

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

В.С. ВАКУЛЮК, А.В. ЧИРКОВ, В.К. ШАДРИН

РАСЧЁТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

САМАРА 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

В.С. ВАКУЛЮК, А.В. ЧИРКОВ, В.К. ШАДРИН

РАСЧЁТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2012

УДК СГАУ: 620.1.05

ББК СГАУ: 30.121

В 73

Рецензенты: канд. техн. наук, проф. И. Е. Сескин,
канд. техн. наук, доц. В. А. Мехеда

Вакулюк В.С.

В 73 **Расчётно-проектировочные работы по сопротивлению материалов:** учеб. пособие / *В.С. Вакулюк, А.В. Чирков, В.К. Шадрин.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2012. – 84 с.

ISBN 978-5-7883-0875-3

Кратко изложено содержание основных тем курса «Сопротивление материалов», акцентируя внимание на наиболее сложных для понимания вопросах.

Приведены расчётные схемы и исходные данные к расчётно-проектировочным работам по сопротивлению материалов, охватывающим основные разделы курса.

Изложены методика выполнения работ, основные требования к оформлению, даны контрольные вопросы, рассмотрены примеры выполнения работ.

Предназначено для студентов всех специальностей заочной формы обучения, изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Прикладная механика», «Механика материалов и конструкций», «Общая теория механики материалов и конструкций».

УДК СГАУ: 620.1.05

ББК СГАУ: 30.121

ISBN 978-5-7883-0875-3

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	4
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	4
Основной	4
Дополнительный	5
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ТЕМАМ КУРСА	5
Тема 1. Основные понятия	5
Тема 2. Геометрические характеристики плоских сечений	7
Тема 3. Растяжение, сжатие	9
Тема 4. Кручение	11
Тема 5. Изгиб	12
Тема 6. Основы теории напряжённого и деформированного состояний ..	15
Тема 7. Общие методы определения перемещений в произвольно нагруженных системах. Статически неопределимые системы	19
Тема 8. Устойчивость сжатых стержней	23
Тема 9. Прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени	25
Тема 10. Динамическая нагрузка	26
КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ	27
1 Требования к выполнению контрольных работ	27
2 Расчёты на прочность и жёсткость при плоском изгибе	28
3 Расчёт плоской статически определимой рамы	58
4 Расчёт плоской статически неопределимой рамы	64
5 Расчёт вала зубчатой передачи	73

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Соппротивление материалов – часть науки о прочности, её основа, азбука. Изучение курса позволяет овладеть методами расчёта элементов конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость.

В отличие от теоретической механики, в курсе сопротивления материалов реальные тела деформируются, т.е. изменяют форму и геометрические размеры.

Учебное пособие составлено на основе "Методических указаний..." Ф.В. Долинского [1] с учетом программы курса сопротивления материалов для заочников СГАУ.

Изучение курса "Сопротивление материалов" представляет для начинающего определенные трудности. В этой связи рекомендуется изучение дисциплины в следующей последовательности: предварительно ознакомиться с учебным материалом по учебникам и учебным пособиям, обращая внимание на понимание физической сущности явлений, принимаемые допущения и ограничения. На основании полученных представлений от предварительного изучения курса надо решить несколько задач, относящихся к разделу и рекомендованных в пособии; углубленно изучить раздел курса сопротивления материалов и законспектировать основные положения, необходимость в которых определяется индивидуально самим студентом.

В учебном пособии после каждой темы даются вопросы для самопроверки. Изучив необходимые темы, нужно решить соответствующие задачи контрольного задания.

Студент допускается к сдаче экзамена при наличии знаний по курсу, определяемых предварительным зачётом, получение которого возможно при выполнении контрольных работ по данному пособию и после прохождения лабораторного практикума.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов. – М.: Издательство МГТУ, 2007. – 591 с.
2. Сопротивление материалов: учеб. пособие / П.А. Павлов, Л.К. Паршин, Б.Е. Мельников, В.А. Шерстнёв; под ред. Б.Е Мельникова. – СПб.: Издательство «Лань», 2007. – 560 с.
3. Заславский, Б.В. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: Машиностроение, 1986. – 328 с.

4. Сборник задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие / под ред. Л.К. Паршина. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 432 с.

5. Сопротивление материалов. Лабораторный практикум: учеб. пособие для вузов. – М.: Дрофа, 2004. – 352 с.

Дополнительный

6. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко [и др.]. – Киев: Наукова Думка, 1986. – 775 с.

7. Сопротивление материалов: руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчётно-графических работ / В.А. Копнов, С.Н. Кривошапко. – М.: Высш. шк., 2005. – 351 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ТЕМАМ КУРСА

Тема 1. Основные понятия

Л и т е р а т у р а: [1, Введение, § В1 – В5]; [2, гл. 1, § 1.1 – 1.9]; [3, гл.1].

При изучении темы обратите внимание на следующие понятия: реальный объект и его схематизация; виды тел, изучаемых в сопротивлении материалов; гипотезы о твердом теле; силы внешние и внутренние; напряжения в точке тела (полное, нормальное, касательное); деформации; перемещения (линейные, угловые); принцип независимости действия сил и др.

Внешние силы, действующие на реальный объект, чаще всего известны. Приложив внешние силы к расчётной схеме детали, из уравнений равновесия можно определить реакции опор, которые при расчётах переходят в разряд внешних. Обычно необходимо определить внутренние силы (силы взаимодействия внутренних частиц друг с другом), которые неизвестны по величине и направлению, но которые нужно знать для выполнения расчётов на прочность и жёсткость. Определение внутренних сил осуществляется с помощью так называемого метода сечений. Его сущность заключается в следующем:

1. Рассекают (мысленно) тело в интересующем сечении.
2. Отбрасывают одну из частей (безразлично какую).

3. Заменяют действие отброшенной части тела на оставшуюся системой внутренних сил, которые в данном случае переходят в разряд внешних. Внутренние силы по принципу действия и противодействия всегда взаимны и представляют непрерывно распределённую по сече-

нию систему сил. Их значение и ориентация в каждой точке сечения произвольны, зависят от ориентации сечения относительно тела, величины и направления внешних сил, геометрических размеров тела. Внутренние силы (произвольную систему сил) можно привести к главному вектору \bar{R} и главному моменту \bar{M} . За точку приведения принимают обычно центр тяжести сечения. Выбрав систему координат x, y, z (ось z – по нормали к поперечному сечению, оси x и y – в плоскости этого сечения) и начало системы в центре тяжести сечения, обозначим проекции главного вектора \bar{R} на координатные оси через N, Q_x, Q_y , а проекции главного момента \bar{M} – M_x, M_y, M_z . Эти три силы и три момента называются внутренними силовыми факторами в сечении. Каждый из них имеет определенное название: N – нормальная (продольная) сила в сечении (проекция \bar{R} на ось, нормальную к поперечному сечению, т.е. на ось z); Q_x, Q_y – поперечные (перерезывающие) силы в сечении (проекции \bar{R} соответственно на оси x и y); M_z – крутящий момент (относительно оси бруса z); M_x, M_y – изгибающие моменты относительно осей x и y соответственно.

4. Уравновешивают оставшуюся часть рассматриваемого тела, используя уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \\ \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0, \end{aligned}$$

и определяют внутренние силовые факторы.

Знание внутренних силовых факторов совершенно необходимо для расчётов элементов конструкций на прочность и жёсткость и поэтому метод сечений следует хорошо усвоить.

Вопросы для самопроверки

Что изучает сопротивление материалов и каково значение науки в общем цикле инженерных дисциплин? Что такое упругость, пластичность, деформация, перемещение (угловое, линейное), напряжение в точке (полное, нормальное, касательное)? Что понимается под прочностью, жёсткостью, устойчивостью конструкций? Отличие деформации от перемещения. Какие силы называют внешними, а какие – внутренними, их различие? Внутренние силовые факторы и их определение. Основные гипотезы сопротивления материалов. В чём суть принципа Сен-Венана?

Тема 2. Геометрические характеристики плоских сечений

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 3]; [2, гл. 9]; [3, гл. 4]; [4, гл. 3, задачи: 9.2; 9.6; 9.14];

Прочностные и деформационные возможности элементов конструкций, поперечные сечения которых не являются правильными фигурами, существенно зависят от ориентации (в отношении поперечных сечений) внешних сил, прикладываемых к ним. Поэтому изучению разделов сопротивления материалов обычно предшествует ознакомление с некоторыми геометрическими характеристиками сечений, используемых при расчётах на прочность, жёсткость и устойчивость.

В теме обратите внимание на следующие понятия: статические моменты площади; полярный, осевой и центробежный моменты инерции сечения; определение знаков статических моментов и центробежного момента инерции, связь между осевыми и полярными моментами инерции; основные свойства всех моментов; формула параллельного переноса от центральных осей; зависимость между моментами инерции относительно осей, составляющих между собой некоторый угол, главные моменты инерции сечения; моменты сопротивления сечения при изгибе и кручении; радиусы инерции сечения; вывод формул для определения моментов инерции простейших сечений (прямоугольник, треугольник, круг, кольцо).

При расчётах на жёсткость используются значения главных моментов инерции сечения.

Разместим начало системы координат в центре тяжести поперечного сечения и будем поворачивать сечение определенным образом относительно этой системы координат. В этом случае осевые J_x , J_y и центробежный J_{xy} моменты инерции будут получать каждый раз новые значения. Осевые моменты инерции достигнут экстремального (максимального и минимального) значения относительно взаимно перпендикулярных осей тогда, когда центробежный момент инерции станет равным нулю. В этом случае оси, лежащие в плоскости поперечного сечения, получают название главных центральных осей инерции, а осевые моменты инерции относительно этих осей – главные центральные моменты инерции. Определение положения главных центральных осей и значений главных центральных моментов инерции является конечной целью изучения раздела.

Главные центральные моменты инерции определяются в такой последовательности:

1. Делят сложное сечение на простые фигуры и определяют их площади и моменты инерции относительно собственных центральных осей.

2. Выбирают применительно к поперечному сечению бруса систему координат.

3. Относительно этой системы координат определяют положение центра тяжести всего сечения.

4. Проводят через центр тяжести сечения центральные оси, параллельные исходным.

5. Используя формулы переноса, находят значения осевых и центробежного моментов инерции всего сечения относительно центральных осей.

6. Определяют величину главных центральных моментов инерции J_{x_0}, J_{y_0} сечения и положение главных осей (аналитически и графически):

$$J_{x_0} = \frac{1}{2} \left[J_x + J_y + \sqrt{J_x - J_y}^2 + 4J_{xy}^2 \right],$$

$$J_{y_0} = \frac{1}{2} \left[J_x + J_y - \sqrt{J_x - J_y}^2 + 4J_{xy}^2 \right],$$

$$\alpha_0 = - \operatorname{arctg} \frac{J_{xy}}{J_x - J_{y_0}}.$$

При графическом определении главных моментов инерции строится круг Мора.

Для расчётов на прочность при изгибе необходимо знать моменты сопротивления сечения изгибу:

$$W_{x_0} = \frac{J_{x_0}}{|y_0|_{\text{наиб}}}, \quad W_{y_0} = \frac{J_{y_0}}{|x_0|_{\text{наиб}}},$$

где $|x_0|_{\text{наиб}}$, $|y_0|_{\text{наиб}}$ – координаты наиболее удалённых от главных центральных осей точек сечения, определяемые из формул

$$x_0 = x \cdot \cos \alpha_0 + y \cdot \sin \alpha_0,$$

$$y_0 = y \cdot \cos \alpha_0 - x \cdot \sin \alpha_0,$$

α_0 – угол между осями x и x_0 .

При расчётах на устойчивость потребуются значения радиусов инерции сечения

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{A}}, \quad i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{A}}, \quad \text{где } A \text{ – площадь сечения.}$$

Вопросы для самопроверки

Что такое осевой, центробежный и полярный моменты инерции? Какая существует связь между осевыми и полярным моментами инерции? Основное свойство статического момента площади. Формулы для определения координат центра тяжести сечения. Как определяются знаки статических моментов и центробежного момента инерции? Формула параллельного переноса осей. Относительно какой оси осевой момент инерции сечения достигает наименьшего значения? Какие оси называются главными, а какие – центральными? Сколько главных центральных осей может иметь сечение? Укажите основное свойство всех моментов инерции. Как определяются главные моменты инерции сечения (аналитически и графически)? Как изменяются значения моментов инерции правильных фигур (например, квадрат, круг и т.д.) относительно взаимно перпендикулярных центральных осей при повороте на произвольный угол?

Тема 3. Растяжение, сжатие

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 1]; [2, гл. 2, § 2.1 – 2.13, гл. 3, § 3.1 – 3.5]; [3, гл. 2]; [4, гл. 2, задачи: 2.4; 2.11; 2.12; 2.15; гл. 3, задачи: 3.3; 3.5; 3.8; 3.12; 1.70; 1.92]; [5, гл. 5, работа № 1].

Раздел растяжения, сжатия бруса с прямолинейной осью внешними силами, равнодействующие которых совпадают с осью бруса, занимает важное место при изучении курса сопротивления материалов. В теме изучается деформация бруса, более подробно освещается понятие нормальной силы в сечении, способы ее определения, изучаются деформации. При решении инженерных задач необходимо оценивать способность материала противодействовать внешним силам. Поэтому приводится описание методов испытания образцов, изготовленных из пластичных материалов, и определение их важнейших характеристик: пределов – пропорциональности $\sigma_{пц}$, упругости σ_y , текучести σ_T , прочности σ_σ ; модуля продольной упругости E , коэффициента Пуассона μ . Устанавливается зависимость $\sigma = E \cdot \varepsilon$ между напряжениями и деформациями в пределах малых деформаций. Эта зависимость известна под названием закона Гука.

Вводятся понятия опасного состояния, допускаемого напряжения, коэффициента запаса прочности. Составляется условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq \sigma ,$$

где N – нормальное усилие; A – площадь поперечного сечения стержня; $\sigma = \frac{\sigma_{пред}}{n}$ – допускаемое напряжение; n – нормативный (для данной отрасли машиностроения) коэффициент запаса прочности; $\sigma_{пред}$ – предельное напряжение: для пластичного материала $\sigma_{пред} = \sigma_{т}$; для хрупкого – $\sigma_{пред} = \sigma_{в}$.

Из условия прочности можно решить три основные задачи сопротивления материалов:

- 1) оценка прочности $\left| \frac{N}{A} \right|_{наиб} \leq \sigma$;
- 2) назначение размеров поперечного сечения $A \geq \frac{|N|_{наиб}}{\sigma}$;
- 3) определение грузоподъёмности $|N|_{наиб} \leq \sigma \cdot A$.

Рассматриваются способы решения статически неопределимых систем, их особенности. Отмечается единство статической, геометрической и физической сторон задачи.

Вопросы для самопроверки

Что такое расчётная схема? Дайте определение гипотезы плоских сечений. Что такое абсолютное и относительное удлинение (укорочение)? Назовите основные характеристики пластичных и хрупких материалов. Объясните физический и геометрический смысл модуля продольной упругости. Что такое коэффициент Пуассона, зоны упругости, общей текучести, упрочнения? Что такое площадка текучести? Какое явление называется наклёпом? Какие задачи решаются при расчётах на прочность? Какие системы называются статически определимыми и какие – статически неопределимыми? Что такое степень статической неопределимости системы? Какой расчёт называется по допускаемым напряжениям и какой – по предельным нагрузкам? Как определяется потенциальная энергия деформации при центральном растяжении, сжатии?

Тема 4. Кручение

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 2]; [2, гл. 7, § 7.1 – 7.6]; [3, гл. 5, § 5.1 – 5.5, 5.10 – 5.12]; [4, гл. 7, задачи: 7.6; 7.8; 2.67; 7.16; 7.24]; [5, гл. 5, работа № 5].

Вводится понятие чистого сдвига. Находятся нормальные и касательные напряжения в наклонных площадках в случае чистого сдвига. Вводится понятие модуль сдвига G . Устанавливается связь между модулем продольной упругости E , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона μ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

В теме дается определение деформации кручения бруса с прямой осью при нагружении внешними (скручивающими) парами в сечениях, перпендикулярных его оси. Используя метод сечений, уточняется определение понятия крутящего момента.

Основное внимание уделяется установлению зависимости между касательным напряжением, крутящим моментом, полярным моментом инерции и полярной координатой площадки, в которой определяется напряжение для бруса круглого и кольцевого сечений. При этом в основу вывода указанной зависимости положена гипотеза плоских сечений: *поперечные сечения, плоские и нормальные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси после деформации*; радиусы в поперечном сечении, прямолинейные до деформации, остаются прямолинейными после деформации.

Расчет брусьев на прочность выполняется по формуле

$$|\tau|_{\text{наиб}} = \frac{M_k}{W_p} \leq \tau,$$

где M_k – крутящий момент; W_p – момент сопротивления сечения кручению; τ – допускаемое напряжение при сдвиге, равное примерно $\tau \approx (0,5 - 0,6) \sigma$.

Брусья, работающие на кручение, рассчитывают также на жёсткость. Для этого вводят понятие угла поворота сечения (угла закручивания) φ , относительного угла закручивания $\theta = \varphi/l$. Здесь l – длина участка бруса. При этом φ определяется из выражения

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{C},$$

где $C = GJ_p$ – жёсткость сечения бруса при кручении; J_p – полярный момент инерции поперечного сечения бруса.

Считается, что жёсткость бруса обеспечена, если $\theta \leq \theta_0$, где допустимый угол закручивания θ_0 обычно задается.

Вопросы для самопроверки

Что такое чистый сдвиг, как формулируется закон парности касательных напряжений? Напишите закон Гука при сдвиге. Что называется крутящим моментом? Как он определяется, его размерность? Как найти касательное напряжение в произвольной точке бруса круглого поперечного сечения? Покажите закономерность распределения касательного напряжения в брус круглого поперечного сечения. Что такое полярный момент инерции сечения, момент сопротивления кручению? Чему они равны для простых форм и их размерность? Как определяется угол закручивания бруса? Как решаются основные задачи расчёта на прочность при кручении?

Тема 5. Изгиб

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 4]; [2, гл. 8, 10, 11], [3, гл. 6, § 6.1 – 6.10, 6.12]; [4, гл. 8, задачи: 8.7; 8.12; 8.14; гл. 10, задачи: 10.3; 10.6; 10.13; гл. 11, задачи: 11.3; 11.17, д; 11.21]; [5, гл. 5, работы: № 9; 15; 16].

Брус испытывает плоский (прямой) изгиб, если он нагружен парами сил или (и) силами, перпендикулярными его оси, плоскость действия которых совпадает с одной из главных плоскостей жёсткости.

Главная плоскость жёсткости бруса – это плоскость, проходящая через его ось и одну из главных центральных осей его поперечного сечения (см. тему 2). Как правило, брус нагружается в плоскости наибольшей жёсткости (проходящей через ось y). Предположим, что внешние силовые факторы приложены в одной плоскости, она проходит через ось y . Пусть ось y будет осью симметрии сечения. Тогда внутренние силы в поперечном сечении приводятся только к изгибающему моменту M_x или изгибающему моменту и поперечной (перерезывающей) силе Q_y , одновременно. В первом случае изгиб называется прямым чистым, а во втором – прямым поперечным.

В этом разделе остановимся в основном на расчёте балок на прочность и изучении деформаций и перемещений, так как вопросы определения внутренних силовых факторов в сечениях бруса изложены в теме 1 пособия.

При прямом чистом изгибе в поперечном сечении балки возникают только нормальные напряжения. Расчет балок на изгиб и подбор размеров поперечного сечения осуществляется на основании условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma, \quad \text{где } \sigma = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}.$$

Здесь M_x – изгибающий момент относительно нейтральной линии (оси x); W_x – момент сопротивления изгибу; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение; $\sigma_{\text{пред}}$ – предельное напряжение: для пластичных материалов – $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{T}}$, для хрупких – $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\sigma}$, где σ_{T} – предел текучести; σ_{σ} – предел прочности материала; n – нормативный запас прочности, задаваемый в каждой отрасли машиностроения.

В случае прямого поперечного изгиба расчёт балок на прочность осуществляется по той же формуле, что и при прямом чистом изгибе, если сечение не тонкостенное, и при условии, что отношение длины балки l к размеру b , параллельному силовой оси поперечного сечения балки, $l/b > 6$. При этом, касательные напряжения примерно на порядок меньше нормальных напряжений и все "перекрывается" запасом прочности, который в машиностроении, например, принимается 2,0 – 2,5.

Если сечение тонкостенное или соотношение длины балки и размера поперечного сечения в направлении силовой оси меньше или равно 6, то следует учитывать действие касательных напряжений.

Для балок сплошного поперечного сечения касательные напряжения определяют по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{омс}}}{J_x b(y)},$$

где Q_y – поперечная сила в сечении; $S_x^{\text{омс}}$ – статический момент отсеченной части сечения балки; J_x – осевой момент инерции; $b(y)$ – ширина балки (в направлении нейтральной линии) на уровне точки, в которой определяется значение касательного напряжения.

Следует обратить внимание на то, что в формуле для определения значения касательного напряжения $S_x^{\text{омс}}$ относится не ко всему поперечному сечению балки, а лишь к части его, лежащей выше или ниже линии, параллельной нейтральной оси, в точках которой определяется касательное напряжение. В то же время момент инерции J_x относительно нейтральной оси принимается для всего сечения.

При изучении закономерности распределения нормальных напряжений необходимо обратить внимание на неравномерность его в направлении силовой оси. С учётом этого целесообразно самостоятельно найти пути снижения расхода материала балки при одинаковой ее прочности.

Расчёт балки на жёсткость предполагает определение перемещений ее сечений обычно в направлении, перпендикулярном оси. В общем случае значения угловых и линейных перемещений можно находить, применяя дифференциальные уравнения изогнутой оси балки:

$$E J_x y'' = M_x.$$

Интегрируя это уравнение, сначала находят углы поворота θ сечений

$$E J_x y' = E J_x \theta = \int M_x dz + C,$$

а после второго интегрирования – прогибы балки y

$$E J_x y = \int dz \left(\int M_x dz \right) + C z + D.$$

Постоянные интегрирования C и D определяются из граничных условий.

В теме изучается частный случай изгиба – косоугольный изгиб. Он имеет место в случае, когда плоскость действия сил и моментов не совпадает ни с одной из главных плоскостей жёсткости бруса. Косоугольный изгиб наиболее удобно рассматривать как одновременный изгиб бруса в двух взаимно перпендикулярных главных плоскостях.

Напряжение при косоугольном изгибе определяется по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x,$$

а расчет балок на прочность осуществляется из выражения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_0 + \frac{M_y}{J_y} x_0 \geq \sigma,$$

где x_0 и y_0 – координаты точки, наиболее удалённой от нейтральной линии, для которой $\sigma_0 = |\sigma|_{\max}$.

Деформация косоугольного изгиба особенно опасна для балок, главные центральные моменты инерции сечения которых сильно отличаются друг от друга. Для балок, сечения которых – правильные фигуры (круг, квадрат, равносторонний треугольник и др.), косоугольный изгиб невозможен.

В этой же теме также изучается внецентренное растяжение-сжатие бруса. Расчёт брусев, испытывающих внецентренное растяжение-сжатие, выполняется на основании

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \left[1 + \frac{x_F}{i_y^2} x_0 + \frac{y_F}{i_x^2} y_0 \right] \leq \sigma ,$$

где x_F и y_F координаты точки поперечного сечения бруса, в которой приложена внешняя сила (полнос силы); x_0 и y_0 – координаты точки, наиболее удалённой от нейтральной линии; A – площадь поперечного сечения бруса; σ – допускаемое напряжение.

Вопросы для самопроверки

Какой изгиб называется прямым чистым, прямым поперечным, а какой – косым? Что такое нейтральный слой, силовая плоскость, нейтральная линия (ось), силовая линия (ось)? Как взаимно расположены силовая и нейтральная линии при прямом изгибе? Как изменяются нормальные и касательные напряжения по сечению в направлении силовой и нейтральной осей при прямом поперечном изгибе балки? В каких точках поперечного сечения балки возникают наибольшие нормальные напряжения? Укажите физический смысл постоянных интегрирования дифференциального уравнения упругой линии. Какие приёмы используют при интегрировании? Как определяют нормальные напряжения при внецентренном растяжении, сжатии? Как решаются основные задачи расчёта на прочность при плоском, косом изгибах и внецентренном растяжении-сжатии?

Тема 6. Основы теории напряжённого и деформированного состояний

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 7]; [2, гл. 5]; [3, гл. 10; § 10.1 – 10.6, 10.9, 10.10, 10.12 – 10.16]; [4, гл. 4, задачи: 4.1; 4,5; гл. 5, задачи: 5.2; 5.10; 5.15].

В теме изучается напряжённое и деформированное состояние в общем случае нагружения тела, что необходимо для последующего решения более сложных задач, в частности задач расчёта на прочность.

Если воспользоваться методом сечений и мысленно рассечь тело, нагруженное внешними силами, в интересующем нас сечении, отбросить одну из частей, то внешние силы уравновесятся силами взаимодействия отброшенной части тела. Эти силы для всего тела являются внутренними, а для каждой части – внешними. Рассмотрим какую-

нибудь точку в сечении и найдём напряжение. Если через эту точку провести другие плоскости, то каждый раз напряжения в этой же точке будут другими. Через точку можно провести множество плоскостей и поэтому в каждой точке следует рассматривать множество напряжений. С учётом этого в общем случае говорят не о напряжении в точке, а о напряжённом состоянии в ней.

Вырезая из тела в окрестности исследуемой точки элементарный параллелепипед, показываем по каждой грани полный вектор напряжения. В общем виде полный вектор может быть разложен на нормальное напряжение, перпендикулярное площадке, и касательные напряжения. Следовательно, по трем взаимно перпендикулярным площадкам будет действовать девять составляющих напряжения, называемых компонентами напряжённого состояния в точке.

Основной задачей исследования напряжённого состояния является определение напряжений на произвольной площадке, проходящей через данную точку, положения главных площадок и значений главных напряжений.

Среди бесконечно большого числа площадок, проходящих через данную точку тела, всегда найдутся по крайней мере три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют. Такие площадки носят название главных площадок, а нормальные напряжения на них – главных нормальных напряжений. Главные напряжения обозначают $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, при этом $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Значения главных нормальных напряжений σ_i можно определить из выражения $\sigma_i^3 - J_1 \sigma_i^2 + J_2 \sigma_i - J_3 = 0$, где J_1, J_2, J_3 – инварианты напряжённого состояния в точке, определяемые из выражений:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – компоненты напряжённого состояния в точке. Они известны.

Главные напряжения в каждой точке тела имеют всегда одни и те же значения и направления. Они не зависят от положения выбранной системы координат.

Следует обратить внимание на имеющуюся классификацию видов напряжённого состояния в точке. Различают линейное (одноосное), плоское (двухосное) и объёмное (трехосное) напряжённое состояния. Напряжённое состояние считается объёмным, если по всем граням элементарного параллелепипеда главные нормальные напряжения не равны нулю. Если главные нормальные напряжения действуют только по двум или одному направлению, то напряжённые состояния получают названия плоского или линейного соответственно.

Очень важно знать выражения для определения значений главных нормальных напряжений в случае плоского напряжённого состояния, которое наиболее часто встречается в бруске, подвергающемся одновременно действию изгибающих, скручивающих и растягивающих нагрузок, а также в тонкостенных оболочках. Наиболее часто в этом случае главные напряжения определяют по формуле

$$\sigma_{\pm 1} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

С учетом соотношения между главными напряжениями $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ($1000 > -20 > -500$) имеем:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Необходимо обратить внимание на значения максимальных касательных напряжений, действующих в площадках под углом 45° к главным площадкам. Обозначая главные направления, перпендикулярные главным площадкам, через 1, 2 и 3, наибольшие касательные напряжения в равнонаклонённых площадках определяются из выражений

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Так как $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

Решение вопроса о прочности элемента инженерной конструкции, а иногда конструкции в целом, является конечной целью большинства инженерных расчётов. Вопрос прочности элемента, работающего при простых деформациях – растяжении-сжатии, кручении, прямом изгибе, – осуществляется путём сопоставления наибольшего напряжения в опасной точке с величиной предельного напряжения для материала, из

которого изготовлен элемент. В случае сложных видов нагружения элемента конструкции (сочетание изгиба и кручения; кручения и растяжения и т.д.) напряжённое состояние в опасной точке опасного сечения тела отличается от указанных выше, и расчёты на прочность его также отличаются от расчётов на прочность элемента при простых видах нагружения.

В общем случае нагружения, количество комбинаций значений главных напряжений бесконечно велико, поэтому о прочности элемента, находящегося в произвольном напряжённом состоянии, приходится судить по прочности элемента, находящегося в напряжённом состоянии, для которого предельное состояние известно, путём высказывания предположения о равнопрочности.

Предположение о равнопрочности двух элементов, находящихся в разнотипных напряжённых состояниях, носит название гипотезы или теории прочности. Одноосное напряжённое состояние, равнопрочное данному, называется эквивалентным, а его главное нормальное напряжение – эквивалентным напряжением $\sigma_{эkv}$.

При изучении темы следует обратить внимание на теории наибольших касательных напряжений и энергетическую теорию формоизменения, а также на области применения этих теорий. Учитывая исключительную важность усвоения данной темы, приведем выражения некоторых теорий прочности.

Теория наибольших касательных напряжений, учитывающая лишь два главных нормальных напряжения, однако дающая хорошие результаты для пластичных материалов (в частности, малоуглеродистой стали), одинаково сопротивляющихся растяжению-сжатию, записывается так:

для объёмного вида напряжённого состояния

$$\sigma_{эkv III} = \sigma_1 - \sigma_3 ;$$

для плоского напряжённого состояния, характерного для балок, работающих на изгиб, тонкостенных оболочек и т.д.

$$\sigma_{эkv III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} .$$

Согласно энергетической теории прочности формоизменения, два элемента, находящиеся в разнотипных напряженных состояниях, будут равнопрочными, если энергии, идущие на изменение формы, у них одинаковы.

Теория прочности для объёмного напряжённого состояния имеет

$$\text{вид } \sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_1 - \sigma_2 \right]^2 + \sigma_2 - \sigma_3 \left]^2 + \sigma_3 - \sigma_1 \left]^2 \right]}.$$

Для плоского напряжённого состояния, как уже указано, характерного для условий работы балок, тонкостенных оболочек и т.д.,

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Условием прочности по каждой теории прочности будет выражение $\sigma_{\text{экв}} \leq \sigma$.

Вопросы для самопроверки

Какие виды напряжённого состояния в точке вы знаете? Назовите компоненты напряжённого состояния в точке и сколько из них независимых? Что называется главными осями, главными площадками, главными напряжениями? Напишите выражения для максимальных значений касательных напряжений и укажите площадки их действия. Как определяется значение главных напряжений и положение главных площадок? Какие вы знаете теории прочности? Дайте критический обзор теорий прочности. Как решаются задачи расчёта на прочность по теории наибольших касательных напряжений, энергетической теории формоизменения?

Тема 7. Общие методы определения перемещений в произвольно нагруженных системах. Статически неопределимые системы

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 5, гл. 6]; [2, гл. 13, § 13.1, 13.2, 13.4, 13.7]; [3, гл. 6; § 6.13, 6.14; гл. 8]; [4, гл. 13, задачи: 13.8; 13.10; 13.17; 13.25; гл. 14, задачи: 14.2; 14.5; 14.10]; [5, гл. 5, работа № 10].

В этой теме изучаются общие методы определения угловых и линейных перемещений, когда в поперечных сечениях балки возникают одновременно (или в том или ином сочетании): нормальное усилие N , поперечные силы Q_x, Q_y , изгибающие моменты M_x, M_y относительно осей x и y и крутящий момент M_k относительно оси бруса z .

Наиболее целесообразно определять перемещения с помощью интеграла Мора, позволяющего находить их для любых сечений упругой системы и в любом направлении. Интеграл Мора имеет следующий вид:

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \left[\frac{M_{xF} \bar{M}_{x1}}{EJ_x} + \frac{M_{yF} \bar{M}_{y1}}{EJ_y} + \frac{M_{kF} \bar{M}_{k1}}{GJ_p} + \frac{N_F \bar{N}_1}{EA} + \frac{k_x Q_{xF} \bar{Q}_{x1}}{GA} + \frac{k_y Q_{yF} \bar{Q}_{y1}}{GA} \right] dz.$$

Если элементы упругих систем испытывают деформации кручения и изгиба, тогда тремя последними членами обычно пренебрегают, так как перемещения сечений от нормального усилия N , поперечных сил Q_x и Q_y часто весьма малы по сравнению с перемещениями от M_x , M_y и M_k . Для прямого чистого или поперечного изгиба обычно используют выражение

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{xF} \bar{M}_{x1}}{E J_x} dz.$$

В элементах ферменных систем значения внутренних силовых факторов $M_{xF} = M_{yF} = M_{kF} = Q_x = Q_y = 0$. Следовательно, в них возникает только нормальное усилие, поэтому

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^n \frac{N_F \bar{N}_1}{E A} l_i.$$

Для балок с прямолинейной осью (при постоянной площади поперечного сечения по их длине) упрощение решения интеграла Мора даёт способ Верещагина. Например, для балки, испытывающей деформацию изгиба, перемещение можно найти по формуле

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i \cdot \bar{M}_{1C}^{(i)}}{E \cdot J_x}$$

Здесь Ω_i – площадь эпюры изгибающего момента от заданных сил; $\bar{M}_{1C}^{(i)}$ – ордината, взятая с эпюры изгибающего момента балки, нагруженной единичной силой или единичным моментом, под центром тяжести эпюры от заданных сил; $E J_x$ – жёсткость сечения балки.

Принимается следующая последовательность определения перемещений по способу Верещагина:

1. Строят эпюры внутренних силовых факторов от заданных сил (при необходимости эпюры расслаиваются).
2. Балку освобождают от внешних нагрузок и нагружают в интересующем сечении единичной силой (или единичным моментом) и строят соответствующие эпюры.
3. Перемножают эпюры.

В ряде случаев равнодействующие внутренних сил не могут быть определены при помощи уравнений равновесия. Упругие системы, которые не могут быть решены с помощью только уравнений равновесия, называются статически неопределимыми. Раскрытие статической неопределимости предлагается производить по методу сил. Система считается геометрически неизменяемой, если любое ее сечение получает перемещение только за счет деформации, вызванной действием внешних сил. Геометрическая неизменяемость системы обеспечивается накладываемыми на нее связями. Различают связи необходимые и лишние. Связи, удаление которых сохраняет геометрическую неизменяемость системы, называют лишними или условно необходимыми. Следовательно, раскрыть статическую неопределимость системы – означает составить дополнительные уравнения, с помощью которых можно определить усилия по направлению лишних связей. Различают внутренние и внешние лишние связи и, в соответствии с этим, внутренние и внешние статически неопределимые системы.

Раскрытие статической неопределимости начинается с освобождения системы от лишних связей (без нарушения геометрической неизменяемости) и замены их действия силами или моментами, подобранными так, чтобы перемещения в системе соответствовали ограничениям, накладываемым на систему отброшенными связями. Порядок раскрытия статической неопределимости систем обычно следующий:

1. Определяют степень статической неопределимости, а следовательно, количество недостающих уравнений.

2. Выбирают основную систему. Выбранная основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой, а также должна обеспечивать наиболее простое решение задачи.

3. Показывают эквивалентную систему. Так называется статически определимая геометрически неизменяемая система, получаемая из заданной статически неопределимой системы путем отбрасывания лишних связей и замены их действия искомыми силами, моментами.

4. Записывают канонические уравнения метода сил. Для n раз статически неопределимой системы они имеют вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Delta_{1F} + \delta_{11} X_1 & + \delta_{12} X_2 & + \delta_{13} X_3 & + \dots + \delta_{1n} X_n & = & 0 \\
 \Delta_{2F} + \delta_{21} X_1 & + \delta_{22} X_2 & + \delta_{23} X_3 & + \dots + \delta_{2n} X_n & = & 0 \\
 \Delta_{3F} + \delta_{31} X_1 & + \delta_{32} X_2 & + \delta_{33} X_3 & + \dots + \delta_{3n} X_n & = & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
 \Delta_{nF} + \delta_{n1} X_1 & + \delta_{n2} X_2 & + \delta_{n3} X_3 & + \dots + \delta_{nn} X_n & = & 0,
 \end{array}$$

где чертой с индексом, например I, показано каноническое уравнение, применяемое при решении один раз статически неопределимой системы, и т.д.

5. Строят эпюры изгибающих моментов: от заданных сил в основной системе (обозначается M_F) и от единичных сил (или моментов) каждый раз отдельно в основной системе (обозначают \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , \bar{M}_3 и т.д.).

6. Перемножают эпюры по способу Верещагина и находят значения коэффициентов, входящих в канонические уравнения.

7. Решая систему канонических уравнений, находят значения неизвестных X_1 , X_2 , X_3 , ... X_n по направлению соответствующих лишних связей.

8. Значения неизвестных величин показывают в эквивалентной системе и строят эпюры внутренних силовых факторов.

Вопросы для самопроверки

Что понимается под названием потенциальная энергия деформации? Какие члены интеграла Мора сохраняются при решении плоских систем, при решении стержневых систем? В чём сущность способа Верещагина и когда его нельзя применять? Что называется заданной, основной и эквивалентной системами? Какой геометрический смысл имеют коэффициенты канонических уравнений? Какие перемещения называют главными, а какие – побочными? Назовите симметричные и обратносимметричные внутренние силовые факторы. Какие упругие системы называют симметричными, а какие – обратно-, кососимметричными?

Тема 8. Устойчивость сжатых стержней

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 13]; [2, гл. 15]; [3, гл. 17; § 17.1 – 17.5]; [4, гл. 15, задачи: 15.4; 15.6; 15.12]; [5, гл. 5, работа № 22].

Ранее изучались вопросы прочности и жёсткости элементов инженерных конструкций, работающих в условиях одноосного растяжения (сжатия), сдвига, кручения, изгиба. Рассматривались такие условия работы элементов, в опасных точках которых напряжённое состояние плоское или объёмное. Применяя теории прочности, для таких случаев выполняли проектировочный или поверочный расчёт. Между тем многие элементы (назовем их стойками) сравнительно большой длины и тонкие нагружены продольными силами, равнодействующие которых направлены по оси стойки. При этом возможна потеря устойчивости конструкций.

Если стойку с прямолинейной осью последовательно нагружать все возрастающей продольной нагрузкой, то при некотором её значении стойка будет иметь две формы равновесия: прямолинейную неустойчивую и криволинейную устойчивую. Явление изгиба стойки при приложении к ней продольной силы носит название потери устойчивости. Минимальное значение сжимающей силы, при котором ось стойки может иметь устойчивую криволинейную и неустойчивую прямолинейную форму упругого равновесия, называется критической силой. Следует особо отметить, что опасность явления потери устойчивости состоит в том, что оно может наступить при значениях сжимающих напряжений значительно меньших, чем предел прочности материала стойки.

Вопросы продольного изгиба стоек изучали и разрабатывали известные русские и советские ученые: Л. Эйлер, Ф.С. Ясинский, А.Н. Крылов, Б.Г. Галеркин, Н. Динник. Расчёт на устойчивость сводится к определению значения критической силы $F_{кр}$ для длинного тонкого сжатого стержня. Величина $F_{кр}$ для стержней с различными опорными устройствами определяется по формуле Эйлера

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2},$$

где J_{\min} – наименьший момент инерции поперечного сечения стойки; l – длина стойки; μ – коэффициент приведения длины стойки, учитывающий условия крепления стоек.

Формула Эйлера справедлива до тех пор, пока критическое напряжение σ в стойке не превосходит предел пропорциональности материала стойки $\sigma_{m\pi}$, т.е.

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{A(\mu l)^2} \leq \sigma_{m\pi}.$$

Формула Эйлера применима для сравнительно длинных стоек. Для стоек средней длины применима формула Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b \lambda.$$

Здесь a и b – коэффициенты, зависящие от свойств материалов и определяемые опытным путём; λ – гибкость стержня, определяемая из выражения

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

где i_{\min} – минимальный радиус инерции поперечного сечения стойки.

Расчет стоек на устойчивость производится в следующей последовательности:

1. Определяется гибкость стойки λ .
2. Сопоставляется λ с предельной гибкостью $\lambda_{пред}$, определяемой по формуле

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{m\pi}}}.$$

В случае, если $\lambda > \lambda_{пред}$, критическое значение напряжения определяется по формуле Эйлера. Если $\lambda < \lambda_{пред}$, то при определенных условиях (для так называемых стоек средней гибкости) критическое напряжение находят по формуле Ясинского. Представляет практический интерес способ расчёта стоек на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемого напряжения ϕ , значения которого приводятся в справочной литературе.

Вопросы для самопроверки

В чём суть явления потери устойчивости сжатой стойки? Что такое критическая сила и по какой формуле она определяется? Укажите пределы применимости формулы Эйлера. Что такое гибкость стойки? Как определяется критическое напряжение для стоек большой, средней и малой гибкости? Какой вид имеет график критических напряжений? Как влияют условия закрепления стоек на значение критической силы? Как производится проверка стоек на устойчивость по коэффициенту ϕ .

Тема 9. Прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 12]; [2, гл. 20]; [3; гл. 12; § 12.1 – 12.10]; [4, гл. 20, задачи: 20.6, 20.8, 20.9; 20.18].

При переменных напряжениях материал разрушается при напряжениях значительно меньших, чем предельные характеристики, определяемые при статических испытаниях материала. Прочность материала при переменных напряжениях как бы уменьшается. Однако, современные исследования показали, что никакого изменения структуры и свойств материала не наблюдается. Разрушения связаны с дефектами кристаллической решетки материала. Под действием переменных напряжений эти дефекты размножаются, развиваются. Объединяясь, эти дефекты образуют микротрещины, которые, увеличиваясь и сливаясь, образуют макротрещины. Дальнейшее разрушение происходит по первой образовавшейся макротрещине, т.к. напряжения у её вершины гораздо выше, чем в других сечениях, из-за ослабления поперечного сечения и концентрации напряжений. При увеличении размеров трещины поперечное сечение постепенно уменьшается, напряжения увеличиваются и в какой-то момент достигают предела прочности материала. Тогда происходит мгновенное, полное разрушение детали.

Изучая тему, обратите особое внимание на механизм усталостного разрушения; кривые усталости; предел выносливости и способы его определения; факторы, влияющие на выносливость; расчёты по выносливости деталей и образцов при симметричных и асимметричных циклах изменения напряжений в случае одноосного напряжённого состояния, при кручении и при совместном действии изгиба и кручения.

Вопросы для самопроверки

Каковы современные представления о прочности материала, работающего в условиях переменных напряжений? Какие вы знаете циклы изменения напряжений во времени? Что такое кривая выносливости, предел выносливости? Какие факторы наиболее существенно влияют на выносливость? Что такое эффективный коэффициент концентрации напряжений и его отличие от теоретического коэффициента концентрации напряжений? Что такое запас прочности по усталости и чему он равен для образца и детали при симметричном и асимметричном цикле изменения напряжений в случае одноосного напряжённого состояния и при кручении?

Тема 10. Динамическая нагрузка

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 10, § 111, 113]; [2, гл. 16]; [3, гл. 15, гл. 16]; [4, гл. 16, задачи: 15.5; 16.10; 16.14].

В теме изучается влияние сил инерции движущихся элементов конструкций на прочность элементов. При этом усилия, возникающие в движущемся теле, определяют по принципу Даламбера, суть которого можно сформулировать так: если движущееся тело в какой-то момент времени представить находящимся в покое и помимо сил, производящих движение, приложить к нему силы инерции, то в покоящемся теле возникнут такие же внутренние силы, напряжения и деформации, какие и во время его движения.

В теме изучается также влияние ударных нагрузок на упругую систему. Явление удара наблюдается во всех случаях, когда скорости соударяющихся тел изменяются в течение очень малого промежутка времени. В этом случае напряжения и деформации будут существенно выше тех, которые возникли бы в той же системе при статическом нагружении. Напряжения и перемещения в ударяемой системе достигают максимальных в момент наибольшей деформации системы, а это позволяет применить приближенный энергетический метод, рассматривая при этом удар как неупругий.

Вопросы для самопроверки

Как определяют напряжения в элементах конструкции при равноускоренном поступательном движении и при вращательном движении? Что такое динамический коэффициент и как он определяется с учётом и без учёта массы ударяемой упругой системы? Как производят испытания на ударную нагрузку?

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

1 Требования к выполнению контрольных работ

1 Работы, выполненные с неправильно выбранными исходными данными, не зачитываются.

2 Все контрольные работы должны быть выполнены самостоятельно после изучения соответствующего раздела курса "Сопроотивление материалов". Несамостоятельно выполненные задания не позволяют рецензенту обратить внимание студента на его неподготовленность и исключить возможность получения неудовлетворительной оценки на экзамене.

3 В заголовке контрольной работы следует чётко указать: номер контрольной работы; название дисциплины; фамилию, имя, отчество студента (полностью); название факультета и специальности; учебный шифр; дату отсылки работы; точный почтовый адрес (с индексом).

4 Каждая контрольная работа выполняется в особой тетради или на листах, сшитых в тетрадь формата А4, чернилами (не красными), чётким почерком, с полями в 5 см для замечаний рецензента.

5 Перед решением каждой задачи надо выписать полностью её условия в буквенных и численных выражениях, составить аккуратный эскиз в масштабе и указать на нём величины, необходимые для расчёта.

6 Решение должно сопровождаться краткими, последовательными, без сокращения слов объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчёт величины должны быть показаны только в буквенных выражениях. Надо избегать многословных пояснений и пересказа учебника; студент должен знать, что язык техники – формула и чертёж. При пользовании формулами или данными, отсутствующими в рекомендованных учебниках, необходимо кратко и точно указать источник (автора, название источника, издание, страницу, номер формулы).

7 По получении из университета проверенной контрольной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и выполнить все сделанные ему указания.

8 В случае требования рецензента следует в кратчайший срок выслать ему выполненные на отдельных листах исправления.

2 Расчёты на прочность и жёсткость при плоском изгибе

2.1 Задание

Для заданных расчётных схем балок (рис. 1):

а) определить значения поперечных сил Q и изгибающих моментов M , построить эпюры Q и M и показать характер изогнутой оси для случаев нагружения силами в буквенных и численных выражениях (всего 10 схем);

б) подобрать для численной балки по варианту *a* размеры поперечного сечения: двутаврового; прямоугольного (отношение сторон $h/b = 2$); круглого; кольцевого (отношение диаметров $c = d/D = 0,8$), если $[\sigma] = 160$ МПа;

в) определить соотношение масс балок различных сечений (путём сопоставления площадей поперечного сечения), приняв площадь сечения двутавра за единицу. Высказать суждение по полученному соотношению;

г) для остальных четырёх численных балок подбирать только двутавровые сечения;

д) для одной из численных двутавровых балок провести полную проверку прочности и исследовать напряжённо-деформированное состояние в окрестности точки, удаленной от нейтральной оси на $h/4$.

е) для числовой балки по варианту *б* определить прогиб сечения A и угол поворота сечения B . Для определения перемещений использовать приближённые дифференциальные уравнения изогнутой оси;

ж) для поперечного сечения по рисунку 2 определить главный момент сопротивления сечения изгибу W_{x_0} и оценить наибольшую допустимую интенсивность распределённой нагрузки q_{max} для балки по варианту *д* с буквенными нагрузками, принимая $[\sigma] = 160$ МПа.

2.2 Порядок выполнения работы

1) Для выполнения задачи выбирают данные из таблицы 1 согласно своему шифру и первым шести буквам русского алфавита, расположенным в определенном порядке. Например, записав шифр под каждой буквой последней строчки таблицы:

буква – абвгде

шифр – 281611,

выбирают в каждом столбце таблицы данные, которые находятся на строке, соответствующей шифру.

Пример. В последней строке таблицы по горизонтали первая буква "а". На пересечении этого столбца со строчкой, соответствующей цифре шифра, т.е. цифре 2, находится вариант схемы III по рис. 1. Затем по следующей букве "б" и соответствующей цифре шифра 8 на пересечении столбца "б" и строки "8" получаем величины "2", "1", "1", "1", "3", "1" и т.д.

Согласно указанному шифру окончательно получим: схема III по рисунку 1; $q_1/q = 2$, $q_2/q = 1$, $F_1/qa = 1$, $F_2/qa = 1$, $m_1/qa^2 = 3$, $m_2/qa^2 = 1$, $q_1 = 30$ кН, $q_2 = 40$ кН, $F_1 = 50$ кН, $F_2 = 40$ кН, $m_1 = 80$ кНм, $m_2 = 60$ кНм, $a = 1,1$ м; схема I по рисунку 2; швеллер № 10 [2]; неравнополочный уголок № 4/2,5/0,4 [3].

1) Строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов по длине балки.

Для определения поперечных сил Q и изгибающих моментов M в сечениях балки необходимо знать все нагрузки, действующие на балку, включая реакции опор. Поэтому вычисление опорных реакций должно предшествовать вычислению Q и M . Исключение составляют только консольные балки. Для таких балок можно определить Q и M , не зная опорных реакций в заделке, если идти со свободного конца.

- Определяют реакции опор.

В двухопорных балках определение реакций ведут в следующей последовательности:

- Намечают направление опорных реакций. Иногда эти направления очевидны, но часто неизвестны, поэтому задаются произвольными направлениями опорных реакций;

- Составляют уравнения равновесия балки как жёсткого тела. Для этой цели удобно записать последовательно уравнения, выражающие равенство нулю сумм моментов всех сил относительно одной и другой опоры, из которых определить реакции опор. Уравнение, выражающее равенство нулю проекций всех сил на вертикальную ось y , используется для проверки правильности определения реакций.

Так как внешние силы, приложенные к балке, не дают проекций на горизонтальную ось z , поэтому в неподвижной опоре возникает только вертикальная реакция.

Для определения одной из реакций в балках с промежуточным цилиндрическим шарниром составляется дополнительное уравнение, выражающее равенство нулю моментов всех сил, действующих на одну из частей балки относительно шарнира. Дальнейший расчёт таких балок ничем не отличается от расчёта остальных балок.

Таблица 1. Параметры статически определимых балок

№ строки	Схема по рис. 1	Балки с буквенными данными						Балки с числовыми данными							Схема по рис. 1	№ швеллера	№ неравнопо- лочного уголка
		$\frac{q_1}{q}$	$\frac{q_2}{q}$	$\frac{F_1}{qa}$	$\frac{F_2}{qa}$	$\frac{m_1}{qa^2}$	$\frac{m_2}{qa^2}$	$\frac{q_1,}{кН}$ $\frac{м}{м}$	$\frac{q_2,}{кН}$ $\frac{м}{м}$	$F_1,$ кН	$F_2,$ кН	$m_1,$ кН·м	$m_2,$ кН·м	$a,$ м			
1	I	1	2	3	1	2	3	30	40	50	40	80	60	1,1	V	10	4/2,5/0,3
2	II	2	3	1	2	3	1	40	30	40	50	60	80	1,2	VI	12	5/3,2/0,4
3	III	3	1	2	3	1	2	30	20	30	40	50	60	1,3	VII	14	7/4,5/0,5
4	IV	2	3	1	2	3	1	20	30	40	50	60	70	1,4	VIII	16	8/5/0,6
5	V	3	1	2	3	1	2	30	40	50	60	70	20	1,5	IX	18	9/5,6/0,6
6	VI	1	2	3	1	2	3	40	50	60	70	80	30	1,6	X	20	11/7/0,8
7	VII	3	2	1	3	2	1	50	20	30	50	60	40	1,7	I	22	3,2/2/0,4
8	VIII	3	2	3	2	1	2	20	40	50	30	50	40	1,8	II	24	4/2,5/0,4
9	IX	2	1	1	1	3	1	10	20	30	20	40	30	1,9	II	27	6,3/4/0,5
0	X	1	2	1	2	1	2	40	20	30	10	20	30	2,0	IV	30	7,5/5/0,6
	<i>a</i>	<i>б</i>						<i>в</i>							<i>г</i>	<i>д</i>	<i>е</i>

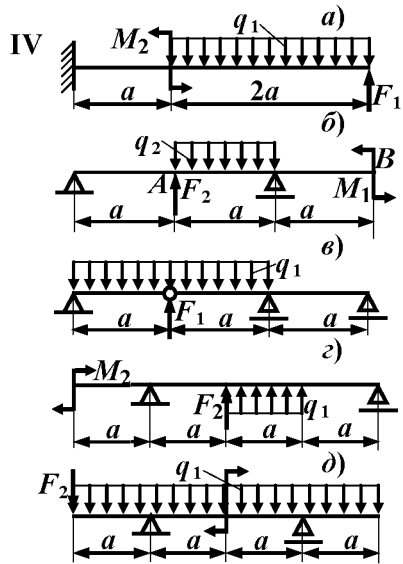
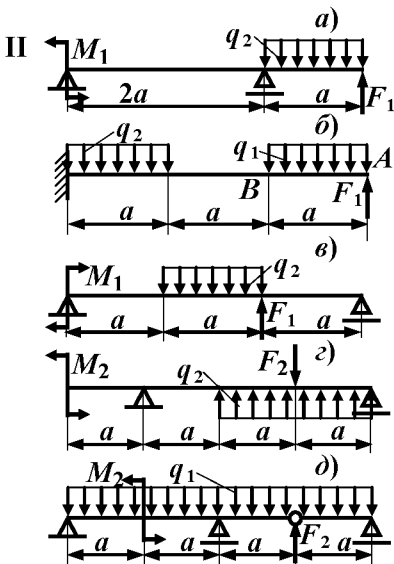
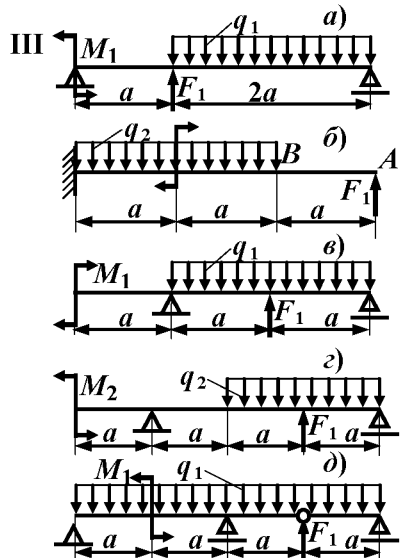
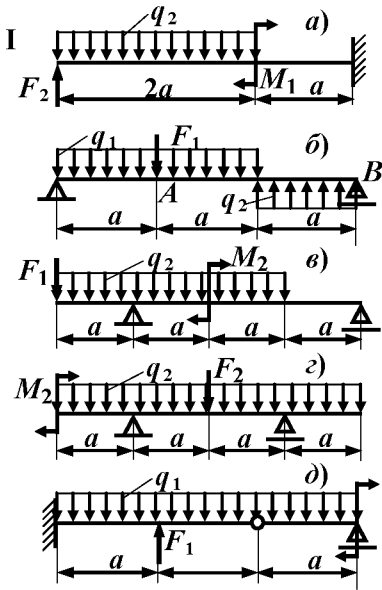


Рисунок 1 – Расчётные схемы балок (см. также с. 32 и 33)

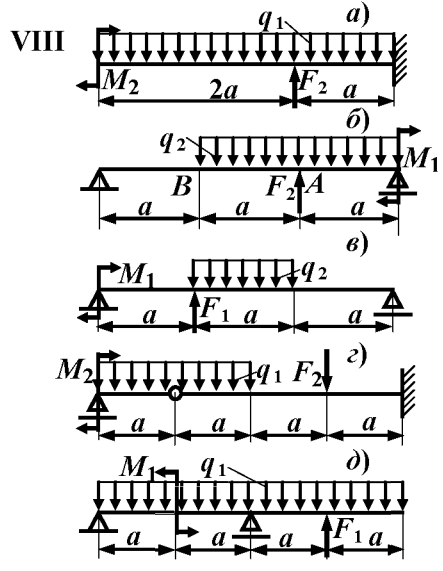
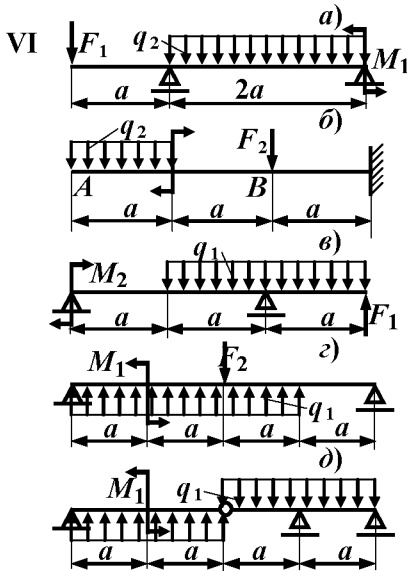
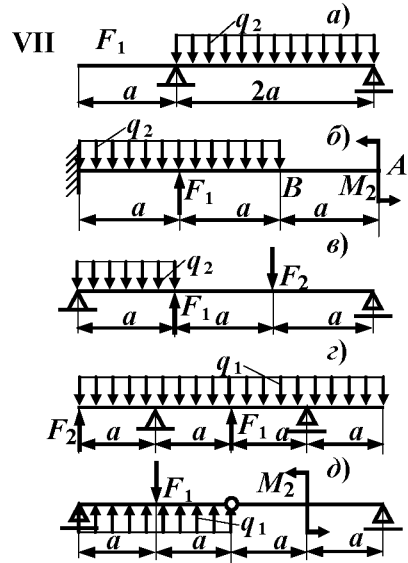
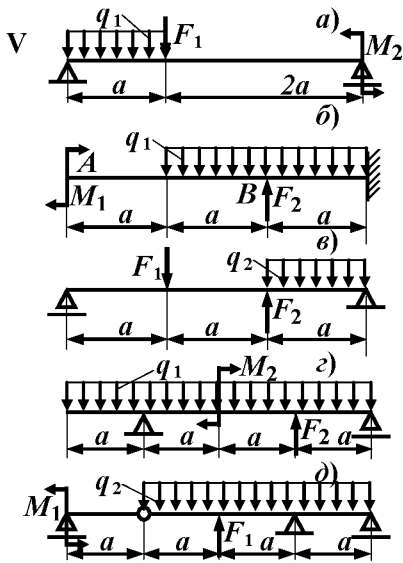


Рисунок 1 – Продолжение

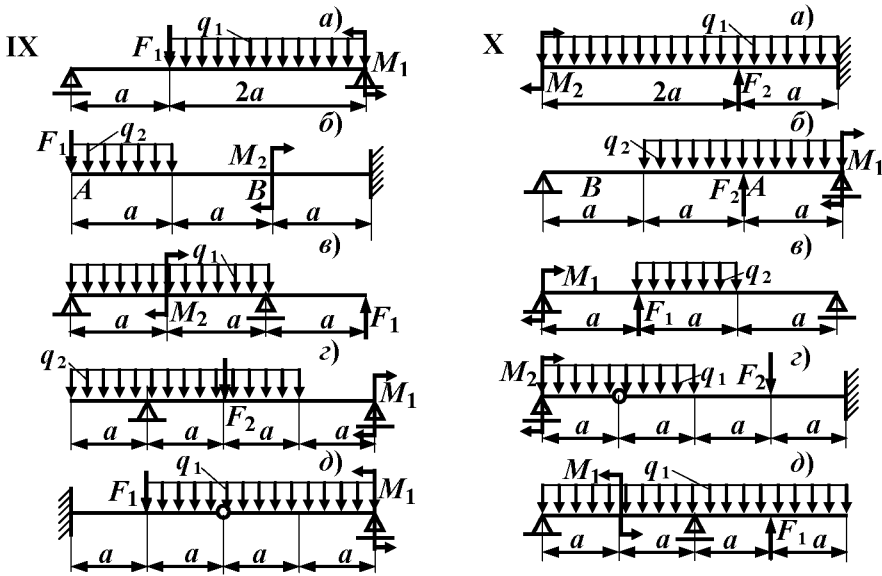


Рисунок 1 – Окончание

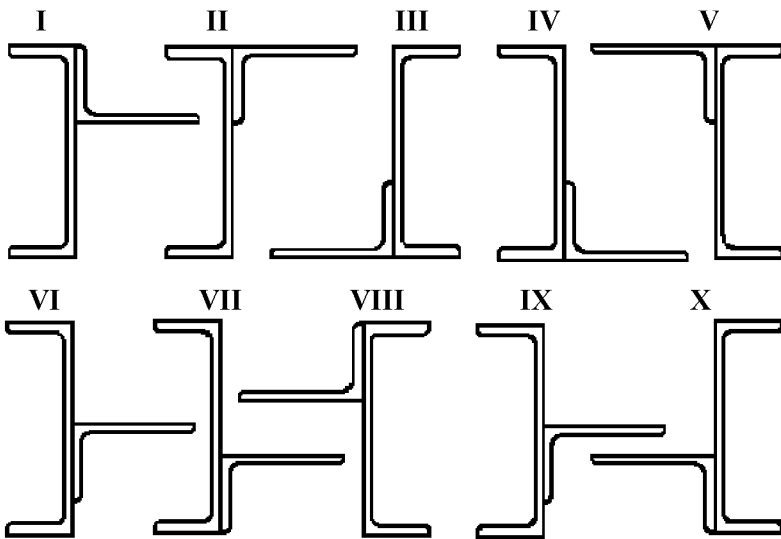


Рисунок 2 – Схемы поперечных сечений балок

- Построение эпюры поперечной силы.

Для вычисления значений Q используется метод сечения. *Поперечная сила в сечении численно равна сумме проекций на плоскость этого сечения всех внешних сил, действующих на балку с любой стороны от данного сечения.*

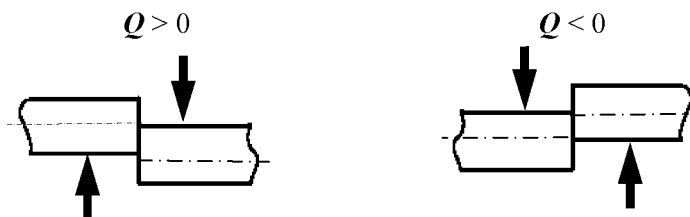


Рисунок 3 – Правило знаков для поперечных сил

Установлено следующее правило знаков для Q : силы, стремящиеся сдвинуть левую часть балки вверх, а правую часть – вниз, входят в выражение поперечной силы со знаком плюс (рис. 3).

- Построение эпюры изгибающего момента.

Для вычисления значений изгибающего момента M также используется метод сечения. *Изгибающий момент в сечении численно равен сумме моментов относительно центра тяжести этого сечения, всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.* Момент от внешних сил, стремящихся изогнуть балку выпуклостью вниз (рис. 4), входит в выражение изгибающего момента со знаком плюс.

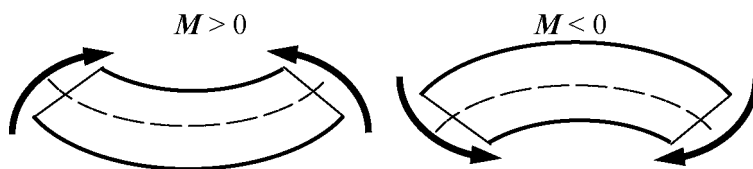


Рисунок 4 – Правило знаков для изгибающих моментов

Примем за правило откладывать на эпюрах Q и M положительные значения вверх от нулевой линии – при этом эпюры изгибающих моментов будут построены на сжатых волокнах.

Для проверки правильности построения эпюр Q и M следует помнить дифференциальные зависимости между интенсивностью распределённой нагрузки q , поперечной силой Q и изгибающим моментом M , которые при направлении оси z слева направо, имеют вид

$$q = \frac{dQ}{dz}; \quad Q = \frac{dM}{dz}; \quad q = \frac{d^2M}{dz^2}.$$

Исходя из приведенных зависимостей и физического смысла Q и M , можно сформулировать правила проверки правильности построения эпюр:

1. в сечении балки, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q наблюдается скачок на величину силы, на эпюре M – излом;

2. в сечении балки, где приложена сосредоточенная пара сил, на эпюре M наблюдается скачок на величину пары, на эпюре Q это не отражается;

3. на концевых шарнирных опорах поперечная сила равна реакции опоры, изгибающий момент равен нулю, если не приложена сосредоточенная пара сил;

4. в заделке изгибающий момент и сосредоточенная сила равны реакциям опор;

5. на участке балки, свободном от распределенной нагрузки, эпюра Q – постоянная по длине, эпюра M – линейная функция;

6. если на некотором участке, идя по левым силам, $Q > 0$, то M – возрастает; если $Q < 0$, то M – убывает; если $Q = 0$, то M – постоянен;

7. на участке, где действует равномерно распределенная нагрузка q , эпюра Q – наклонная прямая, эпюра M – парабола второго порядка с выпуклостью навстречу нагрузке;

8. в сечении, где Q меняет знак с плюса на минус, идя по левым силам, на эпюре M наблюдается \max ; с минуса на плюс – \min .

Невыполнение любого из указанных правил свидетельствует об ошибках в расчётах и при построении эпюр.

- Изображение формы изогнутой оси балки.

По эпюре M , учитывая правила знаков, можно построить вид изогнутой оси балки. При этом следует следить за сопряжением линий с выпуклостью вниз (где $M > 0$) с линиями с выпуклостью вверх (где $M < 0$) и соблюдением условий закрепления.

2) Для одной из числовых балок назначают размеры различных поперечных сечений.

При подборе размеров поперечного сечения исходят из условия прочности по нормальным напряжениям при изгибе

$$\frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \leq \sigma, \text{ откуда } W_x = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{\sigma}.$$

В расчётах принимается $\sigma = 160$ Мпа.

По найденному необходимому значению момента сопротивления при изгибе из таблиц ГОСТ 8239 [4] выбирается необходимый номер двутавра. Если требуемый момент сопротивления окажется больше, чем наибольший из имеющихся в сортаменте, то следует расположить рядом две или более одинаковых балки, принимая, что нагрузка на эти балки распределяется поровну. При определении необходимых размеров прямоугольного сечения используется формула $W_x = \frac{bh^2}{6}$, для

круглого – $W_x = \frac{\pi D^3}{32}$, для кольцевого – $W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1 - c^4)$, где $c = d/D$.

3) Сравнивают массы m балок различных сечений через соотношение площадей A :

$$m_{\text{дв}} : m_{\text{кольц}} : m_{\text{пр}} : m_{\text{кр}} = A_{\text{дв}} : A_{\text{кольц}} : A_{\text{пр}} : A_{\text{кр}}.$$

Для остальных балок подбирают только двутавровые сечения.

4) Для одной из числовых балок проводят полную проверку прочности балки двутаврового сечения.

При поперечном изгибе в любой точке балки имеет место плоское напряженное состояние. Условие прочности в этом случае

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma.$$

Проверке подлежат 3 точки: 1 – точка наиболее удалённая от нейтральной оси; 2 – точка на нейтральной оси; 3 – точка перехода от стенки к полке двутавра.

В точке 1 $|\sigma| = |\sigma|_{\text{наиб}}$; $\tau = 0$. Проверка проводится в сечении с наибольшим по абсолютной величине изгибающим моментом. Усло-

вие прочности $|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \leq \sigma$.

В точке 2 $\sigma = 0$, $|\tau| = |\tau|_{наиб}$ – чистый сдвиг. Проверка проводится в сечении с наибольшей по абсолютной величине поперечной силой. Условие прочности: $|\tau|_{наиб} = \frac{|Q|_{наиб}}{J_x} \left(\frac{S_x^{омс}}{b} \right)_{но} \leq |\tau|_{IV} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$.

Величины момента инерции сечения J_x , ширина сечения (стенки) b и статического момента половины сечения $S_x^{омс}$ но берутся из таблиц сортамента для выбранного двутавра.

В точке 3 действуют как нормальные, так и касательные напряжения:

$$|\sigma| = \frac{|M|}{J_x} y, \quad |\tau| = \frac{|Q| S_x^{омс}}{J_x b}.$$

Статический момент отсеченной части (полки) $S_x^{омс}$ можно вычислить как разность статического момента половины площади сечения двутавра (табличное значение) и статического момента половины площади стенки. Вычисление напряжений проводится для сечения с наибольшим сочетанием M и Q . Условие прочности: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma$.

5) Исследуют напряжённое и деформированное состояния в окрестности точки, удаленной от нейтральной оси на $h/4$ (точка 4). Напряжения в точке 4 определяются аналогично точке 3. Напряжённое состояние в точке 4 определяется напряжениями

$$\sigma_\alpha = \sigma, \quad \tau_\alpha = \tau, \quad \sigma_\beta = 0, \quad \tau_\beta = -\tau.$$

• Определяют главные напряжения и положения главных площадок аналитическим методом:

$$\sigma_{1,II} = \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta \pm \sqrt{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}^2 + 4\tau^2 \right],$$

$$\alpha_0 = -\arctg \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_{II}}.$$

• Определяют главные напряжения и положения главных площадок графическим методом (с помощью круга Мора).

- Определяют главные деформации:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu \sigma_2 + \sigma_3],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu \sigma_3 + \sigma_1],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu \sigma_1 + \sigma_2].$$

- Определяют относительное изменение объёма тела:

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

- Определяют удельную энергию деформации тела:

$$u_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1].$$

- Определяют эквивалентные напряжения и оценивают прочность балки:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma,$$

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma.$$

- 6) Определяют геометрические характеристики заданного поперечного сечения.

- Изображают в масштабе форму поперечного сечения и определяют его характеристики в следующей последовательности:

- Делят сложное сечение на простые фигуры и определяют их площади A^i и моменты инерции $J_{x_i}^i$, $J_{y_i}^i$, $J_{x_i y_i}^i$ относительно собственных центральных осей x_i , y_i . Геометрические характеристики стандартных профилей берутся из сортамента.

- Выбирают применительно к поперечному сечению произвольную систему координат u , v .

- Относительно этой системы координат определяют положение центра тяжести всего сечения:

$$u_c = \frac{\sum u_c^i A^i}{\sum A^i}, \quad v_c = \frac{\sum v_c^i A^i}{\sum A^i},$$

где u_c^i, v_c^i – координаты центра тяжести, A^i – площадь i -го сечения.

- Проводят через центр тяжести сечения центральные оси x , y параллельные u , v .

- Используя формулы переноса, находят значения осевых и центробежного моментов инерции всего сечения относительно центральных осей:

$$J_x = \sum_{i=1}^n J_{x_i}^i + b_i^2 \cdot A^i ;$$

$$J_y = \sum_{i=1}^n J_{y_i}^i + a_i^2 \cdot A^i ;$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n J_{x_i y_i}^i + a_i \cdot b_i \cdot A^i ,$$

где b_i – расстояние между осями x и x_i ; a_i – расстояние между осями y и y_i .

- Определяют величину главных центральных моментов инерции J_{x_0} , J_{y_0} сечения и положение главных осей:

$$J_{x_0} = \frac{1}{2} \left[J_x + J_y + \sqrt{J_x - J_y}^2 + 4J_{xy}^2} \right],$$

$$J_{y_0} = \frac{1}{2} \left[J_x + J_y - \sqrt{J_x - J_y}^2 + 4J_{xy}^2} \right],$$

$$\alpha_0 = -\operatorname{arctg} \frac{J_{xy}}{J_x - J_{y_0}}.$$

- Определяют моменты сопротивления сечения при изгибе:

$$W_{x_0} = \frac{J_{x_0}}{|y_0|_{\text{наиб}}}, \quad W_{y_0} = \frac{J_{y_0}}{|x_0|_{\text{наиб}}},$$

где $|x_0|_{\text{наиб}}$, $|y_0|_{\text{наиб}}$ – координаты наиболее удалённых от главных центральных осей точек сечения, определяемые из формул

$$x_0 = x \cdot \cos \alpha_0 + y \cdot \sin \alpha_0,$$

$$y_0 = y \cdot \cos \alpha_0 - x \cdot \sin \alpha_0,$$

α_0 – угол между осями x и x_0 .

- Определение грузоподъёмности балки. Наибольшую допустимую интенсивность распределённой нагрузки q_{\max} определяют из условия прочности балки при изгибе

$$|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_{x_0}} \leq \sigma ,$$

где $|M|_{\text{наиб}} = |k|_{\text{наиб}} q a^2$, $|k|_{\text{наиб}}$ – численный коэффициент, берётся из эпюры M .

$$\text{Тогда } q_{\max} \leq \frac{\sigma W_{x_0}}{|k|_{\text{наиб}} a^2} .$$

7) Для одной из числовых балок определяют перемещения в заданных сечениях.

Перемещения в заданных точках балки определяются с помощью дифференциальных уравнений изогнутой оси. Дифференциальные уравнения составляются для каждого участка. Интегрируя уравнения, получаем уравнения углов поворота, при повторном интегрировании – уравнение прогибов.

Чтобы составить уравнения, необходимо для каждого участка написать выражения изгибающего момента для произвольного сечения на расстоянии z от начала координат. Начало координат можно располагать как на левой границе участка, так и на правой границе, ось y перпендикулярна оси бруса и направлена вверх, ось z – вдоль оси балки. Начало координат может располагаться и вне границ участка.

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий, которые назначают исходя из условий закрепления и сопряжения границ участков: на шарнирных опорах прогибы y равны нулю; в заделке прогибы и углы поворота $\theta = y'$ равны нулю; на границах участков – $y_i = y_{i+1}$, $y'_i = y'_{i+1}$, если z_i и z_{i+1} направлены в одну сторону, $y_i = y_{i+1}$, $y'_i = -y'_{i+1}$, если z_i и z_{i+1} направлены в разные стороны.

Для определения перемещений в заданном сечении необходимо в уравнения прогибов и углов поворота подставить координату z этого сечения. Правило знаков: при $y > 0$ – прогиб вверх; при $\theta > 0$ – поворот сечения происходит в направлении против часовой стрелки, если начало координат слева, и по часовой стрелке – если начало координат справа.

2.3 Пример выполнения работы

1) Построение эпюр поперечных сил Q , изгибающих моментов M и формы изогнутой оси балок.

Пример 1. Балка (рис. 5) шарнирно закреплена по концам и нагружена сосредоточенной силой $F_1 = 2qa$, парой сил $M_1 = 3qa^2$ и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q_1 = 2q$.

1 Определяем количество и границы силовых участков. Данная балка имеет два участка. Обозначаем границы участков A, B, C .

2 Определяем реакции опор A и C , предполагая, что обе реакции направлены вверх:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= R_C \cdot 3a - 2q \cdot 2a \cdot 2a + 2qa \cdot a + 3qa^2 = 0; & R_C &= qa; \\ \sum M_C &= -R_A \cdot 3a + 3qa^2 - 2qa \cdot 2a + 2q \cdot 2a \cdot a = 0; & R_A &= qa.\end{aligned}$$

Знак плюс указывает, что выбранное направление R_A и R_C оказалось правильным. Направляем обе реакции вверх и записываем их значения на рисунке 5. Реакцию опоры, получившуюся со знаком минус, следует направить вниз. Проверяем верность вычисленных реакций:

$$\sum Y = qa + 2qa - 2q \cdot 2a + qa = 0.$$

3 Строим эпюру поперечных сил.

Первый участок (AB). Воспользуемся методом сечений. Мысленно отсечем часть балки в пределах первого участка на расстоянии z_1 от левого конца балки (рис. 5, a). Отбросим правую часть и рассмотрим равновесие оставшейся левой части. *Поперечная сила Q численно равна сумме проекций на вертикальную ось всех внешних сил, действующих левее нашего сечения:*

$$Q(z_1) = R_A = qa = const.$$

Строим эпюру Q в виде прямой, параллельной оси бруса, на расстоянии qa выше нулевой линии.

Второй участок (CB). Как и ранее, воспользуемся методом сечений (рис. 5, a), направив ось z_2 от сечения C влево.

Полученное выражение является линейной функцией. Следовательно, поперечная сила на втором участке ограничивается прямой линией, наклонной к нулевой. Для построения эпюры Q на этом участке достаточно определить значения поперечных сил на границах участка:

$$\begin{aligned}Q(z_2) &= -qa + 2q \cdot z_2. \\ Q_C &= Q(z_2=0) = -qa; \\ Q_B &= Q(z_2=2a) = -qa + 2q \cdot 2a = 3qa.\end{aligned}$$

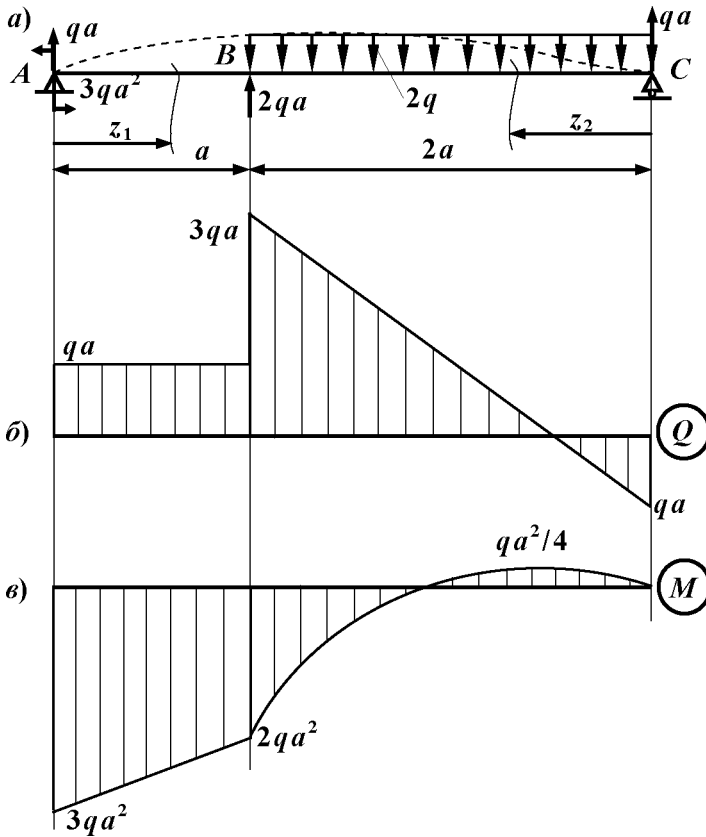


Рисунок 5 – Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

На рис. 5, б изображена эпюра Q . Видно, что на втором участке эпюра пересекает нулевую линию. Представляет интерес найти координату z_2^0 сечения балки, в которой поперечная сила равна нулю. Для этого приравняем выражение $Q(z_2) = -qa + 2qz_2^0$ и получаем

$$z_2^0 = \frac{qa}{2q} = 0,5a .$$

Из полученного выражения видно, что для вычисления координаты z^0 на участках с равномерно распределенной нагрузкой необходимо разделить величину поперечной силы в начале участка (qa) на интенсивность распределенной нагрузки ($2q$).

Следует обратить внимание на то, что значения Q_B , вычисленные по первому и второму участку, отличаются на величину приложенной в этом сечении силы, т.е. в сечении **B** наблюдается скачок на $2qa$.

4 Строим эпюру изгибающих моментов.

Для этого также воспользуемся методом сечений (рис. 5, а) *Изгибающий момент в данном сечении численно равен сумме моментов относительно центра тяжести сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от этого сечения.*

Первый участок:

$$M(z_1) = -3qa^2 + qa \cdot z_1.$$

Это уравнение прямой, для построения которого достаточно знать значения M на границах участка:

$$M_A = M(z_1=0) = -3qa^2;$$

$$M_B = M(z_1=a) = -3qa^2 + qa \cdot a = -2qa^2.$$

Второй участок:

$$M(z_2) = qa \cdot z_2 - 2q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2} = qaz_2 - qz_2^2.$$

Изгибающий момент на втором участке описывается уравнением второго порядка, т.е. имеет вид параболы, для построения которой необходимо не менее трех точек:

$$M_C = M(z_2=0) = 0;$$

$$M_{\text{экстр}} = M(z_2^2 = 0,5a) = qa \cdot 0,5a - 2q \cdot 0,5a^2 = 0,25qa^2;$$

$$M_B = M(z_2=2a) = qa \cdot 2a - 2q \cdot 2a^2 = -2qa^2.$$

На рис. 5, в показана эпюра изгибающих моментов. Следует обратить внимание на то, что значения M в сечении **B**, вычисленные по первому и второму участкам, совпадают.

5 Изображаем форму изогнутой оси балки (рис. 5, а).

При этом используем знаки на эпюре изгибающих моментов, правила знаков для M и следим за сопряжением линий с выпуклостью вверх и вниз.

Пример 2. Балка (рис. 6) шарнирно закреплена в трёх сечениях, имеет промежуточный цилиндрический шарнир и нагружена сосредоточенной силой $F_2 = qa$, парой сил $m_2 = 2qa^2$ и равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью $q_1 = 2q$.

1 Определяем количество и границы силовых участков. Данная балка имеет четыре участка. Обозначаем границы участков **A**, **B**, **C**, **D**, **E**.

2 Определяем реакции опор A , C и E , предполагая, что все реакции направлены вверх. Для определения реакции в опоре E составляем дополнительное уравнение статики, выражающее равенство нулю моментов всех сил, действующих справа от промежуточного шарнира D . Реакции опор A и C определяются из уравнений равновесия всей балки:

$$\begin{aligned} \sum M_D^{npac} &= R_E \cdot a - 2q \cdot a \cdot 0,5a = 0; & R_E &= qa; \\ \sum M_A &= qa \cdot 4a + qa \cdot 3a - 2q \cdot 4a \cdot 2a + R_C \cdot 2a + 2qa^2 = 0; \\ &R_C &= 3,5qa; \\ \sum M_C &= qa \cdot 2a + qa \cdot a + 2qa^2 - R_A \cdot 2a = 0; & R_A &= 2,5qa. \end{aligned}$$

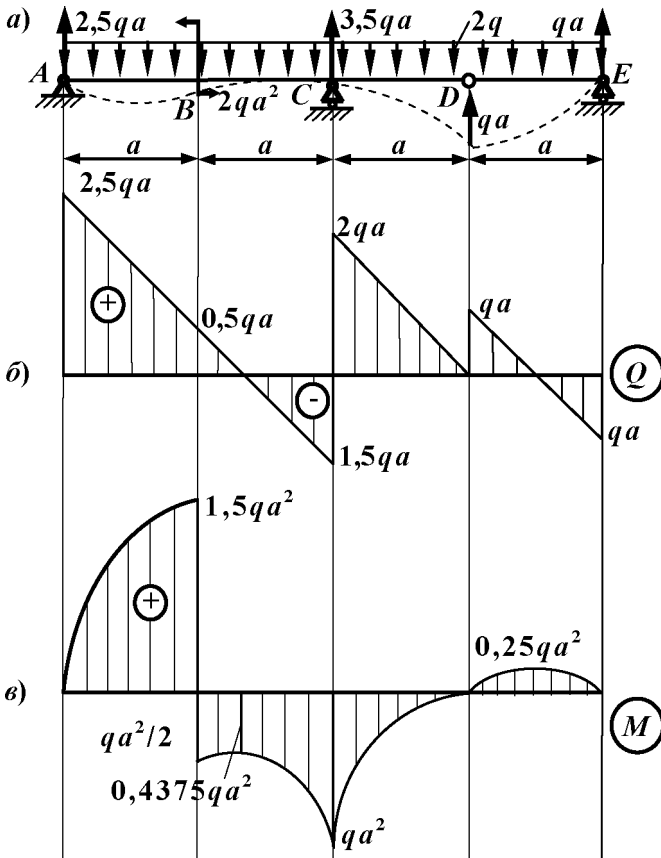


Рисунок 6 – Построение эпюр Q и M методом характерных сечений

Знак плюс указывает, что выбранное направление R_A , R_C и R_E правильно. Направляем все реакции вверх и записываем их значения на рисунке 6, а. Проверяем правильность вычисленных реакций:

$$\sum Y = 2,5qa + 3,5qa - 2q \cdot 4a + qa + qa = 0.$$

3 Строим эпюру поперечных сил и изгибающих моментов.

Построение эпюр можно значительно ускорить, используя способ так называемых "характерных сечений". Характерными считаются сечения, ограничивающие участки бруса, и сечения, в которых поперечная сила меняет знак, плавно изменяя величину (в таких сечениях изгибающий момент достигает экстремального значения).

Суть способа состоит в том, что величины Q и M определяют только в характерных сечениях, а затем с учетом свойств эпюр поперечных сил и изгибающих моментов производят построение эпюр.

Построение эпюр начинаем с левого конца балки.

В сечении A , где приложена сила $R_A = 2,5qa$, на эпюре поперечных сил (рис. 6, б) наблюдается скачок на величину этой силы по ее направлению (вверх). Скачки на эпюре Q наблюдаются также в сечениях C , D и E , где приложены сосредоточенные внешние силы. В этих сечениях на эпюре M наблюдается излом. В пределах всех четырех участков действует равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q , поэтому эпюра Q на всех участках ограничивается прямыми линиями, наклонными к нулевой. Углы наклона этих прямых одинаковы (т.к. интенсивность распределённой нагрузки на всех участках постоянна). В сечении B приложена сосредоточенная пара сил $m_1 = 2qa^2$. В этом сечении на эпюре Q изменений нет, а на эпюре M (рис. 6, в) наблюдается скачок вниз на величину этой пары сил.

Вычислим значения Q и M .

На втором (BC) и четвертом (DE) участках эпюра поперечных сил пересекает нулевую линию. Определим абсциссы точек пересечения

$$z_2^0 = \frac{0,5qa}{2q} = 0,25a \qquad z_4^0 = \frac{qa}{2q} = 0,5a.$$

Построение эпюр можно вести по левым силам:

$$Q_A^n = 2,5qa = 0,5qa;$$

$$Q_B = 2,5qa - 2q \cdot a = 0,5qa;$$

$$Q_C^{\text{лев}} = 2,5qa - 2q \cdot 2a = 1,5qa;$$

$$M_A^n = 0;$$

$$M_B^n = 2,5qa \cdot a - 2q \cdot a \cdot 0,5a = 1,5qa^2;$$

$$M_B^n = 2,5qa \cdot a - 2q \cdot a \cdot 0,5a - 2qa^2 = -0,5qa^2;$$

$$M_{эксмп} = 2,5qa \cdot 1,25a - 2q \cdot 1,25a \cdot 0,625a - 2qa^2 = -0,4375qa^2;$$

$$M_C (\text{лев}) = 2,5qa \cdot 2a - 2q \cdot 2a \cdot a - 2qa^2 = -qa^2.$$

Вычисление внутренних сил в остальных характерных сечениях удобнее вести по правым силам:

$$Q_E^n = -qa;$$

$$Q_D^n = -qa + 2q \cdot a = qa;$$

$$Q_D^n = -qa + 2q \cdot a - qa = 0;$$

$$Q_C^n = -qa + 2q \cdot 2a - qa = 2qa;$$

$$Q_C^n (\text{прав}) = -qa + 2q \cdot 2a - qa - 3,5qa = -1,5qa;$$

$$M_E^n = 0;$$

$$M_{эксмп} = qa \cdot 0,5a - 2q \cdot 0,5a \cdot 0,25a = 0,25qa^2;$$

$$M_D = qa \cdot a - 2q \cdot a \cdot 0,5a = 0;$$

$$M_C (\text{прав}) = qa \cdot a - 2q \cdot 2a \cdot a + qa \cdot a = -qa^2.$$

Следует обратить внимание на то, что внутренние силы в одном и том же сечении, вычисленные по левым и по правым силам, совпадают. Этим свойством внутренних сил можно пользоваться для проверки правильности определения Q и M .

4 Изображаем форму изогнутой оси балки (рис. 6, а).

При этом используем знаки на эпюре изгибающих моментов, правила знаков для M и следим за сопряжением линий с выпуклостью вверх и вниз, кроме шарнира D .

Пример 3. Балка (рис. 7) шарнирно закреплена в двух сечениях и нагружена сосредоточенной силой $F_1 = 50$ кН, парой сил $m_1 = 30$ кНм и равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью $q_1 = 30$ кН/м.

1 Определяем количество и границы силовых участков.

Данная балка имеет четыре участка. Обозначаем границы участков A , B , C и D .

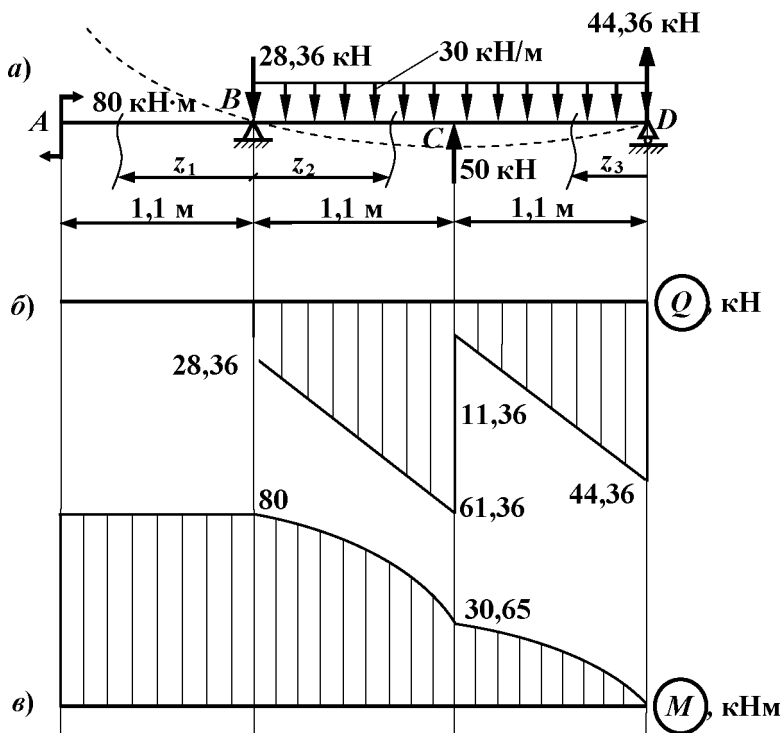


Рисунок 7 – Эпюры Q и M для числовой балки

2 Определяем реакции опор B и D , предполагая, что они направлены вверх. Для определения реакций составляем уравнения статики:

$$\sum M_B = R_D \cdot 2,2 - 30 \cdot 2,2 \cdot 1,1 + 50 \cdot 1,1 - 80 = 0,$$

$$R_D = 44,36 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = -80 - R_B \cdot 2,2 + 30 \cdot 2,2 \cdot 1,1 - 50 \cdot 1,1 = 0,$$

$$R_B = -28,36 \text{ кН}.$$

Знак минус означает, что направление R_B противоположно выбранному, поэтому направляем R_B вниз, а R_D – вверх. Проверяем правильность полученных реакций:

$$\sum Y = -28,36 - 30 \cdot 2,2 + 50 + 44,36 = 0.$$

3 Строим эпюру поперечных сил и изгибающих моментов. Построение эпюр проводим, используя способ характерных сечений.

По левым силам:

$$Q_A^n = 0; \quad Q_B^n = 0; \quad Q_B^n = -28,36 \text{ кН};$$

$$Q_C^n (\text{лев}) = -28,36 \text{ кН} - 30 \cdot 1,1 = -61,36 \text{ кН}$$

$$M_A^n = 80 \text{ кНм}; \quad M_B = 80 \text{ кНм};$$

$$M_C (\text{лев}) = 80 - 28,36 \cdot 1,1 - 30 \cdot 1,1 \cdot 0,55 = 30,65 \text{ кНм};$$

По правым силам:

$$Q_D^n = -44,36 \text{ кН}; \quad Q_C^n = -44,36 + 30 \cdot 1,1 = -11,36 \text{ кН};$$

$$Q_C^n (\text{прав}) = -44,36 + 30 \cdot 1,1 - 50 = -61,36 \text{ кН};$$

$$M_D = 0; \quad M_C (\text{прав}) = 44,36 \cdot 1,1 - 30 \cdot 1,1 \cdot 0,55 = 30,65 \text{ кНм};$$

Сравниваем:

$$Q_C^n (\text{лев}) = Q_C^n (\text{прав}) = -61,36 \text{ кН}; \quad M_C (\text{лев}) = M_C (\text{прав}) = 30,65 \text{ кНм}.$$

Строим эпюры Q (рис. 7, б) и M (рис. 7, в).

4 Изображаем форму изогнутой оси балки (рис. 7, а). При этом используем знаки на эпюре изгибающих моментов, правила знаков для M и следим за сопряжением линий с выпуклостью вверх и вниз.

Аналогично строятся эпюры для всех десяти балок.

2) Расчёт на прочность.

1 Подбираем размеры поперечного сечения балки (см. рис. 7) из условия прочности при плоском изгибе:

$$|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \leq \sigma; \quad W_x \geq \frac{|M|_{\text{наиб}}}{\sigma} = \frac{80 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 500 \text{ см}^3.$$

а) Двутавровое сечение: Принимаем [4] двутавр № 30а: $h = 300 \text{ мм}$, $b = 145 \text{ мм}$, $s = 6,5 \text{ мм}$, $t = 10,7 \text{ мм}$, $W_x = 518 \text{ см}^3$; $A = 49,9 \text{ см}^2$; $J_x = 7780 \text{ см}^4$, $S_x^\# = 292 \text{ см}^3$.

б) Прямоугольное сечение $h/b = 2$:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 500}{2}} = 9,09 \text{ см}, \quad h = 2 \cdot 9,09 = 18,18 \text{ см}.$$

Принимаем [5] $h = 18,5 \text{ см}$, $b = 9,5 \text{ см}$, $A_{\text{пр}} = 9,5 \cdot 18,5 = 175,8 \text{ см}^2$.

в) Круглое сечение:

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32}; \quad D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 500}{\pi}} = 17,21 \text{ см.}$$

Принимаем [6] $D = 17,5 \text{ см.}$ $A_{кр} = \frac{\pi \cdot 17,5^2}{4} = 240,53 \text{ см}^2.$

г) Кольцевое сечение $c = d/D = 0,8$:

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} (1 - c^2); \quad D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi \cdot (1 - c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 500}{\pi \cdot (1 - 0,8^4)}} = 20,51 \text{ см.}$$

Принимаем [7] $D = 21,0 \text{ см.}$ $A_{кольц} = \frac{\pi \cdot 21^2}{4} (1 - 0,8^2) = 124,7 \text{ см}^2.$

2 Сравниваем массы балок различных сечений:

$$m_{ов} : m_{кольц} : m_{пр} : m_{кр} = A_{ов} : A_{кольц} : A_{пр} : A_{кр} = 49,9 : 124,7 : 175,8 : 240,5 = 1 : 2,50 : 3,52 : 4,82.$$

Следовательно, при плоском изгибе самым экономичным является двутавровое сечение.

3 Полная проверка прочности балки.

1 – опасная точка: Сечение A – с наибольшим по абсолютной величине значением изгибающего момента. $M = 80 \text{ кНм}$, $Q = 0$.

$$\sigma^{(1)} = \frac{M}{J_x} y^{(1)} = \frac{80 \cdot 10^3}{7780 \cdot 10^{-8}} \cdot \left[-\left(\frac{300}{2} \right) \cdot 10^{-3} \right] y = -154,4 \text{ МПа}$$

$$|\sigma^{(1)}| \leq [\sigma], \text{ условие прочности выполняется.}$$

2 – опасная точка: Сечение C^n – с наибольшим по абсолютной величине значением поперечной силы. $Q = -61,36 \text{ кН}$.

$$\tau^{(2)} = \frac{Q \cdot S_x^\#}{J_x \cdot b(y)} = \frac{-61,36 \cdot 10^3 \cdot 292 \cdot 10^{-6}}{7780 \cdot 10^{-8} \cdot 6,5 \cdot 10^{-3}} = -35,4 \text{ МПа}$$

$$[\tau]_{IV} = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = \frac{160}{\sqrt{3}} = 92,4 \text{ МПа}; \quad |\tau^{(2)}| \leq [\tau]_{IV}, \text{ условие прочности}$$

выполняется.

3 – опасная точка: Сечение B^n – с наибольшим сочетанием изгибающего момента и поперечной силы. $M = 80 \text{ кНм}$; $Q = -28,36 \text{ кН}$.

$$S_{x(3)}^{омс} = S_x^\# - \frac{1}{2} \cdot s \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 = 292 - \frac{1}{2} \cdot 0,65 \cdot \left(\frac{30}{2} - 1,07 \right)^2 = 228,9 \text{ см}^3;$$

$$\sigma^{(1)} = \frac{M}{J_x} y^{(1)} = \frac{80 \cdot 10^3}{7780 \cdot 10^{-8}} \cdot \left[- \left(\frac{300}{2} - 10,7 \right) \cdot 10^{-3} \right] = -143,2 \text{ МПа};$$

$$\tau^3 = \frac{Q \cdot S_{x(3)}^{omc}}{J_x \cdot b(y)} = \frac{-28,36 \cdot 10^3 \cdot 228,9 \cdot 10^{-6}}{7780 \cdot 10^{-8} \cdot 6,5 \cdot 10^{-3}} = -12,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{экв. IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{143,2^2 + 3 \cdot 12,8^2} = 145,5 \text{ МПа, условие}$$

прочности выполняется.

4 Строим эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте двутаврового сечения (рис. 8):

$$\tau_{\text{полк}}^3 = \tau_{\text{ст}}^3 \cdot \frac{b}{B} = -12,8 \cdot \frac{6,5}{145} = -0,57 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{ст}}^3 \cdot \frac{S_x^{\#}}{S_{x(3)}^{omc}} = -12,8 \cdot \frac{292}{228,9} = -16,3 \text{ МПа}.$$

3) Исследуем напряжённо-деформированное состояние в точке 4.

1 Определяем напряжения

$$\sigma^{(1)} = \frac{M}{J_x} y^{(1)} = \frac{80 \cdot 10^3}{7780 \cdot 10^{-8}} \cdot \left[- \left(\frac{300}{4} \right) \cdot 10^{-3} \right] y = -77,2 \text{ МПа};$$

$$S_{x(4)}^{omc} = S_x^{\#} - \frac{1}{2} \cdot s \cdot \left(\frac{h}{4} \right)^2 = 292 - \frac{1}{2} \cdot 0,65 \cdot \left(\frac{30}{4} \right)^2 = 273,7 \text{ см}^3;$$

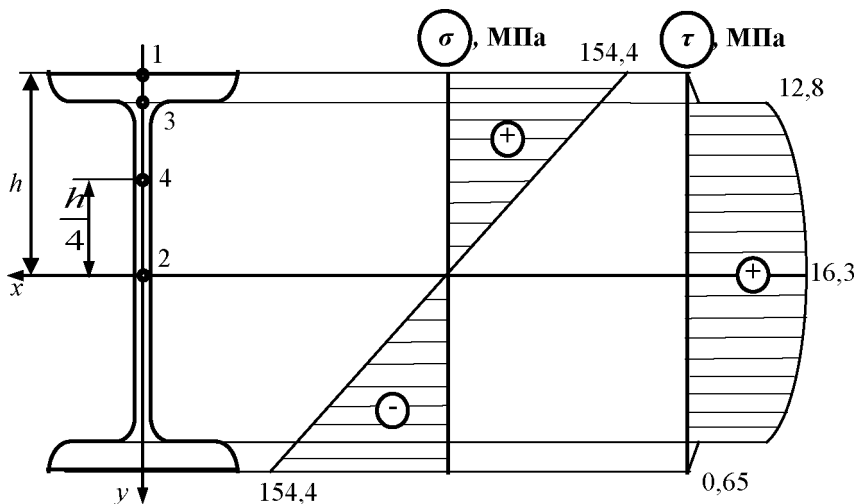


Рисунок 8 – Эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте двутаврового сечения

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{x(4)}^{omc}}{J_x \cdot b(y)} = \frac{-28,36 \cdot 10^3 \cdot 273,7 \cdot 10^{-6}}{7780 \cdot 10^{-8} \cdot 0,65 \cdot 10^{-2}} = -15,3 \text{ МПа.}$$

2 Показываем напряжённое состояние в окрестности точки 4 (рис. 9).

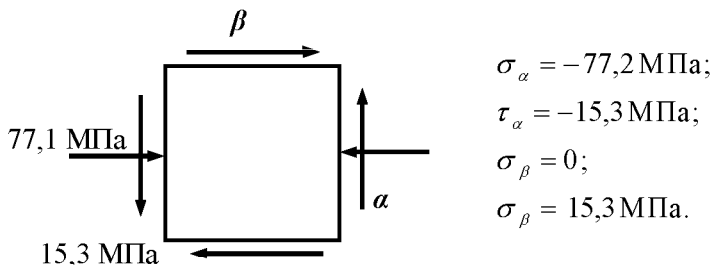


Рисунок 9 – Напряжённое состояние в точке 4

3 Определяем главные напряжения и положение главных площадок аналитическим методом:

$$\sigma_{\text{I/II}} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_{\alpha\beta}^2} =$$

$$= \frac{-77,2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{77,2^2 + 4 \cdot 15,3^2} = 38,6 \pm 41,52;$$

$$\sigma_{\text{I}} = \sigma_1 = -38,6 + 41,52 = 2,92 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_{\text{II}} = \sigma_3 = -38,6 - 41,52 = -80,12 \text{ МПа};$$

$$\text{tg } \alpha_0 = \frac{-\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_{\text{II}}} = \frac{15,3}{-77,2 + 80,12} = 5,24; \quad \alpha_0 = 79,2^\circ.$$

4 Определяем главные напряжения и положение главных площадок графическим методом (рис. 10):

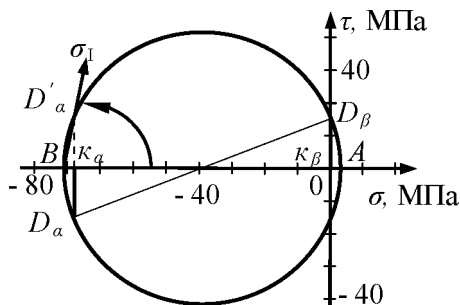


Рисунок 10 – Определение главных напряжений графическим методом

5 Определяем главные деформации:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[2,92 - 0,3 \cdot (-80,12) \right] = 1,348 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1) \right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[-0,3 \cdot (-80,12 + 2,92) \right] = 1,158 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[-80,12 - 0,3 \cdot (2,92) \right] = -4,050 \cdot 10^{-4}.$$

6 Определяем относительное изменение объёма детали:

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1,348 + 1,158 - 4,05) \cdot 10^{-4} = -1,544 \cdot 10^{-4} - \text{объём уменьшается.}$$

7 Определяем удельную энергию деформации тела:

$$u_0 = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right] =$$

$$= \frac{10^{12}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} \left[2,92^2 + (-80,12)^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot (-80,12 \cdot 2,92) \right] = 16,42 \text{ кДж/м}^3.$$

8 Определяем эквивалентные напряжения и проверяем прочность:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} = \sqrt{(-77,2)^2 + 4 \cdot 15,3^2} = 83,04 \text{ МПа} < [\sigma] - \text{условие прочности выполняется.}$$

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{(-77,2)^2 + 3 \cdot 15,3^2} = 81,62 \text{ МПа} < [\sigma] - \text{условие прочности выполняется.}$$

4) Определяем геометрические характеристики поперечного сечения.

1 Изображаем в масштабе форму поперечного сечения (рис. 11).

2 Делим сложное сечение на две простые и определяем их площади и моменты инерции относительно собственных центральных осей. Для стандартных профилей геометрические характеристики берем из сортамента.

1) Швеллер № 10 [2]: $h = 100 \text{ мм}$; $b = 46 \text{ мм}$; $s = 4,5 \text{ мм}$; $t = 7,6 \text{ мм}$;
 $A^I = 10,9 \text{ см}^2$; $J_{x_1}^I = 174 \text{ см}^4$; $J_{y_1}^I = 20,4 \text{ см}^4$; $J_{x_1 y_1}^I = 0$; $x_0 = 1,44 \text{ см}$.

2) Неравнополочный уголок № 4/2,5/0,4 [3]: $B = 40 \text{ мм}$; $b = 25 \text{ мм}$;
 $t = 4 \text{ мм}$; $x_0 = 0,63 \text{ см}$; $y_0 = 1,37 \text{ см}$; $A^{II} = 2,47 \text{ см}^2$; $J_{x_2}^{II} = J_y = 1,18 \text{ см}^4$;
 $J_{y_2}^{II} = J_x = 3,93 \text{ см}^4$; $J_{u \min} = 0,71 \text{ см}^4$; $\text{tg } \alpha = 0,381$.

Вычисляем центробежный момент инерции уголка:

$$J_{x_2 y_2}^{\text{II}} = J_{x y} = J_x - J_{u \min} \cdot \operatorname{tg} \alpha = -3,93 - 0,71 \cdot 0,381 = -1,227 \text{ см}^4.$$

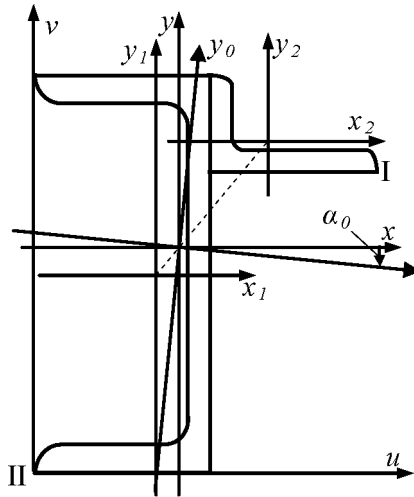


Рисунок 11 – Определение геометрических характеристик сложного сечения

3 Выбираем произвольную систему координат u, v (рис. 11) и определяем положение центра тяжести всего сечения относительно этой системы координат:

$$u_c^{\text{I}} = b^{\text{I}} - y_0^{\text{I}} = 4,6 - 1,44 = 3,16 \text{ см}; \quad v_c^{\text{I}} = h^{\text{I}}/2 = 10/2 = 5,00 \text{ см};$$

$$u_c^{\text{II}} = b^{\text{I}} + y_0^{\text{II}} = 4,6 + 1,37 = 5,97 \text{ см};$$

$$v_c^{\text{II}} = h^{\text{I}} - b^{\text{II}} + x_0^{\text{II}} = 10 - 2,5 + 0,63 = 8,13 \text{ см};$$

$$u_c = \frac{u_c^{\text{I}} \cdot A^{\text{I}} + u_c^{\text{II}} \cdot A^{\text{II}}}{A^{\text{I}} + A^{\text{II}}} = \frac{3,16 \cdot 10,9 + 5,97 \cdot 2,47}{10,9 + 2,47} = 3,679 \text{ см};$$

$$v_c = \frac{v_c^{\text{I}} \cdot A^{\text{I}} + v_c^{\text{II}} \cdot A^{\text{II}}}{A^{\text{I}} + A^{\text{II}}} = \frac{5 \cdot 10,9 + 8,13 \cdot 2,47}{10,9 + 2,47} = 5,578 \text{ см}.$$

4 Проводим через центр тяжести сечения центральные оси x, y (рис. 11), параллельные u, v .

5 Используя формулы переноса, находим значения осевых и центробежного моментов инерции всего сечения относительно центральных осей:

$$b_1 = v_c^I - v_c = 5 - 5,578 = -0,578 \text{ см}; \quad a_1 = u_c^I - u_c = 3,16 - 3,679 = -0,519 \text{ см};$$

$$b_2 = v_c^{II} - v_c = 8,13 - 5,578 = 2,552 \text{ см}; \quad a_2 = u_c^{II} - u_c = 5,97 - 3,679 = 2,291 \text{ см};$$

$$J_x = J_{x_1}^I + b_1^2 \cdot A^I + J_{x_2}^{II} + b_2^2 \cdot A^{II} =$$

$$= 174 + 0,578^2 \cdot 10,9 + 1,18 + 2,552^2 \cdot 2,47 = 194,9 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_{y_1}^I + a_1^2 \cdot A^I + J_{y_2}^{II} + a_2^2 \cdot A^{II} =$$

$$= 20,4 + 0,519^2 \cdot 10,9 + 3,93 + 2,291^2 \cdot 2,47 = 40,2 \text{ см}^4;$$

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1}^I + a_1 \cdot b_1 \cdot A^I + J_{x_2 y_2}^{II} + a_2 \cdot b_2 \cdot A^{II} =$$

$$= (-0,519) \cdot (-0,579) \cdot 10,9 - 1,227 + 2,291 \cdot 2,552 \cdot 2,47 = 16,49 \text{ см}^4.$$

6 Определяем величину главных центральных моментов инерции J_{x_0}, J_{y_0} сечения и положение главных осей:

$$J_{x_0, y_0} = \frac{1}{2} \cdot \left[J_x + J_y \pm \sqrt{J_x - J_y}^2 + 4 \cdot J_{xy}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[194,9 + 40,2 \pm \sqrt{194,9 - 40,2}^2 + 4 \cdot 16,49^2} \right] =$$

$$= 117,55 \pm 79,09;$$

$$J_{x_0} = 117,55 + 79,09 = 196,6 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = 117,55 - 79,09 = 38,5 \text{ см}^4;$$

$$tg \alpha_0 = -\frac{J_{xy}}{J_x - J_{y_0}} = \frac{-16,49}{194,9 - 38,5} = -0,105;$$

$$\alpha_0 = arctg(-0,105) = -6,02^\circ.$$

Строим главные центральные оси x_0, y_0 (рис. 11).

7 Определяем координаты наиболее удалённых от главных осей точек сечения.

$$\text{Точка I: } x = b^I + h^{II} - u_c = 4,6 + 4 - 3,679 = 4,921 \text{ см};$$

$$y = h^I - b^{II} - v_c = 10 - 2,5 - 5,578 = 1,922 \text{ см}.$$

$$x_0 = x \cdot \cos \alpha_0 + y \cdot \sin \alpha_0 =$$

$$= 4,921 \cdot \cos(-6,02^\circ) + 1,922 \cdot \sin(-6,02^\circ) = 4,692 \text{ см}.$$

$$\text{Точка II: } x = 0 - u_c = -3,679 \text{ см}; \quad y = 0 - v_c = -5,578 \text{ см}.$$

$$y_0 = y \cdot \cos \alpha_0 - x \cdot \sin \alpha_0 =$$

$$= -5,578 \cdot \cos(-6,02^\circ) + 3,679 \cdot \sin(-6,02^\circ) = -5,933 \text{ см}.$$

$$|x_0|_{\text{наиб}} = 4,692 \text{ см}; \quad |y_0|_{\text{наиб}} = 5,933 \text{ см}.$$

Вычисленные значения координат можно проверить измерениями на рисунке 11.

8 Определяем моменты сопротивления сечения при изгибе:

$$W_{x_0} = \frac{J_{x_0}}{|y_0|_{\text{наиб}}} = \frac{196,6}{5,933} = 33,1 \text{ см}^3;$$

$$W_{y_0} = \frac{J_{y_0}}{|x_0|_{\text{наиб}}} = \frac{38,5 \cdot 10^3}{4,692 \cdot 10^{-6}} = 8,21 \text{ см}^3.$$

9 Определяем грузоподъемность балки с заданным сечением.

Наибольшую допустимую интенсивность распределенной нагрузки q_{max} определяем из условия прочности балки (см. пример 2) при изгибе в плоскости наибольшей жесткости:

$$|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_{x_0}} \leq \sigma, \quad \text{где } |M|_{\text{наиб}} = 1,5 q a^2.$$

$$\text{Тогда } q_{\text{max}} = \frac{[\sigma] \cdot W_{x_0}}{1,5 \cdot a^2} = \frac{160 \cdot 10^6 \cdot 33,1 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1,1^2} = 2,92 \text{ кН/м}.$$

5) Определение перемещений.

Составляем выражения изгибающего момента для произвольных сечений на каждом участке балки (см. рис. 7):

$$M(z_1) = 80; \quad M(z_2) = 80 - 28,36 z_2 - 15 z_2^2;$$

$$M(z_3) = 44,36 z_3 - 15 z_3^2.$$

Составляем дифференциальные уравнения изогнутой оси балки для каждого участка и дважды интегрируем их:

$$EJ_x y_1'' = 80;$$

$$1) EJ_x y_1' = 80 z_1 + C_1;$$

$$2) EJ_x y_1 = 40 z_1^2 + C_1 z_1 + D_1;$$

$$EJ_x y_2'' = 80 - 28,36 z_2 - 15 z_2^2;$$

$$3) EJ_x y_2' = 80 z_2 - 14,18 z_2^2 - 5 z_2^3 + C_2;$$

$$4) EJ_x y_2 = 40 z_2^2 - 4,727 z_2^3 - 1,25 z_2^4 + C_2 z_2 + D_2;$$

$$EJ_x y_3'' = 44,36 z_3 - 15 z_3^2;$$

$$5) EJ_x y_3' = 22,18 z_3^2 - 5 z_3^3 + C_3;$$

$$6) EJ_x y_3 = 7,393 z_3^3 - 1,25 z_3^4 + C_3 z_3 + D_3.$$

Составляем граничные условия и, подставляя их в соответствующие уравнения 1) – 6), определяем постоянные интегрирования:

$$I) \text{ при } z_1 = 0, \quad y_1 = 0; \Rightarrow 2) \Rightarrow D_1 = 0;$$

$$II) \text{ при } z_2 = 0, \quad y_2 = 0; \Rightarrow 4) \Rightarrow D_2 = 0;$$

$$III) \text{ при } z_3 = 0, \quad y_3 = 0; \Rightarrow 6) \Rightarrow D_3 = 0;$$

$$IV) \text{ при } z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad y_1' = -y_2'; \Rightarrow 1) \text{ и } 3) \Rightarrow C_1 = -C_2;$$

$$V) \text{ при } z_2 = 1,1 \text{ м}, \quad z_3 = 1,1 \text{ м}, \quad y_2' = -y_3'; \Rightarrow 3) \text{ и } 5) \Rightarrow$$

$$80 \cdot 1,1 - 14,18 \cdot 1,1^2 - 5 \cdot 1,1^3 + C_2 = -22,18 \cdot 1,1^2 + 5 \cdot 1,1^3 - C_3;$$

$$C_2 = -84,37 - C_3;$$

$$VI) \text{ при } z_2 = 1,1 \text{ м}, \quad z_3 = 1,1 \text{ м}, \quad y_2 = y_3; \Rightarrow 4) \text{ и } 6) \Rightarrow$$

$$40 \cdot 1,1^2 - 4,727 \cdot 1,1^3 - 1,25 \cdot 1,1^4 + C_2 \cdot 1,1 = 7,393 \cdot 1,1^3 - 1,25 \cdot 1,1^4 + C_3 \cdot 1,1;$$

$$C_2 = -29,33 + C_3.$$

Решая систему уравнений, полученных из граничных условий IV), V) и VI), получим:

$$C_1 = 56,85 \text{ кНм}^2; \quad C_2 = -56,85 \text{ кНм}^2; \quad C_3 = -27,52 \text{ кНм}^2.$$

Подставляем полученные коэффициенты в уравнения 1) – 6) и определяем прогиб и угол поворота в сечении А:

$$1) EJ_x y_1' = 80 z_1 + 56,85;$$

$$2) EJ_x y_1 = 40 z_1^2 + 56,85 z_1;$$

$$3) EJ_x y_2' = 80 z_2 - 14,18 z_2^2 - 5 z_2^3 - 56,85;$$

$$4) EJ_x y_2 = 40 z_2^2 - 4,727 z_2^3 - 1,25 z_2^4 - 56,85 z_2;$$

$$5) EJ_x y_3' = 22,18 z_3^2 - 5 z_3^3 - 27,52;$$

$$6) EJ_x y_3 = 7,393 z_3^3 - 1,25 z_3^4 - 27,52 z_3;$$

$$y_A = y_1(z_1 = 1,1 \text{ м}) = \frac{40 \cdot 1,1^2 + 56,85 \cdot 1,1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7780 \cdot 10^{-8}} = 7,14 \text{ мм};$$

$$\theta_A = y_1'(z_1 = 1,1 \text{ м}) = \frac{40 \cdot 1,1 + 56,85 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7780 \cdot 10^{-8}} = 6,48 \text{ рад}.$$

2.4 Контрольные вопросы

1 Как определяют поперечную силу и изгибающий момент в произвольном сечении балки?

2 Какие зависимости используют для контроля эпюр поперечных сил и изгибающих моментов?

3 Как распределяются нормальные и касательные напряжения по высоте балки?

4 Какие напряжения называют главными и какими свойствами они обладают?

5 Как вычисляют наибольшие касательные напряжения и на каких площадках они действуют?

6 Как с помощью круга Мора определяют величину и направление главных напряжений?

7 Как оценивается прочность балки при поперечном изгибе?

8 Какие оси называют главными осями поперечного сечения?

9 Из каких условий определяют постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений изогнутой оси балки?

3 Расчет плоской статически определимой рамы

3.1 Задание

Заданы схема плоской статически определимой рамы (рис. 12), размеры и действующие нагрузки (табл. 2).

Требуется:

построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов;

подобрать размеры поперечного сечения;

определить линейные и угловое перемещения заданного сечения рамы.

В пояснительной записке следует представить схему рамы, выполненную в масштабе, эпюры поперечных сил, нормальных сил и изгибающих моментов, эпюры от единичных нагрузок и все необходимые расчёты.

3.2 Порядок выполнения работы

1 По данным таблицы 2 и рисунка 12 изображают в масштабе схему рамы, соответствующей заданному шифру.

2 Определяют реакции опор рамы.

3 Строят эпюры нормальных сил N , поперечных сил Q и изгибающих моментов M на каждом участке рамы. Для криволинейных участков предварительно записывают аналитические выражения для N , Q и M .

4 Подбирают размеры поперечного сечения рамы из условия прочности только при изгибе по нормальным напряжениям. В расчётах учитывают, что материал рамы – Ст. 3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа.

5 Проверяют прочность выбранного сечения с учётом действия нормальной силы.

6 Определяют линейные и угловое перемещения в заданном сечении рамы с помощью интеграла Мора. На прямолинейных участках интегралы вычисляют способом Верещагина.

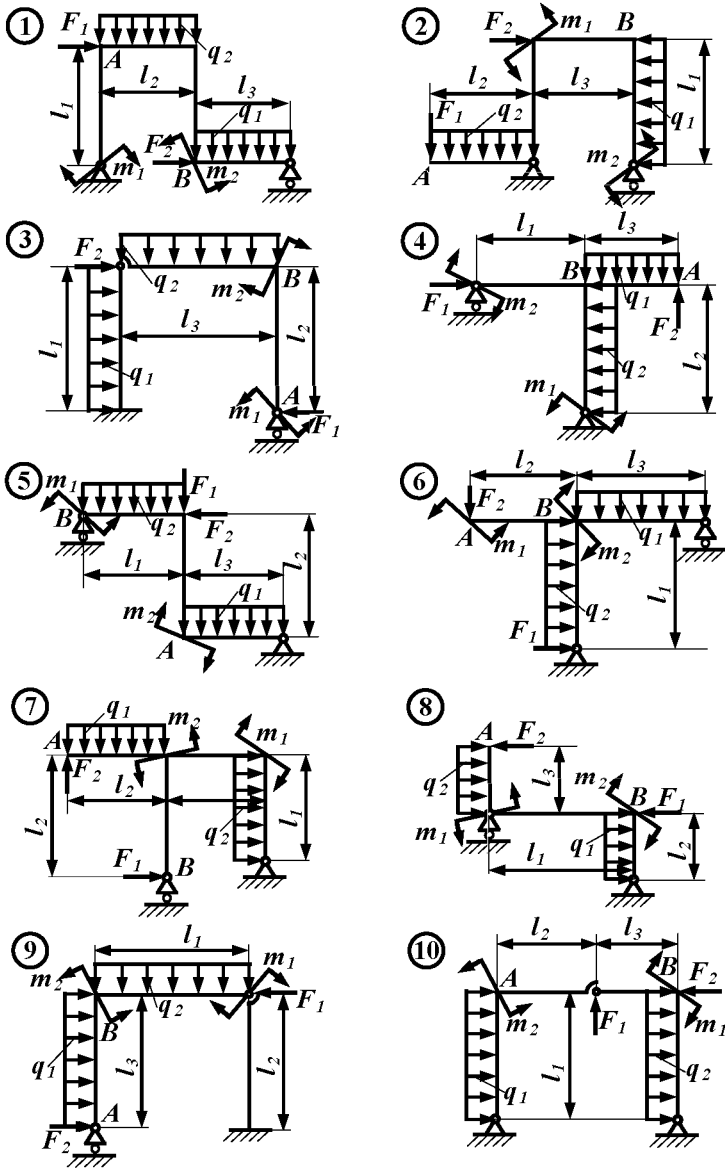


Рисунок 12 – Статически определимые рамы

Таблица 2. Параметры статически определимой рамы

№ строки	№ схемы	m_1 , кН·м	m_2 , кН·м	F_1 , кН	F_2 , кН	q_1 , кН·м	q_2 , кН·м	l_1 ,м	l_2 ,м	l_3 ,м	Сечение	Форма поперечного сечения
1	4	20	0	40	0	15	0	3	2	4	A	I – двутавр
2	1	0	40	0	30	0	20	4	3	2	B	└└ – два неравно- полочных уголка
3	7	- 50	0	30	0	10	0	2	4	4	A	II – два двутавра
4	2	0	- 40	0	20	0	- 15	3	2	2	B	● – круг
5	3	30	0	- 20	0	- 10	0	4	4	2	A	– два швеллера
6	10	0	- 30	0	20	0	20	2	3	4	B	□ – квадрат
7	4	40	0	- 30	0	20	0	2	2	4	A	○ – кольцо, $c = d/D = 0,8$
8	5	0	- 20	0	40	0	- 20	3	3	2	B	≡ – два швеллера
9	6	- 30	0	- 40	0	- 15	0	5	4	3	A	┌┌ – четыре неравно- полочных уголка
0	9	0	30	0	- 20	0	15	3	5	4	B	┐┐ – четыре равно- полочных уголка
	<i>a</i>	<i>b</i>		<i>v</i>			<i>z</i>			<i>d</i>	<i>e</i>	

3.3 Пример выполнения работы

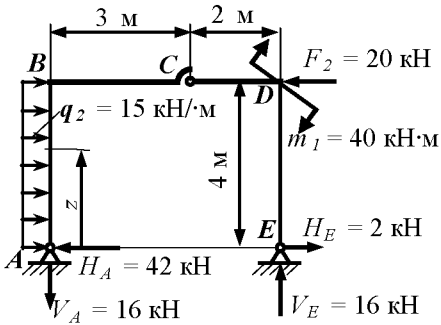


Рисунок 13 – Расчётная схема рамы

Для рамы, изображённой на рисунке 13, построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать размеры кольцевого поперечного сечения и определить линейные и угловые перемещения сечения D при следующих данных: $q_2 = 20 \text{ кН/м}$, $m_1 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $l_1 = 4 \text{ м}$, $l_2 = 3 \text{ м}$, $l_3 = 3 \text{ м}$, $c = d/D = 0,8$.

Определим реакции опор:

$$\sum M_A = V_E \cdot 5 - 40 + 20 \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \Rightarrow V_E = 16 \text{ кН};$$

$$\sum M_C(np) = H_E \cdot 4 - 40 + 16 \cdot 2 = 0, \Rightarrow H_E = 2 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = -V_A \cdot 5 - 40 + 20 \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \Rightarrow V_A = -16 \text{ кН};$$

$$\sum M_C(\text{лев}) = -H_A \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 - 16 \cdot 3 = 0, \Rightarrow H_A = -42 \text{ кН}.$$

$$\text{Проводим проверку: } \sum x = -42 + 15 \cdot 4 - 20 + 2 = 62 - 62 = 0;$$

$$\sum y = -16 + 16 = 0.$$

Строим эпюру нормальных сил (рис. 14, а).

На участке AB : $N = 16 \text{ кН}$, на участке BC и CD : $N = 42 - 15 \cdot 4 = -18 \text{ кН}$, на участке DE : $N = -16 \text{ кН}$.

Строим эпюру поперечных сил Q (рис. 14, б).

На участке AB :

$$Q(z) = 42 - 15 \cdot z, z_0 = \frac{42}{15} = 2,8 \text{ м} \quad Q_A = Q(z=0) = 42 \text{ кН},$$

$Q_A = Q(z=4 \text{ м}) = -18 \text{ кН}$, на участке BC и CD : $Q = -16 \text{ кН}$, на участке DE : $Q = -2 \text{ кН}$.

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 14, в).

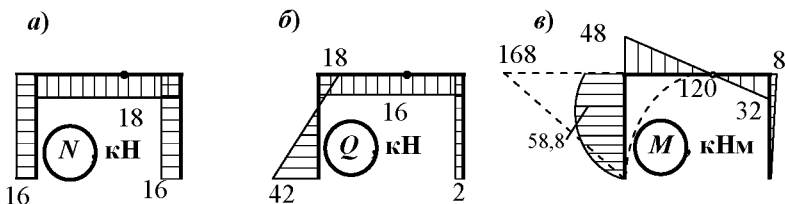


Рисунок 14 – Эпюры внутренних сил

На участке AB :

$M = 42 \cdot z - \frac{15 \cdot z^2}{2}$, при $z = 0$ $M = 0$, при $z_0 = 2,8$ м - $M_0 = 58,8$ кН·м, при $z = 4$ м - $M = 48$ кН·м. Показываем расслоённую эпюру M (рис. 14, ν – пунктирные линии).

$$M_B^{np} = 48 \text{ кН·м}; M_C = 0; M_D^{лев} = -32 \text{ кН·м}; M_E = 0.$$

Подберём поперечное сечение, составленное из двух швеллеров, из условия прочности только при изгибе

$$W_x^{II} = \frac{J_x^{II}}{|y|_{наиб}} = \frac{2 \cdot J_x^I}{|y|_{наиб}} = 2 \cdot W_x^I$$

$$W_x^I \geq \frac{|M|_{наиб}}{2 \cdot [\sigma]} = \frac{58,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6} = 183,8 \text{ см}^3.$$

Полученному значению удовлетворяет швеллер № 22 с характеристиками: $W_x^I = 192 \text{ см}^3$, $J_x^I = 2110 \text{ см}^4$, $A^I = 26,7 \text{ см}^2$.

Проверим подобранное сечение по полному условию прочности:

$$|\sigma|_{наиб} = \frac{|M|_{наиб}}{2 \cdot W_x} + \frac{|N|}{2 \cdot A} = \frac{58,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 192 \cdot 10^{-6}} + \frac{16 \cdot 10^3}{2 \cdot 26,7 \cdot 10^{-4}} = 156,1 \text{ МПа} < \sigma$$

условие прочности выполняется.

Определим горизонтальное перемещение сечения D . Приложим в направлении искомого перемещения единичную силу, определим реакции опор от единичного нагружения и построим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рис. 15, a).

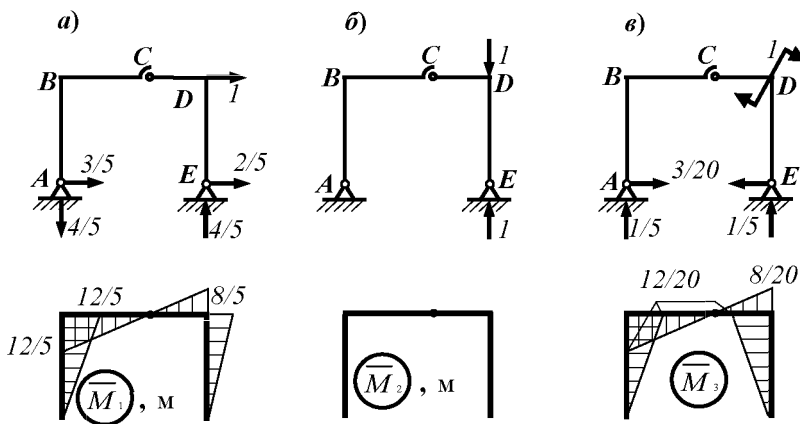


Рисунок 15 – Эпюры изгибающих моментов от единичных нагрузений

Вычислим перемещения способом Верещагина

$$E \cdot J_x \cdot \Delta_1 = \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{5} - \frac{1}{2} \cdot 168 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{5} - \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{5} - \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} = -381,87 \text{ кНм}^3.$$

$$x_D = \Delta_1 = \frac{-381,87 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 2110 \cdot 10^{-8}} = -45,24 \text{ мм.}$$

Знак «минус» указывает на то, что направление перемещения противоположно направлению единичной силы (рис. 15, а), т.е. сечение D движется влево.

Вертикальное перемещение сечения D равно нулю, т.к. эпюры \bar{M}_2 нулевые (рис. 15, б).

Определим угол поворота сечения D . Приложим в сечении D единичный момент (рис. 15, в), определим реакции опор от единичного нагружения и построим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_3 :

$$E \cdot J_x \cdot \Delta_3 = \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot 168 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = -104 \text{ кНм}^2.$$

$$\theta_D = \Delta_3 = \frac{-104 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 2110 \cdot 10^{-8}} = -1,232 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Знак «минус» указывает на то, что поворот происходит в сторону, противоположную направлению единичного момента (рис. 15, в), т.е. сечение D поворачивается против часовой стрелке.

3.4 Контрольные вопросы

- 1 Какую конструкцию называют плоской рамой?
- 2 Как определяют внутренние усилия в плоской раме?
- 3 Какие правила знаков используют при определении внутренних усилий в плоской раме?
- 4 Из какого условия прочности подбирают поперечное сечение плоской рамы?
- 5 Как записывается полное условие прочности для плоской рамы?
- 6 Как записывается интеграл Мора при определении перемещений в плоских рамах?
- 7 В чём заключается способ Верещагина для вычисления интеграла Мора?
- 8 В чём заключается разница вычисления угловых и линейных перемещений с помощью интеграла Мора?
- 9 Как и для чего строят расслоённые эпюры?

4 Расчет плоской статически неопределимой рамы

4.1 Задание

Заданы схема статически неопределимой рамы (рис. 16), размеры и действующие нагрузки (табл. 3).

Требуется:

- раскрыть статическую неопределимость;
- построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов;
- подобрать размеры поперечного сечения, составленного из двух швеллеров.

В пояснительной записке следует представить схему рамы, изображённую в масштабе, основную и эквивалентную системы, эпюры изгибающих моментов от заданных и единичных нагрузок с соответствующими схемами нагружения, эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов и все необходимые расчёты.

4.2 Порядок выполнения работы

1 По данным таблицы 3 изображают в масштабе схему рамы (рис. 16), соответствующей заданному шифру.

2 Определяют степень статической неопределимости рамы, отбрасывают «лишние» связи и изображают основную (ОС) и эквивалентную (ЭС) системы. Записывают канонические уравнения метода сил.

3 Изображают схемы нагружения основной системы заданными нагрузками и единичными усилиями по направлению отброшенных связей. Строят соответствующие эпюры изгибающих моментов.

4 Вычисляют коэффициенты и свободные члены канонических уравнений. Интегралы Мора вычисляют по способу Верещагина.

5 Решают канонические уравнения метода сил и определяют неизвестные усилия.

6 Определяют реакции опор в эквивалентной системе и проводят генеральную проверку решения, заключающуюся в определении перемещений в новой основной системе по направлению новых отброшенных связей. Решение верно, если эти перемещения равны нулю. Допускаемая погрешность решения – не более 3%.

7 Строят эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для заданной рамы.

8 Подбирают поперечное сечение рамы, составленное из двух швеллеров, из условия прочности при изгибе. В расчётах учитывают, что материал рамы – Ст. 3 с $[\sigma] = 160$ МПа.

9 Проверяют прочность подобранного сечения с учетом действия нормальной силы.

4.3 Пример выполнения работы

Для рамы, изображённой на рис. 17, а, раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов, а также подобрать поперечное сечение, составленное из двух швеллеров, при следующих данных: $F = 50$ кН, $q = 25$ кН/м, $[\sigma] = 160$ МПа.

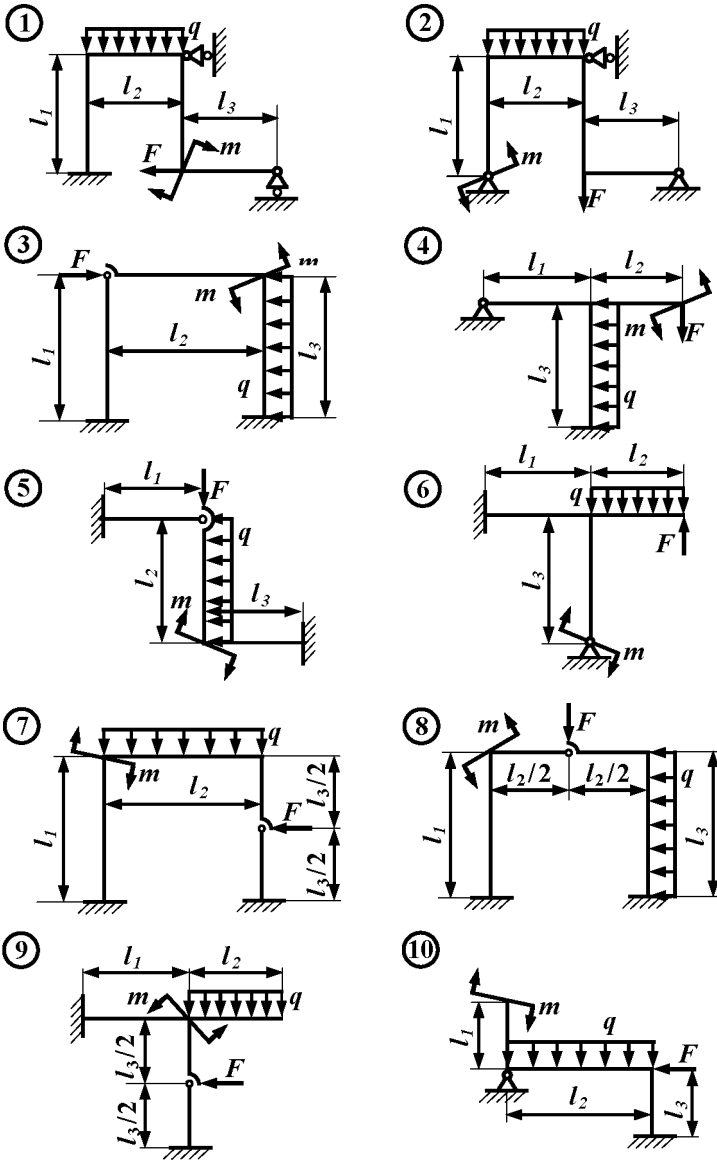


Рисунок 16 – Статически неопределимые рамы

Таблица 3. Параметры статически неопределимой рамы

№ строки	№ схемы	$l_1, \text{м}$	$l_2, \text{м}$	$l_3, \text{м}$	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$m, \text{кН}\cdot\text{м}$
1	1	1	2	3	15	20	0
2	2	2	4	1	20	0	- 40
3	3	3	2	4	25	- 40	0
4	4	1	3	2	30	0	20
5	5	2	4	3	35	60	0
6	6	3	3	4	40	0	40
7	7	4	2	3	- 15	- 30	0
8	8	1	3	3	- 20	0	- 30
9	9	2	4	4	- 25	50	0
0	10	3	2	2	- 30	0	20
	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>e</i>	

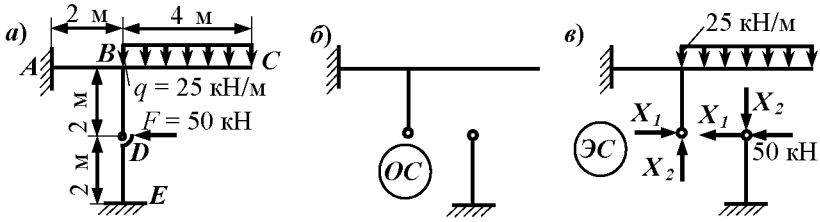


Рисунок 17 – Расчётная схема, основная и эквивалентная системы статически неопределимой рамы

Рама два раза статически неопределима. За лишние неизвестные принимаем реакции в промежуточном шарнире D и изображаем основную (рис. 17, б) и эквивалентную системы (рис. 17, в). Запишем канонические уравнения метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

Изобразим схемы нагружения основной системы единичными нагрузками, соответствующими отброшенным связям (рис. 18, а, б), и отдельно – заданными нагрузками (рис. 18, в). Строим эпюры изгибающих моментов \bar{M}_1 , \bar{M}_2 и M_F (рис. 18, г). Эпюры расслаиваем.

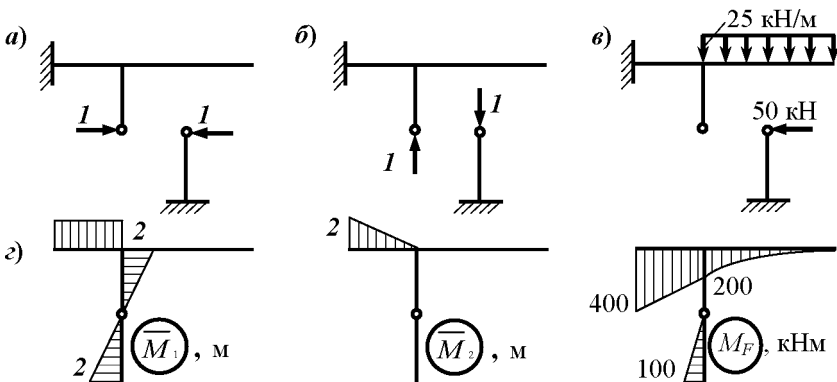


Рисунок 18 – Эпюры изгибающих моментов для раскрытия статической неопределимости

Вычислим коэффициенты и свободные члены канонических уравнений. Для вычисления интеграла Мора используем способ Верещагина:

$$E \cdot J \cdot \delta_{11} = +2 \cdot 2 \cdot 2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\right) \times 2 = 13,33 \text{ м}^3;$$

$$E \cdot J \cdot \delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 2,667 \text{ м}^3;$$

$$E \cdot J \cdot \delta_{12} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4,00 \text{ м}^3;$$

$$E \cdot J \cdot \Delta_{1F} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(200 + \frac{1}{2} \cdot 200\right) = -1066,7 \text{ кНм}^3;$$

$$E \cdot J \cdot \Delta_{2F} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(200 + \frac{2}{3} \cdot 200\right) = -666,7 \text{ кНм}^3;$$

Подставим найденные значения коэффициентов в канонические уравнения

$$13,333 \cdot X_1 + 4,000 \cdot X_2 - 1066,7 = 0;$$

$$4,000 \cdot X_1 + 2,667 \cdot X_2 - 666,7 = 0.$$

Совместное решение уравнений дает $X_1 = 9,09 \text{ кН}$, $X_2 = 236,4 \text{ кН}$. Подстановкой значений X_1 и X_2 в канонические уравнения убеждаемся, что уравнения решены верно.

Определим с помощью уравнений статики реакции опор в эквивалентной системе от заданных нагрузок и найденных значений X_1 , X_2 (рис. 19, а).

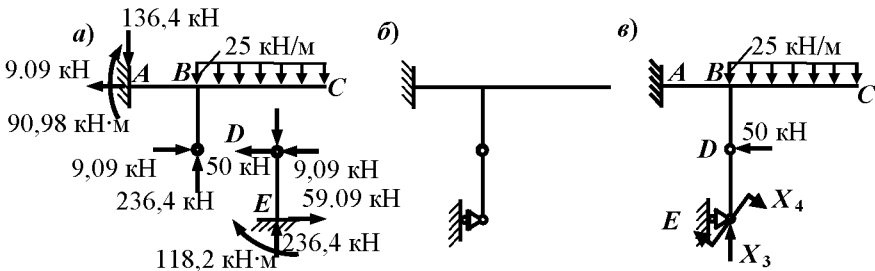


Рисунок 19 – Первоначальная эквивалентная (а), новые основная (б) и эквивалентная (в) системы

Проведем генеральную проверку решения. Для этого выбираем новую основную систему (рис. 19, б), отбрасывая в опоре E две лишние связи, препятствующие повороту сечения и линейному перемещению по вертикали. Изобразим новую эквивалентную систему (рис. 19, в).

Вычислим в новой эквивалентной системе угловое перемещение сечения E отдельно от заданных сил и отдельно от новых «неизвестных». Для этого изобразим схемы нагружения новой основной системы единичной парой сил, приложенной в сечении E (рис. 20, б), и построим эпюру изгибающего момента \overline{M}_4 (рис. 20, з), вычислив предварительно реакции опор, а также эпюру M в эквивалентной системе (рис. 20, в).

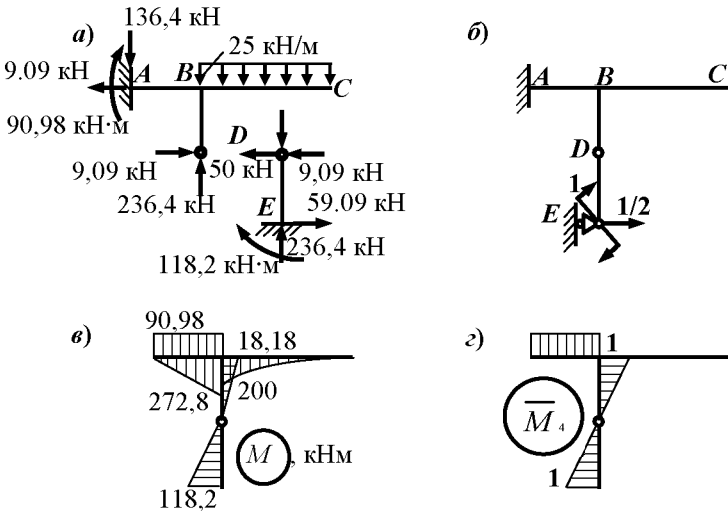


Рисунок 20 – Эпюры изгибающих моментов для генеральной проверки

Перемножая эпюры M и \overline{M}_4 способом Верещагина вычислим угловое перемещение сечения E :

$$E \cdot J \cdot \Delta_4 = \int M \cdot \overline{M}_4 \cdot dz = 90,98 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} 272,8 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} 18,18 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} 118,2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 272,88 - 272,8 = 0,08 \text{ кНм}^2$$

Определим относительную погрешность решения:

$$\frac{|E \cdot J \cdot \Delta_4^+ + E \cdot J \cdot \Delta_4^-|}{E \cdot J \cdot \Delta_4^+} \cdot 100\% = \frac{0,08}{272,76} \cdot 100\% = 0,029\% < 5\%$$

Аналогично определяется вертикальное перемещение сечения E и вычисляется вторая погрешность.

Погрешность решения менее 5%, следовательно, статическая неопределимость раскрыта верно.

Строим эпюры N , Q и M для рамы (рис. 21) в эквивалентной системе.

Нормальная сила

на участке $AB - N = 9,09$ кН;

на участке $BC - N = 0$;

на участках BD и $DE - N = - 236,4$ кН

Поперечная сила

на участке $AB - Q = - 136,4$ кН;

на участке $BC - Q = 25z$: $Q_C = Q(0) = 0$,

$Q_B = Q(4 \text{ м}) = 25 \cdot 4 = 100$ кН;

на участке $BD - Q = - 9,09$ кН

на участке $DE - Q = - 59,09$ кН

Изгибающий момент

на участке $AB - M = 90,92 - 136,4z_1$: $M_A = M(0) = 90,92$ кНм,

$M_B = M(2 \text{ м}) = 90,92 - 136,4 \cdot 2 = - 181,9$ кНм;

на участке $BC - M = 12,5z^2$:

на участке $BD - M = 9,09z_3$: $M_D = M(0) = 0$,

$M_E = M(2 \text{ м}) = 9,09 \cdot 2 = 18,18$ кНм;

на участке $DE - M = - 59,09z_4$: $M_D = M(0) = 0$,

$M_E = M(2 \text{ м}) = - 59,09 \cdot 2 = - 118,18$ кНм;

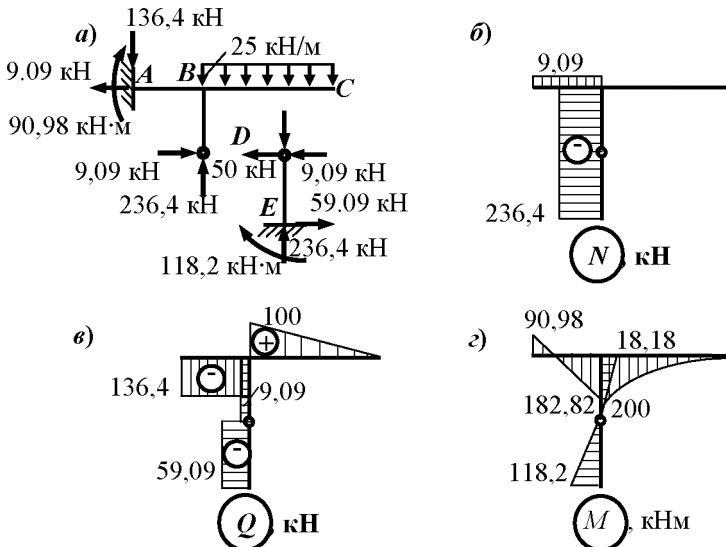


Рисунок 21 – Эпюры внутренних сил

Из условия прочности только при изгибе подберём поперечное сечение, составленное из двух швеллеров:

$$W_x^{\text{II}} = \frac{J_x^{\text{II}}}{|y|_{\text{наиб}}} = \frac{2 \cdot J_x^{\text{I}}}{|y|_{\text{наиб}}} = 2 \cdot W_x^{\text{I}}$$

$$W_x^{\text{I}} = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{2 \cdot \sigma} = \frac{200 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6} = 625 \text{ см}^3.$$

Полученному значению удовлетворяет швеллер № 40 с характеристиками: $W_x^{\text{I}} = 761 \text{ см}^3$, $A^{\text{I}} = 62,5 \text{ см}^2$.

Проверим подобранное сечение по полному условию прочности:

$$|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{2 \cdot W_x^{\text{I}}} + \frac{|N|}{2 \cdot A^{\text{I}}} = \frac{200 \cdot 10^3}{2 \cdot 761 \cdot 10^{-6}} + \frac{0}{2 \cdot 125,69 \cdot 10^{-4}} = 131,4 \text{ МПа} < \sigma -$$

условие прочности выполняется.

4.4 Контрольные вопросы

- 1 Какие рамы называются статически неопределимыми?
- 2 Как определяют степень статической неопределимости рамы?
- 3 Какую систему называют основной?
- 4 Каким требованиям должна удовлетворять основная система?
- 5 Какую систему называют эквивалентной?
- 6 Что выражают собой канонические уравнения метода сил?
- 7 Как определяют коэффициенты канонических уравнений?
- 8 В чём заключается генеральная проверка правильности раскрытия статической неопределимости?
- 9 Из какого условия подбирают размеры поперечного сечения рамы?
- 10 Как записывается полное условие прочности для плоской рамы?

5 Расчёт вала зубчатой передачи

5.1 Задание

Заданы схема зубчатой передачи (рис. 22), число оборотов первой шестерни, передаваемая мощность, размеры, материал вала и коэффициент запаса (табл. 4).

Требуется определить диаметр вала AB .

В пояснительной записке следует представить схему зубчатой передачи, выполненную в масштабе, расчётную схему вала, эпюры изгибающих, крутящих и эквивалентных моментов и все необходимые расчёты.

5.2 Порядок выполнения работы

1 По данным табл. 4 изображают в масштабе схему зубчатой передачи, соответствующую заданному шифру.

2 Изображают расчётную схему вала.

3 По заданным значениям мощности и числа оборотов определяют момент и усилия, действующие на вал AB .

4 Строят эпюры изгибающих моментов M_z , M_y в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

5 Строят эпюру суммарного изгибающего момента M_u .

6 Строят эпюру крутящего момента M_k .

7 Вычисляют эквивалентные моменты по четвёртой теории предельных напряжённых состояний: $M_{эkv IV} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_k^2}$ и строят эпюру эквивалентного момента.

8 Подбирают диаметр вала по наибольшему эквивалентному моменту и заниженному значению допускаемого напряжения, исходя из условия прочности:

$$\frac{M_{эkv IV}^{наиб}}{W_x} \leq \frac{\sigma_{-1}}{n_{cp}},$$

где n_{cp} – среднее значение требуемого коэффициента запаса.

9 Определяют коэффициенты запаса прочности в предполагаемых опасных сечениях вала и сравнивают их с заданными значениями.

Т а б л и ц а 4. Параметры зубчатой передачи

№ строки	N, кВт	n, об/мин	D_1, см	D_2, см	D_3, см	D_4, см	l_1, см	l_2, см	l_3, см	β, град	γ, град	α, град	Коэффиц. запаса	Марка стали	
1	45	700	16	40	30	55	8	20	24	0	120	20	1,1...1,4	15	
2	50	800	18	42	26	53	10	24	20	45	225	20	1,2...1,5	35	
3	55	900	20	44	24	51	12	20	22	90	315	20	1,3...1,6	45	
4	60	1050	18	53	36	58	9	24	22	150	60	20	1,4...1,7	40X	
5	65	1150	20	51	34	56	8	20	24	210	270	20	1,5...1,8	25ХН3А	
6	70	1200	16	50	24	55	9	22	28	225	90	20	1,6...1,9	12ХН3А	
7	75	1250	17	49	25	54	10	24	26	240	135	20	1,2...1,5	18ХН3А	
8	65	1300	18	48	26	53	11	24	24	270	30	20	1,3...1,6	30ХГСА	
9	60	1350	20	46	28	51	10	20	22	315	45	20	1,1...1,4	30ХМА	
0	55	1400	18	50	24	54	8	22	24	45	135	20	1,5...1,8	50ХН	
	<i>a</i>		<i>б</i>				<i>в</i>			<i>г</i>			<i>д</i>		<i>e</i>

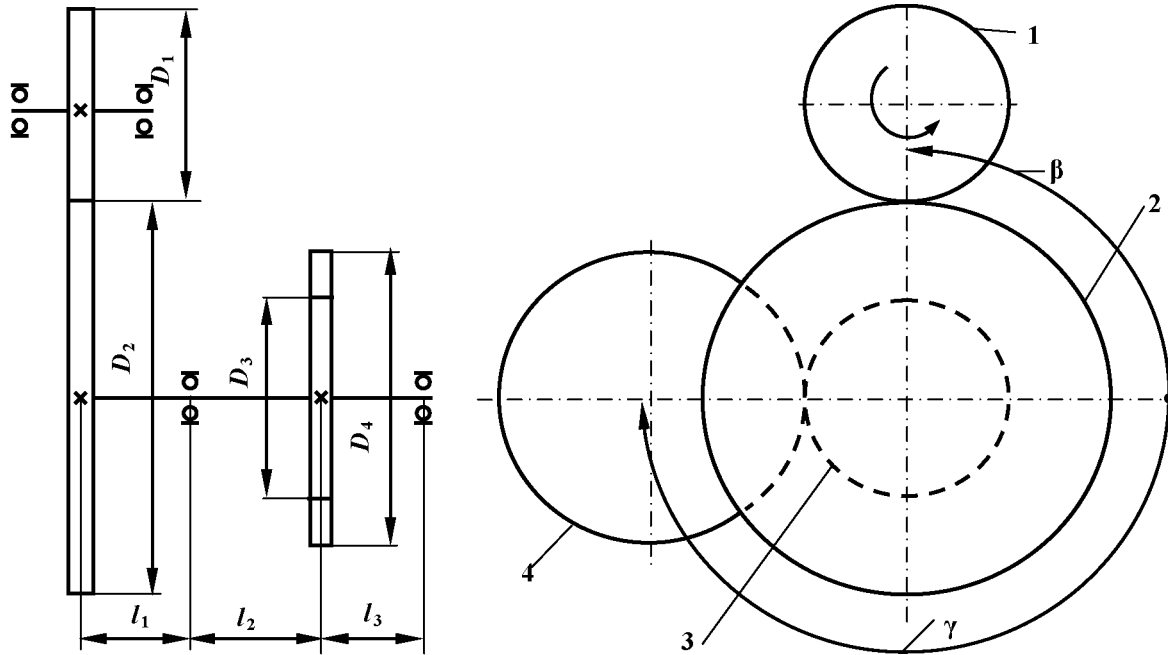


Рисунок 22 – Схема зубчатой передачи

Примечания:

1 Концентраторами напряжений являются: под шестерней – шпоночный паз, под опорой – напрессованное внутреннее кольцо подшипника (давление напрессовки 20 МПа).

2 В расчётах учитывают, что поверхность вала шлифованная.

3 Если вычисленный коэффициент запаса прочности не соответствует заданному, то следует изменить диаметр вала и повторить расчёт на прочность.

5.3 Пример выполнения работы

Подобрать диаметр вала AB зубчатой передачи, изображённой на рис. 22, при следующих данных: $N = 73$ кВт, $n = 1050$ об/мин, $D_1 = 28$ см, $D_2 = 58$ см, $D_3 = 26$ см, $D_4 = 42$ см, $l_1 = 18$ см, $l_2 = 20$ см, $l_3 = 20$ см, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 180^\circ$, $\alpha = 20^\circ$, $n_{необх} = 1,4 \dots 1,7$, поверхность вала шлифованная, материал вала – сталь 45.

Используя исходные данные, изобразим в масштабе схему зубчатой передачи (рис. 23, а). Покажем усилия F_{12} и F_{43} , действующие на зубчатые колеса 2 и 3 вала AB .

Изобразим отдельно вал AB с зубчатыми колесами 2 и 3 и действующими на них силами (рис. 23, б).

Изобразим расчётную схему вала (рис. 23, в), переносим усилия F_{12} и F_{43} на ось вала, раскладывая их на вертикальные и горизонтальные составляющие и добавляя моменты m_2 , m_3 .

Определим по мощности и числу оборотов моменты, действующие на вал:

$$m_2 = m_3 = 9,55 \cdot \frac{N}{n_2};$$

где $n_2 = n_1 \frac{D_1}{D_2} = 1050 \cdot \frac{0,28}{0,58} = 507,0$ об/мин,

тогда $m_2 = m_3 = 9,55 \cdot \frac{N}{n_2} = 9,55 \cdot \frac{73}{507} = 1,375$ кН·м.

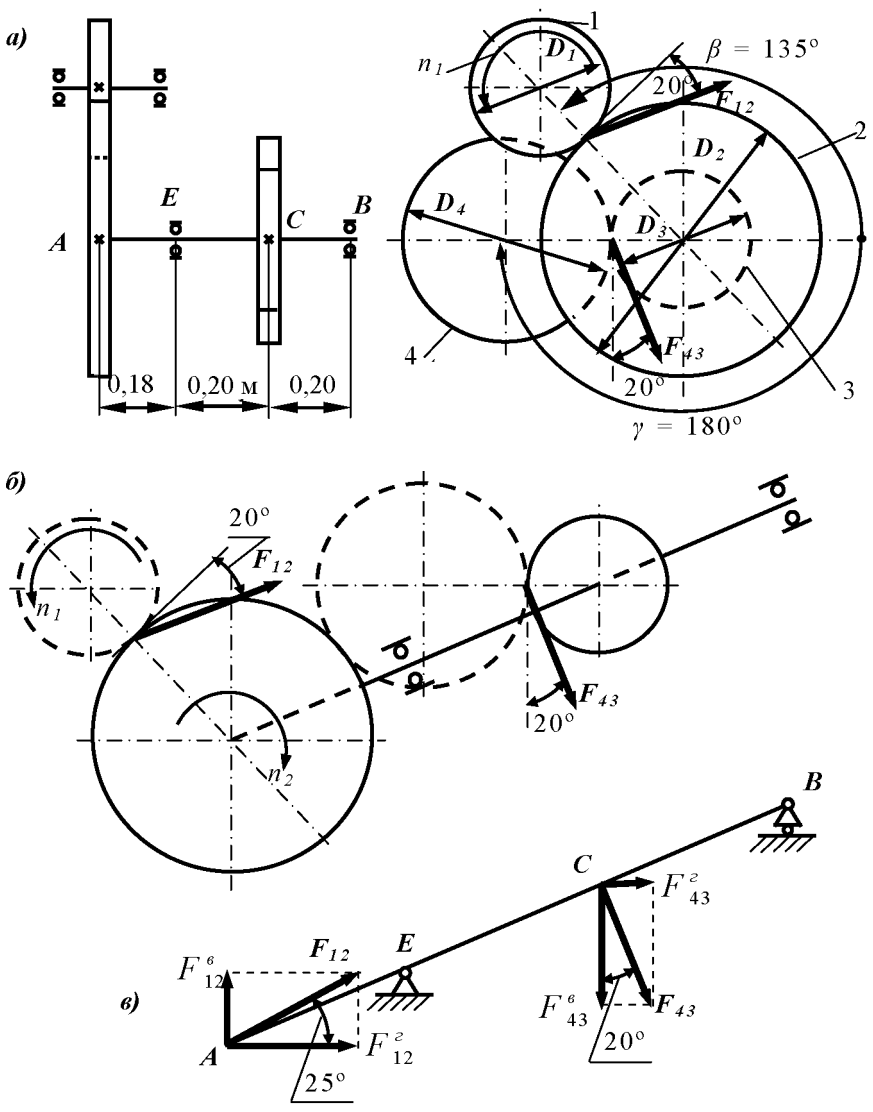


Рисунок 23 – Расчётная схема зубчатой передачи

Определим усилия, действующие на вал, и их проекции в горизонтальной и вертикальной плоскостях:

$$F_{12} = \frac{2 \cdot m_2}{D_2 \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 1,375}{0,58 \cdot \cos 20^\circ} = 5,046 \text{ кН};$$

$$F_{12}^z = F_{12} \cdot \cos 25^\circ = 5,046 \cdot \cos 25^\circ = 4,593 \text{ кН};$$

$$F_{12}^y = F_{12} \cdot \sin 25^\circ = 5,046 \cdot \sin 25^\circ = 2,132 \text{ кН};$$

$$F_{43} = \frac{2 \cdot m_3}{D_3 \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 1,375}{0,26 \cdot \cos 20^\circ} = 11,26 \text{ кН};$$

$$F_{43}^F = F_{43} \cdot \sin 20^\circ = 11,26 \cdot \sin 20^\circ = 3,850 \text{ кН};$$

$$F_{43}^B = F_{43} \cdot \cos 20^\circ = 11,26 \cdot \cos 20^\circ = 10,58 \text{ кН}.$$

Строим эпюры изгибающих моментов M_z, M_y от сил, действующих в горизонтальной и вертикальной плоскостях, а также эпюры суммарного изгибающего момента M_u , крутящего момента M_k и эквивалентного момента $M_{экв IV}$ (рис. 24).

Определим диаметр вала в первом приближении из условия статической прочности при изгибе с кручением, используя заниженное допускаемое напряжение:

$$\frac{M_{экв IV}^{наиб}}{W_x} \leq \sigma = \frac{\sigma_{-1}}{n_{cp}},$$

где $W_x = \pi \cdot d_0^3 / 32$, $n_{cp} = (1,4 + 1,7) / 2 = 1,55$,

для стали 45: $\sigma_b = 600-750$ МПа; $\sigma_T = 320$ МПа; $\sigma_{-1} = 250-340$ МПа.

$$\text{Тогда } d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{экв IV}^{наиб} \cdot n_{cp}}{\pi \cdot \sigma_{-1}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,727 \cdot 10^3 \cdot 1,55}{\pi \cdot 250 \cdot 10^6}} = 47,78 \text{ мм}.$$

Принимаем ближайшее стандартное значение $d = 48$ мм.

$$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4,8^3}{32} = 10,86 \text{ см}^3,$$

$$W_p = 2 \cdot W_x = 2 \cdot 10,86 = 21,72 \text{ см}^3.$$

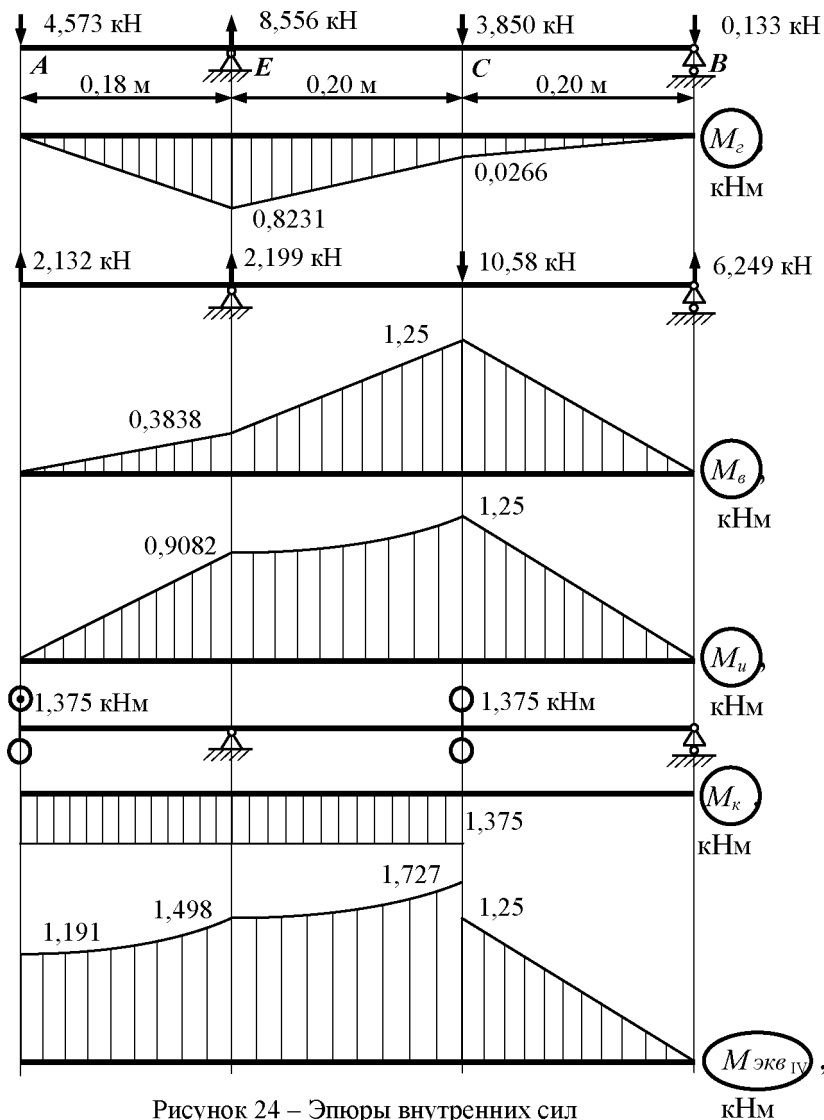


Рисунок 24 – Эпюры внутренних сил

Фактически напряжения во вращающемся валу циклически изменяются.

Определим коэффициенты запаса вала по текучести и усталости в предполагаемых опасных сечениях.

Сечение E (концентратор – напрессованное внутреннее кольцо подшипника). Определим напряжения в опасной точке сечения (точке, расположенной на поверхности вала), учитывая, что нормальные напряжения изменяются по симметричному закону, а касательные напряжения постоянны:

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{0,9082 \cdot 10^3}{10,86 \cdot 10^{-6}} = 83,63 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\max} = \tau_{\min} = \frac{M_\kappa}{W_\kappa} = \frac{1,375 \cdot 10^3}{21,72 \cdot 10^{-6}} = 63,31 \text{ МПа}.$$

Тогда $\sigma_a = 83,63 \text{ МПа}$, $\sigma_m = 0$, $\tau_a = 0$, $\tau_m = 63,31 \text{ МПа}$. Из справочных данных [2] найдём значения остальных величин, входящих в формулы для коэффициентов запаса:

$$\psi_\sigma = 0,1 \text{ и } \psi_\tau = 0,05 \text{ при } \sigma_\sigma = 750 \text{ МПа}.$$

$$\text{Для валов с напрессованными деталями: } \left(\frac{k_\sigma}{k_d} \right)_0 = 3,020 \text{ при}$$

$d = 48 \text{ мм}$, передаётся сила; $\xi' = 1,339$ при $\sigma_\sigma = 750 \text{ МПа}$; $\xi'' = 0,957$

при $p = 20 \text{ МПа}$; тогда $\left(\frac{k_\sigma}{k_d} \right) = \left(\frac{k_\sigma}{k_d} \right)_0 \cdot \xi' \cdot \xi'' = 3,02 \cdot 1,339 \cdot 0,957 = 3,95$;

$k_F = 0,94$ при $\sigma_\sigma = 750 \text{ МПа}$, шлифовка; $k_V = 0$ – упрочняющей обработки нет.

Теперь находим коэффициенты запаса:

$$n_\tau = \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{|\sigma_{\text{наиб}}|^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^2}} = \frac{320}{\sqrt{83,63^2 + 3 \cdot 63,31^2}} = 2,32;$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} = \frac{250}{\frac{3,95}{0,94 \cdot 1} \cdot 83,63 + 0} = 0,711;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m} = \frac{150}{0 + 0,05 \cdot 63,31} = 47,39;$$

$$n_R = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{0,711 \cdot 47,39}{\sqrt{0,711^2 + 47,39^2}} = 0,711.$$

Подсчитаем коэффициенты запаса в сечении C (концентратор – шпоночный паз).

Из сборника справочных данных [2]: $W_u = 9,62 \text{ см}^3$; $W_K = 20,50 \text{ см}^3$ для вала со шпоночным пазом, при $d = 48 \text{ мм}$.

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{1,25 \cdot 10^3}{9,62 \cdot 10^{-6}} = 129,9 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\max} = \tau_{\min} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{1,375 \cdot 10^3}{20,5 \cdot 10^{-6}} = 67,07 \text{ МПа}.$$

Тогда $\sigma_a = 129,9 \text{ МПа}$, $\sigma_m = 0$, $\tau_a = 0$, $\tau_m = 67,07 \text{ МПа}$. Из справочных данных [2] найдём значения остальных величин, входящих в формулы для коэффициентов запаса: $\psi_\sigma = 0,1$ и $\psi_\tau = 0,05$; $k_F = 0,94$; $k_V = 1$, $k_\sigma = 1,75$ и $k_\tau = 1,65$ при $\sigma_e = 750 \text{ МПа}$ (шпоночный паз); $k_d = 0,802$ при $\sigma_e = 500 \text{ МПа}$, $k_d = 0,683$ при $\sigma_e = 1400 \text{ МПа}$ и $d = 45 \text{ мм}$. Интерполируем для $\sigma_e = 750 \text{ МПа}$:

$$k_d = 0,683 + \frac{0,802 - 0,683}{1400 - 500} \cdot (1400 - 750) = 0,77.$$

Находим коэффициенты запаса:

$$n_\tau = \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{|\sigma|_{\max}^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^2}} = \frac{320}{\sqrt{129,9^2 + 3 \cdot 67,07^2}} = 1,84;$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} = \frac{250}{\frac{1,75}{0,77 \cdot 0,94 \cdot 1} \cdot 129,9 + 0} = 0,796;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m} = \frac{150}{0 + 0,05 \cdot 67,07} = 44,73;$$

$$n_R = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{0,796 \cdot 44,73}{\sqrt{0,796^2 + 44,73^2}} = 0,796.$$

Коэффициент запаса вала, равный наименьшему из четырёх найденных значений, $n = 0,711$, ниже заданного, поэтому диаметр вала необходимо увеличить и повторить расчёт для наиболее опасного сечения E . Для второго приближения диаметр вала можно ориентировочно подсчитать по формуле

$$d_{II} = d_I \sqrt[3]{\frac{n_{cp}}{n_I}} = 48 \cdot \sqrt[3]{\frac{1,55}{0,711}} = 62,2 \text{ мм.}$$

Принимаем ближайшее стандартное значение $d = 62$ мм.

$$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 6,2^3}{32} = 23,40 \text{ см}^3;$$

$$W_p = 2 \cdot W_x = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^3.$$

Определяем коэффициент запаса в наиболее опасном сечении E :

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{0,9084 \cdot 10^3}{23,4 \cdot 10^{-6}} = 38,82 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \tau_{\min} = \frac{M_K}{W_K} = \frac{1,375 \cdot 10^3}{46,8 \cdot 10^{-6}} = 29,38 \text{ МПа}.$$

Тогда $\sigma_a = 38,82$ МПа, $\sigma_m = 0$, $\tau_a = 0$, $\tau_m = 29,38$ МПа. Из справочных данных [2] найдём значения остальных величин, входящих в формулы для коэффициентов запаса: $\psi_\sigma = 0,1$ и $\psi_\tau = 0,05$; $k_F = 0,94$; $k_V = 0$;

$$\left(\frac{k_\sigma}{k_d} \right)_0 = 3,182 \text{ при } d = 62 \text{ мм, передаётся сила; } \xi' = 1,339; \xi'' = 0,957,$$

$$\text{следовательно, } \left(\frac{k_\sigma}{k_d} \right) = \left(\frac{k_\sigma}{k_d} \right)_0 \xi' \cdot \xi'' = 3,182 \cdot 1,339 \cdot 0,957 = 4,08.$$

Коэффициенты запаса:

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{|\sigma|_{\text{наиб}}^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^2}} = \frac{320}{\sqrt{38,82^2 + 3 \cdot 29,38^2}} = 5,00;$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} = \frac{250}{\frac{4,08}{0,94 \cdot 1} 38,82 + 0} = 1,48;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{k_d \cdot k_F \cdot k_V} \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m} = \frac{150}{0 + 0,05 \cdot 29,38} = 102;$$

$$n_R = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{1,48 \cdot 102}{\sqrt{1,48^2 + 102^2}} = 1,48.$$

Подобранный диаметр $d = 62$ мм обеспечивает коэффициент запаса вала $n = 1,48$, что находится в требуемом интервале $1,4 \dots 1,7$.

5.4 Контрольные вопросы

- 1 Какой вид сопротивления испытывает вал зубчатой передачи?
- 2 Как записывается условие статической прочности вала круглого поперечного сечения при изгибе с кручением?
- 3 Почему вал зубчатой передачи испытывает циклически изменяющиеся напряжения?
- 4 Где располагаются опасные сечения вала?
- 5 Что такое концентрация напряжений и как она влияет на прочность?
- 6 Как влияют размеры вала на сопротивление усталости?
- 7 Как влияет состояние поверхности вала на сопротивление усталости?
- 8 Как записывается условие прочности при циклически изменяющихся напряжениях?
- 9 Как определяют коэффициент запаса вала по усталости при изгибе с кручением?
- 10 Как определяют коэффициент запаса вала по текучести при изгибе с кручением?

Учебное издание

*Вакулюк Владимир Степанович,
Чирков Алексей Викторович,
Шадрин Валентин Карнович*

**РАСЧЁТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ**

Учебное пособие

Редактор Т. С. Зинкина
Довёрстка Т. С. Зинкина

Подписано в печать 25.04.2012. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 5,25.

Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С – 4/2012.

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.