МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Лаборатория математической физики

РЯДЫ

Учебное пособие

Самара
Издательство «Самарский университет»
2013

ББК 22.141
УДК 517.55
Р98

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. В.М. Долгополов
Авторы: Т.В. Волкова, М.В. Долгополов, И.Н. Родионова,
Э.Н. Рыкова

Р 98 Ряды: учеб. пособие / Т.В. Волкова, М.В. Долгополов, И.Н. Родионова [и др.]. - Самара : Изд-во «Самарский университет», 2013. - 86 с.
ISBN 978-5-86465-577-1

В начале каждого раздела пособия дается подробное теоретическое введение, приводятся основные определения и формулы, относящиеся к данному разделу, показаны образцы решений особо важных типовых задач, а также предлагаются задания для самостоятельной работы студентов по практическому закреплению соответствующего раздела. В конце пособия представлены варианты контрольной работы по теме «Ряды».

Предназначается для студентов, изучающих в курсе высшей математики темы «Числовые ряды», «Функциональные ряды», «Применение рядов в приближенных вычислениях», может быть использовано в качестве руководства к проведению практических занятий, а также для самостоятельного изучения данного материала.

Пособие подготовлено в рамках госзаказа СамГУ № 1.909.2011, а также поддержано фондом «Династия» и МЦФФМ.

ББК 22.141
УДК 517.55

ISBN 978-5-86465-577-1

ВВЕДЕНИЕ

В школьных курсах алгебры и начала анализа обычно рассматривают суммы, состоящие из конечного числа слагаемых. Единственным исключением является сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, т. е.

$$a + aq + \ldots + aq^{n-1} + \ldots,$$

где $|q| < 1$. В курсе математического анализа изучаются суммы бесконечного множества слагаемых, или, как их называют, ряды, которые являются действенным средством изучения функций и сильным вычислительным аппаратом, позволяющим находить с заданной точностью значения функций, вычислять приближенные значения интегралов и решать многие другие прикладные задачи в различных областях науки и практики.

Первоначально математики считали, что свойства рядов аналогичны свойствам конечных сумм, и, не задумываясь, переставляли слагаемые, почленно дифференцировали и интегрировали бесконечные ряды, состоящие из функций, умножали один ряд на другой, так же, как перемножают многочлены, и т. д. Но потом выяснилось, что столь беззаботное обращение с бесконечными рядами может привести к ошибочным результатам, и потому возникла необходимость в построении строгой теории рядов, основными задачами которой являются:

1) определение понятия суммы бесконечной последовательности слагаемых;

2) установление признаков, по которым можно судить, имеет ли данный ряд сумму;

3) выделение классов рядов, с которыми можно обращаться как с конечными суммами (например, переставлять члены ряда, почленно дифференцировать и интегрировать ряды, состоящие из функций, и т.д.);

4) вывод формул, позволяющих представить заданные функции в виде сумм рядов, состоящих из сравнительно простых функций.

Настоящее пособие предназначается для студентов, изучающих в курсе высшей математики темы «Числовые ряды», «Функциональные ряды», «Применение рядов в приближенных вычислениях», может быть использовано в качестве руководства к проведению практических занятий, а также для самостоятельного изучения данного материала.

В начале каждого раздела дается подробное теоретическое введение, приводятся основные определения и формулы, относящиеся к данному разделу, показаны образцы решений особо важных типовых задач, а также предлагаются задания для самостоятельной работы студентов по практическому закреплению соответствующего раздела. В конце пособия представлены варианты контрольной работы по теме «Ряды».

1 Числовые ряды

1.1 Общие понятия

Рассмотрим числовую последовательность 01,02,03, ...,$a_п$,... и составим символ

$$\overset{00}{\underset{п=1}{\wedge}} a_n = ai + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (1.1)$$

который называется числовым рядом, $a_п$— члены ряда, n = 1,оо.

Составим конечные суммы

$$Si = ai$$

$$S2 - 01 + o_2$$

$$S3 = Oi + 02 + o_3 \qquad (1.2)$$

$$ai + 02 + 03 + \ldots + a_n$$

которые называются частными (частичными) суммами ряда (1.1).

Рассмотрим последовательность

$$Si,S2,..-,S_n,.... \qquad (1.3)$$

Возможны три случая: $\lim\limits_{n—\wedge+00} S_n = S$, $\lim\limits_{n—>-+00} S_n = 00$, не существует предела последовательности частных сумм ряда (1.1). В первом случае ряд (1.1) называется сходящимся, во втором и третьем - расходящимся.

Определение. Конечный предел последовательности частных сумм ряда (1.1) при n -> оо называют суммой ряда (1.1) и пишут

$$\overset{00}{\underset{7 1=1}{}}$$

Примеры

1) Ряд $0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$ сходится и его сумма равна нулю, так как $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, ..., $S_n = 0, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

2) Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$ расходится. Действительно, $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$, ... Последовательность 1,0,1,0, ... предела не имеет.

3) Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots. \qquad (1.4)$$

Ее частичная сумма при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.

При $q > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, соответственно $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$, а при $q > -1$ не существует $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Так как геометрическая прогрессия в дальнейшем будет часто нами применяться, то следует запомнить

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1. \qquad (1.5)$$

Задание

Определить какие из рядов сходятся, а какие расходятся. Найти сумму сходящихся рядов.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ldots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ldots \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ldots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \ldots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \ldots$$

4) Рассмотрим ряд который называется гармоническим рядом

^ 1 1 1 1

2 ^ - = i + - + - + ... + - + ...

^—' *n* 2 3 п

п=1

Докажем его расходимость, применяя известное из теории пределов неравенство (1 Н—)^{п} < е, которое следует из того что

п

lim (1 + -) ^{п} = е

га—»+оо П

и монотонного возрастания последовательности (Ц —) ^{п} . Пролега-

ть

рифмируем указанное неравенство

n(ln(n + l) - I n n) < 1,

откуда

ln(n + l) - 1 п г г < -

n

и будем придавать *n* натуральные значения. Получаем

1 п 2 - Ы < 1 ,

1 п 3 - 1 п 2 < -,

Li

1п4-1п3< -,

о

1п(п + 1) - 1 п п < -.

тг

Сложим полученные неравенства

1 п (п + 1) < 1 + - + ... + -. (1.6)

At *ТЬ*

Так как ln(n+1) —» +00 при n —> +оо, то и правая часть неравенства (1.6), представляющая n ю частичную сумму гармонического ряда также стремится к бесконечности. Расходимость гармонического ряда доказана.

оо

5) Найти n - ю частичную сумму ряда *Y1* $_n$*(n+1)* • Исследовать на сходимость по определению.

Для нахождения S_n представим a_n = ———— в виде
$n\{n + 1)$

$$\frac{(п + 1) - n}{n(n + 1)} \quad \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n + 1}$$

тогда

$$1 \text{ - - } \quad n \quad n + 1J \qquad п + 1$$

$$\lim_{п\text{-Я-}00} S_n = \lim_{п\text{-*+оо}} (1\text{———}) = 1 \quad П + L$$

Ответ:

$$\underline{y} \quad ^{1} \quad {}_{=}\mathbf{i}.$$

Задание

Найти сумму первых n членов ряда. Пользуясь определением доказать сходимость и найти сумму ряда

оо

1) $_n?_1(2n-1)(2n + 1)'$ 2) $n?in(« + 3)$:

Замечание В четвертом примере применить формулу

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} в = \operatorname{arctg}\frac{}{1 - ap}$$

и метод математической индукции.

1.2 Необходимое условие сходимости ряда

Теорема

Если ряд (1.1) сходится, то $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$. Доказательство основано на определении сходимости ряда. Действительно, если ряд (1.1) сходится, то

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S$$

и

$$\lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = S, \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Однако данное условие является недостаточным, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, но ряд расходится. Примером служит расходящийся гармонический ряд $\sum\limits^{\infty} \frac{1}{n}$ $\left(\lim \frac{1}{n} = 0\right)$. Поэтому при исследовании рядов на сходимость необходимое условие следует применять так: если $\lim a_n \neq 0$, то ряд расходится, если $\lim a_n = 0$, то ряд может сходиться, а может и расходиться, т. е. его надо исследовать с помощью какого-нибудь достаточного признака.

Задание

Проверить выполнимость необходимого условия. Какие выводы можно сделать?

оо 1 о о / 0 \ п о о 1

^ Е (п + 1)'; Е 3 У '; Е 1п(п + 1)'

f 1 f 2n ∞ 2n ∞ / n V. f Л • IV

2 Тема I Положительные ряды

2.1 Признаки сходимости

Ряд **(1.1)** назовем положительным, если все его члены неотрицательны. Рассмотрим основные признаки сходимости положительных рядов.

Признак сравнения 1

Пусть даны два положительных ряда

f>n **(2.1)**

71=1

и

00

X>- **(2.2)**

п=1

Если, начиная с некоторого номера *п* выполняются неравенства

то из сходимости ряда (2.2) следует сходимость ряда (2.1), а из расходимости ряда (2.1) вытекает расходимость ряда (2.2).

Признак сравнения 2

Если существует lim -^ = *к,* то при О < *к* < +оо оба ряда схо-
п-»+оо *о*

дятся или расходятся одновременно.

Примеры

Исследовать на сходимость

оо -

£=?• **(2,3)**

n=1

У_-i——г, **(2.4)**

^ In *(n* + 1)' v ;

п=1 ч

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}. \tag{2.5}$$

Для членов ряда (2.3) справедливо неравенство $\frac{1}{\ldots} < \frac{1}{\ldots}$, а так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}$ есть сходящаяся геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{7}$, то, в силу признака сравнения *1,* ряд (2.3) сходится как ряд с меньшими членами.

При исследовании ряда (2.4) используем неравенство $\ln x < x$, в силу которого имеем $\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{n+1}$, а так как гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то ряд с большими членами расходится в силу признака сравнения *1.* Выделим главную часть n - го члена ряда (2.5) при достаточно больших n:

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} \sim \frac{1}{n}$$

и рассмотрим для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 1,$$

то ряд (2.5) расходится в силу признака сравнения *2.*

Признак Даламбера

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$$

Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Если $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ расходится, $l = 1$ признак ответа не дает.

Признак Коши

Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ расходится, при $l = 1$ признак ответа не дает.

Примеры

Исследовать на сходимость ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \tag{2.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \tag{2.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(5\hat{}7 \right) \tag{2.8}$$

Для исследования ряда (2.6) применим признак Даламбера

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)!\, 2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0,$$

ряд сходится.

Для ряда (2.7) по признаку Даламбера имеем

$n\to+\infty \quad 3^{n+1} n^3 \qquad 3\ n\to+\infty \quad n \quad / \qquad 3\ n\to+\infty \qquad n \qquad 6$

Ряд сходится.

Для ряда (2.8) удобнее применить признак **Коши**

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{3n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Задание

Применяя признак Даламбера или Коши исследовать ряды на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}, \quad \ldots$$

Интегральный признак сходимости

Он основан на сравнении ряда с интегралом, взятым по бесконечному промежутку. Поскольку ранее нами рассматривались лишь определенные интегралы по конечному сегменту, то введем предварительно новое определение, так называемого, несобственного интеграла.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a; +\infty)$ и интегрируема в любом сегменте $[a, A]$, $A > a$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

понимают следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx.$$

Если предел правой части существует и конечен, то говорят что несобственный интеграл сходится, если не существует или бесконечен, то интеграл расходится.

Например,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \to +\infty} \ln A = +\infty$$

интеграл расходится. А интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \to +\infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^A = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right)$$

сходится, если р > 1 и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$, но расходится если $p < 1$. В дальнейшем будем использовать этот факт

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } p > 1, \\ \text{расходится,} & \text{если } p < 1. \end{cases}$$

Задание

На основании определения исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}, \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x},$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}, \quad \int_0^{+\infty} \sin x \, dx.$$

Для формулировки следующей теоремы члены положительного ряда удобно представить в виде $a_n = f(n)$.

Теорема (интегральный признак)

Пусть функция *f(x)* непрерывна, положительна и монотонно убывает на [1, +oo). Тогда ряд
OO
]Г} /(п) и интеграл +00 / *f(x)dx* сходятся
п=1 1

или расходятся одновременно.

Из данной теоремы и формулы (2.9) следует расходимость гармонического ряда oo 1 ^3 — и ряда
7 1 = 1 "

oo 1

£=?• (2Д0)

га=1

который принято называть обобщенным гармоническим, при $p < 1$, а также сходимость ряда (2.10) при $p > 1$. Итак, имеем

^ 1 J сходится, если р > 1, , .

"J *nP* 1 расходится, если $p < 1$.

<u>Примеры</u>

Исследовать на сходимость следующие ряды.

oo 1

^ 2 n l n 3 n

Применим интегральный признак сходимости и рассмотрим соответствующий ряду интеграл

+oo A

[Ь-ь* [®£>=ш (~Л-|^-

У х Ь Г х А^+ooJ п ГХ Л-++00 \ 2 h Т х

2 2

lim 21n 2 2 21n 2 А 21n 2 2

А—Ц-oo

oo

интеграл сходится, следовательно ряд У} 9 сходится.

п = 2 2 п Г ? г

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

соответствующий интеграл

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\int_{2}^{A}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{A\to+\infty}(\ln(\ln A)-\ln\ln 2)=+\infty$$

расходится, следовательно, расходится и ряд.

Задание

1) Применяя интегральный признак, исследовать на сходимость ряды:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

2) Доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0,\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0,\quad 3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0,$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0,\quad 5)\ \lim_{n\to\infty}\frac{M^n}{n^p}=0.$$

В качестве примера рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$$

Исследуем на сходимость ряд, общим членом которого является данная функция, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}} \qquad (*)$$

Применим признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}.$$

Для вычисления последнего предела рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}. \qquad (2.13)$$

Исследуем его сходимость с помощью признака Даламбера

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1,$$

Ряд (2.13) сходится по признаку Даламбера, следовательно, в силу необходимого условия сходимости, его n-ый член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$. А это означает, что ряд (2.12) сходится по признаку Коши и в силу необходимого условия $\lim\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0$.

Задание

Исследовать на сходимость положительные ряды с помощью любого из перечисленных выше признаков сходимости.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2-1}$, 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$,

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\ldots}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ldots}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

oo „ 3 oo on oo п! oo on

W) E y , 1DEL. и) E ^ , 13)E|г,

n=i e п = x та n = 1 z п = 1 П!

М) E00 (таП2 15) °£ ^csin ^ 16) E й п 4

п=1 12nV') ' n =1 V n) п=1

17) E Ь(1 + *h*, 18) £ / - т i — v 19) E (VnTT - *y/n),*

n=1 *П* *n = x* *yjn(n* + 1) п=1

о о \/п — л/п — 1 oo 1 oo 1

20) г V" *l n* \ 21) E — • 22) E

n=1 п=1 та I n n I n I n n ' п = 1 " (v ^ - V ^) '

oo ~ oo фг»)! °° 9ⁿn1

23)E(l-oosi),24)E^25)E^,

n=1 "' n=1 '¹ ?г=1 '¹

oo p n ^ i oo o o / 1 /4 U „ 2 \² \ ²

26) E ^ > 27) E (TXHT)

n=l « П n=l \ 1 + П³ У

<u>Замечание</u>. При исследовании рядов на сходимость с помощью признаков сравнения бывает полезно применение эквивалентных бесконечно малых величин. Если *a(n)* —> 0 при та —> oo, то имеют место эквиваленты (см. теорию пределов)

$$\sin a(n) \sim a(n), \quad \arcsin a(n) \sim a(n), \quad \mathrm{tg}\, a(n) \sim a(n)$$

$$\mathrm{arctg}\, a(n) \sim a(n), \quad \ln(1 + a(n)) \sim a(n), \quad e^{a(n)} - 1 \sim a(n).$$

<u>Примеры</u>

Исследовать на сходимость

oo *J*^_

1 > п 2 " 1), (2-14)

п=1

V 3тг2 + 1 (2 15)

^ 10n² + 5n + 8' 1 ' ;

oo 1

V -(V^² + та + 1 - \/п² - *n* - 1), (2.16)

t—¹ n

n—1

^ (V 2 _ *Щ[у/2* - *Щ...{у/2* - $^{2n+}$*Щ.* (2.17)

При исследовании ряда (2.14) применим признак сравнения, при этом используем эквивалент $ew^{\overset{2}{\sim 9}} - 1 \sim \frac{2}{n^1}x$. Сравним ряд (2.14) с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{п=1}^{oo} \backslash \sim J)$ сходимость которого установлена с помощью интегрального признака (формула (2.11)).

$$\text{hm}_{га \to юо} \frac{en^2 - 1}{\frac{1}{п^2}} \text{i} = \lim_{п \to oo} \frac{Ц^2 -}{\frac{1}{п^2}} = 2.$$

Ряд (2.14) сходится в силу признака сравнения *2.*

Для ряда (2.15), очевидно, не выполняется необходимое условие сходимости

$$\text{hm}_{n \to +oo} \frac{3п^2 + 1}{10n^2 + Бn + 8} = \lim_{n \to +oo} \frac{3 + \wedge\frac{1}{2}}{\frac{5}{n} - I\frac{8}{n^2}} = \frac{3}{ю'}$$

т.е. $\lim_{n \to +oo} a_n \phi 0$, ряд (2.15) расходится.

Преобразуем общий член ряда (2.16) переведя иррациональность в знаменатель

$$o\text{-}n = \frac{}{п}(\sqrt{п^2 + п + 1} - \sqrt{п^2 - п - 1}) =$$

$$\frac{п^* + п + 1 - п^2 + п + 1}{n(\sqrt{n^2 + п + 1} + \sqrt{га^2 - n - 1})} \qquad \frac{2п + 1}{n(\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - п - 1})}$$

и выделим его главную часть при достаточно больших *n:*

a_n ——————= = = = =——————————~ —.

V п п^ V "• ^

oo J

Следовательно, ряд (2.16) ведет себя как гармонический *Y1* — > т. е. расходится. Строго это доказывается на основании признака сравнения *2*

Um **£=±1** = um (V2 - $^{2n+}$^) = *y/2*- K 1.

n-»oo a$_n$ n-*oo

Ряд (2.17) сходится.

3 Тема II Знакочередующиеся ряды

3.1 Ряды с произвольными членами

<u>Определение</u>. Ряд вида

00

^ (- 1) " " ^{1} ^ = oi - a_2 + a_3 - a_4 + ... + $(-1)^{n-1}$an + -, (3.1)

n=1

где $a_n > 0$ называется знакочередующимся рядом. Имеет место

Теорема Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине и $\lim\limits_{п-+oo} a_n = 0$, то ряд (3.1) сходится и его сумма по абсолютной величине не превосходят абсолютной величины первого члена.

<u>Например</u>, ряды

OO **и** **oo** **oo** **, oo** **-**

E (• i r . 1, E(-i)-^{1}^. D-D-^{1};?. B-Ч-'БП;

n=1 n=1 n=1 n=1

сходятся в силу теоремы Лейбница.

Рассмотрим ряд с произвольными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (3.2)$$

и одновременно ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (3.2), т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (3.3)$$

Определение. Ряд (3.2) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд (3.3) и условно сходящимся, если ряд (3.2) сходится, а ряд (3.3) расходится. Из приведенных выше примеров только ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3}$ сходится абсолютно, так как соответствующий ему положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится как обобщенный гармонический с $p = 3 > 1$. Остальные ряды сходятся условно (рекомендуем читателю это пояснить). Рассмотрим произвольный ряд (3.2):

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots$$

отбросим у него первые п членов, получим новый ряд

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots, \qquad (3.4)$$

который называется остатком ряда (3.2) после n - го члена. Имеет место

Теорема

Ряд (3.2) и любой его остаток (3.4) сходятся или расходятся одновременно. Обозначим сумму ряда (3.2) S, сумму остатка (3.4) через r_n. Тогда имеем откуда

$$r_n = S - S_n$$

и

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = S - S = 0.$$

Таким образом, если ряд (3.2) сходится, то сумма его остатка стремится к нулю при $n \to \infty$.

Если мы сумму ряда заменим суммой первых n членов $S \sim S_n$, то погрешность такой замены равна r_n, поэтому, взяв достаточно большое число n членов ряда, погрешность можно сделать сколь угодно малой. Отметим, что если ряд знакочередующийся, то абсолютная погрешность

$$|\Delta| = |r_n| < |a_{n+1}|$$

в силу теоремы Лейбница.

3.2 Действия над рядами

Рассмотрим ряд (3.2) и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} K \qquad (3.5)$$

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} kU_n$, $(k = \text{const})$ называется произведением ряда (3.2) на число k. Если ряд (3.2) сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = S$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} kU_n = kS.$$

Ряд 52 $(y_n \pm V_n)$ называется суммой (разностью) рядов (3.2) и (3.5).
$n=г$

Если °$J2V_n = S^*$, $a^*£u_n = S$, то
$\quad n=1 \qquad n—\backslash$

$$J2(u_n \pm v_n) = s \pm s^*$$
$$n=1$$

Ряд

$$\boldsymbol{Y, W_n,} \tag{3.6}$$
$$n=1$$

где

$$W_x = UiV_u \; W_2 = U_X V_2 + U_2 V_U$$

$$W\text{-}i = UtVs + U_2V_2 + U_3V_{lt} \; \dots \; , W_n = U_x V_n + UiVn\text{-}г + \dots + U_nVi$$

называется произведением рядов (3.2) и (3.5). Если ряды (3.2) и (3.5) схоятся абсолютно, то ряд (3.6) сходится и

$$Y,^w n = ss^*$$
$$n=1$$

3.3 Признаки сходимости произвольных рядов

Признак сравнения

Если члены ряда (3.2) по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов положительного сходящегося ряда, то ряд (3.2) сходится абсолютно и его сумма по абсолютной величине не превосходит суммы положителного ряда т. е.

$$\backslash U_n \backslash < an, \; a\text{-}n > 0, \; 2^{\wedge an} \sim^{ст\prime}$$
$$n=1$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится абсолютно, $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = S$, причем $|S| < a$.

Например, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2}$ $(a - const)$ ряд с произвольными членами. В силу неравенства $|\sin a| < 1$ имеем оценку

$$\sin a \qquad 1$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — обобщенный гармонический сходящийся (см. формулу (2.11)). Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2}$ — сходится абсолютно.

Признак Даламбера

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l$, то при $l < 1$ ряд (3.2) сходится абсолютно, $l > 1$ расходится, при $l = 1$ признак ответа не дает.

Признак Коши

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = l$, то при $l < 1$ ряд (3.2) сходится абсолютно, при $l > 1$ расходится, $l = 1$ признак ответа не дает.

Примеры

1) Исследовать на сходимость ряд

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} - \left(\frac{2}{5}\right)^{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^{4} - \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n+1} + \ldots$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n+1}$ применим признак Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд (3.7) сходится абсолютно.

2) Исследовать на сходимость

$$\mathbf{B}_{n=X} - \mathbf{У} - {}^{1} ; \wedge . \qquad ("J$$

Ряд (3.8) знакочередующийся,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2п + 1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{2}{Г}}{\text{Чр}_{£}} = 0.$$

$$п$$

Покажем, что члены ряда (3.8) убывают по абсолютной величине, т.е. $\frac{}{a_n} < 1$. Имеем

$$0''n - \frac{2n + 1}{п(п+1)}, \quad a_{п+1} = \frac{2n + 3}{(п+1)(п+2)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_п} = \frac{(2п+3)п(п+1)}{(n+1)(n+2)(2n+1)} = \frac{(2п+3)п}{(2n+1)(n+2)}.$$

Выясним, для каких n отношение меньше единицы

$$\frac{(2п+3)п}{(2п+1)(п+2)} < 1 \wedge 2п^2 + 3п < 2п^2 + 5п + 2,$$

или $2п + 2 > 0$, из чего следует, что $a_{n+1} < a_n$ при любом n. Ряд (3.8) сходится по теореме Лейбница. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (3.8) $\sum_{п=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$, применим признак сравнения для положительных рядов

$$a_n = \frac{2n + 1}{n(n+1)} \quad \frac{n(2 + \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{1}{n})} \quad \frac{1}{n} >$$

oo ^

следовательно, ряд ведет себя как гармонический Y] —, т. е. расходится. Действительно, в силу признака сравнения 2, имеем

.. 2п + 1 1 .. 2п + 1
ürn -7—— : - = Urn—— = 2.п
n-»oo n (n + 1) П n->oo n 4-1

Вывод: ряд (3.8) сходится условно.

3) Исследовать на сходимость

оо

тг=1

Так как

lim———= lim—F- = -z ф O,
г а - ю о о n — 5 n->oo „ o 6
6——
n

то нарушается необходимое условие сходимости ряда. Ряд (3.9) расходится.

Задание

Применяя подобные рассуждения выяснить, какие из рядов сходятся абсолютно, какие сходятся условно, а какие расходятся.

оо (_1)п оо (_iy*--i оо _ n i - i
^ a T ^ T 5 2) J ? i ^ r + f; 3) п5щ2 + 2п-ю;

п2 + п
оо (-1Г(3п-1), « t 2п + 1 . ^ м) - 2 - «_.

_. «о /2n + 1\ n °° cosna °° sinna

io)E^;n)E(-ir^;i2)E(-i)-tg^;
n=i *n** n=i n „=i *Пу/n*
oo 1 oo n 4- 1 °° , rP"
i3)E(-i)n+1r^; i4)E(-i)n+1!^; i5)E(-i)n+V
n=1 n ^ n=1 n n=1 ^

16) Показать, что если ряды $\overset{OO}{\underset{п=1}{Y1}} {}^{a}n^{u}$ $\overset{oo}{\underset{п=1}{Y2}}$ ^*n* сходятся, то ряд $\overset{oo}{\underset{га=1}{\wedge}}$ $а_{п}Ь_{п}$ сходится абсолютно.

4 Тема III Функциональные последовательности и ряды

Определение. Последовательность, членами которой являются функции одной переменной *x,* определенные на множестве *X* называется функциональной последовательностью:

$$/i(x),/_{2}(z),\ldots,/„(aO,\ldots \bullet \qquad (4\text{-}1)$$

Возьмем произвольное значение *XQ* € *X* и вычислим значение членов последовательности (4.1) в точке *XQ,* получим числовую последовательность

$$Л(яо),/2(зо),\ldots,/п(яо),»\text{-} \bullet \qquad ({}^{4}\text{-}{}^{2})$$

Определение. Если сходится числовая последовательность (4.2), то говорят, что функциональная последовательность (4.1) сходится в точке *XQ.*

Совокупность значений *x,* при которых данная функциональная последовательность сходится называется областью сходимости последовательности (4.1). Очевидно, что предел функциональной последовательности является функцией от x, определенной в области сходимости последовательности, т. е. $\lim\limits_{п\text{-}»+oo} /_{п}(ж) = fix).$

Пример

Рассмотрим последовательность x^{n} :

$$x,x^{2},x^{3},\ldots,x^{n},\ldots. \qquad (4.3)$$

Очевидно, что если \x\ < 1, то $\lim\limits_{п\text{-»}+оо} x^n$ — О, при х > 1 $\lim\limits_{n\text{->}+oo} x^n =$ +оо, при $x <$ — 1 $\lim\limits_{\text{П-Ц-00}} x^n$ = оо, в точке x = 1 последовательность принимает вид 1,1,1,... и ее предел равен 1, а в точке x — -1 последовательность — 1, +1, —1,+1… предела не имеет. Можно сделать вывод, что

$$\lim \quad x^n\text{-}\{ \begin{matrix} 0 & , & |x| < 1 \\ 7 & ' & У \\ 1, & & x = 1 \end{matrix} \tag{4.4}$$

4.1 Равномерная и неравномерная сходимость функциональной последовательности

Пусть на множестве X $\lim\limits_{п\text{-»-}+оо} f_n(x) = fix)$. Возьмем произвольное значение $x\backslash$ € X. Имеем

$$\lim_{n\text{—Я-оо}} f_n(xi) = f(xi).$$

Воспользуемся определением предела числовой последовательности:

$$(\mathrm{Ve} > 0)(3\mathrm{JV}_1(\mathrm{e,xi}))(\mathrm{Vn} > Ni) => \backslash f_n\{xi) - f(xi)\backslash < e.$$

Возьмем (х2 ϕ $x\backslash$) G X, так как

$$\lim_{\text{п—Я-оо}} f_n(x_2) = f(x_2),$$

то

$$(\mathrm{Ve} > 0)(3N_2(e,x_2)(Vn > N_2)) => |/„(\mathrm{x}_2) - f(x_2)\backslash < e.$$

Номер N зависит не только от выбора e, но и от выбора точки x, т. е. $N = N(e,x)$. Возникает вопрос, можно ли подобрать номер N, который был бы пригоден для всех x из области сходимости функциональной последовательности. Если можно, то говорят, что последовательность (4.1) сходится равномерно на множестве X.

Определение. Говорят, что функциональная последовательность (4.1) сходится равномерно на множестве X к функции /(ж) если для произвольного $e > 0$ можно указать номер члена последовательности N, что для всех $n > N$ и для всех значений x E X будет справедливо неравенство

$$|/„(x) - f(x) \backslash < e.$$

Рассмотрим последовательность (x^{11}). Из утверждения (4.4) следует, что она сходится в (—1,1]. Рассмотрим ее в полуинтервале [0,1), $\lim\limits_{п \to oo} x^n$ — О в этом промежутке. Покажем, что последовательность сходится неравномерно к своему пределу. Предположим противное. Возьмем $0 < e < 1$. Для него, по предположению, можно указать iV такое, что для всех $n > N$ и для всех x € [0,1) справедливо неравенство $x^n < e$. Возьмем конкретное значение $n = щ > N$, получим $x^{Ш)} < e$. Прологарифмируем неравенство:

no Inn < lne,

откуда

$$\text{По} > \frac{:}{mx} \text{(Ьж < O B (0, 1)).}$$

Если $x \to 1$, то In ж—> 0 и дробь $\frac{\text{lne}}{\text{та;}}$ будет неограниченно возрастать и не может быть меньше фиксированного числа по- т. е. наше предположение о равномерной сходимости неверно. Однако последовательность (x^n) сходится равномерно на любом $[0,q]$, $О < q < 1$. Действительно, рассмотрим числовую последовательность (g^n), $lim q^n = 0$. Это значит

$$(\text{Ve} > 0)(\text{3iV})(\text{Vn} > N) => q^n < e.$$

Возьмем Уж € [0, *q]*. Для него справедливо неравенство $x^n < q^n < e$ т.е.

$$(Ve > 0)(3iV)(Vn > iV)(Vx\ e\ [0,?]) =» x^{11} < e.$$

По определению, последовательность ($x^п$) сходится к нулю равномерно на *[0,q].*

4.2 Функциональный **ряд**

Соединим члены функциональной последовательности (4.1) знаком плюс, получим символ называемый функциональным рядом

$$\text{X)/»(aO} = Mx) + /_2(x) + ... + /_п(я) + ... \quad \text{оо},\ n\text{-}1 \tag{4.5}$$

определенном на множестве *X**. Рассмотрим функциональную последовательность $(S_n(x))$, где

$$S_1(x) = f_1(x),$$

$$S_2(x) = h(x) + f_2(x),$$

$$S_3(x) = fax) + Mx) + Ыx),$$

$$S_n(x) = Mx) + h(x) + ... + f_n(x)$$

частичные суммы ряда (4.5).

Определение. Функциональный ряд (4.5) сходится на множестве *X* С *X**, если на этом множестве сходится последовательность $(S_n(x))$ его частных сумм.

Множество *X* назовем областью сходимости ряда (4.5). Для определения области сходимости ряда (4.5) достаточно применить признаки сходимости произвольных числовых рядов, считая *x* фиксированным.

Примеры

1) Определить область сходимости ряда

$$\frac{(ж + 1)^п}{n2^<}$$

Обозначим $U_n(x)$ общий член ряда. По признаку Даламбера для произвольных рядов имеем

$$\lim_{rwoo} \frac{U_n+i\{x)\backslash}{U_n(x) \quad I} \qquad \lim_{п\to+oo} \frac{x + \quad 1\backslash^{n+1} n2^n}{(_п + 1)2"+!|(Ж + 1)^п|}$$

$$\lim_{n\to oo} \frac{|ж + 1|п}{2(n + 1)} = \frac{|x + 1|}{2}.$$

На основании признака Даламбера можно утверждать, что ряд сходится, причем абсолютно, если

$$|x + 1| < 1 .$$

Решая неравенство относительно x получаем $-3 < x < 1$.

Если $\frac{\backslash x + II}{-} < 1$, т. е. если $-oo < x < -3$ или $1 < x > +oo$, ряд расходится.

В точках $x = I$ и $x = -3$ признак Даламбера ответа не дает, т. к.

$$\lim_{n\to oo} \frac{U_n+i\{x)}{U_n(x)} \qquad 1$$

в этих точках.

Исследуем ряд в точке $x = 1$. Он принимает вид

$$\sum_{п=1}^{oo} {}_1$$

а это есть расходящийся гармонический ряд.
В точке $x = -3$ имеем ряд

который сходится в силу теоремы Лейбница. Отметим на числовой оси область сходимости ряда

2) Ряд

$$\sum_{n=0} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (4.6)$$

представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q(x) = x$, следовательно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$

Причем его сумма на интервале $(-1,1)$ равна (см. формулу (1.5))

$$\sum_{n=0}^{\infty} \qquad ,$$

3) Аналогично, ряд $\sum \ln^n x = \ln x + \ln^2 x + \ldots + \ln^n x + \ldots$ представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q(x) = \ln x$. Чтобы найти ее область сходимость решим неравенство

$$|\ln x| < 1 \Rightarrow -1 < \ln x < 1 \Rightarrow \ln e^{-1} < \ln x < \ln x \Rightarrow \frac{1}{e} < x < e.$$

расходится сходится расходится

I e *

e

4) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

Здесь удобно применить признак сравнения для рядов с произвольными членами. Действительно, т. к.

$$|\sin nx| \le 1$$

для любого n и любого $x \in (-\infty, +\infty)$, то

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

а так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

есть обобщенный гармонический сходящийся (формула (2.11)), то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

сходится на всем множестве действительных чисел.

Задание

Найти область сходимости рядов, указать ее на числовой оси.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$, 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{x}}$

4>Е^Ч#, 5)Е2»^, 6)Г (2n-1)2 ,„ to

$n=0$

оо $_n$ \ оо 1 о о / т ч п о о / 0 \ п

П=1 -L n=\ ^{ШХ} П=1 V , J / П=1 \ ^{X} J

«О Е:« • *£, 16) £ *Ь=5, I T I S ^ , 18) £ а-Ч

П=1 ^ П=1 '* ^ *П=1* »ч п = 1

ОО - ОО ^/у. ОО ™П о о

19) Е е-"Ч 20) Е ^ , 21) Е ^ , 22) Е * <

п=1 п=1 е п=1 "• п=1

Понятие остатка функционального ряда такое же как и для числового ряда. Если ряд (4.5) сходится на множестве X, то его сумму $S(x)$ можно представить следующим обрзом

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x), \tag{4.8}$$

$S_n(x)$ - сумма первых n членов ряда, $R_n(x)$ - сумма его остатка после п-го члена.

4.3 Равномерная и неравномерная сходимость функционального ряда

<u>Определение</u>. Функциональный ряд

оо

называется равномерно сходящимся на множестве X, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))$ сходится равномерно на этом множестве к функции $S(x)$. Или: ряд (4.5) называется равномерно сходящимся на множестве X, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) \wedge (\forall x \in X) \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Но из равенства (4.8)

$$S_n(x) - S(x) = Rn(x),$$

поэтому последнюю формулировку в кванторной форме можно записать как

(Ve > 0)(3iV)(Vn > *N)* Л (Уж € *X)* => *\Rn(x)* < *e.*

Примеры

1) Доказать на основании определения, что ряд

$$\mathbf{E}^{0\,0} \frac{/(-1)^{1\backslash\Pi-1}}{ж^2 + n}$$

сходится равномерно на (—оо,+оо).

Рассмотрим сумму остатка данного ряда после n-го члена *Rn(x).* Так как ряд знакочередующийся, то, в силу теоремы Лейбница,

А так как Уж G (—со, +со)

$$\frac{1}{ж^2 + п + 1} < \frac{x}{П + 1'}$$

то имеем

1 ^ (я) 1 <ж'2Т+Тп—+Г17 ^ п Г+71 < в •

Решаем последнее неравенство относительно п, получаем п > — 1. Таким образом

(Ve > 0)(3iV = [I - 1] + l)(VnJV) Л (Уж € (-со, +оо)) =* *\Rn(x)* < *e.*

Откуда следует равномерная сходимость ряда.

2) Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\overset{oo}{\text{Ë}} \; \frac{п}{(1 + z^2)"}$$

на X = (—oo, +oo). Рассмотрим сумму остатка ряда

$$Mx) = \text{£}, \overset{Л}{\text{UW}}$$

Это геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{1 + x^2}$„, следовательно (см. формулу (1.5))

$$\frac{X}{(1 \quad -\backslash-x^2\}^{n+1}} \quad \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} \quad \sim(1 + z^2)^{n}'$$

Предположим, что ряд сходится равномерно на (—oo, +oo), т. е.

(Ve > 0)(3iV)(Vrc € (-oo, +oo)) Л (Vn > *N)*

1

Решая последнее неравенство относительно *n* получаем

$$n >- \frac{mi - \text{£} -}{1п(1 + ж^2)'}$$

Возьмем фиксированное *щ* > *N* для него имеем

$$n_0 > \frac{}{1п(1 + ж^2)'}$$

При x близких к нулю правая часть неравенства неограниченно возрастает и не сможет быть меньше фиксированного числа *щ.* Таким образом, данный ряд не является равномерно сходящимся на всем множестве действительных чисел. Однако его сходимость будет равномерной на полуинтервале $[q, +00)$, $q > 0$.

Действительно, $\forall x$ € $[q, +00)$ имеем

$$n > \frac{\text{In}}{1п(1 + ж^2)} > \frac{\textbf{mi}}{1п(1 + e_9{}^2)}$$

и

$$N = \frac{\text{In}^{1}}{\ln(1 + g^2)} + \mathbf{1}.$$

Одним из признаков равномерной сходимости является

Признак Вейерштрасса

Если члены функционального ряда $\sum_{п=1}^{00} Yl\ fn(^x)$ на множестве X удовлетворяют неравенствам

$$\backslash fn\{x)\backslash < a_n, \quad n = 1,2,3,\dots ,$$

где a_n члены положительного сходящегося числового ряда, то ряд

$$\mathbf{E}_{п=1}^{oo} /''(*)$$

сходится на множестве X абсолютно и равномерно.

Ряд

$$\sum_{п=1}^{00}$$

будем называть мажорантным рядом.

Примеры

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$$

сходятся равномерно на $(-\infty,+\infty)$, так как

$$(\forall n) \wedge (\forall x \in (-\infty, +\infty))$$

имеют место неравенства $|\sin nx| \le 1$, $|\cos nx| \le 1 \Rightarrow$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \qquad \left|\frac{\cos nx}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n},$$

а числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

сходятся (первый — обобщенный гармонический ряд при р

второй — геометрическая прогрессия со знаменателем q -

выполняются условия теоремы Вейерштрасса.

2) Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5x^2}$$

сходится равномерно на $(-\infty,+\infty)$.

Рассмотрим неравенство

$$(|a| - |b|)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \ge 2|a| \cdot |b| \ge |a| \cdot |b|$$

$$\Rightarrow \frac{|a| \cdot |b|}{a^2 + b^2} \le 1$$

Исходя из неравенства (4.9), подберем мажорантный ряд. Рассмотрим модуль n-го члена функционального ряда и преобразуем его

$$\frac{n|x|}{1+n^5x^2} = \frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{n^{5/2}|x|}{1+\left(n^{5/2}x\right)^2} \le \frac{1}{n^{3/2}}$$

в силу неравенства (4.9), в котором взяты $a = 1$, $b = n^{5/2}x$.
Имеем:

$$\forall x \in (-\infty, +\infty) \wedge (\forall n)$$

выполняется неравенство

$$\frac{n|x|}{1+n^5x^2} \le \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Мажорантным рядом является обобщенный гармонический сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. Равномерная сходимость доказана.

3) показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n!}}\left(x^n + x^{-n}\right)$ сходится равномерно на множестве $\frac{1}{2} \le |x| \le 2$.

Очевидно, что для всех x из рассматриваемого множества имеет место оценка

$$\frac{2^n}{\sqrt{n!}}\left(x^n + x^{-n}\right) \le \frac{2^n}{\sqrt{n!}}\left(2^n + 2^n\right) = \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n!}}. \qquad (4.10)$$

В качестве мажорантного возьмем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n!}}$$

Покажем его сходимость по признаку Даламбера, действительно

hm———= hm ' —— = hm 2 1 + - . = O
n-юо a п п->оо ^Д п) i)\2 n+1 n 2 n-*°° \ n/ д/n+1

Из неравенства (4.10) и сходимости ряда (4.11) следует равномерная сходимость данного ряда на указанном множестве.

Задание

Доказать равномерную сходимость рядов на данных множествах

0 0 1 °° X
1) **£ ^*m* ^на (_ °°, +00); 2) *Si mmnы* ° < * < + -;**

„. °° sinna; . . . °° cosna:
3) £ zr-f=== на (-00,+oo); 4) £ —^ц- на (-oo,+oo);
n=i V/п 4 + ж 4 n=i тм|и

„. 2° sinna; . . . °° , Л ж 2 \
5) E — - F - на (-ос, +oo); 6) £ In 1 + -— m - , \x\ < *a;*

OO OO Girl 77 T*
7) £ z V ™ 0 < *x* < +oo; 8) £ ^^ на (-oo,+oo);
71=1 71=1 п '

OO J OO g — n 2 x 2
9) **£ П 2 (1 + («*)') ^ (-°°, +0°); 10) т£ ~ Λ - На (_0°, +0°);**

00 1_
И) E 2 .г /• M2 на (-oo.+oo) и <*f(x)* на (-oo.+oo);
п=1 п + *VP\ x)*

OO **1**
1 2) E 9 w/ т — - н а [0 , + o o) .
п=1 «2 v 1 + ft£

4.4 Функциональные свойства равномерно сходящихся рядов

Известно, что сумма конечного числа непрерывных на множестве *X* функций есть функция непрерывная на этом множестве. Однако, это свойство нельзя переносить на функциональные ряды, т. к. речь идет уже о бесконечном множестве функций. Для подтверждения приведем пример, рассмотрим ряд

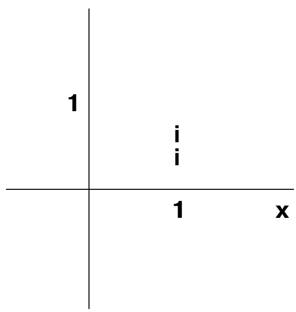
$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots + \{x^n - x^{71\,\prime 1}) + \ldots \qquad (4.12)$$

члены которого функции непрерывные на (—со, +оо). Составим последовательность частичных сумм ряда

$$Si = x, \;\; s_2 = x^2, \;\; \mathrm{s}_3 = я^3, \;\; \ldots \;, \;\; s_n = x^n, \;\; \ldots$$

Известно (см. формулу (4.4)), что последовательность (x^n) сходится в (—1,1] и ее предел

Таким образом, сумма ряда (4.12), равная $S(x)$, не является непрерывной в области сходимости ряда, в точке x — 1 она имеет разрыв первого рода. Для наглядности проиллюстрируем на графике



Однако, имеет место Теорема

Если члены ряда $\overset{00}{\underset{п=1}{\wedge}}$ *fn(%)* непрерывные на множестве X функции и ряд сходится на этом множестве равномерно, то его сумма $S(x)$ непрерывная на множестве X функция.

Рассмотрим еще два важных свойства равномерно сходящихся рядов.

4.5 Интегрирование рядов

Теорема

Пусть

$$\underset{\text{п=1}}{\overset{00}{\text{£>(*) = ад}}}$$

и ряд сходится равномерно на множестве *X,* то его можно почленно интегрировать по любому сегменту [а, *Ь]* принадлежащему множеству *X,* т. е.

$$\underset{n=1}{Y,} \ / \ fn\{x)dx = \ / \ \text{S(a;)dar.} \qquad (4.13)$$

<u>Замечание</u> Ряд (4.13) числовой. Если мы хотим получить после интегрирования функциональный ряд, членами которого являются первообразные функций $f_n(x)$, то следует интегрировать по сегменту *[a, x]* С *X.* т. е.

$$\underset{n=1}{\overset{o\,o}{]}}\Gamma \int_a^{rx} f_n(t)dt = \overset{r}{J}\, s(t)dt.$$

Рассмотрим на ряде примеров применение свойства интегрирования.

<u>Примеры</u>

1) Найти область сходимости и сумму ряда

$$\underset{\text{п=1}}{\overset{00}{53}}\, \text{пх}"\text{-}^{1}. \qquad (4.14)$$

Применяя признак Даламбера для рядов с произвольными членами устанавливаем, что ряд (4.14) сходится в (—1,1), т. е. имеет место равенство

$$\underset{71=1}{\overset{oo}{Y,}} nx^n{-}^1 = S(x) \qquad (4.15)$$

в $(-1,1)$. (Предлагаем читателю установить это самостоятельно).

$S(x)$ — неизвестная функция, которую требуется найти. Отметим, что

$$\int_0^x n x^{n-1} dx = x^n,$$

откуда следует, что после почленного интегрирования по сегменту $[0, x]$ равенства (4.15) в левой части получаем геометрическую прогрессию, сумма которой легко вычисляется.

Для обоснования возможности почленного интегрирования тождества (4.15) докажем равномерную сходимость ряда (4.14) на любом сегменте $[-q,q]$, $0 < q < 1$. Для этого рассмотрим положительный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}, \quad \text{т. к.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)q^n}{n q^{n-1}} = q < 1,$$

то ряд сходится по признаку Даламбера. А поскольку

$$(\forall n) \wedge (\forall x \in [-q,q])$$

имеет место неравенство $n|x^{n-1}| \le n q^{n-1}$, то ряд (4.14) сходится равномерно на сегменте $[-q, q]$ в силу признака Вейерштрасса. Рассмотрим сегмент $[0, x] \subset [0,q]$ и проинтегрируем тождество (4.15) по этому сегменту. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^x x^{n-1} dx = \int_0^x S(x)dx,$$

или, вычисляя интеграл,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \int_0^x S(x)dx.$$

Учитывая, что $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ (см. формулу (1.5)) получаем равенство

$$\frac{x}{1-x} = \int_0^x S(x)dx.$$

Сумму $S(x)$ найдем продифференцировав полученное тождество $S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$. Окончательно получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

в $(-1,1)$.

2) Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$$

в области его сходимости.

Областью сходимости ряда является интервал $(0, +\infty)$, причем равномерно ряд сходится на полусегменте $[q, +\infty)$, $q > 0$. Рекомендуем эти факты доказать самостоятельно. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} = S(x) \tag{4.16}$$

в $(0, +\infty)$. Проинтегрируем обе части тождества (4.16) по промежутку $[x, +\infty)$ с $[q, +\infty)$, $q > 0$.

Интеграл $\int_x^{+\infty} n e^{-nx}dx$ понимаем в несобственном смысле

$$\lim_{A\to+\infty} \int_x^A n e^{-nx}dx = \lim_{A\to+\infty} \left[-e^{-nA} + e^{-nx}\right] = e^{-nx}.$$

В результате интегрирования получаем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \int_{x}^{+\infty} S(x)dx.$$

Ряд в левой части есть геометрическая прогрессия со знаменателем

$$e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots + e^{-nx} + \ldots \qquad 1 - e^{-x} \qquad e^{x} - 1$$

Дифференцируем тождество

$$\overline{\qquad} \; e^{x} - 1 \; '' \; 7 \qquad \text{и} \qquad +\infty$$

имеем

$$\frac{e^{x}}{(e^{x}-1)^2} = \text{"-ОД,}$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx \; \_\_ \; \frac{e^{1}}{(e^{*} - I)^{2}}$$

3) Исходя из соотношения

$$\sum_{2}^{+\infty} \text{ж} \ll +^{1} \sim n2''' \qquad (4Л?)$$

найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-}{n2^{*}}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}},$$

представляющий собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q(x) = \frac{1}{x}$ — сходящийся при $|x| > 1$. Рекомендуем читателю самостоятельно доказать его равномерную сходимость на множестве $|x| \geq r$, $r > 1$. Имеем (формула (1.5))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{x(x-1)}.$$

Проинтегрируем данное тождество по промежутку $[2, +\infty)$, с учетом равенства (4.17)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^{n}} = \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-1)}.$$

Вычислим несобственный интеграл в правой части равенства

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-1)} = \lim_{A \to +\infty} \int_{2}^{A} \frac{dx}{x(x-1)} =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left(\int_{2}^{A} \frac{dx}{x-1} - \int_{2}^{A} \frac{dx}{x} \right) =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} [\ln(A-1) - \ln 1 -$$

$$- \ln A + \ln 2] = \lim_{A \to +\infty} \left(\ln \frac{A-1}{A} + \ln 2 \right) = \ln 2.$$

Окончательно получаем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^{n}} = \ln 2.$

4.6 Дифференцирование рядов

Пусть члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$. Ряд, сходится, а ряд, составленный из производных членов данного ряда, сходится на сегменте $[a, b]$ равномерно, тогда имеет место утверждение: если

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = S'(x),$$

т. е. возможно почленное дифференцирование функционального ряда.

<u>Пример</u>

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

а) Найдем область сходимости данного ряда. Применяя признак Даламбера для произвольных рядов, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n|x|^{n+1}}{(n+1)|x|^n} = |x|.$$

Если $|x| < 1$ ряд сходится, при $|x| > 1$ расходится. В точке $x = 1$ ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ и сходится в силу теоремы Лейбница, в точке $x = -1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

гармонический ряд, умноженный на (-1), расходится. Область сходимости ряда (4.18) есть полусегмент $(-1,1]$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n}}{n} = S(x)$$

для $x \in (-1,1]$. Найдем $S(x)$.

б) Продифференцируем формально ряд (4.18)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}. \tag{4.19}$$

Так как для всех $x \in [-q,q]$, $0 < q < 1$, имеет место оценка $|x^n| \le q^n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, поскольку является геометрической прогрессией со знаменателем $0 < q < 1$, следовательно, в силу признака Вейерштрасса, ряд (4.19) сходится на $[-q, q]$ равномерно и имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = S'(x).$$

Сам ряд (4.19) есть геометрическая прогрессия со знаменателем $q(x) = -x$, в силу формулы (1.5) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1+x} = S'(x).$$

Из последнего равенства находим

х

о

Возвращаясь к исходному ряду (4.18), получаем

Y^{-l)ⁿ-ˡ—=\n(l + x)　　　(4.20)

n=i　　　*n*

для *х* € (-1,1].

Задание

1. Доказать непрерывность следующих функций:

оо　　　X 1 1\

а) /(ж) = Е *nSⁿ~ˡxⁿ~ˡ* в интервале I —-, -),

п=1　　　\ з з /

о о　1　а;

б) /0»0 = Е «^tg ™ на сегменте "•а

пь= 1 ^ z

cosna;

в) /W = Е —5Г" в (-о°>+оо)>

п=1

оо　J

г) /О*) = Е^х ^-р^2 в (-°°> +°°)>

°°　sinnz

д)Л1)= Й7?+з"(„00,+ ~)-

Указание. Применить теорему о непрерывности суммы функционального ряда.

2. Найти сумму следующих рядов:

оо ™4п-1　оо ~4п-3　оо　тп + 1　оо

а) Е ^—т; б) Е j—»; в) E(-D^n+1^-7—:Ту г) Е пз-¹*-¹

^=14п -1　n = 1 4 n - 3　n = i　п(п + 1)　п = 1

ON $_{v}$, $\sum \sin 2^n \pi x$;

6) Убедиться, что ряд $\sum_{n=1} \dots$ — равномерно сходится на всей числовой оси. Показать, что его нельзя почленно дифференцировать ни на каком интервале.

4) Исходя из соотношения

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

найти сумму рядов

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}, \quad \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}.$$

5 Степенные ряды

Определение.Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0} a_n(z-z_0) = a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots \qquad (5.1)$$

называется степенным рядом, a_n— вещественные числа, коэффициенты ряда. Заменой $z - z_0 = x$ ряд (5.1) сводится к ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \qquad (5.2)$$

по степеням x, который в дальнейшем будем рассматривать.

Область сходимости ряда (5.2). Степенной ряд (5.2) либо сходится на всей числовой прямой, либо расходится всюду, кроме точки $x = 0$, либо существует положительное число R, такое, что внутри интервала $(-R, R)$ ряд (5.2) сходится, а вне его расходится. Число R называют радиусом интервала сходимости степенного ряда (5.2), для его отыскания можно применить одну из формул

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \tag{5.3}$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{5.4}$$

Причем на концах интервала сходимости, в точках $x = R$ и $x = -R$ ряд может сходиться, а может расходиться. Эти точки исследуются дополнительно.

Примеры

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится в интервале $(-1,1)$, расходится вне его.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$, $a_n = n^n$, $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Радиус интервала сходимости, вычисленный по формуле (5.4) равен нулю, следовательно, ряд расходится всюду, кроме точки $x = 0$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Вычислим радиус интервала сходимости по формуле (5.3)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

$R = +\infty$, т. е. ряд сходится на всей числовой прямой.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ Используя формулу (5.3)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Ряд сходится в интервале (—1,1). Исследуем его поведение на концах интервала. В точке x — 1 имеем £ oo п=1 /_\\n+\ П ——— Р^я Д сходится в силу теоремы Лейбница. В точке x = — 1 получаем ряд

у, (-lyi+l^jn ^ ~ (-1)2»И-1 « **1**

^ п ~ , n ^ п'

п=1 п=1 п=1

который расходится, т. к. является гармоническим рядом, умноженным на (—1). Область сходимости ряда - полуинтервал (—1,1].

расходится сходится расходится

о >'>'//><,'><>'>< ф————>•

-1 1 x

Задание

Найти интервал сходимости следующих степенных рядов, исследовать на концах, изобразить на числовой оси

1) £ 10», 2) E** ¹ **V** , **з) E**
n=i п=1 V" n=iⁿ10ⁿ

oo oo x^{2n-1}

4) £ г"-¹^²^-¹), 5) £(-i)ⁿ⁺¹ (2п - **1)(2п** - 1)!
п=1 п=1

oo ж п oo (n z) n oo Ь (п + 1) + 1

^ i x ^ + 1) ' 7) i i nl ' 8) i i те + 1

9)E П + 1 ⁿ
n=1 n

Замечание к примеру 7): факториалы больших чисел выражаются приближенной формулой Стирлинга

П! **Г-)ⁿл/2^.** **(5.5)**

5.1 Свойства степенных рядов внутри интервала сходимости

I Степенной ряд сходится абсолютно в каждой точке интервала сходимости (—*R, R)*.

II Степенной ряд сходится равномерно во всяком сегменте

[-г, г] (*г* > **0)**

целиком содержащимся в интервале сходимости.

III Сумма степенного ряда есть функция непрерывная в интервале сходимости данного ряда.

IV Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому сегменту [а, *Ь]* принадлежащему интервалу сходимости.

V Степенной ряд можно почленно дифференцировать бесконечное число раз внутри интервала сходимости.

5.2 Представление функции степенным рядом

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

сходится в интервале *(-R, R)* и его сумма равна /(ж), т. е. имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) \quad Ух \ е \ \{-R, R).$$

В этом случае говорят, что функция *f(x)* представима степенным рядом в интервале *(—R,R)*.

Рассмотрим ряд по степеням (ж — *XQ)* :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad (5.6)$$

сделаем замену $x — XQ = y$, получим

$$\sum_{n=1}^{00} Ys^a n y^n -$$

Найдем его интервал сходимости $-R < y < R$ или, возвращаясь к переменной x, имеем:

$$—R \quad <X \quad — \quad XQ<R=\hat{}XO \quad — \quad R<X<XQ-\backslash-R$$

Получаем

$$\sum_{n=l}^{00} \hat{}\ а_п(ж - ж_0)^п = F(x)$$

в $(XQ — R,xo$ + Л), т. е. функция $F\{x)$ в Л - окрестности точки XQ представима степенным рядом (5.6). Поскольку по свойствам степенные ряды во многом уподобляются многочленам, более того, n-я частичная сумма степенного ряда

$$S_n(x) = а_0 + a\backslash x + aъx^2 + ... + a_n x^n$$

или

$$S_n(x) = ao + ax(ж — жo) + a_2(ж — жo)^2 + ... + a_n(x — xo)^n$$

(если разложение по степеням (ж — Жо)) является многочленом, то встает вопрос о представлении наперед заданной функции /(ж) степенным рядом по степеням ж или по степеням ж — жо-

Необходимое условие представления функции степенным рядом. Если функция /(ж) в некоторой окрестности точки жо разлагается в степенной ряд. то она в этой окрестности имеет производные всех порядков, и коэффициенты этого ряда выражаются следующим образом

$$\underline{/^{(П)}Ы} \qquad ,.-$$

Действительно, пусть в интервале $(-R, R)$ имеет место представление

$$f(x) = a_0 + ax(x- x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots \qquad (5.8)$$

$$+a_n\{x - x_0)^n + \ldots.$$

Поскольку степенной ряд можно почленно дифференцировать бесконечное число раз внутри его интервала сходимости, то имеем

$$f(x) = 01+ 2a_2(x - x_0) + Заз\{x - x_0)^3\ldots + na_n(x - Жо)^{п-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 32a_3(ж - x_0) + - + n(n - 1)a_n(x - x_0)^n\sim^2 + \ldots$$

$$f'''(x) = 32a_3 + \ldots + n(n - 1)(п - 2)a_n(x - ж_0)^{п-3} + \ldots$$

$$/^{(п)}(ж) = п!\ a_n + (n + 1)!\ a_{n+1}\{x - x_0) + \ldots$$

Полагая во всех полученных равенствах, включая (5.8), (0! = 1) $x — 0$ имеем

$$a_0 = f\{x_0) = — -_{\{} — ,\ «1 = /\ (x_0) = — — ,$$

ГЫ **ГЫ** **/(")(яр)**

$$a_2 = - \wedge - ,\ a_3 = — зр - , \ldots, fln = — \wedge — \bullet$$

Формула (5.7) доказана.

Мы доказали, что если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд, то такой ряд единственный, а именно

$$f\{x) = £ /^{(n)} ЫI(x\text{-}xoГ = f\{xQ) + Г(жо)(x — Жо)+ \qquad (5\ 9)$$

$$п=0$$

2! {X Xo) + - + n\ + ...,

который называется рядом Тейлора функции /(ж). При $x_0 = 0$ получаем частный случай ряда (5.9) - ряд Маклорена данной функции. Однако, бесконечная дифференцируемость функции *f(x)* в окрестности точки *XQ* не является достаточным условием разложения ее в ряд Тейлора. Мы можем формально этот ряд составить, найдя коэффициенты его по формуле (5.7), однако, можем получить ряд, который расходится всюду, кроме точки *x = XQ,* или сходится на некотором промежутке, но к другой функции. Для того, чтобы выяснить достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора запишем, известную из курса дифференциального исчисления, формулу Тейлора функции *f(x)* :

/(x)= £/^м ы(*-*.)* +ад1 **(510)**

fc=0

Rn(x) - остаточный член формулы Тейлора, который может быть представлен в различных формах. Например, в форме Лагранжа:

Rn{x)——————^ т - ^—————, (5.11)

или в форме Коши:

^./'-"WfaXi-W*-«.)-", **(0 < 9 < 1)**

Необходимым и достаточным условием представления функции *f(x)* рядом Тейлора (5.9) является стремление к нулю остаточного члена формулы Тейлора данной функции при *n* —> оо, т. е.

lim *Rn(x).* (5.12)

Отметим, что условие (5.12) будет выполняться, если на некотором промежутке [а, 6] функция /(ж), во первых, имеет производные всех порядков и, во вторых, все эти производные ограниченны по абсолютной величине одним и тем же числом:

$$f^{(n)}(x)\backslash < L. \tag{5.13}$$

L не зависит от п. Действительно, тогда из формулы (5.11) получаем оценку остаточного члена

$$\backslash K\backslash(x) < \frac{Ь\{Ъ - a)^{n+1}}{(п + 1)!}$$

покажем, что $\lim\limits_{п \to юо} Rn(x) = 0.$

Для этого рассмотрим ряд $\sum\limits_{п=1} \frac{}{n}$, $c - b - a$. Исследуем его на сходимость по признаку Даламбера

$$\lim_{n \to \infty} \frac{«п+1}{a_n} = \lim_{п \to Юо} \frac{C^{n+1} n\backslash}{[n + 1)!\, G^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{C}{n + 1} = 0 < 1,$$

ряд сходится, по необходимому условию его п—ый член стремится к нулю при $n \to$ со, т. е.

$$\lim_{n \to Юо} \frac{(Ь-a)^n}{71!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{L(b-o)^{n+1}}{(Ш + 1)!} = 0$$

что и требовалось доказать.

Из сказанного выше следует правило представления функции рядом Тейлора (Маклорена).

1° Находим формулу производной п—го порядка функции $f(x)$.

2° Составляем значения всех производных в точке XQ $f^{(n)}(xo)$.

3° Составляем ряд Тейлора данной функции (5.9).

4° Находим его интервал сходимости.

5° Используя достаточное условие представления функции степенным рядом, доказать сходимость построенного ряда Тейлора к функции $f(x)$.

Рассмотрим в качестве примеров разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена $(XQ = 0)$

$$m = l \quad \wedge \quad L_{n=0} \quad , \qquad (\text{'}14)$$

Отметим, что для функции $y = e^{ж}$, $y = \sin x$, $y — \cos ж$ в любом сегменте $[—r, r]$ C (—co, co) выполняется условие (5.13), так как $[e^x)^{\wedge}> = e^x$, cNx £ $\backslash—r,r\backslash$ имеем

$$\sin^{(n)} x — \sin$$

$$\cos^{(n)} x — \cos (X+n—_2 1,$$

т.е. $|\sin^{\wedge}z| < 1$ и $|\cos^{(n)} ж| < 1$. Поэтому для указанных функций условие 5° выполняется.

1) Для функции e^x имеем

$$(e^x)^{(n)}\Big|_{x=0} = 1,$$

составляем ряд (5.14) :

$$e^{x} = 1 + 1 + \mid + \mid + \dots + \wedge + \dots = 1: \quad ._{n=0} \qquad (5.15,$$

Радиусы интервала сходимости $R =$ ит——j— = со.

Представление (5.15) имеет место на всей числовой прямой. Аналогично получаем:

2)

$$\sin a; = x - \frac{X^3}{3!} \quad i^5 \quad + \dots \tag{5.16}$$

$$+(-1)'' \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0} -1)^{71} \frac{{}_x 2n+1}{(2n+1)!}$$

V z e (- -оо, оо);

3)

$$\text{«"} = {}^1\text{-Й}^+\text{4T-ir}^+\text{-}^+(\text{-}^1)^* \text{ wi}^+ \text{-} = S^{(-1)}\text{"lof}^{<517)}$$

(over the line above: ~2 4 „6 т2n оо 2n)

С помощью разложения (5.15) можно получить представление гиперболических синуса и косинуса рядами Маклорена. Действительно, впж $=\dfrac{e^x - e^{\sim x}}{}$, спж $=\dfrac{e^x + e^{\sim x}}{}$, заменим в формуле (5.15) x на —ж, получим

$$\text{e-} = 1 - x + |_{\text{г}} - \dots + (-1)»|_{\text{г}} + \dots \tag{5.18}$$

Складывая и вычитая ряды (5.15) и (5.18) будем иметь представления

4)

$$\text{эпж} = \text{г с} + \frac{\text{ж}^3}{3!} + \frac{\text{ж}^5}{5\Gamma} + \dots + \frac{\text{д.}2\text{п}+1}{(2\text{п}+1)!} + \dots \tag{5.19}$$

на (—оо,оо);

5)

$$\text{с Ь ж} = 1 + 1\text{.}^{\text{ж}^2} + \text{^}\,\text{ж}^4 + \dots + (-1'\,\text{г}\,\frac{\text{ж}^{2"}}{\_\_} + \dots \tag{5.20}$$

на (—оо,оо);

Рассмотрим бином $f(x) = (1 + x)^m$, где m - любое вещественное число, отличное от нуля и от всех натуральных чисел, т. к. при натуральном m получается известное конечное разложение по формуле Ньютона (бином Ньютона).

Имеем:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

$$f''(x)=m(m-1)(1 + x)^{m-2},$$

$$f^{(n)}(x) = m(m - 1)\ldots(m - (n - 1))(1 + x)^{m-n}$$

Вычисляя значения производных в точке $x = 0$ получаем разложение:

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!} + \ldots = \tag{5.21}$$

$$1+\sum \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!}$$

Читателю рекомендуем самостоятельно показать сходимость ряда (5.21) в интервале (—1,1), пользуясь признаком Даламбера разложений, а также, пользуясь известным разложением, применить некоторые операции над рядами (сложение, умножение на число).

Так например, было получено разложение $\ln(1 + x)$ (см. формулу (4.20)) в полуинтервале (—1,1] дифференцированием ряда

$$\sum_{n=1} x^n$$

и сведением тем самым его к геометрической прогрессии, чья сумма легко вычисляется. Рассмотрим еще примеры.

1) Разложить в ряд Маклорена функцию y = arctgx. Будем исходить из того, что $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$ = arctgx, а функцию $\frac{1}{1+x^2}$ можно рассматривать как сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q(x) = -ж^2$ и первым членом ао = 1 (см. формулу (1.5)), имеем

$$\frac{1}{1+ar^2} = 1 - x^2 + ж^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

для x G (—1,1).

Проинтегрируем обе части данного тождества по отрезку [0, ж] с C (—1,1), с учетом того, что

$$\int_0^x x^{2n} dx = \frac{x^{2п+1}}{2п+1},$$

получаем разложение arctga;:

$$axctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2п+1}}{2п+1} + \ldots, \tag{5.22}$$

которое справедливо для ж 6 [—1,1]- Отметим, что ряд (5.22) сходится в точках x = -1 и ж = 1 по теореме Лейбница. Если в разложении (5.22) положить x = 1, то получим

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^п}{2п+1} + \ldots,$$

с одной стороны сумму числового ряда

$$\sum_{п=0}^{\infty} \frac{(-1)^п}{2п+1} = \frac{\pi}{4},$$

с другой стороны разложение в ряд числа 7Г :

$$* - * 1 ^1 - 5 ^+ | - " ^+ £\& ^+ ™1' \tag{5,23}$$

с помощью которого можно приближенно вычислить число 7Г, взяв сумму достаточно большого числа членов ряда (5.23).

2) Представить рядом Маклорена функцию $\arcsin x$. Также как и в предыдущем примере, будем исходить из равенства

$$\int_0^x \frac{dx}{vr^\wedge} \qquad \text{arcsms.}$$

Разложим в ряд Маклорена вначале подынтегральную функцию

$$\frac{1}{y/T^\wedge x^1} \quad (1-x^2)'2.$$

Воспользуемся известным разложением бинома (5.21) :

$$(1 +_u)^m = 1 + V^{ш} \underline{(^т \sim ^1) - (^т - ^{7\,г} + ^1)^{цП}}$$

Положим m — — -

71 = 1

или после преобразования, получаем

$$(1 + u) \;\; 2 = 1 + 2^\wedge(-1)\text{——}^\wedge i\text{——}'$$
$$n=1$$

Возьмем $u = -x^2$, будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \qquad (5.24)$$

$x \in (-1, 1)$.

Проинтегрируем тождество (5.24) по сегменту $[0, x] \subset (-1,1)$, получим разложение $\arcsin x$:

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, x^{2n+1}}{2^n n!\,(2n+1)} = \qquad (5.25)$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)},$$

$x \in [-1,1]$ (т. к. $2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n = (2n)!!$).

3) Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \cos^2 x$. Применяя формулу понижения порядка

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

и известное разложение (5.17)

$$\cos u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!},$$

в котором положим $u = 2x$

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Обе части тождества умножим на - :

- cos 2 , = B - 1) » ^ - ^ = - - - + — + . . .

n=0

К обеим частям последнего равенства прибавляем -, получаем разложение $\cos^2 x$:

$\cos^2 x$ = *1*- $\frac{2x^2}{2!}$ + $\frac{2^3 x^4}{4!}$ — $\frac{2^5 ж^6}{6!}$ + ... + (-1) $\frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2п)!}$ + ...

i + £(-i)^{n} : $\frac{2^{2п-1} ж^{2п}}{(2п)!}$

п=0

4) Разложить в ряд Маклорена *y* = sin *(x + a)* *(a—const)*. Применим формулу синуса суммы

sin *(x + a)* — sin *x* cos *a* + sin *a* cos ж

и разложения sin ж и cos ж, представленные формулами (5.16), (5.17) соответственно

sin (ж + *a)* = cos a E (~ 1 Г ($_{2n}$ + *i)*\ + sin a E (- 1) „2п+1 °° -7-2П (2п)!

n=0 n=0

cosa(x - - + - - ^ + ... + (-1) ^ ^ у у + -) + ^3 „5 „7 т2п+1

sin«(1-2| + ¥ " 5, +- + (-1) ЩТ + -) = _2 „4 „5 т2п

sin *a* + *x* cos *a* — sin a— — cos a—j- + sin a—+ 2 3 4

$$\cos a \frac{or}{5!} - (-1)^{n} \sin a \text{-} \frac{x^{2n}}{2n!} r + \cos a\text{-}7\sim \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} г, +$$

5) Разложить в ряд Маклорена функцию

$$У = \frac{3}{(1-a:)(1+2x)'}$$

Для решения задачи разложим функцию на простейшие дроби, будем иметь:

$$\frac{3}{(1-ж)(1+2ж)} \quad \frac{\{2x+1) + 2(1-x)}{(1-ж)(1+2ж)} \quad \frac{1}{1-x} \quad \frac{2}{1+2ж}$$

Каждую из дробей представим как сумму геометрической прогрессии (см. формулу (1-5))

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^m \tag{5.26}$$

и

$$\frac{-}{+} = 1\sim 2x + (2x)^2 - \ldots + \{-1)^n 2^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{na} 2^{п} ж^{п}. \tag{5.27}$$

Окончательно получаем

$$\frac{3}{(1-a:)(1+2ж)} = \sum_{п=0} Гx^n + 2\sum_{п=0} \{-1)^n 2^n x^г$$

$$= \sum_{n=a}^{\infty} [1 + (-1)^n 2^{n+1}] x^{\%} \tag{5.28}$$

Геометрические прогрессии (5.26) и (5.27) сходятся соответственно при $|x| < 1$ и $|x| < \frac{1}{2}$, следовательно, формула (5.28) справедлива п р и - - < * < - .

6) Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. Для решения задачи рассмотрим разложение

.   оо

$_m$ - . = ^ $_x$ ^ $_x$ $_e$ (-1,1).

п=0

Продифференцируем обе части тождества, получим

н   оо

$$\frac{\quad}{(1-x)^2}\text{г}\hat{} = \text{У}\; nx^{n-1} = 1 + 2x + 3ж^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots.$$

п=1

Умножим на x обе части последнего разложения

оо

$$y = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nж^n = ж + 2ж^2 + 3ж^3 + \ldots + nж^n + \ldots.$$

Формула (5.29) справедлива в интервале $-1 < x < 1$.

7) Функцию $y = \frac{—}{x}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $x - 3$, указать интервал, в котором это разложение имеет место.

а) Вычислим производную n—го порядка данной функции. Имеем:

J = __!_. y" = A- </" = _113. „/V = 2-3-4 ,"' (n) = (_!)п_^_
у   ж²   ж³   ж⁴   ж⁵   ^   ' x^{n+1}

б) Найдем значение функции и всех ее производных в точке $x = 3$

y(з) = |, i/(3) = -p, /(3) = p,...,y"(з) = (-1г4г-

в) Составим ряд Тейлора (5.9) данной функции

1 1 (1-3) (l-3)^2 , ,„(1-3)"

$$\text{D-D'}\ \frac{(д - з)''}{{}_3\text{п}+1}\,,$$
п=1

г) Найдем область сходимости ряда (5.30). Он представляет собой геометрическую прогрессию **со** знаменателем *q(x)* $—\frac{x-3}{\quad}$,
следовательно, интервал сходимости ряда ищем из неравенства

j£zil<li

откуда |ж - 3|< 3 ^ - 3 < ж - 3 < 3 ^ 0 < ж < 6 .
Ответ: разложение (5.30) справедливо в интервале (0,6).

8) Известные разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций позволяют разлагать некоторые функции в ряд по степеням дробно-линейных выражений.

Например, разложить

$$\frac{x}{\sqrt{\text{ГТ}}}$$

в ряд по степеням „ $\boldsymbol{\frac{x}{1+x}}$

а) сделаем замену$\frac{x}{\quad}$= *y,* откуда *x* =$\frac{v}{\quad}$и выразим через ***y*** данную функцию

$$\frac{x}{\text{VI}+x} \ \_\ \sim \frac{y}{1-y'}\ {}_m\frac{1\_}{\text{VI}\ -У}\qquad \frac{y}{y/1-V}$$

б) Разложим в ряд Маклорена функцию $\frac{1}{\sqrt{1-y}} = (1-y)^{-\frac{1}{2}}$, пользуясь формулой (5.21)

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} y^n \qquad (5.31)$$

$(-1 < y < 1)$

в) Умножим обе части тождества (5.31) на y:

$$\frac{y}{\sqrt{1-y}} = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} y^{n+1}$$

г) Сделаем обратную замену $y = \frac{x}{1+x}$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1} \qquad (5.32)$$

д) Установим, для каких x справедлива формула (5.32). Так как разложение (5.31) имеет место для $-1 < y < 1$, то для отыскания соответствующих значений x решим неравенство $-1 < \frac{x}{1+x} < 1$ или, для удобства рассмотрим неравенство $\left|\frac{x}{1+x}\right| < 1 \Leftrightarrow$

$$|x| < |1 + x|. \qquad (5.33)$$

Точки, в которых обращаются в ноль выражения, стоящие под знаком модуля, делят числовую прямую на три промежутка:

$$(-\infty,-1), \quad (-1,0), \quad [0,+\infty).$$

Рассмотрим неравенство (5.33) в каждом из них.

1 Пусть x е (—со, — 1), для таких x неравенство (5.33) имеем вид:

$$-x < -1 - x \Rightarrow - x > 1 + x,$$

откуда следует, что неравенство не имеет решений на рассматриваемом промежутке;

2° $x в$ (-1,0), из (5.33) получаем

$$-x < 1 + x \Rightarrow 2x + 1 > 0 \Rightarrow x > --.$$

С учетом рассматриваемого промежутка, получаем решение

$$-- \quad < x < 0;$$

3° x € [0, +оо) из неравенства (5.33) имеем

$$ж < 1 + ж => 1 > 0 -$$

очевидное неравенство, следовательно, (5.33) справедливо для всех x € [0, Н-со). Объединяя результаты пунктов 2° и 3° окончательно получаем

$$xe \quad --, +oo$$

Точку x = —- включаем в промежуток сходимости ряда (5.32),

так x = — - соответствует точка y = — 1, входящая в промежуток сходимости ряда (5.31).

Окончательный ответ: разложение (5.32) имеет место при

$$x\ e \quad -\hat{}, +oo$$

Задание

1) Разложить функцию y = In ж в ряд Тейлора по степеням (ж — 1). Указать промежуток сходимости полученного ряда.

2) Функцию $y = y/x\sim з$ представить рядом Тейлора в окрестности точки x — 1, указать промежуток сходимости полученного ряда.

3) Найти первые пять членов ряда Маклорена следующих функций:

а)$_2$/ = 1п(1 + е$^{a;}$)$_)$

б) y = е$^{sina!}$,

в) y = —In cos ж,

г)у = (1 + х)^{ж},

д) у = tgx.

4) Разложить в ряд Маклорена следующие функции, пользуясь формулами разложения e^x, sin$x$, cosж, 1п(1+ж), (1 + а:)^т, геометрической прогрессии, указать интервалы сходимости полученных рядов:

$xe\sim^x$; cos2x; sin^2 ж; sin3x -ЬжсозЗж;

X oX O , ч

V 4 ^ ? ' 9 + ж^2' ж^2-4ж + 3-; $(x$ — tgxjcosa;;

In (10 +ж); ж!п(1 + ж^2); $y/1$ + ж^2; y/S - ж^2;

-г^2 1

; (1 + ж)е ^{I}; sura: coir ж;——— к

уТ^^{2}' V у ' 4 - х ^{2}

5) Функцию x^3 — 2ж^2 — Ъx — 2 разложить в ряд по степеням (ж + 4).

6) Разложить - = —————z в ряд по степеням x + 4.
1 / ж^2 + Зж + 2

7) Разложить In ж в ряд по степеням ———.
1 — ж

8) Разложить в ряд Маклорена функцию $\frac{1 \; \text{I} \; д»}{(1-x)^б}$, воспользовавшись этим разложением, найти сумму ряда

С» о

9) Пользуясь разложением в ряд Маклорена найти значение десятой производной функции $y - x^в e^x$ при $x = 0$.

10) Исходя из соотношения

$$1п(ж + \sqrt{1+ж^2}) = \int \frac{dx}{ч/ГТ^{2'''}}$$

разложить в ряд Маклорена функцию $y = \ln(ж + \sqrt{1 + ж^2})$.

11) Исходя из соотношения

$$\frac{da:}{+ z^{2'}}$$

разложить в ряд Маклорена функцию $y = \ln W\frac{}{V1-x}$.

Указать интервалы сходимости рядов в задачах 10), 11).

6 Тема *V* Приближенные вычисления с помощью рядов

Пусть некоторая величина S представима сходящимся рядом:

$$S = щ + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (6.1)$$

т.е.

$$\lim_{П \to ¥00} S_n - S, \quad S_n = ui + U2 + \ldots + u_r$$

Это значит, что взяв достаточно большое число членов ряда, можно считать $S \approx S_n$. При этом погрешность такого приближения равна сумме остатка ряда r_n. Произведя оценку остатка r_n, можно заранее установить точность приближенного вычисления и взять сумму определенного числа членов ряда. Если ряд (6.1) знакочередующийся и удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то сумма остатка по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных членов, т. е. $|r_n| < |a_{n+1}|$. Рассмотрим пример: вычислить sin 0, 3. Воспользуемся разложением функции $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$x^3 \qquad x^5 \qquad x^7$$

в котором положим $x = 0{,}3$. Мы получим разложение sin 0,3 в числовой знакочередующийся ряд

$$\sin 0{,}3 = 0{,}3 - \frac{(0{,}3)^3}{3!} + \frac{(0{,}3)^5}{5!} - \frac{(0{,}3)^7}{7!} + \dots$$

Если взять $\sin 0{,}3 \approx 0{,}3 - \frac{(0{,}3)^3}{3!} + \frac{(0{,}3)^5}{5!}$, то абсолютная погрешность такого приближения

$$\frac{(0{,}3)^7}{7!} \qquad 1$$

и вычисляя значение синуса по формуле (6.2) получаем $\sin 0{,}3 \approx 0{,}2955$.

С помощью разложения

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \le 1$$

можно получить разложения логарифмов чисел от нуля до двух в знакочередующийся ряд. Так при $x = 1$ получаем

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots \qquad (6.3)$$

Но так как члены ряда (6.3) убывают по абсолютной величине медленно, то, для достижения хорошей точности, нужно взять достаточно большое число членов ряда (при n = 100 |A| < — -) .

Для приближенного вычисления числа 7г воспользуемся разложением в ряд Маклорена арктангенса:

$$\text{arctga;} = x - \frac{«o}{o} + \frac{«5}{5} \frac{™7}{7} + \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

Т? Бсли взять $x = \frac{1}{v3}$=, то arctg $\frac{1}{v3}$= — $\frac{7Г}{o}$, и мы получим ряд:

$$\frac{7Г}{6} \sim \frac{J\_}{^Г} \quad \frac{1}{3} \, ' \, \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \, ' \, \frac{j\_}{3^2} \quad \frac{1}{7} \, ' \, \frac{J\_}{3^3} + \cdots$$

пригодный для вычисления числа 7Г.

Если ряд (6.1) не является знакочередующимся, то для оценки его остаточного члена подбирают положительный сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{oo} Y2\, ^a n)$ такой, что $|u_n| < a_n$, сумма которого известна или легко вычисляется (например, геометрическую прогрессию)

Пусть

$$^5 - 2\,\hat{}\,_{n2} n \sim 2 + 2 \bullet 2^2 + 3 \bullet 2^3 + 4 \bullet 2^4 + \cdots$$
$$n=1$$

Очевидно, что $\frac{1}{п2} \frac{1}{}< \frac{}{2}$ Vn, ряд $\sum_{п=:1}^{\circ\circ} \frac{1}{2}$ является геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{1}{-}$, в силу этого

$$^n \,\hat{}\, \sum_{fc=n+i} \frac{1}{l\hat{}i} \frac{1}{2^к} \frac{}{2^{n+l}} \frac{1}{2^{n+2}} \cdots \frac{2\hat{}+1}{1 \;\; \frac{1}{2}} \frac{1}{2^п}$$

(см. формулу (1-5)).

Если взять

$$^5 4 + 2 \wedge + - + 10 \wedge \quad (П = 10),$$

то погрешность такого приближения |Д| < —г?.

И наконец, если мы имеем разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора (Маклорена), то при замене /(ж) ~ $S_n(x)$ погрешность равна остаточному члену $Rn(x)$ формулы Тейлора данной функции. Так, при вычислении числа е воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции e^x

e • = 1 + x + — + — + — + • ” ’

в котором положим $x = 1$. Получаем представление рядом числа e

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{1} + - + \frac{1}{Ы} + -$$

Возьмем ?г = 8. Для оценки погрешности рассмотрим остаточный член формулы Маклорена функции e^x в форме Лагранжа и положим в нем $x = 1$

Так как $e^e < 3$, то при п = 8 получаем оценку

$$\frac{e}{9!} \quad \frac{3}{120960} \quad \frac{1}{100000}$$

Каждое слагаемое будем вычислять с точностью до пятого десятичного знака

$$e и 2 + 0,5 + 0,16666 + 0,04166 + 0,00833+$$

$$0,00138 + 0,00019 + 0,00002 = 2,71824$$

$|Д| < 0,00001.$

Рассмотрим формулу разложения бинома в ряд Маклорена

(1 + *xГ* = 1 + *mx* + g f e z i) $_g$ a $_+$ ™(™ ~ Ц(™ ~ ^{2}) $_ж$ з $_+$

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n-1)}{п!} \_$$

—1 < *x* < 1, с помощью которой можно получать приближенные значения корней при соответствующих значениях ж и т.

Пусть *m* = -, имеем

(1 + ж)$^{\frac{1}{2}}$ = ^ + i = l + J $_J$ - L^2 + ^i^3 - . . . (6.4)

2 8 16

+(1} $_1$ $\frac{(2п-3)М}{(2п)1!}$ * +''''

(-1 < ж < 1)

Преобразуем выражение Va^2 + *x* = *a** *1* + —, а > 0, и применим разложение (6.4)

V ^ T ^ = a(1 + $\frac{ж}{2a^2}$^ - $\frac{ж'^2}{8a^4}$ + $\frac{ж^ч}{16a^6}$

+ (_ 1) x $\frac{(2п - 3)!!}{\sim(2^!Гa^{+}"Г}$ ж- \ (}

Формула (6.5) справедлива, если — < 1 ⇒• |ж| < а^2 ⇒• —а^2 < ж < а^2.

Из представления (6.5) можно получить приближенную формулу $\sqrt{a^2 + ж} \approx a + \frac{ж}{2a}$,

$$(-a^2 < ж < a^2). \quad (6.6)$$

Пример

Вычислить приближенно, пользуясь формулой (6.6), -\/27.

Возьмем a — 5, x = 2, имеем

\/27= л/5^2 + 2 « 5 + ^ = 5,2.

Так как при $x > 0$ ряд (6.5) знакочередующийся, то погрешность такого приближения

|Д|< ^ 3 =0,004.

В курсе интегрального исчисления было указано, что большая часть интегралов, встречающихся в приложениях, не вычисляются в конечном виде. К ним относятся

/ *e~^{x} dx,* /———*dx,* / sina;^{2}da;, / *cosx^{2}dx,* / -—*dx*

и многие другие. Поэтому встает вопрос о приближенном вычислении таких интегралов. Одним из методов приближенного вычисления является разложение в ряд подынтегральной функции с последующим интегрированием полученного тождества по сегменту, принадлежащему области сходимости ряда.

Рассмотрим примеры:

1) Вычислить приближенно п ч • sin *x* *J*———*dx.* о *x*

а) За основу возьмем разложение в ряд Маклорена функции г :

оо 2n+1 x

з1пЖ = Е(- 1)П(2^П)!'

считая $x \neq 0$, умножим обе части тождества на $\frac{1}{x}$, получаем

00 Оэт

sin ж v-^, -^ ж

n=0 v '

на (—оо,+оо).

б) Проинтегрируем тождество (6.7) по сегменту $[0, x]$

/" sina; , ^, ,ч„ ж 2га+1

т-3 ™5 _7 ~.2n+1

ж ~ Ш + 5 7 5 ! - 7 - 7 ! + ' " + (} (2п+1)(2п +1)! + '"'

Формула (6.8) дает представление первообразной функции $\frac{\sin x}{x}$ рядом Маклорена.

в) В тождестве (6.8) положим $x = 0{,}3$

°/³smz (0,3)³ (0,3)⁵ (0,3)⁷

о

^ ' (2п + 1)(2п + 1)!'

получим представление числовым рядом данного интеграла. Так как ряд знакочередующийся и удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то оценка погрешности приближенного вычисления не составляет труда.

Vsina: по (0,3)³ (0,3)⁵

Пусть /———dx « 0,3 - V-TT + Н т - ' тог Д а

о x 6 • 3! о-!

(Вычисления предлагаем проделать читателю, видно, что точность такого приближения достаточно велика).

2) Вычислить приближенно $\int_0^{0,4} e^{-x^2}dx$, взяв три члена разложения в ряд интеграла, оценить погрешность.

Рассмотрим разложение в ряд функции e^u:

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!},$$

в котором положим $u = -x^2$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \qquad (6.9)$$

в $(-\infty, \infty)$. Тождество (6.9) проинтегрируем по сегменту $[0, x]$

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!},$$

и положим x = 0,4.

Имеем

$$\int_0^{0,4} e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0,4^{2n+1}}{(2n+1)n!} = 0,4 - \frac{(0,4)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(0,4)^5}{5\cdot 5!} - \frac{(0,4)^7}{7\cdot 7!} \ldots$$

взяв три члена разложения получаем

$$\int_0^{0,4} e^{-x^2}dx \approx 0,4 - \frac{(0,4)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(0,4)^5}{5\cdot 5!}$$

$$|\Delta| < \frac{(0,4)^7}{7\cdot 7!}$$

(Довести до конца вычисления, взяв нужное число десятичных знаков в приближении рекомендуем читателю).

3) Вычислить $\int\limits_{0,2}^{0,5}\frac{dx}{1+x^6}$. Отметим, что данный интеграл вычисляется в конечном виде разложением подынтегральной дроби на простейшую, однако, технически значительно проще его вычислить приближенным методом. Подынтегральную функцию можно рассматривать как сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q(x) = -x^6$ (см. формулу (1.5)). Имеем

$$\frac{1}{1+x^6} = 1 - x^6 + x^{12} - x^{18} + \dots + (-1)^n x^{6n} + \dots \qquad (6.10)$$

в интервале $(-1,1)$.

Так как сегмент $[0,2; 0,5] \subset (-1,1)$, то проинтегрируем ряд (6.10) по сегменту $[0,2; 0,5]$.

Получаем

$$\int\limits_{0,2}^{1}\frac{dx}{1+x^6} = [0,5 - 0,2] - \frac{[(0,5)^7-(0,2)^7]}{7} + \frac{[(0,5)^{13}-(0,2)^{13}]}{13} + \dots$$

Возьмем сумму первых двух членов ряда

$$\int\limits_{0,2}^{0,5}\frac{dx}{1+x^6} \approx 0,3 - \frac{[(0,5)^7-(0,2)^7]}{7}$$

тогда

$$|\alpha| < [(0,5)^{13}-(0,2)^{13}]$$

(Самостоятельно оценить погрешность и взять нужное количество десятичных знаков в приближении).

Задание

1) Пользуясь разложением в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$,

In (1 + x) вычислить с точностью до 0,001 следующие выражения: e^2, y/ё, sin0,2, cos0,4, In $\frac{3}{Zi}$, In $\frac{5}{тс}$.

2) Пользуясь разложением в ряд Маклорена бинома $(1 + x)^m$ вычислить указанные корни с точностью до 0,001:
л/5, л/П, л/17, $9, л Щ л/70-

<u>Замечание</u>. При вычислении кубических корней следует рассмотреть выражение

$$y/a^3 + x - a? \ 1 + -.$$

затем разложить в ряд бином

3) Выразить в форме ряда данные интегралы, используя разложение в ряд подынтегральных функций; указать области сходимости рядов

——ax; —ax; —zdx\
x x x^1

x arctg x dX] p dx x dx
i~~x dx > ITLTZS' I 1-X*
0 x 0

4) Вычислить приближенные значения определенных интегралов, взяв указанное число членов разложения подынтегральной функции в ряд; указать погрешность:

тг 1

J———dx (3члена); j e^{-x} dx (3члена);
7Г x o

6

°Г d x Г d X
S ~7ГТ=1 (2 члена); / -3 (6членов).
0 V1 + ^ 0,1 x e

5) Вычислить с точностью до 0,001 данные интегралы

^**arctgx,** dx: °f x^smxax; °f dx 7.

7 Варианты контрольной работы по теме «Ряды»

Вариант **1**

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

oo n! oo Y^ n + 1 •е-л, 1
Ё n". ^ (n + 2)(n + 3)' ^ n l n - n
n=1 «"' 2^i (n. -1-9Vn 4-3V ^=n l r, 3 .
ra=1 n=1

2. Найти интервал сходимости и сумму ряда Y1 oo (д. _ |_y on
71=1 z

3. Доказать, что функция j(x) = 2_, oo cosnx = непрерывна на
n=i Vn^4 + x^2

(-oo,+oo).

4. Представить рядом Маклорена функцию y — cos (3 + x).

5. Вычислить приближенно sin (0,2), взяв три члена ряда, оценить погрешность.

Вариант 2

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

v ^ . ТУ 1Р-1 * - У Ч 2 П + 3 Т
2 ^ п з ' 2 ^ ^ 1п(п + 1)' ^ У3п + 6У '
71=1 71=1 71=1

2. Найти интервал сходимости и сумму ряда 52 / з чг
71=1 \ x

3. Доказать, равномерную сходимость ряда J2 , e-7i^{2}a:^{2}
71=1 n

на (—co,+oo).

4. Представить рядом Маклорена функцию y = ж^3 In (1 + x).

5. Вычислить приближенно -^ё, взяв четыре члена ряда, оценить погрешность.

Вариант 3

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

7 1 = 1 ч ' П—1 П = 1

2. Найти интервал сходимости и сумму ряда 00]Г} п ж$^{п-1}$. п=1

n пг л . . . 2^ cos пж

3. Доказать непрерывность функции $f\{x)$ = 2_, — - —

на (—со, +оо).

4. Представить рядом Маклорена интеграл $\int_0^x \sin x^2 dx$.

5. Вычислить приближенно $\int_0^{0,3} \sin x^2 dx$, взяв два члена разложения в ряд, оценить погрешность.

Вариант 4

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

оо , 00 „ _ оо ı

5"' ^ 1 0 0 n + 20' ^ 1 n ^{n} n + 1'

n=1 n=1 n=1

2. Найти интервал сходимости и сумму ряда оо ^ 2",~^{1}ж^п. п=1

3. Доказать равномерную сходимость ряда оо sin 7XX Y)———;— на п=1 п !

(-оо,+со).

4. Представить рядом Маклорена функцию y = In $(x$ + 10).

5. Вычислить приближенно с точностью до 0,01 л/То.

Вариант 5

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

oo oo _ oo

n=1 n=1 n=1

2. Найти интервал сходимости и сумму ряда]П 10ⁿа;ⁿ.
7 1 = 1

3. Доказать равномерную сходимость ряда]Г)——.
n=i ^ v Ł "г ^я;
на [0, +oo).

4. Представить рядом Маклорена функцию y =

5. Вычислить приближенно с точностью до 0,01 \/5.

Литература

1. Ильин В.А., Позднякк Э.Г. Основы математического анализа. 4.1. М.: Физматлит, 2005.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997.

3. Берман Г.Н. Сбоник задач по курсу математического анализа. СПб.: 2001.

4. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 2. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Москва. Едиториал УРСС, 2003.