

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

РАСЧЁТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ И КУРСОВЫЕ РАБОТЫ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по специальности 24.05.07 Самолето- и вертолестроение и направлениям подготовки: 24.03.04, 24.04.04 Авиастроение, 24.04.05 Двигатели летательных аппаратов, 25.03.01 Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей, 27.03.02 Управление качеством; по специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов и направлениям подготовки: 15.03.01 Машиностроение, 15.03.03 Прикладная механика, 24.03.01 Технология транспортных процессов; по специальности 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей и направлению подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств; изучающих дисциплину «Механика материалов и конструкций» по направлению подготовки 13.03.03 Энергетическое машиностроение

САМАРА
Издательство Самарского университета
2017

УДК 539.3/6(075)

ББК 30.121я7

Р 24

**Авторы: В.К. Шадрин, В.С. Вакулук, О.В. Каранаева,
В.А. Кирпичёв, В.Ф. Павлов, В.П. Сазанов, А.С. Букатый**

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. СГТУ В.П. Радченко,
канд. техн. наук, доц. В.А. Мехеда

Р24 Расчётно-проектировочные и курсовые работы по сопротивлению материалов: учеб. пособие / В.К. Шадрин, В.С. Вакулук, О.В. Каранаева [и др.]. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 136 с.

ISBN 978-5-7883-1139-5

Рассмотрены расчётно-проектировочные и курсовые работы по сопротивлению материалов, охватывающие основные темы изучаемого курса. Изложены методика и порядок выполнения работ, даны примеры выполнения работ, контрольные вопросы.

Пособие предназначено для студентов очной, очно-заочной и заочной форм обучения, изучающих дисциплину «Сопротивление материалов».

Институт авиационной техники:

- по специальности 24.05.07 Самолето- и вертолетостроение;
- направлениям подготовки: 24.03.04; 24.04.04 Авиационное; 24.04.05 Двигатели летательных аппаратов; 25.03.01 Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей; 27.03.02 Управление качеством.

Институт ракетно-космической техники:

- по специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов;
- направлениям подготовки: 15.03.01 Машиностроение; 15.03.03 Прикладная механика, 24.03.01 Технология транспортных процессов.

Институт двигателей и энергетических установок:

- по специальности 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей;
- направлению подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств.

Дисциплину «Механика материалов и конструкций» по направлению подготовки 13.03.03 Энергетическое машиностроение.

Подготовлено на кафедре сопротивления материалов Самарского университета.

УДК 539.3/6(075)

ББК 30.121я7

ISBN 978-5-7883-1139-5

© Самарский университет, 2017

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТ

В задании каждой работы имеется таблица параметров расчётной схемы проектируемой системы.

Студенту выдаётся код задания в виде трёхзначного числа, например, 376. Первая цифра номера 3 означает строку в столбцах **a**, вторая цифра 7 означает строку в столбцах **b** и третья цифра 6 означает строку в столбцах **в** таблиц.

Все расчёты, рисунки и чертежи нужно делать тщательно и аккуратно, даже на черновике. Досадные арифметические ошибки, приводящие к большой потере времени, возникают, главным образом, из-за небрежных записей и рисунков при выполнении расчётов.

Необходимо обращать постоянное внимание на размерность получаемых результатов и встречающихся величин. Полученные результаты следует всесторонне обдумать и убедиться в их логичности.

Процесс численного и буквенного решения должен сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращения слов, пояснениями, аккуратными схемами и рисунками, выполненными в масштабе, с указанием размеров и других величин, нужных для расчёта. Следует избегать многословия и повторения теоретических выкладок.

При расчётах необходимо приводить расчётные формулы, затем подставлять соответствующие числовые значения, результат записывать с обязательным обозначением его размерности. Например:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,1 \text{ мм},$$

где $N = 50 \text{ кН}$, $l = 2 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $A = 50 \text{ см}^2$.

Для самопроверки после выполнения работы следует ответить на контрольные вопросы.

Расчётно-проектировочная работа оформляется по стандарту СТО СГАУ 0208410-004-2007. Он предусматривает следующие обязательные структурные элементы:

- 1) титульный лист;
- 2) задание;
- 3) реферат;
- 4) содержание;
- 5) введение;
- 6) основная часть (собственно работа);
- 7) заключение;
- 8) список использованных источников.

Пояснительная записка выполняется машинописным способом (на компьютере) на листах белой писчей бумаги формата А4 без рамки, на одной стороне листа, с полями: левое – не менее 30 мм, правое – не менее 10 мм, верхнее и нижнее – не менее 20 мм.

С разрешения преподавателя допускается выполнение эюр на рисунках, карандашом.

2. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО СТУПЕНЧАТОГО БРУСА

2.1. Задание

Стальной ступенчатый брус (рис. 2.1) помещён между двумя абсолютно жесткими опорными поверхностями. Один конец его жестко закреплён в верхней опоре, другой находится на расстоянии δ от нижней опорной поверхности. К брусу приложены силы, действующие вдоль оси, и, кроме того, после нагружения изменяется его температура. Заданы размеры бруса, величины сил, зазор и изменение температуры.

Требуется определить нормальные силы N , нормальные напряжения σ и продольные перемещения u на всех участках бруса, построить соответствующие эпюры и подобрать марку стали бруса. Задача решается для двух случаев: без нижней опорной поверхности и при наличии её.

В пояснительной записке следует представить: задание, реферат, содержание, схему бруса, расчёты определяемых величин с необходимыми пояснениями, а также эпюры N , σ , u .

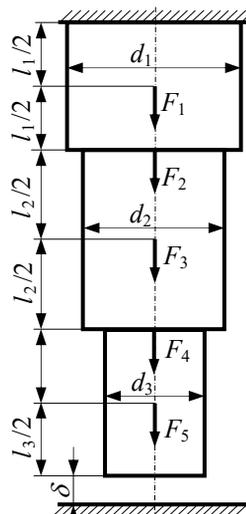


Рис. 2.1. Схема бруса

2.2 Выбор задания

Студент, пользуясь трехзначным номером, например 376, выписывает данные к работе из табл. 1.

Первая цифра номера 3 означает строчку в столбцах **a** табл. 2.1: $d_1 = 6$ см, $d_2 = 8$ см, $d_3 = 4$ см.

Вторая цифра 7 означает строчку в столбцах **b** табл. 2.1: $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, $l_3 = 1$ м, $\delta = 0,1$ мм, $\Delta T = 10$ К.

Третья цифра 6 означает строчку в столбцах **в** табл. 2.1: $F_1 = 300$ кН, $F_3 = -200$ кН, $F_5 = 500$ кН.

Расчётная схема бруса (см. рис. 2.1) изображается согласно исходным данным.

Знак «минус», относящийся к одной из сил, означает, что она направлена в противоположную сторону по отношению к направлению, указанному на схеме бруса (см. рис. 2.1).

Таблица 2.1 – Параметры ступенчатого бруса

№ строки	Диаметр, мм			Длина, м			δ , мм	ΔT , К	Нагрузка, кН				
	d_1	d_2	d_3	l_1	l_2	l_3			F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	8	6	4	1	1	0,5	0,2	+10	200	0	-300	0	500
2	4	6	8	1	1	1	0,15	+15	0	400	-200	0	600
3	6	8	4	1,5	1	0,5	0,2	+10	300	0	0	-100	700
4	10	6	4	1	0,5	1,5	0,1	+20	400	-400	0	0	700
5	10	8	6	2	1	0,5	0,15	+10	200	0	-300	600	0
6	6	8	10	2	1	1	0,2	+15	0	300	-200	0	500
7	8	4	6	1	2	1	0,1	+10	400	0	0	-300	500
8	10	8	4	1	1	2	0,2	+20	200	0	-100	600	0
9	8	10	4	2	2	1	0,2	+15	0	300	-400	0	700
0	4	10	6	2	1	2	0,15	+20	400	0	-200	0	500
	<i>a</i>			<i>b</i>				<i>в</i>					

2.3. Порядок выполнения работы

Работа состоит из двух частей: статически определимой и статически неопределимой задачи.

Решение проводится в следующем порядке:

1. В статически определимой задаче определяются нормальные силы N_i , напряжения σ_i , абсолютные деформации (удлинения) Δl_i и перемещения u на границах участков бруса:

$$u_i = u_{i-1} + \Delta l_i.$$

2. Строятся эпюры N , σ , u .

3. Подбирается марка стали бруса, исходя из условия прочности.

4. Для решения статически неопределимой задачи составляются уравнения равновесия и уравнение совместности деформаций, из решения полученной системы уравнений находятся реакции опор.

5. На каждом участке бруса определяются N_i , σ_i и Δl_i .
6. Проверяется правильность вычисления реакций путём оценки перемещения нижнего конца бруса.
7. Строятся эпюры N , σ , u .
8. Подбирается марка стали бруса.

2.4 Пример выполнения работы

Стальной ступенчатый брус (рис. 2.2, а) жёстко защемлён одним концом; другой конец бруса до нагружения находится на расстоянии δ от опорной поверхности. Брус нагружен силами F_1 , F_2 , F_4 , после чего его температура повышается на ΔT .

Требуется определить реакции опор и построить эпюры N , σ , u при следующих данных: $F_1 = 400$ кН, $F_2 = 300$ кН, $F_4 = 600$ кН, $d_1 = 6$ см, $d_2 = 8$ см, $d_3 = 4$ см, $\delta = 0,1$ мм, $\Delta T = 20$ К, $l_1 = 1,5$ м, $l_2 = 1$ м, $l_3 = 0,5$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$ К $^{-1}$, $n_T = 1,5$.

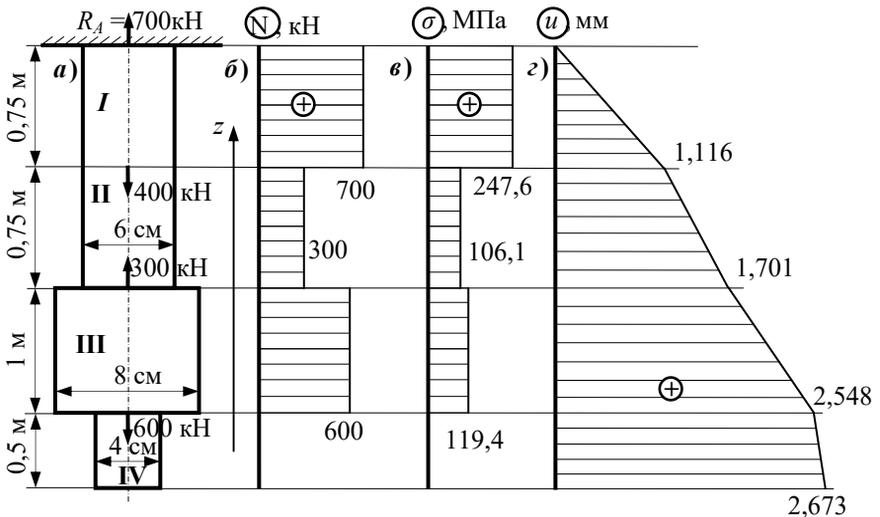


Рис. 2.2. Статически определимый брус

Брус без нижней опорной поверхности

В случае одной верхней опорной (см. рис. 2.2, а) поверхности реакция в ней определится из уравнения равновесия

$$\sum Z = R_A - F_1 + F_2 - F_4 = 0,$$

$$R_A = F_1 - F_2 + F_4 = 400 - 300 + 600 = 700 \text{ кН}.$$

Значение реакции указываем на рис. 2.2, а.

Для определения внутренних усилий разобьём брус на участки, границами которых являются точки приложения сил или сечения, где изменяются диаметры (см. рис. 2.2, а).

Используя метод сечений и уравнение статики $\sum Z = 0$, найдём значения внутренних усилий N_i на каждом участке (рис. 2.3, б, в, г, д): $N_I = R_A = 700 \text{ кН}$, $N_{II} = R_A - F_1 = 700 - 400 = 300 \text{ кН}$, $N_{III} = F_3 = 600 \text{ кН}$, $N_{IV} = 0$.

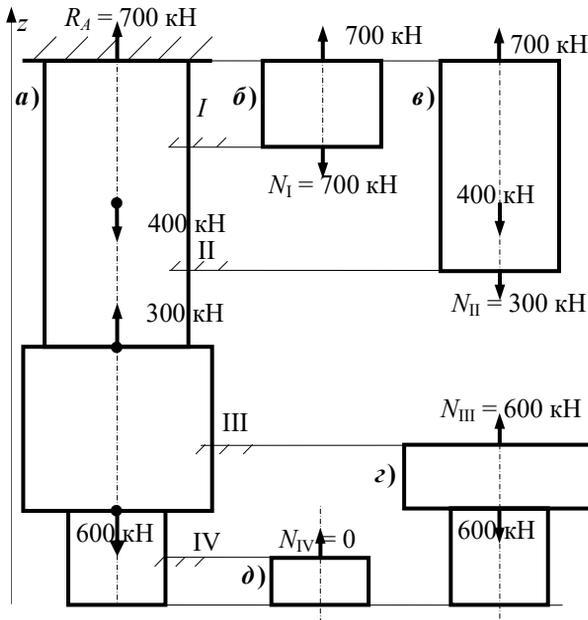


Рис. 2.3. Определение нормальных сил на участках

Определяем площади поперечных сечений бруса на участке i , $i = I, II, III, IV$ – номера участков.

$$A_I = A_{II} = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 6^2}{4} = 28,27 \text{ см}^2,$$

$$A_{III} = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 50,27 \text{ см}^2, \quad A_{IV} = \frac{\pi d_3^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} = 12,57 \text{ см}^2.$$

Определяем нормальные напряжения на каждом участке:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = \frac{700 \cdot 10^3}{28,27 \cdot 10^{-4}} = 247,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{300 \cdot 10^3}{28,27 \cdot 10^{-4}} = 106,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{600 \cdot 10^3}{50,27 \cdot 10^{-4}} = 119,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{IV} = \frac{N_{IV}}{A_{IV}} = 0.$$

Абсолютные деформации на участках бруса вычисляем по формуле $\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i} + \alpha \cdot \Delta T \cdot l_i$. Так как напряжения уже определены, то

применяем формулу $\sigma_i = \left(\frac{\sigma_i}{E} + a \cdot \Delta T \right) \cdot l_i$:

$$\Delta l_I = \left(\frac{247,6 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \right) \cdot 0,75 = 1,116 \text{ мм},$$

$$\Delta l_{II} = \left(\frac{106,1 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \right) \cdot 0,75 = 0,585 \text{ мм},$$

$$\Delta l_{III} = \left(\frac{119,4 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \right) \cdot 1 = 0,847 \text{ мм},$$

$$\Delta l_{IV} = (0 + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20) \cdot 0,5 = 0,125 \text{ мм}.$$

Перемещения границ участков бруса вычисляем по формуле:

$u_{i,i+1} = u_{(i-1),i} + \Delta l_i$, где $i = 0, I, II, III, IV$ – номера границ между участками, граница $u_{0,I}$ относится к заделке верхней опоры, граница $u_{IV,V}$ совпадает с нижним концом бруса.

$$u_{0,I} = 0 \text{ (закреплено),}$$

$$u_{I,II} = u_{0,I} + \Delta l_I = 0 + 1,116 = 1,116 \text{ мм},$$

$$u_{II,III} = u_{I,II} + \Delta l_{II} = 1,116 + 0,584 = 1,701 \text{ мм},$$

$$u_{III,IV} = u_{II,III} + \Delta l_{III} = 1,7 + 0,847 = 2,548 \text{ мм},$$

$$u_{IV,V} = u_{III,IV} + \Delta l_{IV} = 2,548 + 0,125 = 2,673 \text{ мм}.$$

По вычисленным значениям нормальных сил, нормальных напряжений и перемещений строим соответствующие эпюры (см. рис. 2.2, б, в, г).

Марку стали назначаем из условия прочности при центральном растяжении-сжатии:

$$|\sigma|_{\text{наиб}} \leq \frac{\sigma_T}{n_T},$$

где σ_T – предел текучести материала бруса,

n_T – коэффициент запаса по текучести:

$$\sigma_T \geq n_T \cdot |\sigma|_{\text{наиб}} = 1,5 \cdot 247,6 = 371,4 \text{ МПа}.$$

Этому пределу текучести будет соответствовать сталь 45Г2, у которой $\sigma_T = 400 \text{ МПа}$.

Брус с нижней опорной поверхностью

После приложения нагрузки и изменения температуры брус удлинится и коснётся нижней опорной поверхности. В обеих опорных поверхностях появятся реакции R_A и R_B (рис. 2.4, а).

Составим уравнение статики:

$$\sum z = R_A - F_1 + F_2 - F_4 + R_B = 0, \quad (1)$$

из которого следует, что задача статически неопределима, так как для определения двух неизвестных сил имеем лишь одно уравнение равновесия.

Составим уравнение совместности деформаций бруса:

$$\sum_{i=1}^{IV} \Delta l_N^i + \Delta l_T = \delta, \quad (2)$$

где $\Delta l_N^i = \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i}$ – удлинения участков бруса от действия нормальных сил;

$\Delta l_T = \alpha \cdot (l_I + l_{II} + l_{III} + l_{IV}) \cdot \Delta T$ – температурные удлинения бруса.

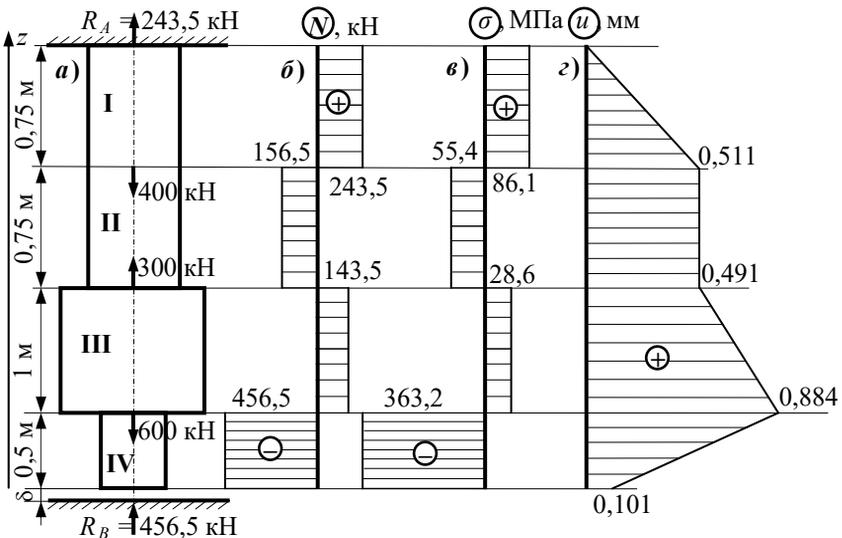


Рис. 2.4. Статически неопределимый брус

Методом сечений определяем нормальные силы на каждом участке бруса:

$$N_I = R_A, \quad N_{II} = R_A - F_1, \quad N_{III} = R_A - F_1 + F_2, \quad N_{IV} = R_A - F_1 + F_2 - F_4.$$

Подставляем эти значения нормальных сил в уравнение (2):

$$\begin{aligned} \frac{R_A \cdot l_1}{E \cdot A_I} + \frac{(R_A - F_1) \cdot l_{II}}{E \cdot A_{II}} + \frac{(R_A - F_1 + F_2) \cdot l_{III}}{E \cdot A_{III}} + \frac{(R_A - F_1 + F_2 - F_4) \cdot l_{IV}}{EA_{IV}} = \\ = \delta - \alpha \cdot \Delta T \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + l_4). \end{aligned}$$

Из этого уравнения следует:

$$\begin{aligned} R_A = \frac{E \cdot [\delta - \alpha \cdot \Delta T \cdot (l_1 + l_{II} + l_{III} + l_{IV})] + F_1 \cdot \left(\frac{l_{II}}{A_{II}} + \frac{l_{III}}{A_{III}} + \frac{l_{IV}}{A_{IV}} \right) - F_2 \cdot \left(\frac{l_{III}}{A_{III}} + \frac{l_{IV}}{A_{IV}} \right) + F_4 \cdot \frac{l_{IV}}{A_{IV}}}{\frac{l_1}{A_I} + \frac{l_{II}}{A_{II}} + \frac{l_{III}}{A_{III}} + \frac{l_{IV}}{A_{IV}}} = \\ = \left(2 \cdot 10^{11} \cdot (0,1 \cdot 10^{-3} - 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 3) + 400 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{0,75}{28,27} + \frac{1}{50,27} + \frac{0,5}{12,57} \right) - \right. \\ \left. - 300 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{1}{50,27} + \frac{0,5}{12,57} \right) + 600 \cdot 10^7 \cdot \frac{0,5}{12,57} \right) : \left(\frac{0,75}{28,27 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,75}{28,27 \cdot 10^{-4}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{50,27 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,5}{12,57 \cdot 10^{-4}} \right) = 243,5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Определяем нормальные силы на каждом участке:

$$N_I = R_A = 243,5 \text{ кН},$$

$$N_{II} = R_A - F_1 = 243,5 - 400 = -156,5 \text{ кН},$$

$$N_{III} = R_A - F_1 + F_2 = 243,5 - 400 + 300 = 143,5 \text{ кН},$$

$$N_{IV} = R_A - F_1 + F_2 - F_3 = 243,5 - 400 + 300 - 600 = -456,5 \text{ кН}.$$

Вычисляем нормальные напряжения на каждом участке:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = \frac{243,5 \cdot 10^3}{28,27 \cdot 10^{-4}} = 86,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = -\frac{156,5 \cdot 10^3}{28,27 \cdot 10^{-4}} = -55,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{III}} = \frac{N_{\text{III}}}{A_{\text{III}}} = \frac{143,5 \cdot 10^3}{50,27 \cdot 10^{-4}} = 28,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{IV}} = \frac{N_{\text{IV}}}{A_{\text{IV}}} = \frac{-456,5 \cdot 10^3}{12,57 \cdot 10^{-4}} = -363,2 \text{ МПа}.$$

Определяем удлинения участков бруса:

$$\Delta l_{\text{I}} = \left(\frac{86,1 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \right) \cdot 0,75 = 0,511 \text{ мм},$$

$$\Delta l_{\text{II}} = \left(\frac{-55,4 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \right) \cdot 0,75 = -0,020 \text{ мм},$$

$$\Delta l_{\text{III}} = \left(\frac{28,6 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \right) \cdot 1 = 0,393 \text{ мм},$$

$$\Delta l_{\text{IV}} = \left(\frac{-363,2}{2 \cdot 10^{11}} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \right) \cdot 0,5 = -0,783 \text{ мм}.$$

Вычисляем перемещения границ участков:

$$u_{0,1} = 0 \text{ (закреплено)},$$

$$u_{\text{I,II}} = u_{0,1} + \Delta l_{\text{I}} = 0 + 0,511 = 0,511 \text{ мм},$$

$$u_{\text{II,III}} = u_{\text{I,II}} + \Delta l_{\text{II}} = 0,511 - 0,02 = 0,491 \text{ мм},$$

$$u_{\text{III,IV}} = u_{\text{II,III}} + \Delta l_{\text{III}} = 0,491 + 0,393 = 0,884 \text{ мм},$$

$$u_{\text{IV,V}} = u_{\text{III,IV}} + \Delta l_{\text{IV}} = 0,884 - 0,783 = 0,101 \text{ мм}.$$

Вычисляем погрешность решения:

$$\frac{|u_{\text{IV,V}} - \delta|}{\delta} \cdot 100\% = \frac{|0,101 - 0,1|}{0,1} \cdot 100\% = 1,00\% < 3\%.$$

Погрешность – в пределах допустимой, следовательно статическая неопределенность раскрыта верно.

По вычисленным значениям нормальных сил, нормальных напряжений и перемещений строим соответствующие эпюры (см. рис. 2.4, б, в, г).

Подбираем материал для рассмотренного статически неопределимого бруса: $\sigma_{\tau} \geq |\sigma|_{\text{наиб}} \cdot n_{\tau} = 363,2 \cdot 1,5 = 544,8$ МПа. Этому условию соответствует сталь 40Х, у которой $\sigma_{\tau} = 800$ МПа.

2.5. Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются статически неопределимыми и каков принцип их решения?
2. Как определяют нормальную силу в заданном сечении бруса?
3. Как определяют нормальные напряжения в заданном сечении бруса?
4. Как определяют перемещение произвольного сечения бруса?
5. Как записывается условие прочности при центральном растяжении или сжатии?
6. Как подбирают марку стали бруса?

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ БРУСА

3.1. Задание

Заданы поперечное сечение бруса сложной формы, составленное из отдельных элементов, а также размеры элементов (рис. 3.1).

Требуется определить положение центра тяжести сечения и главных центральных осей, главные центральные моменты инерции сечения аналитическим и графическим способами, моменты сопротивления изгибу, построить эллипс инерции.

В пояснительной записке следует представить реферат; схему сечения, выполненную в масштабе с изображением центральных и главных центральных осей; эллипс инерции; круг Мора и все необходимые расчёты.

3.2. Выбор задания

Используя цифры задания, например 376 из табл. 3.1 и рис. 3.1, выписываем параметры сечения. Номеру 376 соответствуют следующие данные: схема № 3, вариант *A* (в нижней части сечения – равнобедренный треугольник), $\delta = 4$ мм, $l = 60$ мм, $h = 50$ мм, $r = 20$ мм, $b = 15$ мм, $c = 0,5$ $l = 0,5 \cdot 60 = 30$ мм, профиль Пр – 105 № 1.

3.3. Порядок выполнения работы

1. По данным табл. 3.1, соответствующим заданному шифру, в масштабе вычерчивается сечение.

Размеры и геометрические характеристики алюминиевых профилей по авиационным нормам приведены в пособии [2].

2. Выбирается наиболее рациональная для решения задачи система координатных осей u , v , относительно которых определяется положение центра тяжести сечения и проводятся центральные оси сечения, параллельные выбранным осям u , v .

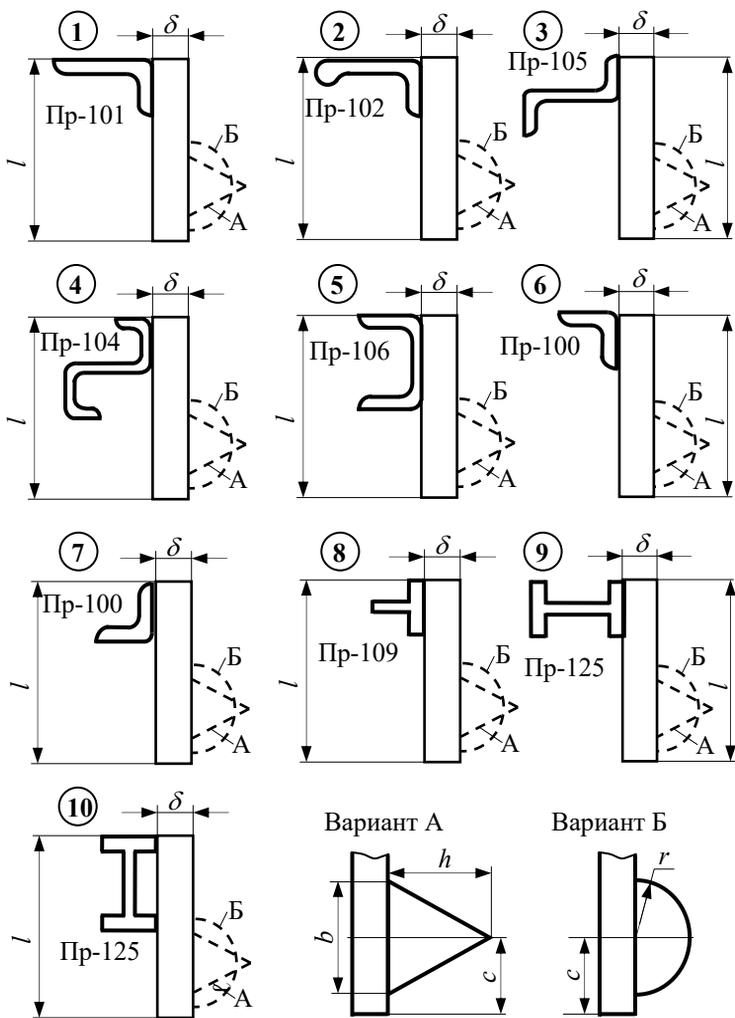


Рис. 3.1 Схемы поперечных сечений

Таблица 3.1 – Параметры элементов сечения

№ строки	Выбираемые параметры										Номера профилей						
	№ схемы	вариант	δ , мм	l , мм	h , мм	R , мм	b , мм	c	Пр100	Пр101	Пр102	Пр104	Пр105	Пр106	Пр109	Пр125	
1	1	А	3	60	30	25	15	0,5l	9	4	7	1	1	4	1	10	
2	2	Б	4	70	40	15	20	0,4l	10	5	8	2	2	5	2	11	
3	3	А	5	80	50	20	30	0,3l	11	6	9	3	3	6	3	1	
4	4	Б	6	90	30	25	15	0,2l	12	7	10	4	4	7	4	2	
5	5	А	3	100	40	15	20	0,5l	13	8	11	5	5	8	1	3	
6	6	Б	4	60	50	20	30	0,4l	9	4	7	1	1	4	2	4	
7	7	А	5	70	30	25	15	0,5l	10	5	8	2	2	5	3	5	
8	8	Б	6	80	40	15	20	0,2l	11	6	9	3	3	6	4	12	
9	9	А	4	90	50	20	30	0,5l	12	7	10	4	4	7	1	13	
0	10	Б	5	100	30	25	15	0,4l	13	8	11	5	5	8	2	14	
	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	н	о	п	е	

3. Определяются осевые и центробежные моменты инерции каждой части сечения относительно собственных центральных осей и моменты инерции всего сечения относительно общих центральных осей.

4. Вычисляются главные центральные моменты инерции сечения и определяется положение главных центральных осей. Эта задача решается аналитически и графически с помощью круга Мора. Подсчитываются моменты сопротивления сечения изгибу.

5. Вычисляются главные радиусы инерции и строится эллипс инерции.

3.4. Примеры выполнения работы

Пример 1. Определить положение центра тяжести и главные центральные моменты инерции сечения, изображённого на рис. 3.2, а.

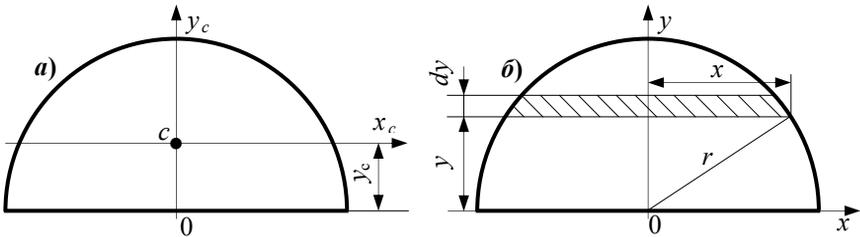


Рис. 3.2. К определению геометрических характеристик полукруга

Положение центра тяжести сечения определяем по формуле

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y dA}{A},$$

где S_x – статический момент сечения относительно оси x ;

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \text{ – площадь сечения.}$$

Из рис.3.2, б: $dA = 2x \cdot dy = 2\sqrt{r^2 - y^2} \cdot dy$,

где $x = \sqrt{r^2 - y^2}$,

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^r 2y \sqrt{r^2 - y^2} \cdot dy = -\frac{2}{3} (r^2 - y^2)^{3/2} \Big|_0^r = \frac{2}{3} r^3,$$

$$y_c = \frac{2r^3 \cdot 2}{3\pi \cdot r^2} = \frac{4r}{3\pi}.$$

В связи с симметрией сечения $x_c = 0$.

Отметим положение центра тяжести s и, учитывая симметрию сечения, проведём главные центральные оси x_c, y_c (рис. 3.2, а).

Определим главные центральные моменты инерции полукруга:

$$J_{x_c} = J_x - y_c^2 A = \frac{\pi \cdot r^4}{8} - \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cong 0,1098 r^4,$$

$$I_{y_c} = \frac{\pi \cdot r^4}{8} \cong 0,3927 r^4.$$

Пример 2. Задано поперечное сечение бруса сложной формы (рис. 3.3), составленное из профиля Пр 125-2, брусьев прямоугольной и треугольной формы, и размеры этих элементов.

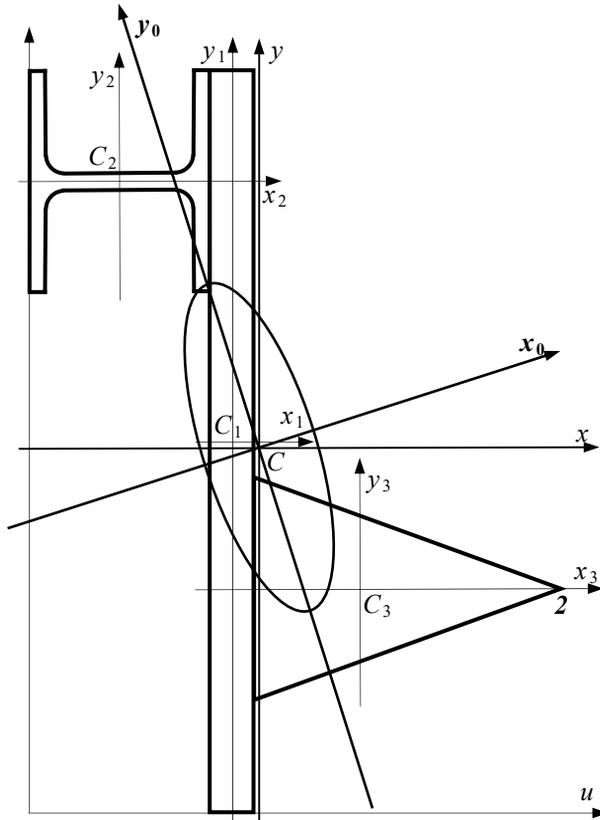


Рис. 3.3. Схема поперечного сечения

Требуется вычислить главные центральные моменты инерции сечения, определить положение главных центральных осей аналитическим и графическим способами, вычислить моменты сопротивления изгибу и радиусы инерции, построить эллипс инерции.

Исходные данные: $\delta = 6$ мм, $l = 100$ мм, $h = 42$ мм, $b = 30$ мм, $c = 0,3 \cdot l = 0,3 \cdot 100 = 30$ мм, профиль Пр-125-2.

Решение

1. Вычерчиваем в масштабе заданное поперечное сечение. Прономеровав элементы этого сечения, проводим собственные центральные оси для каждого из них (см. рис. 3.3).

2. Определяем площади и моменты инерции составных элементов относительно собственных центральных осей.

Прямоугольник (рис. 3.4, а): $A_1 = l \cdot \delta = 10 \cdot 0,6 = 6,00$ см²,

$$J_{x_1}^{(1)} = \frac{\delta \cdot l^3}{12} = \frac{0,6 \cdot 10^3}{12} = 50,00 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1}^{(1)} = \frac{\delta^3 \cdot l}{12} = \frac{0,6^3 \cdot 10}{12} = 0,180 \text{ см}^4, \quad J_{x_1 y_1}^{(1)} = 0.$$

Из справочных данных [2] выписываем геометрические характеристики профиля Пр-125-2 (рис. 3.4, б) и корректируем значения моментов инерции в зависимости от расположения профиля в схеме сечения:

$$A_2 = 2,14 \text{ см}^2, \quad J_{x_2}^{(2)} = 1,099 \text{ см}^4, \quad J_{y_2}^{(2)} = 4,499 \text{ см}^4, \quad J_{x_2 y_2}^{(2)} = 0.$$

Треугольник (рис. 3.4, в):

$$A_3 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 4,2}{2} = 6,30 \text{ см}^2,$$

$$J_{x_3}^{(3)} = \frac{2 \cdot h \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{2 \cdot 4,2 \cdot 1,5^3}{12} = 2,363 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_3}^{(3)} = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{3 \cdot 4,2^3}{36} = 6,174 \text{ см}^4, \quad J_{x_3 y_3}^{(3)} = 0.$$

3. Определяем координаты центра тяжести в произвольных осях u, v (см. рис. 3.3), параллельных центральным осям элементов, используя формулы

$$v_c = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i \cdot v_{c_i}}{\sum_{i=1}^3 A_i},$$

$$u_c = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i \cdot u_{c_i}}{\sum_{i=1}^3 A_i},$$

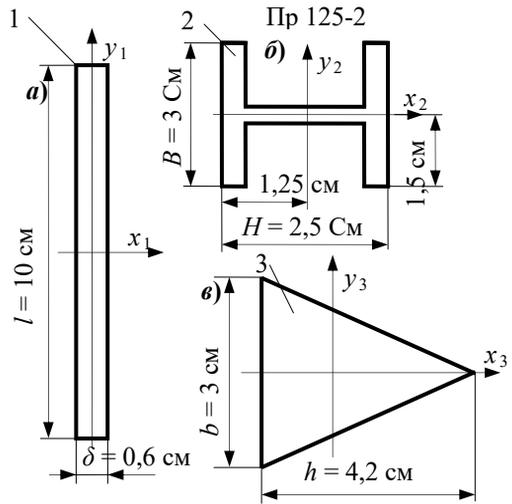


Рис. 3.4. Элементы сечения

где v_{c_i}, u_{c_i} – координаты центров тяжести элементов сечения в координатных осях u, v :

$$v_{c_1} = \frac{l}{2} = \frac{10}{2} = 5,00 \text{ см}, \quad u_{c_1} = H + \frac{\delta}{2} = 2,5 + \frac{0,6}{2} = 2,80 \text{ см},$$

$$v_{c_2} = l - \frac{B}{2} = 10 - \frac{3}{2} = 8,50 \text{ см}, \quad u_{c_2} = \frac{H}{2} = \frac{2,5}{2} = 1,25 \text{ см},$$

$$v_{c_3} = c = 3,00 \text{ см}, \quad u_{c_3} = H + \delta + \frac{h}{3} = 2,5 + 0,6 + \frac{4,2}{3} = 4,50 \text{ см}.$$

$$v_c = \frac{A_1 \cdot v_{c_1} + A_2 \cdot v_{c_2} + A_3 \cdot v_{c_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{6 \cdot 5 + 2,14 \cdot 8,5 + 6,3 \cdot 3}{6 + 2,14 + 6,3} = 4,646 \text{ см},$$

$$u_c = \frac{A_1 \cdot u_{c_1} + A_2 \cdot u_{c_2} + A_3 \cdot u_{c_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{6 \cdot 2,8 + 2,14 \cdot 1,25 + 6,3 \cdot 4,5}{6 + 2,14 + 6,3} = 3,320 \text{ см}.$$

На рис. 3.3 отмечаем центр тяжести сечения c по найденным координатам u_c, v_c и проводим центральные оси x, y всего сечения, параллельные выбранным осям u, v .

4. Вычисляем моменты инерции всего сечения относительно этих осей, используя формулы преобразования моментов инерции при параллельном переносе осей:

$$J_x = J_{x_1}^{(1)} + A_1 \cdot a_1^2 + J_{x_2}^{(2)} + A_2 \cdot a_2^2 + J_{x_3}^{(3)} + A_3 \cdot a_3^2,$$

$$J_y = J_{y_1}^{(1)} + A_1 \cdot b_1^2 + J_{y_2}^{(2)} + A_2 \cdot b_2^2 + J_{y_3}^{(3)} + A_3 \cdot b_3^2,$$

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1}^{(1)} + A_1 \cdot a_1 \cdot b_1 + J_{x_2 y_2}^{(2)} + A_2 \cdot a_2 \cdot b_2 + J_{x_3 y_3}^{(3)} + A_3 \cdot a_3 \cdot b_3.$$

Здесь $I_{x_1}^{(1)}, I_{x_2}^{(2)}, I_{x_3}^{(3)}, I_{y_1}^{(1)}, I_{y_2}^{(2)}, I_{y_3}^{(3)}, I_{x_1 y_1}^{(1)}, I_{x_2 y_2}^{(2)}, I_{x_3 y_3}^{(3)}$ – осевые и центробежные моменты инерции элементов сечения относительно собственных центральных осей;

a_1, a_2, a_3 – расстояния между центральной осью x и центральными осями элементов x_1, x_2, x_3 ;

b_1, b_2, b_3 – расстояния между центральной осью y и центральными осями элементов y_1, y_2, y_3 .

Осевые и центробежные моменты инерции элементов относительно собственных центральных осей вычислены ранее.

Вычисляем расстояния между осями, используя рис. 3.3:

$$a_1 = v_{c_1} - v_c = 5 - 4,646 = 0,354 \text{ см},$$

$$a_2 = v_{c_2} - v_c = 8,5 - 4,646 = 3,854 \text{ см},$$

$$a_3 = v_{c_3} - v_c = 3 - 4,646 = -1,646 \text{ см},$$

$$b_1 = u_{c_1} - u_c = 2,8 - 3,32 = -0,520 \text{ см},$$

$$b_2 = u_{c_2} - u_c = 1,25 - 3,32 = -2,070 \text{ см},$$

$$b_3 = u_{c_3} - u_c = 4,5 - 3,32 = 1,180 \text{ см}.$$

$$J_x = J_{x_1}^{(1)} + A_1 \cdot a_1^2 + J_{x_2}^{(2)} + A_2 \cdot a_2^2 + J_{x_3}^{(3)} + A_3 \cdot a_3^2 = 50 + 6 \cdot 0,354^2 + 1,099 + 2,14 \cdot 3,854^2 + 2,363 + 6,3 \cdot (-1,646)^2 = 103,1 \text{ см}^4,$$

$$J_y = J_{y_1}^{(1)} + A_1 \cdot b_1^2 + J_{y_2}^{(2)} + A_2 \cdot b_2^2 + J_{y_3}^{(3)} + A_3 \cdot b_3^2 = 0,18 + 6 \cdot (-0,52)^2 + 4,499 + 2,14 \cdot (-2,07)^2 + 6,174 + 6,3 \cdot 1,18^2 = 30,42 \text{ см}^4,$$

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1}^{(1)} + A_1 \cdot a_1 \cdot b_1 + J_{x_2 y_2}^{(2)} + A_2 \cdot a_2 \cdot b_2 + J_{x_3 y_3}^{(3)} + A_3 \cdot a_3 \cdot b_3 = 0 + 6 \cdot 0,354 \cdot (-0,52) + 0 + 2,14 \cdot 3,854 \cdot (-2,07) + 0 + 6,3 \cdot (-1,646) \cdot 1,18 = -30,41 \text{ см}^4.$$

5. Определяем главные центральные моменты инерции сечения:

$$J_{x_0, y_0} = \frac{1}{2} \cdot \left[(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 \cdot J_{xy}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[(103,1 + 30,42) \pm \sqrt{(103,1 - 30,42)^2 + 4 \cdot (-30,41)^2} \right] = \frac{133,52 \pm 94,75}{2},$$

$$J_{x_0} = \frac{133,52 + 94,75}{2} = 114,1 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_0} = \frac{133,52 - 94,75}{2} = 19,39 \text{ см}^4.$$

Положение главных центральных осей найдём по формуле:

$$\text{tg } \alpha_0 = -\frac{J_{xy}}{J_x - J_{y_0}} = -\frac{-30,41}{103,1 - 19,39} = 0,353;$$

$\alpha_0 = \text{arc tg } 0,353 = 19,96^\circ$. Здесь α_0 – угол между осью x и x_0 .

На рис. 3.3 проведём главные центральные оси x_0, y_0 .

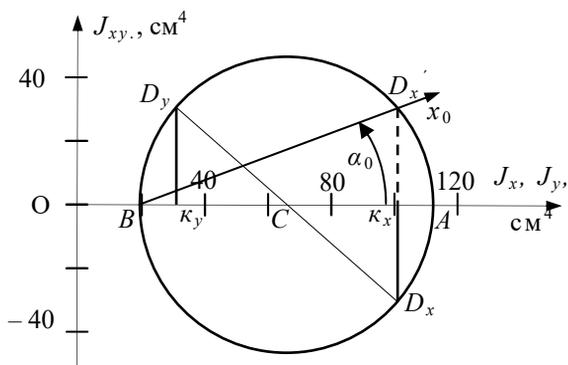


Рис. 3.5. Круг Мора для геометрических характеристик

6. Определяем главные моменты инерции сечения и положение главных центральных осей графическим методом (рис. 3.5):

- откладываем отрезок $Ok_x = J_x$;
- откладываем отрезок $k_x D_x = J_{xy}$;

- откладываем отрезок $OK_y = J_y$;
- откладываем отрезок $K_y D_y = -J_{xy}$;
- соединяем точки D_x, D_y и находим центр круга C ;
- изображаем круг с центром C и радиусом CD_x .

Из рис. 3.5 определяем:

$$J_x^{zp} = OA \approx 110 \text{ см}^4; J_y^{zp} = OB \approx -20 \text{ см}^4; \alpha_0^{zp} = \sphericalangle ABD'_\alpha \approx 20^\circ.$$

7. Определяем координаты точек сечения, наиболее удалённых от главных центральных осей.

Из рис. 3.3 следует, что такими точками будут точки 1 и 2, координаты которых в осях x, y равны:

$$x^{(1)} = -u_c = -3,32 \text{ см}, y^{(1)} = l - v_c = 10 - 4,646 = 5,354 \text{ см},$$

$$x^{(2)} = H + \delta + h - u_c = 2,5 + 0,6 + 4,2 - 3,32 = 3,98 \text{ см},$$

$$y^{(2)} = c - v_c = 3 - 4,646 = -1,646 \text{ см}.$$

Координаты точек в осях x_0, y_0 :

$$y_0^{(1)} = y^{(1)} \cdot \cos \alpha_0 - x^{(1)} \cdot \sin \alpha_0 = 5,354 \cdot \cos 19,96^\circ + 3,32 \cdot \sin 19,96^\circ = 6,166 \text{ см};$$

$$x_0^{(2)} = x^{(2)} \cdot \cos \alpha_0 + y^{(2)} \cdot \sin \alpha_0 = 3,98 \cdot \cos 19,96^\circ - 1,646 \cdot \sin 19,96^\circ = 3,179 \text{ см}.$$

Из полученных результатов следует:

$$\left| x_0 \right|_{\text{наиб}} = 3,179 \text{ см}, \left| y_0 \right|_{\text{наиб}} = 6,166 \text{ см}.$$

Вычисленные значения координат можно проверить измерениями на рис. 3.3.

8. Определяем моменты сопротивления сечения изгибу:

$$W_{x_0} = \frac{J_{x_0}}{\left| y_0 \right|_{\text{наиб}}} = \frac{114,1}{6,166} = 18,50 \text{ см}^3;$$

$$W_{y_0} = \frac{J_{y_0}}{\left| x_0 \right|_{\text{наиб}}} = \frac{19,39}{3,179} = 6,10 \text{ см}^3.$$

9. Вычисляем радиусы инерции:

$$A + A_1 + A_2 + A_3 = 6 + 2,14 + 6,3 = 14,44 \text{ см}^2,$$

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{A}} = \sqrt{\frac{114,1}{14,44}} = 2,81 \text{ см},$$

$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{19,39}{14,44}} = 1,16 \text{ см.}$$

На рис. 3.3 радиус i_{x_0} откладываем по оси y_0 , радиус i_{y_0} – по оси x_0 и на этих отрезках строим эллипс инерции.

3.5. Контрольные вопросы

1. Как определяют положение центра тяжести сечения?
2. Какие оси называются главными?
3. Сколько главных осей имеет сечение?
4. Для каких сечений можно, не прибегая к расчётам, установить положение главных осей?
5. Как изменится центробежный момент инерции сечения при повороте осей на 90° ?
6. Каким свойством обладает сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
7. Для какой цели строят эллипс инерции?

4. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

4.1. Задание

Заданы схемы балок [3], размеры и действующие нагрузки.

Требуется:

- построить эпюры Q и M для балок с буквенными данными, изобразить характер изогнутых осей;
- построить эпюры Q и M для балок с числовыми данными, изобразить характер изогнутых осей и подобрать двутавровые сечения;
- для одной из балок с числовыми данными назначить размеры прямоугольного, квадратного, круглого и кольцевого поперечных сечений, сравнить экономичность балок с различными сечениями;
- для одной из балок с числовыми данными провести полную проверку прочности;
- для одной из балок с числовыми данными провести анализ напряженного и деформированного состояний в заданной точке этой балки;
- для одной из балок с числовыми данными определить прогиб и угол поворота в заданных сечениях.

4.2. Выбор задания

Номера схемы балок определяются из соотношения

$$\text{№}_\sigma = \text{№}_{n/n} + K_i \cdot n,$$

где №_σ – номер балки из работы [4];

$\text{№}_{n/n}$ – порядковый номер студента в журнале группы;

K_1 – коэффициент для балок с буквенными данными;

K_2 – коэффициент для балок с числовыми данными;

n – последовательно принимает значения: 0; 1; 2; 3; 4.

Соотношения между нагрузками q , F и t для балок с буквенными данными и значения для коэффициентов K_1 , K_2 задаются преподавателем. Например,

$$F = \frac{ql}{4}, \quad m = \frac{ql^2}{2}, \quad K_1 = 236, \quad K_2 = 89.$$

4.3. Порядок выполнения работы

1. Изображаются в масштабе схемы балок с буквенными данными, вычисляются реакции опор, указываются их значения на схемах. Строятся эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M с обозначением ординат в характерных сечениях и изображается ориентировочная изогнутая ось балки. Расчёты, сопровождающие решение, в пояснительной записке можно не приводить.

2. Изображаются в масштабе схемы балок с числовыми данными, вычисляются реакции опор, указываются их значения на схемах. Строятся эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M и изображается ориентировочная изогнутая ось балки. Из условия прочности по нормальным напряжениям подбираются размеры двутавровых сечений.

3. Для одной из балок, кроме двутаврового, подбираются: прямоугольное ($h/b = 2$), круглое, кольцевое ($\alpha = d/D = 0,8$), квадратное поперечные сечения, сравниваются массы балок с различными поперечными сечениями, проводится полная проверка прочности.

В расчётах принимается материал балок сталь Ст. 3 с допусковым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа.

4. Проводится исследование напряжённого и деформированного состояний одной балки, рассмотренной в п. 3 и имеющей двутавровое поперечное сечение:

- для исследования выбирается сечение с большими значениями поперечной силы и изгибающего момента, строятся эпюры нормальных и касательных напряжений, действующих в этом сечении;
- вычисляются нормальные и касательные напряжения в точке балки, находящейся на расстоянии $y = h/4$ от нейтральной оси, где h – высота сечения;
- в выделенной точке аналитическим и графическим методами определяются главные напряжения, положение главных площадок, наибольшее касательное напряжение и показывается элемент балки в окрестности выделенной точки с изо-

бражением всех напряжений на произвольных и главных площадках;

- по найденным значениям главных напряжений вычисляются главные линейные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, относительное изменение объёма e , удельная энергия деформации u_0 и эквивалентные напряжения $\sigma_{экв_{III}}, \sigma_{экв_{IV}}$ по III и IV теориям предельных напряжённых состояний.

5. Для одной из балок с числовыми данными с помощью дифференциальных уравнений изогнутой оси балки определяются: прогиб сечения, расположенного в середине пролёта двухопорной балки или на свободном конце консольной балки, а также угол поворота сечения, расположенного в одной из опор двухопорной балки или на свободном конце консольной балки.

Примечание: по пунктам 2, 3 и 4 в пояснительной записке должны быть представлены все расчёты.

4.4. Примеры выполнения работы

Пример 1. Для балки, изображённой на рис. 4.1, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, изобразить ориентировочную изогнутую ось балки.

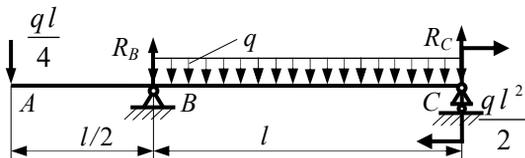


Рис. 4.1. Расчётная схема балки № 1

Используя уравнения статики, определим реакции опор. Заменяем распределённую нагрузку её равнодействующей, которая будет равна площади фигуры этой нагрузки. Приложим её в центре тяжести этой фигуры. В качестве уравнений статики воспользуемся уравнениями моментов относительно шарнирных опор:

$$\sum M_C = \frac{ql}{4} \cdot 1,5l - R_B \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{2} = 0, \quad R_B = \frac{3}{8} ql;$$

$$\sum M_B = \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{2} + R_C \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{2} = 0, \quad R_C = \frac{7}{8} ql.$$

Проверяем достоверность вычисленных реакций:

$$\sum y = -\frac{ql}{4} + \frac{3}{8}ql - q \cdot l + \frac{7}{8}ql = \frac{5}{4}ql - \frac{5}{4}ql \equiv 0. \text{ Реакции найдены}$$

правильно, показываем их на балке (рис. 4.2).

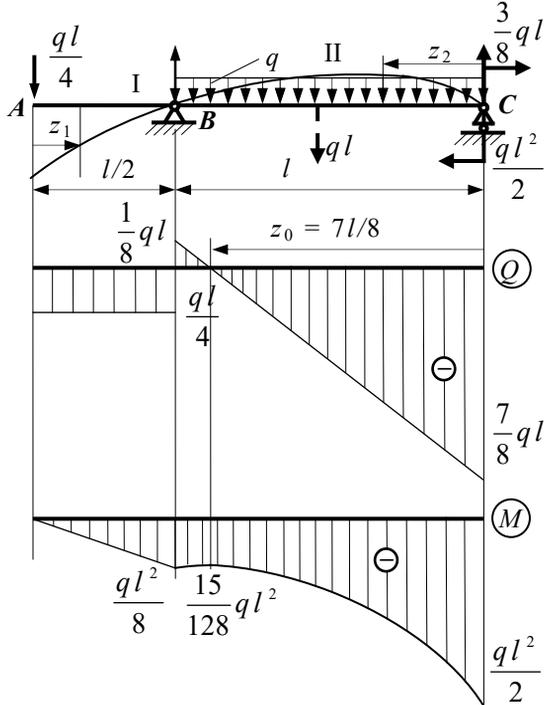


Рис. 4.2. Эпюры и изогнутая ось балки № 1

Разобьём балку на два участка (рис. 4.3) и, используя метод сечений для каждого участка, запишем уравнения $Q(z)$, $M(z)$.

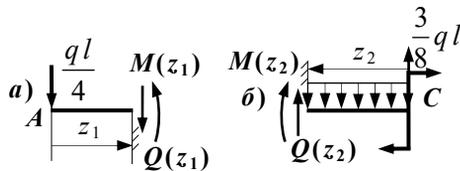


Рис. 4.3. Метод сечений для определения внутренних сил

Участок I (рис. 4.3, а): $0 \leq z_1 \leq l/2$,

$$Q(z_1) = -ql/4 = \text{const}, M(z_1) = -ql \cdot z_1/4, M(0) = 0, M(l/2) = ql^2/8.$$

Участок II (рис. 4.3, б): $0 \leq z_2 \leq l$,

$$Q(z_2) = -\frac{7}{8}ql + q \cdot z, Q(0) = -\frac{7}{8}ql, Q(l) = \frac{1}{8}ql,$$

$$Q(z_0) = -\frac{7}{8}ql + q \cdot z_0 = 0, \Rightarrow z_0 = \frac{7}{8}l.$$

$$M(z_2) = -\frac{ql^2}{2} + \frac{7}{8}ql \cdot z_2 - q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2}, M(0) = 0, M(l) = -\frac{1}{8}ql^2,$$

$$M_{\text{экстр}} = M(z_0) = -\frac{ql^2}{2} + \frac{7}{8}ql \cdot \frac{7}{8}l - q \cdot \frac{7}{8}l \cdot \frac{7}{16}l = -\frac{15}{128}ql^2.$$

Построим эпюры Q и M . По эпюре изгибающих моментов, с учётом условий закрепления, построим ориентировочную изогнутую ось балки (см. рис. 4.2).

Пример 2. Для балки круглого поперечного сечения, представленной на рис. 4.4, построить эпюры Q , M , изобразить ориентировочную изогнутую ось балки и подобрать диаметр, если она изготовлена из стали 20Х.

Определяем реакции в опорах, предполагая, что они направлены вверх. Распределённую нагрузку заменяем её равнодействующей. Она будет равна площади треугольника и приложена в его центре тяжести.

$$\sum M_B = R_C \cdot 8 - \frac{1}{2}40 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 - 40 \cdot 2 = 0, \Rightarrow R_C = 48,33 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 40 \cdot 10 - 40 - R_B \cdot 8 + \frac{1}{2}40 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 = 0, \Rightarrow R_B = 151,67 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum y = -40 + 151,67 - 160 + 48,33 = -200 + 200 \equiv 0$. Реакции найдены правильно, покажем значения реакций на рис. 4.3 с учётом знаков.

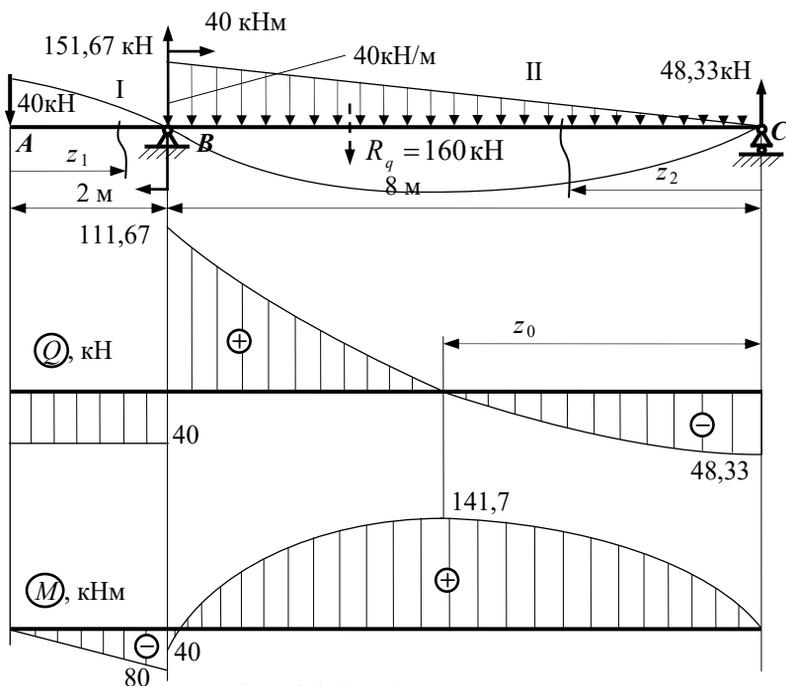


Рис. 4.4. Расчётная схема, эпюры внутренних сил и изогнутая ось балки № 2

Для построения эпюр Q и M разбиваем балку на два участка, для каждого из них составим уравнения $Q(z)$ и $M(z)$, вычисляем их значения на границах участков и по этим значениям построим соответствующие эпюры.

Участок I: $0 \leq z_1 \leq 2$ м.

$$Q(z_1) = -40 \text{ кН} = \text{const},$$

$$M(z_1) = -40 \cdot z_1, M(0) = 0, M(2) = -80 \text{ кНм}.$$

Участок II: $0 \leq z_2 \leq 8$ м.

$$Q(z_2) = -48,330 + \frac{1}{2} q(z_2) \cdot z_2,$$

из подобия треугольников (рис.4.5):

$$\frac{q(z_2)}{40} = \frac{z_2}{8}, q(z_2) = 5 \cdot z_2, \text{ тогда}$$

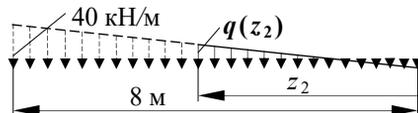


Рис. 4.5. К определению внутренних сил на участках с треугольной нагрузкой

$$Q(z_2) = -48,33 + 2,5 z_2^2; \quad Q(0) = -48,33 \text{ кН}, \quad Q(8) = 111,67 \text{ кН}.$$

Эпюра Q плавно пересекает ось, поэтому находим точку пересечения: $z_{\text{экстр}} = \sqrt{\frac{48,33}{2,5}} = 4,397 \text{ м}.$

$$M(z_2) = 48,33 \cdot z_2 - 2,5 z_2^2 \cdot \frac{z_2}{3} = 48,33 z_2 - \frac{5}{6} z_2^3, \quad M(0) = 0,$$

$$M_{\text{экстр}} = M(4,397 \text{ м}) = 141,7 \text{ кНм}, \quad M(8 \text{ м}) = -40,0 \text{ кНм}.$$

По вычисленным значениям Q , M в характерных сечениях построим их эпюры. По эпюре изгибающих моментов, с учётом условий закрепления, построим ориентировочную изогнутую ось балки (см рис. 4.4).

Диаметр балки круглого сечения определяем из условия прочности:

$$\frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad \text{где для круглого сечения} - W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad [\sigma] = \sigma_T / n_T.$$

По справочным данным находим для стали 20Х $\sigma_T = 400 - 550 \text{ МПа}$, так как коэффициент запаса не задан, то принимаем $n_T = 1,5$. Теперь вычисляем необходимый диаметр балки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M|_{\text{наиб}} \cdot n_T}{\pi \cdot \sigma_T}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 141,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{\pi \cdot 400 \cdot 10^6}} = 0,176 \text{ м}.$$

Принимаем ближайший стандартный (большой, чем вычисленный) $d = 180 \text{ мм}.$

Пример 3. Для заданной балки (рис. 4.6), изготовленной из стали 10, построить эпюры Q , M , изобразить ориентировочную изогнутую ось балки, подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения ($b/h = 0,7$). Предполагаем, что реакции опор направлены вверх, заменив распределённые нагрузки их равнодействующими, определяем реакции в опорах.

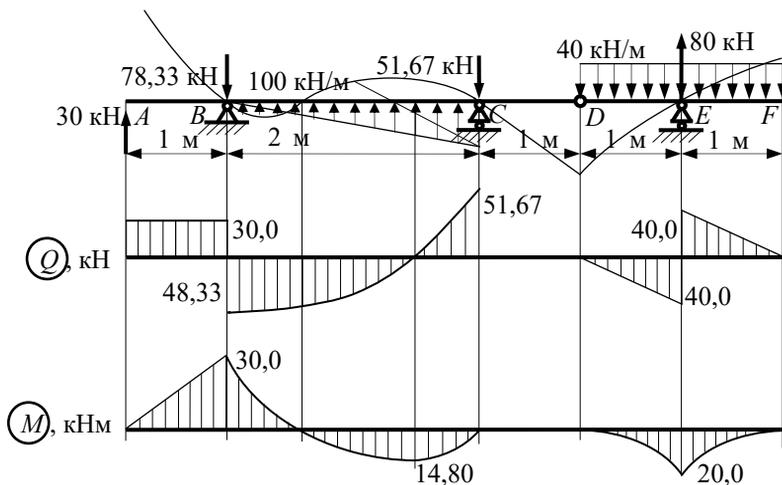


Рис. 4.6. Расчётная схема, эпюры внутренних сил и изогнутая ось балки № 3

В балке с промежуточным шарниром D к известным уравнениям статики добавляется ещё одно уравнение – сумма моментов всех сил, расположенных по одну сторону от шарнира, равна нулю. Первым следует использовать уравнение, в котором будет только одна неизвестная реакция. Таким уравнением для данной балки будет сумма моментов всех сил, расположенных справа от шарнира:

$$\sum M_D(np) = -40 \cdot 2 \cdot 1 + R_E \cdot 1 = 0, \Rightarrow R_E = 80 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -30 \cdot 1 + \frac{1}{2} 100 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + R_C \cdot 2 - 40 \cdot 2 \cdot 4 + 80 \cdot 4 = 0,$$

$$R_C = -51,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = -30 \cdot 3 - R_B \cdot 2 - \frac{1}{2} 100 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 - 40 \cdot 2 \cdot 2 + 80 \cdot 2 = 0,$$

$$R_B = -78,33 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = 30 - 78,33 + \frac{1}{2} 100 \cdot 2 - 51,67 - 40 \cdot 2 + 80 = 210 - 210 \equiv 0.$$

Реакции определены правильно. Покажем реакции опор на рис. 4.6 с учётом их знаков.

Разбиваем балку на 5 участков. Методом характерных сечений вычисляем значения и строим эпюры Q и M .

Участок AB : $Q_A = Q_B = 30$ кН, $M_A = 30 \cdot 0 = 0$, $M_B = 30 \cdot 1 = 30$ кНм.

Участок BC : $0 \leq z_2 \leq 2$ м.

Аналогично с предыдущей задачей $\frac{q(z_2)}{100} = \frac{z_2}{2}$, $q(z_2) = 50 \cdot z_2$,

$$Q(z_2) = 30 - 78,33 + \frac{1}{2} q(z_2) \cdot z_2 = -48,33 + 25 z_2^2;$$

$$Q_B = Q(0) = -48,33 \text{ кН}, Q_C = Q(2 \text{ м}) = 51,67 \text{ кН}.$$

Эпюра Q плавно пересекает ось, координаты этого сечения

$$z_{\text{экт}} = \sqrt{\frac{48,33}{25}} = 1,390 \text{ м}.$$

$$M(z_2) = 30(1 + z_2) - 78,33 \cdot z_2 + \frac{1}{2} 50 z_2 \cdot z_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot z_2 = 30 - 48,33 \cdot z_2 + 8,333 \cdot z_2^3,$$

$$M_B = M(0) = 30 \text{ кНм}, M_{\text{эктр}} = M(1,39) = -14,80 \text{ кНм},$$

$$M_C = M(2) = 0.$$

Следует обратить внимание на то, что на участках с переменной интенсивностью распределённой нагрузки в случае, когда эпюра Q пересекает ось балки, невозможно правильно построить эпюру M без составления уравнений $Q(z)$ и $M(z)$.

Участок CD : $Q_C = 0$, $Q_D = 0$; $M_C = 0$, $M_D = 0$.

На участках DE и EF внутренние силы удобнее вычислять по правым силам:

участок DE : $Q_D = 40 \cdot 2 - 80 = 0$, $Q_E = 40 \cdot 1 - 80 = -40$ кН;
 $M_D = -40 \cdot 2 \cdot 1 + 80 \cdot 1 = 0$, $M_E = -40 \cdot 1 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0 = -20$ кНм;

участок EF : $Q_E = 40 \cdot 1 = 40$ кН; $Q_F = 40 \cdot 0 = 0$; $M_E = -40 \cdot 1 \cdot 0,5 = -20$ кНм, $M_F = -40 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

По вычисленным значениям Q , M в характерных сечениях построим их эпюры. По эпюре изгибающих моментов, с учётом условий закрепления, строим ориентировочную изогнутую ось балки (см. рис. 4.6).

Подбираем размеры прямоугольного поперечного сечения балки (см. рис.4.6) из условия прочности при плоском изгибе:

$$\frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где для прямоугольного сечения $W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,7h \cdot h^2}{6} = 0,1167h^3$,

$[\sigma] = \sigma_T / n_T$.

По справочным данным находим для стали 10 – $\sigma_T = 210$ МПа, так как коэффициент запаса не задан, то примем $n_T = 1,5$. Теперь вычисляем необходимые размеры сечения балки:

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{|M|_{\text{наиб}} \cdot n_T}{0,1167 \cdot \sigma_T}} = \sqrt[3]{\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{0,1167 \cdot 210 \cdot 10^6}} = 122 \text{ мм},$$

$$b = 0,7 \cdot 122 = 85,7 \text{ мм}.$$

Принимаем ближайшие стандартные (большие, чем вычисленные) $h = 125$ мм, $b = 90$ мм.

Пример 4. Для балки, изображённой на рис. 4.7, построить эпюры поперечных сил Q , изгибающих моментов M , изобразить ориентировочную изогнутую ось балки. Подобрать двутавровое, прямоугольное ($h/b = 2$), круглое, кольцевое ($c = d/D = 0,8$), квадратное поперечные

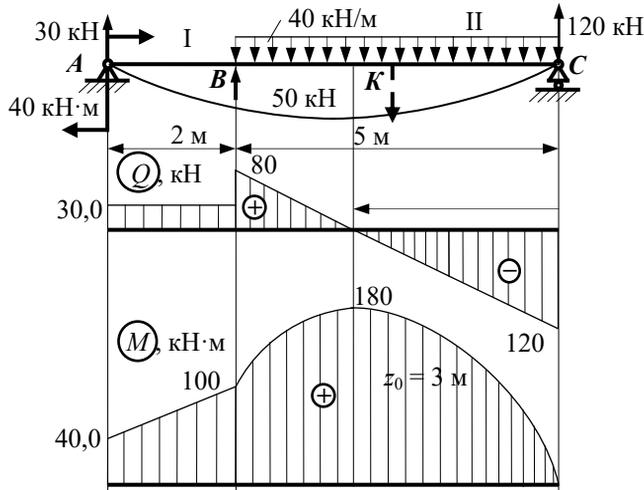


Рис. 4.7. Расчётная схема, эпюры внутренних сил и изогнутая ось балки № 4

сечения, сравнить массы балок с различными поперечными сечениями, провести полную проверку прочности и исследовать напряжённо-деформированное состояние в заданной точке сечения, если она изготовлена из стали 3. Коэффициент запаса принять равным 1,5.

4.1. Построение эпюр Q , M и ориентировочной изогнутой оси балки.

Используя уравнения статики, определяем реакции опор, предварительно условившись, что они направлены вверх.

$$\sum M_A = R_C \cdot 7 - 40 \cdot 5 \cdot 4,5 + 50 \cdot 2 - 40 = 0, \quad R_C = 120 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = -R_A \cdot 7 + 40 \cdot 5 \cdot 2,5 - 50 \cdot 5 - 40 = 0, \quad R_A = 30,0 \text{ кН}.$$

Для проверки достоверности результатов вычисленных реакций используем уравнение равновесия $\sum y = 30 + 50 - 40 \cdot 5 + 120 \equiv 0$.

Реакции определены правильно, укажем их значения на расчётной схеме балки и приступим к построению эпюр Q и M . Для этого разобьём балку на два участка, вычислим значения Q и M в характерных сечениях и построим их эпюры.

Участок AB : $Q_A = Q_B = 30,0$ кН,

$M_A = 30 \cdot 0 + 40 = 40$ кНм, $M_B = 30 \cdot 2 + 40 = 100,0$ кНм.

Участок CB :

$Q_C = -120 + 40 \cdot 0 = -120$ кН, $Q_B = -120 + 40 \cdot 5 = 80,0$ кН.

Эпюра Q пересекает ось в сечении $z_0 = 120/40 = 3,00$ м.

$M_C = 120 \cdot 0 - 40 \cdot 0 \cdot 0 = 0$,

$M_{\text{экстр}} = 120 \cdot 3 - 40 \cdot 3 \cdot 1,5 = 180$ кНм,

$M_B = 120 \cdot 5 - 40 \cdot 5 \cdot 2,5 = 100$ кНм.

По вычисленным значениям Q и M в характерных сечениях построим их эпюры. По эпюре изгибающих моментов, с учётом условий закрепления, строим ориентировочную изогнутую ось балки (см. рис. 4.7).

4.2. Подбор размеров различных поперечных сечений.

Подбираем размеры поперечного сечения балки (см. рис. 4.7) из

условия прочности при плоском изгибе: $\frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \leq [\sigma]$,

где $[\sigma] = \sigma_T / n_T$.

Для ст. 3 – $\sigma_T = 240$ МПа, тогда

$$W_x \geq \frac{|M|_{\text{наиб}} \cdot n_T}{\sigma_T} = \frac{180 \cdot 10^3 \cdot 1.5}{240 \cdot 10^6} = 1125 \text{ см}^3.$$

а) Двутавровое сечение. Принимаем [4] двутавр № 45: $h = 450$ мм, $b = 160$ мм, $d = 9,0$ мм, $t = 14,2$ мм, $W_x = 1231 \text{ см}^3$; $A^{d/m} = 84,7 \text{ см}^2$; $J_x = 27696 \text{ см}^4$, $S_x^\# = 708 \text{ см}^3$.

б) Прямоугольное сечение $h/b = 2$:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3;$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1125}{2}} = 11,91 \text{ см.}$$

Принимаем [5] $b = 12,0$ см, $h = 2 \cdot 12 = 24,0$ см.

$$A^{np} = 2 \cdot b^2 = 2 \cdot 12^2 = 288,0 \text{ см}^2.$$

в) Круглое сечение:

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32}; \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1125}{\pi}} = 22,55 \text{ см.}$$

$$\text{Принимаем [6]} \quad D = 23,0 \text{ см.} \quad A^{sp} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 23^2}{4} = 415,5 \text{ см}^2.$$

г) Кольцевое сечение $c = d/D = 0,8$:

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} (1 - c^4); \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi \cdot (1 - c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1125}{\pi \cdot (1 - 0,8^4)}} = 26,87 \text{ см.}$$

Принимаем [7] $D = 27,3$ см.

$$A^{\text{коль}} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} (1 - c^2) = \frac{\pi \cdot 27,3^2}{4} (1 - 0,8^2) = 210,7 \text{ см}^2.$$

д) Квадратное сечение: $W_x = \frac{a \cdot a^2}{6} = \frac{a^3}{6}$;

$$a \geq \sqrt[3]{6 \cdot W_x} = \sqrt[3]{6 \cdot 1125} = 18,90 \text{ см.}$$

Принимаем [8] $a = 19$ см.

$$A^{kg} = a^2 = 19^2 = 361,0 \text{ см}^2.$$

4.3. Сравнение масс балок различных сечений:

$$m^{d/m} : m^{коль} : m^{np} : m^{кв} : m^{кп} = A^{d/m} : A^{коль} : A^{np} : A^{кв} : A^{кп} = \\ = 84,7 : 210,7 : 288 : 361 : 415,5 = 1 : 2,49 : 3,40 : 4,26 : 4,91.$$

Следовательно, при плоском изгибе самым экономичным является двутавровое сечение.

4.4 Полная проверка прочности балки двутаврового сечения.

1 – опасная точка: сечение **K** (см. рис. 4.7) – с наибольшим по абсолютной величине значением изгибающего момента $M = 180$ кНм, $Q = 0$.

$$\sigma^{(1)} = \frac{M}{J_x} y^{(1)} = \frac{180 \cdot 10^3}{27696 \cdot 10^{-8}} \cdot \left[-\left(\frac{450}{2} \right) \cdot 10^{-3} \right] = -146,2 \text{ МПа}$$

$$|\sigma^{(1)}| < [\sigma] \text{ – условие прочности выполняется.}$$

2 – опасная точка: сечение **Cⁿ** – с наибольшим по абсолютной величине значением поперечной силы. $Q = -120$ кН.

$$\tau^{(2)} = \frac{Q \cdot S_x^\#}{J_x \cdot b(y)} = \frac{-120 \cdot 10^3 \cdot 708 \cdot 10^{-6}}{27696 \cdot 10^{-8} \cdot 9,0 \cdot 10^{-3}} = -34,08 \text{ МПа,}$$

$$[\tau]_{IV} = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = \frac{160}{\sqrt{3}} = 92,38 \text{ МПа; } |\tau^{(2)}| < [\tau]_{IV}, \text{ – условие прочно-}$$

сти выполняется.

3 – опасная точка: сечение **Bⁿ** – с наибольшим сочетанием изгибающего момента и поперечной силы. $M = 100$ кНм, $Q = 80$ кН.

$$S_{x(3)}^{omc} = S_x^\# - \frac{1}{2} d \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 = 708 - \frac{1}{2} 0,9 \cdot \left(\frac{45}{2} - 1,42 \right)^2 = 508,0 \text{ см}^3;$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{M}{J_x} y^{(3)} = \frac{100 \cdot 10^3}{27696 \cdot 10^{-8}} \cdot \left[-\left(\frac{450}{2} - 14,2 \right) \cdot 10^{-3} \right] = -76,11 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{cm}^{(3)} = \frac{Q \cdot S_{x(3)}^{omc}}{J_x \cdot b(y)} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 508 \cdot 10^{-6}}{27696 \cdot 10^{-8} \cdot 9,0 \cdot 10^{-3}} = 16,30 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{экв_{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{76,11^2 + 3 \cdot 16,3^2} = 81,18 \text{ МПа} < [\sigma] \text{ – усло-}$$

вие прочности выполняется.

Из полной проверки прочности балки следует, что поперечные силы не оказывают существенного влияния на прочность длинных балок, поэтому при расчётах на прочность их не учитывают.

По результатам вычисления напряжений в третьей опасной точке строим эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте двутаврового сечения (рис. 4.8):

$$\tau_{\text{полк}}^{(3)} = \tau_{\text{см}}^{(3)} \frac{d}{b} = 16,3 \frac{9}{160} = 0,917 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{см}}^0 \frac{S_x^{\#}}{S_x^{\text{omc}}(3)} = 16,3 \frac{708}{508} = 22,72 \text{ МПа}.$$

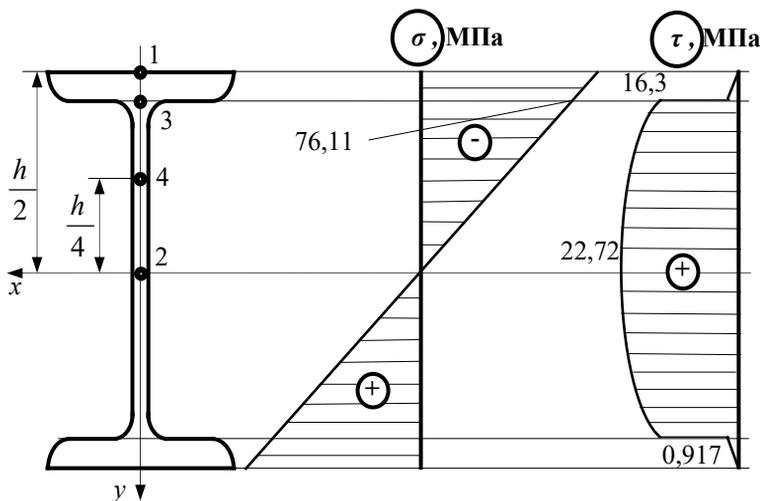


Рис. 4.8. Эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте двутаврового сечения

4.5. Исследование напряжённо-деформированного состояния в точке 4.

4.5.1. Определение напряжений.

$$\sigma^{(4)} = \frac{M}{J_x} y^{(4)} = \frac{100 \cdot 10^3}{27696 \cdot 10^{-8}} \cdot \left[- \left(\frac{450}{4} \right) \cdot 10^{-3} \right] = -40,62 \text{ МПа};$$

$$S_x^{\text{omc}}(4) = S_x^{\#} - d \cdot \frac{h}{4} \cdot \frac{h}{8} = 708 - 0,9 \cdot \frac{45^2}{32} = 651,0 \text{ см}^3;$$

$$\tau^{(4)} = \frac{Q \cdot S_{x(4)}^{omc}}{J_x \cdot b(y)} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 651 \cdot 10^{-6}}{27696 \cdot 10^{-8} \cdot 9,0 \cdot 10^{-3}} = 20,89 \text{ МПа.}$$

4.5.2 Напряжённое состояние в окрестности точки 4 (рис. 4.9).

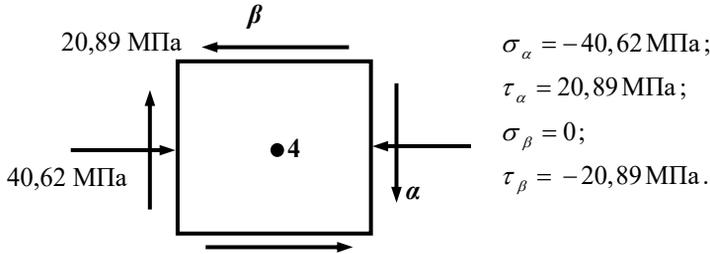


Рис. 4.9. Напряжённое состояние в точке 4

4.5.3 Определение главных напряжений и положения главных площадок аналитическим методом:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{II}} &= \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau_{\alpha}^2} = \\ &= \frac{-40,62}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{40,62^2 + 4 \cdot 20,89^2} = -20,31 \pm 29,14; \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{I}} = -20,31 + 29,14 = 8,83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{II}} = -20,31 - 29,14 = -49,45 \text{ МПа};$$

$$\text{tg } \alpha_0 = \frac{-\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\text{II}}} = \frac{-20,89}{-40,62 + 49,45} = -2,366; \quad \alpha_0 = -67,09^{\circ}.$$

Следовательно, $\sigma_1 = 8,83 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -49,45 \text{ МПа}$.

4.5.4 Определение главных напряжений и положения главных площадок графическим методом.

Строим круг Мора для заданного напряжённого состояния (рис. 4.10).

Из рис. 4.10: $\sigma_{\text{I}}^{sp} = OA \approx 9 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{II}}^{sp} = OB \approx -49 \text{ МПа}$;
 $\alpha_0^{sp} = \angle ABD'_{\alpha} \approx -70^{\circ}$.

4.4.5 Определение главных деформаций:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [8,83 - 0,3 \cdot (-49,45)] = 1,1833 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-0,3 \cdot (-49,45 + 8,83)] = 0,6093 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-49,45 - 0,3 \cdot (8,83)] = -2,6057 \cdot 10^{-4}.$$

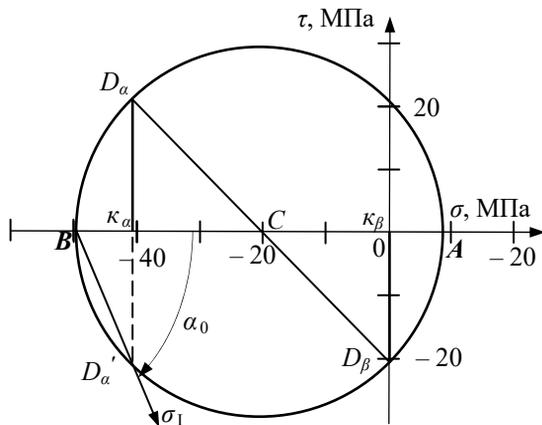


Рис. 4.10. Круг Мора для напряжений

4.5.6. Определение относительного изменения объёма детали в окрестности точки 4:

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1,1833 + 0,6093 - 2,6057) \cdot 10^{-4} = -0,8131 \cdot 10^{-4} -$$

объём уменьшается.

4.5.7. Определение удельной энергии деформации тела:

$$u_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] =$$

$$= \frac{10^{12}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} [8,83^2 + (-40,45)^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot (-40,45 \cdot 8,83)] = 4,821 \text{ кДж/м}^3.$$

4.5.8. Определение эквивалентных напряжений и проверка прочности:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} = \sqrt{(-40,62)^2 + 4 \cdot 20,89^2} = 58,15 \text{ МПа} < [\sigma] -$$

условие прочности выполняется.

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{(-40,62)^2 + 3 \cdot 20,89^2} = 54,40 \text{ МПа} < [\sigma] -$$

условие прочности выполняется.

Пример 5 Для балки, изображённой на рис. 4.11, построить эпюры Q и M и определить прогиб в середине пролёта и угол поворота сечения, расположенного над левой опорой при следующих данных: материал балки сталь Ст. 3, поперечное сечение двутавр № 30 а, $J_x = 7780 \text{ см}^4$. Построить уточнённую форму изогнутой оси балки.

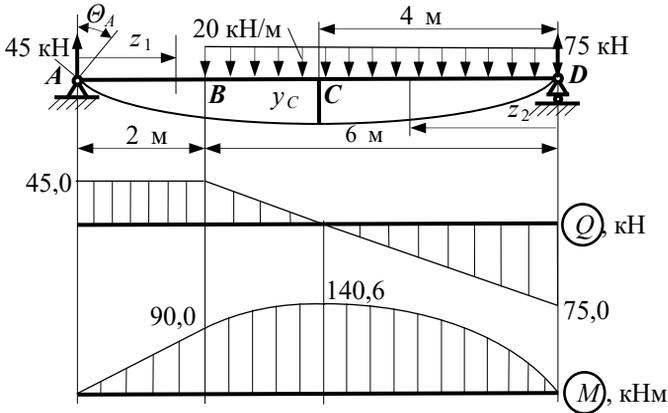


Рис. 4.11. Расчётная схема, эпюры внутренних сил и перемещения балки № 5

Как и в предыдущих балках, определяем реакции опор, строим эпюры Q , M .

Составляем дифференциальные уравнения изогнутой оси балки для каждого участка и дважды интегрируем их:

$$0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м}$$

$$E J_x y_1'' = 45 z_1,$$

$$E J_x y_1' = 22,5 z_1^2 + C_1, \quad (1)$$

$$E J_x y_1 = 7,5 z_1^3 + C_1 z_1 + D_1. \quad (2)$$

$$0 \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$$

$$E J_x y_2'' = 75 z_2 - 10 z_2^2,$$

$$E J_x y_2' = 37,5 z_2^2 - \frac{10}{3} z_2^3 + C_2, \quad (3)$$

$$E J_x y_2 = 12,5 z_2^3 - \frac{10}{12} z_2^4 + C_2 z_2 + D_2. \quad (4)$$

Постоянные интегрирования определяем из граничных условий:

I При $z_1 = 0$ $y_1 = 0$, $\rightarrow (2) \rightarrow D_1 = 0$;

II При $z_2 = 0$ $y_2 = 0$, $\rightarrow (4) \rightarrow D_2 = 0$;

III При $z_1 = 2$ м и $z_2 = 6$ м $y_1' = -y_2'$, $\rightarrow (1)$ и $(3) \rightarrow$

$$22,5 \cdot 2^2 + C_1 = -37,5 \cdot 6^2 + \frac{10}{3} \cdot 6^3 - C_2, \rightarrow$$

$$C_1 + C_2 = -720; \quad (5)$$

IV При $z_1 = 2$ м и $z_2 = 6$ м $y_1 = y_2$, $\rightarrow (2)$ и $(4) \rightarrow$

$$\rightarrow 7,5 \cdot 2^3 + C_1 \cdot 2 = 12,5 \cdot 6^3 - \frac{10}{12} \cdot 6^4 + C_2 \cdot 6, \rightarrow$$

$$2C_1 - 6C_2 = 1560. \quad (6)$$

Решая совместно уравнения (5) и (6) получим

$$C_1 = -345 \text{ кНм}^2, \quad C_2 = -375 \text{ кНм}^2.$$

Подставляем значения постоянных интегрирования в уравнения (1) – (4).

$$E J_x y_1' = 22,5 z_1^2 - 345, \quad (1')$$

$$E J_x y_1 = 7,5 z_1^3 - 345 z_1. \quad (2')$$

$$E J_x y_2' = 37,5 z_2^2 - \frac{10}{3} z_2^3 - 375, \quad (3')$$

$$E J_x y_2 = 12,5 z_2^3 - \frac{10}{12} z_2^4 - 375 z_2. \quad (4')$$

Определяем искомые перемещения:

$$y_C = y_2(4 \text{ м}) = \frac{10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7780 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(12,5 \cdot 4^3 - \frac{10}{12} \cdot 4^4 - 375 \cdot 4 \right) = -58,70 \text{ мм.}$$

Знак минус означает, что сечение C перемещается вниз.

$$\theta_A = y_1'(0) = \frac{10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7780 \cdot 10^{-8}} \cdot (-345) = -0,02217 \text{ рад.}$$

Знак минус означает, что сечение A поворачивается по направлению часовой стрелки, если ось z направлена слева направо.

По эпюре изгибающих моментов, с учётом условий закрепления и знаков постоянных интегрирования, строим уточнённую изогнутую ось балки (см. рис. 4.11).

4.5. Контрольные вопросы

1. Как определяют поперечную силу и изгибающий момент в произвольном сечении балки?
2. Какие зависимости используют для контроля эпюр поперечных сил и изгибающих моментов?
3. Как распределяются нормальные и касательные напряжения по высоте балки?
4. Какие напряжения называют главными и какими свойствами они обладают?
5. Как вычисляют наибольшие касательные напряжения и на каких площадках они действуют?
6. Как с помощью круга Мора определяют величину и направление главных напряжений?
7. Из каких условий определяют постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений изогнутой оси балки?

5. РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ

5.1. Задание

Заданы схемы плоской статически определимой рамы (рис. 5.1, 5.2), размеры участков и действующие нагрузки (табл. 5.1).

Требуется:

- построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов;
- подобрать размеры поперечного сечения;
- определить линейное и угловое перемещения заданного сечения рамы.

В пояснительной записке следует представить схему рамы, выполненную в масштабе, эпюры поперечных сил, нормальных сил и изгибающих моментов, эпюры от единичных нагрузок, а также все необходимые расчёты.

5.2. Порядок выполнения работы

1. По данным табл. 5.1, соответствующим заданному шифру, изображают в масштабе схему рамы (см. рис. 5.1 или 5.2).

Примечание: номер рисунка задаётся преподавателем.

2. Определяют реакции опор рамы.

3. Строят эпюры нормальных сил N , поперечных сил Q и изгибающих моментов M на каждом участке рамы. Для криволинейных участков предварительно записывают аналитические выражения для N , Q и M .

4. Подбирают размеры поперечного сечения рамы из условия прочности при изгибе по нормальным напряжениям. В расчётах учитывают, что материал рамы – Ст. 3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа.

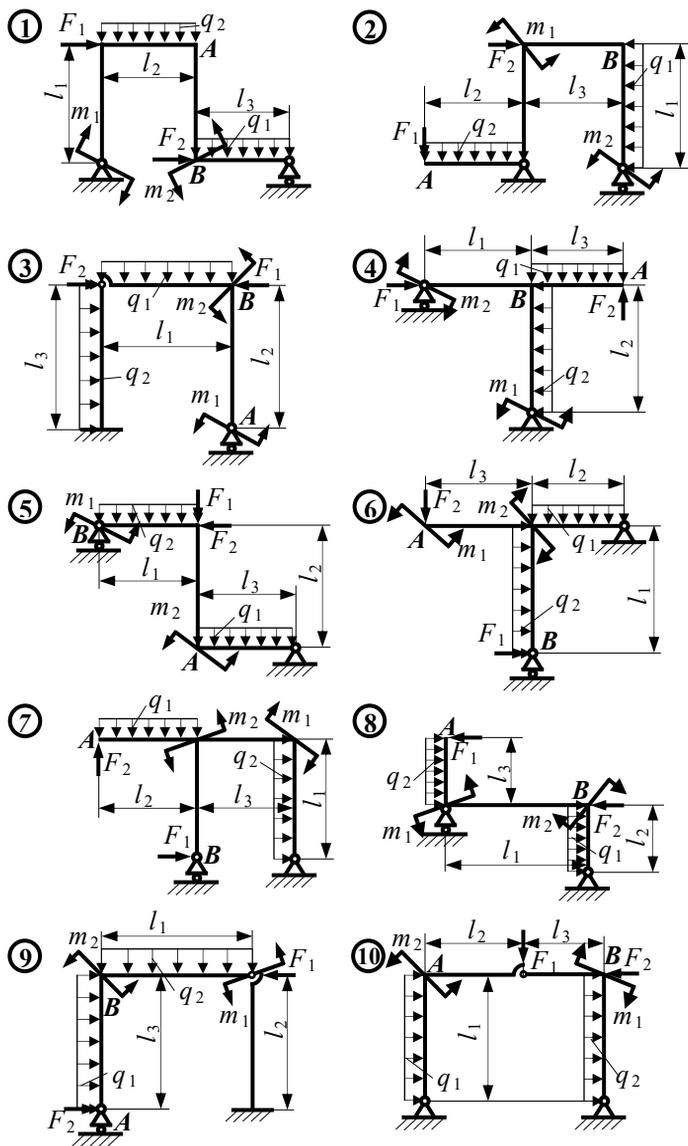


Рис. 5.1. Статически определимые рамы с прямолинейными участками

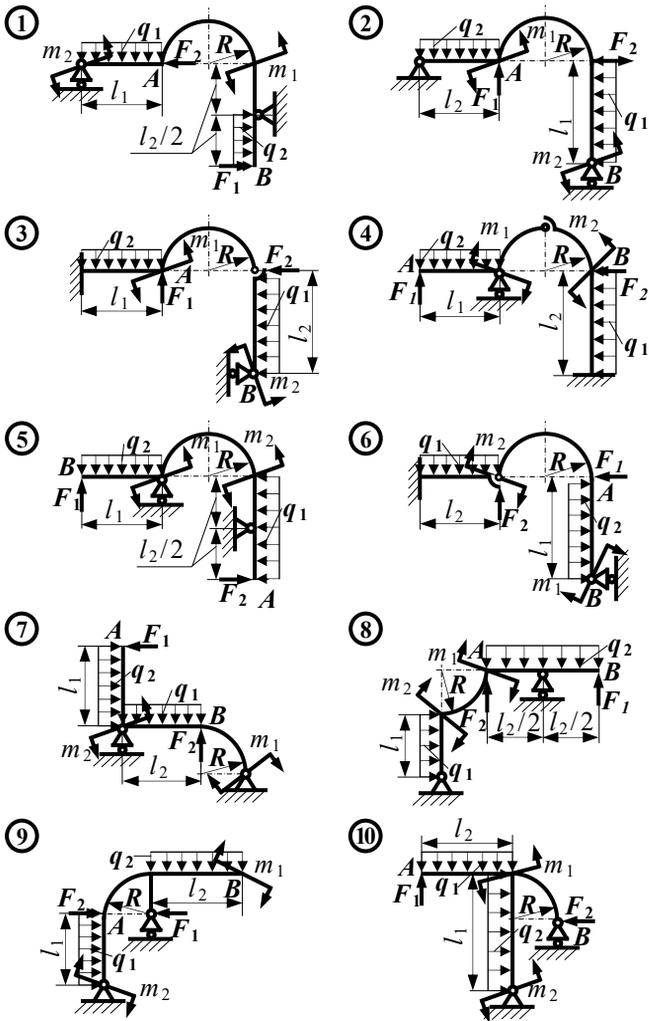


Рис. 5.2. Статически определимые рамы с криволинейными участками

Таблица 5.1 – Параметры для статически определимых рам

№ строки	№ схемы	$m_1, \text{кН}\cdot\text{м}$	$m_2, \text{кН}\cdot\text{м}$	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$q_1, \text{кН/м}$	$q_2, \text{кН/м}$	$l_1, \text{м}$	$l_2, \text{м}$	$l_3, \text{м}$	$R, \text{м}$	Сечение	Форма поперечного сечения
1	4	20	0	40	0	15	0	3	2	4	1	A	I – двутавр
2	1	0	40	0	30	0	20	4	3	2	1,5	B	J L – два неравнополочных уголка
3	7	-50	0	30	0	10	0	2	4	4	2	A	II – два двутавра
4	2	0	-40	0	20	0	-15	3	2	2	2,5	B	o – круг
5	3	30	0	-20	0	-10	0	4	4	2	1	A	II – два швеллера
6	10	0	-30	0	-30	0	10	2	3	4	1,5	B	□ – квадрат
7	8	40	0	-30	0	20	0	2	2	4	2	A	□ – два швеллера
8	5	0	-20	0	40	0	-20	3	3	2	2,5	B	II – два швеллера
9	9	-30	0	-40	0	-15	0	5	4	3	1	A	□ – четыре равнополочных уголка
0	6	0	30	0	-20	0	15	3	5	4	2	B	I – двутавр
	a	b						e		e			

5. Проверяют прочность выбранного сечения с учётом действия нормальной силы.

6. Определяют линейные и угловые перемещения в заданном сечении A или B рамы с помощью интеграла Мора. На прямолинейных участках интегралы вычисляют способом Верещагина.

5.3. Пример выполнения работы

Для рамы, изображённой на рис. 5.3, построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать размеры поперечного сечения и определить линейные и угловые перемещения сечения A при следующих данных: $q = 20$ кН/м, $m = 40$ кН·м, $l = R = 2$ м, поперечное сечение – два швеллера – [I].

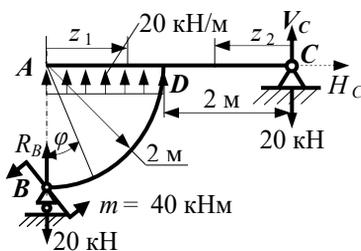


Рис. 5.3. Расчётная схема рамы

Определяем реакции опор:

$$\sum M_C = -V_B \cdot 4 + 40 - 20 \cdot 2 \cdot 3 = 0, \Rightarrow V_B = -20 \text{ кН};$$

$$\sum x = H_C = 0;$$

$$\sum M_B = V_C \cdot 4 + 40 + 20 \cdot 2 \cdot 1 = 0, \Rightarrow V_C = -20 \text{ кН}.$$

Проводим проверку:

$$\sum y = -20 + 20 \cdot 2 - 20 = 40 - 40 \equiv 0.$$

Строим эпюру нормальных сил (рис. 5.4, a).

На участке BD

$$N(\varphi) = -V_B \sin \varphi = 20 \sin \varphi,$$

$$\text{при } \varphi = 0 \quad N = 0, \text{ при } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad N = 20 \text{ кН}.$$

На других участках нормальные силы отсутствуют.

Строим эпюру поперечных сил Q (рис. 5.4, б).

На участке BD

$$Q(\varphi) = V_B \cos \varphi = -20 \cos \varphi,$$

$$\text{при } \varphi = 0 \quad Q = -20 \text{ кН}, \quad \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad Q = 0.$$

На участке CD $Q = 20 \text{ кН} = \text{const.}$

На участке AD $Q = q \cdot z_1 = 20z_1$, при $z_1 = 0$ $Q = 0$, при $z_1 = 2 \text{ м}$

$Q = 40 \text{ кН}$.

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 5.4, в).

На участке BD

$$M(\varphi) = m - V_B \cdot R \cdot \sin \varphi = 40 + 20 \cdot 2 \cdot \sin \varphi = 40 + 40 \sin \varphi,$$

$$\text{при } \varphi = 0 \quad M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad M = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{На участке } AD \quad M = \frac{q \cdot z_1^2}{2} = \frac{20 \cdot z_1^2}{2} = 10z_1^2 \quad \text{при } z_1 = 0 \quad M = 0, \quad \text{при}$$

$z_1 = 2 \text{ м} \quad M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

На участке CD $M = -20z_2$ при $z_2 = 0$ $M = 0$, при $z_2 = 2 \text{ м}$

$M = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

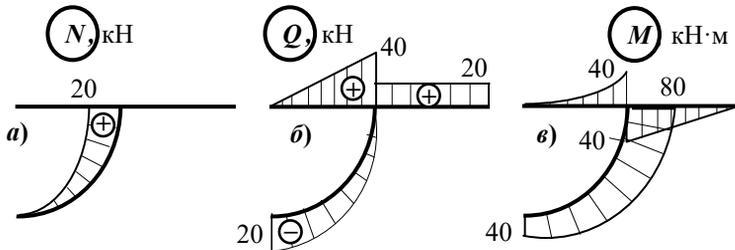


Рис. 5.4. Эпюры внутренних усилий

Подбираем поперечное сечение, составленное из двух швеллеров,

$$\text{из условия прочности только при изгибе: } \frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

$$\text{где } W_x^{\parallel} = \frac{J_x^{\parallel}}{|y|_{\text{наиб}}} = \frac{2 \cdot J_x^{\perp}}{|y|_{\text{наиб}}} = 2 \cdot W_x^{\perp}.$$

$$\text{Тогда } W_x^{\perp} \geq \frac{|M|_{\text{наиб}}}{2 \cdot [\sigma]} = \frac{80 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6} = 250 \text{ см}^3.$$

Полученному значению удовлетворяет швеллер № 24а с характеристиками: $W_x^{\perp} = 265 \text{ см}^3$, $J_x^{\perp} = 3180 \text{ см}^4$, $A^{\perp} = 32,9 \text{ см}^2$.

Проверяем подобранное сечение по полному условию прочности:

$$|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{2 \cdot W_x^{\perp}} + \frac{|N|}{2 \cdot A^{\perp}} = \frac{80 \cdot 10^3}{2 \cdot 265 \cdot 10^{-6}} + \frac{20 \cdot 10^3}{2 \cdot 32,9 \cdot 10^{-4}} = 154,0 \text{ МПа} < [\sigma]$$

– условие прочности выполняется.

Определяем вертикальное перемещение сечения A . Для этого прикладываем в направлении искомого перемещения единичную силу, определяем реакции опор от единичного нагружения и строим эпюру изгибающих моментов \overline{M}_1 (рис. 5.5, а).

На участке BD интеграл Мора вычисляем непосредственно; на участке AD – способом Верещагина; на участке CD интеграл равен нулю:

$$E \cdot J_x \cdot \Delta_1 = \int_{BD} M \cdot \overline{M}_1 dz + \int_{AD} M \cdot \overline{M}_1 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (40 + 40 \sin \varphi) \cdot 2 \sin \varphi \cdot 2 d\varphi + \frac{1}{3} 40 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 = 4 \cdot \left(40 \cdot 1 + 40 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + 40 = 325,7 \text{ кНм}^3;$$

$$\Delta_1 = y_A = \frac{325,7 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 3180 \cdot 10^{-8}} = 25,60 \text{ мм}.$$

Знак «плюс» указывает на то, что направление искомого перемещения совпадает с направлением единичной силы, т.е. сечение A перемещается вверх.

Для определения горизонтального перемещения сечения A прикладываем горизонтальную единичную силу. Горизонтальное перемещение сечения A равно нулю, т. к. эпюры \overline{M}_2 – нулевые (рис. 5.5, б).

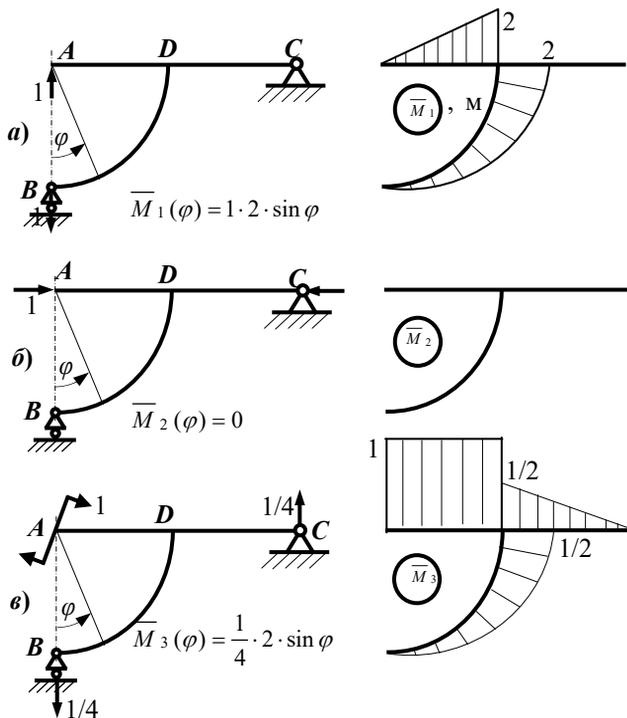


Рис. 5.5. Эпюры моментов от единичных нагружений

Определим угол поворота сечения A . Для этого приложим в сечении A единичный момент, определим реакции опор от единичного нагружения и построим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_3 (рис. 5.5, в).

Вычисляем интеграл Мора:

$$\begin{aligned}
 E \cdot J_x \cdot \Delta_2 &= \int_{BD} M \cdot \bar{M}_3 dz + \int_{AD} M \cdot \bar{M}_3 dz + \int_{CD} M \cdot \bar{M}_3 dz = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (40 + 40 \sin \varphi) \cdot \frac{1}{2} \sin \varphi \cdot 2 d\varphi + \frac{1}{3} 40 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} 40 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \\
 &= 1 \cdot \left(40 \cdot 1 + 40 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + \frac{80}{3} - \frac{40}{3} = 84,75 \text{ кНм}^2;
 \end{aligned}$$

$$\theta_A = \frac{84,75 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 3180 \cdot 10^{-8}} = 6,663 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Знак «плюс» указывает на то, что поворот сечения совпадает с направлением единичного момента (см. рис. 5.5, в), т.е. сечение A поворачивается по часовой стрелке.

5.4 Контрольные вопросы

1. Какую конструкцию называют плоской рамой?
2. Как определяют внутренние усилия в плоской раме?
3. Какие правила знаков используют при определении внутренних усилий в плоской раме?
4. Из какого условия подбирают поперечное сечение плоской рамы?
5. Как записывается полное условие прочности для плоской рамы?
6. Как записывается интеграл Мора при определении перемещений в плоских рамах?
7. В чём заключается способ Верещагина для вычисления интеграла Мора?
8. В чём заключается разница вычисления угловых и линейных перемещений с помощью интеграла Мора?
9. Как и для чего строят расслоенные эпюры?

6. РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ

6.1. Задание

Заданы схемы статически неопределимой рамы (рис. 6.1, 6.2), размеры и действующие нагрузки (табл. 6.1).

Требуется:

- раскрыть статическую неопределимость;
- провести генеральную проверку правильности раскрытия статической неопределимости;
- построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов;
- подобрать размеры поперечного сечения, составленного из двух швеллеров.

В пояснительной записке следует представить схему рамы, изображённую в масштабе, основную и эквивалентную системы, эпюры изгибающих моментов от заданных и единичных нагрузок с соответствующими схемами нагружения, эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов, а также все необходимые расчёты.

6.2. Порядок выполнения работы

1. По данным табл. 6.1 изображают в масштабе схему рамы (рис. 6.1 или рис. 6.2), соответствующую заданному шифру.

Примечание: номер рисунка задаётся преподавателем.

2. Определяют степень статической неопределимости рамы, отбрасывают «лишние» связи и изображают основную (ОС) и эквивалентную (ЭС) системы. Записывают канонические уравнения метода сил.

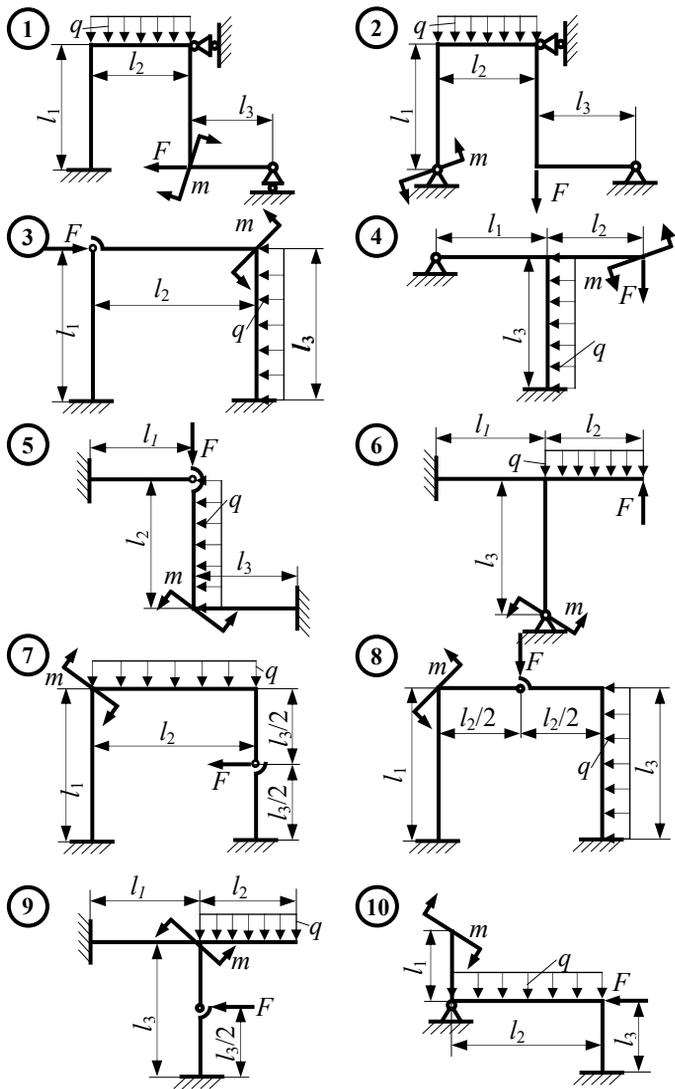


Рис. 6.1. Статически неопределимые рамы с прямолинейными участками

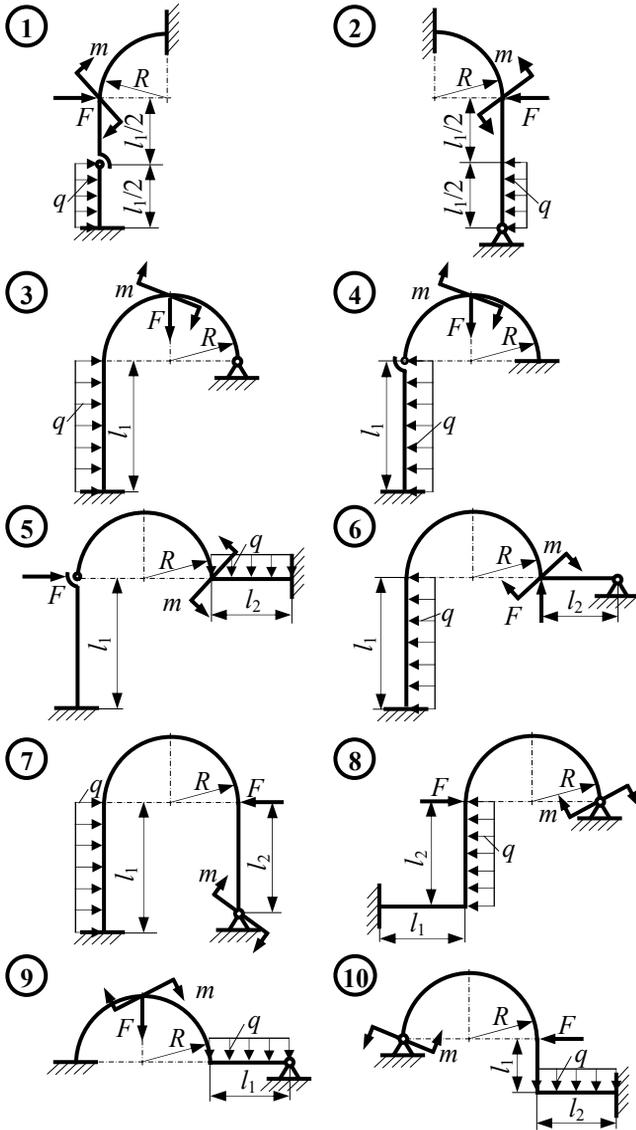


Рис. 6.2. Статически неопределимые рамы с криволинейными участками

Таблица 6.1 – Параметры статически неопределимых рам

№ строки	№ схемы	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	R , м	q , кН/м	F , кН	m_b , кН·м
1	1	1	2	3	2	15	20	0
2	2	2	4	1	3	20	0	-40
3	3	3	2	4	4	25	-40	0
4	4	1	3	2	2	30	0	20
5	5	2	4	3	3	35	60	0
6	6	3	3	4	4	40	0	40
7	7	4	2	3	2	15	-30	0
8	8	1	3	3	3	20	0	-20
9	9	2	4	4	4	25	50	0
0	10	3	2	2	2	30	0	30
	a	b	e	z	δ		e	

3. Изображают схемы нагружения основной системы заданными нагрузками и отдельно, единичными усилиями по направлению отброшенных связей. Строят соответствующие эпюры изгибающих моментов.

4. Вычисляют коэффициенты и свободные члены канонических уравнений. На прямолинейных участках интегралы Мора вычисляют по способу Верещагина, на криволинейных – путём непосредственного интегрирования.

5. Решают канонические уравнения метода сил и определяют неизвестные усилия.

6. Определяют реакции опор в эквивалентной системе и проводят генеральную проверку решения, заключающуюся в определении перемещений в новой эквивалентной системе по направлению новых отброшенных связей. Решение верно, если эти перемещения равны нулю. Допускаемая погрешность решения – не более 3%.

7. Строят эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для заданной рамы.

8. Подбирают поперечное сечение рамы, составленное из двух швеллеров, из условия прочности только при изгибе. В расчётах учитывают, что материал рамы – Ст.3 с $[\sigma] = 160$ МПа.

9. Проверяют прочность выбранного сечения с учётом действия нормальной силы.

6.3. Пример выполнения работы

Для рамы, изображённой на рис. 6.3, *a*, раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов, а также подобрать поперечное сечение, составленное из двух швеллеров, при следующих данных: $m = 40$ кН·м, $q = 60$ кН/м, $l = 2$ м, $R = 2$ м, $[\sigma] = 160$ МПа.

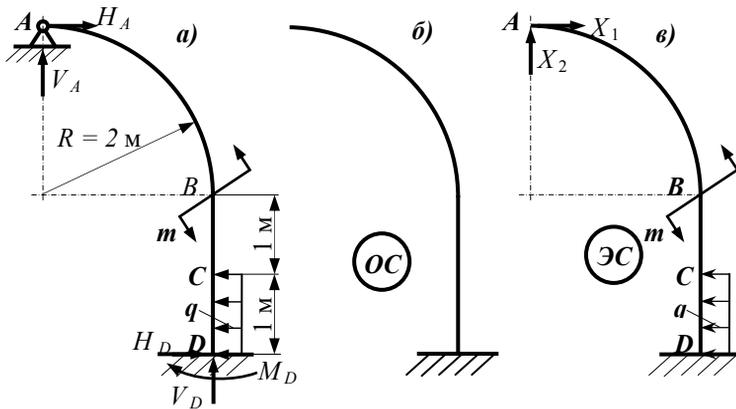


Рис. 6.3. Расчётная схема, основная и эквивалентная системы статически неопределимой рамы

Рама два раза статически неопределима. За лишние неизвестные принимаем реакции опоры A , изображаем основную (рис. 6.3, б) и эквивалентную системы (рис. 6.3, в). Записываем канонические уравнения метода сил:

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} &= 0. \end{aligned}$$

Нагружаем основную систему только заданными нагрузками (рис. 6.4, а) и отдельно – единичными нагрузками, соответствующими отброшенным связям (рис. 6.4, б, в).

Строим эпюры изгибающих моментов M_F , \overline{M}_1 и \overline{M}_2 (рис. 6.4, г). На прямолинейных участках эпюры раскладываем. На криволинейных участках записываем аналитические выражения для изгибающих моментов.

Вычисляем коэффициенты и свободные члены канонических уравнений. Интеграл Мора на участке AB вычисляем непосредственно, на участке BD – по способу Верещагина:

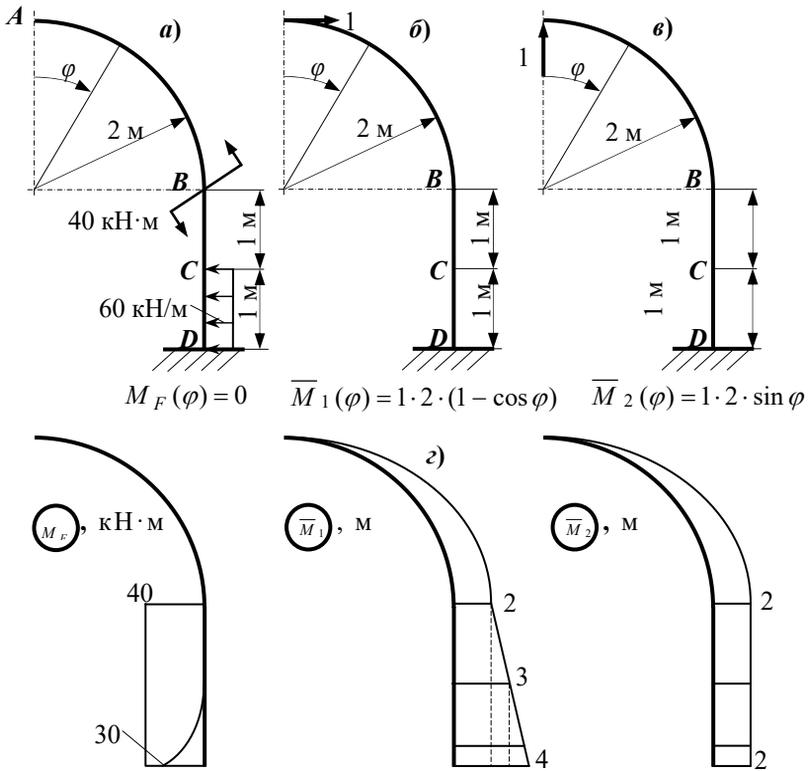


Рис. 6.4. Схемы нагружения и эпюры изгибающих моментов для определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

$$\begin{aligned}
 E \cdot J_x \cdot \delta_{11} &= \int_{AB} \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 dz + \int_{BD} \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^2 (1 - \cos \varphi)^2 \cdot 2 d\varphi + 2 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = 8 \cdot \left(\frac{3}{4} \pi - 2 \right) + 12 + \frac{20}{3} = 21,52 \text{ м}^3;
 \end{aligned}$$

$$E \cdot J_x \cdot \delta_{22} = \int_{AB} \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2 dz + \int_{BD} \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^2 \sin^2 \varphi \cdot 2 d\varphi + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 = 14,28 \text{ м}^3;$$

$$E \cdot J_x \cdot \delta_{12} = \int_{AB} \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 dz + \int_{BD} \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1 - \cos\varphi) \cdot 2\sin\varphi \cdot 2d\varphi + 2 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) =$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} + 12 = 16,00 \text{ м}^3 = E \cdot J_x \cdot \delta_{21};$$

$$E J_x \Delta_{1F} = \int_{AB} M_F \cdot \overline{M}_1 dz + \int_{BD} M_F \cdot \overline{M}_1 dz = 0 - \frac{1}{3} 30 \cdot 1 \cdot \left(3 + \frac{3}{4} \cdot 1 \right) - 40 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) =$$

$$= -37,5 - 240 = -277,5 \text{ кНм}^3;$$

$$E J_x \Delta_{2F} = \int_{AB} M_F \cdot \overline{M}_2 dz + \int_{BD} M_F \cdot \overline{M}_2 dz = 0 - \frac{1}{3} 30 \cdot 1 \cdot 2 - 40 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= -20 - 160 = -180,0 \text{ кНм}^3.$$

Подставляем найденные значения коэффициентов в канонические уравнения:

$$21,52 \cdot X_1 + 16 \cdot X_2 - 277,5 = 0;$$

$$16 \cdot X_1 + 14,28 \cdot X_2 - 180 = 0.$$

Совместное решение уравнений даёт $X_1 = 21,10 \text{ кН}$, $X_2 = -11,04 \text{ кН}$. Подстановкой значений X_1 и X_2 в канонические уравнения убеждаемся, что уравнения решены верно.

$$21,52 \cdot 21,1 - 16 \cdot 11,04 - 277,5 = 454,072 - 454,14 = 0,068 \approx 0;$$

$$16 \cdot 21,1 - 14,28 \cdot 11,04 - 180 = 337,6 - 337,6512 = 0,0512 \approx 0.$$

Определяем с помощью уравнений статики реакции опор в эквивалентной системе от заданных нагрузок и найденных значений X_1 , X_2 (рис. 6.5, а).

Проводим генеральную проверку решения. Для этого выбираем новую основную систему (рис. 6.5, б), отбрасывая в опоре D две лишние связи, препятствующие повороту сечения и линейному перемещению по горизонтали. Изображаем новую эквивалентную систему (рис. 6.5, в).

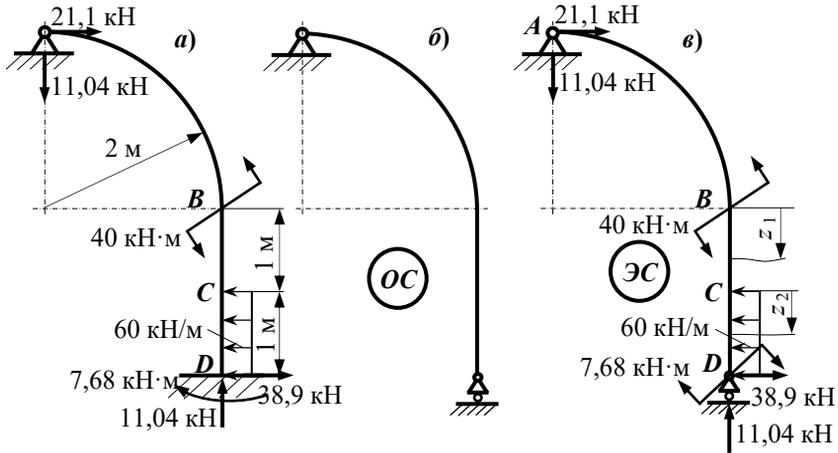


Рис. 6.5. Исходная рама, новые основная и эквивалентная системы

Вычисляем в новой эквивалентной системе угловое перемещение сечения D отдельно от заданных нагрузок и отдельно – от новых «неизвестных». Для этого изображаем схемы нагружения новой основной системы заданными нагрузками (рис. 6.6, a), отброшенными силами реакции (рис. 6.6, b) и единичной парой сил, приложенной в сечении D (рис. 6.6, v), и строим эпюры изгибающих моментов M_a , M_x и \bar{M}_3 (рис. 6.6, z), предварительно вычислив реакции опор в каждой из схем.

Вычисляем угловое перемещение сечения D от заданных сил и новых неизвестных.

$$EJ_x \Delta_a = \int_{AB} M_a \cdot \bar{M}_3 dz + \int_{BD} M_a \cdot \bar{M}_3 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [170 \sin \varphi - 120(1 - \cos \varphi)] \cdot \sin \varphi \cdot 2 d\varphi + \\ + \frac{1}{3} 30 \cdot 1 \cdot 1 + 30 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} 60 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \cdot \left(170 \cdot \frac{\pi}{4} - 120 \cdot \frac{1}{2} \right) + 70,0 = 217,04 \text{ кН м}^2 ;$$

$$EJ_x \Delta_x = \int_{AB} M_x \cdot \bar{M}_3 dz + \int_{BD} M_x \cdot \bar{M}_3 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [77,8(1 - \cos \varphi) - 147,92 \sin \varphi] \cdot \sin \varphi \cdot 2 d\varphi + \\ + 1 \cdot 2 \cdot \left(7,68 - \frac{1}{2} \cdot 77,8 \right) = 2 \cdot \left(77,8 \cdot \frac{1}{2} - 147,92 \cdot \frac{\pi}{4} \right) - 62,44 = -216,99 \text{ кН м}^2 .$$

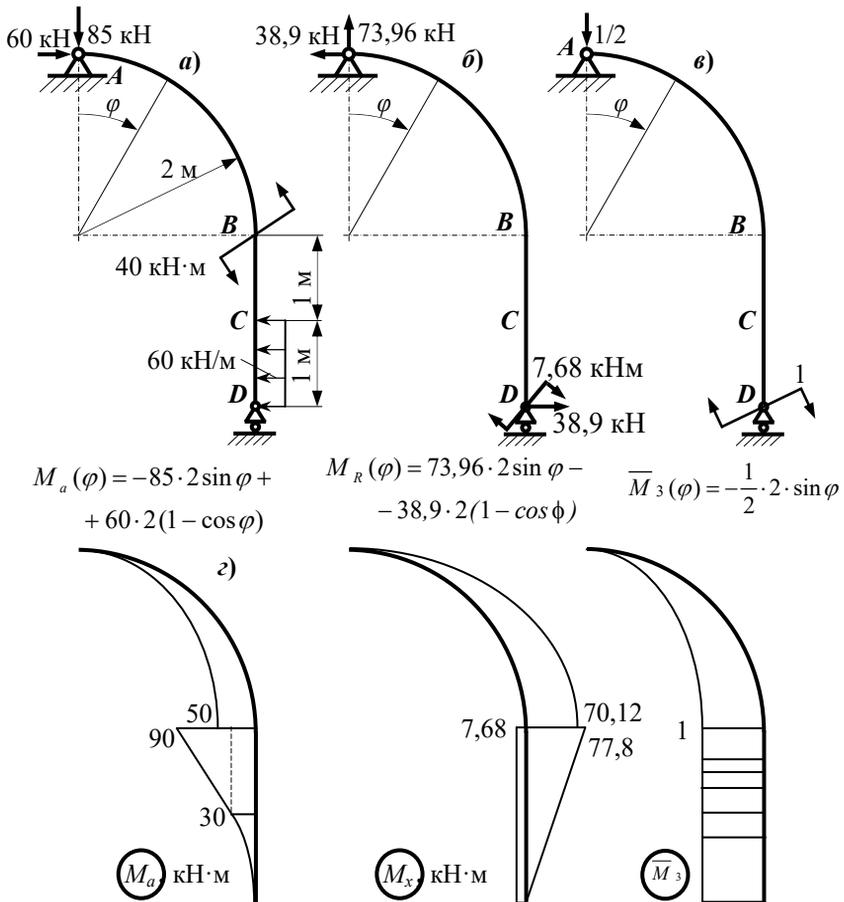


Рис. 6.6. Нагрузки и эпюры изгибающих моментов для генеральной проверки

Определяем относительную погрешность решения:

$$\frac{|EJ_x \Delta_a + EJ_x \Delta_x|}{EJ_x \Delta_a} \cdot 100\% = \frac{217,04 - 216,99}{217,04} \cdot 100\% = 0,438\% < 3\%.$$

Погрешность решения менее 3%, следовательно, статическая неопределимость раскрыта верно.

Аналогично определяется горизонтальное перемещение сечения D и вычисляется вторая погрешность через горизонтальное перемещение сечения D .

Строим эпюры N , Q и M для рамы (рис. 6.7) в эквивалентной системе (см. рис. 6.5, в).

Нормальная сила на участке AB :

$$N(\varphi) = -21,1 \cdot \cos \varphi - 11,04 \cdot \sin \varphi,$$

при $\varphi = 0$ $N = -21,1$ кН, при $\varphi_0 = 27,62^\circ$ $N_s = -23,81$ кН,

при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $N = -11,04$ кН.

На участках BC и CD $N = -11,04$ кН = const.

Поперечная сила на участке AB

$$Q(\varphi) = -11,04 \cdot \cos \varphi + 21,1 \cdot \sin \varphi,$$

при $\varphi = 0$ $Q = -11,04$ кН, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $Q = 21,1$ кН.

Определяем угол φ_0 , при котором $Q = 0$:

$$0 = -11,04 \cdot \cos \varphi_0 + 21,1 \cdot \sin \varphi_0,$$

откуда $\varphi_0 = 27,62^\circ$.

На участке BC $Q = 21,1$ кН = const.

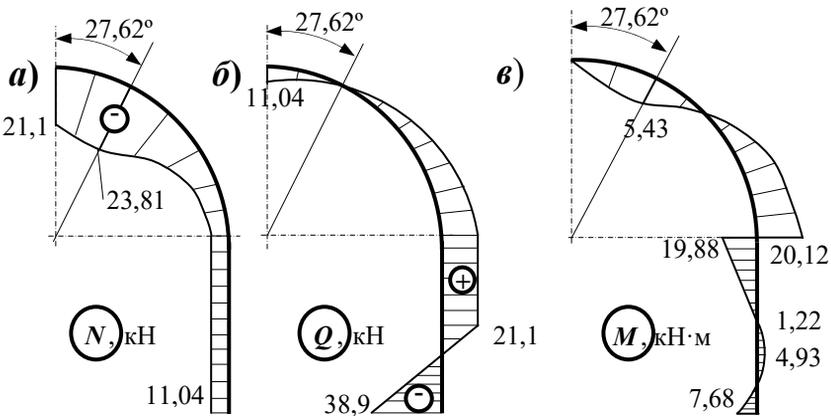


Рис. 6.7. Эпюры внутренних усилий в эквивалентной системе

На участке CD $Q = 21,1 - 60 \cdot z_2$, при $z_2 = 0$ $Q = 21,1$ кН,
 при $z_2 = 1$ м $Q = -38,9$ кН.

Определяем расстояние z_0 , при котором $Q = 0$: $0 = 21,1 - 60 \cdot z_0$,

откуда $z_0 = 0,352$ м.

Изгибающий момент на участке AB :

$$M(\varphi) = 21,1 \cdot 2 \cdot (1 - \cos \varphi) - 11,04 \cdot 2 \cdot \sin \varphi,$$

при $\varphi = 0$ $M = 0$, при $\varphi_0 = 27,62^\circ$ $M_0 = -5,43$ кН·м,

при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $M = 20,12$ кН·м.

На участке BC $M = 21,1 \cdot (2 + z_1) - 11,04 \cdot 2 - 40$,

при $z_1 = 0$ $M = -19,88$ кН·м, при $z_1 = 1$ м $M = 1,22$ кН·м.

На участке CD $M = 21,1 \cdot (3 + z_2) - 11,04 \cdot 2 - 40 - \frac{60z_2^2}{2}$,

при $z_2 = 0$ $M = 1,22$ кН·м, при $z_2 = 1$ м $M = -7,68$ кН·м,

при $z_2 = 0,352$ м $M_0 = 4,93$ кН·м.

Из условия прочности только при изгибе подбираем поперечное сечение, составленное из двух швеллеров: $\frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \leq [\sigma]$,

$$\text{где } W_x^{\text{II}} = \frac{J_x^{\text{II}}}{|y|_{\text{наиб}}} = \frac{2 \cdot J_x^{\text{I}}}{|y|_{\text{наиб}}} = 2 \cdot W_x^{\text{I}}.$$

$$\text{Тогда } W_x^{\text{I}} = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{2 \cdot [\sigma]} = \frac{20,12 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6} = 62,88 \text{ см}^3.$$

Полученному значению удовлетворяет швеллер № 14 а с характеристиками: $W_x^{\text{I}} = 70,2 \text{ см}^3$, $A^{\text{I}} = 15,6 \text{ см}^2$.

Проверяем подобранное сечение по полному условию прочности:

$$|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{2 \cdot W_x^I} + \frac{|N|}{2 \cdot A^I} = \frac{20,12 \cdot 10^3}{2 \cdot 70,2 \cdot 10^{-6}} + \frac{11,04 \cdot 10^3}{2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4}} = 146,8 \text{ МПа} < [\sigma] -$$

условие прочности выполняется.

6.4. Контрольные вопросы

1. Какие рамы называются статически неопределимыми?
2. Как определяют степень статической неопределимости рамы?
3. Какую систему называют основной?
4. Каким требованиям должна удовлетворять основная система?
5. Какую систему называют эквивалентной?
6. Что выражают собой канонические уравнения метода сил?
7. Как определяют коэффициенты канонических уравнений?
8. В чём заключается генеральная проверка правильности раскрытия статической неопределимости?
9. Из какого условия прочности подбирают размеры поперечного сечения рамы?
10. Как записывается полное условие прочности для плоской рамы?

7. РАСЧЁТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО БРУСА

7.1. Задание

Заданы схема бруса (рис. 7.1), размеры и действующие силы (табл. 7.1). На участке AB поперечное сечение – кольцевое ($\alpha = d/D$), BC – прямоугольное с размерами $h \times b$, CD – квадратное с размером $a \times a$.

Требуется:

- построить эпюры внутренних усилий: N , M_x , M_y , M_k ;
- подобрать размеры поперечного сечения каждого участка;
- изобразить схемы нагружения опасных сечений всех участков, построить эпюры нормальных и касательных напряжений по контуру прямоугольного и квадратного сечений, проверить прочность каждого участка бруса с учётом всех силовых факторов;
- определить линейное перемещение сечения D по направлению наибольшей силы.

В пояснительной записке следует представить схему бруса, изображённую в масштабе, эпюры внутренних усилий от заданных и единичных сил, схемы нагружения опасных сечений каждого участка, эпюры нормальных и касательных напряжений по контуру прямоугольного и квадратного сечений, а также все необходимые расчёты.

7.2. Порядок выполнения работы

1. По данным табл. 7.1 изображают в масштабе схему бруса, соответствующего заданному шифру.

Примечание: Номер схемы соответствует номеру студента в групповом журнале.

2. Изображают оси координат на каждом участке, ось z направляют от заделки, а направление осей x , y выбирают такими, чтобы получить правую систему координат.

3. Строят эпюры внутренних усилий на каждом участке бруса.

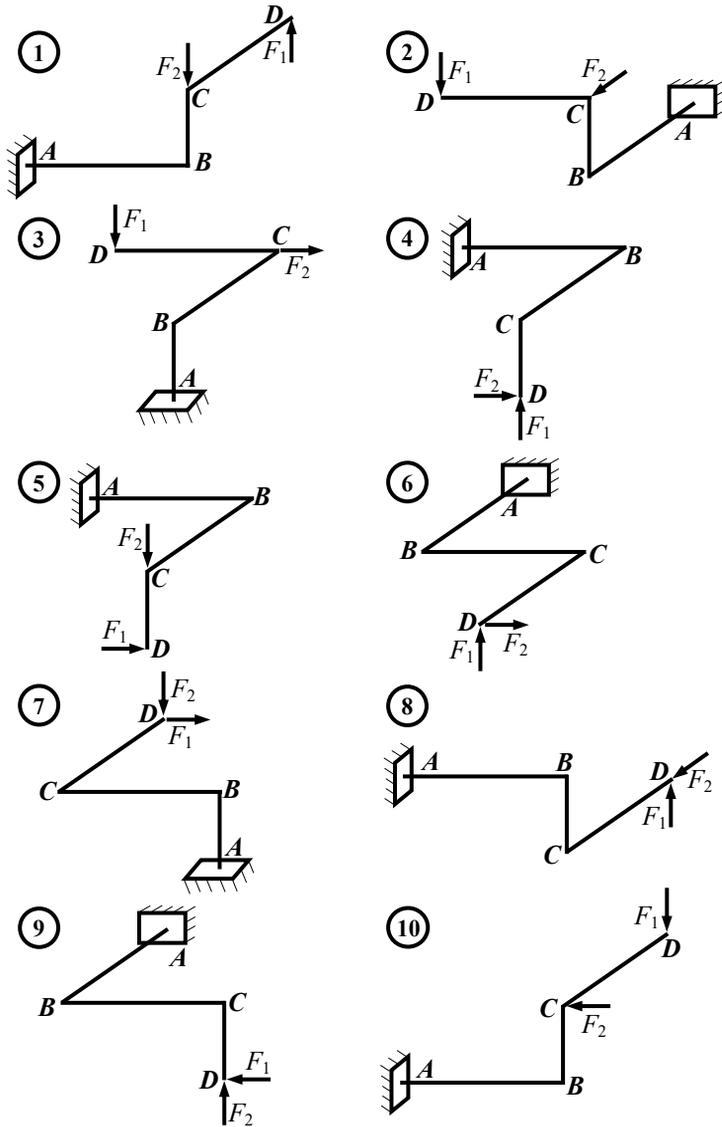


Рис. 7.1. Схемы пространственных брусьев
(см. также с. 69 и 70)

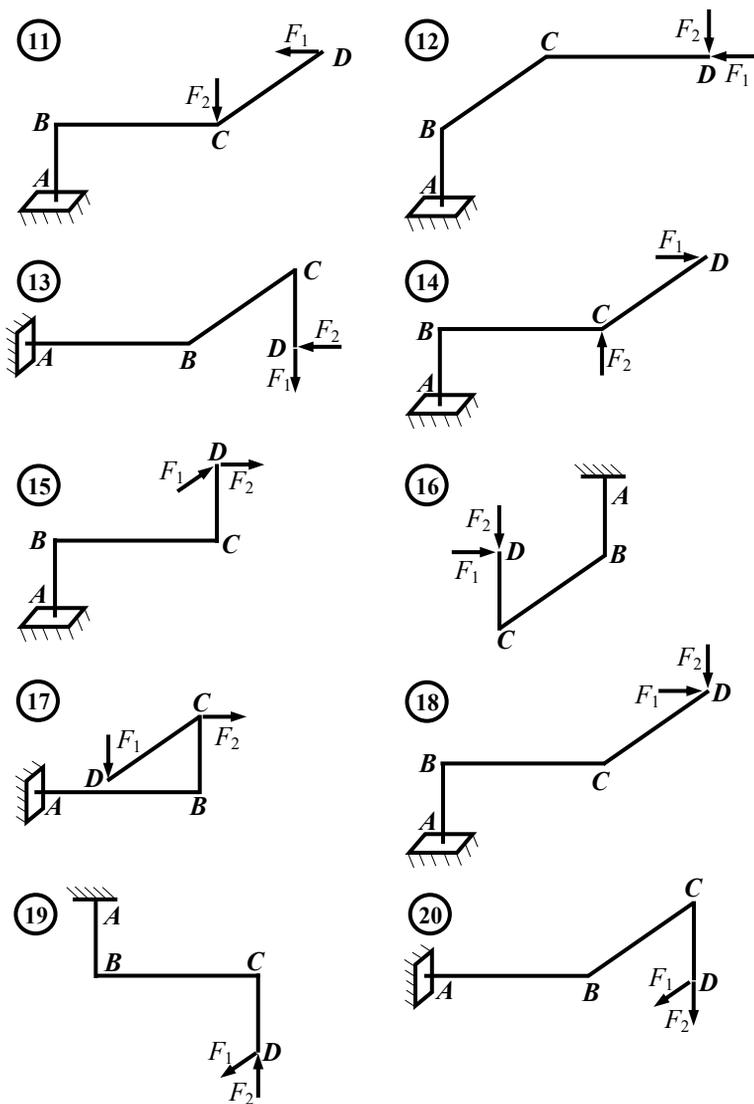


Рис. 7.1. Продолжение

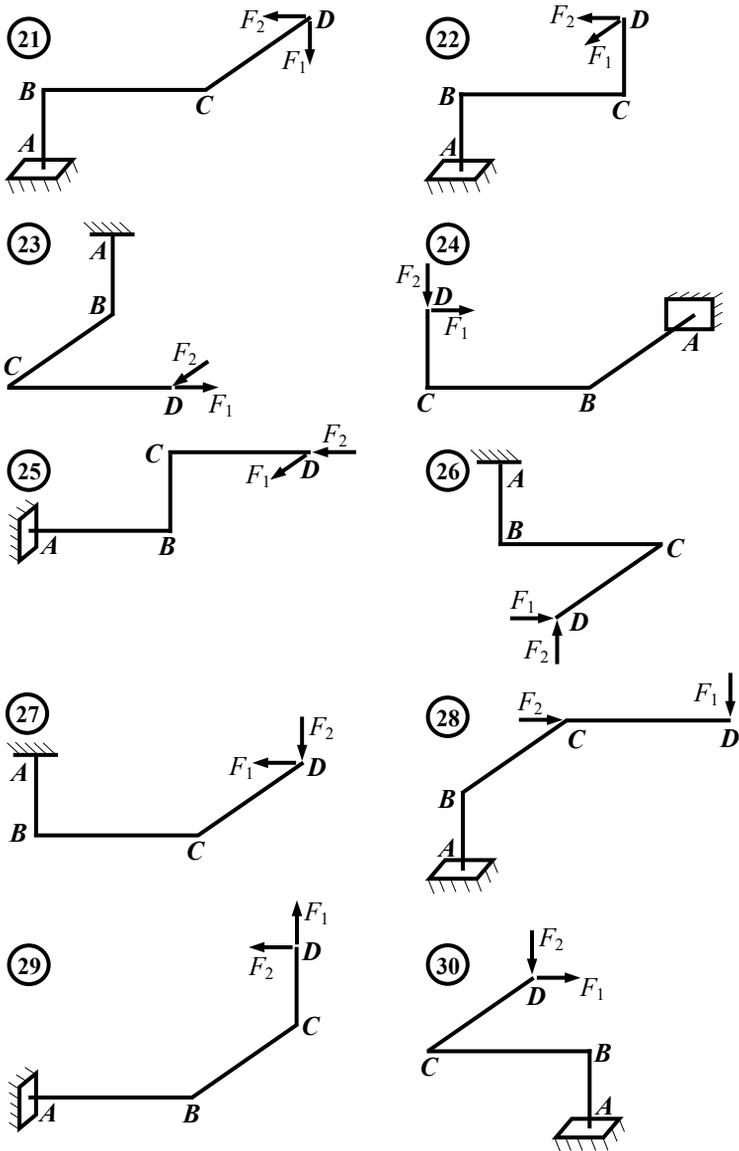


Рис. 7.1. Окончание

Таблица 7.1 – Параметры пространственного бруса

№ строки	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$l_{AB}, \text{м}$	$l_{BC}, \text{м}$	$l_{CD}, \text{м}$	h/b	d/D
1	5	8	1,2	1,6	1,5	1,5	0,65
2	6	6	0,8	1,3	1,4	1,4	0,60
3	7	3	0,4	1,2	0,9	1,2	0,70
4	2	5	1,1	0,8	1,2	1,1	0,75
5	3	6	0,6	1,0	1,3	1,6	0,80
6	9	3	1,5	1,1	0,8	1,7	0,85
7	7	4	1,3	1,5	1,1	1,8	0,90
8	6	5	2,0	2,0	1,0	1,9	0,55
9	3	4	0,9	0,9	0,9	2,0	0,50
0	4	6	1,4	1,4	1,1	1,3	0,45
	a	b	e	e	δ	e	e

4. Изображают опасное сечение участка AB , показывают фактические внутренние усилия. Подбирают размеры кольцевого сечения из условия прочности при изгибе с кручением по IV теории прочности с учётом действия нормальной силы.

В расчётах учитывают, что материал бруса – Ст.3 с $[\sigma] = 160$ МПа.

5. Изображают опасные сечения участков BC и CD , показывают фактические внутренние усилия. Для участка BC подбирают прямоугольное поперечное сечение, а для участка CD – квадратное сечение из условия прочности при косом изгибе (прямоугольное сечение располагают так, чтобы в плоскости наибольшей жёсткости опасного сечения действовал наибольший из двух изгибающих моментов).

Определяют нормальные и касательные напряжения в характерных точках опасных сечений (при подсчёте касательных напряжений учитывают лишь крутящий момент). Строят эпюры нормальных и касательных напряжений по контуру опасных сечений. Проводят проверку прочности с учётом всех внутренних усилий.

6. С помощью интеграла Мора определяют составляющее перемещение сечения D по направлению наибольшей силы. Интегралы вычисляют способом Верещагина.

7.3. Пример выполнения работы

Для стального пространственного бруса (рис. 7.2) построить эпюры N , M_x , M_y , M_k , подобрать размеры поперечных сечений, построить эпюры нормальных и касательных напряжений по контуру прямоугольного сечения, определить горизонтальное перемещение точки D при следующих данных: $l_{AB} = 1$ м, $l_{BC} = 1,2$ м, $l_{CD} = 1$ м, $F_1 = 5$ кН, $F_2 = 8$ кН, $F_3 = 6$ кН, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = d/D = 0,8$, BC – прямоугольное с размерами $h/b = 1,5$.

Изображаем оси координат на каждом участке бруса и строим эпюры N , M_x , M_y , M_k (см. рис. 7.2). Подбираем размеры поперечных сечений.

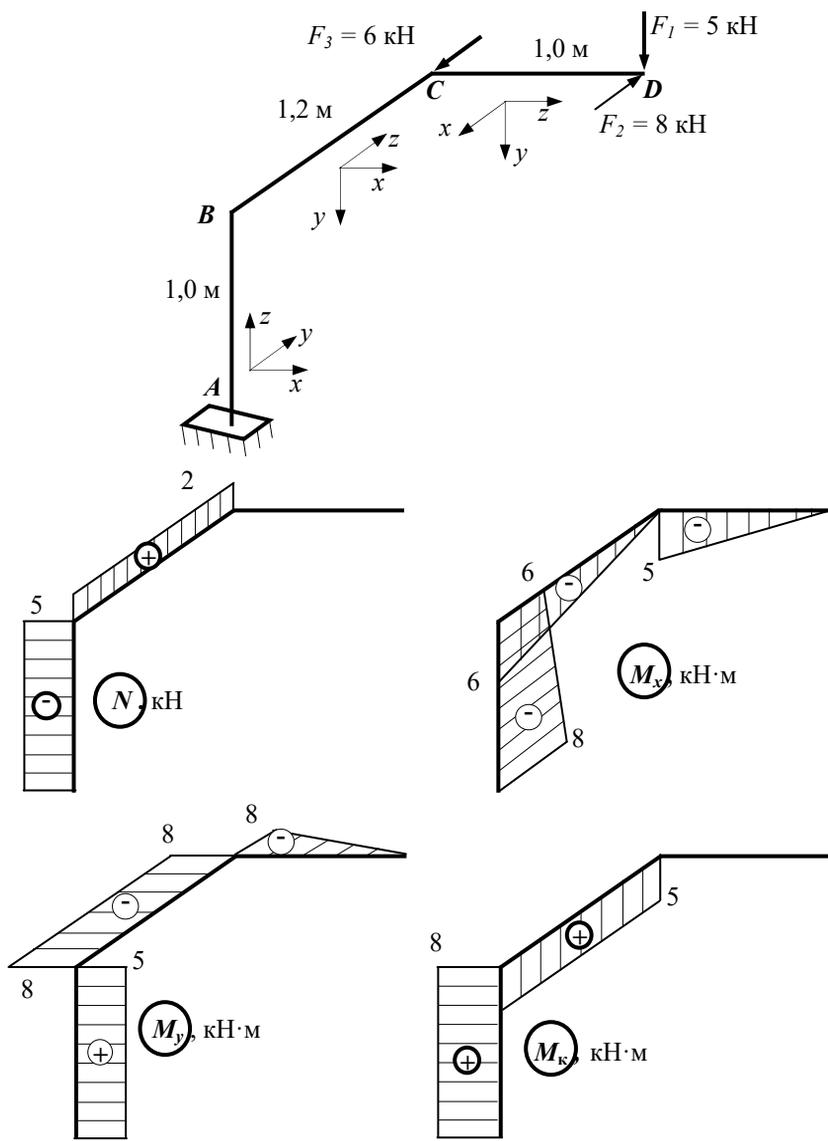


Рис. 7.2. Расчётная схема и эпюры внутренних усилий

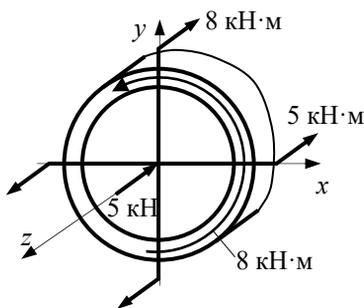


Рис. 7.3. Схема действия внутренних усилий в опасном сечении A участка AB

На участке AB поперечное сечение кольцевое ($\alpha = d/D = 0,8$) с наружным диаметром D , BC – прямоугольное с размерами $h/b = 1,5$, CD – квадратное с размером a .

На участке AB опасным является сечение A (рис. 7.3), в котором внутренние усилия имеют наибольшие значения:

$$N = 5 \text{ кН}, M_x = 8 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_y = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_k = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эквивалентный изгибающий момент

$$M_{\text{экв}}^{\text{наиб}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75 \cdot M_k^2} = \sqrt{5^2 + 8^2 + 0,75 \cdot 8^2} = 11,70 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определяем диаметр из условия прочности при изгибе с кручением:

$$\frac{M_{\text{экв}}^{\text{наиб}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где $W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Тогда

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{наиб}}}{\pi \cdot (1 - \alpha^4) \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 11,7 \cdot 10^3}{\pi \cdot (1 - 0,8^4) \cdot 160 \cdot 10^6}} = 108,1 \text{ мм}.$$

Принимаем $D = 110 \text{ мм}$.

Вычисляем геометрические характеристики подобранного сечения:

$$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot D^3}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \cdot 11^3}{32} (1 - 0,8^4) = 77,15 \text{ см}^3;$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \cdot 11^4}{64} (1 - 0,8^4) = 424,3 \text{ см}^4;$$

$$J_p = 2 \cdot J_x = 2 \cdot 424,3 = 848,6 \text{ см}^4;$$

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{\pi \cdot 11^2}{4} (1 - 0,8^2) = 34,21 \text{ см}^2.$$

Проверяем прочность с учётом нормальной силы

$$|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{M_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}}}{W_x} + \frac{|N|}{A} = \frac{11,7 \cdot 10^3}{77,15 \cdot 10^{-6}} + \frac{5 \cdot 10^3}{34,21 \cdot 10^{-4}} = 153,1 \text{ МПа} < [\sigma]$$

– условие прочности выполняется.

На участке *BC* с прямоугольным поперечным сечением опасным является сечение *B*, в котором внутренние усилия имеют наибольшие значения:

$$M_x = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_y = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_k = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}, N = 2 \text{ кН}.$$

Изображаем схему действия внутренних сил в опасном сечении *B* как действие правой части бруса на левую часть (рис. 7.4, *a*). Прямоугольное сечение располагаем так, чтобы плоскость наибольшей жёсткости совпадала с плоскостью наибольшего изгибающего момента M_y .

Определяем размеры поперечного сечения из условия прочности при косом изгибе:

$$W_y \geq \frac{|M_y| + \frac{W_y}{W_x} \cdot |M_x|}{[\sigma]},$$

$$\text{где } W_x = \frac{h \cdot b^2}{6}; \quad W_y = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

$$\text{С учётом } h = 1,5 \cdot b \quad W_x = \frac{1,5 \cdot b^3}{6}; \quad W_y = \frac{2,25 \cdot b^3}{6}; \quad \frac{W_y}{W_x} = 1,5.$$

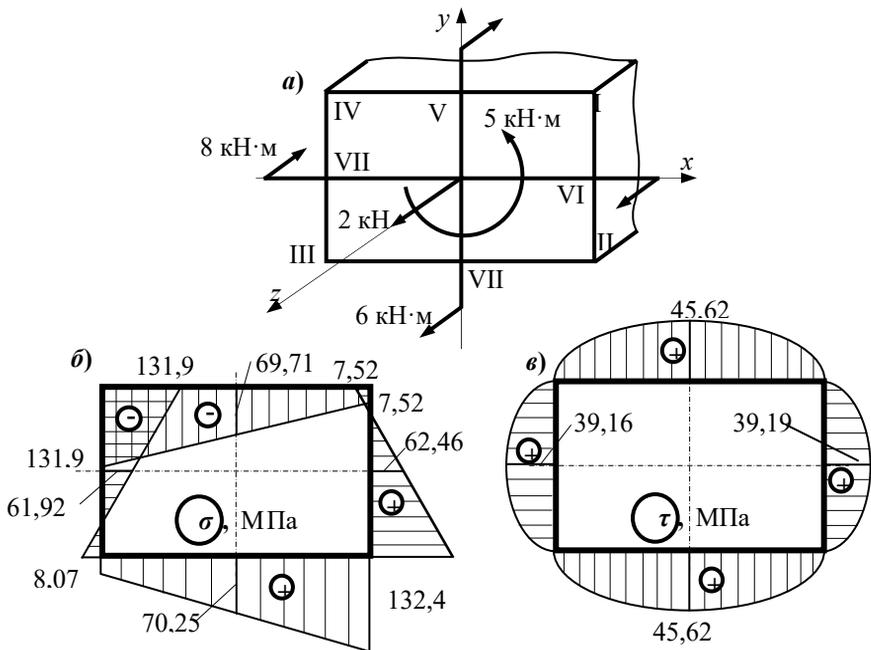


Рис. 7.4. Схема действия внутренних усилий и эпюры напряжений в опасном сечении *В* участка *BC*

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot (|M_y| + 1,5 \cdot |M_x|)}{2,25 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot (8 + 1,5 \cdot 6) \cdot 10^3}{2,25 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 65,68 \text{ мм.}$$

Тогда $h = 1,5b = 1,5 \cdot 65,68 = 98,52$ мм. Учитывая, что в сечении также действуют нормальная сила и крутящий момент, несколько увеличим полученные значения и примем $b = 70$ мм, $h = 105$ мм.

Вычисляем геометрические характеристики подобранного сечения:

$$A = b \cdot h = 7 \cdot 10,5 = 73,50 \text{ см}^2;$$

$$J_x = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{10,5 \cdot 7^3}{12} = 300,1 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{7 \cdot 10,5^3}{12} = 675,3 \text{ см}^4.$$

Для прямоугольного сечения:

при $h/b = 1,5$ $\alpha = 0,213$; $\beta = 0,196$; $\eta = 0,859$ [1].

Тогда

$$W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2 = 0,213 \cdot 10,5 \cdot 7^2 = 109,6 \text{ см}^3,$$

$$J_k = \beta \cdot h \cdot b^3 = 0,196 \cdot 10,5 \cdot 7^3 = 705,9 \text{ см}^4.$$

Используя выражение для нормальных напряжений в сечении B при внецентренном растяжении-сжатии:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{N}{A}$$

определяем нормальные напряжения в точках I... VIII (рис. 7.4, а):

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \frac{-6 \cdot 10^3}{300,1 \cdot 10^{-8}} 3,5 \cdot 10^{-2} + \frac{8 \cdot 10^3}{675,3 \cdot 10^{-8}} 5,25 \cdot 10^{-2} + \frac{2 \cdot 10^3}{73,5 \cdot 10^{-4}} = \\ &= -69,98 + 62,19 + 0,272 = -7,52 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{II} = 69,98 + 62,19 + 0,272 = 132,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III} = 69,98 - 62,19 + 0,272 = 8,07 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{IV} = -69,98 - 62,19 + 0,272 = -131,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_V = -69,98 + 0 + 0,272 = -69,71 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{VI} = 0 + 62,19 + 0,272 = 62,46 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{VII} = 69,98 + 0 + 0,272 = 70,25 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{VIII} = 0 - 62,19 + 0,272 = -61,92 \text{ МПа}.$$

Используя полученные значения σ , строим эпюру нормальных напряжений по контуру сечения (см. рис. 7.4, б).

Определяем касательные напряжения в точках I... VIII:

$$\tau_I = \tau_{II} = \tau_{III} = \tau_{IV} = 0;$$

$$\tau_V = \tau_{VII} = \tau_{max} = \frac{M_K}{W_K} = \frac{5 \cdot 10^3}{109,6 \cdot 10^{-6}} = 45,62 \text{ МПа};$$

$$\tau_{VI} = \tau_{VIII} = \eta \cdot \tau_{max} = 0,859 \cdot 45,62 = 39,19 \text{ МПа}.$$

Используя полученные значения, строим эпюру касательных напряжений по контуру сечения (см. рис. 7.4, в).

Проводим проверку прочности в наиболее опасной точке сечения VII с учётом всех внутренних усилий, используя четвёртую гипотезу предельных напряжённых состояний, в соответствии с которой

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{70,25^2 + 3 \cdot 45,62^2} = 105,7 \text{ МПа} < [\sigma]$$

– условие прочности выполняется.

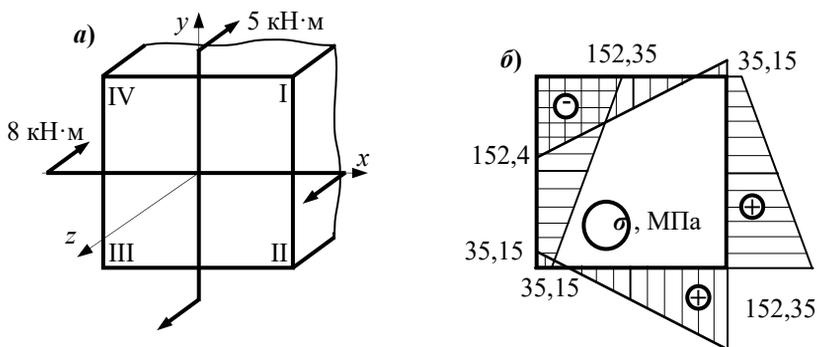


Рис. 7.5. Схема действия внутренних усилий и эпюра напряжений в опасном сечении C участка CD

На участке CD с квадратным поперечным сечением опасным является сечение C , в котором внутренние усилия имеют наибольшие значения: $M_x = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_y = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_K = 0$, $N = 0$ (рис. 7.5, а).

Определяем размеры поперечного сечения из условия прочности при косом изгибе:

$$W_x \geq \frac{\left| M_x \right| + \frac{W_x}{W_y} \cdot \left| M_y \right|}{[\sigma]},$$

где $W_x = W_y = \frac{a^3}{6}$;

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \left(\left| M_x \right| + \left| M_y \right| \right)}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot (5 + 8) \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 78,70 \text{ мм.}$$

Принимаем $a = 80$ мм.

Вычисляем геометрические характеристики выбранного сечения:

$$\begin{aligned} A &= a^2 = 8^2 = 64,0 \text{ см}^2; \\ W_x = W_y &= \frac{a^3}{6} = \frac{8^3}{6} = 85,33 \text{ см}^3; \\ J_x = J_y &= \frac{a^4}{12} = \frac{8^4}{12} = 341,3 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Определяем нормальные напряжения в точках I... IV, касательными напряжениями от поперечных сил пренебрегаем.

$$\sigma_I = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{5 \cdot 10^3}{85,33 \cdot 10^{-6}} + \frac{8 \cdot 10^3}{85,33 \cdot 10^{-6}} = -58,60 + 93,75 = 35,15 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II} = 58,60 + 93,75 = 152,35 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III} = 58,60 - 93,75 = -35,15 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{IV} = -58,60 - 93,75 = -152,35 \text{ МПа.}$$

Строим эпюру нормальных напряжений по контуру опасного сечения C (рис. 7.5, б), из которой видно, что во всех точках сечения условие прочности выполняется.

Определяем перемещение сечения D в направлении наибольшей силы F_2 с помощью интеграла Мора. Для этого брус нагружаем горизонтальной единичной силой в сечении D и строим эпюры \overline{M}_{1x} , \overline{M}_{1y} , $\overline{M}_{1\kappa}$ (рис. 7.6).

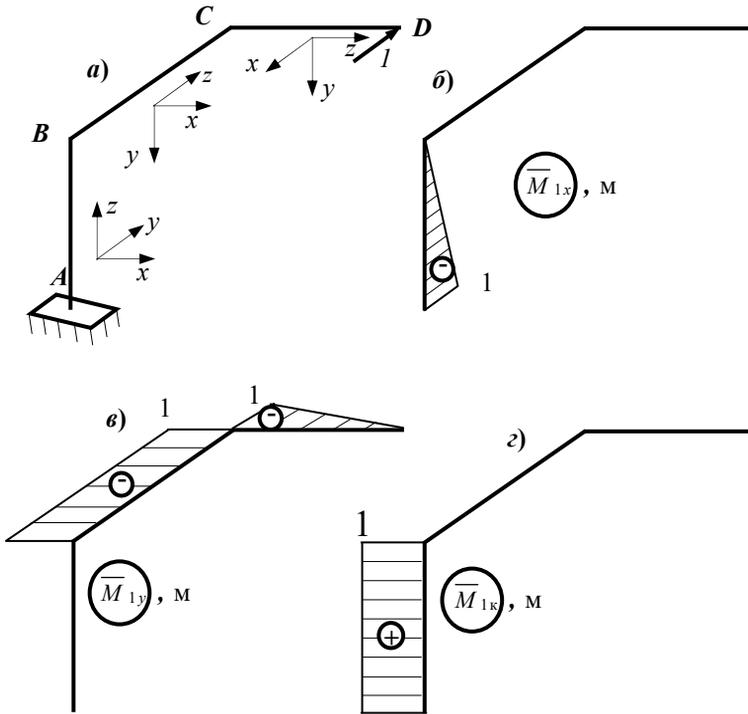


Рис. 7.6. Схема бруса и эпюры моментов от единичной силы

$$\Delta_{1D} = \int_L \frac{M_x \cdot \overline{M}_{1x}}{E \cdot J_x} dz + \int_L \frac{M_y \cdot \overline{M}_{1y}}{E \cdot J_y} dz + \int_L \frac{M_\kappa \cdot \overline{M}_{1\kappa}}{G \cdot J_\kappa} dz.$$

Вычисляем интегралы способом Верещагина, учитывая, что $E=2 \cdot 10^5$ МПа, $G=0,8 \cdot 10^5$ МПа, $J_x^{AB} = J_y^{AB} = 424,3 \text{ см}^4$; $J_p^{AB} = 848,6 \text{ см}^4$;

$$J_x^{BC} = 300,1 \text{ см}^4; \quad J_y^{BC} = 675,3 \text{ см}^4; \quad J_\kappa^{BC} = 705,9 \text{ см}^4; \quad J_x^{CD} = J_y^{CD} = 341,3 \text{ см}^4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{1D} = & \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(6 + \frac{2}{3} \cdot 2\right) \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 424,3 \cdot 10^{-8}} + \frac{8 \cdot 1,2 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 675,3 \cdot 10^{-8}} + \\ & + \frac{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 341,3 \cdot 10^{-8}} + \frac{8 \cdot 1,2 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 848,6 \cdot 10^{-8}} = 29,48 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Знак «+» указывает на то, что перемещение сечения D совпадает с направлением единичной силы.

7.4. Контрольные вопросы

1. Как определяют величину и знак каждого из внутренних усилий бруса при сложном сопротивлении?
2. Какие частные случаи сложного сопротивления встречаются в практических расчётах?
3. В каких случаях брус испытывает косой изгиб?
4. В каких случаях брус испытывает внецентренное растяжение или сжатие?
5. Как расположена нейтральная ось поперечного сечения при косом изгибе и внецентренном растяжении или сжатии?
6. Как записывается условие прочности бруса в общем случае сложного сопротивления?
7. Как записывается условие прочности при косом изгибе и внецентренном растяжении или сжатии?
8. Как записывается условие прочности при изгибе с кручением бруса круглого поперечного сечения?
9. Где находятся возможные опасные точки прямоугольного поперечного сечения бруса, испытывающего сложное сопротивление?
10. Где находится опасная точка бруса круглого поперечного сечения при сложном сопротивлении?

11. Как определяют полное перемещение сечения пространственного бруса?

12. Как записывается интеграл Мора для бруса, испытывающего сложное сопротивление?

8. РАСЧЁТ ВАЛА ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ

8.1. Задание

Заданы схема зубчатой передачи (рис. 8.1), число оборотов первой шестерни, передаваемая мощность, размеры, материал вала и коэффициент запаса (табл. 8.1).

Требуется определить диаметр вала AB .

В пояснительной записке следует представить схему зубчатой передачи, выполненную в масштабе, расчётную схему вала, эпюры изгибающих, крутящих и эквивалентных моментов, а также все необходимые расчёты.

Примечание:

1. Нормальные напряжения изменяются по симметричному циклу.
2. Касательные напряжения постоянны во времени.

8.2. Порядок выполнения работы

1. По данным табл. 8.1, соответствующим заданному шифру, изображают в масштабе схему зубчатой передачи.

2. Изображают расчётную схему вала.

3. По заданным значениям мощности и числу оборотов определяют моменты и усилия, действующие на вал AB .

4. Строят эпюры изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскостях M_z, M_θ .

5. Строят эпюру суммарного изгибающего момента $M_u = \sqrt{M_z^2 + M_\theta^2}$.

6. Строят эпюру крутящего момента M_k .

7. Вычисляют эквивалентные моменты по четвёртой теории предельных напряжённых состояний: $M_{экв IV} = \sqrt{M_u^2 + 0,75 M_k^2}$ и строят эпюру эквивалентного момента.

8. Подбирают диаметр вала по наибольшему эквивалентному моменту и заниженному значению допускаемого напряжения, исходя из условия прочности:

$$\sigma_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}} = \frac{M_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}}}{W_x} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{-1}}{n_{\text{ср}}},$$

где $n_{\text{ср}}$ – среднее значение требуемого коэффициента запаса.

9. Определяют коэффициенты запаса прочности в предполагаемых опасных сечениях вала по текучести и усталости:

$$n_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 3 \cdot \tau_{\text{max}}^2}}; \quad n_R = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}},$$

$$\text{где } n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{k_d \cdot k_F \cdot k_v} \cdot \sigma_a + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_m}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{k_d \cdot k_F \cdot k_v} \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_m}$$

и сравнивают их с заданными значениями.

Если наименьший вычисленный коэффициент запаса прочности не соответствует заданному, то следует изменить диаметр вала и повторить расчёты в наиболее опасном сечении.

Примечания:

1. Концентраторами напряжений являются: под шестерней – шпоночный паз, под опорой – запрессованное внутреннее кольцо подшипника (давление запрессовки 20 МПа).

2. В расчётах учитывают, что поверхность вала шлифованная.

8.3. Пример выполнения работы

Подобрать диаметр вала AB зубчатой передачи, изображённой на рис. 8.2, a , при следующих данных: $N = 73$ кВт, $n = 1050$ об/мин, $D_1 = 28$ см, $D_2 = 58$ см, $D_3 = 26$ см, $D_4 = 42$ см, $l_1 = 18$ см, $l_2 = 20$ см, $l_3 = 20$ см, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 180^\circ$, $\alpha = 20^\circ$, $n_{\text{необх}} = 1,4 \dots 1,7$, поверхность вала шлифованная, материал вала – сталь 45.

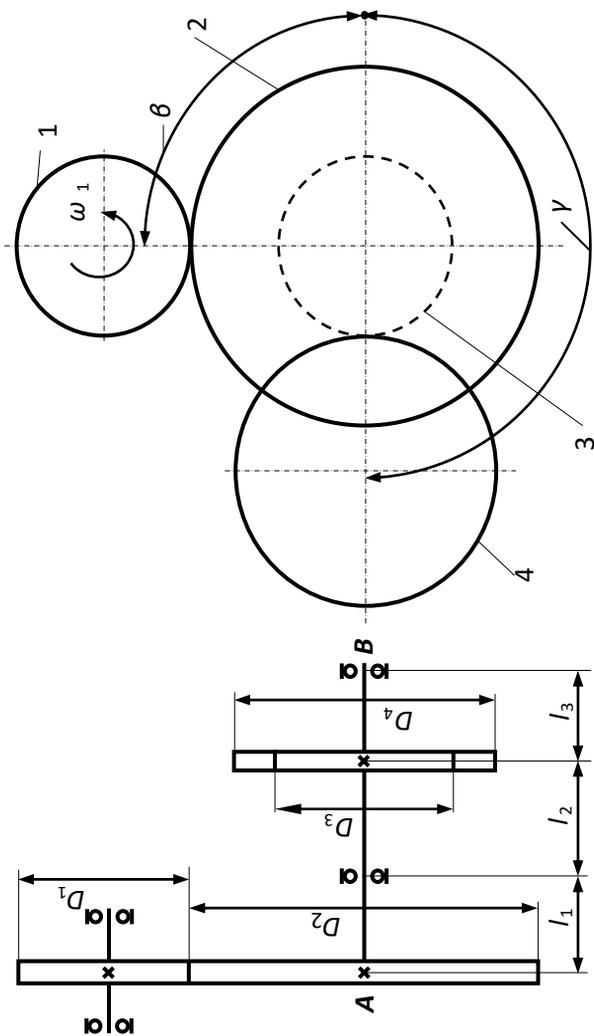


Рис. 8.1. Схема зубчатой передачи

Таблица 8.1 – Параметры зубчатой передачи

№ строки	N, кВт	n, об/мин	D ₁ , см	б				в				α, град	Кoeffиц. запаса	Марка стали	
				D ₂ , см	D ₃ , см	D ₄ , см	l ₁ , см	l ₂ , см	l ₃ , см	β, град	γ, град				ε
1	45	700	16	55	30	40	8	20	24	24	0	120	20	1,1...1,4	15
2	50	800	18	53	26	42	10	24	20	45	225	20	1,2...1,5	35	
3	55	900	20	51	24	44	12	20	22	90	315	20	1,3...1,6	45	
4	60	1050	18	58	36	53	9	24	22	150	60	20	1,4...1,7	40X	
5	65	1150	20	56	34	51	8	20	24	210	270	20	1,5...1,8	25XН3А	
6	70	1200	16	55	24	50	9	22	28	225	90	20	1,6...1,9	12XН3А	
7	75	1250	17	54	25	49	10	24	26	240	135	20	1,2...1,5	18XН3А	
8	65	1300	18	53	26	48	11	24	24	270	30	20	1,3...1,6	30XГСА	
9	60	1350	20	51	28	46	10	20	22	315	45	20	1,1...1,4	30XМА	
0	55	1400	18	54	24	50	8	22	24	45	135	20	1,5...1,8	50XН	
	a		б				в				δ		ε		

Изображаем отдельно вал AB с зубчатыми колесами 2 и 3 и действующими на них силами (рис. 8.2, б).

Изображаем расчётную схему вала (рис. 8.2, в), перенося усилия F_{12} и F_{43} на ось вала, раскладывая их на вертикальные и горизонтальные составляющие и добавляя моменты m_2 , m_3 .

Определяем по мощности и числу оборотов моменты, действующие на вал:

$$m_2 = m_3 = 9,55 \cdot \frac{N}{n_2},$$

$$\text{где } n_2 = n_1 \cdot \frac{D_1}{D_2} = 1050 \cdot \frac{0,28}{0,58} = 507,0 \text{ об/мин},$$

$$\text{тогда } m_2 = m_3 = 9,55 \cdot \frac{N}{n_2} = 9,55 \cdot \frac{73}{507} = 1,375 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определяем усилия, действующие на вал, и их проекции в горизонтальной и вертикальной плоскостях:

$$F_2 = \frac{2 \cdot m_2}{D_2 \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 1,375}{0,58 \cdot \cos 20^\circ} = 5,047 \text{ кН};$$

$$F_2^c = F_2 \cdot \cos 25^\circ = 5,047 \cdot \cos 25^\circ = 4,574 \text{ кН};$$

$$F_2^e = F_2 \cdot \sin 25^\circ = 5,047 \cdot \sin 25^\circ = 2,133 \text{ кН};$$

$$F_3 = \frac{2 \cdot m_3}{D_3 \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 1,375}{0,26 \cdot \cos 20^\circ} = 11,260 \text{ кН};$$

$$F_3^c = F_3 \cdot \sin 20^\circ = 11,26 \cdot \sin 20^\circ = 3,850 \text{ кН};$$

$$F_3^e = F_3 \cdot \cos 20^\circ = 11,26 \cdot \cos 20^\circ = 10,580 \text{ кН}.$$

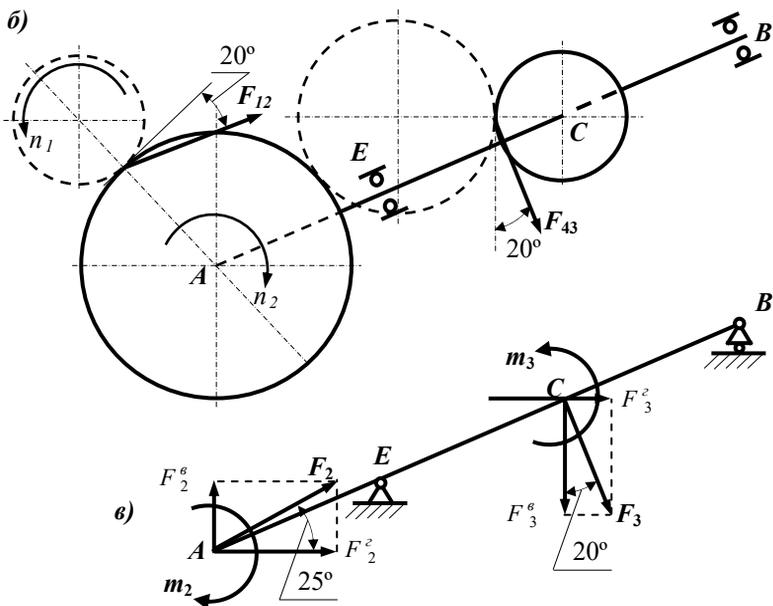
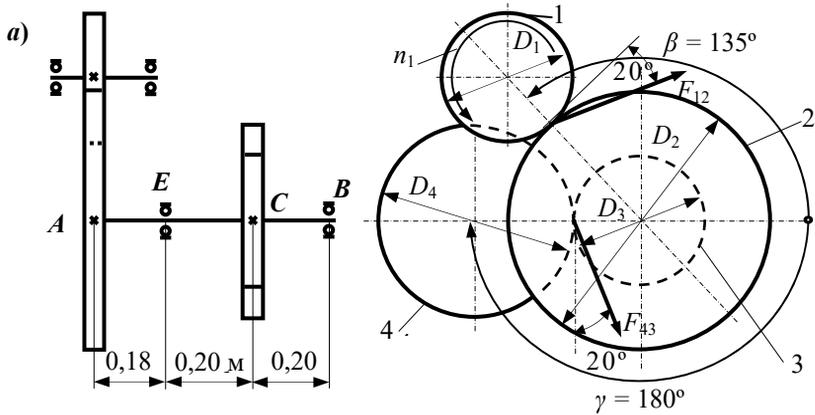


Рис. 8.2. Расчётная схема зубчатой передачи

Строим эпюры изгибающих моментов M_x , M_y от сил, действующих в горизонтальной и вертикальной плоскостях, а также эпюры суммарного изгибающего момента M_{Σ} , крутящего момента M_K и эквивалентного момента $M_{\text{экв IV}}$ (рис. 8.3).

Определяем диаметр вала в первом приближении из условия статической прочности при изгибе с кручением, используя заниженное допускаемое напряжение:

$$\sigma_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}} = \frac{M_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}}}{W_x} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{-1}}{n_{\text{сп}}},$$

где $W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$, $n_{\text{сп}} = \frac{1,4 + 1,7}{2} = 1,55$, для стали 45: $\sigma_g = 600 - 750$ МПа; $\sigma_T = 320$ МПа; $\sigma_{-1} = 250 - 340$ МПа; $\tau_{-1} = 150 - 200$ МПа.

Тогда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}} \cdot n_{\text{сп}}}{\pi \cdot \sigma_{-1}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,726 \cdot 10^3 \cdot 1,55}{\pi \cdot 250 \cdot 10^6}} = 44,77 \text{ мм}.$$

Принимаем ближайшее стандартное значение $d = 45$ мм.

$$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4,5^3}{32} = 8,946 \text{ см}^3,$$

$$W_p = 2 \cdot W_x = 2 \cdot 8,946 = 17,89 \text{ см}^3.$$

Фактически напряжения во вращающемся вале изменяются циклически.

Определяем коэффициенты запаса вала по текучести и усталости в предполагаемых опасных сечениях.

Сечение E (концентратор – запрессованное внутреннее кольцо подшипника). Определяем напряжения в опасной точке сечения (точке, расположенной на поверхности вала), учитывая, что нормальные напряжения изменяются по симметричному закону, а касательные напряжения постоянны во времени:

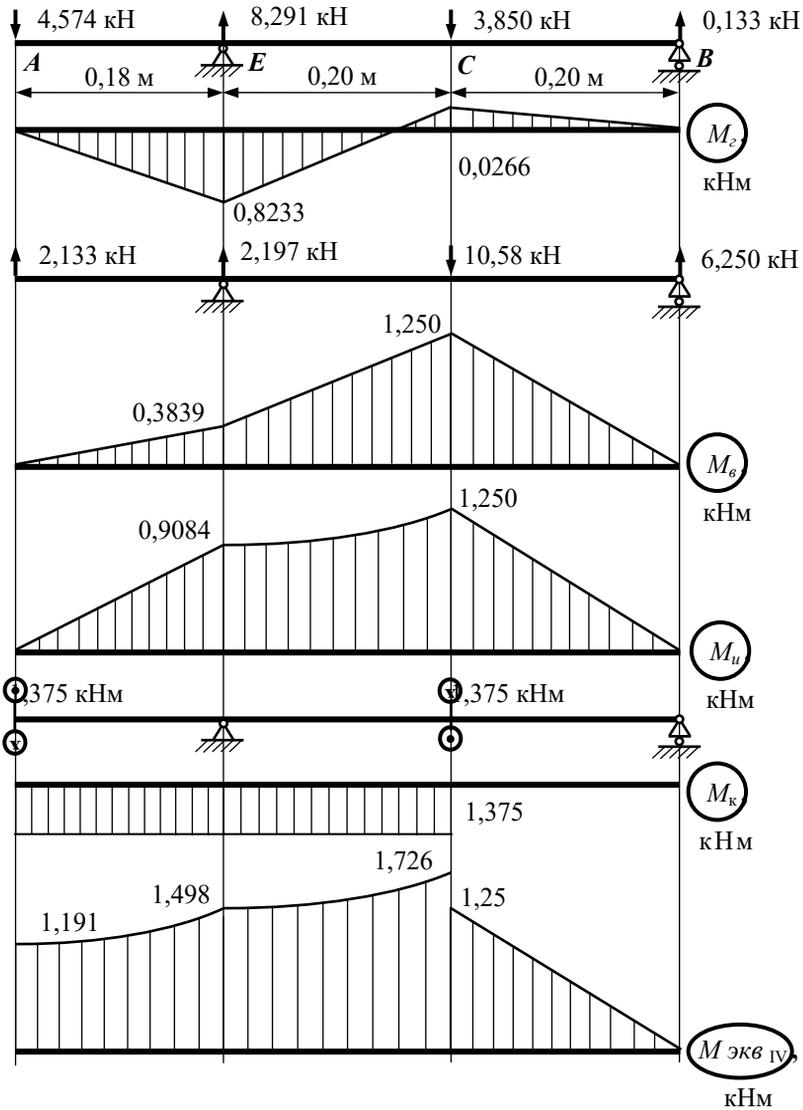


Рис. 8.3. Эпюры внутренних усилий

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M_u^E}{W_x} = \frac{0,9084 \cdot 10^3}{8,946 \cdot 10^{-6}} = 101,5 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\max} = \tau_{\min} = \frac{M_k^E}{W_p} = \frac{1,375 \cdot 10^3}{17,89 \cdot 10^{-6}} = 76,86 \text{ МПа}.$$

Тогда $\sigma_a = 101,5$ МПа, $\sigma_m = 0$, $\tau_a = 0$, $\tau_m = 76,86$ МПа. Из справочных данных [2] находим значения остальных величин, входящих в формулы для коэффициентов запаса:

$$\psi_\sigma = 0,1 \text{ и } \psi_\tau = 0,05 \text{ при } \sigma_s = 750 \text{ МПа}.$$

Для валов с напрессованными деталями: $\left(\frac{k_\sigma}{k_d} \right)_0 = 3,00$ при

$d = 45$ мм, передаётся сила; $\xi' = 1,339$ при $\sigma_s = 750$ МПа; $\xi'' = 0,957$ при $p = 20$ МПа; тогда

$$\left(\frac{k_\sigma}{k_d} \right) = \left(\frac{k_\sigma}{k_d} \right)_0 \cdot \xi' \cdot \xi'' = 3 \cdot 1,339 \cdot 0,957 = 3,84;$$

$k_F = 0,94$ при $\sigma_s = 750$ МПа, шлифовка;

$k_V = 0$ – упрочняющей обработки нет.

Теперь находим коэффициенты запаса:

$$n_\tau = \frac{\sigma_T}{\sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^2}} = \frac{320}{\sqrt{101,5^2 + 3 \cdot 76,86^2}} = 1,91;$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} = \frac{250}{\frac{3,84}{0,94 \cdot 1} \cdot 101,5 + 0} = 0,603;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m} = \frac{150}{0 + 0,05 \cdot 76,86} = 39,03;$$

$$n_R = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{0,603 \cdot 39,03}{\sqrt{0,603^2 + 39,03^2}} = 0,603.$$

Подсчитываем коэффициенты запаса в сечении C (концентратор – шпоночный паз).

Из сборника справочных данных [2]: $W_u = 7,80 \text{ см}^3$; $W_K = 16,74 \text{ см}^3$ для вала с одним шпоночным пазом при $d = 45 \text{ мм}$.

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M_u^C}{W_u} = \frac{1,250 \cdot 10^3}{7,8 \cdot 10^{-6}} = 160,3 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\max} = \tau_{\min} = \frac{M_K^C}{W_K} = \frac{1,375 \cdot 10^3}{16,74 \cdot 10^{-6}} = 82,14 \text{ МПа}.$$

Тогда $\sigma_a = 160,3 \text{ МПа}$, $\sigma_m = 0$, $\tau_a = 0$, $\tau_m = 82,14 \text{ МПа}$. Из справочных данных [2] находим значения остальных величин, входящих в формулы для коэффициентов запаса: $\psi_\sigma = 0,1$ и $\psi_\tau = 0,05$; $k_V = 1$, $k_\sigma = 1,75$ и $k_\tau = 1,65$ при $\sigma_e = 750 \text{ МПа}$ (шпоночный паз); $k_d = 0,809$ при $\sigma_e = 500 \text{ МПа}$; $k_d = 0,692$ при $\sigma_e = 1400 \text{ МПа}$ и $d = 45 \text{ мм}$. Интерполируем для $\sigma_e = 750 \text{ МПа}$:

$$k_d = 0,692 + \frac{0,809 - 0,692}{1400 - 500} (1400 - 750) = 0,78.$$

$k_F = 0,86$ при $\sigma_e = 750 \text{ МПа}$, тонкое точение.

Определяем коэффициенты запаса:

$$n_m = \frac{\sigma_m}{\sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^2}} = \frac{320}{\sqrt{160,3^2 + 3 \cdot 82,14^2}} = 1,49;$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} = \frac{250}{\frac{1,75}{0,78 \cdot 0,86 \cdot 1} \cdot 160,3 + 0} = 0,598;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m} = \frac{150}{0 + 0,05 \cdot 82,14} = 36,52;$$

$$n_R = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{0,598 \cdot 36,52}{\sqrt{0,598^2 + 36,52^2}} = 0,598.$$

Коэффициент запаса вала, равный наименьшему из четырёх найденных значений, $n = 0,598 < 1$, что недопустимо. Поэтому диаметр вала необходимо увеличить и повторить расчёт для наиболее опасного сечения C . Для второго приближения диаметр вала можно ориентировочно подсчитать по формуле

$$d_{II} = d_I \sqrt[3]{\frac{n_{cp}}{n_I}} = 45 \cdot \sqrt[3]{\frac{1,55}{0,598}} = 61,81 \text{ мм.}$$

Принимаем ближайшее стандартное значение $d = 62$ мм.

Определяем коэффициент запаса в наиболее опасном сечении C .

Из сборника справочных данных [2]: $W_u = 20,90 \text{ см}^3$; $W_K = 44,30 \text{ см}^3$ для вала с одним шпоночным пазом при $d = 62$ мм.

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M_u^E}{W_u} = \frac{1,25 \cdot 10^3}{20,9 \cdot 10^{-6}} = 59,81 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\max} = \tau_{\min} = \frac{M_K^E}{W_p} = \frac{1,375 \cdot 10^3}{44,3 \cdot 10^{-6}} = 31,04 \text{ МПа}.$$

Тогда $\sigma_a = 59,81$ МПа, $\sigma_m = 0$, $\tau_a = 0$, $\tau_m = 31,04$ МПа. Из справочных данных [2] находим значения остальных величин, входящих в формулы для коэффициентов запаса: $\psi_\sigma = 0,1$ и $\psi_\tau = 0,05$; $k_V = 1$, $k_\sigma = 1,75$ и $k_\tau = 1,65$; $k_F = 0,86$;

$k_d = 0,754$ при $\sigma_s = 500$ МПа; $k_d = 0,641$ при $\sigma_s = 1400$ МПа и $d = 62$ мм. Интерполируем для $\sigma_s = 750$ МПа:

$$k_d = 0,641 + \frac{0,754 - 0,641}{1400 - 500} (1400 - 750) = 0,72.$$

Коэффициенты запаса:

$$n_\tau = \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^2}} = \frac{320}{\sqrt{59,81^2 + 3 \cdot 31,04^2}} = 3,98;$$

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{k_d \cdot k_F \cdot k_v} \cdot \sigma_a + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_m} = \frac{250}{\frac{1,75}{0,72 \cdot 0,86 \cdot 1} \cdot 59,81 + 0} = 1,48;$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{k_d \cdot k_F \cdot k_v} \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_m} = \frac{150}{0 + 0,05 \cdot 31,04} = 96,6;$$

$$n_R = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{1,48 \cdot 96,6}{\sqrt{1,48^2 + 96,6^2}} = 1,48.$$

Подобранный диаметр $d = 62$ мм обеспечивает коэффициент запаса вала $n = 1,48$, который находится в требуемом интервале $1,4 \dots 1,7$.

8.4. Контрольные вопросы

1. Какой вид сопротивления испытывает вал зубчатой передачи?
2. Как записывается условие статической прочности вала круглого поперечного сечения при изгибе с кручением?
3. Почему вал зубчатой передачи испытывает циклически изменяющиеся напряжения?
4. Где располагаются опасные сечения вала?
5. Где располагаются опасные точки в опасном сечении вала?
6. Что такое концентрация напряжений и как она влияет на прочность?
7. Как влияют размеры вала на сопротивление усталости?
8. Как влияет состояние поверхности вала на сопротивление усталости?
9. Как записывается условие прочности при циклически изменяющихся напряжениях?
10. Как определяют коэффициент запаса вала по усталости при изгибе с кручением?
11. Как определяют коэффициент запаса вала по текучести при изгибе с кручением?

9. РАСЧЁТ БАЛКИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

9.1. Задание

Заданы схемы статически неопределимых балок круглого поперечного сечения с концентраторами напряжений (рис. 9.1), нагруженных постоянной силой G (сила веса груза) и гармонически изменяющейся силой $F_0 \cdot \sin \Omega t$, размеры, частота изменения переменной силы, материал балки и необходимый коэффициент запаса приведены в табл. 9.1.

Требуется определить размеры поперечного сечения балки.

В пояснительной записке следует представить схему балки, выполненную в масштабе, эпюры изгибающих моментов от заданных и единичных сил, диаграмму предельных амплитуд цикла напряжений балки, а также все необходимые расчёты.

9.2. Порядок выполнения работы

1. По данным табл. 9.1 изображают в масштабе схему балки, соответствующей заданному шифру.

Примечание: номер схемы соответствует номеру студента в групповом журнале.

2. Раскрывают статическую неопределимость балки методом сил, считая, что балка нагружена силой $Q = F_0 + G$.

3. Строят эпюры изгибающих моментов от силы Q .

4. По значениям изгибающих моментов на персональном компьютере вычисляют перемещения балки, строят изогнутую ось и оценивают погрешность раскрытия статической неопределимости.

5. Назначают предварительные (первая попытка) размеры поперечного сечения балки из условия статической прочности при изгибе силой Q :

$$\sigma_{\text{наиб}} = \frac{M_{\text{е}}^{\text{наиб}}}{W_x} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{-1}}{n_{\text{ср}}},$$

где $n_{\text{ср}}$ – среднее значение заданного коэффициента запаса.

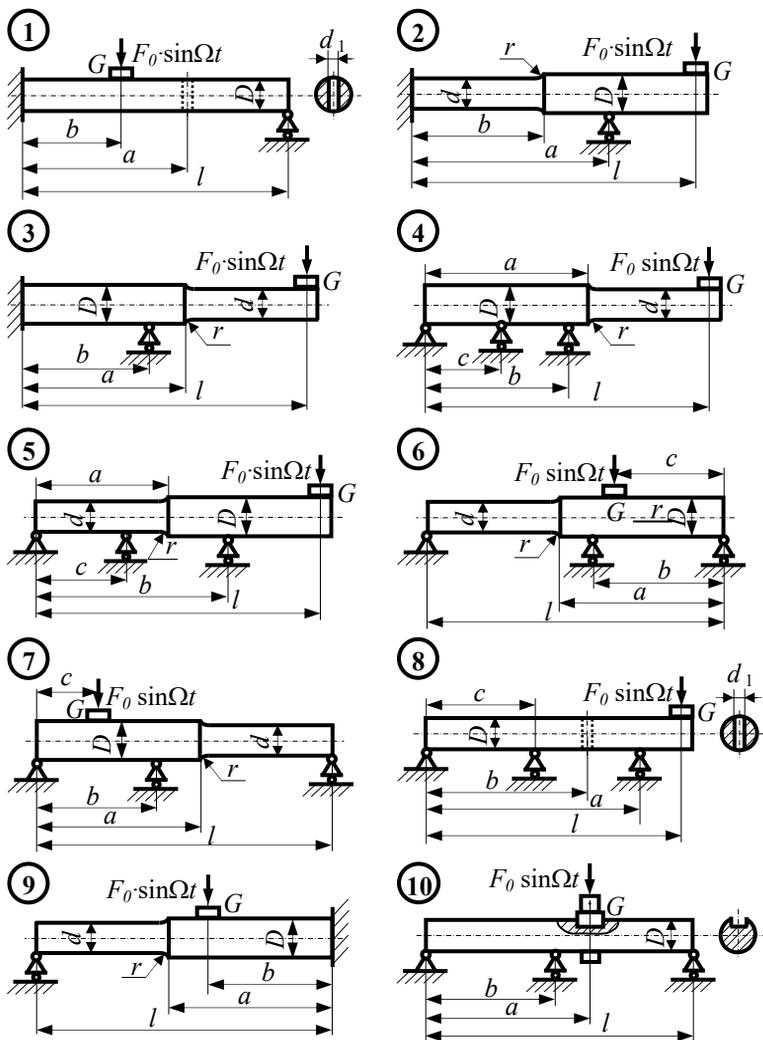


Рис. 9.1. Схемы статически неопределимых балок
(см. также с. 97 и 98)

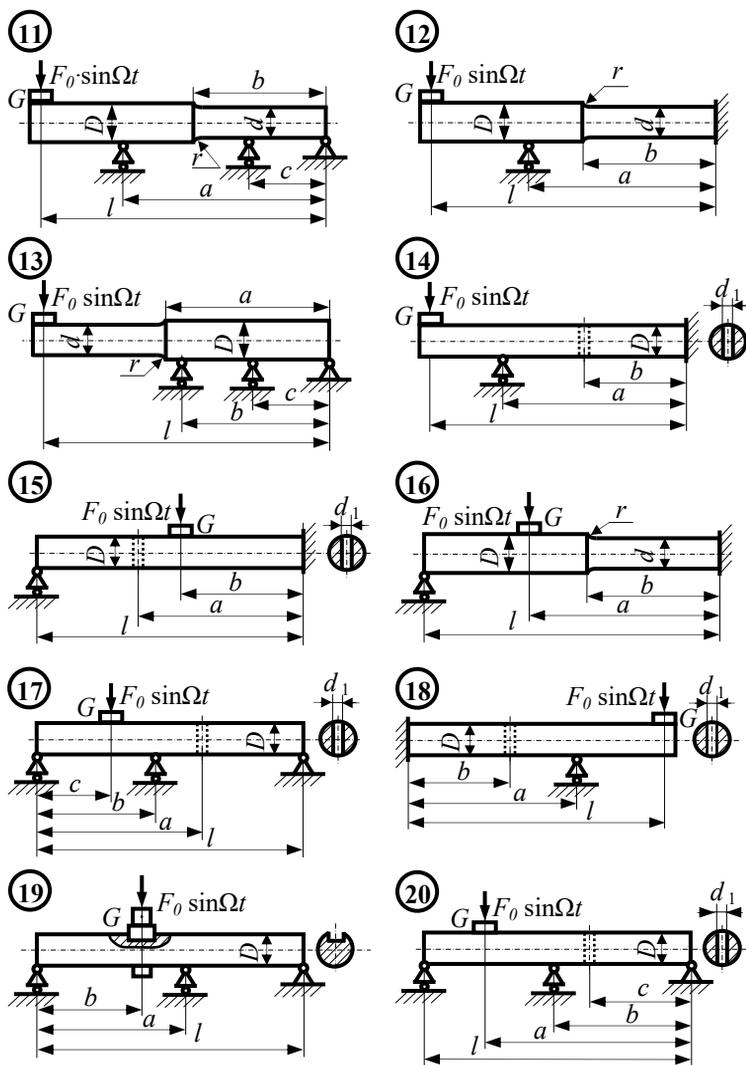


Рис. 9.1. Продолжение

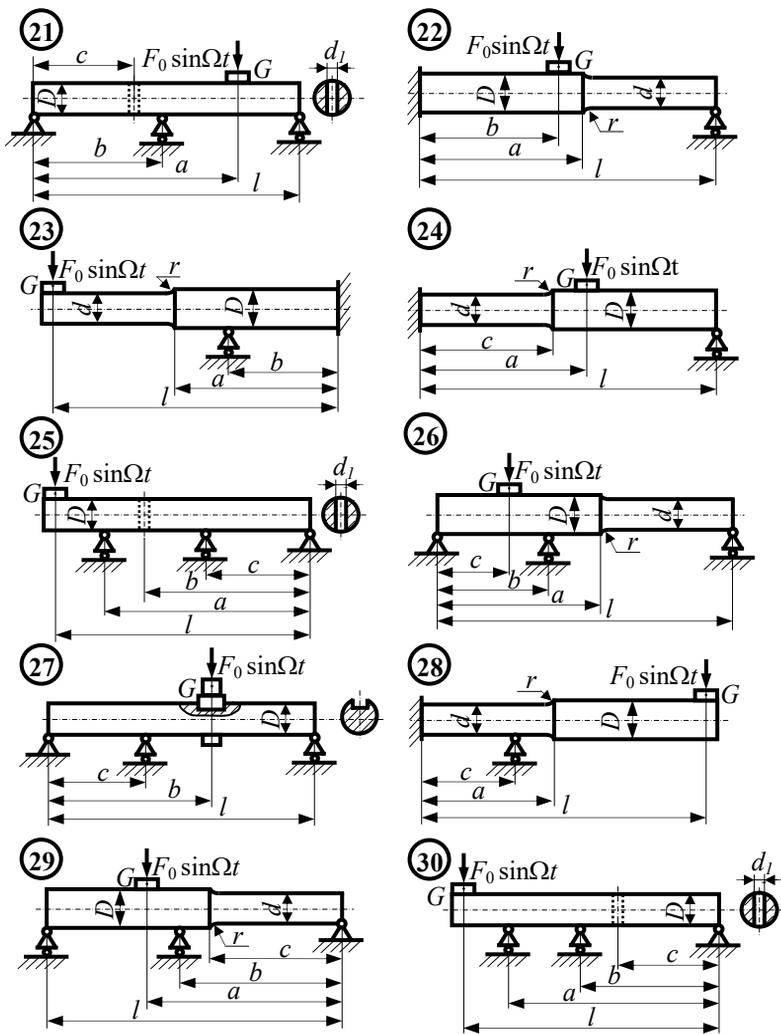


Рис. 9.1. Окончание

Таблица 9.1 – Параметры балки

№ строки	a , см	b , см	c , см	l , см	D/d	r/d	d_1/D	G , кН	F_0 , кН	Ω , с ⁻¹	Материал	Коэффициент запаса
1	120	80	40	180	1,25	0,1	0,1	3	4	60	40ХН	1,3...1,6
2	130	85	50	200	1,3	0,2	0,15	1,5	2	70	Сталь 30	1,7...2,0
3	125	90	60	160	1,4	0,3	0,2	3	1,5	40	30ХМА	1,6...1,9
4	115	75	45	170	1,2	0,2	0,1	2,5	3	80	20Х	1,4...1,7
5	110	80	55	190	1,3	0,25	0,15	1,8	2	90	50ХН	1,3...1,6
6	120	85	40	200	1,4	0,3	0,2	1,5	2,5	100	25ХН3А	1,5...1,8
7	130	90	50	180	1,25	0,2	0,1	3	3	70	45Г2	1,6...1,9
8	110	75	60	160	1,35	0,15	0,15	1	2	90	12ХН3А	1,3...1,6
9	115	80	45	190	1,3	0,1	0,2	1,2	1,8	60	Ст. 3	1,5...1,8
0	120	85	55	200	1,2	0,15	0,2	2	3	80	40Х	1,6...1,9
	a				b			v		z	d	e

6. Определяют частоту собственных колебаний балки подобранных размеров и убеждаются, что её можно считать системой с одной степенью свободы.

7. Вычисляют коэффициент усиления колебаний, приняв $\gamma = 0,03$.

8. Вычисляют коэффициенты запаса по усталости и текучести в опасных сечениях балки, где находятся концентраторы и действуют наибольшие напряжения, предварительно вычислив в этих сечениях параметры циклов напряжений σ_m и σ_a .

Примечание: концентраторами напряжений считать: защемление (переход под прямым углом), галтель, отверстие, шпоночный паз. В подвижных опорах концентратором является втулка, напрессованная на вал.

9. Сравнивают полученное значение наименьшего коэффициента запаса балки с заданным. В случае несовпадения изменяют размеры

поперечного сечения балки и повторяют расчёт, начиная с п. 6. При этом коэффициент запаса подсчитывают лишь в наиболее опасном сечении балки, выявленном в первой попытке.

10. Строят схематизированную диаграмму предельных амплитуд цикла напряжений для наиболее опасного сечения балки и определяют коэффициенты запаса графическим способом.

9.3. Пример выполнения работы

Подобрать размеры поперечного сечения статически неопределимой балки (рис. 9.2) круглого поперечного сечения, нагруженной постоянной силой G (сила веса груза) и гармонически изменяющейся силой $F_0 = \sin \Omega \cdot t$ при следующих данных: $G = 2$ кН, $F_0 = 3$ кН, $a = 100$ см, $b = 85$ см, $c = 55$ см, $l = 200$ см, $\Omega = 80$ с⁻¹, $D/d = 1,2$, $r/d = 0,15$, $d_l / D = 0,2$, материал – сталь 40Х, коэффициент запаса $n_{необх} = 1,6 \dots 1,9$.

Используя исходные данные, изображаем в масштабе схему балки. Раскрываем статическую неопределимость балки методом сил. Выбираем основную систему (ОС), строим эквивалентную систему (ЭС), нагружаем основную систему отдельно единичной силой, заменяющей неизвестную, отдельно – внешней силой $Q = G + F_0$ и строим эпюры изгибающих моментов \bar{M}_1, M_Q (см. рис. 9.2). Записываем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1Q} = 0,$$

откуда $X_1 = -\frac{\Delta_{1Q}}{\delta_{11}}$.

Коэффициент и свободный член канонического уравнения определяем способом Верещагина:

$$E \cdot J_x^D \cdot \delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1,45 \cdot 1,45 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,45 + 1,2^4 \cdot \left[1,45 \cdot 0,55 \cdot \left(1,45 + \frac{1}{2} \cdot 0,55 \right) + \frac{1}{2} \cdot 0,55 \cdot 0,55 \cdot \left(1,45 + \frac{2}{3} \cdot 0,55 \right) \right] = 4,4386 \text{ м}^3;$$

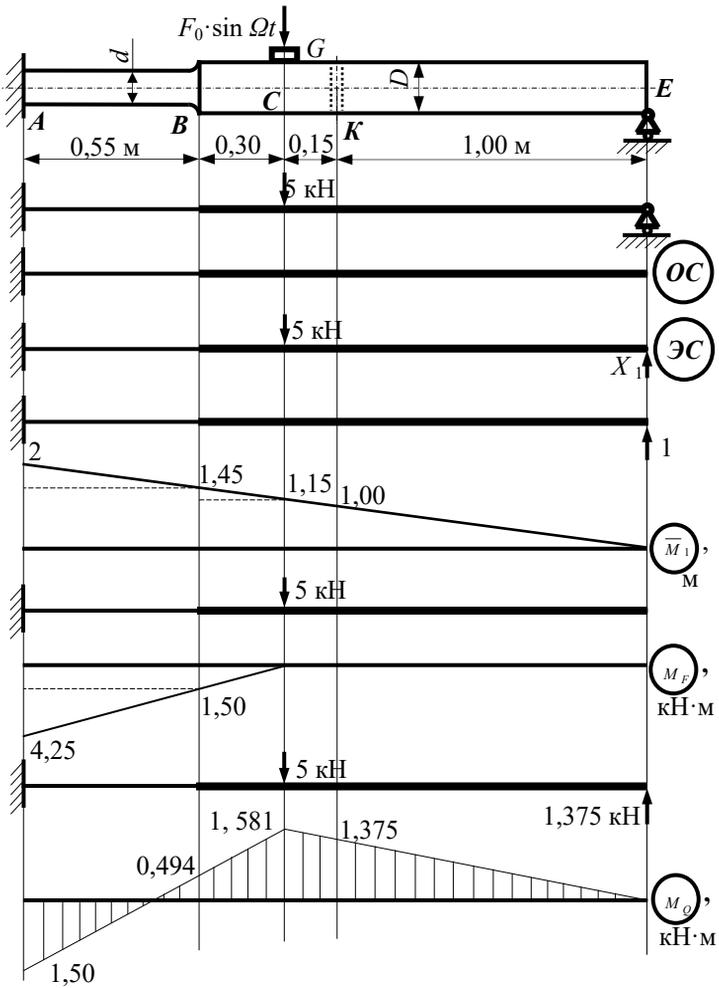


Рис. 9.2. Раскрытие статической неопределенности

$$E \cdot J_x^D \cdot \Delta_{1Q} = -\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 0,3 \cdot \left(1,15 + \frac{2}{3} \cdot 0,3 \right) - 1,2^4 \times \left[+1,5 \cdot 0,55 \cdot \left(1,45 + \frac{1}{2} \cdot 0,55 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2,75 \cdot 0,55 \cdot \left(1,45 + \frac{2}{3} \cdot 0,55 \right) \right] = -6,1036 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Раскрываем статическую неопределимость

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1Q}}{\delta_{11}} = \frac{6,1036}{4,4386} = 1,375 \text{ кН}.$$

Строим эпюру M_Q в эквивалентной системе (см. рис. 9.2), откуда

$$\left| M_Q \right|_{\text{наиб}}^D = 1,531 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \left| M_Q \right|_{\text{наиб}}^d = 1,50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определяем диаметр вала в первом приближении из условия статической прочности при изгибе, используя заниженное допускаемое напряжение и считая, что балка нагружена силой $Q = F_\theta + G$:

$$\sigma_{\text{наиб}} = \frac{\left| M_Q \right|_{\text{наиб}}}{W_x} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{-1}}{n_{cp}},$$

где $W_x = \frac{\pi \cdot d_I^3}{32}$, $n_{cp} = \frac{1,6 + 1,9}{2} = 1,75$, для стали 40X: $\sigma_\sigma = 1000$ МПа;

$\sigma_T = 800$ МПа; $\sigma_{-1} = 350 - 380$ МПа.

Тогда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \left| M_Q \right|_{\text{наиб}}^d \cdot n_{cp}}{\pi \cdot \sigma_{-1}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,75}{\pi \cdot 350 \cdot 10^6}} = 42,43 \text{ мм}.$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \left| M_Q \right|_{\text{наиб}}^D \cdot n_{cp}}{\pi \cdot \sigma_{-1}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,581 \cdot 10^3 \cdot 1,75}{\pi \cdot 350 \cdot 10^6}} = 43,18 \text{ мм}.$$

$$D = d \cdot 1,2 = 42,43 \cdot 1,2 = 50,92 \text{ мм}.$$

Принимаем ближайшие стандартные значения $d = 42$ мм, $D = 50$ мм.
 Определяем геометрические характеристики подобранных сечений:

$$J_x^d = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 4,2^4}{64} = 15,27 \text{ см}^4; \quad J_x^D = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 5^4}{64} = 30,68 \text{ см}^4;$$

$$W_x^d = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4,2^3}{32} = 7,271 \text{ см}^3; \quad W_x^D = \frac{\pi \cdot D^3}{32} = \frac{\pi \cdot 5^3}{32} = 12,27 \text{ см}^3.$$

Проводим генеральную проверку раскрытия статической неопределимости на компьютере. Для этого балку делим на 40 равных участков и на эпюре M_Q вычисляем значения моментов в узловых точках.

По данным табл. 9.2 на компьютере вычисляем перемещения узловых точек, строим эпюру перемещений и вычисляем погрешность

Таблица 9.2 – Изгибающие моменты и прогибы в узловых точках

№ узла	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M_Q , кН	-1,500	-1,3188	-1,1375	-0,9563	-0,7751	-0,5938	-0,4126	-0,2314	-0,0501
y , мм	0	- 0,0061	- 0,233	- 0,851	- 1,265	1,7308	- 2,229	- 2,749	- 3,272
№ узла	10	11	12	13	14	15	16	17	18
M_Q , кН	0,1311	0,3124	0,4936	0,6748	0,8561	1,0373	1,2185	1,4000	1,5810
y , мм	- 3,784	- 4,270	- 4,726	- 5,125	- 5,549	- 5,901	- 6,203	- 6,4438	- 6,615
№ узла	19	20	21	22	23	24	25	26	27
M_Q , кН	1,5123	1,4435	1,3748	1,3060	1,2373	1,1686	1,0998	1,0311	0,9623
y , мм	- 6,802	- 6,808	- 6,761	- 6,663	- 6,517	- 6,327	- 6,095	- 5,823	- 5,516
№ узла	28	29	30	31	32	33	34	35	36
M_Q , кН	0,8936	0,8249	0,7561	0,6874	0,6187	0,5499	0,4812	0,4124	0,3437
y , мм	- 5,174	- 4,802	- 4,401	- 3,976	- 3,528	- 3,060	- 2,576	- 2,078	- 1,568
№ узла	37	38	39	40	41				
M_Q , кН	0,2750	0,2062	0,1375	0,0687	0,0000				
y , мм	- 1,050	- 0,526	- 0,273	- 0,141	- 0,0756				

$$\frac{|y_{41}|}{|y|_{\text{наиб}}} \cdot 100\% = \frac{0,0758}{6,808} \cdot 100\% = 1,11\% < 3\%.$$

Следовательно, статическая неопределимость раскрыта верно.

При колебаниях напряжения в балке циклически изменяются. Поэтому проверяем сопротивление балки усталости, учитывая, что необходимый коэффициент запаса $n = 1,6 \dots 1,9$. Подсчитываем коэффициенты запаса по усталости n_R и по текучести n_T в опасных сечениях балки A, B, C и K .

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m};$$

$$n_R = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_v} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m}.$$

Вычисляем силу веса балки:

$$G_\delta = \gamma \cdot V = \gamma \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d^2 \cdot l_d + D^2 \cdot l_D) = 78 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0,042^2 \cdot 0,55 + 0,05^2 \cdot 1,45) = 0,282 \text{ кН}.$$

$$\frac{G_\delta}{G} \cdot 100\% = \frac{0,282}{2} \cdot 100\% = 14,1\%.$$

Сила веса балки выбранного диаметра не превышает 15% силы веса груза G , поэтому балку можно считать системой с одной степенью свободы, для которой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\xi_{cm}}},$$

где ξ_{cm} – перемещение сечения C от статического действия силы веса груза G в направлении колебаний.

Для определения ξ_{cm} воспользуемся эквивалентной системой (рис. 9.3). Построим эпюру изгибающих моментов M_G от силы веса груза G и эпюру \bar{M}_2 от единичной силы, приложенной в направлении искомого перемещения (рис. 9.3).

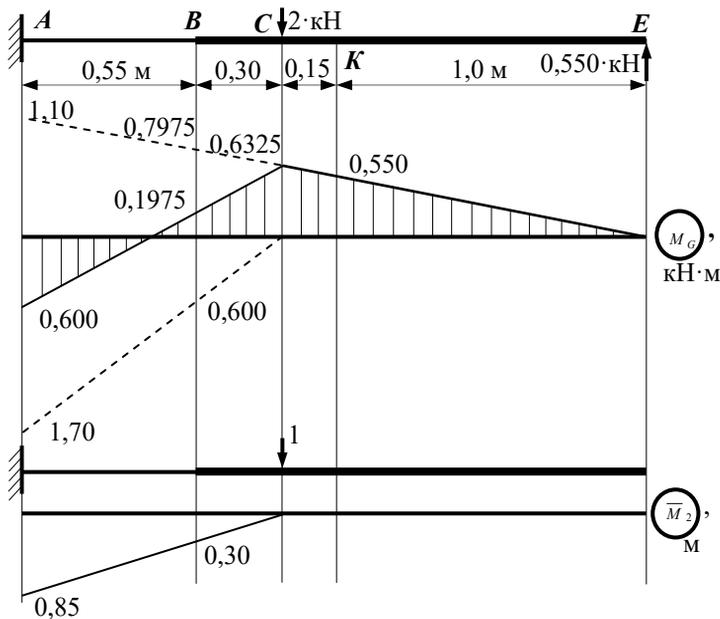


Рис. 9.3. Определение ξ_{cm}

Реакция в опоре E находится из соотношения

$$X_1^G = \frac{G}{Q} \cdot X_1^Q = \frac{2}{5} \cdot 1,375 = 0,550 \text{ кН.}$$

Вычисляем ξ_{cm} способом Верещагина:

$$\begin{aligned} \Delta_{1D} &= \frac{\left(-\frac{1}{2} \cdot 0,165 \cdot 0,3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,3 - 0,6325 \cdot 0,3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,3 + \frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 0,3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,3 \right) \cdot 10^3}{E \cdot J_x^D} + \\ &+ \frac{\left[-0,7975 \cdot 0,55 \cdot \left(0,3 + \frac{1}{2} \cdot 0,55 \right) - \frac{1}{2} \cdot 0,3025 \cdot 0,55 \cdot \left(0,3 + \frac{2}{3} \cdot 0,55 \right) \right]}{E \cdot J_x^d} + \\ &+ \frac{\left[0,6 \cdot 0,55 \cdot \left(0,3 + \frac{1}{2} \cdot 0,55 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1,1 \cdot 0,55 \cdot \left(0,3 + \frac{2}{3} \cdot 0,55 \right) \right] \cdot 10^3}{E \cdot J_x^d} = \\ &= \frac{-0,0154 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 30,68 \cdot 10^{-8}} + \frac{0,08375 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 15,27 \cdot 10^{-8}} = 2,491 \text{ мм.} \end{aligned}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\xi_{cm}}} = \sqrt{\frac{9,81}{2,491 \cdot 10^{-3}}} = 62,75 \text{ с}^{-1}.$$

Вычисляем отношение частот

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{80}{62,75} = 1,275 < 1,3 \text{ – балка работает в резонансной зоне.}$$

Тогда коэффициент усиления колебаний

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \gamma^2 \cdot \frac{\Omega^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1,275^2)^2 + (0,03 \cdot 1,275)^2}} = 1,595.$$

Подсчитываем коэффициенты запаса в предполагаемых опасных сечениях, учитывая, что среднее напряжение цикла создаёт сила веса груза G , а амплитуда напряжений цикла возникает за счёт гармонически изменяющейся силы $F_0 \cdot \sin \Omega \cdot t$.

Сечение А: концентратор – переход под прямым углом, $M_G^A = 0,600 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

$$\sigma_m = \sigma_{cm} = \frac{M_G^A}{W_x^d} = \frac{0,6 \cdot 10^3}{7,271 \cdot 10^{-6}} = 82,52 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \beta \cdot \frac{F_0}{G} \cdot \sigma_{cm} = 1,595 \cdot \frac{3}{2} \cdot 82,52 = 197,4 \text{ МПа.}$$

Из справочных данных [2] $\alpha_\sigma = 2,0$ (концентратор – переход под прямым углом), $q_\sigma = 0,83$ при $\sigma_\sigma = 1000 \text{ МПа}$ и $\alpha_\sigma = 2,0$, тогда $k_\sigma = 1 + q_\sigma \cdot (\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0,83 \cdot (2 - 1) = 1,83$; для $d = 42 \text{ мм}$ $k_d = 0,826$ при $\sigma_\sigma = 500 \text{ МПа}$, $k_d = 0,712$ при $\sigma_\sigma = 1400 \text{ МПа}$. Интерполируем для $\sigma_\sigma = 1000 \text{ МПа}$:

$$k_d = 0,712 + \frac{0,826 - 0,712}{1400 - 500} (1400 - 1000) = 0,76;$$

$k_F = 0,91$ при $\sigma_\theta = 1000$ МПа, шлифовка; $k_V = 0$ – упрочняющей обработки нет, $\psi_\sigma = 0,2$ при $\sigma_\theta \geq 1000$ МПа.

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{800}{197,4 + 82,52} = 2,86;$$

$$n_R = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} = \frac{350}{\frac{1,83}{0,76 \cdot 0,91 \cdot 1} \cdot 197,4 + 0,2 \cdot 82,52} = 0,650.$$

Сечение В: концентратор – галтель, $M_G^B = 0,1975$ кН·м.

$$\sigma_m = \sigma_{cm} = \frac{M_G^B}{W_x^d} = \frac{0,1975 \cdot 10^3}{7,271 \cdot 10^{-6}} = 27,16 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \beta \cdot \frac{F_0}{G} \cdot \sigma_{cm} = 1,595 \cdot \frac{3}{2} \cdot 27,16 = 64,99 \text{ МПа}.$$

Из справочных данных [2] для $r/d = 0,15$: $(k_\sigma)_0 = 1,219$, при $\sigma_\theta = 500$ МПа, $(k_\sigma)_0 = 1,344$ при $\sigma_\theta = 1200$ МПа. Интерполируем для $\sigma_\theta = 1000$ МПа:

$$(k_\sigma)_0 = 1,219 + \frac{1,344 - 1,219}{1200 - 500} (1000 - 500) = 1,31;$$

$\xi = 0,772$ при $D/d = 1,2$, изгиб, тогда

$$k_\sigma = 1 + \xi \cdot [(k_\sigma)_0 - 1] = 1 + 0,772 \cdot (1,31 - 1) = 1,24;$$

$$k_d = 0,76; k_F = 0,91; \psi_\sigma = 0,2; k_V = 1.$$

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{800}{64,99 + 27,16} = 8,68;$$

$$n_R = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} = \frac{350}{\frac{1,24}{0,76 \cdot 0,91 \cdot 1} \cdot 64,99 + 0,2 \cdot 27,16} = 2,870.$$

Сечение С: концентратора нет, $M_G^C = 0,6325$ кН·м.

$$\sigma_m = \sigma_{cm} = \frac{M_G^C}{W_x^D} = \frac{0,6325 \cdot 10^3}{12,27 \cdot 10^{-6}} = 51,55 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \beta \cdot \frac{F_0}{G} \cdot \sigma_{cm} = 1,595 \cdot \frac{3}{2} \cdot 51,55 = 123,3 \text{ МПа}.$$

Из справочных данных [2] $k_\sigma = 1$ – концентратора нет; для $D = 50$ мм $k_d = 0,802$ при $\sigma_e = 500$ МПа, $k_d = 0,683$ при $\sigma_e = 1400$ МПа. Интерполируем для $\sigma_e = 1000$ МПа:

$$k_d = 0,683 + \frac{0,802 - 0,683}{1400 - 500} (1400 - 1000) = 0,74;$$

$$k_F = 0,91; \psi_\sigma = 0,2; k_v = 1.$$

$$n_\tau = \frac{\sigma_\tau}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{800}{123,3 + 51,55} = 4,58;$$

$$n_R = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_v} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} = \frac{350}{\frac{1}{0,74 \cdot 0,91 \cdot 1} \cdot 123,3 + 0,2 \cdot 51,55} = 1,810.$$

Сечение К: концентратор – радиальное отверстие, $M_G^K = 0,550$ кН·м.

$$W_x = \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{64} - \frac{d_1 \cdot D^3}{12}}{D/2} = \frac{\frac{\pi \cdot 5^4}{64} - \frac{0,2 \cdot 5^4}{12}}{5/2} = 8,105 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_m = \sigma_{cm} = \frac{M_G^K}{W_x^K} = \frac{0,55 \cdot 10^3}{8,105 \cdot 10^{-6}} = 67,86 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \beta \cdot \frac{F_0}{G} \cdot \sigma_{cm} = 1,595 \cdot \frac{3}{2} \cdot 67,86 = 162,3 \text{ МПа.}$$

Из справочных данных [2] $\alpha_\sigma = 2,0$ – концентратор – радиальное отверстие при $d_1/D = 0,2$, $q_\sigma = 0,83$ при $\sigma_e = 1000$ МПа и $\alpha_\sigma = 2,0$, тогда $k_\sigma = 1 + q_\sigma \cdot (\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0,83 \cdot (2 - 1) = 1,83$; $k_d = 0,74$; $k_F = 0,91$; $\psi_\sigma = 0,2$.

$$n_\tau = \frac{\sigma_\tau}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{800}{162,3 + 67,86} = 3,48;$$

$$n_R = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_v} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} = \frac{350}{\frac{1,83}{0,74 \cdot 0,91 \cdot 1} \cdot 162,3 + 0,2 \cdot 67,86} = 0,770.$$

Коэффициент запаса балки, равный наименьшему из шести найденных значений $n = 0,65$, не соответствует заданному, поэтому изменяем диаметр поперечного сечения балки и повторяем расчёт только для наиболее опасного сечения A .

После ряда попыток принимаем $d = 30$ мм, $D = 37$ мм.

Определяем геометрические характеристики подобранных сечений:

$$J_x^d = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 3^4}{64} = 3,976 \text{ см}^4; \quad J_x^D = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 3,7^4}{64} = 9,200 \text{ см}^4;$$

$$W_x^d = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 3^3}{32} = 2,651 \text{ см}^3; \quad W_x^D = \frac{\pi \cdot D^3}{32} = \frac{\pi \cdot 3,8^3}{32} = 4,973 \text{ см}^3.$$

$$\xi_{cm} = \frac{-0,0154 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 9,2 \cdot 10^{-8}} + \frac{0,08375 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,976 \cdot 10^{-8}} = 9,695 \text{ мм.}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\xi_{cm}}} = \sqrt{\frac{9,81}{9,695 \cdot 10^{-3}}} = 31,81 \text{ с}^{-1}.$$

Вычисляем отношение частот

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{80}{31,81} = 2,515 > 1,3 \text{ – балка работает во внерезонансной зоне,}$$

следовательно можно принять $\gamma = 0$, тогда

$$\beta = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right|} = \frac{1}{2,515^2 - 1} = 0,188.$$

Подсчитаем коэффициенты запаса в наиболее опасном сечении A :

$$\sigma_m = \sigma_{cm} = \frac{M_G^A}{W_x^d} = \frac{0,6 \cdot 10^3}{2,652 \cdot 10^{-6}} = 226,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \beta \cdot \frac{F_0}{G} \cdot \sigma_{cm} = 0,188 \cdot \frac{3}{2} \cdot 226,2 = 63,80 \text{ МПа.}$$

Из справочных данных [2] $k_\sigma = 1,83$; $k_F = 0,91$; $k_v = 1$; $\psi_\sigma = 0,2$; для $d = 30$ мм $k_d = 0,881$ при $\sigma_a = 500$ МПа, $k_d = 0,757$ при $\sigma_a = 1400$ МПа. Интерполируем для $\sigma_a = 1000$ МПа:

$$k_d = 0,757 + \frac{0,881 - 0,757}{1400 - 500} (1400 - 1000) = 0,81;$$

$$n_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{800}{63,8 + 226,2} = 2,76;$$

$$n_R = \frac{\sigma_{-I}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_v} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} = \frac{350}{\frac{1,83}{0,81 \cdot 0,91 \cdot 1} \cdot 63,8 + 0,2 \cdot 226,2} = 1,72.$$

Коэффициент запаса балки $n = 1,72$ соответствует заданному $n_{необх} = 1,6 \dots 1,9$.

Определяем коэффициенты запаса графическим методом (рис. 9.4).

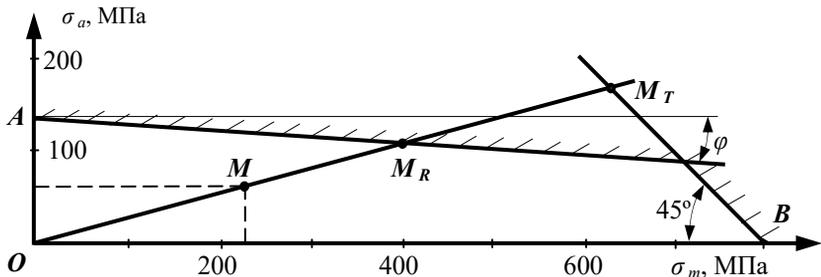


Рис. 9.4. Графическое определение коэффициентов запаса

$$K = \frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_v} = \frac{1,83}{0,81 \cdot 0,91 \cdot 1} = 2,483.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\psi_\sigma}{K} = \frac{0,2}{2,483} = 0,0805;$$

$$OA = \sigma_{-1}^{dem} = \frac{\sigma_{-1}}{K} = \frac{350}{2,483} = 141 \text{ МПа};$$

$$OB = \sigma_m = 800 \text{ МПа};$$

Строим на диаграмме точку M с координатами $\sigma_a = 63,8$ МПа, $\sigma_m = 226,2$ МПа. Проводим из точки O луч через точку M до пересечения с линиями предельных амплитуд по усталости и текучести. Измеряем полученные отрезки OM , OM_R , OM_T и подсчитываем:

$$n_R^{cp} = \frac{OM_R}{OM} = \frac{51}{29} = 1,76;$$

$$n_T^{cp} = \frac{OM_T}{OM} = \frac{80}{29} = 2,76.$$

$$\frac{|u_{IV,V} - \delta|}{\delta} \cdot 100\% = \frac{|0,101 - 0,1|}{0,1} \cdot 100\% = 1,00\% < 3\%.$$

Погрешность в пределах допускаемой, следовательно статическая неопределимость раскрыта верно.

По вычисленным значениям нормальных сил, нормальных напряжений и перемещений строим соответствующие эпюры (см. рис. 2.4, б, в, г).

Подбираем материал для рассмотренного статически неопределимого бруса: $\sigma_{\tau} \geq |\sigma|_{\text{наиб}} \cdot n_{\tau} = 363,2 \cdot 1,5 = 544,8 \text{ МПа}$. Этому условию соответствует сталь 40Х, у которой $\sigma_{\tau} = 800 \text{ МПа}$.

9.4. Контрольные вопросы

1. Какие системы называют системами с одной степенью свободы?
2. Как определяют частоту собственных колебаний системы с одной степенью свободы?
3. Каков физический смысл коэффициента усиления колебаний и как его определяют?
4. По какому циклу изменяются напряжения в балке, нагруженной постоянной и гармонически изменяющейся силами?
5. Какие сечения балки могут быть опасными при колебаниях?
6. Как оценивают прочность балки при колебаниях?
7. Что называют пределом выносливости материала?
8. Как определяют коэффициент запаса прочности балки при колебаниях?
9. Как определяют предел выносливости детали при симметричном цикле?
10. В чём заключается графический способ определения коэффициента запаса прочности детали при циклически изменяющихся напряжениях?

10. ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ РАСЧЁТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ И КУРСОВЫХ РАБОТ

Жизнь современного инженера немыслима без мощной компьютерной техники, позволяющей выполнять сложные комплексные и многовариантные расчеты. Однако основной целью применения этой вычислительной техники является автоматизация расчётов, формализация решений. Особенно актуально это для популярных сейчас численных методов (таких, как метод конечных элементов).

В рамках подготовки к инженерной деятельности студентам предлагается при выполнении расчётно-проектировочных работ «Определение геометрических характеристик поперечных сечений лопаток турбомашин и воздушных винтов» и «Расчёт балки на прочность при колебаниях» выполнить часть работ с использованием ПК.

10.1. Определение геометрических характеристик поперечных сечений лопаток турбомашин и воздушных винтов

При выполнении данной расчётно-проектировочной работы возникает необходимость определять положение центра тяжести сечения в произвольно выбранных осях x , y , площадь и моменты инерции сечения относительно этих осей. Такие расчёты для сложных сечений, какими являются сечения лопаток турбомашин и воздушных винтов, выполняют обычно численным методом с реализацией на ПК. В данном случае была разработана специальная программа «Л2Б».

10.1.1. Постановка задачи

Задано поперечное сечение лопатки турбомашин или воздушного винта (рис. 10.1). Требуется определить положение центра тяжести сечения, главных центральных осей сечения, главные центральные моменты инерции, моменты сопротивления при изгибе, а также построить эллипс инерции.

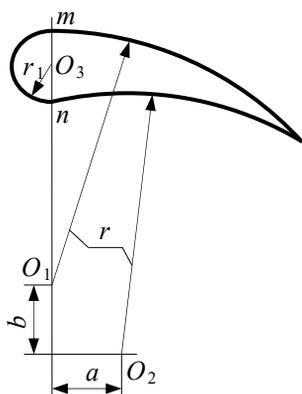


Рис. 10.1. Построение профиля сечения

Площадь сечения, положение центра тяжести и моменты инерции относительно заданных осей определить численным методом с использованием компьютерной расчётной программы «Л2Б».

Главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей определить аналитическим и графическим способами. Определить также моменты сопротивления сечения изгибу относительно главных центральных осей, главные радиусы инерции сечения и построить эллипс инерции.

В пояснительной записке следует представить задание, реферат, содержание, исходные данные дня расчёта на ПК, лист отчёта с результатами выполненного в программе «Л2Б» расчёта, аналитическое и графическое решение с необходимыми пояснениями, выполненную в масштабе схему заданного поперечного сечения с изображением всех осей и эллипса инерции.

10.1.2. Выбор задания

Студенту выдаётся трёхзначный номер и номер таблицы (табл. 10.1 или 10.2). Первая цифра в номере указывает номер строки в столбце «а» табл. 10.1 или 10.2 с размерами поперечного сечения и положение контура сечения в осях x, y . Вторая и третья цифры соответствуют номерам строк в столбцах «б» и «в». Например, для номера 376 из табл. 10,1 получим следующие исходные данные: $r = 130$ мм; $\gamma = 30^\circ$; $a/r = 0,22$; $b/r = 0,20$. Центр кривизны O_3 (см. рис. 10.1) делит отрезок tm пополам: $r_1 = nm/2$.

Таблица 10.1 – Поперечное сечение лопатки турбомашины

№ строки	Размеры			
	r , мм	γ , град	a/r	b/r
1	110	20	0,16	0,25
2	120	25	0,17	0,24
3	130	30	0,18	0,23
4	140	40	0,19	0,22
5	150	50	0,20	0,21
6	160	60	0,21	0,20
7	170	70	0,22	0,19
8	180	80	0,23	0,18
9	190	85	0,24	0,17
0	200	90	0,25	0,17
	a		b	v

Таблица 10.2 – Поперечное сечение воздушного винта

№ строки	Размеры			
	r , мм	γ , град	a , мм	b , мм
1	510	20	31	16
2	520	25	32	17
3	530	30	33	18
4	540	40	34	19
5	550	50	35	20
6	560	60	36	21
7	570	70	37	22
8	580	80	38	23
9	590	85	39	24
0	600	90	40	25
	a		b	v

10.1.3. Теоретическое обоснование

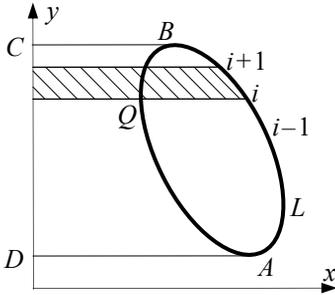


Рис. 10.2. К расчёту геометрических характеристик численным методом

Численный метод расчёта геометрических характеристик заключается в разбиении поперечного сечения на элементарные площадки и вычислении характеристик каждой площадки с последующим их суммированием.

Для определения геометрических характеристик выделенной заштрихованной площадки (рис. 10.2) можно пользоваться известными формулами:

$$A^{(i)} = \frac{(x_{i+1} + x_i)}{2}(y_{i+1} - y_i); \quad (10.1)$$

$$S_x^{(i)} = A^{(i)} \frac{(y_{i+1} + y_i)}{2} = \frac{(x_{i+1} + x_i)}{4}(y_{i+1}^2 - y_i^2); \quad (10.2)$$

$$J_x^{(i)} = A^{(i)} \frac{(y_{i+1} + y_i)^2}{4} = \frac{(x_{i+1} + x_i)}{8}(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} + y_i)^2; \quad (10.3)$$

$$J_{xy}^{(i)} = A^{(i)} \frac{(x_{i+1} + x_i)}{4} \frac{(y_{i+1} + y_i)}{2} = \frac{(x_{i+1} + x_i)^2}{16}(y_{i+1}^2 - y_i^2). \quad (10.4)$$

При суммировании от A до B (против часовой стрелки) получают геометрические характеристики фигуры $ALBCD$. При суммировании от B до A – фигуры $AQBCD$ с обратным знаком.

Следовательно при суммировании по всему контуру получают геометрические характеристики рассматриваемого сечения:

$$A = \sum_{i=1}^n A^{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i+1} + x_i)}{2}(y_{i+1} - y_i); \quad (10.5)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_x^{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i+1} + x_i)}{4}(y_{i+1}^2 - y_i^2); \quad (10.6)$$

$$J_x = \sum_{i=1}^n J_x^{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i+1} + x_i)}{8} (y_{i+1} - y_i)(y_{i+1} + y_i)^2; \quad (10.7)$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n J_{xy}^{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i+1} + x_i)^2}{16} (y_{i+1}^2 - y_i^2). \quad (10.8)$$

Аналогично можно вывести следующие формулы:

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_y^{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_{i+1} + y_i)}{4} (x_{i+1}^2 - x_i^2); \quad (10.9)$$

$$J_y = \sum_{i=1}^n J_y^{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_{i+1} + y_i)}{8} (x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i)^2. \quad (10.10)$$

Выражения (10.5) – (10.10) можно получить также после замены интеграла по области интегралом по её контуру (формула Грина).

Координаты центра тяжести сечения определяются по следующим формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (10.11)$$

Геометрические характеристики поперечного сечения лопатки или воздушного винта (рис. 10.3) относительно произвольных осей x , y и координаты центра тяжести сечения определяются по формулам (10.5) – (10.11).

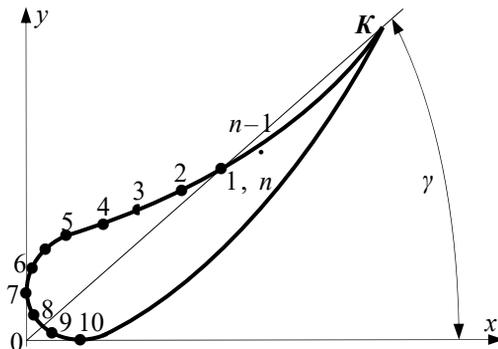


Рис. 10.3 Обозначение точек на контуре сечения

10.1.4. Расчётная программа «Л2Б»

Для выполнения курсовых и расчётно-проектировочных работ на кафедре сопротивления материалов СГАУ была создана специальная программа «Л2Б», которая предназначена для численного решения приведённых заданий и состоит из двух частей: «Л2Б. Лопатка» и «Л2Б. Балка». Первая часть предназначена для выполнения расчётно-проектировочной работы «Определение геометрических характеристик поперечных сечений лопаток турбомашин и воздушных винтов», а вторая – для выполнения работы «Расчёт балки на прочность при колебаниях». Выбор необходимой части производится в главном меню программы (рис 10.4).

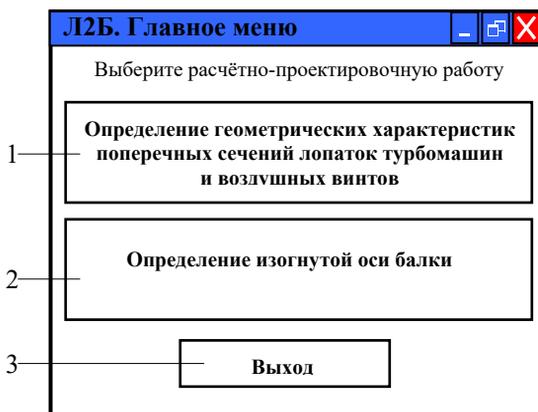


Рис. 10.4. Главное меню программы «Л2Б»:
1 и 2 – кнопки выбора работ, 3 – кнопка завершения работы с программой

В следующем разделе будет рассмотрен порядок работы с первой частью – «Л2Б. Лопатка», а работа с «Л2Б. Балка» рассматривается в разделе 10.2.

10.1.5. Порядок выполнения работы

1. По соответствующим данным вычерчивают поперечное сечение и вырезают шаблон (см. рис. 10.1).

2. На миллиметровке изображают координатные оси x , y и из начала координат проводят луч под углом γ к оси x (см. рис. 10.3), В этих осях устанавливают шаблон таким образом, чтобы передняя кромка сечения касалась координатных осей, а точка K лежала на луче, проведённом из начала координат под углом γ . Обводят линию контура шаблона.

3. Наносят на контур сечения точки (шаг выбирается в зависимости от кривизны дуги, как показано на рис. 10.3) и нумеруют их против часовой стрелки. Причём первая и последняя точки должны совпадать (точек не должно быть больше 40). С чертежа снимают координаты x и y этих узловых точек в миллиметрах, составляют таблицу полученных значений.

4. В компьютерном классе:

а) в главном меню программы выбирают работу «Определение геометрических характеристик поперечных сечений лопаток турбомашин и воздушных винтов», нажав на соответствующую кнопку (рис. 10.4, кнопка 1). Появится основное окно для ввода и редактирования исходных данных расчётно-проектировочной работы (рис. 10.5);

б) в поле 1 (см. рис. 10.5) вводят фамилию и инициалы;

в) в поле 2 (см. рис. 10.5) вводят номер группы;

г) в таблицу «Координаты точек» (см. рис. 10.5) заносят координаты всех точек контура поперечного сечения лопатки или воздушного винта.

Начинать ввод можно с любой точки профиля, но **ОБЯЗАТЕЛЬНО ДОЛЖНЫ БЫТЬ ВЫПОЛНЕНЫ СЛЕДУЮЩИЕ УСЛОВИЯ:**

- обход точек должен быть против часовой стрелки;
- координаты первой и последней точек должны совпадать;
- координаты точек надо вводить в мм;
- при вводе пустые ячейки не допускаются;
- координаты точек должны быть положительными;
- координаты точек вводить с точностью до целых;
- количество точек не должно быть больше 40.

Примечание: если при вводе были пропущены или введены лишние координаты точек, то можно воспользоваться кнопками «+» или «-» (см. рис. 10.5), чтобы соответственно добавить или удалить строч-

ку в таблице. Кнопка «Очистить» очищает от значений всю таблицу «Координаты точек»;

д) нажимают кнопку «Вычислить». Если при вводе не было допущено ошибок, то в поле 7 (см. рис. 10.5) будет выведен профиль поперечного сечения, аналогичный исходному, а в области 8 будет выдана краткая статистика о проведённом расчёте, содержащая основные геометрические характеристики поперечного сечения;

е) нажимают кнопку – «Передать в EXCEL». Автоматически формируется лист отчёта с результатами расчёта и передается в пакет MS EXCEL. После чего он может быть выведен на печать.

На этом расчёт в программе «Л2Б. Лопатка» считается завершённым.

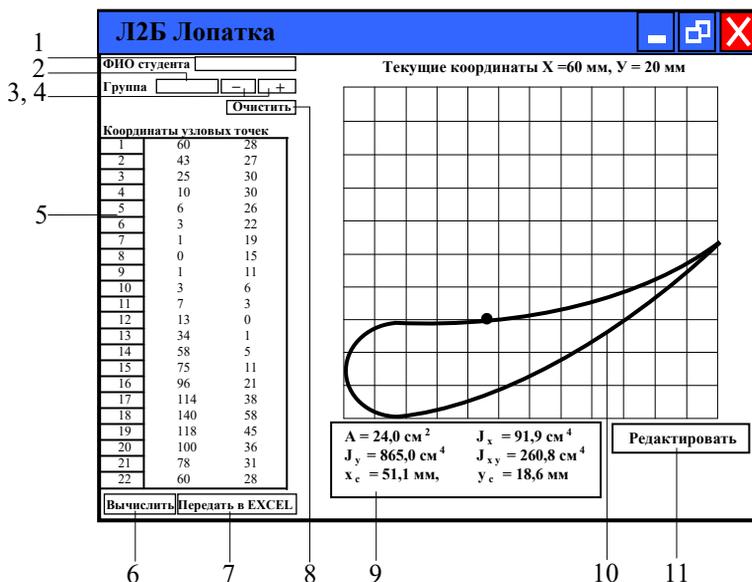


Рис. 10.5 Основное окно программы «Л2Б.Лопатка»:

- 1 – поле «Фамилия И.О. студента»; 2 – поле «Номер группы»;
- 3 – кнопка «+» (добавить строчку); 4 – кнопка «-» (удалить строчку);
- 5 – таблица «Координаты точек сечения»; 6 – кнопка «Вычислить»;
- 7 – кнопка «Передать в EXCEL»; 8 – кнопка «Очистить»; 9 – область, содержащая краткий отчёт о последнем проведённом расчёте;
- 10 – построенный по точкам профиль; 11 – кнопка «Редактировать»

5. Используя полученные результаты расчёта, изображают центр тяжести сечения, проводят центральные оси x_1 , y_1 (рис. 10.6), параллельные осям x , y и вычисляют относительно них осевые и центробежный моменты инерции по формулам преобразования при параллельном переносе осей.

6. Вычисляют главные центральные моменты инерции сечения и определяют положение главных центральных осей аналитическим и графическим (с помощью круга Мора) способами. Проводят главные центральные оси x_0 , y_0 сечения (см. рис. 10.6).

7. Определяют координаты наиболее удалённых от главных центральных осей точек сечения.

8. Вычисляют моменты сопротивления сечения при изгибе.

9. Вычисляют главные радиусы инерции сечения и строят эллипс инерции.

10. Оформляют расчётно-пояснительную записку.

10.1.6. Пример

Для заданного поперечного сечения лопатки (рис. 10.6) определить положение главных центральных осей инерции, главные центральные моменты инерции, моменты сопротивления при изгибе, построить эллипс инерции.

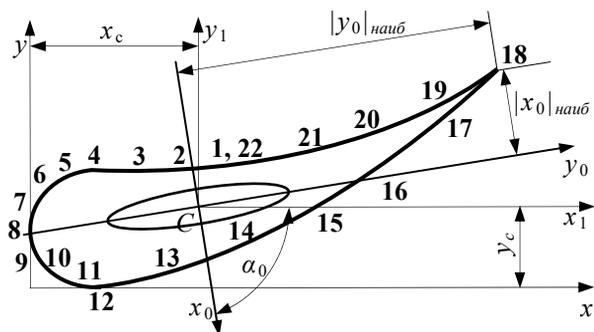


Рис. 10.6 Схема расположения узловых точек и эллипса инерции сечения

Наносим на контур сечения точки и нумеруем их против часовой стрелки. Первой точке присваиваем также последний номер 22. Непосредственным измерением с чертежа находим координаты точек и заносим их в табл.10.3.

Таблица 10.3 – Координаты точек контура сечения

№ точки	x_1 , мм	y_1 , мм	№ точки	x_1 , мм	y_1 , мм
1	60	28	12	13	0
2	43	27	13	34	3
3	25	30	14	58	7
4	10	30	15	75	11
5	6	26	16	96	21
6	3	22	17	114	38
7	1	19	18	140	58
8	0	15	19	118	45
9	1	11	20	100	36
10	3	6	21	78	31
11	7	3	22	60	28

После выполненного расчёта в программе «Л2Б» получим лист отчета с геометрическими характеристиками поперечного сечения (табл. 10.4).

Таблица 10.4 – Геометрические характеристики сечения

Координаты центра тяжести	$x_c = 51,1$ мм, $y_c = 18,6$ мм
Площадь	$A = 24,0$ см ²
Моменты инерции	$J_x = 91,9$ см ⁴
	$J_y = 865,0$ см ⁴
	$J_{xy} = 260,8$ см ⁴

Наносим на сечение центр тяжести и строим центральные оси x_1 , y_1 , параллельные осям x , y (см. рис. 10.6). Вычисляем относительно осей x_1 , y_1 осевые и центробежный моменты инерции по формулам преобразования при параллельном переносе осей:

$$J_{x_1} = J_x - y_c^2 \cdot A = 91,9 - 1,86^2 \cdot 24,0 = 8,87 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_1} = J_y - x_c^2 \cdot A = 865 - 5,11^2 \cdot 24,0 = 238,3 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} - x_c \cdot y_c \cdot A = 260,8 - 5,11 \cdot 1,86 \cdot 24,0 = 32,7 \text{ см}^4.$$

Находим главные центральные моменты инерции сечения и определяем положение главных центральных осей:

$$J_{x_0, y_0} = \frac{J_{x_1} + J_{y_1}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_1} + J_{y_1})^2 + 4 \cdot J_{x_1 y_1}^2} =$$

$$= \frac{8,87 + 238,3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(8,87 + 238,3)^2 + 4 \cdot 32,7^2} = 123,6 \pm 119,3;$$

$$J_{x_0} = 123,6 + 119,3 = 242,6 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = 123,6 - 119,3 = 4,3 \text{ см}^4;$$

$$\text{tg } \alpha_0 = -\frac{J_{x_1 y_1}}{J_{x_1} - J_{y_0}} = -\frac{32,7}{8,87 - 4,3} = -7,155;$$

$$\alpha_0 = \text{arc tg}(-7,155) = -82,0^\circ.$$

Определяем главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей графическим способом с помощью круга Мора (рис. 10.7). Непосредственными измерениями со схемы получим:

$$J_{x_0}^p = OA \approx 245 \text{ см}^4; \quad J_{y_0}^p = OB \approx 4 \text{ см}^4; \quad \alpha_0^p = \langle ABD'_x \approx -80^\circ.$$

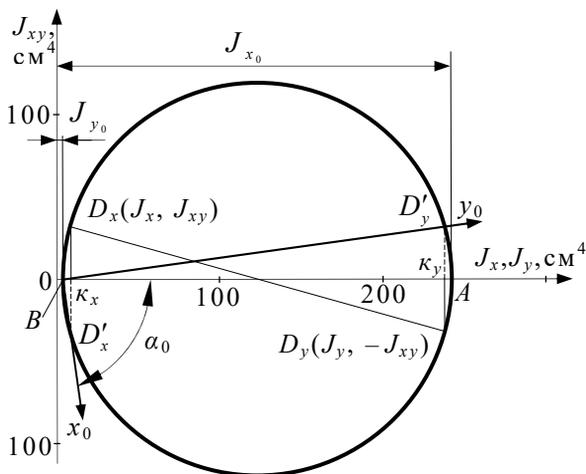


Рис. 10.7 Круг Мора

Строим главные центральные оси сечения (см. рис. 10.6) и непосредственным измерением находим координаты наиболее удалённых от этих осей точек: $|x_0|_{\text{наиб}} \approx 2,63$ см; $|y_0|_{\text{наиб}} \approx 9,36$ см.

Вычисляем моменты сопротивления сечения при изгибе:

$$W_{x_0} = \frac{J_{x_0}}{|y_0|_{\text{наиб}}} = \frac{242,6}{9,36} = 25,92 \text{ см}^4;$$

$$W_{y_0} = \frac{J_{y_0}}{|x_0|_{\text{наиб}}} = \frac{4,3}{2,63} = 1,63 \text{ см}^4.$$

Определяем радиусы инерции

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{A}} = \sqrt{\frac{242,6}{24}} = 3,182 \text{ см};$$

$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{4,3}{24}} = 0,423 \text{ см}$$

и строим эллипс инерции (см. рис. 1.6), положение и размеры которого не противоречат закономерностям взаимного расположения эллипса и сечения.

10.2. Построение изогнутой оси балки

При выполнении курсовой работы «Расчёт на прочность стержневых систем при постоянных и циклически изменяющихся напряжениях» необходимо в расчёте балки на прочность при колебаниях построить изогнутую ось балки для проверки правильности раскрытия статической неопределимости и определения перемещения $\xi_{ст}$ от силы веса груза G . Рассматриваемые балки, как правило, имеют несколько грузовых участков и переменные поперечные сечения, поэтому аналитический метод решения поставленной задачи оказывается громоздким. В этом случае естественно применить численный метод решения, реализованный в компьютерной программе «Л2Б. Балка».

10.2.1. Теоретическое обоснование

Изогнутая ось балки описывается дифференциальным уравнением

$$E J_x y'' = M(z). \quad (10.12)$$

Решение этого уравнения в компьютерной программе можно реализовать методом конечных разностей. С этой целью длину балки l (рис. 10.8) разбиваем на $(n - 1)$ равных частей длиной $a = \frac{l}{n - 1}$.

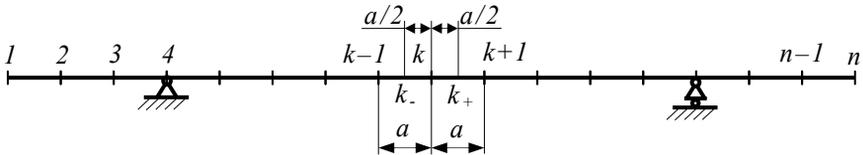


Рис. 10.8. Разбивка балки на участки

Для определения второй производной прогибов y'' в любой точке k прилегающие к ней отрезки разделим пополам точками k_- и k_+ , первые производные в которых будут:

$$y'_{k_-} = \frac{y_k - y_{k-1}}{a}, \quad y'_{k_+} = \frac{y_{k+1} - y_k}{a}. \quad (10.13)$$

С учётом формулы (10.13) вторая производная в точке k :

$$y''_k = \frac{y'_{k_+} - y'_{k_-}}{a} = \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{a^2}. \quad (10.14)$$

Применив выражение (10.14) для всех внутренних узловых точек, получаем вместо выражения (10.12) систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 - 2y_2 + y_3 &= \frac{a^2}{E J_2} M_2; \\ y_2 - 2y_3 + y_4 &= \frac{a^2}{E J_2} M_3; \end{aligned} \quad (10.15)$$

$$y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} = \frac{a^2}{EJ_2} M_{n-2};$$

$$y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n = \frac{a^2}{EJ_2} M_{n-1}.$$

Система уравнений (10.15) состоит из $(n - 2)$ уравнений с n неизвестными.

Недостающие два уравнения составляем, используя граничные условия. Если балка имеет шарнирные опоры, расположенные в узлах i и j , то недостающие уравнения будут иметь следующий вид:

$$y_i = 0, y_j = 0. \quad (10.16)$$

Граничные условия при наличии защемления:

$$y_1 = 0, y'_1 = 0. \quad (10.17)$$

Условие (10.17) требует проводить нумерацию узловых точек с защемлённого конца. Для удовлетворения второго из условий (10.17) представим уравнение изогнутой оси балки возле защемления полиномом второй степени:

$$y \approx b + c \cdot z - d \cdot z^2, \quad (10.18)$$

что будет соответствовать выражению (10.14). Неизвестные коэффициенты этого полинома определяем из условий:

$$z = 0, y = y_1 = 0; z = a, y = y_2; z = 2a, y = y_3. \quad (10.19)$$

С учётом (10.19) окончательное выражение аппроксимирующего полинома примет вид:

$$y = \frac{4y_2 - y_3}{2a} \cdot z + \frac{y_1 - 2y_2}{2a^2} \cdot z^2. \quad (10.20)$$

Подставив (10.20) во второе из условий (10.17), получим:

$$4 \cdot y_2 - y_3 = 0. \quad (10.21)$$

С учётом формул (10.16), (10.17), (10.21) разрешающая система уравнений примет вид:

а) для балки с шарнирными закреплениями

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & & & & 0 \\ & \bullet & & \\ 0 & & & & & 1 & -2 & 1 & 0 & \\ 0 & & & & & & 1 & -2 & 1 & \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \bullet \\ y_{n-3} \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \bullet \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (10.22)$$

а) для балки с защемлением

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & & & & 0 \\ & \bullet & & \\ 0 & & & & & 1 & -2 & 1 & 0 & \\ 0 & & & & & & 1 & -2 & 1 & \\ 1 & & & & & & & & & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \bullet \\ y_{n-3} \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \bullet \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10.23)$$

где $b_i = \frac{a^2}{E \cdot J_x} M_i$.

Решение систем (10.22) и (10.23) осуществляется в программе «Л2Б. Балка». В результате получим искомые прогибы балки в узловых точках y_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

10.2.2. Порядок выполнения работы

1. По данным варианта задания вычерчивают балку (эквивалентную систему) и нагружают её силой веса груза G (рис. 10.9).

2. Лишнюю неизвестную X_G находят из пропорции.

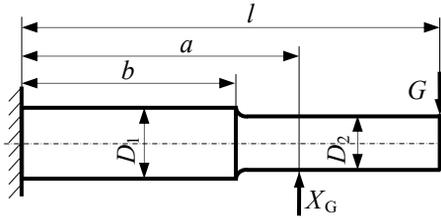


Рис. 10.9. Эквивалентная система

3. Длину балки l разбивают на $(n - 1)$ равных частей длиной 0,05 м для обеспечения достаточной точности.

4. Нумерацию узловых точек от 1 до n следует начинать с опоры (рис. 10.10, 10.11).

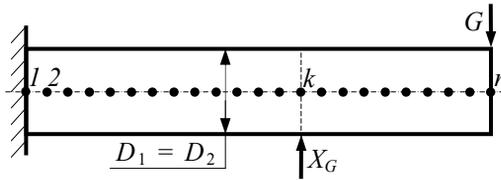


Рис. 10.10. Нумерация узлов в консольной балке

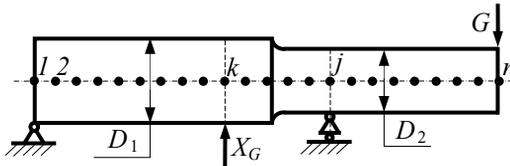


Рис. 10.11. Нумерация узлов в двухопорной балке

5. Вычисляют значения изгибающих моментов M в Нм и заносят в табл. 10.5.

6. В компьютерном классе:

а) в главном меню программы выбирают работу «Определение изогнутой оси балки», нажав на соответствующую кнопку (см. рис. 10.4, кнопка 2). Появляется основное окно для ввода и редактирования данных расчётно-проектировочной работы (см. рис. 10.12);

б) в поле «Фамилия И.О. студента» (см. рис 10.12) введите вашу фамилию и сокращенно имя и отчество, например. «Иванов И.И.»;

в) в поле «Номер группы» введите номер вашей группы, например «2205»;

- г) в поле «Длина балки» введите длину балки в м;
- д) во вкладке «Первый участок» введите в поле « D_1 » диаметр балки на первом участке в см;
- е) в этой же вкладке в поле «Длина первого участка» введите длину первого участка в м;
- ж) во вкладке «Второй участок» введите в поле « D_2 » диаметр балки на втором участке в см.

Примечание: соответствующие поля обеих вкладок « J_1 » и « J_2 » заполняются автоматически. Значения полей « E_1 » и « E_2 » также заданы заранее и соответствуют балке, изготовленной из стали.

- з) в поле 12 занесите поочередно значения изгибающих моментов, возникающих в балке, для каждой узловой точки.

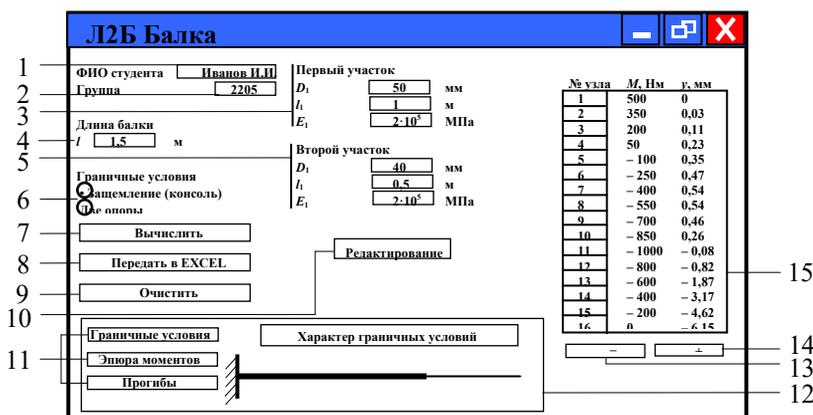


Рис. 10.12. Основное окно программы «ЛЗБ.Балка»:

- 1 – поле «Фамилия И.О. студента»; 2 – поле «Номер группы»;
- 3 – вкладка «Первый участок»; 4 – поле «Длина балки»;
- 5 – вкладка «Второй участок»; 6 – вкладка «Граничные условия»;
- 7 – кнопка «Вычислить»; 8 – кнопка «Передать в EXCEL»;
- 9 – кнопка «Очистить»; 10 – кнопка «Редактирование»; 11 – кнопки управление области визуализации; 12 – область визуализации;
- 13 – кнопка «-» (удалить строку); 14 – кнопка «+» (добавить строку);
- 15 – таблица изгибающих моментов и прогибов

При вводе значений изгибающих моментов ОБЯЗАТЕЛЬНО ДОЛЖНЫ БЫТЬ ВЫПОЛНЕНЫ СЛЕДУЮЩИЕ УСЛОВИЯ:

значения изгибающих моментов надо вводить в Нм;
при вводе пустые ячейки не допускаются;
общее количество узлов не должна превышать 50.

Примечание: если при вводе была пропущена или введена лишняя узловая точка, то воспользуйтесь кнопками «+» и «-» (рис. 10.12), чтобы соответственно добавить или удалить строчку в таблице. Кнопка «Очистить» очищает все поля и таблицу от введённых значений.

и) во вкладке «Граничные условия» выберите тип граничных условий:

- если балка представляет собой защемлённую консоль, то достаточно просто выбрать соответствующий пункт;
- если же балка двухопорная, то необходимо ещё ввести номера узлов, в которых располагаются опоры, в появившуюся ниже вкладку «Номера узлов опор» (вкладка появится сразу после выбора пункта «Две опоры»).

к) нажмите кнопку «Вычислить».

Если при вводе не было допущено ошибок, то в табл. 10.6 появится столбец со значениями прогибов в соответствующих узловых точках. Чтобы проверить правильность полученного результата, предусмотрена область визуализации расчёта. Используя кнопки «Граничные условия», «Эпюра моментов» и «Прогиб» (рис. 10.12, кнопка 11) можно быстро и наглядно просмотреть характер граничных условий, эпюру изгибающих моментов и изогнутую ось балки.

л) если результат соответствует физической картине деформации балки, то нажмите на кнопку «Передать в EXCEL» (рис. 10.12, кнопка 8). Будет автоматически сформирован лист отчёта с результатами расчёта и передан в пакет MS EXCEL. После чего он может быть выведен на печать. На этом расчёт в программе «Д2Б. Балка» считается завершённым.

7. Получают результаты расчета – перемещения узловых точек в мм, по которым строится изогнутая ось балки. Перемещение в точке, где приложена сила веса груза, и будет ξ_{cm} .

8. Выполняют проверку правильности раскрытия статической неопределимости.

10.2.3. Пример

На рис. 10.13 изображена статически неопределимая балка переменного сечения. При расчёте этой балки на колебания нужно определить ξ_{cm} – прогиб на левом конце балки (в точке приложения груза) от

силы веса груза $G = 2 \text{ кН}$. Расчёт прогиба выполняется в компьютерной программе «Л2Б. Балка», используя эквивалентную систему (рис. 10.14). Результаты расчета используются также для генеральной проверки правильности раскрытия статической неопределённости. Заданную длину балки $l = 1,5 \text{ м}$ разобьём на 15 равных частей.

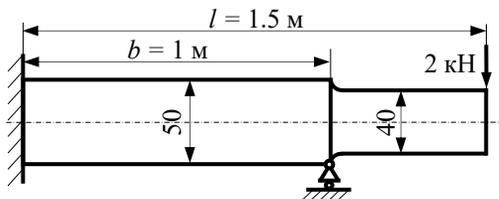


Рис. 10.13. Расчётная схема статически неопределимой балки

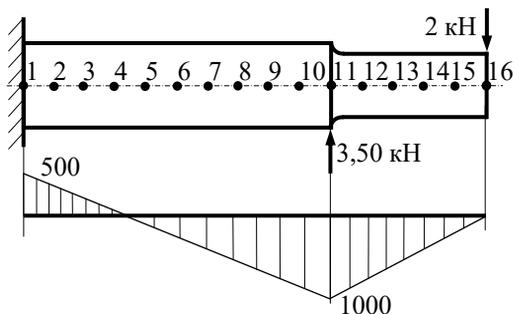


Рис. 10.14. Нумерация узлов и эпюра изгибающих моментов в эквивалентной системе

Вычисляем изгибающие моменты в узловых точках и занесём в табл. 10.5.

Таблица 10.5 – Значения изгибающих моментов в узловых точках

Номер узла	M , Нм						
1	500	5	-100	9	-700	13	-600
2	350	6	-250	10	850	14	-400
3	200	7	-400	11	-1000	15	-200
4	50	8	-550	12	-800	16	0

После выполненного расчёта в программе «Л2Б» получим лист отчёта. Значения прогибов в узловых точках приведены в табл. 10.6.

Таблица 10.6 – Значения прогибов в узловых точках

Номер узла	y, мм						
1	0,00	5	0,36	9	0,46	13	-1,87
2	0,03	6	0,47	10	0,26	14	-3,17
3	0,11	7	0,54	11	-0,08	15	-4,62
4	0,23	8	0,54	12	-0,82	16	-6,15

Перемещение в точке, где приложена сила веса груза, и будет $\xi_{cm} = y_{16} = -6,15$ мм.

Изогнутая ось балки, построенная по данным распечатки, приведена на рис. 10.15.

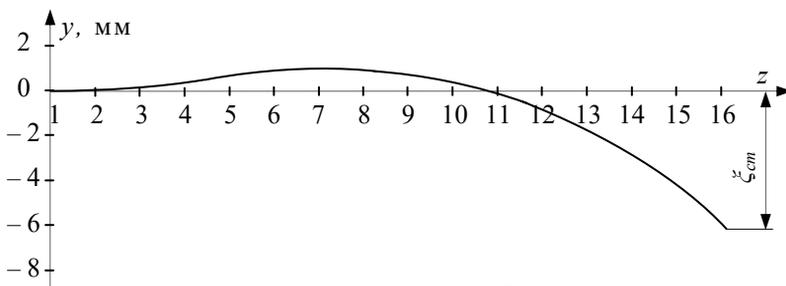


Рис. 10.15 Изогнутая ось балки

Определяем погрешность раскрытия статической неопределимости:

$$\delta = \frac{|y_{11}|}{|y|_{\text{наиб}}} \cdot 100\% = \frac{0,08}{6,15} \cdot 100\% = 1,30\% < 3\%$$

– статическая неопределимость раскрыта верно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: МГТУ им. Баумана, 2007. – 592 с.
2. Справочные данные к расчётно-проектировочным и курсовым работам по сопротивлению материалов. Ч.1 / сост. В.К. Шадрин, В.С. Вакулук, В.Б Иванов [и др.]. – Самара: Изд-во СГАУ, 2007. – 36 с.
3. Справочные данные к расчётно-проектировочным и курсовым работам по сопротивлению материалов. Ч.2 / сост. В.К. Шадрин, В.С. Вакулук, В.Б Иванов [и др.]. – Самара: Изд-во СГАУ, 2007. – 24 с.
4. Задания на расчётно-проектировочную работу «Расчёт статически определимых балок»: метод. указания / С.М. Лежин, В.Ф. Павлов, В.К. Шадрин. – Самара: Изд-во СГАУ, 2008. – 68 с.
5. Серенсен, С.В. Несущая способность и расчёты деталей машин на прочность / С.В. Серенсен, В.П. Когаев, Р.М. Шнейдерович. – М.: Машиностроение, 1975. – 480 с.
6. Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – Киев: Изд-во Дельта, 2008. – 816 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие указания к выполнению и оформлению работ	3
2. Расчёт статически неопределимого ступенчатого бруса	5
2.1. Задание	5
2.2. Выбор задания	5
2.3. Порядок выполнения работы	6
2.4. Пример выполнения работы.....	7
2.5. Контрольные вопросы.....	14
3. Определение геометрических характеристик поперечного сечения бруса.....	15
3.1. Задание	15
3.2. Выбор задания	15
3.3. Порядок выполнения работы	15
3.4. Пример выполнения работы.....	18
3.5. Контрольные вопросы.....	25
4. Расчёт статически определимых балок.....	26
4.1. Задание	26
4.2. Выбор задания	26
4.3. Порядок выполнения работы	27
4.4. Примеры выполнения работы	28
4.5. Контрольные вопросы.....	44
5. Расчёт плоской статически определимой рамы	45
5.1. Задание	45
5.2. Порядок выполнения работы	45
5.3. Пример выполнения работы.....	49
5.4. Контрольные вопросы.....	53
6. Расчёт плоской статически неопределимой рамы	54
6.1. Задание	54
6.2. Порядок выполнения работы	54
6.3. Пример выполнения работы.....	58
6.4. Контрольные вопросы.....	66

7. Расчёт пространственного бруса	67
7.1. Задание	67
7.2. Порядок выполнения работы	67
7.3. Пример выполнения работы.....	72
7.4. Контрольные вопросы	81
8. Расчёт вала зубчатой передачи.....	83
8.1. Задание	83
8.2. Порядок выполнения работы	83
8.3. Пример выполнения работы.....	84
8.4. Контрольные вопросы	94
9. Расчёт балки при колебаниях	95
9.1. Задание	95
9.2. Порядок выполнения работы	95
9.3. Пример выполнения работы.....	100
9.4. Контрольные вопросы	112
10. Применение ЭВМ при выполнении расчётно- проектировочных и курсовых работ	113
10.1. Определение геометрических характеристик поперечных сечений лопаток турбомашин и воздушных винтов	113
10.1.1. Постановка задачи	113
10.1.2. Выбор задания.....	114
10.1.3. Теоретическое обоснование	116
10.1.4. Расчётная программа «Л2Б».....	118
10.1.5. Порядок выполнения работы.....	118
10.1.6. Пример	121
10.2. Построение изогнутой оси балки	124
10.2.1. Теоретическое обоснование	125
10.2.2. Порядок выполнения работы.....	127
10.2.3. Пример.....	130
Список литературы	133

Учебное издание

*Шадрин Валентин Карпович,
Вакулюк Владимир Степанович,
Каранаева Оксана Валериевна,
Кирпичёв Виктор Алексеевич,
Павлов Валентин Фёдорович,
Сазанов Вячеслав Петрович,
Букатый Алексей Станиславович*

РАСЧЁТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ И КУРСОВЫЕ РАБОТЫ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Редактор Н.С. Купринова
Компьютерная верстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 11.05.2017. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 8,5.

Тираж 25 экз. Заказ . Арт. 5/2017.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)
443086 Самара, Московское шоссе, 34.