем линейных уравнений, в которых одна из переменных:

a) не может быть включена ни в какую систему свободных переменных;

b) входит в любую систему свободных переменных;

c) входит только в одну систему свободных переменных.

11.3. Пусть $\overline{a}$ — решение неоднородной системы линейных уравнений, а $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ — фундаментальная система решений для однородной системы линейных уравнений, соответствующей данной неоднородной. Докажите, что система векторов $\overline{a}, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ является линейно независимой.

11.4. Решите следующие системы линейных уравнений:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1; \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2; \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3; \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1; \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3; \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7; \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1; \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2; \\ 2x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1; \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4; \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5; \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11; \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6; \end{cases}$ h) $\begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=5; \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=4; \\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5=0; \\ 2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5=1. \end{cases}$

11.5. Найдите все решения следующих систем линейных уравнений:

a) $\begin{cases} x_1-x_3=\bar{1}; \\ x_2-x_4=\bar{2}; \\ \bar{2}x_1+x_2+x_3-x_4=\bar{1}. \end{cases}$ над $\mathbb{F}_3$; b) $\begin{cases} \bar{2}x_1+\bar{3}x_2+x_3=\bar{2}; \\ x_1+x_2-x_3=\bar{3}; \\ x_1+x_3=\bar{2}. \end{cases}$ над $\mathbb{F}_5$.

11.6. Сколько решений может иметь система из $n-1$ линейных уравнений с n неизвестными над конечным полем из q элементов?

11.7. Пусть k — произвольное поле. Докажите, что для любой линейно независимой системы векторов $\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ в k^n найдется неоднородная система линейных уравнений с n неизвестными, такая что всякое решение этой системы имеет вид

$$\overline{a}_0+c_1\overline{a}_1+c_2\overline{a}_2+\ldots+c_m\overline{a}_m,\ c_i\in k, i=\overline{1,m}.$$

Занятие 12. Алгебра матриц

12.1. Выполните действия с матрицами:

a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12.2. Найдите указанные натуральные степени квадратных матриц:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$; e) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$; f) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

12.3. Докажите следующие свойства матриц размера $m \times n$ с элементами из поля k :

a) $\mathrm{rk}\ (A+B) \leq \mathrm{rk}A + \mathrm{rk}B$;

b) всякую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.

12.4. Докажите, что всякую матрицу A размера $m \times n$ ранга один с элементами из произвольного поля k можно представить в виде $A = {}^tB \cdot C$, где $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in k^m$, а $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in k^n$.

12.5. Матрицы E_{ij} произвольного размера, у которых на пересечении i-й строки j-го столбца стоит единица поля k, а остальные элементы равны нулю, называются *матричными единицами*.

a) Докажите, что $E_{ij} \cdot E_{pq} = \delta_{jp} E_{iq}$, где δ_{jp} — символ Кронекера.

b) Найдите $A \cdot E_{ij}$ для произвольной матрицы A.

c) Найдите $E_{ij} \cdot A$ для произвольной матрицы A.

d) Пусть A — квадратная матрица порядка n, причем $E_{ij} \cdot A = A \cdot E_{ij}$ для любой матричной единицы порядка n, тогда $A = \lambda E$, где $\lambda \in k$. Докажите.

e) Пусть A — квадратная матрица порядка n, причем $E_{ii} \cdot A = A \cdot E_{ii}$ для любого $i = \overline{1, n}$, тогда A — диагональная матрица. Докажите.

12.6. Докажите, что если A — невырожденная матрица порядка n с элементами из поля k, то

a) если $B \in \mathrm{Mat}(m \times n, k)$, то $\mathrm{rk}\ B \cdot A = \mathrm{rk}\ B$;

b) если $C \in \mathrm{Mat}(n \times m, k)$, то $\mathrm{rk}\ A \cdot C = \mathrm{rk}\ C$.

12.7. Найдите обратные к следующим матрицам:

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$,

g) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

12.8. Решите матричные уравнения:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

e) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

h) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Занятие 13. Примерный вариант контрольной работы по теме: «Ранг матрицы, системы линейных уравнений, алгебра матриц»

13.1. Выясните: является ли данная система линейных уравнений совместной

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

Если система совместна, то найдите ее общее решение, если несовместна, то найдите общее решение однородной системы линейных уравнений, соответствующей данной.

13.2. Найдите все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \bar{4}x_1 + x_2 + x_3 = \bar{4}; \\ x_1 + \bar{6}x_2 + x_3 = \bar{1}; \\ \bar{3}x_1 + \bar{2}x_2 = \bar{3}, \end{cases}$$

над полем $\mathbb{F}_7$.

13.3. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(обратную матрицу найдите и с использованием присоединенной матрицы, и с помощью элементарных преобразований; сделайте проверку).

13.4. Найдите ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 & 16 \\ 16 & 10 & 3 & 13 & 21 \\ 6 & 4 & \mathbf{t} & 5 & 9 \\ 13 & 7 & 3 & 10 & 12 \\ 8 & 2 & 13 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

при различных значениях параметра.

Занятие 14. Операции над комплексными числами в алгебраической форме записи

14.1. Вычислите:

a) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$; b) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$; c) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;

d) $\dfrac{(3-i)(1+4i)}{(2-i)}$; e) $(2+i)^3-(2-i)^3$; f) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; g) $\left(\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)^6$.

14.2. Выясните, при каких условиях произведение двух комплексных чисел является чисто мнимым числом.

14.3. Найдите вещественные значения неизвестных, удовлетворяющих уравнениям:

a) $(2+i)X+(1+2i)Y=1-4i$; b) $(3+2i)X+(1+3i)Y=4-9i$;
c) $(1+2i)X+(3-5i)Y=1-3i$.

14.4. Решите системы уравнений:

a) $\begin{cases} (1+i)x+(1-i)y=1+i; \\ (1-i)x+(1+i)y=1+3i. \end{cases}$ b) $\begin{cases} ix+(1+i)y=2+2i; \\ 2ix+(3+2i)y=5+3i. \end{cases}$

c) $\begin{cases} (1-i)x-3y=-i; \\ 2x-(3+3i)y=3-i. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-(2+i)y+i=0; \\ (4-2i)x-5y+1+2i=0. \end{cases}$

14.5. Вычислите:

$$\text{a) } \sqrt{2i},\quad \text{b) } \sqrt{-8i},\quad \text{c) } \sqrt{3-4i},\quad \text{d) } \sqrt{-15+8i},\quad \text{e) } \sqrt{-11+60i},$$

$$\text{f) } \sqrt{-8-6i},\qquad \text{g) } \sqrt{2-3i},\qquad \text{h) } \sqrt{1-i\sqrt{3}},\qquad \text{i) } \sqrt{2-i\sqrt{12}}.$$

14.6. Решите уравнения:

a) $x^2-(2+i)x-1+7i=0$, b) $x^2-(3-2i)x+5-5i=0$, c) $x^2-(1+i)x+6+3i=0$,

d) $x^2-5x+4+10i=0$, e) $x^4-3x^2+4=0$, f) $x^4-30x^2+289=0$.

14.7. Составьте формулу для решения биквадратного уравнения

$$x^4+px^2+q=0,$$

с вещественными коэффициентами для случая, когда $p^2-4q<0$.

Занятие 15. Изображение комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

15.1. Найдите тригонометрическую форму комплексных чисел:

a) 5, b) i, c) -2, d) $-3i$, e) $1+i$, f) $1-i$, g) $1+i\sqrt{3}$, h) $-1+i\sqrt{3}$, i) $1-i\sqrt{3}$, j) $\sqrt{3}+i$, k) $-\sqrt{3}+i$, l) $-\sqrt{3}-i$, m) $3+i\sqrt{3}$, n)$2+\sqrt{3}+i$, o) $1-(2+\sqrt{3})i$, p) $\dfrac{1+i\mathrm{tg}\alpha}{1-i\mathrm{tg}\alpha}$.

15.2. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:

a) $\mathrm{Re}z>0$, b) $\mathrm{Im}z\leqslant 1$, c) $|\mathrm{Re}z|<1$, d) $|\mathrm{Im}z|<1, 0<\mathrm{Re}z<1$,

e) $|z|\leqslant 1$, f) $|z-i|>1$, g) $1<|z+i|\leqslant 3$, h) $0<\arg z<\pi/4$,

i) $|\pi-\arg z|<\pi/4$, j) $\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0$, k) $\mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\leqslant 0$, l) $\mathrm{Re}\left(\frac{i}{z}\right)\leq\frac{1}{2}$,

m) $0<\arg\left(\frac{i-z}{i+z}\right)<\frac{\pi}{2}$, n) $\mathrm{Im}\left(z(1-i)\right)<1/2$, o) $\pi/4<\arg(z+i)<\pi/2$,

p) $\mathrm{Re}z^4<\mathrm{Im}z^4$, q) $|z|>1-\mathrm{Re}z$.

15.3. Выполните действия:

$$\text{a) } (1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi-i\sin\varphi),\ \text{b) } \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\psi-i\sin\psi)},$$

$$\text{c) } \left(1+\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{i}{2}\right)^{24},\ \text{d) } (1+i)^{1000}, \quad \text{e) } (1+i\sqrt{3})^{150},$$

$$\text{f) } (\sqrt{3}-i)^{30}, \quad \text{g) } (2-\sqrt{3}+i)^{12},$$

$$\text{h) } \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}, \quad \text{i) } \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}, \quad \text{j) } \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}.$$

15.4. Запишите в алгебраической форме элементы множества:

$$\text{a) } \sqrt[3]{i},\ \text{b) } \sqrt[4]{-4},\ \text{c) } \sqrt[6]{64},\ \text{d) } \sqrt[6]{-27},$$

$$\text{e) } \sqrt[4]{8\sqrt{3}\cdot i-8},\ \text{f) } \sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})},\ \text{g) } \sqrt[3]{1+i},$$

$$\text{h) } \sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}},\ \text{i) } \sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}},\ \text{j) } \sqrt[4]{\frac{-18}{1+i\sqrt{3}}},\ \text{k) } \sqrt[4]{\frac{-32}{9(1-i\sqrt{3})}}.$$

15.5. Представьте в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функции:

$$\text{a) } \sin 4x, \quad \text{b) } \cos 4x, \quad \text{c) } \sin 5x, \quad \text{d) } \cos 5x, \quad \text{e) } \sin 6x.$$

15.6. Докажите равенства ($n \in \mathbb{N}$):

$$\text{a) } \cos nx = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} x \cdot \sin^{2k} x;$$

$$\text{b) } \sin nx = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1} x \cdot \sin^{2k+1} x.$$

15.7. Выразите через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных x, следующие функции:

$$\text{a) } \sin^4 x, \quad \text{b) } \cos^4 x, \quad \text{c) } \sin^5 x, \quad \text{d) } \cos^5 x.$$

15.8***.** Докажите равенства ($m \in \mathbb{N}$):

$$\text{a) } 2^{2m-1}\cos^{2m} x = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + \frac{1}{2}C_{2m}^m;$$

$$\text{b) } 2^{2m}\cos^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2m+1-2k)x;$$

c) $2^{2m-1}\sin^{2m}x = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+k}C_{2m}^{k}\cos 2(m-k)x + \frac{1}{2}C_{2m}^{m}$;

d) $2^{2m}\sin^{2m+1}x = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}C_{2m+1}^{k}\sin(2m+1-2k)x$.

15.9. Вычислите суммы ($n \in \mathbb{N}$):

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$,

b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^6 + \ldots$,

c) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$,

d) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$,

e) $\cos x + C_n^1\cos 2x + \ldots + C_n^n\cos(n+1)x$,

f) $sinx + C_n^1\sin 2x + \ldots + C_n^n\sin(n+1)x$,

g) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$,

h) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx$.

Занятие 16. Корни из единицы. Экспонента комплексного числа

16.1. Найдите все корни из единицы и выпишите все первообразные корни из единицы степеней:

a) 2, b) 3, c) 4, d) 6, e) 8, f) 12, g) 24.

16.2. Найдите двумя способами корни пятой степени из единицы и выразите в радикалах:

a) $\cos\frac{2\pi}{5}$, b) $\sin\frac{2\pi}{5}$, c) $\cos\frac{4\pi}{5}$, d) $\sin\frac{4\pi}{5}$.

16.3. Решите уравнения ($n \in \mathbb{N}$):

a) $(x+1)^n + (x-1)^n = 0$, b) $(x+1)^n - (x-1)^n = 0$, c) $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$.

16.4. Найдите суммы: a) всех корней степени n ($n \in \mathbb{N}$) из единицы;

b) $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1}$, где ε — произвольный корень n-й степени из единицы ($n \in \mathbb{N}$);

c) $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}$, где ε — первообразный корень $2n$-й степени из единицы ($n \in \mathbb{N}$).

16.5. Пусть m и n взаимно простые натуральные числа. Докажите, что

a) все корни степени $m \cdot n$ из единицы получаются умножением корней степени m из единицы на корни степени n из единицы;

b) произведение первообразного корня степени m из единицы и первообразного корня степени n из единицы есть первообразный корень степени $m \cdot n$ из единицы, причем верно и обратное.

16.6. Вычислите:

$$\text{a) } e^{-\frac{\pi}{2}i}, \quad \text{b) } e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad \text{c) } \ln(-1), \quad \text{d) } \ln(1+i).$$

16.7. Решите уравнения:

$$\text{a) } e^{2z} + i\sqrt{3}e^{z} - 1 = 0, \qquad \text{b) } e^{ix} + e^{-ix} = \sqrt{3}.$$

Занятие 17. Примерный вариант итоговой контрольной работы за первый семестр

17.1. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

17.2. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 9x_4 = -3; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 9x_4 = -2; \\ 6x_1 - 4x_3 - 9x_4 = -1; \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

17.3. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

над полем $\mathbb{F}_7$.

17.4. Дано комплексное число

$$z = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^7}{(1+i)^6} + \frac{(1 + i\sqrt{3})^7}{(1-i)^6}.$$

Запишите все элементы множества $\sqrt[4]{z}$ в алгебраической форме.

Второй семестр

Занятие 1. Кольцо многочленов. Операции над многочленами

1.1. a) Известно, что многочлен $f(x)$ дает остаток $x+1$ при делении на x^2+1 и остаток 3 при делении на $x+2$. Найдите остаток при делении $f(x)$ на $(x^2+1)(x+2)$.

b) Известно, что многочлен $f(x)$ дает остаток $ax+b$ при делении на x^2-2 и остаток $cx+d$ при делении на x^2+3. Найдите остаток при делении $f(x)$ на $(x^2-2)(x^2+3)$.

1.2. Разделите с остатком многочлен $f(x) \in k[x]$ на $x - x_0$ и вычислите значение $f(x_0)$:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8 \in \mathbb{Q}[x]$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x \in \mathbb{Q}[x]$, $x_0 = -3$;

c) $f(x) = 3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10 \in \mathbb{Q}[x]$, $x_0 = 2$;

d) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$, $x_0 = -2$;

e) $f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{2}x^3 - x^2 + x + \bar{5} \in \mathbb{F}_{11}[x]$, $x_0 = \bar{3}$;

f) $f(x) = x^{12} + x^6 \in \mathbb{F}_{13}[x]$, $x_0 = \bar{9}$.

1.3. Определите кратность корня x_0 многочлена $f(x)$:

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $x_0 = 2$;

b) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 18x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $x_0 = -2$;

c) $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8$, $x_0 = -1$;

d) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54$, $x_0 = 3$.

1.4. Найдите наибольший общий делитель многочленов:

a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$;

b) $x^6 + \bar{2}x^4 - \bar{4}x^3 - \bar{3}x^2 + \bar{8}x - \bar{5}$ и $x^5 + x^2 - x + \bar{1}$ из $\mathbb{F}_{11}[x]$;

c) $x^5 + \bar{3}x^2 - \bar{2}x + \bar{2}$ и $x^6 + x^5 + x^4 - \bar{3}x^2 + \bar{2}x - \bar{6}$ из $\mathbb{F}_7[x]$;

d) $x^4 + x^3 - 4x + 5$ и $2x^3 - x^2 - 2x + 2$.

1.5. Найдите наибольший общий делитель данных многочленов и его линейное выражение через них (обобщенный алгоритм Евклида):

a) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ и $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$,

b) $3x^3 - 2x^2 + x + 2$ и $x^2 - x + 1$.

1.6. Определите a так, чтобы

a) многочлен $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ имел -1 корнем не ниже второй кратности;

b) многочлен $f(x) = x^{100} - ax^{15} + ax^6 - 1$ имел 1 корнем не ниже второй кратности.

1.7. Определите a и b так, чтобы многочлен $f(x)$ делился на $(x-1)^2$:

a) $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$; b) $f(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$.

1.8. Докажите, что трехчленный многочлен не может иметь корней, отличных от нуля, выше второй кратности. Найдите условие, при котором трехчленный многочлен имеет двойной корень, отличный от нуля.

1.9. Докажите, что многочлен $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

1.10. Выделив кратные неприводимые множители данного многочлена, разложите его на неприводимые множители:

a) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$, b) $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$,

c) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$, d) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$.

1.11. Найдите все приведенные неприводимые многочлены степени два и три над полями $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$ и $\mathbb{F}_5$.

1.12. Найдите сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена:

a) $3x^3 + 2x^2 - 1$, b) $x^4 - x^2 - x - 1$.

1.13. Определите λ так, чтобы

a) один из корней уравнения $x^3 - 7x + \lambda = 0$ равнялся удвоенному другому;

b) сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равнялась 1.

Занятие 2. Многочлены над полями рациональных, действительных, комплексных чисел

2.1. Разложите на неприводимые множители над полем комплексных чисел многочлены:

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, b) $x^4 + 4$, c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$, d) $x^4 - 10x^2 + 1$.

2.2. Разложите на неприводимые множители над полем вещественных чисел многочлены:

a) $x^6 + 27$, b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$, c) $x^4 - ax^2 + 1$ ($|a| < 2$),
d) $x^{2n} + x^n + 1$, e) $x^6 - x^3 + 1$, f) $x^{12} + x^8 + x^4 + 1$.

2.3. Постройте многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами, имеющий:

a) двойной корень 1, простые корни 2, 3 и $1 + i$;

b) двойной корень i, простой корень $-1 - i$.

2.4. Найдите наибольший общий делитель многочленов:

a) $x^m - 1$ и $x^n - 1$, b) $x^m + 1$ и $x^n + 1$.

2.5. Докажите, что если многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ принимает неотрицательные значения при всех $x \in \mathbb{R}$, то он представляется в виде суммы квадратов двух многочленов из $\mathbb{R}[x]$.

2.6. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Известно, что $f(\sqrt{2}) = 0$. Докажите, что $f(x)$ делится на $x^2 - 2$.

2.7. Докажите неприводимость над полем рациональных чисел многочленов:

a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$, b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$,
c) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) - 1$, d) $x^4 - x^3 + 2x + 1$, e) $x^{105} - 9$,
f) $(x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) - 1$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа,
g) $(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \cdot \ldots \cdot (x - a_n)^2 + 1$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа.

2.8. Найдите рациональные корни многочленов:

a) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$, b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$,
c) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$, d) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$,
e) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$, f) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$,
g) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$,
h) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$,
i) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$,
j) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$.

Примерный вариант самостоятельной работы по теме: «Многочлены»

2.9. Пользуясь методом отделения кратных множителей, разложите многочлен $f(x)$ на неприводимые множители:

$$f(x) = x^7 + \overline{2}x^6 + x^5 + \overline{2}x^4 + \overline{2}x^3 + x^2 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{F}_3[x].$$

2.10. Найдите все рациональные корни многочлена $f(x) = 6x^5 + 11x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 3x - 2$.

2.11. Разложите многочлен $f(x) = x^6 + 26x^3 - 27$ на неприводимые над полем вещественных чисел множители.

Занятие 3. Векторные пространства: базис, размерность, координаты векторов

3.1. Докажите, что если некоторый вектор $\overline{v}$ векторного пространства V/k может быть единственным образом линейно выражен через некоторую систему векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$, то эта система является базисом векторного пространства V.

3.2. Выясните, какие из следующих множеств матриц порядка n с коэффициентами из поля k образуют векторное пространство относительно сложения матриц и их умножения на элементы поля k. Найдите их базис и размерность:

a) множество всех матриц;

b) множество всех симметрических матриц $\{A \mid^t A = A\}$;

c) множество кососимметрических матриц $\{A \mid^t A = -A\}$;

d) множество всех невырожденных матриц;

e) множество всех вырожденных матриц;

f) множество матриц, перестановочных с данной матрицей A (при нахождении базиса и размерности считать матрицу A диагональной с различными диагональными элементами);

g) множество матриц, перестановочных со всеми матрицами.

3.3. Найдите базис и размерность следующих векторных пространств:

a) многочлены из $\mathbb{R}[x]_n$, имеющие данный корень $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) многочлены из $\mathbb{R}[x]_n$, имеющие данный корень $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

c) многочлены из $\mathbb{R}[x]_n$, имеющие данные корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

3.4. Векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ и $\overline{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Покажите, что $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ — также базис, и найдите координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе.

a) $\overline{e}_1 = (1,1,1), \overline{e}_2 = (1,1,2), \overline{e}_3 = (1,2,3)$, $\overline{x} = (6,9,14)$.

b) $\overline{e}_1 = (2,1,-3), \overline{e}_2 = (3,2,-5), \overline{e}_3 = (1,-1,1)$, $\overline{x} = (6,2,-7)$.

c) $\overline{e}_1 = (1,2,-1,-2), \overline{e}_2 = (2,3,0,-1), \overline{e}_3 = (1,2,1,4), \overline{e}_4 = (1,3,-1,0)$ $\overline{x} = (7,14,-1,2)$.

3.5. Докажите, что каждая из двух систем векторов является базисом, и найдите связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах:

a) $S = \{(1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\}$, $S' = \{(3,1,4),(5,2,1),(1,1,-6)\}$.

b) $S = \{(1,2,1),(2,3,3),(3,8,2)\}$, $S' = \{(3,5,8),(5,14,13),(1,9,2)\}$.

c) $S = \{(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,3,2,3)\}$,
$S' = \{(1,0,3,3),(-2,-3,-5,-4),(2,2,5,4),(-2,-3,-4,-4)\}$.

3.6. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

a) поменять местами два вектора первого базиса,

b) поменять местами два вектора второго базиса,

c) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

3.7. Перечислите все базисы векторных пространств $\mathbb{F}_3^2$, $\mathbb{F}_2^3$. Сколько различных базисов имеет n-мерное векторное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов?

Занятие 4. Векторные подпространства: сумма и пересечение, прямая сумма

4.1. Выясните, является ли векторным подпространством соответствующего векторного пространства каждое из следующих множеств векторов:

a) векторы плоскости с началом O, концы которых лежат на одной из двух прямых, пересекающихся в O;

b) векторы плоскости с началом O, концы которых лежат на данной прямой;

c) векторы плоскости с началом O, концы которых не лежат на данной прямой;

d) векторы координатной плоскости, концы которых лежат в первой четверти;

e) векторы пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых — целые числа;

f) векторы пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$;

g) многочлены чётной степени с коэффициентами из поля k.

4.2. Найдите базис и размерность следующих подпространств в $\mathbb{R}^n$:

a) подпространство векторов, у которых совпадают первая и последняя координаты;

b) подпространство векторов, у которых все координаты с четными номерами равны 0;

c) подпространство векторов, у которых координаты с нечетными номерами равны между собой.

4.3. Докажите, что всякое векторное пространство размерности n над бесконечным полем имеет бесконечное число векторных подпространств размерности m, где $m < n$.

4.4. Перечислите все векторные подпространства в $\mathbb{F}_5^2$ и $\mathbb{F}_2^3$. Сколько различных векторных подпространств размерности m содержит n-мерное векторное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов?

4.5. Найдите базис и размерность линейной оболочки следующих систем векторов:

a) $\{(1,0,0,-1),(2,1,1,0),(1,1,1,1),(1,2,3,4),(0,1,2,3)\}$;

b) $\{(1,1,1,1,0),(1,1,-1,-1,-1),(2,2,0,0,-1),(1,1,5,5,2),(1,-1,-1,0,0)\}$.

4.6. Найдите базисы суммы и пересечения линейных оболочек следующих систем векторов:

a) $S = \{(1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3)\}$, $T = \{(2,3,-1),(1,2,2),(1,1,-3)\}$;

b) $S = \{(1,2,1,-2),(2,3,1,0),(1,2,2,-3)\}$,
$T = \{(1,1,1,1),(1,0,1,-1),(1,3,0,-4)\}$;

c) $S = \{(-1,6,4,7,-2),(-2,3,0,5,-2),(-3,6,5,6,-5)\}$,
$T = \{(1,1,2,1,-1),(0,-2,0,-1,-5),(2,0,2,1,-3)\}$;

d) $S = \{(1,1,0,0,-1),(0,1,1,0,1),(0,0,1,1,1)\}$,
$T = \{(1,0,1,0,1),(0,2,1,1,0),(1,2,1,2,-1)\}$.

4.7. Пусть векторные подпространства U и V в $\mathbb{R}^n$ заданы следующими системами уравнений $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ и $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ соответственно. Докажите, что $\mathbb{R}^n = U \oplus V$.

4.8. Докажите, что пространство $Mat(n, \mathbb{R})$ является прямой суммой подпространства симметрических и подпространства кососимметрических матриц.

Занятие 5. Линейные операторы. Кольцо эндоморфизмов векторного пространства

5.1. Какие из следующих отображений в соответствующих векторных пространствах являются линейными операторами. Для линейных операторов найти образы и ядра:

a) $x \mapsto x + a$, где a — фиксированный вектор;
b) $f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$, где $f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$;
c) $f(x) \mapsto f^{(k)}(x)$, $f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$;
d) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$;
e) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$;
f) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$;
g) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3)$.

5.2. Докажите, что всякий линейный оператор переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую систему векторов. Верно ли аналогичное утверждение для линейно независимой системы векторов?

5.3. Опишите все эндоморфизмы одномерного векторного пространства над произвольным полем k.

5.4. Найдите общее количество эндоморфизмов n-мерного векторного пространства над конечным полем $\mathbb{F}_q$, размерность ядра которых равна m ($0 \leqslant m \leqslant n$).

5.5. Предварительно проверив, что a_1, a_2, a_3 являются базисными векторами в $\mathbb{R}^3$, найдите матрицу линейного оператора, переводящего векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3, как в базисе a_1, a_2, a_3, так и в базисе, в котором даны координаты всех векторов:

a) $a_1 = (2, 3, 5), a_2 = (0, 1, 2), a_3 = (1, 0, 0); b_1 = (1, 1, 1), b_2 = (1, 1, -1), b_3 = (2, 1, 2)$;

b) $a_1 = (2, 0, 3), a_2 = (4, 1, 5), a_3 = (3, 1, 2); b_1 = (1, 2, -1), b_2 = (4, 5, -2), b_3 = (1, -1, 1)$.

5.6. Пусть линейный оператор φ в n-мерном векторном пространстве V/k переводит линейно независимые векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ соответственно. Докажите, что матрица этого оператора в некотором базисе $\overline{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ равна BA^{-1}, где столбцы матриц A и B состоят соответственно из координат заданных векторов в базисе $\overline{e}$.

5.7. Найдите в указанном базисе векторного пространства матрицу линейного оператора:

a) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ в стандартном базисе;

b) поворота трехмерного пространства на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, заданной в прямоугольной системе координат уравнениями $x_1 = x_2 = x_3$ в базисе из единичных векторов осей координат;

c) проектирования трехмерного пространства на координатную ось вектора e_2 параллельно координатной плоскости векторов e_1 и e_3 в базисе e_1, e_2, e_3;

d) оператора $X \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot X$ в пространстве $Mat(2, k)$ в базисе из матричных единиц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) оператора $X \mapsto^t X$ в пространстве $Mat(2, k)$ в базисе из матричных единиц;

f) оператора дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ в базисе $1, x, \ldots, x^n$;

g) оператора дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ в базисе

$$1, x-1, \frac{(x-1)^2}{2}, \ldots, \frac{(x-1)^n}{n!}.$$

5.8. Найдите общий вид матрицы линейного оператора ψ в базисе, первые k векторов которого составляют: a) базис ядра ψ, b) базис образа ψ.

5.9. Эндоморфизм φ некоторого четырехмерного векторного пространства в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу φ в базисе a) e_1, e_3, e_2, e_4, b) $e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

5.10. Пусть линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}[x]_2$ имеет в базисе $1, x, x^2$ матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите его матрицу в базисе $3x^2+2x+1, x^2+3x+2, 2x^2+x+3$.

5.11. a) Пусть преобразование φ в базисе $a_1 = (1,2), a_2 = (2,3)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $b_1 = (3,1), b_2 = (4,2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу преобразования $\varphi + \psi$ в базисе b_1, b_2.

b) Пусть преобразование φ в базисе $a_1 = (-3,7), a_2 = (1,-2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $b_1 = (6,-7), b_2 = (-5,6)$ — матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу преобразования $\varphi \cdot \psi$ в базисе, в котором даны координаты всех векторов.

Занятие 6. Линейные операторы. Собственные значения и собственные векторы

6.1. Найдите собственные векторы и собственные значения:

a) оператора дифференцирования в пространствах $\mathbb{R}[x]_n$ и $\mathbb{F}_p[x]$ (p — простое число);

b) оператора $X \mapsto^t X$ в пространстве $Mat(n, \mathbb{R})$;

c) оператора $x\frac{d}{dx}$ в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$;

d) оператора $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$.

6.2. Докажите, что все ненулевые векторы векторного пространства являются собственными для линейного оператора φ тогда и только тогда, когда φ — оператор гомотетии $x \mapsto \alpha x$, где α — некоторый фиксированный скаляр.

6.3. (*Теорема о вычислении характеристического многочлена.*) Докажите, что характеристический многочлен $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ имеет вид

$$f(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}c_1\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^k c_{n-k}\lambda^k + \ldots + c_n,$$

где c_k — сумма всех диагональных миноров порядка k матрицы A. Выведите отсюда, что сумма и произведение характеристических чисел матрицы A равны ее следу и определителю соответственно.

6.4. Докажите, что всякий многочлен степени n со старшим коэффициентом $(-1)^n$ является характеристическим многочленом некоторой матрицы порядка n.

6.5. Пусть L — векторное пространство над полем k, и $\dim L = n$. Докажите, что

a) если $k = \mathbb{C}$, то любой эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{End}(L)$ имеет ненулевой собственный вектор;

b) если $k = \mathbb{R}$ и n — нечетное число, то любой эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{End}(L)$ имеет ненулевой собственный вектор, если же n — четное число, то существует эндоморфизм $\psi \in \mathrm{End}(L)$, не имеющий собственных векторов;

c) если $k = \mathbb{Q}$ и $n > 1$, то существует эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{End}(L)$, не имеющий собственных векторов.

6.6. Докажите, что матрица A подобна диагональной матрице над соответствующим полем, если

a) $A \in Mat(n, \mathbb{R})$, $A^2 = E$;

b) $A \in Mat(n, \mathbb{C})$, $A^t = E$, $t \in \mathbb{N}$;

c) $A \in Mat(n, k)$, где k — произвольное поле, и $A^2 = A$.

6.7. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе указанными матрицами. Дополнительно выясните, приводится ли матрица оператора к диагональному виду путем перехода к новому базису.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{d)}\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix},\quad \text{e)}\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix},\quad \text{f)}\ \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

g) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

j) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, k) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, l) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6.8. Обобщением понятия собственного вектора линейного оператора является понятие *инвариантного подпространства* линейного оператора: пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, векторное подпространство $L < V$ называется инвариантным подпространством оператора φ, если $\varphi(L) \subset L$. Докажите, что

a) ядро и образ эндоморфизма векторного пространства являются его инвариантными подпространствами;

b) одномерное подпространство является инвариантным подпространством векторного оператора тогда и только тогда, когда оно порождено собственным вектором этого линейного оператора;

c) векторное подпространство

$$L = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m \rangle$$

является инвариантным относительно линейного оператора φ тогда и только тогда, когда $\varphi(\bar{e}_i) \in L, i = \overline{1, m}$;

d) для линейного оператора $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ и любого вектора $\overline{x} \in V$ векторное подпространство, порожденное множеством

$$\left\{\varphi^k(\overline{x})\right\}_{k=0}^{\dim V},$$

является инвариантным пространством оператора φ.

6.9. Найдите все инвариантные подпространства линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в некотором базисе трехмерного пространства.

Примерный вариант самостоятельной работы по теме: «Векторные пространства. Эндоморфизмы векторных пространств»

6.10. Найдите базис суммы и базис пересечения подпространств в $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (3,2,0,1); (2,1,-1,-1); (1,1,1,1); (1,1,1,2) \rangle,$$
$$T = \langle (2,0,1,1); (0,3,-1,1); (1,-1,0,-2); (2,3,0,2) \rangle.$$

6.11. Линейный оператор φ задан в базисе $a_1 = (2,1,1); a_2 = (1,1,-1); a_3 = (1,1,2)$ матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, а линейный оператор ψ задан в базисе $b_1 = (2,2,1); b_2 = (3,2,0); b_3 = (1,1,-1)$ матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу линейного оператора $\psi \circ \varphi$ в базисе b_1, b_2, b_3.

6.12. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -3 & -5 & -7 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Занятие 7. Жорданова нормальная форма матрицы

7.1. Составьте таблицу элементарных делителей и найдите нормальную жорданову форму матрицы A, если даны инвариантные множители ее характеристической матрицы:

a) $e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = 1,\ e_3(\lambda) = e_4(\lambda) = \lambda - 1,\ e_5(\lambda) = e_6(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$,

b) $e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = 1,\ e_3(\lambda) = \lambda - 2,\ e_4(\lambda) = \lambda^2 - 4$,

c) $e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = e_3(\lambda) = 1,\ e_4(\lambda) = \lambda + 1,\ e_5(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, $e_6(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$,

d) $e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = e_3(\lambda) = e_4(\lambda) = 1,\ e_5(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda,\ e_6(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3$.

7.2. По таблице элементарных делителей вычислите инвариантные множители характеристической матрицы для матрицы A, а также найдите жорданову нормальную форму матрицы A.

a)	$(\lambda-1)^2$	$\lambda-1$	$\lambda-1$	b)	$(\lambda+1)^2$	$\lambda+1$	$\lambda+1$	c)	$\lambda-3$	$\lambda-3$
	$\lambda+5$				$(\lambda+2)^3$	$\lambda+2$			$(\lambda-1)^3$	$(\lambda-1)^3$
					λ^2	λ			$(\lambda+2)^2$	$\lambda+2$

7.3. Составьте все возможные типы таблиц элементарных делителей и соответствующие жордановы нормальные формы для матриц из $Mat(3,\mathbb{C})$ и $Mat(4,\mathbb{C})$.

7.4. Найдите жорданову форму матрицы оператора и матрицу перехода к жорданову базису, если в исходном базисе оператор задан матрицей:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$,

g) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, i) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$,

j) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, k) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, l) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7.5. Известно, что матрица $A \in Mat(n,k)$ имеет нормальную жорданову форму J. Найдите нормальную жорданову форму матриц:

a) $A + \alpha E$, где α — произвольный элемент поля k;

b) ${}^tA$;

c) A^2, предварительно выяснив, какую жорданову форму имеет квадрат жордановой клетки порядка m, отвечающей числу λ_0.

Занятие 8. Квадратичные формы

8.1 Выясните, эквивалентны ли следующие комплексные квадратичные формы:

a) $x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 + 3x_2x_4 + 2x_4^2$ и $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$,

b) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2ix_1x_4 + 4x_2x_3 - 2ix_2x_4 - 4ix_3x_4$ и $x_1^2 - (2+2i)x_1x_4 + 2ix_4^2$.

8.2. Приведите к каноническому виду над полем рациональных чисел следующие квадратичные формы, указав при этом линейную замену переменных, приводящую к этому виду:

a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
b) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;
c) $x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;
d) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;
e) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

8.3. Приведите квадратичные формы над $\mathbb{Q}$ к каноническому виду:

$$\text{a)}\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<k} x_ix_k; \qquad \text{b)}\ \sum_{i<k} x_ix_k.$$

8.4. Найдите нормальный канонический вид следующих вещественных квадратичных форм, их ранги, сигнатуру, а также невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду:

a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
b) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
d) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;
e) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;
f) $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.

8.5. Найдите все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

a) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;
c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

8.6. Найдите все значения параметра λ, при которых отрицательно определены следующие квадратичные формы:

a) $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$;
b) $\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

8.7. Докажите, что если все характеристические числа вещественной симметрической матрицы A лежат на отрезке $[a, b]$, то квадратичная форма с матрицей $A - \lambda E$ отрицательно определена при $\lambda > b$ и положительно определена при $\lambda < a$. Докажите также обратную теорему.

Занятие 9. Примерный вариант итоговой контрольной работы за второй семестр

9.1. Разложите многочлен

$$f(x) = 4x^5 - 7x^3 + 13x^2 - 9x + 2$$

на неприводимые множители a) над полем действительных чисел, b) над полем комплексных чисел.

9.2. Найдите жорданову форму матрицы оператора и матрицу перехода к жорданову базису, если в исходном базисе оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.3. Найдите нормальный канонический вид вещественной квадратичной формы, ее ранг, сигнатуру, а также невырожденную линейную замену переменных, приводящую к этому виду

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3.$$

Третий семестр

Занятие 1. Евклидовы пространства

1.1. Докажите, что для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ произвольного евклидова пространства справедливы утверждения

a) $\big|||\overline{a}|| - ||\overline{b}||\big| \leqslant ||\overline{a} - \overline{b}|| \leqslant ||\overline{a}|| + ||\overline{b}||$;

b) $||\overline{a}|| \cdot ||\overline{b}|| = |(\overline{a}, \overline{b})| \iff$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы;

c) пусть $\overline{b} \neq \overline{0}$, тогда

$||\overline{a} + \overline{b}|| = ||\overline{a}|| + ||\overline{b}|| \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geqslant 0:\ \overline{a} = \alpha\overline{b}$;

$||\overline{a} - \overline{b}|| = ||\overline{a}|| + ||\overline{b}|| \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \leqslant 0:\ \overline{a} = \alpha\overline{b}$;

$||\overline{a} - \overline{b}|| = ||\overline{a}|| - ||\overline{b}|| \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geqslant 1:\ \overline{a} = \alpha\overline{b}$.

1.2. С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки:

a) $\langle (1, 2, 2, -1),\ (1, 1, -5, 3),\ (3, 2, 8, -7) \rangle$;

b) $\langle (1, 1, -1, -2),\ (5, 8, -2, -3),\ (3, 9, 3, 8) \rangle$;

c) $\langle (2, 1, 3, -1),\ (7, 4, 3, -3),\ (1, 1, -6, 0),\ (5, 7, 7, 8) \rangle$.

1.3. Дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса систему векторов:

a) $\{(1,-2,2,-3),\ (2,-3,2,4)\}$;

b) $\{(1,1,1,2),\ (1,2,3,-3)\}$;

c) $\{(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}),\ (\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})\}$;

d) $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$.

1.4. Многочлены

$$P_0 = 1,\ P_k = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k}\left[(x^2-1)^k\right],\ k \in \mathbb{N}$$

называются многочленами Лежандра.

a) Докажите, что многочлены Лежандра образуют ортогональный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ со скалярным произведением

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

b) Найдите явный вид многочленов $P_k(x)$ для $k \leqslant 4$.

c) Докажите, что $\deg\, P_k(x) = k$. Найдите развернутое выражение по степеням x для $P_k(x)$ при всех k.

d) Найдите длину многочлена Лежандра $P_k(x)$.

e) Вычислите значение $P_k(1)$.

f) Докажите, что при применение процесса ортогонализации к базису $(1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)$ пространства $\mathbb{R}[x]_n$ получается базис, элементы которого лишь постоянным множителем отличаются от соответствующих многочленов Лежандра. Найдите эти множители.

1.5. Пусть K и M — произвольные подпространства конечномерного евклидова пространства E_n. Докажите:

a) $K \subset M \Leftrightarrow M^\perp \subset K^\perp$;

b) $(K^\perp)^\perp = K$;

c) $(K+M)^\perp = K^\perp \bigcap M^\perp$;

d) $(K \cap M)^\perp = K^\perp + M^\perp$.

1.6. Найдите базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

a) $\langle(1,0,2,1),\ (2,1,2,3),\ (0,1,-2,1)\rangle$;

b) $\langle(1,1,1,1),\ (-1,1,-1,1),\ (2,0,2,0)\rangle$.

1.7. Найдите уравнения, задающие ортогональное дополнение к пространству, заданному системой уравнений:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0. \end{cases}$

1.8. Найдите проекцию вектора $\overline{x}$ на подпространство L и ортогональную составляющую вектора $\overline{x}$:

a) $L = \langle (1,1,1,1),\ (1,2,2,-1),\ (1,0,0,3) \rangle$, $\overline{x} = (4,-1,-3,4)$;

b)$L = \langle (2,1,1,-1),\ (1,1,3,0),\ (1,2,8,1) \rangle$, $\overline{x} = (5,2,-2,2)$;

c) L задано системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \quad \overline{x} = (7,-4,-1,2). \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0; \end{cases}$$

Занятие 2. Ортогональные и самосопряжённые операторы в евклидовом пространстве

2.1. Какие из приведённых ниже матриц являются матрицами некоторого ортогонального оператора в ортонормированном базисе?

a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

2.2. Запишите недостающие элементы матрицы, если это возможно, так чтобы полученная матрица была матрицей ортогонального оператора в ортонормированном базисе:

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cdots \\ \cdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots \\ \cdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \cdots \\ \frac{2}{3} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \cdots & \frac{4}{5} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{3} & \cdots \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$.

2.3. Найдите диагональную форму и ортонормированный базис из собственных векторов для самосопряжённого оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -7 \\ -2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\sqrt{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. a) Докажите, что оператор $\varphi(f) = (x^2 - 1) \cdot f'' + 2x \cdot f'$ является самосопряжённым оператором в евклидовом пространстве вещественных многочленов относительно скалярного произведения $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) dx$.

b) Докажите, что многочлены Лежандра (задача 1.4) являются собственными векторами оператора φ.

2.5. Определите тип кривой, найдите её каноническое уравнение и найдите каноническую систему координат:

a) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0$,

b) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y = 0$,

c) $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$,

d) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$.

2.6. Определите вид каждой из следующих поверхностей второго порядка, напишите её каноническое уравнение и найдите каноническую систему координат:

a) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 162 = 0$,

b) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$,

c) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4xz - 16x - 16y - 8z = 0$,

d) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6xz - 2x + 6y + 2z = 0$.

Занятие 3. Понятие группы, понятие подгруппы. Таблица Кэли. Порядок элемента группы. Экспонента группы

3.1. Какие из указанных множеств являются группами относительно указанных операций:

a) $(A, +)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+$;

b) $(A, \cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$;

c) множество комплексных чисел с фиксированным модулем r относительно умножения;

d) множество комплексных корней *всех* степеней из единицы относительно умножения;

e) множество всех нечетных подстановок степени n относительно умножения подстановок;

f) (*четверная группа Клейна*) подмножество подстановок

$$V_4 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

в S_4 относительно операции умножения подстановок;

g) множество симметрических (кососимметрических) матриц относительно сложения;

h) множество матриц с фиксированным определителем d относительно умножения;

i) множество диагональных матриц с вещественными коэффициентами относительно сложения (умножения);

j) (*группа кватернионов*) множество матриц

$$\mathbb{H} = \left\{ \pm 1 = \pm E, \pm i = \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm j = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm k = \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

с комплексными коэффициентами относительно умножения.

3.2. Докажите, что во всякой группе

a) пересечение любого набора подгрупп является подгруппой;

b) если подгруппа C содержится в объединении подгрупп A и B, то либо $C \subseteq A$, либо $C \subseteq B$.

3.3. Докажите, что непустое подмножество H в группе G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых x и y из H $xy^{-1} \in H$.

3.4. Докажите, что *конечное* непустое подмножество в группе, замкнутое относительно групповой операции, является подгруппой.

3.5. Составьте таблицу Кэли для следующих конечных групп

a) V_4, b) S_3, c) D_4, d) $\mathbb{H}$.

По таблице сделайте вывод, является группа абелевой или нет.

3.6. Найдите порядок элемента указанной группы

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$,

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \in \mathbb{C}^*$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}^*$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL(4,\mathbb{R})$, f) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$,

g) $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$, h) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$.

3.7. Докажите, что во всякой группе

a) элементы g и g^{-1} имеют одинаковый порядок;

b) элементы x и yxy^{-1} имеют одинаковый порядок;

c) элементы ab и ba имеют одинаковый порядок.

3.8. Найдите экспоненты следующих групп: a) V_4, b) S_3, c) $\mathbb{H}$, d) A_4, e) S_4.

3.9. Докажите, что если экспонента группы равна двум, то группа абелева.

3.10. Составьте диаграмму Хассе для подгрупп следующих групп

a) V_4, b) S_3, c) $\mathbb{H}$, d) D_4, e*) A_4, f*) S_4.

Занятие 4. Классы смежности. Факторгруппа. Гомоморфизмы групп

4.1. Выпишите все левые и все правые смежные классы группы G по подгруппе H

a) $G = S_3,\ H = \langle (1)(23) \rangle$;

b) $G = \mathbb{H},\ H = \langle -1 \rangle$;

c) $G = D_4,\ H = \langle S_x \rangle$, здесь S_x — симметрия относительно оси Ox;

d) $G = A_4,\ H = \langle (123)(4) \rangle$.

Исходя из полученных результатов сделайте вывод, является ли подгруппа H нормальной в группе G или нет.

4.2. Докажите, что подгруппа H — нормальный делитель в группе G

a) $H = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},\ G = S_4$;

b) H — любая подгруппа в группе $\mathbb{H}$.

4.3. Докажите теорему Оре: пусть A и B — нормальные подгруппы в группе G, причем $A \cap B = \{e\}$. Тогда $xy = yx$ для любых $x \in A$ и $y \in B$.

4.4. Какие из отображений $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ являются гомоморфизмами групп:
a) $f(z) = |z|$, b) $f(z) = 2|z|$, c) $f(z) = \frac{1}{|z|}$,
d) $f(z) = 1 + |z|$, e) $f(z) = |z|^2$, f) $f(z) = a,\ a \in \mathbb{R}^*$.

4.5. Сопоставим каждой матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ дробно-линейное преобразование комплексной плоскости

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Докажите, что это соответствие является гомоморфизмом групп и найдите ядро этого гомоморфизма.

4.6. Докажите, что отображение $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ такое, что $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$ для любого $x \in \mathbb{R}$ является гомоморфизмом групп. Найдите ядро и образ этого гомоморфизма.

4.7. Пусть $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм групп, причем G — конечная группа. Пусть $\varphi(a) = b$, где $a \in G$. Докажите, что
a) $|\mathrm{Im}\ \varphi| \mid |G|$;
b) $\mathrm{ord}\ b \mid \mathrm{ord}\ a$.

4.8. Составьте таблицу Кэли для факторгруппы G/H.
a) $H = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},\ G = A_4$,
b) $H = \langle S_0 \rangle,\ G = D_4$,
здесь S_0 — центральная симметрия относительно начала координат.

Занятие 5. Конечные абелевы группы

5.1. Пусть $\varphi\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ — гомоморфизм циклических групп. Докажите, что

a) гомоморфизм φ однозначно задается своим значением на произвольной образующей группы $\mathbb{Z}_n$,

b) элемент a группы $\mathbb{Z}_m$ является образом элемента, порождающего $\mathbb{Z}_n$, при некотором φ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ord} a \mid n$.

5.2. Используя результат задачи 5.1, опишите все гомоморфизмы следующих групп и выясните, какие из них являются моно-, эпи-, изоморфизмами:

a) $\varphi\colon \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{14}$, b) $\varphi\colon \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$,

c) $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_6$, d) $\varphi\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{24}$.

5.3. Пользуясь теоремой о структуре конечной абелевой группы, найдите все с точностью до изоморфизма абелевы группы порядка

a) 8, b) 12, c) 16, d) 24, e) 36, f) 48, g) 900.

5.4. Изоморфны ли группы

a) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$,

b) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{24}$,

c) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{10}$ и $\mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{10}$?

5.5. Найдите все подгруппы порядков 2, 3 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12.

5.6. Опишите все конечные абелевы группы, в которых любая собственная подгруппа является циклической.

5.7. При каких условиях на натуральное число n существует ровно k классов изоморфных абелевых подгрупп порядка n; $k = 1, 2, 3, 4$?

Занятие 6. Порождающие элементы и определяющие соотношения

6.1. В группе S_4 определим подгруппу $H = \langle (12)(34), (1234) \rangle$ системой образующих. Какой порядок имеет эта подгруппа? Перечислите её элементы.

6.2. Найдите все двухэлементные множества, порождающие группы a) S_3, b) $\mathbb{H}$, c) D_4. Запишите определяющие соотношения для каждой пары.

6.3. Докажите теорему об образующих симметрической группы: группа S_n порождается

a) множеством всех транспозиций;

b) множеством всех транспозиций вида $(1, k)$, $k = 2, ..., n$;

c) множеством всех транспозиций вида $(k, k+1)$, $k = 1, ..., n-1$;

d) транспозицией $(1, 2)$ и полным циклом $(12...n)$.

6.4. Докажите, что A_5 порождается подстановками $(1)(254)(3)$ и (12345).

Занятие 7. Кольца и идеалы

7.1. Являются ли областями целостности следующие кольца
a) $\mathbb{Z}_3[x]$, b) $\mathbb{Z}_4[x]$, c) $C(\mathbb{R})$, d) $C[a,b]$?

7.2. Докажите, что конечная область целостности является полем.

7.3. Найдите все обратимые элементы и все делители нуля в кольцах
a) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, b) $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, c) $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, p — простое, d) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, e) $C[a,b]$.

7.4. Докажите, что пересечение любого семейства идеалов есть идеал.

7.5. Докажите, что следующие множества являются идеалами в указанных кольцах

a) множество всех многочленов из кольца $k[x]$, где k — поле, имеющих корнем данный элемент $a \in k$;

b) множество I_S непрерывных функций из кольца $C[a,b]$, обращающихся в ноль на фиксированном подмножестве $S \subseteq [a,b]$.

7.6. Докажите, что коммутативное кольцо с единицей является полем тогда и только тогда, когда все его идеалы тривиальны.

7.7. Является ли указанное кольцо кольцом главных идеалов

a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, b) $k[x,y]$, где k — поле, c) кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i] = \{m + in, m, n \in \mathbb{Z}\}$?

7.8. Являются ли отображения гомоморфизмами колец

a) $D : C^1[a,b] \to C[a,b]$, где $D(f) = f'$ для любой функции $f \in C^1[a,b]$;

b) $\varphi : A \to A/I$, где $\varphi(a) = [a]$ (A — произвольное кольцо, I — идеал A)?

В случае положительного ответа найдите ядро и образ гомоморфизма.

7.9. Пусть K — поле положительной характеристики p, а $q = p^n$, $n \in \mathbb{N}$, — примарное число. Докажите, что отображение $\varphi_q\colon K \to K$ такое, что $\varphi_q(a) = a^q$, $\forall a \in K$, является мономорфизмом полей. Докажите также, что если K — конечное поле, то φ_q — *автоморфизм* поля K.

7.10. Докажите, что если $\varphi\colon A \to B$ — эпиморфизм колец и A — кольцо главных идеалов, то B — тоже кольцо главных идеалов.

7.11. Используя задачу 7.10, опишите все идеалы кольца

a) $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, b) $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)$, c) $\mathbb{R}[x]/(x^2)$, d) $\mathbb{F}_2[x]/(x^4+x^2+1)$.

7.12. Составьте таблицы Кэли для сложения и умножения в следующих фактор кольцах

a) $\mathbb{F}_2[x]/(x^2+1)$, b) $\mathbb{F}_2[x]/(x^2+x+1)$, c) $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$, d) $\mathbb{F}_3[x]/(x^2-x+1)$.

Занятие 8. Элементы общей теории полей

8.1. Найдите минимальные многочлены данного элемента:

a) $\sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}$, b) $\sqrt[7]{5}$ над $\mathbb{Q}$, c) $2-3i$ над $\mathbb{R}$, d) $2-3i$ над $\mathbb{C}$,

e) $\sqrt[105]{9}$ над $\mathbb{Q}$, f) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$, g) $1+\sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, h) ζ_6 над $\mathbb{Q}$.

8.2. Докажите свойство мультипликативности степени расширения: если E/F и F/k — конечные расширения, то расширение E/k также является конечным, причем

$$[E:k]=[E:F]\cdot[F:k].$$

8.3. Найдите степень расширения $K(\alpha)/\mathbb{Q}$, где

a) $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ \alpha=\sqrt{3}$, b) $K=\mathbb{Q}(i),\ \alpha=\sqrt{5}i$, c) $K=\mathbb{Q}(i),\ \alpha=\sqrt[4]{2}$.

Занятие 9. Конечные поля

9.1. Перечислите все подполя поля a) $GF(2^{36})$, b) $GF(3^{40})$. Составьте соответствующие диаграммы Хассе.

9.2. Решите уравнения в поле $\mathbb{F}_{11}$

a) $x^2+3x+7=0$, b) $x^2+5x+1=0$, c) $x^2+2x+3=0$, d) $x^2+3x+5=0$.

9.3. Пользуясь критерием Батлера, определите, является ли данный многочлен неприводимым над указанным полем.

a) $f(x)=x^4+x^2+1$ над $\mathbb{F}_2$, b) $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ над $\mathbb{F}_2$,
c) $f(x)=x^4+x^3+x+2$ над $\mathbb{F}_3$, d) $f(x)=x^3+x^2+x+1$ над $\mathbb{F}_3$.

9.4. Найдите экспоненту $O(f)$ неприводимого многочлена $f(x)\in\mathbb{F}_p[x]$

a) $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1\in\mathbb{F}_2[x]$,

b) $f(x)=x^3+2x+2\in\mathbb{F}_3[x]$.

Сделайте вывод о примитивности данных многочленов.

9.5. Найдите все неприводимые многочлены указанных степеней над данным полем. Выберите из них примитивные многочлены:

a) над полем $\mathbb{F}_2$ степеней 2, 3, 4 и 5;

b) над полем $\mathbb{F}_3$ степеней 2 и 3;

c) над полем $\mathbb{F}_5$ степени 2.

9.6. Используя результаты задачи 9.5, опишите все конечные поля $GF(q)$, где $q \leqslant 32$, по следующей схеме: выберите простое подполе $\mathbb{F}_p$ в $GF(q)$, выберите примитивный многочлен $p(x)$ нужной степени в $\mathbb{F}_p[x]$, запишите таблицу, позволяющую выразить степени примитивного элемента в виде элементов фактор поля $\mathbb{F}_p[x]/(p(x))$.

9.7. Пользуясь результатом задачи 9.6, решите уравнения в поле $GF(27)$

a) $z^6 - 1 = 0$, b) $z^{39} - 1 = 0$, c) $x^8 + x^5 - x^4 - x^3 - x + 1 = 0$, d) $x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$.

9.8. Разложите многочлен $x^n - 1$ на неприводимые множители в $GF(q)[x]$:

a) $n = 15$, $q = 2$; b) $n = 15$, $q = 4$; c) $n = 23$, $q = 2$.

9.9. Сформулируйте алгоритм, позволяющий определить количество множителей и их степень в разложении двучлена $x^n - 1$ на неприводимые множители в $GF(q)[x]$.

Занятие 10. Линейные рекуррентные последовательности

10.1. Известно, что u — ЛРП порядка m над кольцом R, и дано $2m$ знаков этой последовательности — вектор $u(\overline{0, 2m-1})$. Докажите, что многочлен $F(x) = x^m - f_{m-1}x^{m-1} - \ldots - f_0$ будет характеристическим для ЛРП u тогда и только тогда, когда столбец его коэффициентов ${}^t(f_0, f_1, \ldots, f_{m-1})$ есть решение системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} u(0) & u(1) & \ldots & u(m-1) \\ u(1) & u(2) & \ldots & u(m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u(m-1) & u(m) & \ldots & u(2m-2) \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} u(m) \\ u(m+1) \\ \ldots \\ u(2m-1) \end{pmatrix}.$$

Приведите пример, доказывающий, что по $2m-1$ знакам ЛРП u ранга m её характеристический многочлен не восстанавливается однозначно.

10.2. Известно, что u — ЛРП порядка m над полем k. Докажите, что $\mathrm{rang}\, u$ равен рангу матрицы

$$A = \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & \ldots & u(m-1) \\ u(1) & u(2) & \ldots & u(m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u(m-1) & u(m) & \ldots & u(2m-2) \end{pmatrix}$$

и равен наибольшему r такому, что минор $M^{1,\ldots,r}_{1,\ldots,r}$ матрицы A отличен от нуля.

10.3. Найдите минимальный многочлен ЛРП u порядка m над полем k в следующих случаях:

a) $k = \mathbb{F}_2,\ m = 6,\ u(\overline{0,11}) = (010101001011)$;
b) $k = \mathbb{F}_2,\ m = 6,\ u(\overline{0,11}) = (010111100010)$;
c) $k = \mathbb{F}_5,\ m = 5,\ u(\overline{0,9}) = (0123444400)$;
d) $k = \mathbb{F}_5,\ m = 6,\ u(\overline{0,11}) = (103111220000)$;
e) $k = \mathbb{Q},\ m = 4,\ u(\overline{0,7}) = (11122345)$.

10.4. Докажите, что для любой ЛРП над кольцом целых чисел существует единственный минимальный многочлен.

10.5. Найдите все возможные начальные векторы линейных рекуррент $u \in L_{\mathbb{F}_2}(F)$ по следующим данным:

a) $F(x) = x^3 + x + 1,\ u(3,5,6) = (1,1,0)$;
b) $F(x) = x^3 + x + 1,\ u(3,4,6) = (1,1,0)$;
c) $F(x) = x^3 + x + 1,\ u(3,4,6) = (1,1,1)$;
d) $F(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1,\ u(1,2,4,5,8,10,15) = (0000000)$.

10.6. Докажите, что минимальный многочлен ЛРП $u \in L_k(F)$, где k — это поле, равен $F(x)$ тогда и только тогда, когда генератор u относительно $F(x)$ взаимно прост с $F(x)$. В частности, $F(x)$ является минимальным многочленом для любой ненулевой ЛРП из $L_k(F)$ тогда и только тогда, когда $F(x)$ неприводим над полем k.

10.7. Найдите генератор и минимальный многочлен ЛРП u над полем k с характеристическим многочленом $F(x)$ и начальным вектором $u(\overline{0,m-1})$, если:

a) $k = \mathbb{F}_2,\ F(x) = x^5 + x^2 + x + 1,\ (11100)$;
b) $k = \mathbb{F}_2,\ F(x) = x^5 + x^2 + x + 1,\ (10001)$;

c) $k = \mathbb{F}_2,\ F(x) = x^5 + x^2 + x + 1,\ (01001);$
d) $k = \mathbb{F}_5,\ F(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1,\ (0123);$
e) $k = \mathbb{F}_5,\ F(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1,\ (0113);$
f) $k = \mathbb{F}_5,\ F(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1,\ (1203).$

10.8. Докажите, что для любых нормированных многочленов $F(x)$ и $G(x)$ над полем k справедливы равенства:
a) $L_k(F) \bigcap L_k(G) = L_k(D)$, где $D(x) = (F(x), G(x))$;
b) $L_k(F) + L_k(G) = L_k(H)$, где $H(x) = \text{НОК}(F(x), G(x))$.

10.9. Дана u — ЛРП над полем $\mathbb{F}_5$ с характеристическим многочленом $F(x)$ и начальным вектором $u(\overline{0, m-1})$. Найдите $u(n)$.
a) $F(x) = x^6 - 2x^3 + x^2 + 3x + 2,\ (011031),\ n = 1986.$
b) $F(x) = (x^2 - 2x - 2)^2,\ (0001),\ n = 37.$

10.9. Для линейных рекуррент из задач 10.3, 10.5, 10.7 выясните, какие из них являются периодическими, и найдите их периоды и длины подходов.

Занятие 11. Примерный вариант контрольной работы за третий семестр

11.1. Постройте ортогональную систему векторов, эквивалентную данной $\overline{a_1} = (2, -1, 2, -3)$, $\overline{a_2} = (5, -2, 3, -6)$, $\overline{a_3} = (1, 0, 2, -1)$, $\overline{a_4} = (3, 1, -1, 1)$.

11.2. Подгруппа H в группе S_6 задана своими образующими

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выпишите все элементы H. Заполните таблицу порядков элементов для H.

11.3. Найдите все корни многочленов a) $f(x) = x^{12} + 1$, b) $f(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + 1$ из $\mathbb{F}_2[x]$, принадлежащие полю $GF(16)$.

Дополнение А. Экспонента комплексного числа

Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. По аналогии с понятием предела последовательности действительных чисел введем следующее

Определение. Говорят, что последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, равный комплексному числу z, если

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall\ n > N\ |z - z_n| < \varepsilon.$$

Обозначение: $z = \lim_{n\to\infty} z_n$.

Докажем прежде всего, что исследование предельного перехода в комплексном случае сводится к рассмотрению пределов двух последовательностей действительных чисел.

Лемма 1. Дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Комплексное число z является пределом данной последовательности тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия:

$$\mathrm{Re}z = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}z_n, \quad \mathrm{Im}z = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}z_n.$$

Доказательство. Доказательство леммы основано на следующих очевидных неравенствах:

$$\forall\ z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}: \quad \max\{|a|, |b|\} \le |z| \le |a| + |b|. \tag{A.1}$$

1) Пусть $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, где $z = a + ib$, $z_n = a_n + ib_n$. По определению, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N\ |z - z_n| = |(a - a_n) + i(b - b_n)| < \varepsilon$, тогда в силу (A.1) $|a - a_n| < \varepsilon$ и $|b - b_n| < \varepsilon$. Таким образом, по определению предела последовательностей действительных чисел $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

2) Пусть теперь $\mathrm{Re}z = a = \lim_{n\to\infty} a_n$ и $\mathrm{Im}z = b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Возьмем произвольное положительное число ε, тогда для него:

$$\exists\ N_1 \in \mathbb{N}:\ \forall\ n > N_1\ |a - a_n| < \varepsilon/2,$$
$$\exists\ N_2 \in \mathbb{N}:\ \forall\ n > N_2\ |b - b_n| < \varepsilon/2.$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда вновь в силу (A.1) для $\forall\ n > N\ |z - z_n| \le |a - a_n| + |b - b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Таким образом, $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ просто по определению предела. $\triangle$

Упражнение. Используя лемму 1 и свойства пределов последовательностей действительных чисел, сформулируйте и докажите утверждения о пределе суммы и произведения двух последовательностей комплексных чисел.

Теперь мы получим достаточное условие сходимости последовательности комплексных чисел в терминах тригонометрической формы записи комплексных чисел.

Лемма 2. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность ненулевых комплексных чисел, причем $z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$ — тригонометрическая форма n-го члена этой последовательности. Если существуют пределы последовательностей действительных чисел $r = \lim r_n$ и $\varphi = \lim \varphi_n$, то существует предел исходной последовательности, причем $\lim z_n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Доказательство. Рассмотрим комплексное число $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$. По условию, $\mathrm{Re}z_n = r_n\cos\varphi_n$, $\mathrm{Im}z_n = r_n\sin\varphi_n$.

$$\lim \mathrm{Re}z_n = \lim r_n\cos\varphi_n = \lim r_n \cdot \lim\cos\varphi_n = [\cos\ \text{— непр. функ.}] =$$

$$= r\cos(\lim\varphi_n) = r\cos\varphi = \mathrm{Re}z.$$

Аналогично, $\lim \mathrm{Im}z_n = r\sin\varphi = \mathrm{Im}z$, тогда в силу леммы 1,

$$\lim z_n = z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Лемма доказана. △

Основное определение. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Если существует предел последовательности

$$\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty},$$

то он называется *экспонентой числа* z и обозначается e^z или $\exp(z)$.

Замечание. Как следствие второго замечательного предела получаем, что для действительных z предел соответствующей последовательности действительных чисел из основного определения существует и равен значению показательной функции действительного переменного в точке z. Таким образом, введенное нами определение обобщает экспоненту действительного аргумента на случай комплексного аргумента.

Теорема (Эйлер). Для любого $z \in \mathbb{C}$ определена экспонента z, то есть существует предел $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$. Более того, если $a = \mathrm{Re}z$, $b = \mathrm{Im}z$, то

$$e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b) \tag{A.2}$$

(формулу (2) называют формулой Эйлера).

Доказательство. Пусть $w_n = 1 + \frac{z}{n}$, тогда $\mathrm{Re}w_n = 1 + \frac{a}{n}$, $\mathrm{Im}w_n = \frac{b}{n}$. Наша цель — исследовать на сходимость последовательность $\{w_n^n\}_{n=1}^{\infty}$. Имеем: $|w_n| = r_n = \left(1 + \frac{2na+a^2+b^2}{n^2}\right)^{1/2}$. Выясним, существует ли предел последовательности $\{|w_n^n| = r_n^n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} r_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2na+a^2+b^2}{n^2}\right)^{n/2} = \left[u_n = \frac{2na+a^2+b^2}{n^2};\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}\right]^{\frac{nu_n}{2}} = \left[\lim_{n\to\infty}(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}\right]^{\lim\frac{nu_n}{2}}$$

$$= [\text{в квадратных скобках — II замеч. предел}] =$$

$$= e^{\lim\frac{u_n\cdot n}{2}} = \left[\lim_{n\to\infty}\frac{nu_n}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2na+a^2+b^2}{2n} = a\right] = e^a.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = e^a. \tag{A.3}$$

Перейдем к исследованию последовательности аргументов чисел w_n^n. Так как для $n > -a$ $\mathrm{Re}w_n > 0$, то (для таких n) $\arg w_n$ — угол I четверти, если $b > 0$, или угол IV четверти, если $b < 0$. Тогда в качестве аргумента w_n можно взять

$$\varphi_n = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}w_n}{\mathrm{Re}w_n} = \mathrm{arctg}\frac{b}{n+a},$$

тогда в силу формулы Муавра $\arg w_n^n = n\varphi_n$. Выясним теперь, существует ли предел последовательности аргументов членов исследуемой нами последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\arg w_n^n = \lim_{n\to\infty} n\varphi_n = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{arctg}\frac{b}{n+a} = \left[v_n = \frac{b}{n+a};\ \lim_{n\to\infty} v_n = 0\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} nv_n\cdot\frac{\mathrm{arctg}v_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} nv_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}v_n}{v_n} =$$

$$= [\text{второй предел равен 1, аналог I замеч. предела}] = \lim_{n\to\infty}\frac{nb}{n+a} = b.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = b. \tag{A.4}$$

В силу (A.3) и (A.4) по лемме 2 получаем, что существует предел последовательности $\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right\}$, то есть для любого $z\in\mathbb{C}$ определена экспонента. Более того, в силу леммы 2 с учетом (A.3) и (A.4), получаем формулу Эйлера: $e^z = e^a(\cos b + i\sin b)$. $\triangle$

Свойства экспоненты

Рассмотрим функцию комплексного переменного $f(z) = e^z$, которую часто называют *экспонентой.* Опишем простейшие свойства этой функции.

Свойство 1^o. Область определения функции $f(z)$ есть $\mathbb{C}$: $D(f) = \mathbb{C}$. (Это другая формулировка теоремы Эйлера.)

Свойство 2^o. Область значений функции $f(z)$ совпадает со множеством всех ненулевых комплексных чисел: $E(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Доказательство. В силу формулы Эйлера, которая задает тригонометрическую форму числа e^z, $\forall z = a + ib \in \mathbb{C} : |f(z)| = e^a \neq 0$, то есть $f(z) \neq 0$.

Пусть теперь $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма этого числа. Тогда в силу формулы Эйлера (2) и условия равенства двух комплексных чисел в тригонометрической форме, находим, что $w = e^{z_k}$, где $z_k = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ (здесь $\ln r$ — натуральный логарифм положительного числа r — функция действительного переменного). Итак, $w \in E(f)$. $\triangle$

Замечание. По аналогии с определением натурального логарифма для положительных чисел можно определить натуральный логарифм ненулевого комплексного числа:

Определение. Число $z \in \mathbb{C}$ называется натуральным логарифмом ненулевого комплексного числа w, если $w = e^z$. **Обозначение:** $z = \ln w$.

При доказательстве свойства 2^o мы нашли все значения натурального логарифма для $w \neq 0$:

$$\ln w = \ln r + i(\varphi + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z},$$

таким образом, натуральный логарифм комплексных чисел — бесконечнозначная функция.

Свойство 3^o *(обобщение привычного свойства экспоненты действительных чисел).* Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 : $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, или $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Доказательство. Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ — алгебраические формы двух произвольных комплексных чисел z_1 и z_2, тогда $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$. Применим формулу (A.2) к $z_1 + z_2$:

$$f(z_1 + z_2) = e^{z_1+z_2} = e^{a_1+a_2}(\cos(b_1 + b_2) + i\sin(b_1 + b_2)) = [\text{применяем св-во}$$

$$\text{показательной функ. действ. перем.}] = e^{a_1} \cdot e^{a_2}(\cos(b_1 + b_2) + i\sin(b_1 + b_2)). \tag{A.5}$$

Вспоминая правило умножения двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, получаем, что

$$f(z_1) \cdot f(z_2) = e^{z_1} \cdot e^{z_2} = [e^{a_1}(\cos b_1 + i\sin b_1)] \cdot [e^{a_2}(\cos b_2 + i\sin b_2)] =$$

$$= e^{a_1} \cdot e^{a_2}(\cos(b_1 + b_2) + i\sin(b_1 + b_2)). \tag{A.6}$$

Сравнивая (A.5) и (A.6), получаем, что $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$. $\triangle$

Свойство 4^0. Функция $f(z)$ является периодической: $\forall z \in \mathbb{C}: \; e^{z+2\pi i} = e^z$.

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Применим свойство 3^o :

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = [\text{применяем ф-лу Эйлера к } e^{2\pi i}] =$$

$$= e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z,$$

что и требовалось доказать. △

Замечание *(экспоненциальная форма комплексного числа).* Пусть z — ненулевое комплексное число, а $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — его тригонометрическая форма. Так как $\cos\varphi + i\sin\varphi$ можно записать в виде $e^{i\varphi}$, то имеем следующее представление комплексного числа z :

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \text{ где } r = |z|, \; \varphi = \arg z. \tag{A.7}$$

Запись (A.7) называют *экспоненциальной формой комплексного числа.*

Дополнение Б. Теорема о структуре конечной абелевой группы

Теорема (о структуре конечной абелевой группы). Пусть G — конечная абелева группа, тогда G изоморфна прямой сумме циклических групп, то есть

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_s}.$$

Доказательство. Считаем, что G — аддитивная группа. Будем доказывать теорему индукцией по порядку группы G.

1. База индукции. Пусть $|G| = 1$, тогда $G = \{0\}$ — циклическая группа. Если $|G| = 2$, то $G \cong \mathbb{Z}_2$ — циклическая группа. Итак, в обоих тривиальных случаях терема верна.

2. Предположение индукции. Пусть теорема о структуре конечных абелевых групп доказана для всех групп, порядок которых меньше n.

3. Переход индукции. Пусть G — произвольная абелева группа порядка n, пусть m — это экспонента группы G. Тогда в G есть элемент y, порядок которого равен m.

Пусть $H = \langle y \rangle$ — циклическая подгруппа, порождённая y;

$$H = \{0, y, 2y, \ldots, (m-1)y\}.$$

Рассмотрим факторгруппу G/H, это абелева группа и её порядок равен $\frac{n}{m}$, а значит, по предположению индукции, имеем изоморфизм групп

$$\varphi\colon G/H \to \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_s}.$$

Шаг 1. Пусть a — произвольный элемент группы $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_s}$, а $[x] = \varphi^{-1}(a) \in G/H$. Здесь $[x]$ — это левый смежный класс элемента x по подгруппе H и $\operatorname{ord}[x] = \operatorname{ord} a$. Покажем, что в классе $x + H$ есть элемент z такой, что $\operatorname{ord}[x] = \operatorname{ord} z$. Ищем z в виде: $z = x + ty$, где $t \in \{0, \ldots, m-1\}$. Пусть $\operatorname{ord}[x] = d$, тогда

$$d[x] = [dx] = [0],$$

то есть $dx \in H$, или $dx = ry$, где $0 \leqslant r < m$. Заметим, что если $\operatorname{ord} x = d_1$, то $d|d_1$ (объясните, почему!). По свойствам порядка $\operatorname{ord} dx = \frac{d_1}{d}$, $\operatorname{ord} ry = \frac{m}{(r,m)}$. Значит, $\frac{d_1}{d} = \frac{m}{(r,m)}$, откуда

$$(r, m) = \frac{m}{d_1} \cdot d. \qquad \text{(Б.1)}$$

Итак, мы ищем такой z, что $dz = 0$:

$$0 = dz = d(x + ty) = dx + dty =$$

$$= ry + dty = (r + dt)y = 0. \qquad \text{(Б.2)}$$

Так как $\operatorname{ord} y = m$, то условие (Б.2) равносильно тому, что

$$r + dt \equiv 0 \pmod{m}.$$

Мы получили сравнение первой степени относительно неизвестной t. Оно разрешимо тогда и только тогда, когда $(d, m)|r$. Но $(d, m) = d$, а в силу (Б.1), учитывая, что порядок элемента группы делит экспоненту группы, получаем, что $d|r$. Итак, в классе $[x]$ есть представитель z такой, что его порядок равен порядку класса в факторгруппе. Далее мы будем считать, что x совпадает с найденным представителем z для любого смежного класса $[x] \in G/H$.

Шаг 2. Рассмотрим в группе

$$\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_s}$$

«базисные» элементы $e_1 = ([1]_1, [0]_2, \ldots, [0]_s)$, $e_2 = ([0]_1, [1]_2, \ldots, [0]_s)$, $\ldots$, $e_s = ([0]_1, [0]_2, \ldots, [1]_s)$ (здесь $[a]_i$ обозначает класс вычетов целого числа a по модулю m_i, $i = \overline{1, s}$). Тогда $\operatorname{ord} e_i = m_i$. Пусть $[x_i] = \varphi^{-1}(e_i)$, тогда, учитывая замечание в конце предыдущего шага, $\operatorname{ord} x_i = m_i$. Покажем, что любой элемент u группы G можно единственным способом представить в следующем виде:

$$u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_s x_s + by,$$

$$0 \leqslant a_i < m_i, i = 1, \ldots, s, \ 0 \leqslant b < m. \qquad \text{(Б.3)}$$

Пусть $\pi\colon G \to G/H$ — канонический эпиморфизм факторизации, то есть $\pi(x) = [x]$ для любого $x \in G$. Пусть

$$\varphi \circ \pi(u) = ([a_1]_1, [a_2]_2, \ldots, [a_s]_s) =$$

$$= a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_se_s,$$

где в качестве представителей классов вычетов взяты остатки от деления на соответствующие m_i. Рассмотрим элемент $v = u - (a_1x_1 + \ldots + a_sx_s)$. Имеем:

$$\varphi \circ \pi(v) = \varphi \circ \pi(u - (a_1x_1 + \ldots a_sx_s)) =$$

$$= \varphi \circ \pi(u) - a_1\varphi \circ \pi(x_1) - \ldots - a_s\varphi \circ \pi(x_s) =$$

$$= \varphi \circ \pi(u) - a_1e_1 - \ldots - a_se_s = 0.$$

Значит, $v \in Ker(\varphi \circ \pi) = Ker(\pi) = H$. То есть $v = by$, где $0 \leqslant b < m$. Итак, существование разложения (Б.3) доказано. Докажем единственность. Пусть $u = a_1x_1 + \ldots + a_sx_s + by =$
$= a_1'x_1 + \ldots + a_s'x_s + b'y$ — два разложения типа (Б.3). Тогда

$$0 = (a_1 - a_1')x_1 + \ldots + (a_s - a_s')x_s + (b - b')y. \tag{Б.4}$$

Подействуем на это равенство эпиморфизмом $\varphi \circ \pi$:

$$0 = \varphi \circ \pi((a_1 - a_1')x_1 + \ldots + (a_s - a_s')x_s + (b - b')y) =$$

$$= \varphi((a_1 - a_1')[x_1] + \ldots + (a_s - a_s')[x_s] + (b - b')[y]) =$$

$$= (a_1 - a_1')e_1 + \ldots + (a_s - a_s')e_s.$$

Значит, для любого $i = 1, \ldots, s$ $[a_i - a_i']_i = [0]_i$. Учитываем, что $0 \leqslant a_i, a_i' < m_i$, получаем, что $a_i = a_i'$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда (Б.4) примет вид $0 = (b - b')y$, то есть $m|(b - b')$. Вновь учитываем, что $0 \leqslant b, b' < m$ и получаем $b = b'$. Единственность разложения (Б.3) доказана.

Шаг 3. Определим отображение

$$\psi : G \to \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_s} \oplus \mathbb{Z}_m$$

по правилу: пусть для элемента u группы G имеем разложение (Б.3), тогда полагаем $\psi(u) = ([a_1]_1, \ldots, [a_s]_s, [b]_m)$. Читателю предоставляется несложная проверка того, что ψ — изоморфизм групп. Значит,

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_s} \oplus \mathbb{Z}_m,$$

теорема доказана. $\triangle$

Часть 3. Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

1. Представления групп

Напомним, что *действие* группы G на множестве X — это отображение $G\times X \to X\colon (g,x)\mapsto g.x$, удовлетворяющее двум свойствам: $g.(h.x)=(gh).x$ и $e.x=x$ для любых $g,h\in G$, $x\in X$.

Определение 1.1. *Представление* группы G в векторном пространстве V (над каким-нибудь полем $\mathbb{F}$) — это гомоморфизм групп $\varphi\colon G\to \mathrm{GL}(V)$. Размерность пространства V (если она конечна) называется *размерностью* представления, а само пространство V, в котором задано представление, — *пространством представления* или *G-модулем.* Если φ — мономорфизм, то представление называется *точным.*

Часто, допуская вольность речи, мы будем опускать гомоморфизм φ в обозначениях и говорить, что V — представление группы G, хотя, строго говоря, представлением является именно гомоморфизм φ: на одном и том же пространстве можно задать несколько представлений. Обратим внимание, что любое представление автоматически определяет действие G на пространстве V как на множестве по правилу

$$g.v=\varphi(g)(v),\ g\in G,\ v\in V.$$

Пример 1.2. i) G — любая группа, V — любое пространство, $\varphi(g)=\mathrm{id}_V$ для всех $g\in G$. Это представление называется *тождественным.* Если $\dim V=1$, то оно также называется *тривиальным.*

ii) *Перестановочное* представление: $G=S_n$ — группа подстановок на n элементах, $V=\mathbb{F}^n$, для любой $\sigma\in S_n$

$$\varphi(\sigma)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{\sigma^{-1}(1)}\\ \vdots\\ x_{\sigma^{-1}(n)}\end{pmatrix}.$$

Чтобы понять, что это действительно представление, заметим сначала, что j-я координата вектора $\varphi(\sigma)(x)$ равна $\sigma^{-1}(j)$-й координате вектора x. Значит, если e_i — i-й вектор стандартного базиса для какого-то i от 1 до n, то j-я координата вектора $\varphi(\sigma)(e_i)$ равна

$$\left(\varphi(\sigma)(e_i)\right)_j=(e_i)_{\sigma^{-1}(j)}=\begin{cases}1, & \text{если } \sigma^{-1}(j)=i,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Условие $\sigma^{-1}(j) = i$ равносильно тому, что $\sigma(i) = j$, поэтому $\varphi(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Но тогда для любых подстановок σ, $\tau \in S_n$

$$\varphi(\sigma\tau)(e_i) = e_{(\sigma\tau)(i)} = e_{\sigma(\tau(i))} = \varphi(\sigma)(e_{\tau(i)}) = \varphi(\sigma)\left(\varphi(\tau)(e_i)\right),$$

а это и означает, что φ является представлением S_n в пространстве V.

iii) *Знаковое* представление: $G = S_n$, $V = \mathbb{F}$, $\varphi(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma) \in \mathbb{F}^\times \cong \mathrm{GL}(V)$.

iv) $G = S_3$, $V = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим правильный треугольник на плоскости с центром в начале координат и одной из вершин на оси абсцисс. Занумеруем его вершины числами 1, 2, 3 против часовой стрелки, начиная от вершины на оси абсцисс. Каждое движение плоскости, переводящее в себя этот треугольник как множество, переводит вершины в вершины, то есть соответствует некоторой подстановке $\sigma \in G$. С другой стороны, любое такое движение оставляет центр треугольника на месте, поэтому оно определяет некоторый оператор на V; его-то мы и поставим в соответствие подстановке σ.

v) Пусть группа G *действует* на произвольном множестве X. Обозначим через $V = \mathbb{F}[X]$ пространство всех функций на X со значениями в поле $\mathbb{F}$ (сложение и умножение на число определяются поточечно). Тогда формула

$$\left(\varphi(g)(f)\right)(x) = f(g^{-1}.x),\ g \in G,\ f \in V,\ x \in X,$$

определяет представление группы G в пространстве V (проверьте!).

Упражнение 1.3. Выпишите матрицы всех операторов $\varphi(\sigma)$ из пункта iv) предыдущего примера в базисе e_1, e_2, где e_1 направлен из начала координат в первую вершину треугольника, а e_2 — во вторую.

Определение 1.4. Пусть V — представление группы G. Подпространство $W \subseteq V$ называется *G-инвариантным*, если $g.w \in W$ для любых $g \in G$, $w \in W$. Иногда G-инвариантные подпространства ещё называют *подпредставлениями* или *G-подмодулями*. Ясно, что W можно рассматривать как самостоятельное представление группы G, забыв о действии группы на большем пространстве. В любом G-модуле есть два *тривиальных* подмодуля: нулевое подпространство и само V; если других инвариантных подпространств нет, то представление называется *неприводимым*, а если есть — *приводимым*.

Пример 1.5. i) Любое одномерное представление любой группы неприводимо. ii) Представление $G = S_n$ в $V = \mathbb{F}^n$ из примера 1.2 (ii) является приводимым, потому что подпространства $W_1 = \{x \in V \mid x_1 = \ldots = x_n\}$ и $W_2 = \{x \in V \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}$, очевидно, инвариантны.

Определение 1.6. Пусть $\varphi_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ и $\varphi_2\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ — представления одной и той же группы G. Их *прямой суммой* (как представлений) называется представление $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V_1 \oplus V_2)$, заданное формулой

$$\varphi(g)(v_1, v_2) = (\varphi_1(g)(v_1), \varphi_2(g)(v_2)),$$

где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $g \in G$. Другими словами,

$$g.(v_1, v_2) = (g.v_1, g.v_2).$$

Линейное отображение $\eta\colon V_1 \to V_2$ называется *морфизмом* представлений, если $\eta(g.v) = g.\eta(v)$ для любых $g \in G$, $v \in V_1$. Легко убедиться, что морфизмы из V_1 в V_2 образуют векторное пространство; оно обозначается $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$. Морфизм представлений называется *моно-*, *эпи-* и *изоморфизмом*, если он является таковым как линейное отображение. Проверьте, что ядро и образ любого морфизма представлений являются G-подмодулями!

Упражнение 1.7. (*Лемма Шура.*) i) Покажите, что между неизоморфными неприводимыми представлениями одной и той же группы нет никаких морфизмов, кроме нулевого.

ii) Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (или, более общо, поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто). Проверьте, что любой морфизм из неприводимого представления V группы G в него само обязательно *скалярен*, то есть имеет вид $\lambda \cdot \mathrm{id}_V$; другими словами, докажите, что

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1$$

Указание. В первом пункте рассмотрите ядро и образ произвольного морфизма из одного неприводимого представления в другое. Во втором пункте рассмотрите какое-нибудь собственное значение морфизма.

Определение 1.8. Пусть V — представление группы G, W — инвариантное подпространство. Тогда формула

$$g.[v] = [g.v],\ g \in G,\ v \in V,$$

определяет на факторпространстве V/W представление группы G (почему?), которое называется *факторпредставлением* (а V/W — *фактормодулем*).

Например, если V_1, V_2 — какие-то представления, $V = V_1 \oplus V_2$ — их прямая сумма, а

$$W = \{(0, v),\ v \in V_1\} \cong V_1,$$

то $V/W \cong V_2$, разумеется.

Определение 1.9. Пусть V — представление группы G. Тогда формула

$$(g.\lambda)(v) = \lambda(g^{-1}.v),\ g \in G,\ \lambda \in V^*,\ v \in V,$$

определяет на сопряжённом пространстве V^* представление группы G (почему?), которое называется *сопряжённым* или *двойственным* к V.

Определение 1.10. Пусть $\varphi_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ и $\varphi_2\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ — представления одной и той же группы G. Их *тензорным произведением* (как представлений) называется представление $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2)$, заданное формулой

$$\varphi(g)(v_1 \otimes v_2) = \varphi_1(g)(v_1) \otimes \varphi_2(g)(v_2),$$

где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $g \in G$. (Поскольку $V_1 \otimes V_2$ порождается как векторное пространство такими тензорами, эта формула полностью определяет отображение φ). Другими словами,

$$g.(v_1 \otimes v_2) = (g.v_1) \otimes (g.v_2).$$

Определение 1.11. Представление называется *вполне приводимым*, если оно изоморфно прямой сумме неприводимых. Эквивалентное определение: V вполне приводимо, если в нём есть инвариантные подпространства $W_1, \ldots, W_t$ такие, что $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_t$ как векторные пространства, причём каждое W_i неприводимо как самостоятельное представление. К примеру, любое неприводимое представление вполне приводимо.

Упражнение 1.12. Докажите, что полная приводимость конечномерного представления V эквивалентна тому, что любое его G-инвариантное подпространство обладает G-инвариантным дополнением, то есть для любого подпредставления $W \subseteq V$ существует такое подпредставление $W' \subseteq V$, что $V = W \oplus W'$ (как векторные пространства).

Указание. Для доказательства необходимости зафиксируйте какое-нибудь разложение $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_t$ представления V в прямую сумму неприводимых подпредставлений и выберите максимальное по включению множество индексов $I \subseteq \{1, \ldots t\}$, для которого сумма $W + W'$, где $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$, — прямая. Чтобы проверить, что $W \oplus W' = V$, докажите сначала, что если какое-то неприводимое подпредставление W_i имеет непустое пересечение с каким-то G-инвариантным подпространством, то W_i обязательно содержится в этом подпространстве.

Пример 1.13. Представление бесконечной группы может быть приводимым, но не вполне приводимым. Рассмотрим, к примеру, двумерное представление аддитивной группы поля комплексных чисел $G = \mathbb{C}$, определяемое правилом

$$\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\colon \alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оно приводимо: одномерное подпространство, натянутое на первый вектор стандартного базиса, G-инвариантно. В то же время у этого подпространства нет G-инвариантного дополнения (почему?), значит, с учётом предыдущего упражнения это представление не может быть вполне приводимым.

Для конечных групп такая ситуация невозможна, как гласит следующая теорема Машке.

Теорема 1.14. *Любое конечномерное представление конечной группы над $\mathbb{C}$ вполне приводимо.*

Схема доказательства. Представление φ группы G в унитарном пространстве V называется *унитарным*, если $\varphi(g)$ — унитарный оператор для любого $g \in G$. На любом комплексном пространстве можно ввести какое-то эрмитово произведение (x, y). Тогда отображение

$$V \times V \to \mathbb{C}\colon x, y \mapsto (x, y)'$$

вида

$$(x, y)' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g.x, g.y)$$

тоже будет эрмитовым произведением, относительно которого представление становится унитарным. С другой стороны, любое унитарное представление вполне приводимо: ортогональное дополнение к инвариантному подпространству само инвариантно. □

Более того, можно доказать, что разложение любого конечномерного представления в прямую сумму неприводимых единственно. Таким образом, для конечных групп классификация всех представлений сводится к описанию неприводимых представлений. Оказывается, что попрано неизоморфных неприводимых представлений данной группы лишь конечное число — столько же, сколько классов сопряжённости. Подробное и чёткое изложение этой замечательной теории для конечных групп см., к примеру, в [3] или [28].

Отметим также, что для некоторых классов конечных групп эта задача решена, а для других является очень трудной математической проблемой. К примеру, известно описание неприводимых представлений симметрической группы S_n, группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ обратимых матриц над конечным полем [28], группы $\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}_q)$ верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали над конечным полем (здесь работает метод орбит А.А. Кириллова, подробности см., например, в [11]).

Нас, однако, будут интересовать представления бесконечной группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, но прежде нам потребуется познакомиться с другим алгебраическими структурами — алгебрами Ли и их представлениями.

2. Представления алгебр Ли

Напомним сначала, что такое алгебра Ли.

Определение 2.1. *Алгебра Ли* — это векторное пространство $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$ вместе с отображением $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\colon x, y \mapsto [x, y]$, которое называется *коммутатором* и удовлетворяет трём условиям:

i) Билинейность: $[\alpha x+\beta y, z] = \alpha[x, z]+\beta[y, z]$ и $[x, \alpha y+\beta z] = \alpha[x, y]+\beta[x, z]$ для всех x, y, $z \in \mathfrak{g}$, α, $\beta \in \mathbb{F}$.

ii) Кососимметричность: $[x, y] = -[y, x]$ для любых x, $y \in \mathfrak{g}$.

iii) Тождество Якоби: $[x, [y, z]]+[y, [z, x]]+[z, [x, y]] = 0$ для всех x, y, $z \in \mathfrak{g}$.

Отметим, что достаточно потребовать от коммутатора линейности по любому из двух аргументов: линейность по другому аргументу будет следствием этого требования и кососимметричности.

Алгебры Ли впервые возникли в работах замечательного норвежского математика Софуса Ли и теперь активно используются в самых разных областях математики. Например, А. Дж. Колеман называл работу Вильгельма Киллинга, содержащую, по сути, классификацию так называемых простых комплексных алгебр Ли, *величайшей* математической статьёй всех времён!

Пример 2.2. i) Пусть $\mathfrak{g}$ — пространство всех матриц размера $n \times n$ с элементами из поля $\mathbb{F}$. Коммутатор определяется так: $[X, Y] = XY - YX$. Каждый без труда проверит, что эта операция действительно превращает $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли. (Собственно, отсюда и происходит термин «коммутатор»: если $[X, Y] = 0$, то матрицы X и Y коммутируют.) Эта алгебра обозначается $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ и называется *полной линейной* алгеброй.

ii) Обозначим через $\mathfrak{g}$ обычное трёхмерное вещественное пространство $\mathbb{R}^3$; пусть $[x, y]$ — векторное произведение векторов x и y. Из курса геометрии известно, что оно удовлетворяет всем нужным свойствам, поэтому $\mathfrak{g}$ также является алгеброй Ли.

Как всегда, после определения новых структур возникают их морфизмы и различные подструктуры.

Определение 2.3. Пусть $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ — алгебры Ли над одним и тем же полем. Линейное отображение $\varphi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ называется *морфизмом* алгебр Ли, если оно сохраняет коммутатор, то есть $\varphi([x,y]) = [\varphi(x),\varphi(y)]$ для любых x, $y \in \mathfrak{g}_1$. Естественно определяется понятие *моно-*, *эпи-* и *изоморфизма* алгебра Ли (как?). Подпространство $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Ли*, если оно замкнуто относительно взятия коммутаторов, то есть если $[x,y] \in \mathfrak{h}$, какими бы ни были x, $y \in \mathfrak{h}$. Наконец, подпространство $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ называется *идеалом*, если $[x,y] \in \mathfrak{h}$ при всех $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{g}$.

Пример 2.4. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, $e_1,\ldots,e_n$ — произвольный его базис, $\mathfrak{gl}(V)$ — алгебра Ли всех линейных операторов на V относительно коммутатора $[\varphi,\psi] = \varphi\circ\psi - \psi\circ\varphi$, $\varphi,\psi \in \mathfrak{gl}(V)$ (почему это будет алгебра Ли?). Тогда отображение $\eta\colon \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$, которое линейному оператору φ ставит в соответствие его матрицу в выбранном базисе, будет изоморфизмом алгебр Ли (почему?).

Очевидно, что любой идеал будет подалгеброй. Кроме того, любая подалгебра $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ сама является алгеброй Ли относительно тех же операций, что и $\mathfrak{g}$. Идеалы обозначаются так: $\mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}$.

Пример 2.5. i) Подпространство $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ матриц с нулевым следом — идеал в полной линейной алгебре $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$. В самом деле, след произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей, поэтому след коммутатора каких угодно матриц равен нулю.

ii) Подпространство $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$ всех верхнетреугольных матриц, у которых на диагонали стоят произвольные числа, — подалгебра в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$, а подпространство $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_n(\mathbb{F})$ всех строго верхнетреугольных матриц (с нулями на диагонали) — идеал в $\mathfrak{t}$. (Проверка обоих утверждений тривиальна.)

Упражнение 2.6. i) Убедитесь, что коммутатор матричных единиц имеет следующий вид: $[E_{i,j}, E_{k,l}] = \delta_{j,k}E_{i,l} - \delta_{i,l}E_{k,j}$.

ii) Пусть J — любая матрица размера $n \times n$ с элементами из поля $\mathbb{F}$. Проверьте, что подмножество

$$\mathfrak{o}(J) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \mid x^t J + Jx = 0\}$$

— подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$.

iii) Линейный оператор D, действующий на пространстве $V = \mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$ многочленов от n переменных, называется *дифференцированием*, если он удовлетворяет *тождеству Лейбница*: $D(fg) = D(f)\cdot g + f\cdot D(g)$ для любых

$f,\ g \in V$. (Например, дифференцированием является взятие частной производной по любой из переменных.) Докажите, что множество всех дифференцирований образует алгебру Ли относительно коммутатора $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.

Теперь, по аналогии с представлениями групп, определим представления алгебр Ли.

Определение 2.7. *Представление* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$ в векторном пространстве V (над тем же самым полем $\mathbb{F}$) — это морфизм алгебр Ли $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Размерность пространства V (если она конечна) называется *размерностью* представления, а само пространство V, в котором задано представление, — *пространством представления* или $\mathfrak{g}$-*модулем*. Если φ — мономорфизм, то представление называется *точным*.

Часто, допуская вольность речи, мы будем опускать морфизм φ в обозначениях и говорить, что V — представление алгебры $\mathfrak{g}$, хотя, строго говоря, как и в случае групп, представлением является именно морфизм φ: на одном и том же пространстве можно задать несколько представлений. По аналогии с группами, будем писать $x.v = \varphi(x)(v)$, $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$.

Пример 2.8. i) Если $\mathfrak{g}$ — любая алгебра Ли над $\mathbb{F}$, а V — любое пространство над этим полем, то отображение из $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(V)$, которое все элементы из $\mathfrak{g}$ переводит в нуль, будет, очевидно, представлением. Оно называется *нулевым*; если V одномерно, то это представление также называется *тривиальным*.

ii) Если $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, то отображение из $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(V)$, которое каждый линейный оператор переводит сам в себя, называется *естественным* представлением алгебры $\mathfrak{g}$. То же относится и к любой подалгебре в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$. Действительно, последняя изоморфна $\mathfrak{gl}(V)$, где V — любое n-мерное пространство над $\mathbb{F}$; можно считать попросту, что $V = \mathbb{F}^n$.

ii) Пусть $\mathfrak{g}$ — любая алгебра Ли над $\mathbb{F}$. Тогда отображение $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ вида $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}_x$ будет представлением, где ad_x — линейный оператор на $\mathfrak{g}$, заданный формулой $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$, $y \in \mathfrak{g}$. (Проверьте!) Это представление называется *присоединённым*.

Следующие определения и факты очень похожи на аналогичные конструкции для групп.

Определение 2.9. Пусть V — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Подпространство $W \subseteq V$ называется $\mathfrak{g}$-*инвариантным*, если $x.w \in W$ для любых $x \in \mathfrak{g}$, $w \in W$. Иногда $\mathfrak{g}$-инвариантные подпространства ещё называют *подпредставлениями* или $\mathfrak{g}$-*подмодулями*. Ясно, что W можно рассматривать как самостоятельное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, забыв о большем пространстве. В любом $\mathfrak{g}$-модуле есть два *тривиальных* подмодуля: нулевое подпространство и само V; если других инвариантных подпространств нет, то представление называется *неприводимым*, а если есть — *приводимым*.

Пример 2.10. i) Любое одномерное представление любой алгебры Ли неприводимо. ii) Естественное представление алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ неприводимо (почему?). iii) Если размерность V больше 1, то нулевое представление любой алгебры в V всегда приводимо: любое подпространство будет инвариантным.

Определение 2.11. Пусть $\varphi_1\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$ и $\varphi_2\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$ — представления одной и той же алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Их *прямой суммой* (как представлений) называется представление $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1 \oplus V_2)$, заданное формулой

$$\varphi(x)(v_1, v_2) = (\varphi_1(x)(v_1), \varphi_2(x)(v_2)),$$

где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $x \in \mathfrak{g}$. Другими словами,

$$x.(v_1, v_2) = (x.v_1, x.v_2).$$

Линейное отображение $\eta\colon V_1 \to V_2$ называется *морфизмом* представлений, если $\eta(x.v) = x.\eta(v)$ для любых $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V_1$. Легко убедиться, что морфизмы из V_1 в V_2 образуют векторное пространство; оно обозначается $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1, V_2)$. Морфизм представлений называется *моно-*, *эпи-* и *изоморфизмом*, если он является таковым как линейное отображение. Проверьте, что ядро и образ любого морфизма представлений являются $\mathfrak{g}$-подмодулями!

Упражнение 2.12. (*Лемма Шура.*) i) Покажите, что между неизоморфными неприводимыми представлениями одной и той же алгебры Ли нет никаких морфизмов, кроме нулевого.

ii) Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (или, более общо, поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто). Проверьте, что любой морфизм из неприводимого представления V алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в него само обязательно *скалярен*, то есть имеет вид $\lambda \cdot \mathrm{id}_V$; другими словами, $\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V) = 1$.

Определение 2.13. Пусть V — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, W — инвариантное подпространство. Тогда формула

$$x.[v] = [x.v],\ x \in \mathfrak{g},\ v \in V,$$

определяет на факторпространстве V/W представление алгебры $\mathfrak{g}$ (почему?), которое называется *факторпредставлением* (а V/W — *фактормодулем*).

Например, V_1, V_2 — какие-то представления, $V = V_1 \oplus V_2$ — их прямая сумма, а $W = \{(0, v),\ v \in V_1\} \cong V_1$, то $V/W \cong V_2$, разумеется.

Определение 2.14. Пусть V — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда формула

$$(x.\lambda).(v) = -\lambda(x.v),\ x \in \mathfrak{g},\ \lambda \in V^*,\ v \in V,$$

определяет на сопряжённом пространстве V^* представление алгебры $\mathfrak{g}$ (почему?), которое называется *сопряжённым* или *двойственным* к V.

Определение 2.15. Пусть $\varphi_1 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$ и $\varphi_2 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$ — представления одной и той же алгебры $\mathfrak{g}$. Их *тензорным произведением* (как представлений) называется представление $\varphi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$, заданное формулой

$$\varphi(x)(v_1 \otimes v_2) = \varphi_1(x)(v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes \varphi_2(x)(v_2),$$

где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $x \in \mathfrak{g}$. (Поскольку $V_1 \otimes V_2$ порождается как векторное пространство такими тензорами, эта формула полностью определяет отображение φ). Другими словами,

$$x.(v_1 \otimes v_2) = (x.v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x.v_2).$$

Определение 2.16. Представление называется *вполне приводимым*, если оно изоморфно прямой сумме неприводимых. Эквивалентное определение: V вполне приводимо, если в нём есть инвариантные подпространства $W_1, \ldots, W_t$ такие, что $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_t$ как векторные пространства, причём каждое W_i неприводимо как самостоятельное представление. К примеру, любое неприводимое представление вполне приводимо.

Упражнение 2.17. Докажите, что полная приводимость конечномерного представления V эквивалентна тому, что любое его $\mathfrak{g}$-инвариантное подпространство обладает $\mathfrak{g}$-инвариантным дополнением, то есть для любого подпредставления $W \subseteq V$ существует такое подпредставление $W' \subseteq V$, что $V = W \oplus W'$ (как векторные пространства).

Вовсе не любое приводимое представление алгебры Ли обязано быть вполне приводимым, даже для конечномерных алгебр Ли и их представлений. Знаменитая теорема Вейля гласит, что вполне приводимым будет любое конечномерное представление любой *простой* алгебры Ли (такой, в которой нет никаких нетривиальных идеалов; такова, к примеру, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$).

Мы переходим к рассмотрению двух замечательных примеров — представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. В обоих случаях можно относительно несложно доказать полную приводимость всех конечномерных представлений и дать полную классификацию неприводимых представлений с точностью до изоморфизма. При этом и там, и там видны общие идеи, на которых базируется изучение представлений редуктивных групп и алгебр Ли (к которым относятся $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$).

В следующих двух разделах дано изложение теории представлений для $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ соответственно в виде ряда задач с указаниями; в обоих случаях изложение более или менее стандартно.

3. Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Мы будем обозначать через e, f, h так называемый *стандартный* базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$: $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Будем пока считать, что все представления конечномерны. Пусть V — некоторый $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуль; обозначим для краткости образы e, f, h при гомоморфизме представления $\varphi\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ через E, F, H соответственно.

Определение. Пусть $n \geqslant 0$. Для любого элемента a любой ассоциативной алгебры A над $\mathbb{C}$ его *n-ой разделённой степенью* называется элемент A вида $a^{(n)} = a^n/n!$. Например, если $A = \mathbb{C}$, то $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}$ для любого $x \in \mathbb{C}$.

3.1. (*Вычисления в универсальной обвёртывающей алгебре*[1]) Докажите, что для любых $m, n \geqslant 1$ имеют место равенства

$$
\begin{aligned}
&\text{а) } [H, E^m] = 2mE^m, \ \text{б) } [H, F^n] = -2nF^n, \\
&\text{в) } [E, F^n] = F^{n-1}(H - n + 1), \\
&\text{г) } [E^{(m)}, F^{(n)}] = \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} F^{(n-k)} t(H, m, n, k) E^{(m-k)}, \ \text{где} \\
&t(H, m, n, k) = \binom{H - m - n + 2k}{k} \in \mathfrak{gl}(V).
\end{aligned}
$$

3.2. Докажите, что оператор $c = EF + FE + H^2/2$ коммутирует с любым оператором $\varphi(x)$, $x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (c называется *элементом Казимира*).

Определение. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Любое собственное подпространство для оператора H вида $V_\lambda = \{x \in V \mid Hx = \lambda x\}$ называется *весовым подпространством* веса λ. Любой ненулевой вектор из V_λ называется *весовым вектором* веса λ. Размерность весового подпространства V_λ называется *кратностью* веса λ и обозначается $m_V(\lambda)$.

[1]Что бы это ни значило!

3.3. а) Докажите, что оператор E нильпотентен. б) Покажите, что если V_λ — весовое подпространство, то EV_λ и FV_λ — тоже весовые подпространства, причём их веса равны $\lambda+2$ и $\lambda-2$ соответственно. в) Покажите, что в V есть весовое подпространство V_λ, лежащее в ядре оператора E (то есть аннулируемое E). Любой ненулевой вектор из этого подпространства называется *старшим вектором*, а вес λ — *старшим весом.*

3.4. Докажите следующее предложение и его следствие:

Предложение. *Если V — неприводимый $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуль, то в нём существует базис $\{v_i\}_{i=0}^n$, где $v_0 = v \in V_\lambda$ — старший вектор и $v_i = F^{(i)}v$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. При этом, если положить $v_{-1} = v_i = 0$ при $i > n$, то действие $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ на V задаётся формулами*[2]

$$\begin{aligned} Hv_i &= (\lambda - 2i)v_i, \\ Fv_i &= (i+1)v_{i+1}, \\ Ev_i &= (\lambda - i + 1)v_{i-1}, \quad i \geqslant 0. \end{aligned}$$

Следствие. *Пусть V — неприводимый $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуль. Тогда он является прямой суммой весовых подпространств, причём все веса имеют вид $m, m-2, \dots, -(m-2), -m$, где $m = \dim V - 1$. В частности, все веса есть целые числа и кратность каждого веса равна 1. В V имеется единственный с точностью до скалярного множителя старший вектор старшего веса m.*

3.5. Обозначим через $R_n = \mathbb{C}_n[x, y]$ пространство однородных многочленов от двух переменных суммарной степени n. Превратим R_n в представление $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, полагая

$$E = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad F = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Докажите, что это представление корректно определено и неприводимо со старшим весом n.

Следствие. *Для любого $n \geqslant 0$ существует ровно одно (с точностью до изоморфизма) неприводимое $(n+1)$-мерное представление $\mathfrak{sl}_2$: неприводимое представление со старшим весом $\lambda = n$. Будем обозначать его $V(\lambda)$.*

3.6. Докажите, что любой эндоморфизм V, коммутирующий с $\varphi(\mathfrak{sl}_2)$, действует на V скалярно (здесь $\varphi\colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(V)$ — неприводимое представление).

3.7. Как действует элемент Казимира на неприводимом модуле $V(\lambda)$?

---

[2]Это объясняет название *старший* вес: видно, что $\{v_i\}$ — собственный базис для H, то есть все v_i — весовые векторы, причём все остальные веса *строго меньше*, чем λ.

Докажем теперь, что любое (конечномерное) представление $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ вполне приводимо. Предположим противное; пусть V — наименьшее по размерности представление, которое нельзя разложить в прямую сумму неприводимых.

3.8. а) Покажите, что элемент Казимира имеет на V единственное собственное число, равное $\lambda(\lambda+2)/2$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. б) Докажите, что V обладает подмодулем $W \cong V(\lambda)$ таким, что $V/W \cong nV(\lambda)$ для некоторого n. в) Докажите, что $\dim V_\lambda = n+1$; обозначим через $\{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ произвольный базис этого весового подпространства. Проверьте, что $\{F^j v_i\}_{i,j=1}^{n+1,\lambda}$ — базис V. г) Докажите, что $W_i = \langle F^j v_i, j = 1, \ldots, \lambda\rangle_{\mathbb{C}}$ — подмодуль V для любого i. Выведите отсюда, что V вполне приводимо. Противоречие! Итак, нами полностью доказана

Теорема (*Теорема Вейля для* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$). *Любой конечномерный* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$*-модуль* V *вполне приводим. В частности, оператор* H *всегда действует на* V *диагонально.*

3.9. Докажите, что спектр любого конечномерного $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуля (то есть набор кратностей вхождения в него неприводимых модулей) определён однозначно.

3.10. (*Лемма Джекобсона–Морозова*) Пусть V — конечномерное комплексное пространство, A — произвольный нильпотентный оператор на V. Тогда существует единственная (с точностью до изоморфизма) структура $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуля на V такая, что $E = A$.

Определение. *Характер* неприводимого $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуля $V = V(\lambda)$ — это многочлен от $q^{\pm 1}$ вида $\mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} m_V(\mu) q^\mu \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. С учётом предыдущей задачи, корректно определён характер *любого* (конечномерного) $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуля V: если $V \cong \oplus_{i=1}^{l} n_i V(\lambda_i)$ для некоторых $n_i, \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, то, по определению, $\mathrm{ch}_V = \sum_{i=1}^{l} n_i \,\mathrm{ch}_{\lambda_i}$.

3.11. Найдите ch_λ явно. Докажите, что $\mathrm{ch}_{V\oplus W} = \mathrm{ch}_V + \mathrm{ch}_W$ и $\mathrm{ch}_{V\otimes W} = \mathrm{ch}_V \cdot \mathrm{ch}_W$.

3.12. (*Формула Клебша–Гордана*) Докажите, что для любых $m \geqslant n \geqslant 0$

$$V(m) \otimes V(n) \cong V(m+n) \oplus V(m+n-2) \oplus \ldots \oplus V(m-n).$$

3.13. Пусть $V = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$; $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ содержится там как подалгебра матриц, у которых последняя строка и последний столбец нулевые; это задаёт на V структуру $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуля по правилу $\varphi(x)(y) = [x, y]$. Докажите, что

$$V \cong V(0) \oplus 2V(1) \oplus V(2).$$

В заключение построим некоторые *бесконечномерные* (но чрезвычайно полезные!) $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модули. А именно, пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $M(\lambda)$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$ со счётным базисом $\{v_0, v_1, \ldots\}$.

3.14. а) Покажите, что формулы из доказанного выше предложения определяют на $M(\lambda)$ структуру $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуля, причём каждый его ненулевой подмодуль содержит хотя бы один старший вектор. Модуль $M(\lambda)$ называется *модулем Верма старшего веса* λ. б) Пусть $\lambda + 1 = i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Докажите, что v_i — старший вектор; это задаёт гомоморфизм $\psi\colon M(\lambda - 2i) \to M(\lambda)\colon v_0 \mapsto v_i$. Покажите, что ψ — мономорфизм, причём оба модуля $\operatorname{Im}\psi$ и $M(\lambda)/\operatorname{Im}\psi$ неприводимы, но $M(\lambda)$ *не будет* вполне приводимым при $i > 0$. А при $i = 0$? в) Проверьте, что при $\lambda + 1 \notin \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ модуль $M(\lambda)$ неприводим.

Указания

3.1. а), б), в) — по индукции, г) — индукция по m (базу индукции составляет предыдущий пункт), а при фиксированном m — индукция по n (не забудьте про треугольник Паскаля!).

3.2. Достаточно доказать, что он коммутирует с E, F и H.

3.3. а) Покажите сначала, что если след любой степени линейного оператора равен нулю, то оператор нильпотентен (и наоборот). в) Используйте пункты а) и б) и тот факт, что у H есть *хотя бы один* собственный вектор (почему?).

3.4. Из курса алгебры известно, что собственные векторы с разными собственными числами линейно независимы. Для доказательства следствия подставьте в формулы $i = m + 1$.

3.6. Как и для групп, используйте лемму Шура.

3.8. а) Жорданова форма любого линейного оператора A позволяет представить V в виде прямой суммы $\oplus_\mu \widetilde{V}_\mu$ по всем собственным числам A, где $\widetilde{V}_\mu = \sum_{i \geqslant 0} \operatorname{Ker}(A - \mu)^i$ (понимаете, почему?). Подпространства $\widetilde{V}_\mu$ иногда называются *обобщёнными собственными* подпространствами. Так вот, для элемента Казимира такое разложение обязано быть прямой суммой представлений. б) Используйте пункт а) и исходное предположение насчёт V. в) Не забудьте вновь про линейную независимость собственных векторов с разными собственными числами и докажите, что если $Fv = 0$ и $Hv = \mu v$ для некоторого вектора $v \in V$, то $Cv = \frac{\mu(\mu-2)}{2} v$. И чему тогда равно μ?

3.9. Выясните, чему равна размерность пространства морфизмов из V в $V(\lambda)$, где V — произвольный модуль.

3.10. Используйте жорданову форму A.

3.11. Для тензорного произведения найдите кратности весов в левой и правой частях.

3.13. Сравните характеры левой и правой частей!

4. Представления группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Определение. Представление $\varphi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(V)$ называется *рациональным*, если при выборе базиса в V (и, соответственно, при отождествлении $\mathrm{GL}(V)$ с $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n = \dim V$) элементы $\varphi(g)$ становятся многочленами от x, y, z, t, где

$$g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

Ясно (ясно?), что это определение корректно, то есть не зависит от выбора базиса в V.

Мы дальше только такие представления и будем рассматривать. Обозначим $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Положим

$$\begin{aligned} T &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{C}^\times \right\}, \\ U &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{C} \right\}, \\ B &= TU,\ w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.1. (*Разложение Брюа*) Проверьте, что $G = B \cup BwB$.

Следствие. Группа G порождается T, U и w.

4.2. а) Пусть $R_n = \mathbb{C}_n[X, Y]$ — пространство однородных многочленов от двух переменных суммарной степени n (см. задачу 3.5). Превратим его в G-модуль по правилу

$$g.X = tX - yY, \quad g.Y = -zX + xY.$$

Докажите, что это (рациональное) представление корректно определено. Будем дальше обозначать его ρ_n. б) Пусть χ_i — *характер* (то есть одномерное представление) T вида

$$\chi_i \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = a^i.$$

Обозначим также через $\{e_i\}_{i=0}^n$ базис R_n вида $e_i = X^i Y^{n-i}$. Покажите, что для любого $t \in T$

$$\rho_n(t)e_i = \chi_{n-2i}(t)e_i.$$

в) (*Теорема Артина о характерах*) Проверьте, что χ_i при различных i линейно независимы. г) Докажите, что ρ_n — неприводимое представление.

Мы предполагаем известным понятие невырожденной билинейной формы на векторном пространстве V. Билинейная форма f на G-модуле V называется *G-инвариантной*, если

$$f(g.v, g.w) = f(v, w)$$

для любых $v, w \in V$, $g \in G$.

4.3. а) Превратим $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(R_n)$ в G-модуль правилом

$$g.L = \rho_n(g) \circ L \circ \rho_n(g)^{-1}, \quad g \in G,\ L \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(R_n).$$

Докажите, что G-модули $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(R_n)$ и $R_n \otimes R_n^*$ изоморфны. б) Постройте на R_n невырожденную G-инвариантную билинейную форму. (Она окажется симметрической при чётном n и кососимметрической при нечётном n.) в) Проверьте, что G-модули R_n и R_n^* изоморфны.

Обозначим через A *алгебру регулярных функций* на G. Если

$$g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G,$$

то A получается из алгебры многочленов $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ отождествлением тех многочленов, которые тождественно равны на G. (Строго говоря, A есть факторалгебра $\mathbb{C}[x, y, z, t]/\langle xt - yz - 1\rangle$.) Попросту, A состоит из тех функций $G \to \mathbb{C}$, которые в координатах задаются многочленами.

4.4. а) Превратим A в (бесконечномерный) G-модуль по формуле

$$(g.f)(x) = f(g^{-1}.x), \quad f \in A,\ g, x \in G.$$

Проверьте, что это определение корректно.

б) Обозначим через A_n подпространство A, натянутое на те функции $f_{abcd} = x^a y^b z^c t^d$, у которых $a - b + c - d = n$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ и

$$A_n = \{f \in A \mid f(gs) = \chi_n(s)f(g) \text{ для всех } g \in G,\ s \in T\}.$$

в) Для всех $m \geqslant n$ через $A_{n,m}$ обозначим подпространство A_n, порождённое теми функциями f_{abcd}, у которых $a - b + c - d = n$ и $0 \leqslant a + c \leqslant m$.

Докажите, что в качестве базиса $A_{n,m}$ можно выбрать функции f_{abcd}, у которых $a+c=m$, $b+d=m-n$.

4.5. а) Для любого $n \geqslant 0$ обозначим через V_n подпространство A вида

$$V_n = \{f \in A \mid f(gsu) = \chi_n(s)f(g) \text{ для любых } g \in G,\ s \in T,\ u \in U\}.$$

Покажите, что это G-инвариантное подпространство, содержащееся в A_n.

б) Убедитесь, что V_n на самом деле состоит из таких функций $f \in A$, что $f(g)$ зависит только от x и z и что

$$f\begin{pmatrix} \xi x & y \\ \xi z & t \end{pmatrix} = \xi^n \cdot f(g) \text{ для любого } \xi \in \mathbb{C}^\times.$$

Чему равна $\dim V_n$?

в) Докажите, что G-модули V_n и R_n^* изоморфны.

4.6. а) Проверьте, что $A_{n,m}$ — конечномерное G-инвариантное подпространство A. Чему равна $\dim A_{n,m}$? б) Установите изоморфизмы G-модулей

$$A_{n,m} \cong A_{n,n} \otimes A_{n-m,0},\ \ A_{n,m} \cong R_m \otimes R_{m-n}$$

и $A_{0,m} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(R_m)$. в) Подпространство A_0 на самом деле имеет вид

$$A_0 = \{f \in A \mid f(gs) = f(g) \text{ для любых } g \in G, s \in T\},$$

причём $A_{0,0} \subset A_{0,1} \subset A_{0,2} \subset \ldots$ и $A_0 = \bigcup_{m \geqslant 0} A_{0,m}$.

Следствие. В A_0 существует возрастающая (по включению) последовательность конечномерных G-подмодулей V_i, $i \geqslant 0$, таких, что $A_0 = \bigcup_{i \geqslant 0} V_i$ и каждый V_i как G-модуль изоморфен $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E_i)$ для некоторого неприводимого G-модуля E_i.

Определение. Подгруппа $\mathcal{G}$ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ называется *редуктивной* (соответственно, *линейно редуктивной*), если для любого её (рационального) представления $\varphi\colon \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(V)$ и любого вектора $v \in V^{\mathcal{G}} \setminus \{0\}$ существует такая полиномиальная (соответственно, линейная) $\mathcal{G}$-инвариантная функция $f\colon V \to \mathbb{C}$, что $f(0) = 0$, $f(v) \neq 0$.

Напомним, что функция f называется $\mathcal{G}$-*инвариантной*, если $g.f = f$ для всех $g \in \mathcal{G}$, где $(g.f)(w) = f(g^{-1}.w)$, $w \in V$. Кроме того, *полиномиальной* называется функция, которая при любом выборе базиса V задается в координатах многочленами; множество всех полиномиальных $\mathcal{G}$-инвариантных функций на V часто обозначается $\mathbb{C}[V]^{\mathcal{G}}$ и называется *алгеброй инвариантов*. Представление $\varphi\colon \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(V)$ называется *рациональным*, если при выборе базиса в V все элементы $\varphi(g)$, $g \in \mathcal{G}$, оказываются многочленами от элементов

g и от $(\det g)^{-1}$. Наконец, через $V^{\mathcal{G}}$ обозначается множество $\mathcal{G}$-*инвариантных* векторов V, то есть

$$V^{\mathcal{G}} = \{w \in V \mid g.w = w \text{ для любого } g \in \mathcal{G}\}.$$

4.7. а) Убедитесь, что мы получим эквивалентное определение редуктивной группы, если потребуем существование *однородной* функции $f \in \mathbb{C}[V]^{\mathcal{G}}$, для которой $f(v) \neq 0$. б) Докажите, что на самом деле редуктивность группы эквивалентна её линейной редуктивности.

Теорема. Группа $\mathcal{G}$ (линейно) редуктивна тогда и только тогда, когда любое её (рациональное) представление вполне приводимо.

4.8. Докажите эту теорему.

4.9. Обозначим через T_n подгруппу диагональных матриц в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. а) Докажите, что она (линейно) редуктивна. б) Пусть $\varphi\colon T_n \to \mathrm{GL}(V)$ — (рациональное) представление T_n. Покажите, что в V найдётся базис, в котором все операторы $\varphi(t)$, $t \in T_n$, диагональны.

Предложение. Группа $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (линейно) редуктивна.

4.10. Докажите это предложение.

Следствие. Любое представление G вполне приводимо.

4.11. а) Любое неприводимое представление G изоморфно одному из ρ_n, $n \geqslant 0$. б) Пусть V — произвольный G-модуль, $V \overset{G}{\cong} \bigoplus_{n \geqslant 0} m_V(n) R_n$. Тогда для любого $a \in \mathbb{C}^\times$

$$\chi_V \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & a^{-1} \end{pmatrix} = \sum_{n \geqslant 0} m_V(n) \cdot \frac{a^{n+1} - a^{-n-1}}{a - a^{-1}} = \sum_{n \geqslant 0} m_V(n) \cdot a^n \cdot [n+1]_{a^2}$$

(имеется в виду квантовый аналог числа $n+1$, см. задачу 4.14.) в) В частности, *кратности* $m_V(n)$ определены однозначно.

4.12. а) (*Формула Клебша–Гордана*) Проверьте, что для любых $m \geqslant n \geqslant 0$

$$R_m \otimes R_n \overset{G}{\cong} R_{m+n} \oplus R_{m+n-2} \oplus \ldots \oplus R_{m-n}.$$

(ср. с задачей 3.13). б) Пусть $\varepsilon \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(R_n \otimes R_n)$ определяется формулой $\varepsilon(v \otimes w) = w \otimes v$. Почему это морфизм представлений и как он действует на неприводимые слагаемые из пункта а)?

4.13. Пусть V — любое конечномерное векторное пространство, $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$. Обозначим через $\mathbb{C}[V]_n$ подпространство в $\mathbb{C}[V]$, состоящее из однородных полиномиальных функций степени n. Покажите, что φ однозначно определяет линейный оператор $\varphi_n \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[V]_n)$ (как?). Установите равенство формальных степенных рядов от переменной s:

$$\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{tr}\varphi_n \cdot s^n = \det(1-\varphi^{-1}s)^{-1}$$

.

4.14. а) Определим так называемые *квантовые аналоги*: если q — переменная, а $n \geqslant 1$, то $[n]_q = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$, $[n]!_q = [1]_q \cdot [2]_q \cdot \ldots \cdot [n]_q$,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!_q}{[k]!_q \cdot [n-k]!_q}$$

(положим также формально $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0$ при $k > n$),

$$[x+y]_q^n = (x+y)\cdot(x+qy)\cdot\ldots\cdot(x+q^{n-1}y).$$

Проверьте следующие тождества:

$$[1+qs]_q^n = \sum_{k=0}^{n} q^{k(k+1)/2} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \cdot s^k,$$

$$\frac{1}{[1-s]_q^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \cdot s^k$$

(подробно про квантовые аналоги можно прочесть, к примеру, в [13]).
б) (*Теорема Кэли–Сильвестра*) Положим

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{i\geqslant 0} \gamma(n,k,i)\cdot q^i$$

(и, формально, $\gamma(n,k,i) = 0$ при $i \notin \mathbb{Z}$). Обозначим через $m(n,k)$ размерность пространства $\mathbb{C}[R_n]_k^G$ всех однородных G-инвариантных полиномиальных функций на R_d степени k: $m(n,k) = \dim \mathbb{C}[R_n]_k^G$. Докажите, что

$$m(n,k) = \gamma(n+k,k,nk/2) - \gamma(n+k,k,nk/2-1).$$

в) (*Закон взаимности Эрмита, слабая версия*) Убедитесь, что $m(n,k) = m(k,n)$. г) (*Закон взаимности Эрмита, сильная версия*) Более того, G-модули $\mathbb{C}[R_n]_k$ и $\mathbb{C}[R_k]_n$ изоморфны.

4.15. а) Если элементы матрицы $g(s)$ являются многочленами от s, то через $\dfrac{dg(s)}{ds}$ условимся обозначать матрицу, получающуюся из $g(s)$ поэлементным дифференцированием. Пусть $g(s) \in G$ для всех $s \in \mathbb{C}$ и $g(0) = 1$.

Покажите, что $g'(0) = \left.\dfrac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} \in \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, то есть $\operatorname{tr} g'(0) = 0$; более того, так может быть получена любая матрица из $\mathfrak{g}$. б) Пусть $x = g'(0) \in \mathfrak{g}$. Определим отображение $d\rho_n\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(R_n)$ правилом

$$d\rho_n(x)(f) = \left.\frac{d(g(s).f)}{ds}\right|_{s=0},\ f \in R_n.$$

Проверьте корректность этого определения и покажите, что оно задаёт представление $\mathfrak{g}$ в пространстве R_n. Более того, это в точности неприводимое представление $V(n)$ со старшим весом n, которое было построено ранее!

Указания

4.2. г) Сперва, пользуясь пунктом в), покажите, что если W — подмодуль в V, $v = \sum c_i e_i \in W$ и $c_i \neq 0$, то $e_i \in W$. Далее, подействуйте на этот несчастный e_i матрицами $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.3. а) Отображение $\alpha\colon R_n \otimes R_n^* \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(R_n)$ вида $\alpha(v \otimes \lambda)(w) = \lambda(v)w$, $v, w \in R_n$, $\lambda \in R_n^*$, будет изоморфизмом представлений. б) Искомая форма имеет вид

$$f(e_i, e_j) = \binom{n}{i}^{-1} (-1)^i \delta_{i,n-j}.$$

Её невырожденность очевидна (а Вам?), а G-инвариантность следует из задачи 4.1 и того, что $f(g.e_i, g.e_j) = f(e_i, e_j)$ при $g \in T \cup U \cup \{w\}$ (проверьте это!). в) Воспользуйтесь формой из предыдущего пункта.

4.4. в) Можете *не* проверять линейную независимость функций f_{abcd} (это не так-то просто сделать, да нам она и не нужна будет нигде). То, что они порождают $A_{n,m}$, следует из равенства $f_{abcd} = f_{a+1,b,c,d+1} - f_{a,b+1,c+1,d}$ (докажите его!).

4.5. б) $\dim V_n = n+1$. в) Отображение $\alpha\colon R_n^* \to A$ вида $\alpha(\lambda)(g) = \lambda(g.e_0)$, $g \in G$, $\lambda \in R_n^*$, на самом деле действует в V_n и устанавливает нужный изоморфизм.

4.7. б) Пусть $\mathcal{G}$ редуктивна, $v \in V^{\mathcal{G}} \setminus \{0\}$ и f — однородная функция степени d, для которой $f(v) \neq 0$. Определим полиномиальные функции h_i правилом

$$f(v + xw) = \sum_{i=0}^{d} x^i h_i(w) \text{ для всех } x \in \mathbb{C},\ w \in V.$$

Тогда каждая h_i однородна степени i и $\mathcal{G}$-инвариантна, причём

$$h_i(v) = \binom{d}{i} f(v).$$

Осталось пристально посмотреть на функцию h_1.

4.8. Достаточность очевидна (а Вам?). Для доказательства необходимости рассмотрим произвольное (рациональное) представление $\varphi\colon \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(V)$. Если $0 \neq W \subsetneq V$ — подмодуль, то факторпредставление $\widetilde{\varphi}\colon \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(V/W)$ тоже рационально (почему?). Превратим пространство $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V/W, V)$ всех линейных операторов $V/W \to V$ в представление $\mathcal{G}$ обычным образом (примерно так же, как в задаче 4.3): $g.L = \varphi(g)\circ L\circ\widetilde{\varphi}(g)^{-1}$, $g \in \mathcal{G}$, $L \in M$ (проверьте, что получится представление). Обозначим теперь через $\pi\colon V \to V/W$ каноническую проекцию, а через $s \in M$ — какой-нибудь линейный оператор, для которого $\pi \circ s = \mathrm{id}_{V/W}$.

Далее, обозначим через M_1 (соответственно, M_2) подпространство в M, порождённое всеми $g.s$ (соответственно, всеми $g.s - s$), $g \in \mathcal{G}$. Проверьте, что $(g.s - s)(V/W) \subset W$ для любого $g \in \mathcal{G}$ и $M_1 = M_2 \oplus \mathbb{C}s$; обозначим через μ линейную функцию на M_1, для которой $\operatorname{Ker}\mu = M_2$. Пространство M_1, разумеется, $\mathcal{G}$-инвариантно, значит, задано представление $\mathcal{G}$ в M_1^* (как?). Осталось заметить, что $\mu \in (M_1^*)^{\mathcal{G}}$, и воспользоваться линейной редуктивностью группы $\mathcal{G}$.

4.9. а) Пусть $\varphi\colon T_n \to \mathrm{GL}(V)$ — какое-нибудь представление T_n. Будем называть отображение $\chi\colon T_n \to \mathbb{C}^\times$ *характером*, если оно имеет вид

$$\chi\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix} = x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$$

для каких-нибудь $a_i \in \mathbb{Z}$. Из рациональности φ сразу следует, что существует такое конечное множество S характеров T_n что $\varphi(t) = \sum_{\chi\in S}\chi(t)A_\chi$ для любого $t \in T_n$, где $A_\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ — какие-то линейные операторы (докажите!). Докажите теорему Артина о характерах для характеров T_n и выведите из неё, что

$$\chi(t)A_\chi = \sum_{\chi'\in S}\chi'(t)A_{\chi'}A_\chi$$

для всех t, χ, χ'. Покажите, далее, что $\sum_{\chi\in S}A_\chi = \mathrm{id}_V$, $A_\chi^2 = A_\chi$ и $A_\chi A_{\chi'} = 0$ при $\chi \neq \chi'$. Обозначим $V_\chi = A_\chi V$. Докажите, что все эти подпространства T_n-инвариантны, $V = \bigoplus_{\chi\in S}V_\chi$ и $\varphi(t)|_{V_\chi} = \chi(t)\cdot\mathrm{id}_{V_\chi}$. Если теперь $v \in V^{T_n}\setminus\{0\}$, то $v \in V_1$. б) Это следует из доказательства предыдущего пункта.

4.10. Пусть $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — представление G, $v \in V^G \setminus \{0\}$. Обозначим через μ линейную функцию на V такую, что $\mu(v) = 1$. Определим морфизм G-модулей $\psi\colon V \to A$ правилом $\psi(w)(g) = \mu(g^{-1}.w)$, $w \in V$, $g \in G$. Обозначим через $\pi\colon A \to A_0$ проекцию, получающуюся из разложения $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$, см. задачу 4.4 б). Тогда $\pi\psi\colon V \to A_0$ — ненулевой морфизм G-модулей. Следствие из задачи 4.6 даёт существование такого неприводимого G-модуля E, что $\pi\psi(V) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$; функция $f\colon V \to \mathbb{C}\colon w \mapsto \det \pi\psi(w)$ — та, что нам нужна.

4.11. а) Из задачи 4.9 несложно вывести, что любое представление T вполне приводимо, причём все операторы, лежащие в образе T, можно диагонализировать одновременно. Пусть $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — неприводимое представление G; тогда в нём можно выбрать базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, $n = \dim V$, в котором $\varphi(t)e_i = \chi_{a_i}(t)e_i$ для всех $t \in T$, где $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ — некоторые целые числа. Определим многочлены $f_i \in \mathbb{C}[s]$ формулой

$$\varphi\begin{pmatrix}1 & \xi\\ 0 & 1\end{pmatrix}(e_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\xi)e_i \text{ для всех } \xi \in \mathbb{C}.$$

Выведите из равенства

$$\begin{pmatrix}\eta & 0\\ 0 & \eta^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \xi\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\eta^{-1} & 0\\ 0 & \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \xi\eta^2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \xi \in \mathbb{C},\ \eta \in \mathbb{C}^\times,$$

что $f_i = 0$ при $a_i < a_n$ и $f_i = \mathrm{const}$ при $a_i = a_n$. Следовательно, если $t \in T$ и $u \in U$, то $\varphi(tu)e_n = \chi_{a_n}(t)e_n$. Определим теперь оператор $\psi\colon V^* \to A$ правилом $\psi(\mu)(g) = \mu(g.e_n)$, $\mu \in V^*$, $g \in G$. Он на самом деле бьёт в $V_{a_n} \cong R_{a_n}^*$ и является инъекцией, что даёт сюръективный морфизм $R_{a_n} \to V$. б) Достаточно вычислить след ρ_n от этой матрицы.

4.12. а) Сравните следы! б) Он соответствует умножению R_{2n-2i} на $(-1)^i$. Для доказательства сначала примените лемму Шура, а затем найдите след $\varepsilon\rho_n(g)\otimes\rho_n(g)$, где $g = \begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \xi^{-1}\end{pmatrix}$.

4.13. Оператор φ_n имеет вид $\varphi_n(f)(w) = f(\varphi^{-1}(w))$, $f \in \mathbb{C}[V]_n$, $w \in V$. Выберите базис $\{e_i\}_{i=1}^m$, в котором матрица φ верхнетреугольна. Пусть x_i — соответствующие координатные функции на V; тогда

$$\{x_1^{a_1}\ldots x_m^{a_m}, a_1 + \ldots + a_m = n\}$$

— базис $\mathbb{C}[V]_n$. При подходящей нумерации его элементов φ_n будет иметь в этом базисе треугольную матрицу. Более того, если ξ_i — собственные числа φ, то $\{\xi_1^{-a_1}\ldots\xi_m^{-a_m}, a_1 + \ldots + a_m = n\}$ — собственные числа φ_n.

4.14. б) Обозначим через $\rho_{n,k}$ представление G в пространстве $\mathbb{C}[R_n]_k$ (какое?). Для всякого $\xi \in \mathbb{C}^\times$ пусть

$$\chi_{n,k}(\xi) = \operatorname{tr} \rho_{n,k} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix} = \xi^{-nk} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{\xi^2}.$$

Определим теперь числа $m(n,k,i)$ равенством

$$\chi_{n,k}(\xi) = \sum_{i \geqslant 0} m(n,k,i) \frac{\xi^{i+1} - \xi^{-i-1}}{\xi - \xi^{-1}} = \sum_{i \geqslant 0} \gamma(n+k,k,i)\xi^{2i-nk}.$$

Всё! в) Сразу следует из того, что $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$. г) Проверьте, что

$$m(n,k,i) = \gamma(n+k,k,(nk-i)/2) - \gamma(n+k,k,(nk-i)/2-1).$$

Осталось заметить, что $\mathbb{C}[R_n]_k \cong \bigoplus_{i \geqslant 0} m(n,k,i) R_i$.

4.15. а) Вычислите $\dfrac{d(\det g(s))}{ds}$ и $\left.\dfrac{d(g(s)h(s))}{ds}\right|_{s=0}$; убедитесь, что $V = T_1(G) = \{g'(0)\}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$. Покажите, что $\left.\dfrac{d\left(g(s)xg^{-1}(s)\right)}{ds}\right|_{s=0}$ лежит в V при $x \in V$; более того, $[x,y] \in V$ при $x, y \in V$.

Список литературы

[1] Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. М.: Мир, 1976. 400 с.

[2] Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2004. 544 с.

[3] Винберг Э.Б. Линейные представления групп. М.: Наука, 1985. 144 с.

[4] Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Гелиос–АРВ, 2005. 392 с.

[5] Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. М.: Гелиос–АРВ, 2003. 336+416 с.

[6] Городенцев А.Л. Алгебра. Часть 1. М.: МЦНМО, 2013. 488 с.

[7] Дёмин И.В. Задачи по линейной алгебре. Практикум для студентов механико-математического факультета. I семестр. Самара: Издательство «Самарский университет», 1994. 64 с.

[8] Дёмин И.В., Рудман Р.М. Задачи по линейной алгебре. Учебное пособие. Самара: Издательство «Самарский университет», 2002. 48 с.

[9] Зуланке Р., Онищик А.Л. Алгебра и геометрия: в 3 томах. Том 1: Введение. М.: МЦНМО, 2004. 408 с.

[10] Зуланке Р., Онищик А.Л. Алгебра и геометрия: в 3 томах. Том 2: Модули и алгебры. М.: МЦНМО, 2008. 336 с.

[11] Игнатьев М.В. Введение в метод орбит над конечным полем. М.: МЦНМО, 2013. 52 с.

[12] Игнатьев М.В. Линейная алгебра. Сборник задач. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2013. 80 с.

[13] Игнатьев М.В. Квантовая комбинаторика. // Мат. просвещение, сер. 3, вып. 18, 2014. С. 66–113.

[14] Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. М.: Наука, 1973. 448 с.

[15] Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980. 240 с.

[16] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2009. 272 с.

[17] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 2: Линейная алгебра. М.: МЦНМО, 2009. 368 с.

[18] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3: Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2009. 272 с.

[19] Кострикин А.И., под ред. Сборник задач по алгебре. М.: МЦНМО, 2009. 408 с.

[20] Кострикин А.И, Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Лань, 2008. 304 с.

[21] Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988. 820 с.

[22] Панов А.Н. Сборник задач по линейной алгебре и геометрии. Учебное пособие. Самара: Издательство «Самарский университет», 2006. 40 с.

[23] Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996. 304 с.

[24] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: «Бином. Лаборатория знаний», 2003. 384 с.

[25] Аржанцев И.В., Батырев В.В. и др. Студенческие олимпиады по алгебре на мехмате МГУ. М.: МЦНМО, 2012. 72 с.

[26] Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983. 240 с.

[27] Фаддев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. СПб.: Лань, 2007. 288 с.

[28] Etingof P., et al. Introduction to representation theory. Student Math. Library **59**, AMS, 2011, см. также arXiv: `math.RT/0901.0827`.

Содержание

Для заметок

Учебное издание

Игнатьев Михаил Викторович,
Попов Сергей Юрьевич

ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРЫ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции
Титульное редактирование Т. И. Кузнецовой
Компьютерная верстка, макет М. В. Игнатьева

Подписано в печать 23.10.2014.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60 × 84/16.
Typeset by LaTeX. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 6,75. Тираж 100 экз. Заказ № 2542.
Издательство «Самарский университет»,
443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Отпечатано на УОП СамГУ