

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(национальный исследовательский университет)»**

А.А. Дегтярев

**ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ
И ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ**

Электронное учебное пособие

САМАРА

2011

Автор: ДЕГТЯРЕВ Александр Александрович

Учебное пособие содержит примеры теоретического и экспериментального исследования разностных схем для краевых задач математической физики.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010400.62 – «Прикладная математика и информатика». Рекомендуется для подготовки к практическим занятиям, лабораторным работам, а также для выполнения индивидуальных заданий по курсу «Численные методы математической физики».

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Краевая задача для уравнения диффузии на отрезке.....	4
1.1 Построение и исследование простейшей явной разностной схемы.....	6
1.2 Построение и исследование простейшей неявной разностной схемы.....	16
2 Краевая задача для уравнения теплопроводности в круге.....	26
2.1 Построение и исследование простейшей явной схемы.....	30
2.2 Построение и исследование разностной схемы Кранка-Николсона.....	44
Список литературы.....	54

Примеры построения и исследования разностных схем

1 Краевая задача для уравнения диффузии на отрезке

Предположим, что трубка длиной l , заполненная однородным пористым поглощающим материалом и плотно закрытая с одного из концов, была погружена в дистиллированную воду. После того, как пористый материал оказался полностью пропитанный водой, трубка была перенесена в водный раствор некоторого вещества концентрацией $\gamma(t)$. В процессе диффузии вещества внутрь трубки происходит его частичное поглощение пористым материалом, имеющим коэффициент пористости C .

Скорость поглощения пропорциональна концентрации растворенного вещества (коэффициент пропорциональности равен D). Коэффициент пористости α известен.

Для решения задачи диффузии на временном промежутке $0 < t \leq T$ использовать метод конечных разностей.

Концентрацию раствора по сечению трубки считать одинаковой в любой момент времени.

Сначала запишем математическую модель процесса диффузии.

Явление диффузии вещества в среде описывается известным дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа с тремя пространственными переменными. Поскольку концентрация вещества по сечению трубки предполагается одинаковой, то будем использовать уравнение диффузии с одной пространственной переменной, которое запишется в следующем виде:

$$C \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Du, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$. - концентрация вещества в трубке;

x - пространственная координата (считаем, что ось x направлена вдоль трубки);

t - координата времени.

Последнее слагаемое в уравнении (1) отражает поглощение диффундирующего вещества пористым материалом.

Поскольку в начальный момент времени вещество в трубке отсутствует, то начальное условие будет иметь вид:

$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2)$$

Т.к. водный раствор вещества имеет концентрацию $\gamma(t)$, то концентрация вещества в открытом конце трубки в любой момент времени будет равна $\gamma(t)$.

Поскольку с другого конца трубка плотно закрыта, то поток вещества проходящего через него равен нулю. Таким образом граничные условия для уравнения (1) будут иметь вид:

$$u|_{x=0} = \gamma(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Объединив соотношения (1) - (4) в одну систему, получим математическую модель, описывающую динамическое поле концентрации вещества на промежутке времени $0 < t \leq T$ в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} C \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Du, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T; \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l; \\ u|_{x=0} = \gamma(t), \quad 0 < t \leq T; \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T. \end{array} \right. \quad (5)$$

Применим метод конечных разностей для решения этой задачи. Здесь рассмотрены две разностные схемы: простейшая явная, простейшая неявная, для

построения которых использован метод замены производных разностными отношениями.

1.1 Построение и исследование простейшей явной разностной схемы

Определим равномерную сетку как множество узлов (x_i, t_k) , где

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x, & i &= \overline{0, I}, & h_x &= l / I; \\ t_k &= kh_t, & k &= \overline{0, K}, & h_t &= T / K, \end{aligned} \quad (6)$$

где I - число интервалов разбиения промежутка $0 \leq x \leq l$;

K - число интервалов разбиения отрезка времени $0 \leq t \leq T$.

Для построения схемы для задачи (5) заменим все функции непрерывных аргументов x и t их сеточными аналогами, а производные - нижеприведенными разностными отношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} &\approx \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2}, \\ \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} &\approx \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{h_t}, \\ \frac{\partial u(x_I, t_k)}{\partial x} &\approx \frac{u(x_{I+1}, t_k) - u(x_{I-1}, t_k)}{2h_x}. \end{aligned}$$

В результате получим следующую явную схему:

$$\left\{ \begin{aligned} C \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} &= \alpha \left(\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} \right) - Du_i^k, & i &= \overline{1, I}, & k &= \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 &= 0, & i &= \overline{0, I}; \\ u_0^k &= \gamma^k, & k &= \overline{1, K}; \\ \frac{u_{I+1}^k - u_{I-1}^k}{2h_x} &= 0, & k &= \overline{1, K}, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где u_i^k - решение этой системы в узле (x_i, t_k) ;

$\gamma^k = \gamma(t_k)$;

h_x - шаг разбиения по длине трубки;

h_t - шаг разбиения по интервалу времени.

Проведем *исследование аппроксимации явной разностной схемы*.

В соответствии с определением аппроксимации, проверим, выполняется ли условие $\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f_h\|_{F_h} = \lim_{h \rightarrow 0} \|L_h[u]_h - f_h\|_{F_h} = 0$ при произвольном выборе последовательности равномерных сгущающихся сеток.

Невязка δf_h для рассматриваемой схемы будет иметь следующую структуру:

$$\delta f_h = \begin{Bmatrix} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_h^1[u]_h - f_h^1 \\ L_h^2[u]_h - f_h^2 \\ L_h^3[u]_h - f_h^3 \\ L_h^4[u]_h - f_h^4 \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Рассмотрим каждую компоненту невязки (8) в отдельности:

$$\begin{aligned} \{\delta f_h^1\}_{x=x_i}^{t=t_k} &= \{L_h^1[u]_h - f_h^1\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{h_t} - \\ &- \frac{\alpha}{C} \cdot \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)}{h_x^2} + \frac{D}{C} u(x_i, t_k). \end{aligned}$$

Проведем разложение по формуле Тейлора значений $u(x_i, t_{k+1})$, $u(x_i, t_{k-1})$, $u(x_{i+1}, t_k)$, $u(x_{i-1}, t_k)$ в точке (x_i, t_k) и учтем эти разложения в выражении невязки. В результате получим:

$$\begin{aligned} \{\delta f_h^1\}_{x=x_i}^{t=t_k} &= \left\{ \frac{1}{h_t} \cdot \left[u + h_t u'_t + \frac{u''_t h_t^2}{2} + O(h_t^3) \right] - \right. \\ &- \frac{\alpha}{C h_x^2} \cdot \left[u + h_x u'_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + \frac{u^{IV}_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) - \right. \\ &- 2u + u - h_x u'_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} - \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + \frac{u^{IV}_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) \left. \right] + \frac{D}{C} u \left. \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\ &= \left\{ \frac{1}{h_t} \cdot \left[u + h_t u'_t + \frac{u''_t h_t^2}{2} + O(h_t^3) \right] - \frac{\alpha}{C h_x^2} \cdot \left[u''_{xx} h_x^2 + \frac{u^{IV}_{xxxx} h_x^4}{12} + O(h_x^5) \right] + \frac{D}{C} u \right\}_{x=x_i}^{t=t_k}. \end{aligned}$$

Воспользуемся дифференциальным уравнением краевой задачи (5):

$$Cu'_t = \alpha u''_{xx} - Du. \quad (9)$$

С учетом (9) выражение рассматриваемой компоненты невязки примет вид:

$$\begin{aligned} \left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} &= \left\{ \frac{1}{h_t} \cdot \left[u + h_t u'_t + \frac{u''_t h_t^2}{2} + O(h_t^3) \right] - \right. \\ &\left. - \frac{\alpha}{Ch_x^2} \left[u''_{xx} h_x^2 + \frac{u''''_{xxxx} h_x^4}{12} + O(h_x^5) \right] + \frac{D}{C} u \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \left\{ \frac{u''_t h_t}{2} - \frac{\alpha u''''_{xxxx} h_x^2}{C \cdot 12} + O(h_x^3) + O(h_t^2) \right\}_{x=x_i}^{t=t_k}. \end{aligned}$$

Видим, что в полученном выражении невязки имеются слагаемые первого порядка по шагу h_t и второго порядка по шагу h_x . Остальные слагаемые имеют более высокие порядки.

Итак, для первой компоненты невязки можем записать

$$\left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = O(h_x^2, h_t).$$

Для остальных компонент невязки будем иметь:

$$\begin{aligned} \left\{ \delta f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=t_0} &= \left\{ L_h^2[u]_h - f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=0} = u(x_i, 0) - 0 = 0. \\ \left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} &= \left\{ L_h^3[u]_h - f_h^3 \right\}_{x=0}^{t=t_k} = u(0, t_k) - \gamma^k = \gamma(t_k) - \gamma(t_k) = 0. \\ \left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k} &= \left\{ L_h^4[u]_h - f_h^4 \right\}_{x=l}^{t=t_k} = \frac{u(x_{l+1}, t_k) - u(x_{l-1}, t_k)}{2h_x} - 0 = \\ &= \left\{ \frac{1}{2h_x} \left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u''''_{xxxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) - u + u'_x h_x - \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{u''''_{xxxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] \right\}_{x=l}^{t=t_k} = \left\{ u'_x + \frac{u''''_{xxxx} h_x^2}{6} + O(h_x^3) \right\}_{x=l}^{t=t_k} = \left\{ \frac{u''''_{xxxx} h_x^2}{6} + O(h_x^3) \right\}_{x=l}^{t=t_k} = O(h_x^2). \end{aligned}$$

В итоге получили:

$$\delta f_h = \begin{Bmatrix} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} O(h_x^2, h_t) \\ 0 \\ 0 \\ O(h_x^2) \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Определим норму в пространстве F_h формулой

$$\|f_h\|_{F_h} = \max \left\{ \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=0, K-1}} \left| \{f_h^1\}_{x_i}^{t_k} \right|, \max_{i=\overline{0, I}} \left| \{f_h^2\}_{x_i}^{t_0} \right|, \max_{k=\overline{1, K}} \left| \{f_h^3\}_{x_0}^{t_k} \right|, \max_{i=\overline{1, I}} \left| \{f_h^4\}_{x_i}^{t_k} \right| \right\}. \quad (11)$$

Тогда погрешность аппроксимации явной схемы в соответствии с формулой (11) будет иметь вид:

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \max \left\{ O(h_x^2, h_t), 0, 0, O(h_x^2) \right\} = O(h_x^2, h_t). \quad (12)$$

Из последней формулы сразу вытекает предельное равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f_h\|_{F_h} = 0.$$

Итак, в результате исследования получено, что простейшая явная разностная схема (7) аппроксимирует краевую задачу (5) на ее решении u , причем погрешность аппроксимации имеет второй порядок относительно по h_x и первый относительно h_t .

Теперь проведем *исследование устойчивости явной разностной схемы*

Для доказательства устойчивости воспользуемся определением. Перепишем схему (7) в виде

$$\begin{cases} C \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = \alpha \left(\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} \right) - Du_i^k + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I}, k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \delta_i, & i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \gamma^k, & k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_{I+1}^k - u_{I-1}^k}{2h_x} = 0, & k = \overline{1, K}, \end{cases} \quad (13)$$

где φ_i^k , δ_i , γ^k - произвольные возмущения правых частей уравнения и условий; u_i^k - возмущение решения, вызванное возмущением правых частей.

Очевидно, что решение задачи (13) существует и единственно при любом выборе правых частей, поскольку оно может быть рассчитано по явной формуле.

Для доказательства устойчивости осталось убедиться в справедливости неравенства

$$\|u_h\|_{U_h} \leq A \cdot \|f_h\|_{F_h}, \quad (14)$$

где f_h - возмущение правой части; u_h - отклик решения на это возмущение; A – некоторая константа, не зависящая от шагов сетки и возмущений правых частей.

Определим нормы в пространствах U_h и F_h формулами:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=\overline{1,I} \\ k=\overline{1,K}}} |u_i^k|; \quad \|f_h\|_{F_h} = \max \left\{ \max_{\substack{i=\overline{1,I-1} \\ k=\overline{0,K-1}}} |\varphi_i^k|, \max_{i=\overline{0,I}} |\delta_i|, \max_{k=\overline{1,K}} |\gamma^k| \right\}. \quad (15)$$

Перепишем первое уравнение из системы (13) в виде:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\alpha h_t}{Ch_x^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) - \frac{D}{C} h_t u_i^k + \frac{h_t}{C} \varphi_i^k, \quad i = \overline{1,I}; \quad k = \overline{0,K-1}.$$

Далее, используя обозначение $\mu = \frac{\alpha h_t}{Ch_x^2}$, получим

$$u_i^{k+1} = (1 - 2\mu)u_i^k + \mu u_{i+1}^k + \mu u_{i-1}^k - \frac{D}{C} h_t u_i^k + \frac{h_t}{C} \varphi_i^k, \quad i = \overline{1,I}; \quad k = \overline{0,K-1}.$$

После применения неравенства треугольника, будем иметь:

$$|u_i^{k+1}| \leq |1 - 2\mu| |u_i^k| + \mu |u_{i+1}^k| + \mu |u_{i-1}^k| + \frac{D}{C} h_t |u_i^k| + \frac{h_t}{C} |\varphi_i^k|, \quad i = \overline{1,I}; \quad k = \overline{0,K-1}.$$

Воспользуемся следующими очевидными оценками:

$$|u_i^k| \leq \max_{j=\overline{0,I}} \{ |u_j^k| \}, \quad i = \overline{0,I}, \quad k = \overline{0,K}; \quad |\varphi_i^k| \leq \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1,I}, \quad k = \overline{0,K-1}, \quad (16)$$

Тогда придем к неравенству

$$|u_i^{k+1}| \leq |1 - 2\mu| \max_{j=\overline{0,I}} \{ |u_j^k| \} + \left(2\mu + \frac{D}{C} h_t \right) \max_{j=\overline{0,I}} \{ |u_j^k| \} + \frac{h_t}{C} \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1,I}, \quad k = \overline{0,K-1}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие $1 - 2\mu \geq 0$, или

$$\mu = \frac{\alpha h_t}{Ch_x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (17)$$

После упрощения последнее неравенство предстанет в виде

$$|u_i^{k+1}| \leq \left(1 + \frac{D}{C} h_t \right) \max_{j=\overline{0,I}} \{ |u_j^k| \} + \frac{h_t}{C} \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1,I}, \quad k = \overline{0,K-1}. \quad (18)$$

Теперь запишем последнее неравенство при конкретных значениях индекса k .

При $k = 0$ с учетом начального условия задачи (13) будем иметь:

$$|u_i^1| \leq \left(1 + \frac{D}{C} h_t\right) \max_{j=1, I} \{\psi_j\} + \frac{h_t}{C} \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Далее, учитывая оценку $\max_{j=1, I} \{\psi_j\}_{F_h} \leq \|f_h\|_{F_h}$, получим

$$|u_i^1| \leq \left(1 + \frac{D}{C} h_t\right) \|f_h\|_{F_h} + \frac{h_t}{C} \|f_h\|_{F_h} < \left(1 + \frac{D}{C} h_t\right) \left(1 + \frac{h_t}{C}\right) \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I}. \quad (19)$$

Пусть $k = 1$, тогда:

$$|u_i^2| \leq \left(1 + \frac{D}{C} h_t\right) \max_{j=1, I} \{|u_j^1|, |\gamma^1|\} + \frac{h_t}{C} \|f_h\|_{F_h} = (1 + 2\frac{h_t}{C}) \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Учитывая в последнем неравенстве оценку (19), получим

$$|u_i^2| \leq \left(1 + \frac{D}{C} h_t\right)^2 \left(1 + \frac{h_t}{C}\right) \|f_h\|_{F_h} + \frac{h_t}{C} \|f_h\|_{F_h} < \left(1 + \frac{D}{C} h_t\right)^2 \left(1 + \frac{2h_t}{C}\right) \|f_h\|_{F_h}. \quad (20)$$

Действуя аналогичным образом, в конце концов, получим оценку

$$|u_i^k| < \left(1 + \frac{D}{C} h_t\right)^k \left(1 + \frac{Kh_t}{C}\right) \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I}. \quad (21)$$

На основании неравенств (19) – (21) заключаем, что для любых $i = \overline{1, I}; k = \overline{1, K}$ справедлива оценка

$$|u_i^k| < \left(1 + \frac{D}{C} h_t\right)^k \left(1 + \frac{kh_t}{C}\right) \|f_h\|_{F_h}. \quad (22)$$

Далее, воспользуемся формулой (15) для нормы $\|u_h\|_{U_h}$ и оценкой (22):

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{U_h} &= \max_{\substack{i=1, I \\ k=1, K}} |u_i^k| < \max_{k=1, K} \left(1 + \frac{D}{C} h_t\right)^k \left(1 + \frac{kh_t}{C}\right) \|f_h\|_{F_h} = \\ &= \left(1 + \frac{D}{C} h_t\right)^K \left(1 + \frac{Kh_t}{C}\right) \|f_h\|_{F_h}. \end{aligned} \quad (23)$$

Покажем, что выражение $\left(1 + \frac{D}{C}h_t\right)^K \left(1 + \frac{Kh_t}{C}\right)$ можно оценить сверху константой, не зависящей от шагов сетки. Во-первых, в силу определения сетки $K \cdot h_t = T$. Во-вторых, для достаточно мелких сеток справедливо неравенство

$$\left(1 + \frac{D}{C}h_t\right)^K = \left(1 + \frac{D}{C}h_t\right)^{T/h_t} = \left(\left(1 + \frac{D}{C}h_t\right)^{C/(Dh_t)}\right)^{(TD)/C} < e^{(TD)/C}.$$

Учитывая последнее неравенство в (9.23), приходим к оценке

$$\|u_h\|_{U_h} < A \cdot \|f_h\|_{F_h}, \quad A = e^{(TD)/C} (1 + T/C).$$

Итак, доказана устойчивость явной схемы при соблюдении условия (17).

Отметим, что здесь доказана устойчивость частного вида, поскольку возмущение правой части второго граничного условия предполагалось отсутствующим.

Нетрудно показать, что при нарушении условия (17) явная схема (7) будет неустойчивой.

Действительно, предположим, что $\mu > 1/2$. Выберем возмущения правых частей следующим образом: $\varphi_i^k = 0$, $\delta_i = (-1)^i \cdot \varepsilon$, $\gamma^k = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Далее, подставив эти возмущения в схему (13), получим следующую формулу для отклика решения u_i^k , на возмущения правых частей:

$$u_i^k = \left(1 - 4\mu - \frac{D}{C}h_t\right)^k (-1)^i \varepsilon, \quad i = \overline{1, I}.$$

Используя определение нормы $\|u_h\|_{U_h}$ и учитывая, что $\|f_h\|_{F_h} = \varepsilon$, получим:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=\overline{1, I} \\ k=\overline{1, K}}} |u_i^k| = \max_{\substack{i=\overline{1, I} \\ k=\overline{1, K}}} \left| (-1)^i \cdot \varepsilon \cdot \left(1 - 4\mu - \frac{D}{C}h_t\right)^k \right| = \left|1 - 4\mu - \frac{D}{C}h_t\right|^K \|f_h\|_{F_h}.$$

Поскольку $\mu > \frac{1}{2}$, то справедливо неравенство $\left|1 - 4\mu - \frac{D}{C}h_t\right| > 1$. Но тогда

величина $\left|1 - 4\mu - \frac{D}{C}h_t\right|^k = \left|1 - 4\mu - \frac{D}{C}h_t\right|^{T/h_t}$, а вместе с ней и норма $\|u_h\|_{U_h}$, будет

неограниченно расти с измельчением сетки

Таким образом, неустойчивость схемы (7) при нарушении условия (17) доказана.

Поскольку явная схема (7) аппроксимирует краевую задачу (5) с погрешностью $O(h_x^2, h_t)$ и является устойчивой, то по теореме о сходимости эта схема является сходящейся, причем она имеет скорость сходимости линейную по h_t и квадратичную по h_x .

Ниже приведены результаты *экспериментального исследования сходимости явной схемы (7)*, полученные для тестового примера, в котором функция $\gamma(t)$ была задана следующим образом:

$$\gamma(t) = 0,1 \sin^2 \frac{\pi t}{T}.$$

Для этого тестового примера было получено аналитическое решение в виде ряда Фурье, который довольно быстро сходится. Погрешность численного решения задачи (5) вычислялась путем сравнения с аналитическим решением. При этом погрешность расчета аналитического решения обеспечивалась не менее, чем на два порядка меньшей, по сравнению с исследуемой погрешностью.

В расчетах были использованы следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} l &= 10[\text{см}]; & D &= 0,002[1/\text{с}]; & C &= 0,8; \\ \alpha &= 0,24[\text{см}^2/\text{с}]; & T &= 150[\text{с}]. \end{aligned}$$

На рисунках 1 - 3 приведены типичные результаты вычислительных экспериментов. Причем на рисунках 1 и 2 приведены графики сеточного решения и погрешностей, рассчитанные при соблюдении условия устойчивости (17). Из графиков на рисунке 1 видно, что решение, полученное с помощью явной схемы, лишь незначительно отличается от аналитического. В этом случае погрешность численного метода не превосходит 1%. При дальнейшем измельчении сетки

численное и аналитическое решения становятся визуально неразличимыми, что хорошо видно на рисунке (2). При этом погрешность численного метода характеризуется величинами, не превосходящими 0.01%, но достигнуто это было ценой существенного уменьшения шага h_t , а следовательно, ценой столь же значительного увеличения объема вычислений.

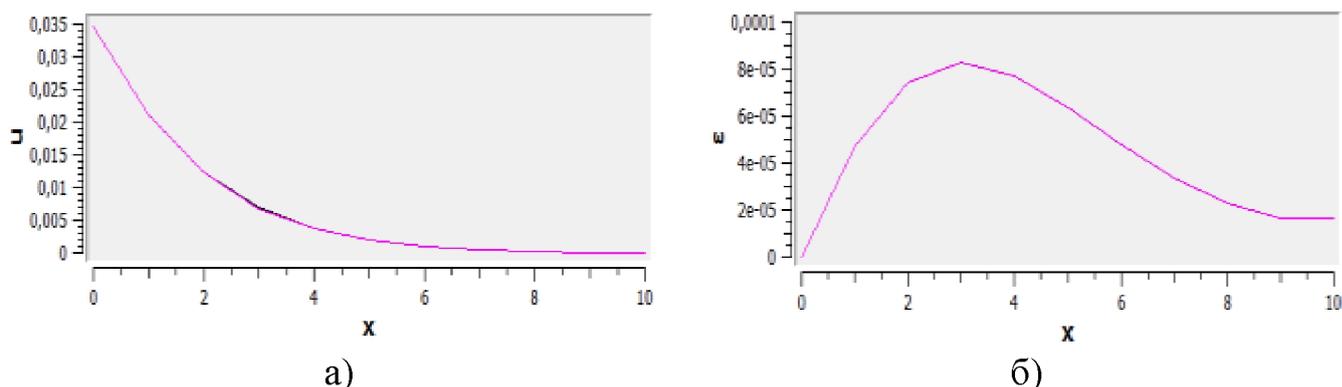


Рисунок 1 – Сравнение численного и аналитического решений при $h_x = 1, h_t = 1$ и $t = 30$:

- а) графики аналитического решения (чёрный) и решения, найденного с помощью явной схемы (розовый);
- б) график зависимости погрешности от x

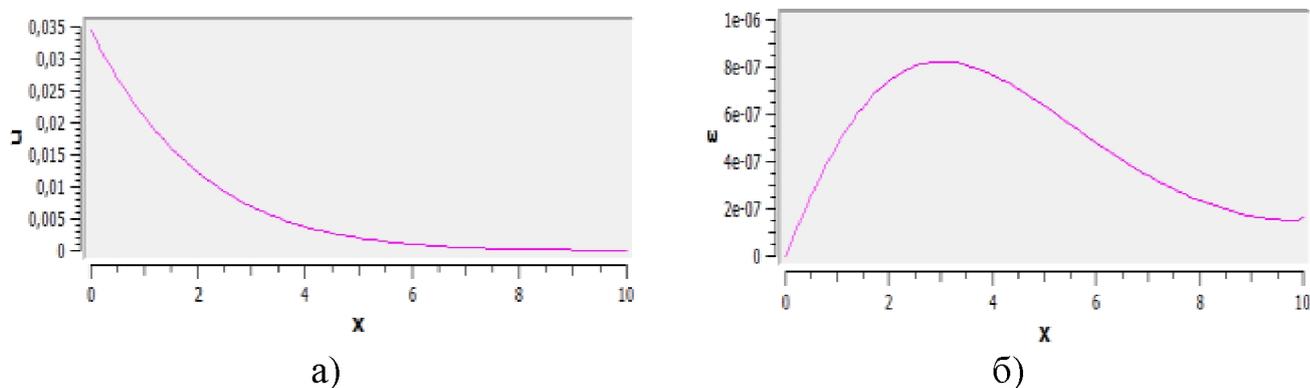


Рисунок 2 – Сравнение численного и аналитического решений при $h_x = 0,1, h_t = 0,01$ и $t = 30$:

- а) графики аналитического решения (чёрный) и решения, найденного с помощью явной (розовый);
- б) график зависимости погрешности от x

Если в процессе измельчения сетки допустить нарушение условия устойчивости (17), то погрешность решения начинает быстро расти, достигая

гигантских величин. На рисунке 3 приведен один из результатов расчета по явной схеме в случае ее неустойчивости.

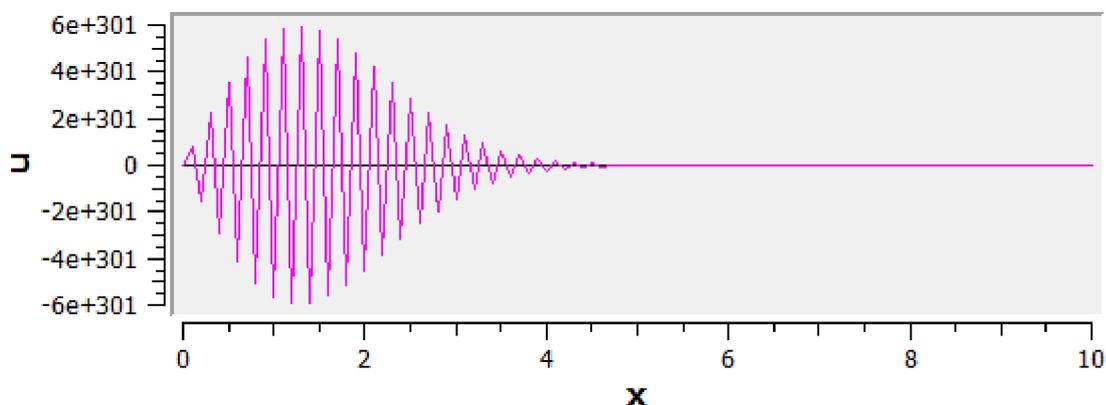


Рисунок 3 – Пример неустойчивости явной схемы

Отметим, что для рассматриваемого примера даже незначительное нарушение условия устойчивости в конце концов приводило к так называемому «переполнению порядка».

Теперь проведем экспериментальную проверку порядков сходимости явной разностной схемы.

В результате теоретического исследования было установлено, что схема (7) сходится с линейной скоростью относительно шага h_t и с квадратичной – относительно шага h_x . Таким образом, если теоретическое исследование верно, то на достаточно мелких сетках уменьшение шага h_x вдвое при одновременном уменьшении шага h_t вчетверо должно привести приблизительно к четырехкратному уменьшению погрешности сеточного решения.

Проверим это с помощью вычислительного эксперимента. Воспользуемся прежним тестовым примером. Выберем начальные шаги таким образом, чтобы выполнялось условие устойчивости и при этом шаг по времени был максимально крупным. Далее будем одновременно уменьшать оба шага по вышеописанному правилу. Очевидно, что условие устойчивости (17) при таком измельчении сетки будет всегда выполнено. Погрешность сеточного решения будем вычислять по формуле

$$\|\delta u_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=1, \dots, I \\ k=1, \dots, K}} |u_i^k - u(x_i, t_k)|,$$

где $u(x_i, t_k)$ - решение задачи (5), вычисленное с помощью ряда Фурье с достаточным запасом по точности. В таблице 1 представлены результаты одного из экспериментов. Здесь буквой n обозначен вариант сетки.

Таблица 1 – Результаты исследования погрешности явной схемы

n	Число интервалов по x , I	Число интервалов по t , K	h_x	h_t	$(\ \delta u_h\ _{U_h})_n$	$\frac{(h_x)_{n-1}}{(h_x)_n}$	$\frac{(h_t)_{n-1}}{(h_t)_n}$	$\frac{(\ \delta u_h\ _{U_h})_{n-1}}{(\ \delta u_h\ _{U_h})_n}$
1	10	150	1	1	0,0007813	-	-	-
2	20	600	0,5000	0,25000	0,0001957	2	4	3,9923
3	40	2400	0,2500	0,06250	0,0000498	2	4	3,9297
4	80	9600	0,1250	0,01562	0,0000119	2	4	4,1849
5	160	38400	0,0625	0,00390	0,0000031	2	4	3,8387

Из таблицы видно, что при спланированном выше измельчении сетки погрешность сеточного решения уменьшается приблизительно в 4 раза, что вполне согласуется с результатами теоретического исследования сходимости явной схемы.

1.2 Построение и исследование простейшей неявной разностной схемы

Для построения неявной схемы для задачи (5) воспользуемся сеткой (6).
Заменим производные следующими разностными отношениями:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2},$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1}))}{h_t}.$$

$$\frac{\partial u(x_I, t_k)}{\partial x} \approx \frac{u(x_I, t_k) - u(x_{I-1}, t_k)}{h_x}.$$

В результате получим следующую схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = \frac{\alpha}{C} \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} - \frac{D}{C} u_i^k, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = 0, \quad i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \gamma^k, \quad k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h_x} = 0, \quad k = \overline{1, K}. \end{array} \right. , \quad (24)$$

В отличие от явной схемы здесь мы использовали не центральную аппроксимацию производной в последнем граничном условии, а левую. Левая аппроксимация не использует узлов за пределами отрезка $0 \leq x \leq l$ и, следовательно, может быть применена всегда, когда существует левосторонняя производная $\frac{\partial u(l, t_k)}{\partial x}$. Для применения центральной аппроксимации необходимо, чтобы функция $u(x, t)$ была непрерывной по x в некоторой двусторонней окрестности точки $x = l$ и имела в этой точке не одностороннюю производную, а обычную.

Проведем *исследование аппроксимации неявной разностной схемы* (24).

Невязка для этой схемы будет иметь структуру, аналогичную структуре невязки для простейшей явной схемы:

$$\delta f_h = \left\{ \begin{array}{l} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} L_h^1[u]_h - f_h^1 \\ L_h^2[u]_h - f_h^2 \\ L_h^3[u]_h - f_h^3 \\ L_h^4[u]_h - f_h^4 \end{array} \right\}. \quad (25)$$

Рассматривая отдельно каждую компоненту невязки (25) и действуя по аналогии с исследованием аппроксимации простейшей явной схемы, получим:

$$\left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_{k-1}} = \left\{ L_h^1[u]_h - f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_{k-1}} = \frac{u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1})}{h_t} - \frac{\alpha}{C} \cdot \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)}{h_x^2} + \frac{D}{C} u(x_i, t_k) = O(h_x^2, h_t).$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \delta f_h^2 \right\}_{x=x_l}^{t=t_0} &= \left\{ L_h^2[u]_h - f_h^2 \right\}_{x=x_l}^{t=0} = u(x_l, 0) - 0 = 0. \\
\left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} &= \left\{ L_h^3[u]_h - f_h^3 \right\}_{x=0}^{t=t_k} = u(0, t_k) - \gamma^k = \gamma(t_k) - \gamma(t_k) = 0. \\
\left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k} &= \left\{ L_h^4[u]_h - f_h^4 \right\}_{x=l}^{t=t_k} = \frac{u(x_l, t_k) - u(x_{l-1}, t_k)}{h_x} - 0 = \\
&= \left\{ \frac{1}{h_x} \left[u - u + u'_x h_x - \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] \right\}_{x=l}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ u'_x + \frac{u''_{xx} h_x}{2} + O(h_x^2) \right\}_{x=l}^{t=t_k} = \left\{ \frac{u''_{xx} h_x}{2} + O(h_x^2) \right\}_{x=l}^{t=t_k} = O(h_x).
\end{aligned}$$

При упрощении выражения для невязки $\left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k}$ было учтено граничное условие $u'_x \Big|_{x=l} = 0$ задачи (5). Видим, что последнее разностное граничное условие схемы (24) имеет лишь первый порядок аппроксимации по шагу h_x , в то время, как дифференциальное уравнение задачи (5) аппроксимировано со вторым порядком.

Повысим порядок аппроксимации для четвертого соотношения схемы (24). Запишем четвертое соотношение (разностное граничное условие) схемы (24) в виде $\frac{u_l^k - u_{l-1}^k}{h_x} = S^k$. В этом случае четвертая невязка будет иметь вид

$$\left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k} = \frac{u(x_l, t_k) - u(x_{l-1}, t_k)}{h_x} - S^k = \left\{ \frac{u''_{xx} h_x}{2} + O(h_x^2) - S^k \right\}_{x=l}^{t=t_k}.$$

Для того, чтобы рассматриваемое краевое условие имело второй порядок аппроксимации по шагу h_x , необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$S^k = -\frac{h_x}{2} \left\{ u''_{xx} \right\}_{x=x_l}^{t=t_k}. \quad (26)$$

Из дифференциального уравнения задачи (5) получаем:

$$u''_{xx} = \frac{C}{\alpha} u'_t + \frac{D}{\alpha} u. \quad (27)$$

Подставив (27) в (26) и заменив производную по времени подходящим разностным отношением, получим:

$$S^k = -\frac{h_x}{2} \left[\frac{C}{\alpha} \frac{u(x_I, t_k) - u(x_I, t_{k-1})}{h_t} + \frac{D}{\alpha} u(x_I, t_k) \right].$$

Таким образом, окончательный вариант простейшей неявной разностной схемы будет выглядеть так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = \frac{\alpha}{C} \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} - \frac{D}{C} u_i^k, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}, \\ u_i^0 = 0, \quad i = \overline{0, I}, \\ u_0^k = \gamma^k, \quad k = \overline{1, K}, \\ \frac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_x} = -\frac{h_x}{2} \left[\frac{C}{\alpha} \frac{u_I^k - u_I^{k-1}}{h_t} + \frac{D}{\alpha} u_I^k \right], \quad k = \overline{1, K}. \end{array} \right. \quad (28)$$

Для этой схемы невязка имеет вид:

$$\delta f_h = \left\{ \begin{array}{l} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} O(h_x^2, h_t) \\ 0 \\ 0 \\ O(h_x^2) \end{array} \right\}.$$

Если определить норму в пространстве F_h формулой (11), то погрешность аппроксимации неявной схемы (28) будет равна:

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \max \{ O(h_x^2, h_t), 0, 0, O(h_x^2) \} = O(h_x^2, h_t). \quad (29)$$

Итак, простейшая неявная разностная схема (28) аппроксимирует краевую задачу (5) на ее решении u , причем погрешность аппроксимации имеет второй порядок относительно по h_x и первый относительно h_t .

Для исследования устойчивости неявной разностной схемы (29) можно воспользоваться определением устойчивости линейных разностных схем, поскольку рассматриваемая схема является линейной. С учетом возмущений схему (28) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = \frac{\alpha}{C} \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} - \frac{D}{C} u_i^k + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \delta_i, & i = \overline{0, I}; \\ u_0^k = \gamma^k, & k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_I^k - u_I^{k-1}}{h_t} = -2 \frac{\alpha}{C} \frac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_x^2} - \frac{D}{C} u_I^k + \varphi_I^k, & k = \overline{1, K}. \end{cases} \quad (30)$$

где φ_i^k , δ_i , γ^k - произвольные возмущения правых частей уравнения и условий; u_i^k - возмущение решения, вызванное возмущением правых частей.

Заметим, что решение задачи (30) существует и единственно при любом выборе правых частей φ_i^k , δ_i , γ^k , поскольку эта задача представляет собой систему линейных уравнений с невырожденной матрицей.

Чтобы доказать устойчивость, осталось убедиться в справедливости неравенства $\|u_h\|_{U_h} \leq A \cdot \|f_h\|_{F_h}$. Если использовать нормы, определенные равенствами (15), то сделать это можно по аналогии с доказательством устойчивости неявной схемы, приведенным в [1]. Схема будет абсолютно устойчивой, поскольку для доказательства устойчивости не требуется вводить какие-либо условия, ограничивающие выбор шагов дискретизации.

Из того, что схема (28) аппроксимирует краевую задачу (5) с погрешностью $O(h_x^2, h_t)$ и является устойчивой, следует ее сходимость, причем скорость сходимости будет линейной по h_t и квадратичной по h_x .

Отметим, что схема (28) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в следующем векторно-матричном виде:

$$\begin{cases} Pu^k = u^{k-1} + b^k, & k = \overline{1, K}; \\ u^0 = \theta, \end{cases} \quad (31)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 1+2\mu+\frac{D}{C}h_t & -\mu & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1+2\mu+\frac{D}{C}h_t & -\mu & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu & 1+2\mu+\frac{D}{C}h_t & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2\mu & 1+2\mu+\frac{D}{C}h_t \end{pmatrix}_{I \times I},$$

$$u^k = \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_I^k \end{pmatrix}, \quad b^k = \begin{pmatrix} \mu\gamma^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи (31), представляющей собой СЛАУ с трехдиагональной матрицей, целесообразно использовать метод прогонки, устойчивость которой гарантируется выполнением неравенства:

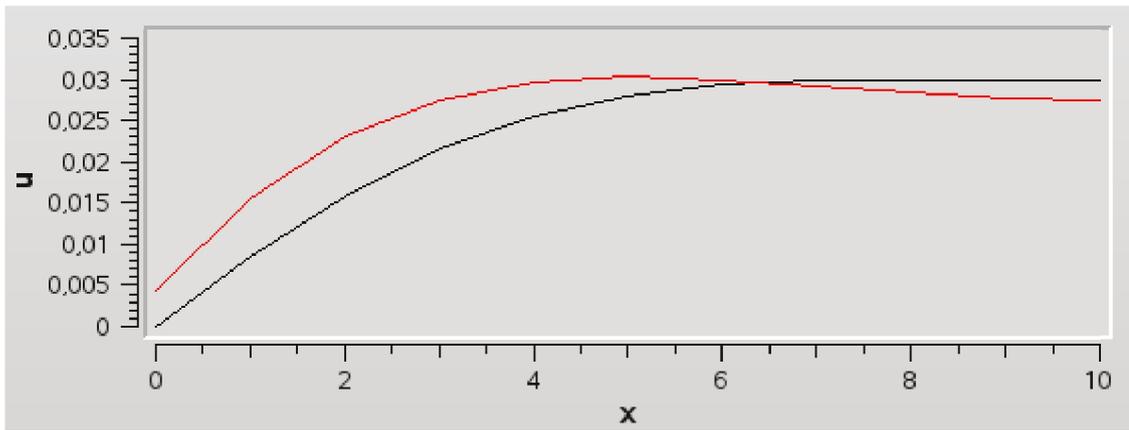
$$1 + 2\mu + \frac{D}{C}h_t > 2\mu.$$

Далее приведем результаты вычислительных экспериментов по исследованию сходимости неявной схемы (28). При проведении расчетов использовался прежний тестовый пример.

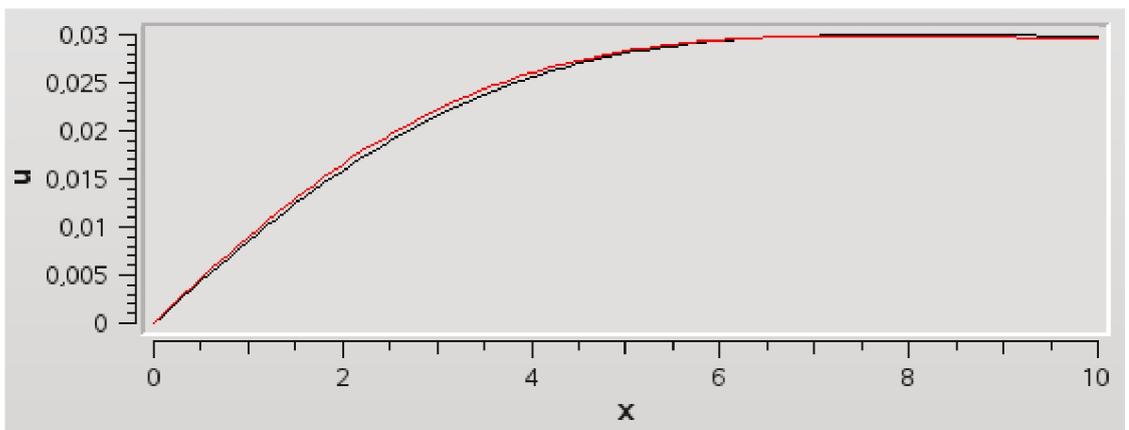
На рисунке 4 приведены графики, позволяющие получить визуальное представление о сходимости сеточного решения, рассчитанного с помощью неявной схемы, к аналитическому при измельчении сетки. Графики соответствуют моменту времени $t = 150c$. Погрешность аналитического решения не превышает величины $\varepsilon = 10^{-8}$.

Видим, что на самой мелкой сетке численное решение буквально накладывается на аналитическое и становится визуально неотличимым от него.

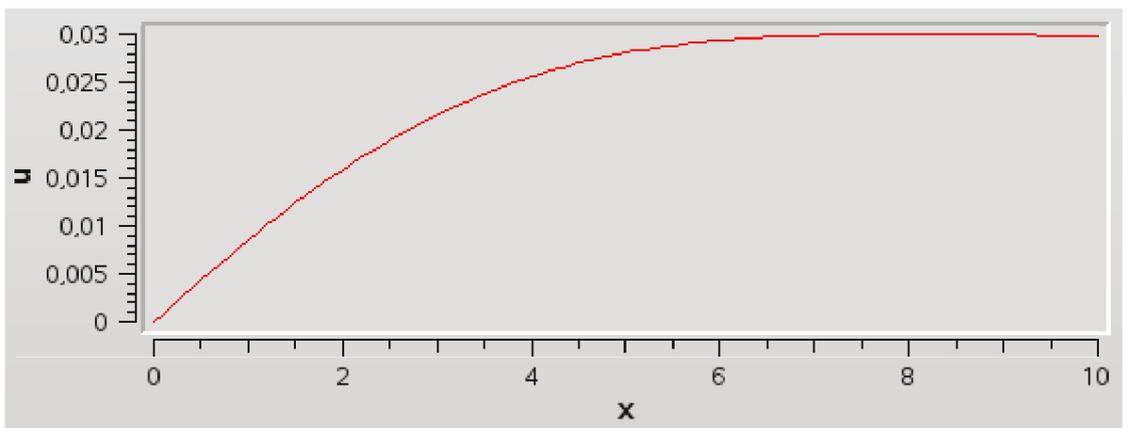
Отметим, что применение явной схемы на использованных здесь сетках невозможно по причине ее неустойчивости.



а)



б)



в)

Рисунок 4 — Сравнение численного (красный цвет) и аналитического (черный цвет) решений на сетках:

а) $I=10, K=15$; б) $I=100, K=150$; в) $I=1000, K=150000$

Исследуем экспериментально скорость сходимости неявной схемы (28). Для этого выберем некоторую достаточно крупную сетку и будем ее последовательно измельчать, каждый раз определяя величину абсолютной погрешности. При этом шаг h_x будем измельчать в 2 раза, а шаг h_t - в 4 раза. Согласно результатам теоретического исследования погрешность сеточного решения для неявной схемы характеризуется величиной $O(h_x^2, h_t)$. Таким образом, следует ожидать, что при каждом указанном выше измельчении сетки погрешность численного решения будет уменьшаться приблизительно в 4 раза.

В таблицах 2 - 4 представлены данные экспериментальных исследований погрешности численного решения, полученные с помощью соответствующего сервиса разработанной компьютерной программы. Расчеты проведены для тестового примера, указанного в начале настоящего параграфа. Погрешность численного решения определялась так же, как для простейшей явной схемы. При этом погрешность аналитического решения обеспечивалась не больше, чем $\varepsilon = 10^{-9}$.

Таблица 2 – Результаты исследования погрешности неявной схемы при начальных значениях $I = 10, K = 15$

n	Число интервалов по x , I	Число интервалов по t , K	h_x	h_t	$(\ \delta u_h\ _{U_h})_n$	$\frac{(h_x)_{n-1}}{(h_x)_n}$	$\frac{(h_t)_{n-1}}{(h_t)_n}$	$\frac{(\ \delta u_h\ _{U_h})_{n-1}}{(\ \delta u_h\ _{U_h})_n}$
1	10	15	1	10	7.0895e-03	-	-	-
2	20	60	0.5	2.50000	1.6143e-03	2	4	4.3916
3	40	240	0.25	0.62500	3.9145e-04	2	4	4.1240
4	80	960	0.1250	0.15625	9.7065e-05	2	4	4.0328
5	160	3840	0.0625	0.03906	2.4216e-05	2	4	4.0083
6	320	15360	0.0312	0.00976	6.0508e-06	2	4	4.0021
7	640	61440	0.0156	0.00244	1.5125e-06	2	4	4.0005
8	1280	245760	0.0078	0.00061	3.7811e-07	2	4	4.0001

Таблица 3 – Результаты исследования погрешности неявной схемы при начальных значениях $I = 100, K = 15$

n	Число интервалов по x , I	Число интервалов по t , K	h_x	h_t	$(\ \delta u_h\ _{U_h})_n$	$\frac{(h_x)_{n-1}}{(h_x)_n}$	$\frac{(h_t)_{n-1}}{(h_t)_n}$	$\frac{(\ \delta u_h\ _{U_h})_{n-1}}{(\ \delta u_h\ _{U_h})_n}$
1	100	15	0.1	10	7.2963e-03	-	-	-
2	200	60	0.05	2.50000	1.6135e-03	2	4	4.5219
3	400	240	0.025	0.62500	3.9229e-04	2	4	4.1131
4	800	960	0.0125	0.15625	9.7383e-05	2	4	4.0284
5	1600	3840	0.00625	0.03906	2.4304e-05	2	4	4.0068
6	3200	15360	0.00312	0.00976	6.0737e-06	2	4	4.0016
7	6400	61440	0.00156	0.00244	1.5182e-06	2	4	4.0004

Таблица 4 – Результаты исследования погрешности неявной схемы при начальных значениях $I = 10, K = 150$

n	Число интервалов по x , I	Число интервалов по t , K	h_x	h_t	$(\ \delta u_h\ _{U_h})_n$	$\frac{(h_x)_{n-1}}{(h_x)_n}$	$\frac{(h_t)_{n-1}}{(h_t)_n}$	$\frac{(\ \delta u_h\ _{U_h})_{n-1}}{(\ \delta u_h\ _{U_h})_n}$
1	10	150	1	1	6.4896e-04	-	-	-
2	20	600	0.5	0.25000	1.6196e-04	2	4	4.00682
3	40	2400	0.25	0.06250	4.0471e-05	2	4	4.00198
4	80	9600	0.1250	0.015625	1.0116e-05	2	4	4.00049
5	160	38400	0.0625	0.003906	2.5290e-06	2	4	4.00015
6	320	153600	0.0312	0.000976	6.3225e-07	2	4	4.00002
7	640	614400	0.0156	0.000244	1.5806e-07	2	4	4.00001

Видим, что на использованном здесь тестовом примере результаты вычислительных экспериментов хорошо согласуются с результатами теоретического исследования сходимости неявной схемы для различных

равномерных сеток. При этом неявная схема показала высокую устойчивость на сетках с различным соотношением шагов h_x и h_t .

Теперь применим метод Рунге, изложенный в методических указаниях к данной лабораторной работе, для повышения точности неявной разностной схемы до второго порядка относительно шага h_t .

Уточнение будем осуществлять, используя формулу

$$\tilde{u}_{h_x, h_t} = au_{h_x, h_t} + bu_{h_x, h_t/2}, \quad (32)$$

где u_{h_x, h_t} - решение, полученное на сетке с шагами h_x, h_t ;

$u_{h_x, h_t/2}$ - решение, полученное на сетке с шагами $h_x, h_t/2$;

\tilde{u}_{h_x, h_t} - результат уточнения, вычисляемый по формуле (32).

Для нахождения коэффициентов a и b решаем систему уравнений

$$\begin{cases} a + b = 1; \\ ah_t + bh_t/2 = 0, \end{cases}$$

в результате чего получаем $a = -1, b = 2$.

Теперь проверим, обеспечивает ли пересчет решения по формуле (32) повышение его точности до указанного порядка.

В таблице 5 приведены результаты экспериментальной проверки уточнения по методу Рунге, полученные с использованием прежнего тестового примера.

Таблица 5 – Исследование метода Рунге уточнения неявной схемы

n	Число интервалов по x , I	Число интервалов по t , K	h_x	h_t	$(\ \delta u_h\ _{U_h})_n$	$\frac{(h_x)_{n-1}}{(h_x)_n}$	$\frac{(h_t)_{n-1}}{(h_t)_n}$	$\frac{(\ \delta u_h\ _{U_h})_{n-1}}{(\ \delta u_h\ _{U_h})_n}$
1	20	30	0.5	5.00000	1.0473e-03	2	2	
2	40	60	0.25	2.50000	3.3252e-04	2	2	3.1496
3	80	120	0.1250	1.25000	9.0676e-05	2	2	3.6671
4	160	240	0.0625	0.62500	2.5748e-05	2	2	3.5217
5	320	480	0.0312	0.31250	7.5903e-06	2	2	3.3922
6	640	960	0.0156	0.15625	2.2031e-06	2	2	3.4453

7	1280	1920	0.0078	0.07812	6.7210e-07	2	2	3.2779
---	------	------	--------	---------	------------	---	---	--------

Для получения решения \tilde{u}_{h_x, h_t} рассчитывались сеточные функции u_{h_x, h_t} и $u_{h_x, h_t/2}$ при одинаковых шагах h_x с последующим применением формулы (32). При этом использовались значения функции $u_{h_x, h_t/2}$ на прореженной сетке, т.е. на сетке, характеризуемой шагами h_x и h_t .

Из таблицы видно, что метод Рунге в данном случае действительно обеспечивает повышение скорости сходимости сеточного решения к точному. Это повышение достигается ценой увеличения объема вычислений. Однако скорость сходимости все же не дотягивает до квадратичной по шагу h_t .

2 Краевая задача для уравнения теплопроводности в круге

Предположим, что плоско-параллельный термически тонкий прозрачный оптический элемент, имеющий форму диска толщиной l и радиусом R ($l \ll R$), облучается лазерным пучком света с распределением интенсивности излучения $I(r)$. В результате поглощения части энергии излучения оптический элемент нагревается. Пластина является однородной и выполнена из материала, характеризуемого коэффициентами поглощения β , теплопроводности k , объёмной теплоёмкости c .

Пучок света обладает круговой симметрией и падает нормально на поверхность пластины, причем оси пучка и оптического элемента совпадают (см. рисунок 5).

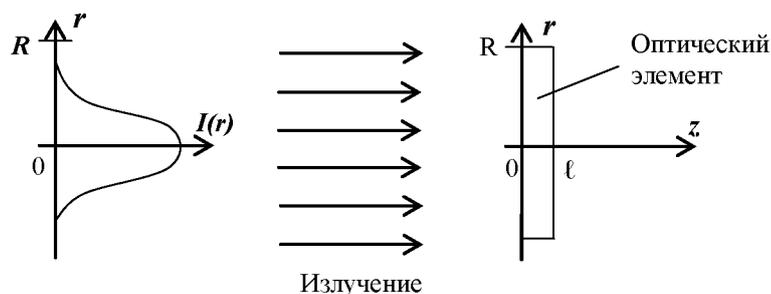


Рисунок 5 - Схема воздействия лазерного пучка на прозрачный оптический элемент.

Боковая поверхность $r = R$ оптического элемента теплоизолирована, а между гранями ($z = 0$ и $z = l$) и окружающей средой имеет место теплообмен, описываемый законом Ньютона с коэффициентом теплообмена α .

В момент включения лазера $t = 0$ температура оптического элемента предполагается одинаковой во всех точках и равной температуре окружающей среды u_0 .

Для решения задачи теплопроводности на временном промежутке $0 < t \leq T$ использовать метод конечных разностей.

Указание. Мощность лазерного излучения, поглощаемую в процессе его прохождения через материал оптического элемента, считать пропорциональной интенсивности излучения $I(r)$ с коэффициентом пропорциональности β .

Построим математическую модель теплового процесса, протекающего в оптическом элементе. Уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии имеет вид:

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(r, z), \quad (33)$$

где $f(r, z)$ – функция, характеризующая распределенные тепловые источники.

В условии задачи указано, что энергия лазерного излучения считается распределенным температурным источником. Таким образом, $f(r) = \beta I(r)$, где β – коэффициент поглощения, $I(r)$ – интенсивность излучения лазера.

Тепловой поток через грани пластины и определяется как $Q = -k \frac{\partial u}{\partial z}$. Из условия задачи известно, что между окружающей средой и гранями оптического элемента $z = 0$ и $z = l$ происходит теплообмен, который описывается законом Ньютона [2]. Поскольку тепловой поток для грани $z = 0$ с учетом направления

внешней нормали равен $Q = k \frac{\partial u}{\partial z}$, а в соответствии с законом Ньютона этот тепловой поток пропорционален разнице температур грани и окружающей среды, т.е. $Q = \alpha(u - u_0)$, то получаем следующее граничное условие:

$$k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha(u|_{z=0} - u_0). \quad (34)$$

Аналогично приходим к граничному условию

$$k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=l} = -\alpha(u|_{z=l} - u_0). \quad (35)$$

Поскольку в условии задачи оптический элемент предполагается термически тонким, то не будем учитывать распределение температуры по толщине. При этом под температурой элемента в конкретной точке будем понимать ее среднеинтегральное по переменной z :

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{l} \int_0^l u(r, z, t) dz.$$

Чтобы получить уравнение теплопроводности для средней температуры $\bar{u}(r, t)$, проведем усреднение по переменной z левой и правой частей уравнения (33):

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_0^l c \frac{\partial u}{\partial t} dz &= c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{l} \int_0^l u dz \right) = c \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}; \\ \frac{1}{l} \int_0^l k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dz &+ \frac{1}{l} \int_0^l k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz + \frac{1}{l} \int_0^l \beta I(r) dz = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{k}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=l} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) + \beta I(r). \end{aligned}$$

В результате усреднения уравнение теплопроводности примет вид:

$$c \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) + \frac{k}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=l} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) + \beta I(r).$$

Если учесть граничные условия (34) и (35), а также пренебречь разницей между величинами $u(r, z, t)|_{z=l}$, $u(r, z, t)|_{z=0}$ и $\bar{u}(r, t)$, то последнее уравнение запишется в следующем виде:

$$c \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) - \frac{2\alpha}{l} (\bar{u} - u_0) + \beta I(r), \quad 0 < r \leq R, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (36)$$

Обратим внимание на то, что в выражении для оператора Лапласа имеется дробь с переменной r в знаменателе. Следовательно, если радиальная координата r примет значение $r = 0$, то правая часть уравнения (36) потеряет смысл. Для того чтобы корректно записать уравнение теплопроводности для $r = 0$, воспользуемся следующей формой представления оператора Лапласа, обоснование которой дано в методических указаниях к данной лабораторной работе:

$$\Delta \bar{u}|_{r=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} \Big|_{r=0}.$$

Таким образом, уравнение теплопроводности в случае $r = 0$ будет иметь вид:

$$c \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 2k \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} - \frac{2\alpha}{l} (\bar{u} - u_0) + \beta I(r), \quad r = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (37)$$

Поскольку боковая поверхность $r = R$ оптического элемента теплоизолирована, то тепловой поток через эту поверхность равен нулю, следовательно, справедливо равенство

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (38)$$

Учтем также, что в начальный момент времени $t = 0$ температура оптического элемента предполагается одинаковой во всех точках и равной температуре окружающей среды u_0 , т.е. начальное условие имеет следующий простой вид:

$$\bar{u}|_{t=0} = u_0, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (39)$$

Собирая соотношения (36) – (39) в единую систему, а также используя замену $v = \bar{u} - u_0$, получим следующий окончательный вид математической модели теплового процесса в оптическом элементе:

$$\begin{cases} c \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{2\alpha}{l} v + \beta I(r), & 0 < r \leq R, \quad 0 \leq t \leq T; \\ c \frac{\partial v}{\partial t} = 2k \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{2\alpha}{l} v + \beta I(r), & r = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \\ \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, & 0 \leq t \leq T; \\ v|_{t=0} = 0, & 0 \leq r \leq R. \end{cases} \quad (40)$$

Далее рассматриваются вопросы построения и исследования двух разностных схем для решения краевой задачи (40).

2.1 Построение и исследование простейшей явной схемы

Используем следующую равномерную сетку:

$$r_i = ih_r, \quad i = \overline{0, I}, \quad h_r = \frac{R}{I}; \quad t_k = kh_t, \quad k = \overline{0, K}, \quad h_t = \frac{T}{K},$$

где h_r – шаг разбиения по r , h_t – шаг разбиения по t .

Аппроксимируем на этой сетке частные производные, входящие в систему (40), следующими разностными отношениями:

$$\frac{\partial}{\partial t} v(r_i, t_k) \approx \frac{v_i^{k+1} - v_i^k}{h_t}, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K-1};$$

$$\frac{\partial}{\partial r} v(r_i, t_k) \approx \frac{v_{i+1}^k - v_{i-1}^k}{2h_r}, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r_i, t_k) \approx \frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{h_r^2}, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K}.$$

Заменим производные в системе (40) этими отношениями.

Начальное условие аппроксимируем его естественным сеточным аналогом $v_i^0 = 0, \quad i = \overline{0, I}$. Для аппроксимации граничного условия

$$f_h = \begin{pmatrix} f_h^1 \\ f_h^2 \\ f_h^3 \\ f_h^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta I(r_i) \\ \beta I(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определим вектор невязок

$$\delta f_h = \begin{pmatrix} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{L_h^1[v]_h - f_h^1\} \\ \{L_h^2[v]_h - f_h^2\} \\ \{L_h^3[v]_h - f_h^3\} \\ \{L_h^4[v]_h - f_h^4\} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где $[\cdot]$ – оператор дискретизации.

Теперь рассмотрим компоненты невязки $\delta f_h^s \Big|_{(r_i, t_k)} = \{L_h^s[v]_h - f_h^s\}_{(r_i, t_k)}$.

Зафиксируем конкретный узел сетки (r_i, t_k) . Разложим все функции, входящие в выражение для невязки, в ряд Тейлора в окрестности выделенного узла. Запишем следующие вспомогательные выражения:

$$\frac{v(r_i, t_{k+1}) - v(r_i, t_k)}{h_t} = \left(v'_t + \frac{h_t v''_{tt}}{2} + \frac{h_t^2 v'''_{ttt}}{6} + \frac{h_t^3 v^{(IV)}_{tttt}}{24} + O(h_t^4) \right) \Big|_{r=r_i, t=t_k}, \quad (43)$$

$$\frac{v(r_{i+1}, t_k) - v(r_i, t_k)}{h_r} = \left(v'_r + \frac{h_r v''_{rr}}{2} + \frac{h_r^2 v'''_{rrr}}{6} + \frac{h_r^3 v^{(IV)}_{rrrr}}{24} + O(h_r^4) \right) \Big|_{r=r_i, t=t_k}, \quad (44)$$

$$\frac{v(r_{i+1}, t_k) - 2v(r_i, t_k) + v(r_{i-1}, t_k))}{h_r^2} = \left(v''_{rr} + \frac{h_r^2 v^{(IV)}_{rrrr}}{12} + \frac{h_r^4 v^{(VI)}_{rrrrrr}}{360} + O(h_r^6) \right) \Big|_{r=r_i, t=t_k}, \quad (45)$$

$$\frac{v(r_{i+1}, t_k) - v(r_{i-1}, t_k)}{2h_r} = \left(v'_r + \frac{h_r^2 v'''_{rrr}}{6} + \frac{h_r^4 v^{(V)}_{rrrrr}}{120} + O(h_r^6) \right) \Big|_{r=r_i, t=t_k}, \quad (46)$$

Найдем порядки аппроксимации явной разностной схемы.

Для первой компоненты вектора невязок с учетом выражений (43) – (46)

будем иметь:

$$\begin{aligned}
\delta f_h^1 \Big|_{(r_i, t_k)} &= \left\{ L_h^1[\nu]_h - f_h^1 \right\}_{(r_i, t_k)} = c \frac{\nu(r_i, t_{k+1}) - \nu(r_i, t_k)}{h_t} - \frac{k}{r_i} \frac{\nu(r_{i+1}, t_k) - \nu(r_{i-1}, t_k)}{2h_r} - \\
&- k \frac{\nu(r_{i+1}, t_k) - 2\nu(r_i, t_k) + \nu(r_{i-1}, t_k)}{h_r^2} + \frac{2\alpha}{l} \nu(r_i, t_k) - \beta I(r_i) = \\
&= \left(c \left(\nu'_t + \frac{h_t \nu''_{tt}}{2} + O(h_t^2) \right) - \frac{k}{r_i} \left(\nu'_r + \frac{h_r^2 \nu'''_{rrr}}{6} + O(h_r^4) \right) - k \left(\nu''_{rr} + \frac{h_r^2 \nu^{(IV)}_{rrrr}}{12} + O(h_r^4) \right) \right) + \\
&+ \frac{2\alpha}{l} \nu - \left(c \nu'_t - \frac{k}{r_i} \nu'_r - k \nu''_{rr} + \frac{2\alpha}{l} \nu \right) \Big|_{r=r_i, t=t_k} = \frac{h_t c \nu''_{tt}}{2} + O(h_t^2) - \frac{h_r^2 k \nu'''_{rrr}}{6r_i} - \frac{h_r^2 k \nu^{(IV)}_{rrrr}}{12} + \\
&+ O(h_r^4) = O(h_t, h_r^2).
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующую компоненту вектора невязок:

$$\begin{aligned}
\delta f_h^2 \Big|_{(r_0, t_k)} &= \left\{ L_h^2[\nu]_h - f_h^2 \right\}_{(r_0, t_k)} = c \frac{\nu(r_0, t_{k+1}) - \nu(r_0, t_k)}{h_t} - 4k \frac{\nu(r_1, t_k) - \nu(r_0, t_k)}{h_r^2} + \\
&+ \frac{2\alpha}{l} \nu(r_0, t_k) - \beta I(r_0).
\end{aligned}$$

Так как функция $I(r)$ обладает круговой симметрией, то $\nu(r, t)$ также обладает круговой симметрией, а значит $\nu(r_1, t_k) = \nu(r_{-1}, t_k)$. Следовательно:

$$\begin{aligned}
\left\{ L_h^2[\nu]_h - f_h^2 \right\}_{(r_0, t_k)} &= c \frac{\nu(r_0, t_{k+1}) - \nu(r_0, t_k)}{h_t} - 2k \frac{\nu(r_1, t_k) - 2\nu(r_0, t_k) + \nu(r_{-1}, t_k)}{h_r^2} + \\
&+ \frac{2\alpha}{l} \nu(r_0, t_k) - \beta I(r_0) = \left(c \nu'_t + \frac{ch_t \nu''_{tt}}{2} + O(h_t^2) - 2k \left(\nu''_{rr} + \frac{h_r^2 \nu^{(IV)}_{rrrr}}{12} + O(h_r^4) \right) \right) + \\
&+ \frac{2\alpha}{l} \nu - \left(c \nu'_t - 2k \nu''_{rr} + \frac{2\alpha}{l} \nu \right) \Big|_{r=r_0, t=t_k} = O(h_t, h_r^2).
\end{aligned}$$

Теперь перейдем к третьей компоненте вектора невязок. По условию

$$\frac{\nu_{l+1}^k - \nu_{l-1}^k}{2h_r} = 0.$$

В этом случае получим следующее выражение для

рассматриваемой невязки:

$$\begin{aligned}
\delta f_h^3 \Big|_{(r_l, t_k)} &= c \frac{\nu(r_l, t_{k+1}) - \nu(r_l, t_k)}{h_t} - k \frac{\nu(r_{l+1}, t_k) - 2\nu(r_l, t_k) + \nu(r_{l-1}, t_k)}{h_r^2} + \\
&+ \frac{2\alpha}{l} \nu(r_l, t_k) - \beta I(r_l) = \left(c \nu'_t + \frac{ch_t \nu''_{tt}}{2} + O(h_t^2) - k \left(\nu''_{rr} + \frac{h_r^2 \nu^{(IV)}_{rrrr}}{12} + O(h_r^4) \right) \right) + \frac{2\alpha}{l} \nu -
\end{aligned}$$

$$-\left(cv'_t - kv''_{rr} + \frac{2\alpha}{l}v \right) \Big|_{(r_i, t_k)} = \left(\frac{h_t cv''_t}{2} + \frac{kh_r^2 v^{(IV)}}{12} + O(h_t^2) + O(h_r^4) \right) \Big|_{(r_i, t_k)} = O(h_t, h_r^2).$$

Для последней компоненты можем записать:

$$\delta f_h^4 \Big|_{(r_i, 0)} = \left\{ L_h^4[v]_h - f_h^4 \right\} \Big|_{(r_i, 0)} = v(r_i, 0) - 0 = 0.$$

В результате будем иметь

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \|L_h[v]_h - f_h\|_{F_h} = O(h_t, h_r^2). \quad (47)$$

Таким образом, разностная схема (41) аппроксимирует исходную задачу (40) со вторым порядком относительно h_r и первым порядком относительно h_t .

Проведем *исследование устойчивости явной разностной схемы*.

Разностная схема с разностным оператором L_h называется устойчивой, если $\exists h_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что для любых сеток $h < h_0$ и любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются следующие условия:

1. Решение $L_h v_h = f_h$ существует и единственно ;
2. Справедлива оценка: $\|v_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}$.

Далее будем доказывать устойчивость рассматриваемой разностной схемы (41) по определению. Для этого определим нормы в пространствах U_h и F_h следующим образом:

$$\|v_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=0, \overline{I} \\ k=1, \overline{K}}} |v_i^k|, \quad \|f_h\|_{F_h} = \max \left\{ \max_{\substack{i=0, \overline{I} \\ k=0, \overline{K}-1}} |\varphi_i^k|, \max_{i=0, \overline{I}} |\alpha_i| \right\}$$

Перепишем схему (41) в виде:

Воспользуемся в последнем неравенстве следующими очевидными оценками:

$$|\nu_i^k| \leq \max_{j=0, I} |\nu_j^k|, \quad |\varphi_i^k| \leq \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (54)$$

Тогда придем к неравенству

$$|\nu_i^{k+1}| \leq \max_{j=0, I} \{|\nu_j^k|\} + \frac{h_t}{c} \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (55)$$

Действуя аналогичным образом, из уравнений (50) и (51) получим неравенства

$$\begin{aligned} |\nu_0^{k+1}| &\leq |\nu_0^k| + \left(1 - 4\gamma - \frac{2\alpha h_t}{cl}\right) + 4\gamma |\nu_1^k| + \frac{h_t}{c} \|f_h\|_{F_h}; \\ |\nu_I^{k+1}| &\leq |\nu_I^k| + \left(1 - 2\gamma - \frac{2\alpha h_t}{cl}\right) + 2\gamma |\nu_{I-1}^k| + \frac{h_t}{c} \|f_h\|_{F_h}, \end{aligned}$$

которые после использования оценок (54) и упрощений примут вид:

$$\begin{aligned} |\nu_0^{k+1}| &\leq \max_{j=0, I} \{|\nu_j^k|\} + \frac{h_t}{c} \|f_h\|_{F_h}, \quad k = \overline{0, K-1}, \\ |\nu_I^{k+1}| &\leq \max_{j=0, I} \{|\nu_j^k|\} + \frac{h_t}{c} \|f_h\|_{F_h}, \quad k = \overline{0, K-1}. \end{aligned}$$

Объединяя последние неравенства с неравенством (55) и учитывая, что их правые части совпадают, придем к следующему результату:

$$\max_{i=0, I} |\nu_i^{k+1}| \leq \max_{j=0, I} |\nu_j^k| + \frac{h_t}{c} \|f_h\|_{F_h}.$$

Будем перебирать неравенства для каждого временного слоя $k = \overline{0, K-1}$.

Для $k = 0$ получим:

$$\max_{i=0, I} |\nu_i^1| \leq \max_{j=0, I} |\alpha_j| + \frac{h_t}{c} \|f_h\|_{F_h} \leq \|f_h\|_{F_h} + \frac{h_t}{c} \|f_h\|_{F_h}, \quad \text{или} \quad \max_{i=0, I} |\nu_i^1| \leq \left(1 + \frac{h_t}{c}\right) \|f_h\|_{F_h}.$$

$$\text{Для } k = 1: \quad \max_{i=0, I} |\nu_i^2| \leq \left(1 + \frac{2h_t}{c}\right) \|f_h\|_{F_h}.$$

Продолжая этот процесс, в конце концов придем к следующему неравенству:

$$\max_{\substack{i=0,1 \\ k=1,K}} |v_i^k| \leq \left(1 + \frac{Kh_t}{c}\right) \|f_h\|_{F_h}.$$

Итак, фактически доказано неравенство:

$$\|v_h\|_{U_h} \leq \left(1 + \frac{T}{c}\right) \|f_h\|_{F_h},$$

что позволяет заявить об устойчивости схемы (41) при соблюдении ограничения $1 - 4\gamma - \frac{2\alpha h_t}{cl} \geq 0$. Иначе говоря, эта схема условно устойчива.

Отметим, что условие (52) можно заменить следующим условием:

$$1 - 4\gamma \geq 0, \quad (56)$$

которое является менее требовательным к малости шага h_t . Доказательство последнего можно провести аналогично тому, как это делалось для явной схемы (13).

Поскольку схема (41) аппроксимирует исходную задачу с погрешностью $\|\delta f_h\|_{F_h} = O(h_t, h_r^2)$ и условно устойчива, следовательно, схема сходится к решению исходной задачи (40), если выполнено выше указанное условие (52) или условие (56). При этом погрешность решения разностной задачи характеризуется величиной $O(h_t, h_r^2)$.

Ниже приведены результаты *экспериментального исследования сходимости явной разностной схемы* (41), полученные для тестового примера, в котором функция интенсивности лазерного пучка $I(r)$ была задана следующим образом:

$$I(r) = \frac{P}{\pi a^2} \exp\left\{-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} \left[\frac{Bm}{cm^2}\right], \quad \text{где } a = \frac{R}{5}, \quad P = 100 [Bm].$$

Для этого тестового примера было получено аналитическое решение в виде быстро сходящегося ряда Фурье-Бесселя. Контроль погрешности усечения ряда осуществлялся с помощью оценки остатка ряда. При этом погрешность расчета аналитического решения не превосходила величины 10^{-6} .

Погрешность численного решения задачи (41) вычислялась путем сравнения с аналитическим решением.

При проведении расчетов использовались следующие значения параметров, соответствующие оптическому элементу, выполненному из материала NaCl:

$$k = 0.065[\text{Вт} / \text{см} \cdot \text{К}]; \quad c = 1,84[\text{Дж} / \text{см}^3 \cdot \text{К}]; \quad \alpha = 0,01[\text{Вт} / \text{см}^2 \cdot \text{К}]; \\ T = 100[\text{с}]; \quad l = 0,5[\text{см}]; \quad R = 5[\text{см}]; \quad \beta = 0,004[1 / \text{см}].$$

На рисунках 6 - 9 приведены результаты вычислительных экспериментов, показывающих сходимость сеточного решения к точному, вычисленному с помощью ряда Фурье-Бесселя. Расчеты проводились при соблюдении условия устойчивости (52) и соответствуют значениям $t = 10\text{с}$.

Из графиков, представленных на этих рисунках, видно, что с измельчением сетки решение, полученное с помощью явной схемы, приближается к аналитическому.

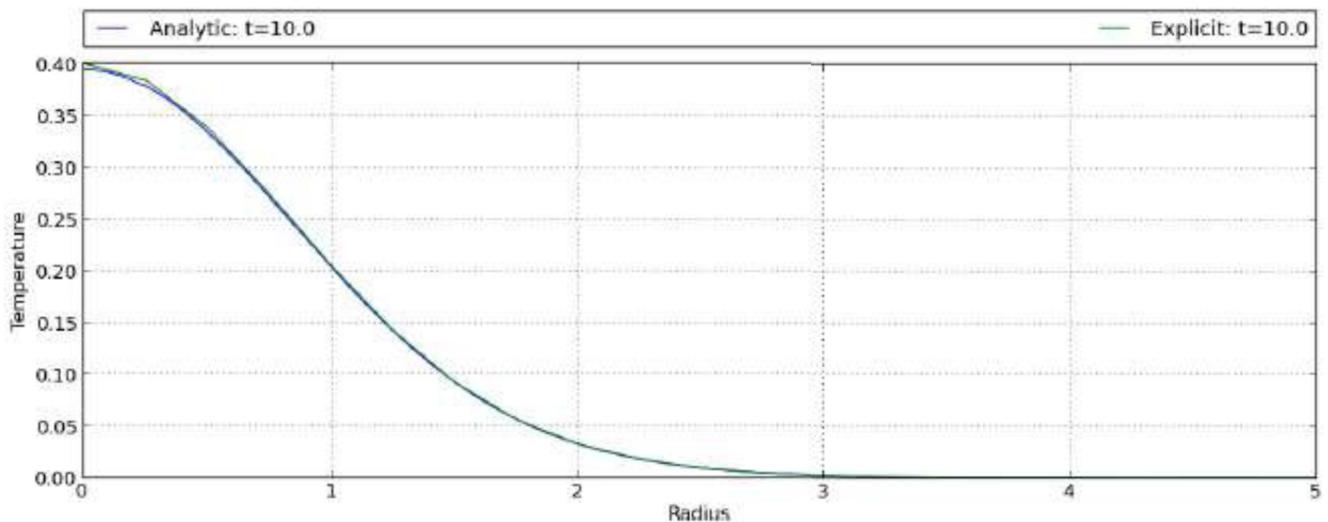


Рисунок 6 – Сравнение аналитического решения с сеточным, полученным с помощью явной схемы для $t = 10\text{с}$ (параметры сетки: $K = 400$ и $I = 20$)

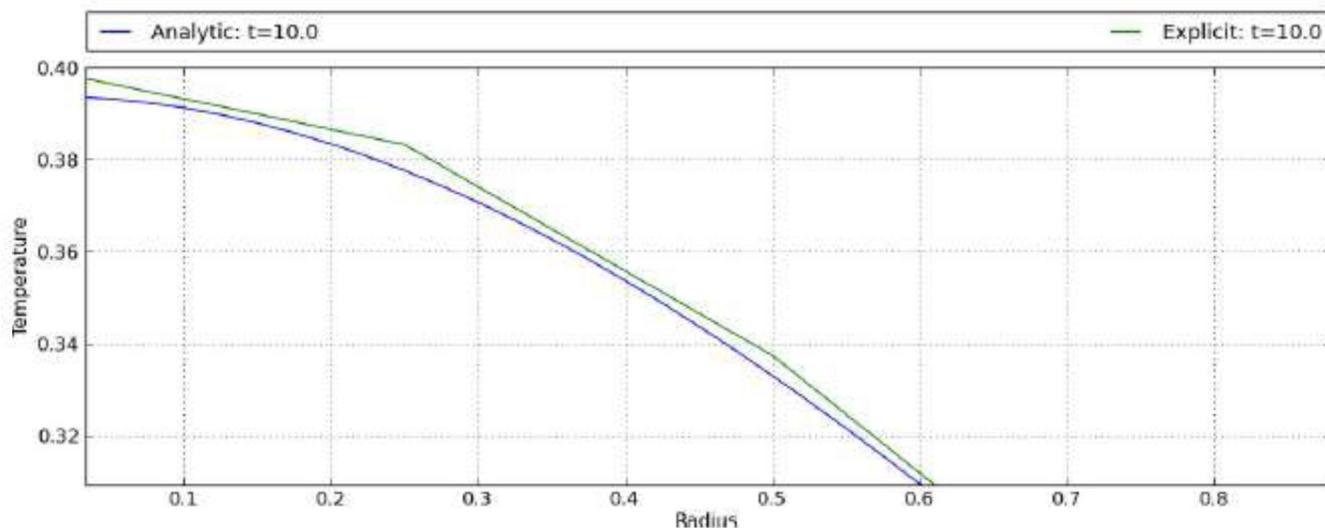


Рисунок 7 – Увеличенный фрагмент аналитического решения и сеточного, полученного с помощью явной схемы для $t = 10c$ (параметры сетки: $K = 400$ и $I = 20$)

Максимальная разница между численным и аналитическим решениями, представленными на рисунках 8 и 9, не превосходит величины 0,002 (это меньше 0,5% для центральной области круга). При дальнейшем измельчении сетки легко добиться еще более существенного уменьшения погрешности численного решения. В этом случае графики численного и аналитического решений становятся визуально неразличимыми.

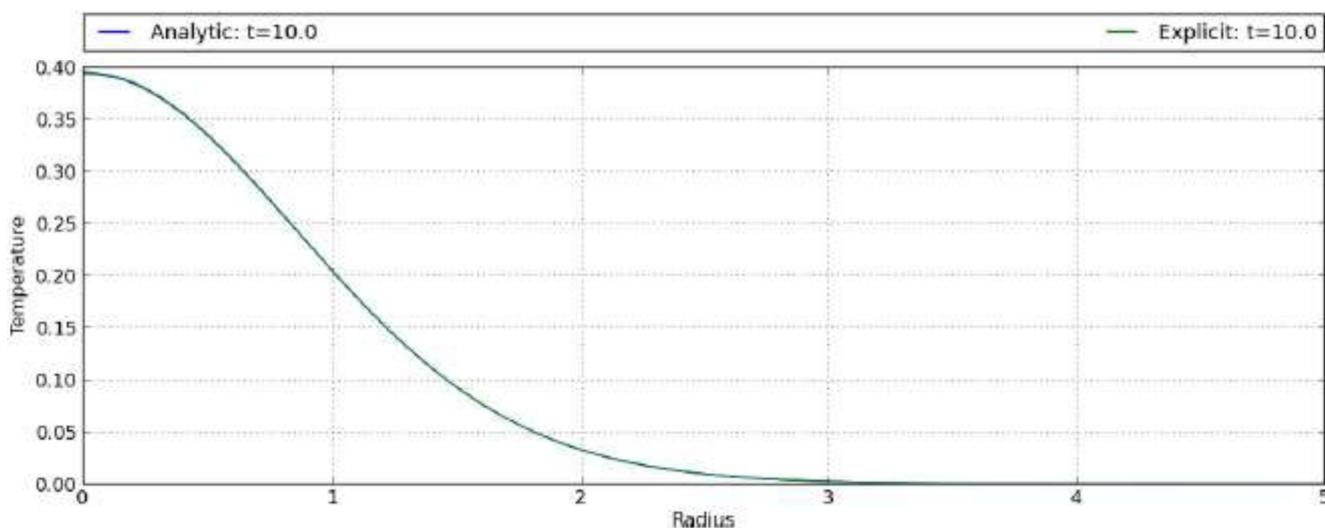


Рисунок 8 – Сравнение аналитического решения с сеточным, полученным с помощью явной схемы для $t = 10c$ (параметры сетки: $K = 1500$ и $I = 50$)

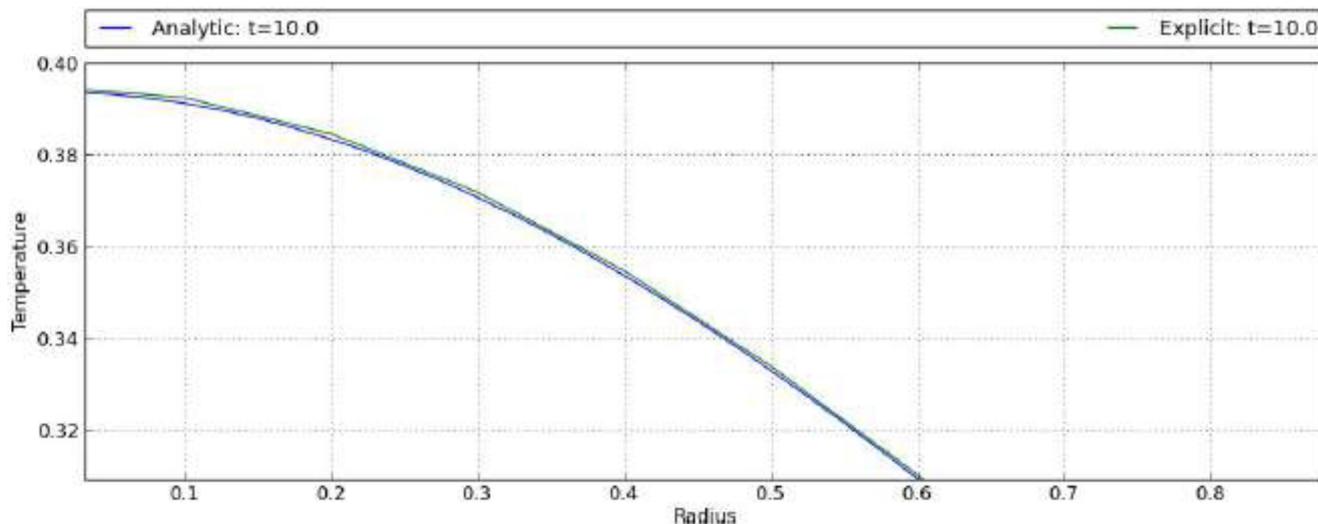


Рисунок 9 – Увеличенный фрагмент аналитического решения и сеточного, полученного с помощью явной схемы для $t = 10c$ (параметры сетки: $K = 1500$ и $I = 50$)

При нарушении условия устойчивости (56) обнаруживается стремительный рост погрешности решения, который и свидетельствует о неустойчивости вычислительного процесса. На рисунке 10 приведен один из примеров неустойчивой работы явной схемы. Расчет проведен для вышеуказанных значений физических параметров и соответствует моменту времени $t = 4.0 c$. При этом использовались значения параметров сетки $K = 6000$ $I = 140$, которые нарушают условие (56). Отметим, что быстро растущая погрешность возникает в центральной области круга и затем распространяется на остальную его часть.

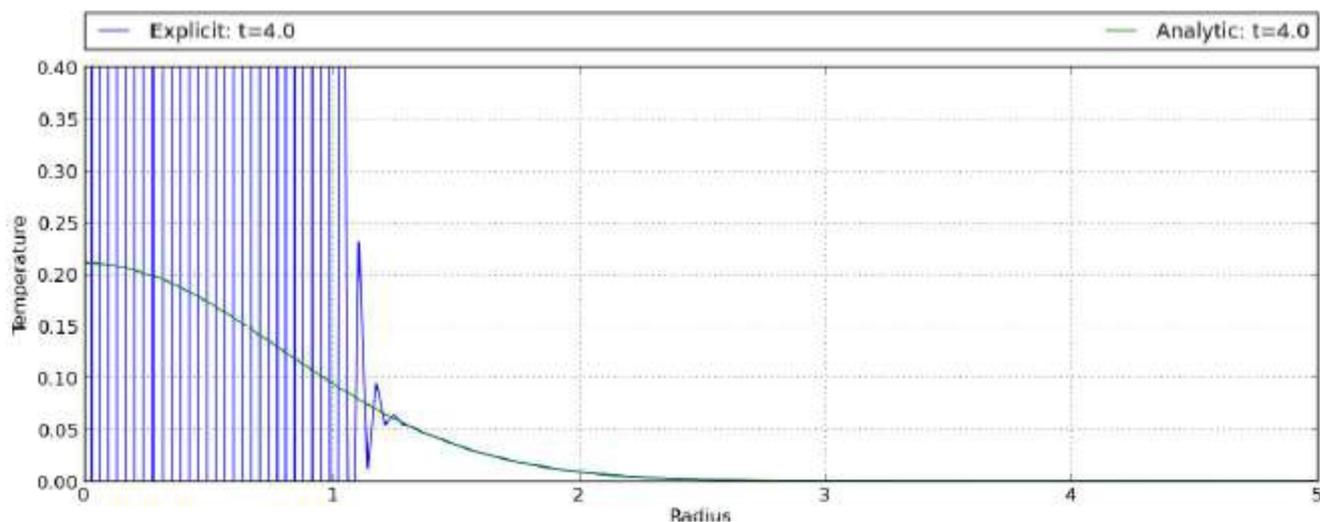


Рисунок 10 – Пример неустойчивой работы явной схемы

Теперь приведем результаты экспериментального исследования скорости сходимости явной схемы. При проведении расчетов использовался прежний тестовый пример.

На рисунке 11 приведен график экспериментальной зависимости погрешности сеточного решения от шага дискретизации h_t . В этом случае шаг по радиусу брался фиксированным и равным $h_r = 0,05$, что соответствует числу шагов по радиусу, равному $I = 100$. Значения шагов по времени h_t варьировались в пределах от 0.01 до 0.001. Погрешность решения $\varepsilon = \|\nu_h - [\nu]_h\|_{U_h}$ вычислялась с помощью равномерной нормы, использованной при исследовании устойчивости.

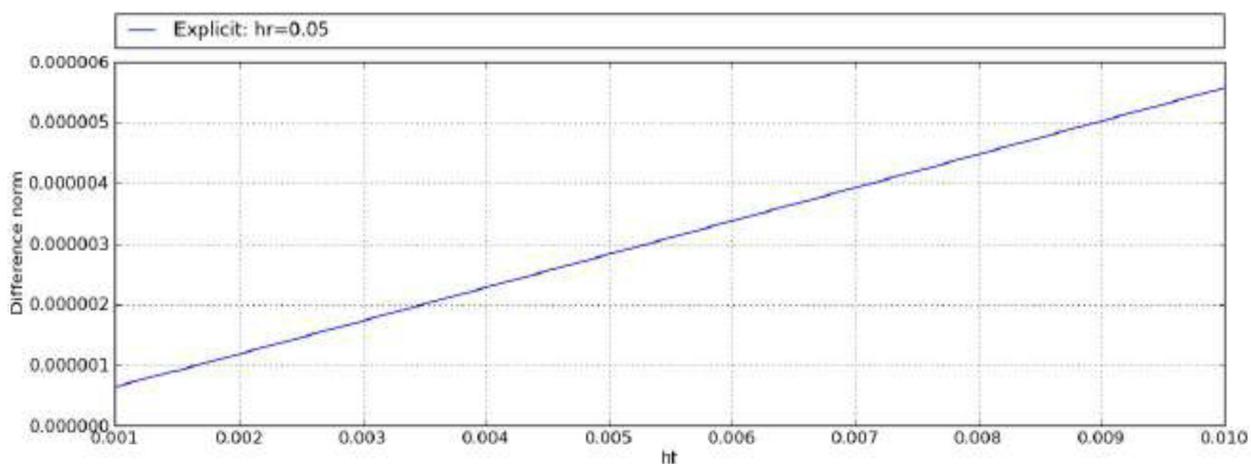


Рисунок 11 – График зависимости погрешности сеточного решения от шага h_t

Видно, что график представляет собой прямую линию. Это вполне согласуется с результатом теоретического исследования сходимости схемы, в соответствии с которым погрешность сеточного решения является линейной по шагу h_t .

Если зафиксировать шаг по времени $h_t = 0,001$ и менять шаг по радиусу h_r в пределах от 0.5 до 0.05, то получим график погрешности, приведенный на рисунке 12.

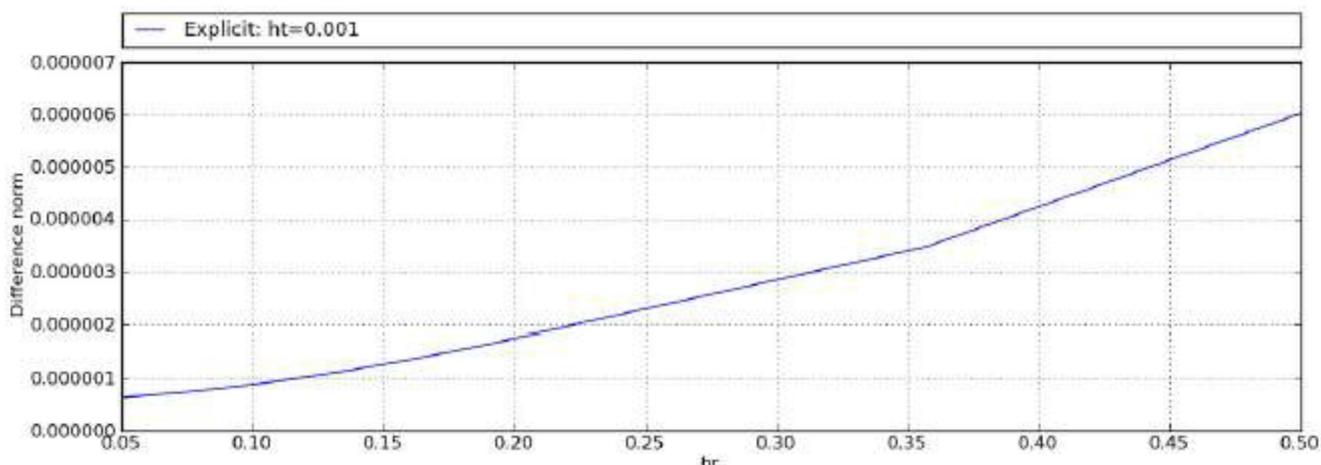


Рисунок 12 – График зависимости погрешности сеточного решения от шага h_r

В этом случае график погрешности является нелинейным. Однако сделать конкретный вывод о характере зависимости погрешности схемы от шага h_r , опираясь лишь на приведенную графическую информацию, проблематично. Для выявления характера этой зависимости проведем следующее исследование: будем получать значение погрешности, уменьшая одновременно оба шага, причем шаг h_t будем уменьшать в 4 раза, а шаг h_r в 2 раза. Полученные при этом результаты вычислительных экспериментов представлены в таблице 6. Проанализируем эти результаты на предмет их соответствия результатам теоретического исследования скорости сходимости явной схемы.

В соответствии с теоретическим исследованием погрешность сеточного решения можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{h_t, h_r} &= \alpha h_t + \beta h_r^2 + O(h_t^2, h_r^3), \\ \varepsilon_{4h_t, 2h_r} &= 4\alpha h_t + 4\beta h_r^2 + O(h_t^2, h_r^3).\end{aligned}$$

Но тогда следует ожидать, что при достаточно малых шагах сетки будет справедлив следующий результат:

$$\varepsilon_{4h_t, 2h_r} / \varepsilon_{h_t, h_r} \approx 4.$$

Таблица 6 – Зависимость погрешности явной разностной схемы от h_t и h_r

K	h_t	I	h_r	ε_{h_t, h_r}	$\varepsilon_{4h_t, 2h_r} / \varepsilon_{h_t, h_r}$
60	0.166667	10	0.5	0.014228	—
240	0.041667	20	0.25	0.003961	3.591983
960	0.010417	40	0.125	0.001029	3.849982
3840	0.002604	80	0.0625	0.000261	3.950765
15360	0.000651	160	0.03125	0.000065	3.983407
61440	0.000163	320	0.015625	0.000016	3.989427

Видим, что в рассмотренных довольно широких диапазонах изменения шагов h_t и h_r отношение погрешностей $\varepsilon_{4h_t, 2h_r} / \varepsilon_{h_t, h_r}$ оказалось весьма близким к прогнозируемому значению 4.

Итак, приведенные результаты вычислительных экспериментов довольно хорошо согласуются с результатами теоретических исследований, что дает основу для уверенности в правильной работе программной реализации алгоритма численного решения задачи (40) с помощью явной разностной схемы (41).

2.2 Построение и исследование разностной схемы Кранка-Николсона

Для построения схемы Кранка-Николсона заменим

область непрерывного изменения аргументов функции $v(r, t)$ равномерной сеткой:

$$r_i = ih_r, i = \overline{0, I}, \quad h_t = \frac{T}{K}, \quad h_r = \frac{R}{I}; \quad t_k = kh_t, \quad k = \overline{0, K}, \quad h_t = \frac{T}{K},$$

h_r – шаг разбиения по r ; h_t – шаг разбиения по t .

Взяв шеститочечный шаблон, представленный на рисунке 2.3, рассмотрим наряду с основными узлами вспомогательный узел $(r_i, t_k + \frac{h_t}{2})$. Используя этот узел, построим простейшую явную и неявную схемы. Далее, действуя аналогично тому, как в параграфе 2.1 строилась схема Кранка-Николсона для краевой задачи в декартовой системе координат, придем к следующей схеме Кранка-Николсона для краевой задачи (40):

$$\left\{ \begin{array}{l}
c \frac{v_i^{k+1} - v_i^k}{h_t} = \frac{k}{2} \frac{v_{i+1}^{k+1} - 2v_i^{k+1} + v_{i-1}^{k+1} + v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{h_r^2} + \\
+ \frac{k}{2r_i} \frac{v_{i+1}^{k+1} - v_{i-1}^{k+1} + v_{i+1}^k - v_{i-1}^k}{2h_r} - \frac{\alpha}{l} (v_i^{k+1} + v_i^k) + \beta I(r_i), \\
\qquad\qquad\qquad i = \overline{1, I} \quad k = \overline{0, K-1}; \\
c \frac{v_0^{k+1} - v_0^k}{h_t} = 2k \frac{v_1^{k+1} - v_0^{k+1} + v_1^k - v_0^k}{h_r^2} - \frac{\alpha}{l} (v_0^{k+1} - v_0^k) + \beta I(0), \\
\qquad\qquad\qquad k = \overline{0, K-1}; \\
\frac{v_{I+1}^k - v_{I-1}^k}{2h_r} = 0, \quad k = \overline{0, K}; \\
v_i^0 = 0, \quad i = \overline{0, I}.
\end{array} \right. \quad (57)$$

Отметим, что значение v_{I+1}^k в фиктивном (дополнительном) узле (r_{I+1}, t_k) не имеет физического смысла. Для его исключения из числа искомых величин, следует использовать граничное условие и первое уравнение системы (57), записанное при $i = I$.

Проведем *исследование аппроксимации разностной схемы Кранка-Николсона (57)*.

В данном случае форма вектора невязок δf_h будет совпадать с формой (42) для простейшей явной схемы (41).

Проведем исследование первой компоненты вектора невязок:

$$\begin{aligned}
\delta f_h^1 \Big|_{(r_i, t_k)} &= \left\{ L_h^1[v]_h - f_h^1 \right\}_{(r_i, t_k)} = c \left(v'_t + \frac{h_t v''_{tt}}{2} + \frac{h_t^2 v'''_{ttt}}{6} + O(h_t^3) \right)_{(r_i, t_k)} - \\
&- \frac{k}{2r_i} \left(\left(v'_r + \frac{h_r^2 v'''_{rrr}}{6} + O(h_r^4) \right)_{(r_i, t_{k+1})} + \left(v'_r + \frac{h_r^2 v'''_{rrr}}{6} + O(h_r^4) \right)_{(r_i, t_k)} \right) - \\
&- \frac{k}{2} \left(\left(v''_{rr} + \frac{h_r^2 v^{IV}_{rrrr}}{12} + O(h_r^4) \right)_{(r_i, t_{k+1})} + \left(v''_{rr} + \frac{h_r^2 v^{IV}_{rrrr}}{12} + O(h_r^4) \right)_{(r_i, t_k)} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha}{l} \left(2v + h_t v'_t + \frac{h_t^2 v''_{tt}}{2} + O(h_t^3) \right)_{(r_i, t_k)} - \beta I(r_i) = \left\{ c v'_t + c \frac{h_t^2 v''_{tt}}{2} + c \frac{h_t^2 v'''_{ttt}}{6} + \right. \\
& + O(h_t^3) - \frac{k}{2r_i} \left(2v'_r + \frac{2h_r^2 v'''_{rrr}}{6} + O(h_r^4) + h_t v''_{rt} + \frac{h_t^2 v'''_{rtt}}{2} + O(h_t^3) + O(h_r^2 h_t) \right) - \\
& - \frac{k}{2} \left(2v''_{rr} + \frac{2h_r^2 v^{IV}_{rrrr}}{12} + O(h_r^4) + h_t v'''_{rrt} + \frac{h_t^2 v^{IV}_{rrtt}}{2} + O(h_t^3) + O(h_r^2 h_t) \right) + \frac{2\alpha v}{l} + \\
& \left. + \frac{\alpha h_t v'_t}{l} + \frac{\alpha h_t^2 v''_{tt}}{2l} + O(h_t^3) \right\}_{(r_i, t_k)} - \beta I(r_i).
\end{aligned}$$

Учтем, что для точного решения $v(r, t)$ задачи (40) справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned}
c v'_t - \frac{k}{r_i} v'_r - k v''_{rr} + \frac{2\alpha v}{l} - \beta I(r) &\equiv 0; \\
c v''_{tt} - \frac{k}{r_i} v''_{rt} - k v'''_{rrt} + \frac{2\alpha v'_t}{l} &\equiv 0
\end{aligned}$$

при $0 < r \leq R$, $0 \leq t \leq T$.

С учетом последних тождеств будем иметь:

$$\begin{aligned}
\delta f_h^1 \Big|_{(r_i, t_k)} = \left\{ L_h^1[v]_h - f_h^1 \right\}_{(r_i, t_k)} &= \left\{ \frac{c v'''_{ttt}}{6} h_t^2 - \frac{k v'''_{rrr}}{6 r_i} h_r^2 - \frac{k v'''_{rtt}}{4 r_i} h_t^2 - \frac{k v^{IV}_{rrrr}}{12} h_r^2 \right. \\
&\left. - \frac{k v^{IV}_{rrtt}}{4} h_t^2 + \frac{\alpha v''_{tt}}{2l} h_t^2 + O(h_r^2 h_t) + O(h_t^3) + O(h_r^4) \right\}_{(r_i, t_k)} = O(h_t^2, h_r^2).
\end{aligned}$$

Исследование второй компоненты вектора невязок проводится совершенно аналогично. В результате исследования получим

$$\delta f_h^2 \Big|_{(r_0, t_k)} = \left\{ L_h^2[v]_h - f_h^2 \right\}_{(r_0, t_k)} = O(h_t^2, h_r^2).$$

Исследование третьей и четвертой компонент невязки полностью повторяет исследование аппроксимации граничного и начального условий для явной схемы (41). Поэтому можем записать

$$\begin{aligned}
\delta f_h^3 \Big|_{(r_i, t_k)} &= \left\{ L_h^3[v]_h - f_h^3 \right\}_{(r_i, t_k)} = O(h_r^2); \\
\delta f_h^4 \Big|_{(r_i, 0)} &= \left\{ L_h^4[v]_h - f_h^4 \right\}_{(r_i, 0)} = 0.
\end{aligned}$$

заклучению об устойчивости записанной выше схемы Кранка-Николсона при соблюдении следующего условия:

$$1 - \frac{2kh_t}{ch_r^2} \geq 0. \quad (58)$$

Поскольку разностная схема Кранка-Николсона аппроксимирует исходную задачу (40) с погрешностью $\|\delta f_h\| = O(h_t^2, h_r^2)$ и условно устойчива, следовательно, схема сходится к решению этой задачи при выполнении условия (58), причем скорость сходимости является квадратичной по обоим шагам сетки, т.е.

$$\|v_h - [v]_h\|_{U_h} = O(h_t^2, h_r^2).$$

Ниже приведены результаты экспериментального исследования сходимости разностной схемы Кранка-Николсона (57). Исследования проводились на тестовом примере, описанном в подразделе 2.1. Погрешность расчета аналитического решения не превосходила величины 10^{-6} .

Сравнивая графики численного и аналитического решений, представленных на рисунках (13) – (16), видим, что с измельчением сетки решение, полученное с помощью схемы Кранка-Николсона, приближается к аналитическому. Максимальная разница между численным и аналитическим решениями, представленными на рисунках 13 и 14, не превосходит величины 0,0037 (это меньше 1% для центральной области круга). При дальнейшем измельчении сетки легко добиться еще более существенного уменьшения погрешности численного решения. Например, для решений, представленных на рисунках 15 и 16 погрешность численного метода почти на порядок меньше, чем для решений, изображенных на двух предыдущих рисунках.

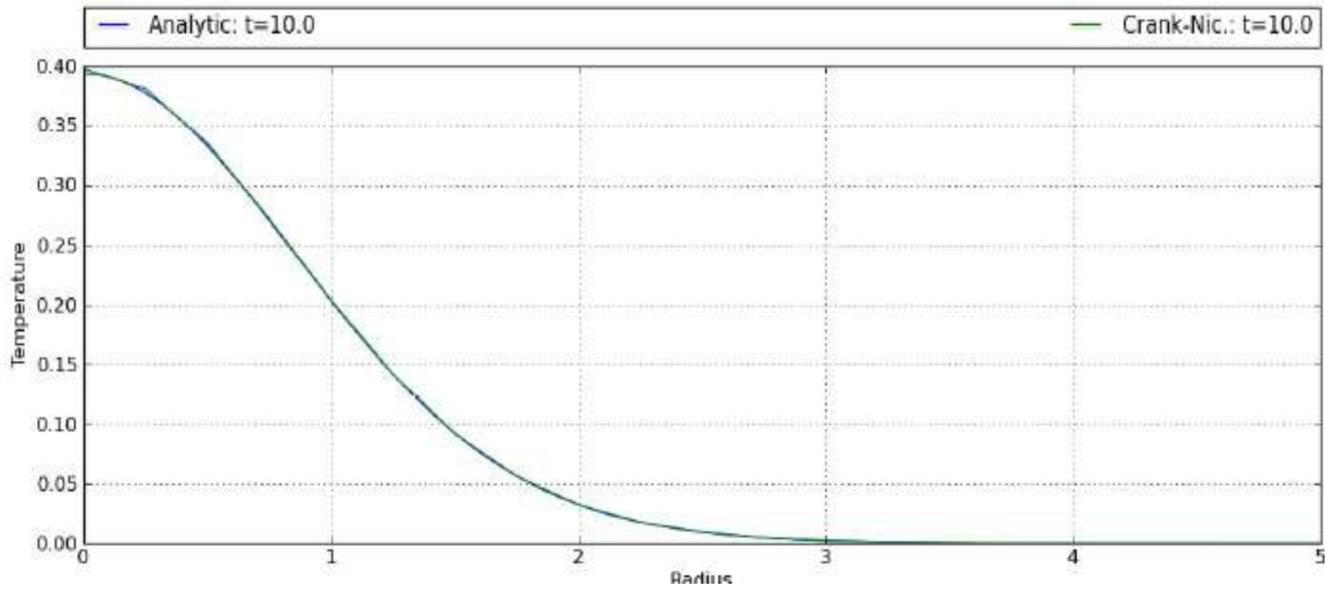


Рисунок 13 – Сравнение аналитического решения с сеточным, полученным с помощью схемы Кранка-Николсона для $t = 10c$ (параметры сетки: $K = 150$ и $I = 20$)

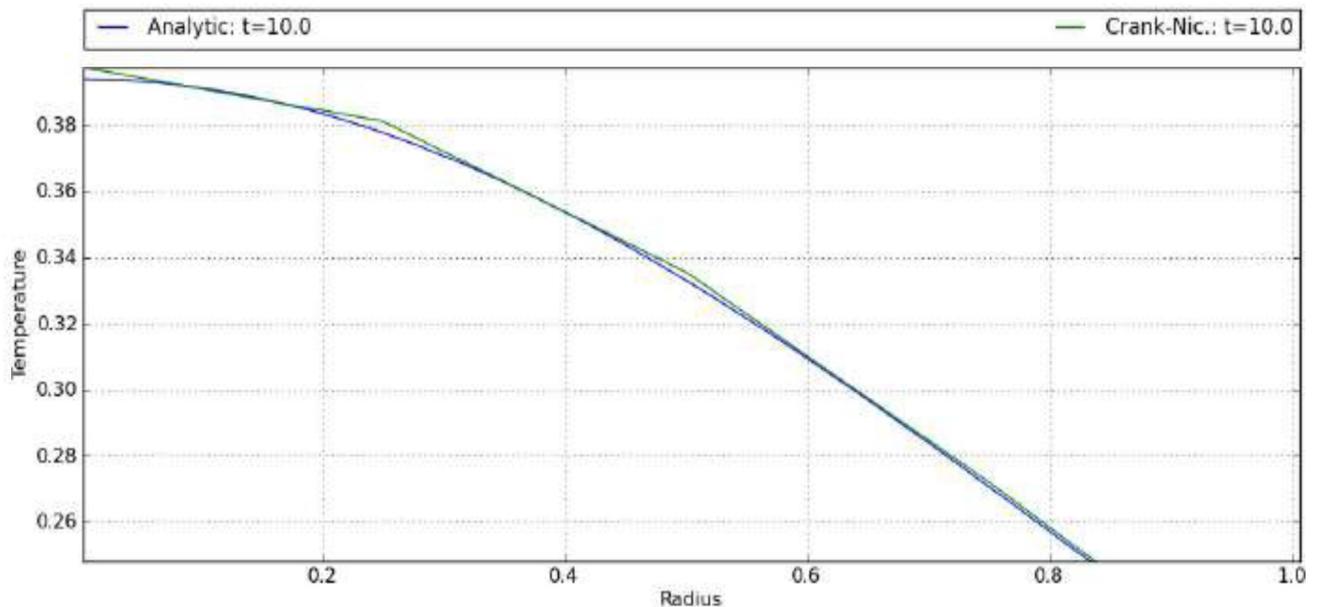


Рисунок 14 – Увеличенный фрагмент аналитического решения и сеточного, полученного с помощью схемы Кранка-Николсона для $t = 10c$ (параметры сетки: $K = 150$ и $I = 20$)

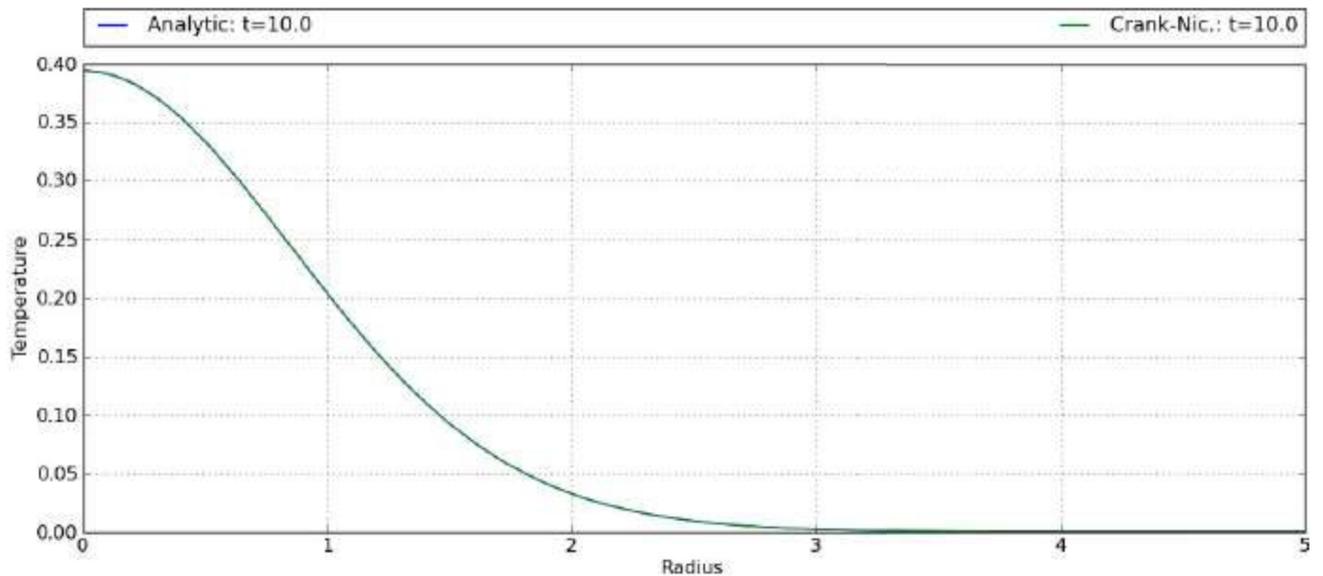


Рисунок 15 – Сравнение аналитического решения с сеточным, полученным с помощью схемы Кранка-Николсона для $t = 10c$ (параметры сетки: $K = 750$ и $I = 50$)

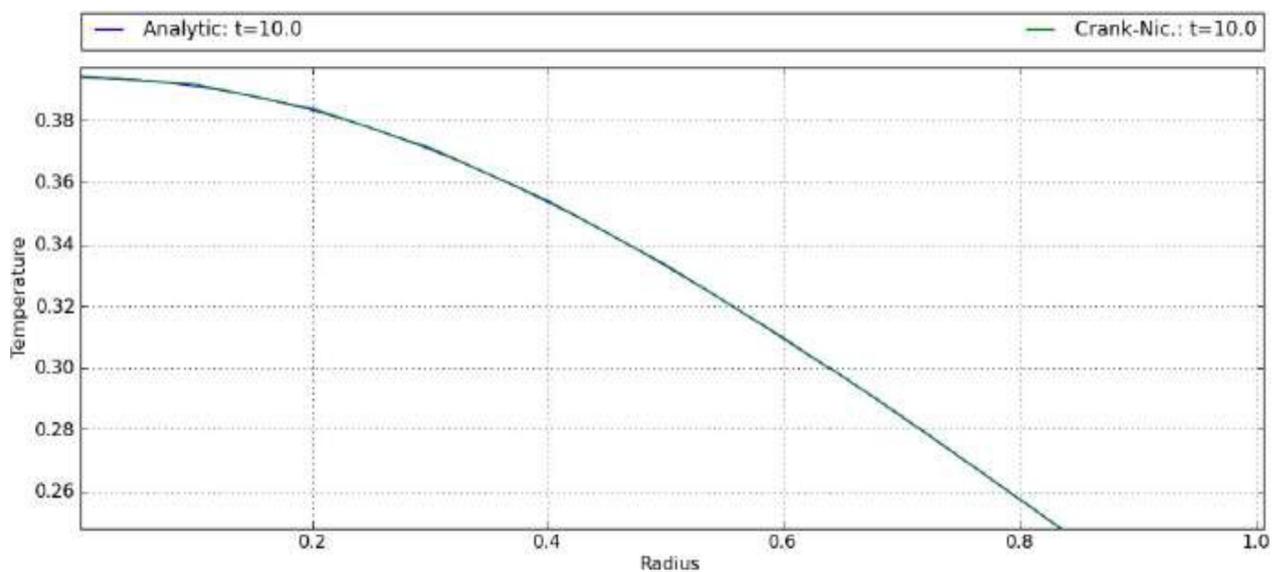


Рисунок 16 – Увеличенный фрагмент аналитического решения и сеточного, полученного с помощью схемы Кранка-Николсона для $t = 10c$ (параметры сетки: $K = 750$ и $I = 50$)

Выше отмечалась возможность относительно простого доказательства

устойчивости схемы Кранка-Николсона при соблюдении условия $\frac{c}{h_t} - \frac{2k}{h_r^2} \geq 0$.

Однако, проведя экспериментальную проверку, легко убедиться в том, что для выбранного тестового примера эта схема сходится и при нарушении указанного

условия устойчивости. На рисунках 17 и 18 приведены графики сечений сеточного решения, соответствующих моменту времени $t = 100c$ и значению радиальной координаты $r = 2\text{ см}$. Расчеты выполнены для сетки с параметрами $K = 1000$ и $I = 1000$. Выбор таких параметров приводит к существенному нарушению условия устойчивости, однако разница между сеточным и аналитическим решениями оказывается весьма незначительной и характеризуется величиной $4 \cdot 10^{-5}$.

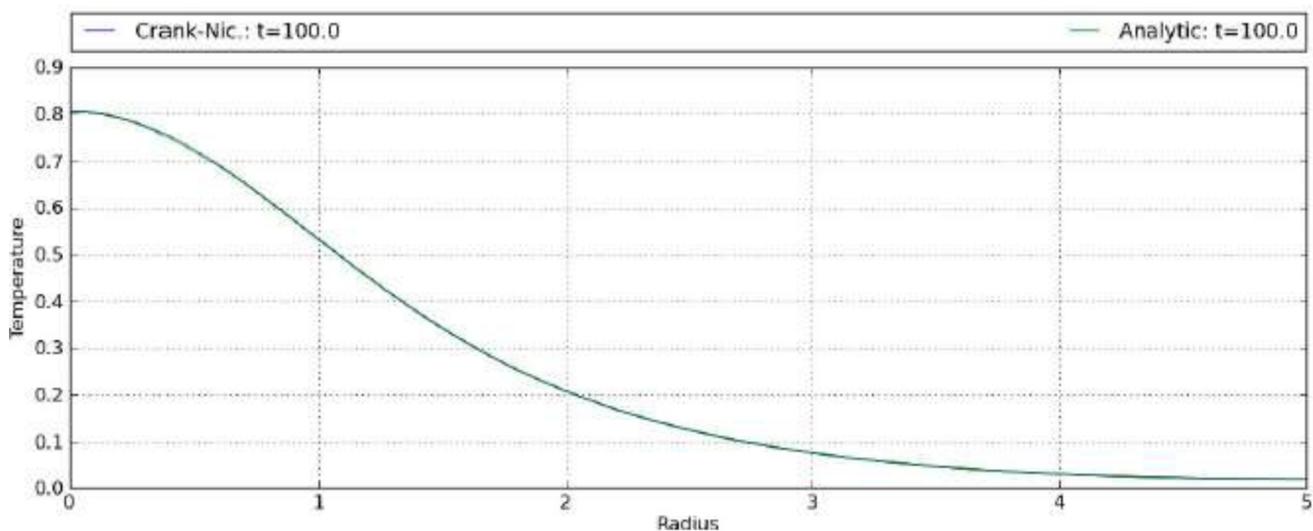


Рисунок 17 – График сеточного решения, полученного по схеме Кранка-Николсона при нарушении условия устойчивости (сечение по времени)

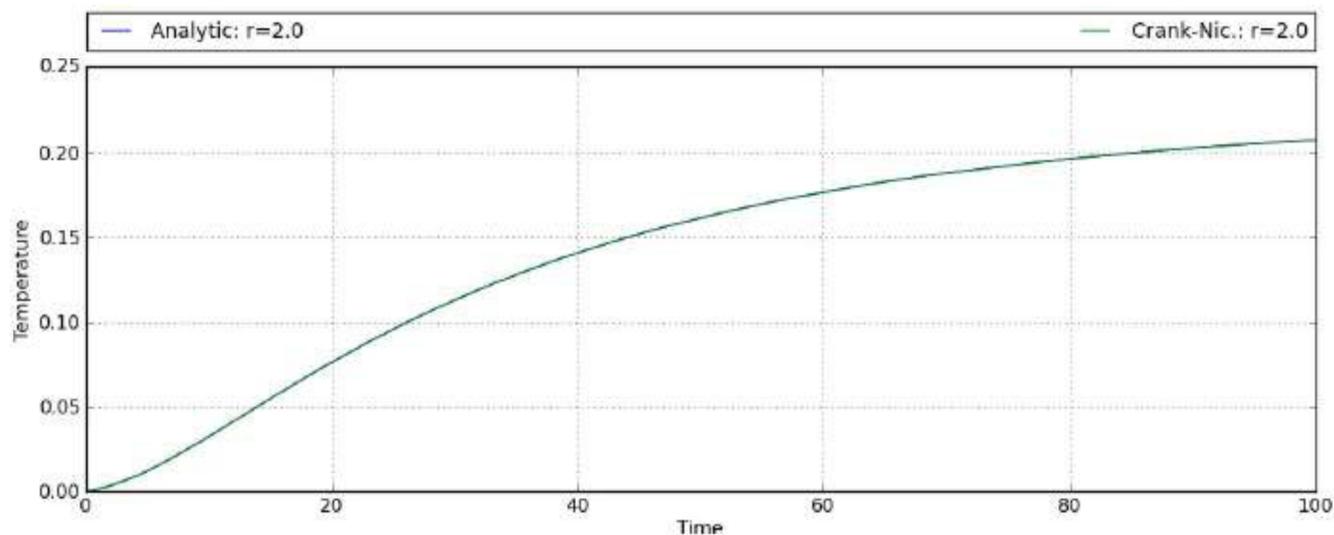


Рисунок 18 – График сеточного решения, полученного по схеме Кранка-Николсона при нарушении условия устойчивости (сечение по радиусу)

Теперь проведем исследование скорости сходимости схемы Кранка-Николсона. В результате теоретического исследования было установлено, что методическая погрешность сеточного решения характеризуется величиной $\varepsilon_{h_t, h_r} = \|u_h - [v]_h\|_{U_h} = O(h_t^2, h_r^2)$. Более подробная зависимость погрешности от шагов сетки имеет вид

$$\varepsilon_{h_t, h_r} = \alpha h_t^2 + \beta h_r^2 + O(h_t h_r^2, h_t^3, h_r^4).$$

Если взять сетку с удвоенными шагами, то зависимость погрешности от шагов сетки будет иметь вид

$$\varepsilon_{2h_t, 2h_r} = 4\alpha h_t^2 + 4\beta h_r^2 + O_1(h_t h_r^2, h_t^3, h_r^4)$$

Но тогда следует ожидать, что при достаточно малых шагах сетки будет справедливо следующее приближенное равенство:

$$\varepsilon_{2h_t, 2h_r} / \varepsilon_{h_t, h_r} \approx 4.$$

Для экспериментальной проверки последнего вывода проведем расчет сеточного решения на сгущающихся сетках, причем в процессе измельчения сетки будем уменьшать шаги h_t и h_r вдвое. Проверку проведем на прежнем тестовом примере. Для нахождения погрешности численного метода будем использовать аналитическое решение. Будем обеспечивать точность расчета аналитического решения порядка 10^{-6} .

Результаты вычислительных экспериментов представлены в таблице 7.

Видим, что в рассмотренных диапазонах изменения шагов h_t и h_r отношение погрешностей $\varepsilon_{4h_t, 2h_r} / \varepsilon_{h_t, h_r}$ оказалось очень близким к прогнозируемому значению 4.

Следовательно, приведенные результаты вычислительных экспериментов подтверждают теоретический вывод о квадратичном характере сходимости схемы Кранка-Николсона относительно шагов сетки.

Таблица 7 – Зависимость погрешности схемы Кранка-Николсона от h_t и h_r

K	h_t	I	h_r	ε_{h_t, h_r}	$\varepsilon_{4h_t, 2h_r} / \varepsilon_{h_t, h_r}$
10	1.0	10	0.5	0.0127993	–
20	0.5	20	0.25	0.0036173	3.538350
40	0.25	40	0.125	0.0009439	3.832442
80	0.125	80	0.0625	0.0002392	3.945383
160	0.0625	160	0.03125	0.0000601	3.981689
320	0.03125	320	0.015625	0.0000151	3.988434
640	0.015625	640	0.0078125	0.0000038	3.972241

Полученные результаты экспериментального исследования сходимости можно рассматривать как результаты тестирования алгоритма и программы численного решения задачи теплопроводности (40) с помощью схемы Кранка-Николсона (57). Эти результаты представляют собой хорошую гарантию правильной работы созданной прикладной компьютерной программы.

Сравнивая простейшую явную схему со схемой Кранка-Николсона, следует отметить, что для достижения некоторой фиксированной точности решения исходной задачи применение схемы Кранка-Николсона требует значительно меньшего объема вычислений, поскольку, во-первых, она обладает более высоким порядком точности по шагу h_t , а во-вторых, позволяет вести расчет с гораздо более крупным шагом по времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие для университетов. - М.: Наука, 1972. – 736 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. 2-е изд. - М.: Научный мир, 2003.-316с.
3. Самарский А.А. Введение в численные методы: Учебное пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1987.-288 с.
4. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы: введение в теорию: Учебное пособие. - М.: Наука, 1977. – 440 с.