МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Э. БАУМАНА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

СБОРНИК ЗАДАЧ ВСЕРОССИЙСКИХ ОЛИМПИАД ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Издание второе, исправленное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по направлениям подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование (уровень бакалавриата), 15.04.02 Технологические машины и оборудование (уровень магистратуры), 15.03.03 Прикладная механика (уровень бакалавриата), 15.04.03 Прикладная механика (уровень магистратуры), 15.05.01 Проектирование технологических машин и комплексов (специалитет)

САМАРА
Издательство Самарского университета
2016

УДК 539.3/6 (075)
ББК 30.121 я 7
С 232

А в т о р ы :
А.М. Покровский, А.М. Наумов, В.С. Вакулюк, В.К. Шадрин

Рецензенты: канд. тех. наук, доц. кафедры «Физика прочности» национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт» (МИФИ) В.В. И с а ч е н к о ;
канд. тех. наук, проф. кафедры сопротивления материалов Московского государственного университета машиностроения (МАМИ) В.И. Щ е р б а к о в

С 232 **Сборник задач Всероссийских олимпиад по сопротивлению материалов:** учеб. пособие / [*А.М. Покровский* и др.]. – 2-е изд., испр. и доп. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2016. – 168 с.

ISBN 978-5-7883-1087-9

Представлены задачи, предложенные студентам на Всероссийских олимпиадах по сопротивлению материалов 1994-2015 гг.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование (уровень бакалавриата), 15.04.02 Технологические машины и оборудование (уровень магистратуры), 15.03.03 Прикладная механика (уровень бакалавриата), 15.04.03 Прикладная механика (уровень магистратуры), 15.05.01 Проектирование технологических машин и комплексов (специалитет).

УДК 539.3/6(075)
ББК 30.121 я 7

ISBN 978-5-7883-1087-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Посвящается светлой памяти
Рашита Каримовича Вафина

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сопротивление материалов – раздел механики, посвящённый расчётам на прочность и жёсткость. Курс сопротивления материалов изучается во всех технических вузах и относится к общеинженерным дисциплинам. Для повышения уровня подготовки студентов по этой дисциплине Министерством образования СССР в 1981 году было принято решение о проведении Всесоюзной олимпиады по сопротивлению материалов. С 1981 по 1985 годы Всесоюзная олимпиада проходила в Бакинском политехническом институте (Азербайджан). После 1985 года Всесоюзные олимпиады проводились в Ростове-на-Дону (два раза), Туапсе (два раза), Алма-Ате (Казахстан). Первым председателем жюри Всесоюзной олимпиады по сопротивлению материалов был кандидат технических наук, профессор кафедры «Сопротивление материалов» Московского высшего технического училища имени Н.Э. Баумана (ныне Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана) Константин Константинович Лихарев. Начиная с 1984 года, в течение двадцати пяти лет, вплоть до своей кончины, Всесоюзной олимпиадой руководил доктор технических наук, профессор той же кафедры Рашит Каримович Вафин. С 2009 года эстафету принял представитель той же кафедры (ныне кафедра «Прикладная механика») доктор технических наук, профессор Покровский Алексей Михайлович.

Заслуги профессора Вафина Р.К. в становлении Олимпиадного движения по сопротивлению материалов неоценимы, особенно в самые тяжёлые времена, связанные с развалом Советского Союза. Были годы (1986, 1992, 1993), когда олимпиада в связи с экономическими трудностями не проводилась. С 1991 года олимпиада получила статус Всероссийской с международном участием. В разные годы в олимпиаде принимали участие представители Белоруссии, Киргизии, Монголии, Украины, Туркменистана. На олимпиаду приезжают команды из вузов, представляющих все регионы России – от Калининграда (руководитель команды д-р техн. наук, проф. Притыкин А.И.) до Владивостока (руководитель команды канд. техн. наук, доц. Васильченко Н.П). Трижды Всероссийская олимпиада проводилась в Старом Осколе Белгородской области (руководитель команды канд. техн. наук, доц. Солодковская В.Г.). По два раза – в Дзержинске Нижегородской области (руководитель команды канд. техн. наук, доц. Шурашов А.Д.), Нижнем Новгороде (руководители команды ныне покойный канд. техн. наук, проф. Глявин Ю.В. и канд. техн. наук, доц. Ильичёв Н.И.), Новочеркасске Ростовской области (руководители команды канд. техн. наук, проф. Логвинов В.Б. и канд. техн. наук, доц. Алексеев С.А.), Перми (руководитель команды канд. техн. наук, доц. Римм Т.Э.), Санкт-Петербурге (руководитель команды канд. техн. наук, доц. Яковлева Е.Л.), Улан-Удэ (руководитель команды канд. техн. наук, проф. Егодуров Г.С.). В организации и проведении двух олимпиад на берегу озера Байкал (Улан-Удэ) активное участие принимала заведующая кафедрой «Сопротивление материалов» Восточно-Сибирского государственного технологического университета, д-р техн. наук, проф. Бохоева Л.А. Два раза Всероссийская олимпиада проводилась в Самаре (руководитель команды канд. техн. наук, доц. Шадрин В.К.)

За время проведения Всесоюзной олимпиады по сопротивлению материалов сформировалась команда единомышленников, активистов олимпиадного движения. Это, в первую очередь, многолетний соратник Р.К. Вафина, к сожалению тоже ушедший от нас в 2011 году, канд. техн. наук, доц. Кисенко Игорь Дмитревич. С 2009 года в связи с преклонным возрастом он перестал быть руководителем команды МГТУ им. Н.Э. Баумана. В настоящее время ею руководит канд. техн. наук, доц. Наумов А.М. Около тридцати лет участвует в олимпиадном движении канд. техн. наук, доц. кафедры «Физика прочности» Научно-исследовательского ядерного университета (МИФИ) Исаченко Валентин Владимирович, который возглавляет Московскую региональную олимпиаду по сопротивлению материалов. Активное участие в проведении Московской олимпиады принимают канд. техн. наук, проф. Московского университета путей сообщения Романов Ю.И. и канд. техн. наук, проф. Московского технического машиностроительного университета Щербаков В.И.

Практически ежегодно побеждают на региональных олимпиадах и привозят свои команды на Всероссийскую олимпиаду канд. техн. наук, доц. Лебедев Г.Б. и Шушунов В.В. (Новосибирск); канд. физ.-мат. наук, доц. Авилкин В.И. (Ростов-на-Дону); канд. техн. наук, доц. Шмелева Т.В. (Иваново); канд. техн. наук, доц.

Попенов А.И. (Уфа); канд. техн. наук, доц. Урбанович В.С. (Ижевск); канд. техн. наук, доц. Макаренко С.В. (Комсомольск-на-Амуре). За исключением последних двух на олимпиаду, как правило, приезжали представители Украины: команда Киевского государственного архитектурно-строителъного университета (руководитель канд. техн. наук, доц. Иваненко П.А.) и команда Горловского автомобильно-дорожного института (руководитель канд. техн. наук, доц. Космак В.А.).

За последние три года на Всероссийской олимпиаде стали появляться новые команды, ежегодно добивающиеся успехов на региональных олимпиадах. Руководители этих команд: канд. техн. наук, доц. Маврина С.А. (Владимир); канд. техн. наук, доц. Ноздрин М.А. и Роменская И.Т. (Иваново); канд. техн. наук, доц. Алексеева Е.Г. (Тверь), канд. техн. наук, доц. Залесский К.Е. (Тула).

География представителей вузов на Всероссийских олимпиадах по сопротивлению материалов год от года только расширяется, численность участников возрастает, что позволяет сделать вывод о неослабевающем интересе студентов и преподавателей к этому мероприятию. Надеемся, что опубликование данного учебного пособия позволит студентам лучше подготовиться к олимпиадам по сопротивлению материалов и добиться на них лучших результатов.

Авторы выражают искреннюю благодарность всем, кто был каким-то образом причастен к составлению конкурсных задач для Всероссийских студенческих олимпиад по сопротивлению материалов.

Часть 1. УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1.1. Олимпиада 1994 г., г. Самара, СГАУ

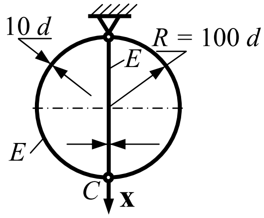


Рис. 94.1

94.1 Найти перемещение узла C (рис. 94.1). Дано: F, E, d.

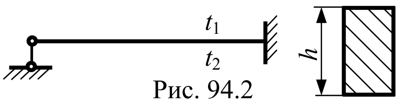


Рис. 94.2

94.2 Изменение температуры по высоте балки равно $\Delta t = t_2 - t_1$ (рис. 94.2). Найти наибольшее нормальное напряжение. Дано: $E = 2\cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 12\cdot 10^{-6}$ 1/град, $\Delta t = 50^\circ$C.

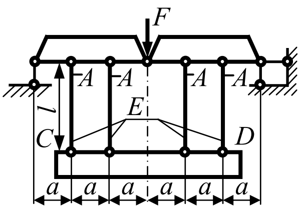


Рис. 94.3

94.3 Траверса CD (рис. 94.3) получила перемещение δ. Найти F. Дано: E, A, l, δ.

94.4 Жёсткая опора B заменена на упругую (рис. 94.4). Какова должна быть жесткость этой опоры, чтобы замена не повлияла на величину коэффициента запаса? Дано: E, J, l.

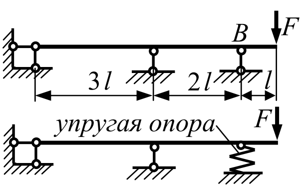


Рис. 94.4

94.5 При каком эксцентриситете e (рис. 94.5) стержни *1* и *2* не подвергаются изгибу? Размер a задан.

94.6 Показания тензорезисторов *1* и *2* (рис. 94.6) на поверхности тонкостенной оболочки отличаются в 5 раз. Найти коэффициент Пуассона μ.

94.7 Каков наибольший процент экономии материала при замене балки *1* на балку *2* (рис. 94.7) без снижения прочности?

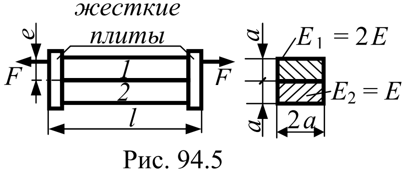


Рис. 94.5

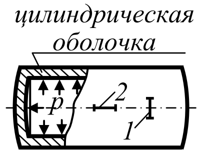


Рис. 94.6

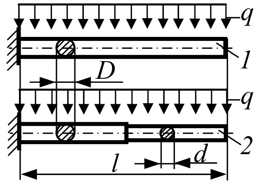


Рис. 94.7

1.2. Олимпиада 1995 г., Челябинск, ЧГТУ

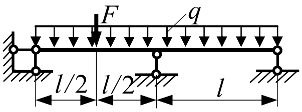


Рис. 95.1

95.1 При каком значении силы F отсутствует реакция правой опоры (рис. 95.1)? Дано: q, l.

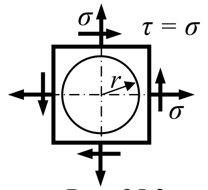


Рис. 95.2

95.2 Найти размеры и направление полуосей эллипса, в который переходит окружность при деформации элемента (рис. 95.2). Дано: σ, E, μ.

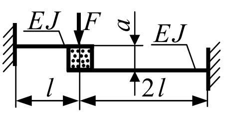


Рис. 95.3

95.3 При каком значении силы F будет разрушен бетонный кубик с ребром a (рис. 95.3)? Дано: a, l, EJ, $\sigma_в$ – предел прочности бетона.

95.4 Стержень нагружен осевыми силами с линейным изменением их интенсивности (рис. 95.4). Найти перемещение сечения B. Дано: q, l, EA.

95.5 Концевое сечение B соединяется с неподвижным шарниром C (рис. 95.5). Найти изгибающий момент в сечении D. Дано: Δ, R, EJ.

95.6 При сборке стержневой системы сечения A стержня *1* и трубки *2* были взаимно повернуты на угол β, а затем соединены штифтом 3 (рис. 95.6). Определить потенциальную энергию деформации системы. Дано: β, l, G, J.

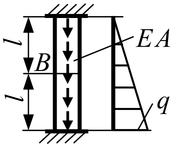


Рис. 95.4

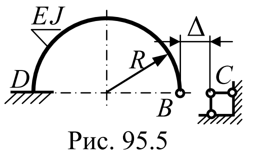


Рис. 95.5

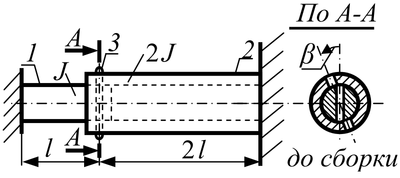


Рис. 95.6

1.3. Олимпиада 1996 г., г. Нижний Новгород, НГТУ

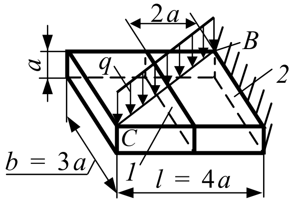


Рис. 96.1

96.1 На стальную пластинку действует нагрузка, распределённая по линии *CB* (рис. 96.1). Построив эпюры внутренних усилий, определить, во сколько раз прочность пластинки в сечении *1* больше (меньше), чем в сечении *2*. При расчёте считать справедливыми формулы для определения напряжений, полученные для брусьев постоянного сечения. При подсчете $W_к$ принять $\alpha = 0{,}267$.

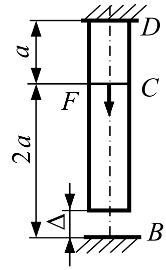


Рис. 96.2

96.2 Брус растянули силой *F*, перекрывающей зазор Δ (рис. 96.2). В момент касания нижнего торца бруса с опорой *B* его приварили к ней сваркой, после чего силу *F* сняли. Определить остаточные усилия в брусе и положение сечения *C* после разгрузки, полагая напряжения, возникающие в брусе, упругими. При расчёте считать $\Delta << a$. Жесткость сечения бруса принять равной *EA*.

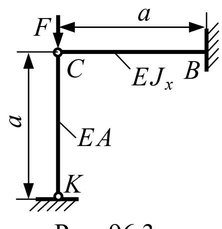


Рис. 96.3

96.3 Конструкция состоит из упругой балки *CB* и связанной с ней тонкой упругой струны *CK* (рис. 96.3). В процессе монтажа конструкции струну натянули так, что после окончания сборки она оказалась растянутой силой F_0. На собранную конструкцию приложили силу *F*. Построить график, характеризующий зависимость перемещения точки *C* от силы *F* при $2F_0 > F > 0$, $Aa^2/J_x = 5$.

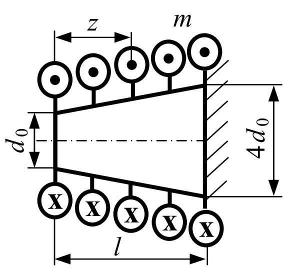


Рис. 96.4

96.4 Диаметр бруса круглого сечения изменяется по закону $d_z = d_0\left(1+\dfrac{3z}{l}\right)$. Он закручен равномерно распределённым скручивающим моментом интенсивности *m* (рис. 96.4). Определить максимальные напряжения в брусе. Модуль сдвига материала бруса равен G. Гипотезу плоских сечений для бруса считать справедливой.

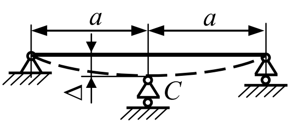


Рис. 96.5

96.5 Средняя опора C балки квадратного сечения получила осадку Δ (рис. 96.5). Как изменятся наибольшие нормальные напряжения в балке, если при тех же условиях балка будет заменена балкой круглого сечения той же высоты? Дайте обоснование Вашему заключению.

96.6 В абсолютно жёстком материале сделано гнездо квадратного сечения $a{\times}a$ высотой h (рис. 96.6). В нём силой F сжат материал M с упругими константами E, ν. Определить, пренебрегая трением со стенками, на сколько поднимется крышка K, если материал M нагреть на t°. Коэффициент линейного расширения материала M равен α.

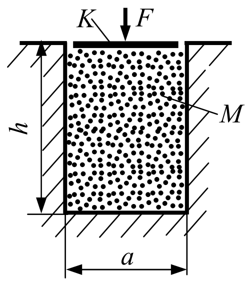


Рис. 96.6

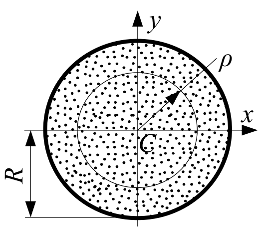


Рис. 96.7

96.7 Стержень круглого сечения сделан из пористого материала, причём плотность пор пропорциональна расстоянию от центра C (рис. 96.7). В целом поры ослабляют сечение на 25%. Определить осевой момент инерции сечения относительно горизонтальной оси x.

96.8 Балка постоянного сечения закреплена на двух опорах (рис. 96.8). Левая опора – шарнирно неподвижная, правая – в виде короткой трубки, которая под малым углом наклонена к оси z и может свободно перемещаться вдоль этой оси, изгибая балку. При каком a прогибы в точках C и B будут равны по абсолютному значению? Трением между трубкой и балкой пренебречь.

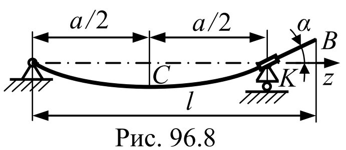


Рис. 96.8

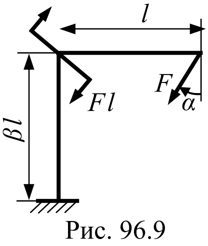


Рис. 96.9

96.9 Определить при каких величинах α и β максимальный изгибающий момент в раме (рис. 96.9) будет иметь наименьшее значение (по абсолютной величине).

1.4. Олимпиада 1997 г., г. Новочеркасск, НГТУ

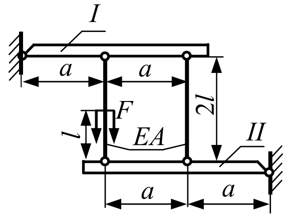


Рис. 97.1

97.1 Доказать, что работа силы F равна потенциальной энергии деформации стержневой системы (рис. 97.1). Дано: F, l, EA. Деформациями стержней I и II пренебречь.

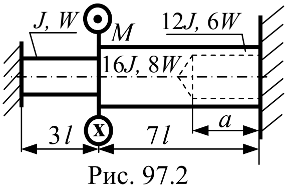


Рис. 97.2

97.2 При какой глубине сверления a (рис. 97.2) наибольшие касательные напряжения на левом и правом участках будут одинаковы? Геометрические характеристики сечений указаны на рисунке.

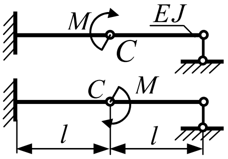
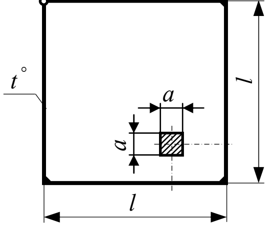


Рис. 97.3

97.3 Стержень нагружен парой сил M в двух вариантах: слева и справа от шарнира C (рис. 97.3). Найти линейное перемещение шарнира и работу пары сил M в обоих вариантах. Дано: M, l, EJ.

97.4 Два стержня рамы равномерно нагреты на t° (рис. 97.4). Найти наибольшие напряжения, полагая $l = 15a$. Дано: t°, E, α – коэффициент линейного расширения материала стержней.



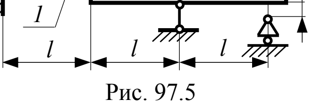


Рис. 97.5

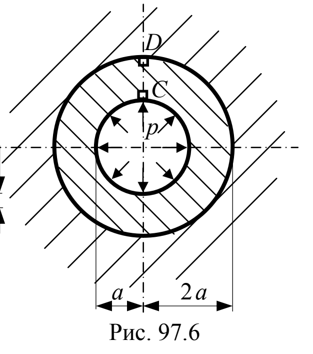


Рис. 97.6

Рис. 97.4

97.5 Найти наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении стержня *1* (рис. 97.5) в момент закрытия зазора δ. Деформациями правого стержня *2* пренебречь. Дано: l, a, δ, E.

97.6 Толстостенный цилиндр без днищ помещен без натяга в жесткую обойму и нагружен внутренним давлением p (рис. 97.6). Найти и указать напряжения на гранях элементов C и D. Дано: p, a, коэффициент Пуассона $\mu = 1/3$.

1.5. Олимпиада 1998 г., г. Нижний Новгород, НГАСУ

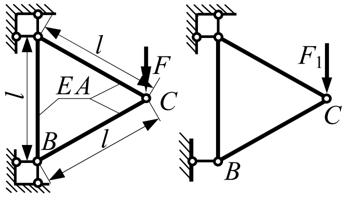


Рис. 98.1

98.1 Как изменить величину силы F, чтобы удаление одной связи в опоре B (рис. 98.1) не повлияло на величину вертикального перемещения узла C? Длина стержней l.

98.2 При каком значении длины a (рис. 98.2) линейные перемещения сечений A и B будут одинаковы? Дано: l = 120 мм.

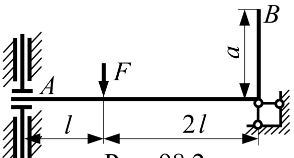


Рис. 98.2

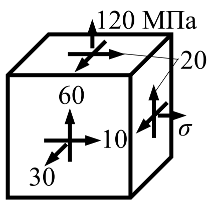


Рис. 98.3

98.3 Определить напряжение σ, при котором элемент (рис. 98.3) испытывает чистый сдвиг. Найти наибольшее касательное напряжение.

98.4 Стержень прижат к круговому лекалу радиуса R (рис. 98.4). Считая деформации упругими и перемещения малыми, найти наибольшее нормальное напряжение и размер a зоны контакта. Принять $F = \dfrac{4EJ}{Rl}$, $h = R/700$, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа.

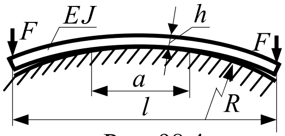


Рис. 98.4

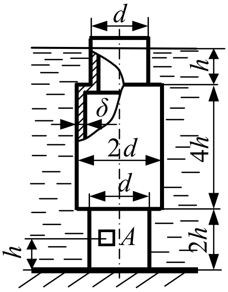


Рис. 98.5

98.5 Резервуар находится под наружным гидростатическим давлением (рис. 98.5). Объемный вес жидкости равен γ Н/м^3. Определить напряжения на гранях элемента A и найти эквивалентное напряжение. Дано: γ, h, d, δ, $\nu = \sigma_{\text{тр}}/\sigma_{\text{тс}} = 0{,}8$.

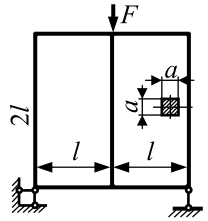


Рис. 98.6

98.6 Плоская рама выполнена из стержней квадратного поперечного сечения (рис. 98.6). Найти наибольшие нормальные напряжения при нагружении рамы силой F. Дано: F = 450 Н, l = 0,8 м, a = 15 мм.

1.6. Олимпиада 1999 г., г. Пермь, ПГТУ

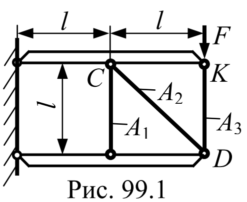


Рис. 99.1

99.1 Известно, что $A_1 = A_3 = A$, принять $A_2 = nA$. Найти зависимость перемещения w_K точки приложения силы F (рис. 99.1) от величины A.

99.2 При каком значении q (рис. 99.2) зазор δ закрывается? Найти наибольшее напряжение $\sigma_{\max}$ при нагрузке $2q$. Дано: δ, a, l, E.

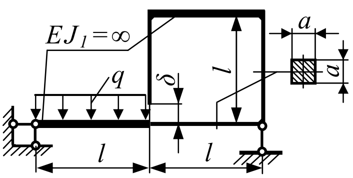


Рис. 99.2

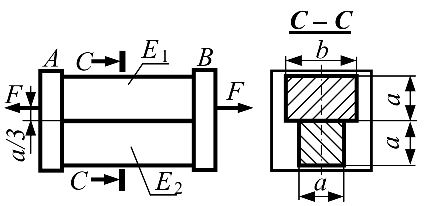


Рис. 99.3

99.3 Определить размер b, при котором жёсткие плиты A и B (рис. 99.3) смещаются параллельно друг другу. Дано: a = 30 мм, $E_1 = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 0{,}7 \cdot 10^5$ МПа.

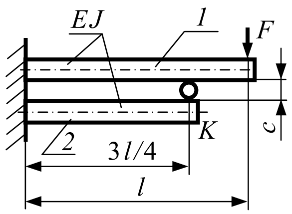


Рис. 99.4

99.4 Балки *1* и *2* установлены с просветом $c = \dfrac{Fl^3}{64EJ}$ (рис. 99.4) и имеют контакт в сечении *K*. Как изменится величина просвета при нагружении силой *F* и чему равна его максимальная величина? Дано: *F*, *l*, *E*, *J*.

99.5 Тензорезистор *1* указывает на отсутствие линейной деформации (рис. 99.5). Полагая $\mu = 1/3$, найти значение пары сил. Дано: $d = 32$ мм, $F = 1$ кН.

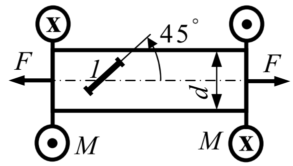


Рис. 99.5

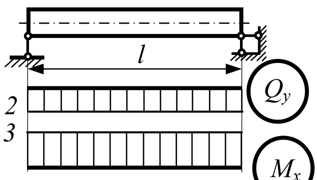


Рис. 99.6

99.6 Заданы эпюры (рис. 99.6) поперечных сил Q_y (кН) и изгибающих моментов M_x (кН·м). Эпюра изгибающих моментов построена на сжатой стороне стержня. Восстановить нагрузку, учитывая, что длина пролёта $l = 1$ м.

1.7. Олимпиада 2000 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС

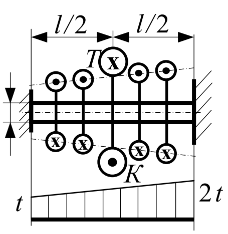


Рис. 00.1

00.1 Стержень нагружен распределёнными парами сил (рис. 00.1). Какую работу должна совершить дополнительно приложенная пара сил *T*, чтобы сечение *K* не имело углового перемещения? Дано: *t*, *l*, *G*, *d*.

00.2 Две кольцевые пружины жестко соединены с основанием и стержнем *1*, деформациями которого следует пренебречь (рис. 00.2). Найти δ – наибольший допускаемый ход стержня. Дано: *R*, *h*, *E*, $[\sigma]$.

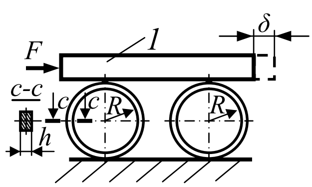


Рис. 00.2

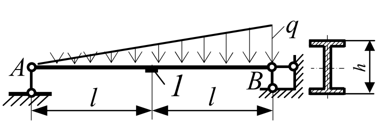


Рис. 00.3

00.3 Измеренная датчиком *1* продольная деформация составила $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$. Найти взаимный угол поворота сечений *A* и *B* при $l = 15h$ (рис. 00.3).

00.4 Напряжённое состояние, указанное на рис. 00.4, дополняется всесторонним равномерным сжатием. В результате вся потенциальная энергия деформации оказывается связанной только с изменением формы. Найти коэффициент запаса по текучести, если предел текучести $\sigma_т$ = 240 МПа. Использовать теорию наибольших касательных напряжений.

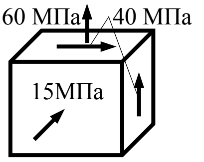


Рис. 00.4

00.5 На каком расстоянии a (рис. 00.5) следует установить правую опору, чтобы была обеспечена равнопрочность стержней? Каково значение F, при котором стержни будут работать с двукратным коэффициентом запаса? Пределы текучести материала при растяжении и при сжатии одинаковы $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_т$. Дано: l, d, $\sigma_т$.

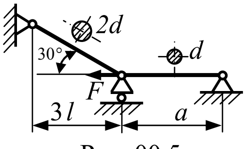


Рис. 00.5

00.6 Температура стержня после установки его на опорах (рис. 00.6) изменяется как по длине l, так и по высоте сечения h. Градиент температуры по высоте растёт от нуля в левом сечении до $t = t_1 - t_2 > 0$ в заделке. Полагая, что поперечные сечения остаются плоскими, найти наибольшие нормальные напряжения. Дано: $t = 60^{\circ}$С, $E = 1{\cdot}10^5$ МПа, $\alpha = 1{,}8{\cdot}10^{-5}$ 1/град.

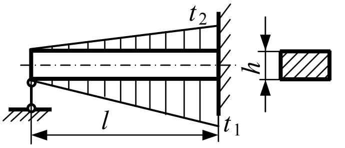


Рис. 00.6

1.8. Олимпиада 2001 г., г. Йошкар-Ола, Марийский ГТИ

01.1 При каком значении диаметра d_2 (рис. 01.1) перемещения в стержневой системе не изменятся после удаления опоры B? Дано: $\alpha = 15^{\circ}$, диаметр d_1 = 50 мм, $l_1 = l_2 = l$, $E_1 = E_2 = E$.

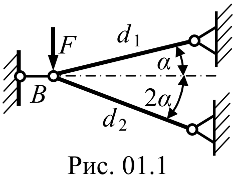


Рис. 01.1

01.2 Рама под действием распределенной нагрузки q (рис. 01.2) дополнительно нагружается парой сил M, при этом опора B полностью разгружается. Найти линейное перемещение сечения B. Заданы: размер l, модуль упругости E, момент инерции поперечного сечения J.

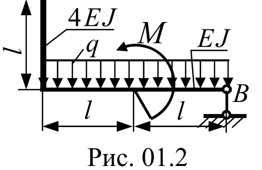


Рис. 01.2

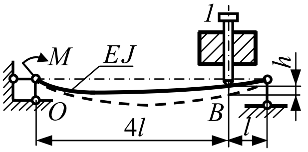


Рис. 01.3

01.3 Балка изогнута парой сил M (рис. 01.3). С помощью винта *1* сечение B получает дополнительное линейное перемещение. Каким должен быть ход h винта, чтобы осевая линия участка OB стала дугой окружности? Заданы: размер l, модуль упругости E, момент инерции поперечного сечения J.

01.4 Интенсивность распределённой нагрузки линейно изменяется от нуля до m (рис. 01.4). Определить, где находится опасное сечение и чему равны наибольшие касательные напряжения. Заданы размеры d и l.

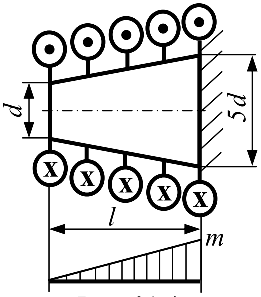


Рис. 01.4

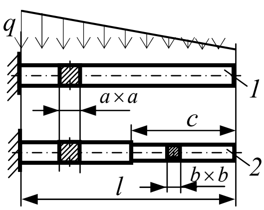


Рис. 01.5

01.5 В целях снижения массы стержень *1* (рис. 01.5) заменён ступенчатым стержнем *2*, оба участка которого равнопрочны. Какими должны быть размеры b и c? Дано: a = 26 мм, l = 330 мм.

01.6 На каком расстоянии c (рис. 01.6) расположен элемент *1*, испытывающий напряжённое состояние «чистый сдвиг»? Дано: a = 40 мм.

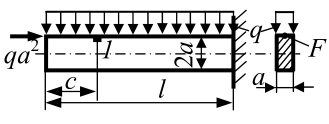


Рис. 01.6

1.9. Олимпиада 2002 г., г. Санкт-Петербург, СПбГТУ

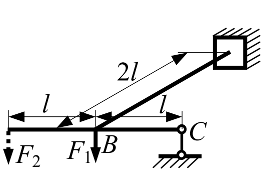


Рис. 02.1

02.1 После нагружения рамы силой $F_1 = F$ добавляется сила F_2 (рис. 02.1), и участок BC становится прямым. Определить значение силы F_2 и угол наклона участка BC. Дано: F, l, E, J_x, $GJ_к = 2EJ_x/3$.

02.2 Стержневая система нагружена силой F (рис. 02.2). Определить изменение температуры Δt° первого стержня, при которой точка B перемещается точно по вертикали. Дано: F, l, E, α.

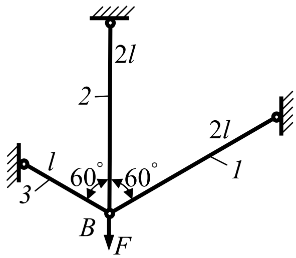


Рис. 02.2

02.3 При каком смещении δ правой опоры (рис. 02.3) коэффициент запаса прочности n балки будет наибольшим? Дано: F, l, E, a.

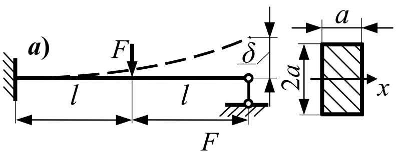


Рис. 02.3

02.4 Тонкостенный круглый стержень длиной l (рис. 02.4), защемлённый с одной стороны, нагружен по обеим поверхностям касательными нагрузками интенсивностью T. При каком значении T возникнут первые пластические деформации? Дано: l, a, b, $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_{\text{т}}$, $l >> \delta$.

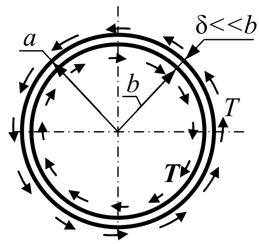


Рис. 02.4

02.5 Наибольшие нормальные напряжения, возникающие в момент закрытия зазора δ, соответствуют силе F (рис. 02.5). При дальнейшем увеличении этой силы указанные напряжения удваиваются. Во сколько раз при этом возрастает сама сила F? Дано: EJ, l.

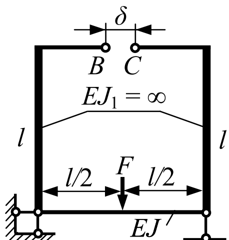


Рис. 02.5

02.6 При каком значении силы F (рис. 02.6) объём материала трубки не изменяется? Чему при этом равен коэффициент запаса $n_{\text{т}}$, найденный по теории максимальных касательных напряжений? Дано: p, d, $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_{\text{т}}$.

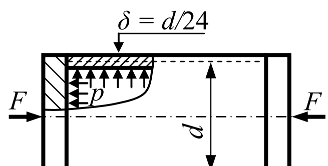


Рис. 02.6

1.10. Олимпиада 2003 г., г. Саранск, МГТУ им. Огарёва

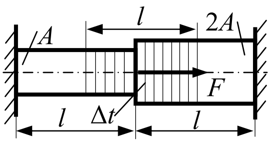


Рис. 03.1

03.1 В каком месте стержня (рис. 03.1) следует создать зону нагрева длиной l (заштрихована), чтобы сила F не производила работу? Дано: l = 90 мм, $F = \alpha\Delta t EA/3$.

03.2 При нагружении стержневой системы тремя силами (рис. 03.2) измеренное перемещение траверсы *1* составило $\delta = 10Fl/(EA)$. Каково отношение Q/F?

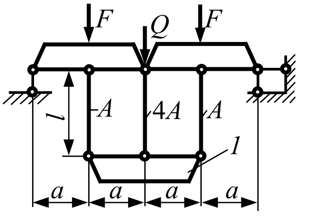


Рис. 03.2

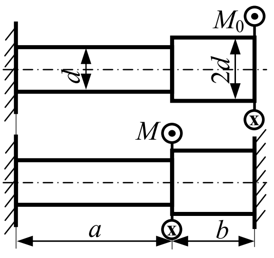


Рис. 03.3

03.3 Предварительное напряжённое состояние стержня создаётся закручиванием парой сил M_0 на угол φ и закреплением свободного торца (рис. 03.3). При последующем нагружении стержня парой сил M участки a и b должны быть равнопрочны. Найти зависимость φ от отношения b:a.

03.4 Ось стержня имеет постоянную кривизну k. Найти положение сечения, не имеющего углового перемещения после соединения свободного конца стержня с неподвижной опорой (рис. 03.4), считая перемещения малыми и l = 600 мм.

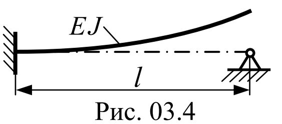


Рис. 03.4

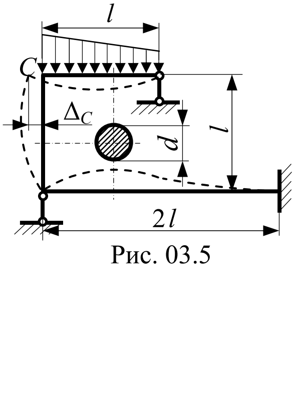


Рис. 03.5

03.5 По измеренному значению Δ_C линейного перемещения сечения C (рис. 03.5) найти наибольшее нормальное напряжение в этом сечении. Дано: Δ_C = 4 мм, d = 10 мм, $E = 1{\cdot}10^5$ МПа, $l = 20d$.

03.6 При какой толщине δ_1 (рис. 03.6) будет обеспечена равнопрочность всех участков трубки? Использовать теорию максимальных касательных напряжений.

Дано: d, $M = p\pi d^3/6$, $\delta_2 = d/12$.

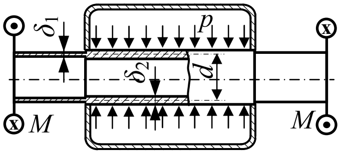


Рис. 03.6

1.11. Олимпиада 2004 г., г. Дзержинск, ДФ НГТУ

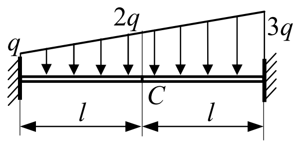


Рис. 04.1

04.1 Две одинаковых консольных балки (рис. 04.1) жёстко соединены торцевыми сечениями C. Найти значения силовых факторов в этих сечениях при нагружении балок распределёнными силами. Дано: l, q, J.

04.2 После сверления отверстия диаметром d (рис. 04.2) наибольшие углы сдвига на участках, ослабленных отверстием, оказались одинаковы. Найти глубину сверления a при длине l = 50 мм. При вычислениях принять $1{,}5^4 = 5$.

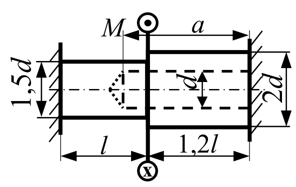


Рис. 04.2

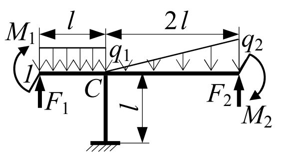


Рис. 04.3

04.3 В узле C поперечные силы и изгибающие моменты в стержнях отсутствуют. При каком отношении $q_1{:}q_2$ (рис. 04.3) значения угловых перемещений в торцевых сечениях одинаковы?

04.4 Распределённая нагрузка занимает половину площади торцевого сечения стержня (на рис. 04.4 заштрихована). По измеренной деформации ε ребра b-b вычислить угол наклона торцевого сечения. Дано: $\varepsilon = 0{,}002$.

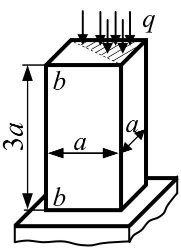


Рис. 04.4

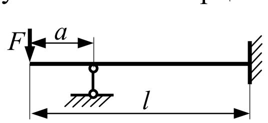


Рис. 04.5

04.5 На каком расстоянии a от конца балки (рис. 04.5) следует установить опору, чтобы значения наибольших линейных перемещений на консоли и в пролёте были одинаковы? Дано: l = 1,2 м.

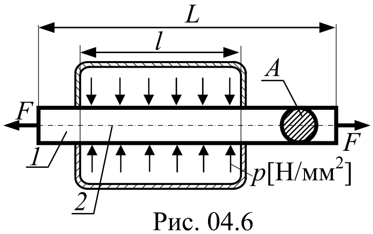


Рис. 04.6

04.6 Коэффициенты запаса на участках *1* и *2* (рис. 04.6), вычисленные по теории наибольших касательных напряжений, отличаются в три раза. При какой длине L стержня его объем не изменяется? Дано: l = 80 мм.

1.12. Олимпиада 2005 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС

05.1 В правом пролёте, изогнутом по дуге окружности, наибольший прогиб равен v (рис. 05.1). Найти наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки. Дано: v, l, E, a.

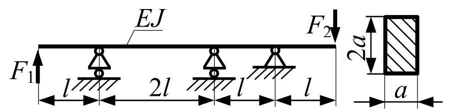


Рис. 05.1

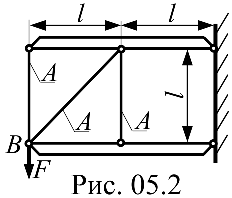


Рис. 05.2

05.2 Узел B получил перемещение δ (рис. 05.2). Найти значение силы F. Дано: δ, l, E, A.

05.3 Температура линейно изменяется по высоте сечения балки (рис. 05.3). При каком значении t° положение шарика становится неустойчивым? Весом шарика пренебречь. Дано: l, h, δ, α [1/град].

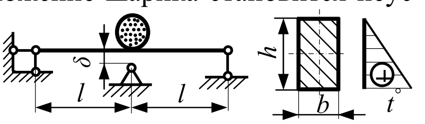


Рис. 05.3

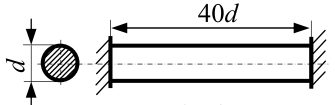


Рис. 05.4

05.4 Коэффициент запаса стержня (рис. 05.4), предварительно закрученного на угол φ, равен $n_{т} = 2$ (энергетическая теория). При каком повышении температуры стержня этот коэффициент будет исчерпан? Дано: φ = 0,12 рад, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/град, G:E = 0,4.

05.5 Найти угол α (рис. 05.5), при котором запас потенциальной энергии деформации U максимален, и вычислить значение U_{max}. Дано: F, l, E, a.

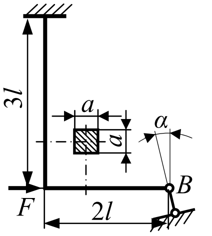


Рис. 05.5

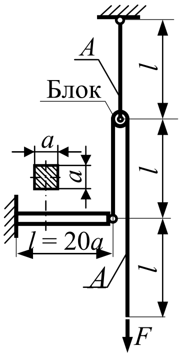


Рис. 05.6

05.6 Балка соединена с тросом (рис. 05.6), перекинутым через блок, и нагружена силой F. Блок подвешен к жёсткой опоре двойным тросом. Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки равно 360 МПа. Найти работу силы F при a = 20 мм, $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа (балка), A = 20 мм^2, $E_2 = 0{,}7 \cdot 10^5$ МПа (трос).

1.13. Олимпиада 2006 г., г. Улан-Удэ, ВСГУТУ

06.1 Жёсткости рамы в направлении силы F и пружины одинаковы (рис. 06.1). Найти отношение наибольших линейных перемещений: вертикального и горизонтального. Дано: F, l, EJ = const.

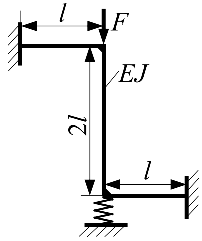


Рис. 06.1

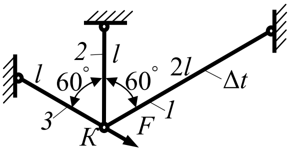


Рис. 06.2

06.2 Стержневая система нагружена силой F, а стержень *1* нагрет на Δt. Определить полное перемещение узла K (рис. 06.2). Дано: F, l, E, A, α, $\Delta t^\circ = \dfrac{5F}{6\alpha EA}$, EA = const.

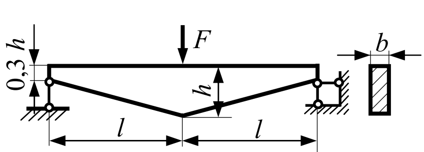


Рис. 06.3

06.3 Из условия прочности по нормальным напряжениям определить размер h поперечного сечения заданной балки (рис. 06.3). Дано: F = 20 кН, $[\sigma]$ = 150 МПа, l = 3 м, $b = 0{,}4 \cdot h$.

06.4 Под действием силы F зазор δ закрывается (рис. 06.4). При каком положении подвижной опоры C обеспечивается прочность рамы? Дано: l = 400 мм, a = 60 мм, δ = 4 мм, E = $0{,}7 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma]$ = 120 МПа.

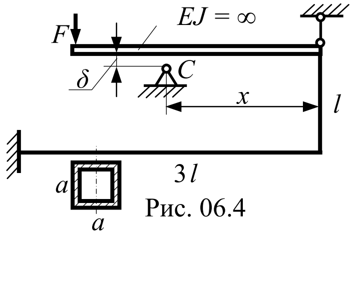


Рис. 06.4

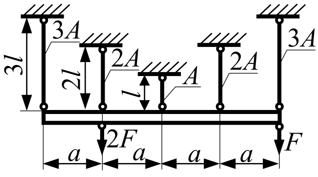


Рис. 06.5

06.5 Определить работу внешних сил (рис. 06.5). Деформациями траверсы пренебречь. Дано: F, l, E, A.

06.6 Тонкостенная оболочка (рис. 06.6) находится под внутренним гидростатическим давлением. Найти положение элемента оболочки *1*, испытывающего чистый сдвиг. Дано: h, γ [Н/м^3] – объёмный вес жидкости.

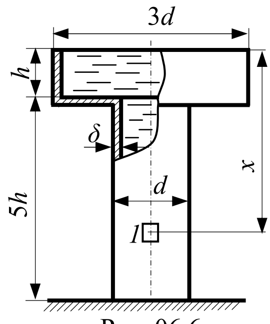


Рис. 06.6

1.14. Олимпиада 2007 г., г. Новочеркасск, ЮРГТУ

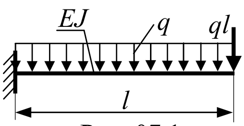


Рис. 07.1

07.1 Для заданной балки (рис. 07.1) вычислить: а) работу внешних сил, б) потенциальную энергию деформации. Дано: q, l, EJ.

07.2 На участке AB (рис. 07.2) наибольшее перемещение v_C = 2 мм. Найти σ_{max} в этом сечении при l = 200 мм, h = 40 мм, $E = 10^5$ МПа.

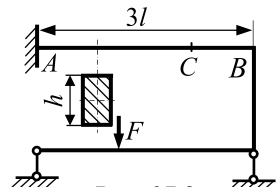


Рис. 07.2

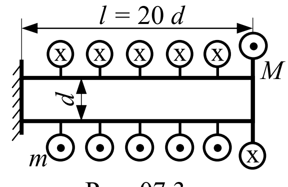


Рис. 07.3

07.3 Наибольшее угловое перемещение φ_{max} и угол поворота торцевого сечения стержня (рис. 07.3) равны по величине. Найти наибольшее касательное напряжение при m = 100 Нм/м, d = 10 мм.

07.4 На каком уровне a тонкостенная оболочка (рис. 07.4) равномерно растянута в окружном и меридиональном направлениях? Дано: h, δ, γ, $\alpha = 30^\circ$.

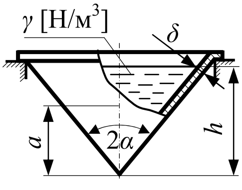


Рис. 07.4

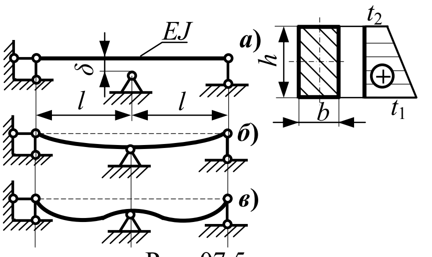


Рис. 07.5

07.5 Температура стержня изменяется по высоте сечения (рис. 07.5, *а*). При некотором значении $t = t_1 - t_2$ кривизна достигает значения k и зазор δ закрывается (рис. 07.5, *б*). Найти наибольшее нормальное напряжение в среднем сечении стержня при $t_1 - t_2 = nt$, полагая, что кривизна оси в этом сечении равна $-k$ (рис. 07.5, *в*). Дано: $h = 60$ мм, $l = 1$ м, $E = 2{\cdot}10^5$ МПа, $\delta = l/600$.

07.6 После введения шарнира C напряжённое состояние стержня (рис. 07.6, *б*) под действием собственного веса не изменилось. На каком расстоянии от шарнира находится сечение с наибольшим линейным перемещением, если $l = 1{,}4$ м?

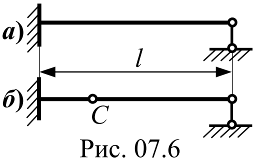


Рис. 07.6

1.15. Олимпиада 2008 г., г. Дзержинск, ДФ НГТУ

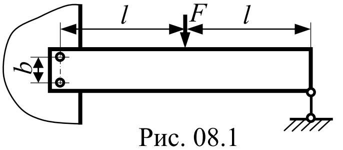


Рис. 08.1

08.1 Кронштейн закреплён слева двумя заклепками, справа – шарнирной опорой (рис. 08.1). Определить силу F, разрушающую заклёпочное соединение, если усилие среза равно Q. Дано: Q, $l/b = 40$.

08.2 Продольная деформация ε, измеренная в середине пролёта, составляет $4{\cdot}10^{-4}$. При $l = 20h$ и $h = 20$ мм вычислить прогиб в середине пролёта, считая деформации упругими (рис. 08.2).

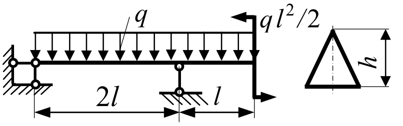


Рис. 08.2

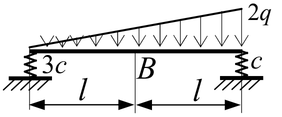


Рис. 08.3

08.3 Балка установлена на упругих опорах (рис. 08.3). Найти линейное перемещение сечения B, полагая $c = \dfrac{4FJ}{3l^3}$. Дано: q, l, E, J.

08.4 Найти перемещение узла B (рис. 08.4). Дано: F, E, d, $l = 100\,d$.

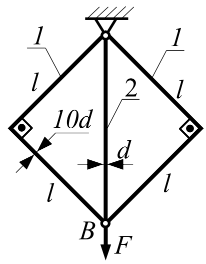


Рис. 08.4

08.5 Тонкостенная оболочка нагружена внутренним давлением p и силой T (рис. 08.5). При каком значении силы T осевое перемещение сечения B составит $W_B = \dfrac{5\,p\,l(1-2\mu)}{8E}$? Краевой эффект не учитывать, $D/\delta = 10$.

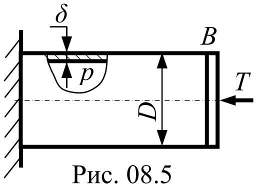


Рис. 08.5

08.6 Опора D может перемещаться по вертикали (рис. 08.6, *а*).

1) На сколько надо переместить опору D после приложения силы F, чтобы обеспечить равенство максимальных нормальных напряжений в сечениях B и C?

2) Как правильно расположить заданное сечение (рис. 08.6, *б*), если $\sigma_{\text{тс}} = 2\sigma_{\text{тр}}$? $\sigma_{\text{тр}}$ и $\sigma_{\text{тс}}$ – пределы текучести при растяжении и сжатии соответственно.

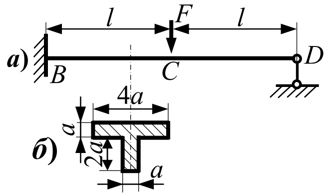


Рис. 08.6

1.16. Олимпиада 2009 г., г. Улан-Удэ, ВСГУТУ

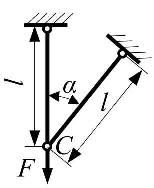


Рис. 09.1

09.1 Система из двух одинаковых стержней нагружена вертикальной силой F (рис. 09.1). Определить полное перемещение точки C. Дано: перемещения малы, площадь стержней A, длина l, модуль упругости E, $\alpha = 30^\circ$.

09.2 Стержень *2* с жёсткостью EJ опирается на стержень *1* с жёсткостью kEJ (рис. 09.2). При каком значении k прочность стержня *2* будет максимальна?

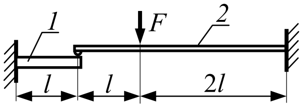


Рис. 09.2

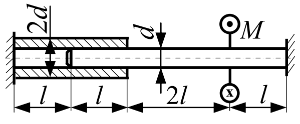


Рис. 09.3

09.3 В трубку с натягом вставлен стержень (рис. 09.3). Считая давление p между трубкой и стержнем постоянным по поверхности контакта, определить минимальное значение момента M, при котором начнётся проскальзывание стержня относительно трубки по всей поверхности контакта. Дано: p, l, d, коэффициент трения f, модули сдвига для трубки и стержня соотносятся как $G_{ст} = 5 \cdot G_{тр}$.

09.4 Ступенчатый стержень закреплен между двумя жёсткими опорами (рис. 09.4). Определить напряжения, возникающие в центральном участке, при равномерном нагреве всего стержня на Δt. Дано: температурный коэффициент линейного расширения стержня α, модуль упругости E.

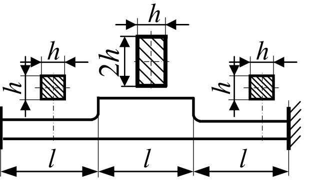


Рис. 09.4

09.5 Стержень *2* закреплен на вращающемся с угловой скоростью ω жёстком диске *1* (рис. 09.5). Найти максимальное напряжение в стержне и изменение его длины по сравнению с неподвижным состоянием. Дано: зависимость площади поперечного сечения от радиуса $A(r) = A_0R/r$, плотность материала стержня ρ и модуль упругости E.

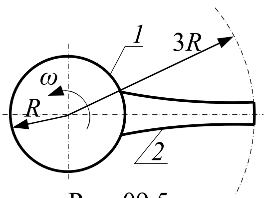


Рис. 09.5

09.6 Сплошной резиновый цилиндр вставлен без зазора в тонкостенную алюминиевую трубку диаметром $D_{ср}$ = 100 мм и толщиной h = 1 мм (рис. 09.6). Определить возникающие в трубке напряжения и изменение её диаметра при нагружении цилиндра по торцу давлением p = 2 МПа. Упругие постоянные резины: E = 40 МПа, μ = 0,45; алюминия: $E = 7 \cdot 10^4$ МПа. Трением между трубкой, цилиндром и жёстким основанием пренебречь.

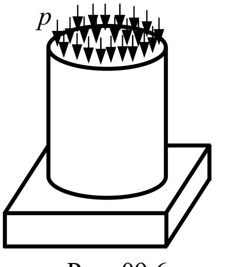


Рис. 09.6

1.17. Олимпиада 2010 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС

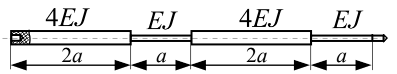


Рис. 10.1

10.1 Определить величину изгибающего момента M, при котором торцевые сечения прямолинейного упругого стержня (рис. 10.1) сомкнутся, образуя брус малой кривизны с замкнутым гладким контуром. Дано: a, EJ.

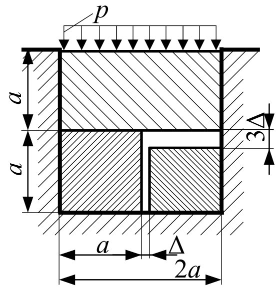


Рис. 10.2

10.2 Два кубика вставлены, как показано на рис. 10.2, в жёлоб и нагружены сверху пуансоном (давление приложено только над кубиками). Принимая жёлоб и пуансон абсолютно гладкими, жёсткими и бесконечными, определить минимальную величину прикладываемого к пуансону давления, при котором будут перекрыты зазоры. Дано: a, μ = 0,25, $3\Delta \ll a$.

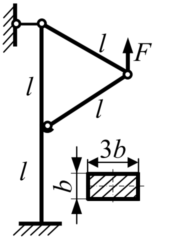


Рис. 10.3

10.3 Для приведённой балочно-стержневой конструкции (рис. 10.3) определить вертикальное перемещение точки приложения силы. Деформации считать малыми. Все стержни имеют одинаковое сечение. Дано: b, $l = 15b$, E, F.

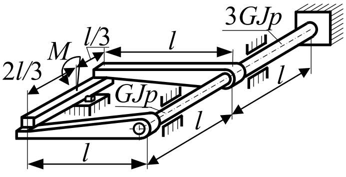


Рис. 10.4

10.4 Вал, состоящий из двух участков разной крутильной жёсткости (рис. 10.4), сочленён с двумя абсолютно жёсткими брусьями. На свободные концы брусьев оказывает давление абсолютно жёсткое коромысло, к которому прикладывается момент (в вертикальной плоскости, параллельной оси вала). Определить угол поворота коромысла. Деформации и перемещения считать малыми. Дано: l, M, GJ_p.

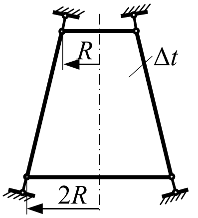


Рис. 10.5

10.5 Тонкостенная шарнирно-закреплённая оболочка в форме усечённого конуса (рис. 10.5) нагревается на Δt. Определить допускаемую степень нагрева. Дано: α, E, R, $\sigma_т$, $n_т$.

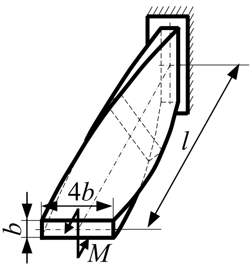


Рис. 10.6

10.6 Определить горизонтальное перемещение торцевого сечения спиралевидного бруса (рис. 10.6), нагруженного изгибающим моментом. Дано: b, E, M, $l >> b$.

1.18. Олимпиада 2011 г., г. Пермь, ПНИПУ

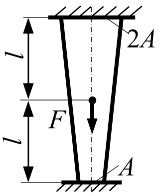


Рис. 11.1

11.1 Дан брус переменного сечения (рис. 11.1), нагруженный в центре силой F. В каком сечении стержня возникает максимальное по модулю нормальное напряжение?

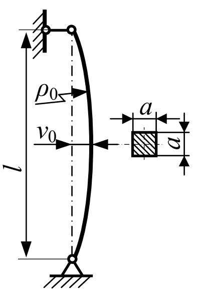


Рис. 11.2

11.2 Имеется стержень с начальным несовершенством, выгнутый по дуге окружности большого радиуса со стрелой прогиба в центре v_0 (рис. 11.2). Как необходимо нагреть стержень, чтобы он стал прямым, если коэффициент температурного расширения равен α?

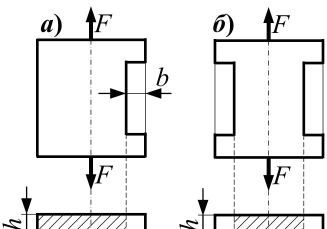


Рис. 11.3

11.3 При каких значениях $\dfrac{b}{a} = \lambda$ максимальное нормальное напряжение в первом брусе станет больше, чем во втором (рис. 11.3)?

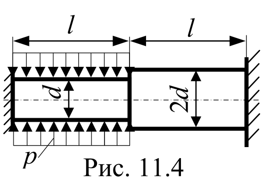


Рис. 11.4

11.4 Дан двухступенчатый брус, защемлённый по концам в заделки (рис. 11.4). Левая часть бруса нагружена давлением p. Найти изменение объёма бруса.

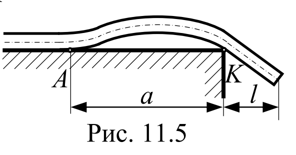


Рис. 11.5

11.5 Бесконечный стержень, имеющий плотность ρ, лежит на абсолютно жёстком столе таким образом, что его конец выдвинут за край стола на участок длиной l (рис. 11.5). Найти координату точки касания стержня со столом a.

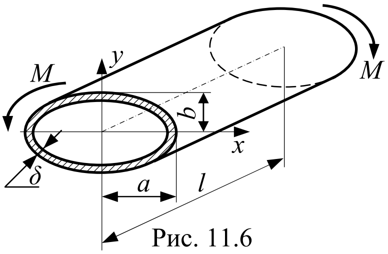


Рис. 11.6

11.6 Тонкостенная трубка эллиптического поперечного сечения ($\delta << b$) закручивается моментами M (рис. 11.6). Найти величину равнодействующей касательных напряжений в первой четверти сечения: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

1.19. Олимпиада 2012 г., г. Самара, СГАУ

12.1 Абсолютно жёсткий брус (рис. 12.1) подвешен через равные расстояния на пятнадцати одинаковых тягах (E, A, l) и нагружен силой F. Найти усилие в 10-й тяге.

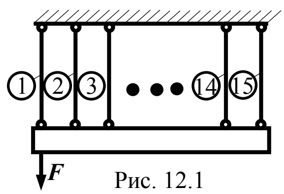


Рис. 12.1

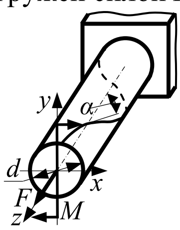


Рис. 12.2

12.2 На стержень круглого поперечного сечения (рис. 12.2) наклеена нить по винтовой линии с углом подъёма α. Найти соотношение между крутящим моментом $M_к$ и растягивающей силой F, которые прикладываются к брусу, при котором длина нити не меняется. Дано: $\alpha = 30^{\circ}$, $\mu = 0{,}25\ d$.

12.3 В каком сечении бруса (рис. 12.3) с линейно меняющейся по длине жёсткостью и нагруженном равномерно распределёнными парами сил m, будет возникать максимальный угол закручивания $\varphi_{\max}$?

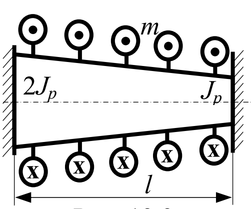


Рис. 12.3

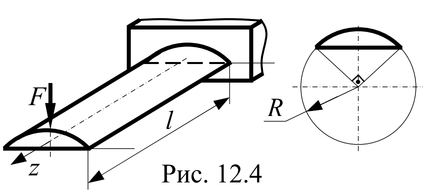


Рис. 12.4

12.4 Найти максимальное нормальное напряжение в консольной балке (рис. 12.4) при нагружении силой F. Дано: F, l, R.

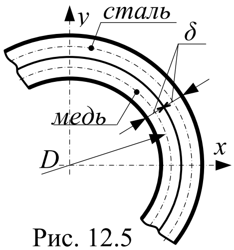


Рис. 12.5

12.5 На медную тонкостенную трубку (рис. 12.5) со средним диаметром D и толщиной стенки δ надевается стальная трубка с такой же толщиной стенки без натяга и зазора. Система в сборе нагревается на Δt. Найти контактное давление $p_к$, возникающее между трубками.

Дано: $D = 60$ мм, $\delta = 6$ мм, $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_м = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu_м = 0{,}35$, $\mu_{ст} = 0{,}24$, $\alpha_м = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ 1/град, $\alpha_{ст} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ 1/град, $\Delta t = 100^\circ$.

12.6 На горизонтальный консольно закреплённый стержень надета с трением втулка, к которой приварен вертикальный стержень (рис. 12.6). Нижний край вертикального стержня закреплён в горизонтальном направлении. Сила трения между втулкой и стержнем равна $F_{ТР}$.

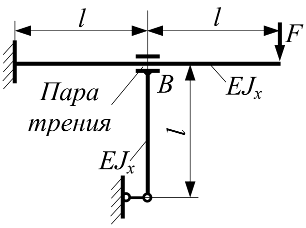


Рис. 12.6

1 Определить величину внешней силы $F = F^*$, при которой начинается проскальзывание в паре трения.

2 Определить смещение втулки B при $F = 1{,}5\ F_{ТР}$.

1.20. Олимпиада 2013 г., г. Владивосток, ДВФУ

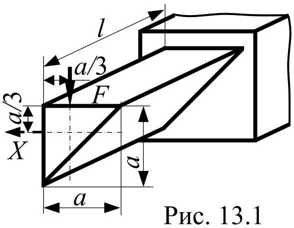


Рис. 13.1

13.1 Консольно закреплённый брус треугольного поперечного сечения (рис. 13.1) нагружен силой F. Какой силой X необходимо дополнительно нагрузить брус, чтобы его изогнутая ось располагалась в вертикальной плоскости?

13.2 Абсолютно жёсткий брус подвешен на трёх стержнях (рис. 13.2). Второй стержень имеет монтажный натяг Δ. Как нужно изменить температуру первого стержня после сборки системы, чтобы абсолютно жёсткий брус принял горизонтальное положение?

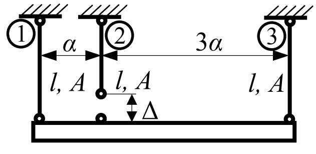


Рис. 13.2

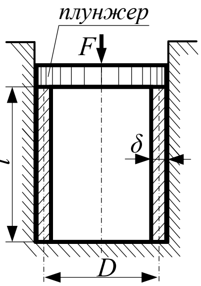


Рис. 13.3

13.3 Трубка длиной l, толщиной δ и средним диаметром $D = 20\ \delta$ (рис. 13.3) вставляется без зазора и натяга в абсолютно жёсткий и гладкий канал и нагружается через жёсткий плунжер сжимающей силой F. Определить силу F, при которой изменение длины трубки будет равно Δl, если коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$.

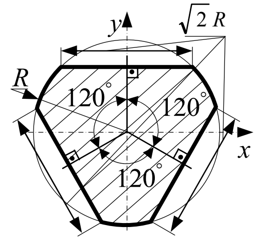


Рис. 13.4

13.4 Определить осевые моменты сопротивления W_x и W_y данной плоской фигуры (рис. 13.4).

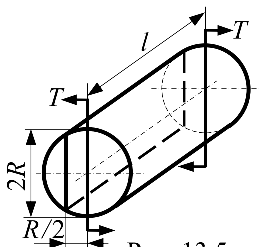


Рис. 13.5

13.5 Круглый брус (рис. 13.5) диаметром $2R$ и длиной l скручивается моментами T. Определить момент M от касательных напряжений, возникающий в продольных сечениях бруса, отстоящих от оси на расстоянии $R/2$, если $l = 20R$.

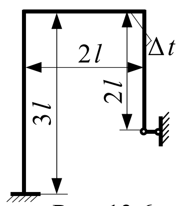


Рис. 13.6

13.6 Построить эпюру изгибающих моментов в плоской раме (рис. 13.6) при нагреве двух её элементов на Δt. Модуль Юнга равен E, коэффициент линейного температурного расширения материала α, поперечное сечение рамы – квадрат со стороной a, $l = 10a$.

1.21 Олимпиада 2014 г., г. Туапсе, РГСУ

14.1 Найти осевые моменты инерции J_x, J_y данной фигуры (рис. 14.1).

14.2 Определить перемещение узла фермы o (рис. 14.2) в направлении oc. Дано: F, E, A, l, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

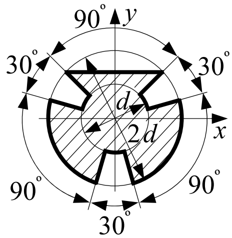


Рис. 14.1

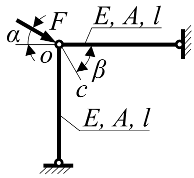


Рис. 14.2

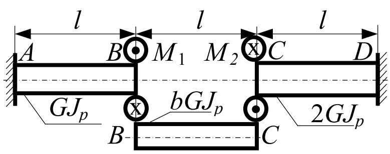


Рис. 14.3

14.3 Участки *AB* и *CD* стержня (рис. 14.3) закручиваются некоторыми моментами M_1 и M_2 на углы $2\varphi_0$ и φ_0 соответственно. Затем между участками *AB* и *CD* жестко закрепляется участок *BC*, а внешние моменты снимаются. Какой должна быть жёсткость центрального участка *BC* (каков коэффициент *b*), чтобы после монтажа взаимный угол поворота сечений *B* и *C* составлял $\varphi_{BC} = 2\varphi_0$. Построить эпюры крутящего момента и угла закручивания для этого случая.

14.4 Найти усилия в стержнях *1* и *2* (рис. 14.4) при нагревании второго на Δt с учётом податливости горизонтальной балки. Дано: $\Delta t,\ d,\ E_1 = 100E,\ E_2 = E,\ l = 10d$.

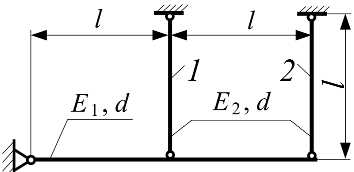


Рис. 14.4

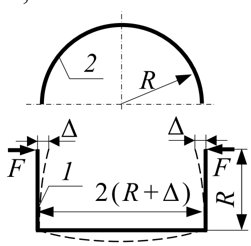


Рис. 14.5

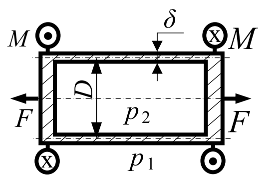


Рис. 14.6

14.5 П-образная рама *1* сжимается силами *F* так, что образуются прогибы Δ (рис. 14.5). Затем к ней шарнирно присоединяется полукруглая рама *2* и нагрузка снимается. Построить эпюру изгибающих моментов в получившейся конструкции после монтажа, считая $\Delta \ll R$. Дано: $E,\ J_x,\ \Delta,\ R$.

14.6 Определить, какими должны быть приложенные к трубке сила *F* и момент *M* (рис. 14.6), чтобы в центральной части трубки (удалённой от днищ), возникало напряжённое состояние «чистый сдвиг» и чему равны при этом касательные напряжения?

Дано $D = 20\delta$, $p_1 = p$, $p_2 = 1{,}16p$.

1.22 Олимпиада 2015 г., г. Казань, КГАСУ

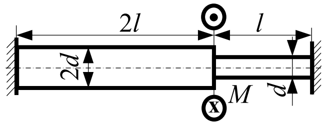


Рис. 15.1

15.1 На сколько нужно нагреть правый участок бруса (рис. 15.1), чтобы максимальное касательное напряжение увеличилось втрое? Дано: l, d, M, E, G, α, где α – коэффициент линейного температурного расширения материала.

15.2 Брус нагружен давлением p (рис. 15.2). Чему должен быть равен коэффициент Пуассона μ материала бруса, чтобы сила реакции в левой заделке была равна нулю?

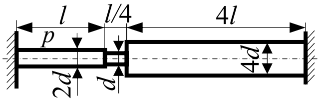


Рис. 15.2

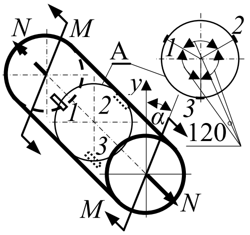


Рис. 15.3

15.3 Вал диаметром d нагружается изгибающим моментом M и нормальной силой N. На вал в некотором сечении A наклеено три тензодатчика в продольном направлении (как показано на рис. 15.3). На них наблюдаются следующие значения деформаций: $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_0$. Найти изгибающий момент, нормальную силу и угол α между плоскостью момента и осью y. Дано: d, E, ε_0.

15.4 Определить вертикальное перемещение точки K упругого элемента круглого поперечного сечения в виде плоской круговой рамы (*1*) с отогнутым прямолинейным элементом (*2*) (рис. 15.4) под действием силы F. Дано: R, E, F, d, $\mu = 0{,}25$, где μ – коэффициент Пуассона.

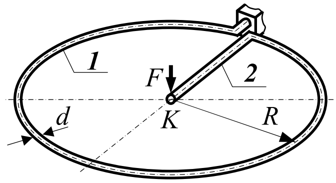


Рис. 15.4

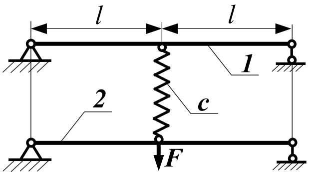


Рис. 15.5

15.5 Какой жёсткости c должна быть пружина, соединяющая две балки *1* и *2* (рис. 15.5), чтобы при нагружении системы силой F соотношение максимальных изгибающих моментов в балках было следующим: $M_{\max}^{(1)} = 0{,}1M_{\max}^{(2)}$. Жёсткости балок одинаковы. Дано: E, J_x, l.

15.6 Брус, соединённый с абсолютно жёстким диском (рис. 15.6), висящим на двадцати равномерно расположенных балках, нагружается силой F. Определить перемещение точки приложения силы o, считая, что потеря устойчивости бруса исключена. Дано: F, l, E, $a = l/20$, $b = l/10$.

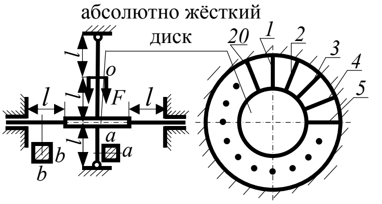


Рис. 15.6

Часть 2. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.1. *Олимпиада 1994 г., г. Самара, СГАУ*

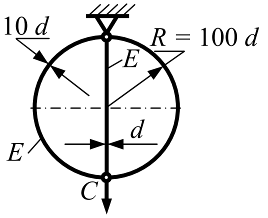


Рис. 94.1

94.1 Найти перемещение узла C (рис. 94.1). Дано: F, E, d.

РЕШЕНИЕ

Перемещение узла C (рис. 94.1 Р) $w_C = \dfrac{F}{K}$, жёсткость системы $K = 2K_1 + K_2$.

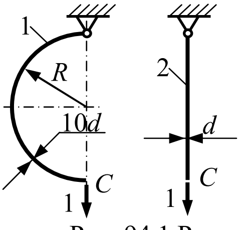


Рис. 94.1 Р

Элемент 1: $\delta_{11} = \dfrac{\pi R^3}{2EJ}$,

$$K_1 = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{2E\pi(10d)^4}{\pi(100d)^3\,64} = 3{,}125\cdot 10^{-4}\,Ed.$$

Элемент 2: $\delta_{22} = \dfrac{2R}{EA}$, $K_2 = \dfrac{1}{\delta_{22}} = \dfrac{E\pi\, d^2}{2\cdot 100d\cdot 4} = 39{,}270\cdot 10^{-4}\,Ed$.

Следовательно,

$K = 2K_1 + K_2 = 2\cdot 3{,}125\cdot 10^{-4}\,Ed + 39{,}270\cdot 10^{-4}\,Ed = 45{,}52\cdot 10^{-4}\,Ed$ и

$$w_C = \frac{F}{K} = \frac{F}{45{,}52\cdot 10^{-4}\,Ed} = 219{,}7\,\frac{F}{Ed}.$$

Ответ: $w_C = 219{,}7\,\dfrac{F}{Ed}$.

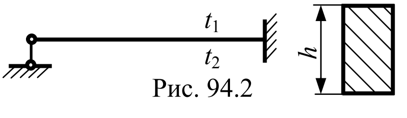


Рис. 94.2

94.2 Изменение температуры по высоте балки равно $\Delta t = t_2 - t_1$ (рис. 94.2). Найти наибольшее нормальное напряжение.

Дано: $E = 2\cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 12\cdot 10^{-6}$ 1/град, $\Delta t = 50^\circ$C.

РЕШЕНИЕ

Температурные перемещения в основной системе (рис. 94.2 Р) аналогичны перемещениям при нагружении парой сил

$$M = \frac{EJ}{\rho} = \frac{EJ\,\varepsilon}{y} = \frac{EJ\,\alpha\,\Delta t}{h}.$$

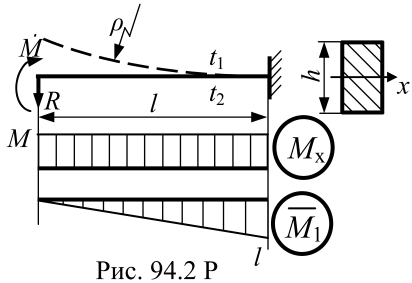


Рис. 94.2 Р

Раскрываем статическую неопределимость методом сил:

$$R = \frac{\Delta_{1X}}{\delta_{11}} = \frac{M\cdot l\cdot \frac{1}{2}l}{\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot \frac{2}{3}l} = \frac{3EJ\,\alpha\,\Delta t}{2lh}.$$

Наибольшее напряжение

$$\sigma_{наиб} = \frac{R\cdot l}{W} = \frac{3E\,\alpha\,\Delta t}{2h}\cdot\frac{J}{W} = \frac{3}{4}E\,\alpha\,\Delta t = \frac{3}{4}\cdot 2\cdot 10^{5}\cdot 12\cdot 10^{-6}\cdot 50 = 90{,}0 \text{ МПа}.$$

Ответ: $\sigma_{наиб} = 90{,}0\,\text{МПа}$.

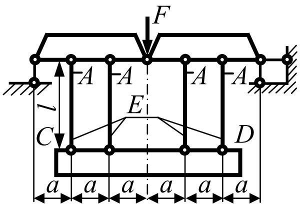


Рис. 94.3

94.3 Траверса *CD* (рис. 94.3) получила перемещение δ. Найти F.
Дано: E, A, l, δ.

РЕШЕНИЕ

Из условия равновесия всей системы реакции опор равны $\frac{F}{2}$. Из условия равновесия отсечённой части (рис. 94.3 Р) следует:

$$N_1 = -\frac{3F}{2},\; N_2 = \frac{3F}{2}.$$

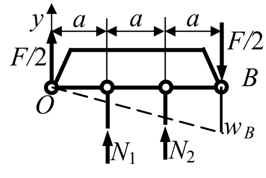


Рис. 94.3 Р

Приравнивая работу внешней силы к потенциальной энергии деформации стержней:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{F}{2}\cdot w_B = 2\frac{\left(\frac{3}{2}F\right)^2 l}{2EA}, \text{ находим } w_B = \frac{9Fl}{EA}.$$

Перемещение траверсы

$$\delta = \frac{1}{3} w_B + \Delta l_1 = \frac{9Fl}{3EA} + \frac{3Fl}{2EA} = \frac{9Fl}{2EA}, \text{ следовательно, } F = \frac{2EA\delta}{9l}.$$

Ответ: $F = \dfrac{2EA\delta}{9l}$.

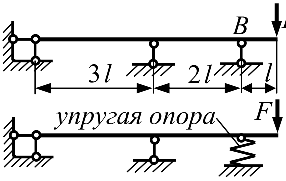


Рис. 94.4

94.4 Жёсткая опора B заменена на упругую (рис. 94.4). Какова должна быть жёсткость этой опоры, чтобы замена не повлияла на величину коэффициента запаса? Дано: E, J, l.

РЕШЕНИЕ

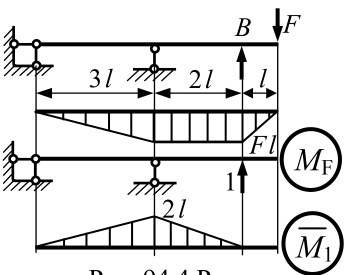


Рис. 94.4 Р

Условие неизменности коэффициента запаса выполняется, если реакция R упругой опоры B не меньше F, т.е. $R \geq F$.

Эпюра изгибающих моментов при $F = R$ показана на рис. 94.4 Р.

Способом Верещагина определяем осадку пружины $\lambda = \dfrac{4Fl^3}{EJ}$.

Условие задачи выполнено, если $\dfrac{F}{K} \leq \lambda$. Тогда $K \geq \dfrac{EJ}{4l^3}$.

Ответ: Жёсткость упругой опоры должна быть – $K \geq \dfrac{EJ}{4l^3}$.

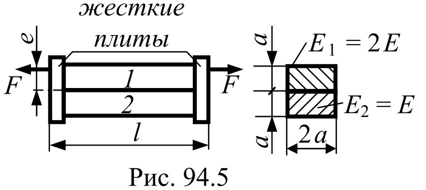


Рис. 94.5

94.5 При каком эксцентриситете e (рис. 94.5) стержни *1* и *2* не подвергаются изгибу? Размер a задан.

РЕШЕНИЕ

Уравнение равновесия отсечённой части (рис. 94.5 Р)

$$\Sigma z = 0, \qquad N_1 + N_2 = F,$$

$$\Sigma M_o = 0, \quad (N_1 - N_2)\frac{a}{2} = F e.$$

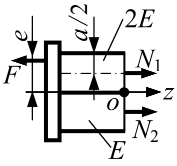


Рис. 94.5 Р

При отсутствии изгиба удлинения стержней одинаковы:

$$\frac{N_1 \cdot l}{2E \cdot 2a^2} = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot 2a^2}\text{, т.е. } N_1 = 2 \cdot N_2.$$

Следовательно, $3N_2 = F$, $N_2 = \dfrac{2Fe}{a}$, $N_1 = \dfrac{4Fe}{a}$, $e = \dfrac{a}{6}$.

Ответ: Эксцентриситет $e = \dfrac{a}{6}$.

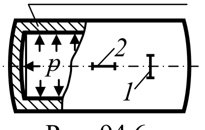


Рис. 94.6

94.6 Показания тензорезисторов *1* и *2* (рис. 94.6) на поверхности тонкостенной оболочки отличаются в 5 раз. Найти коэффициент Пуассона μ.

РЕШЕНИЕ

Известно, что в тонкостенной цилиндрической оболочке, нагруженной внутренним давлением, $\sigma_t = 2 \cdot \sigma_m$ (рис. 94.6 Р). Тогда меридиональные и окружные деформации

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_m - \mu \cdot 2\sigma_m) = \frac{\sigma_m}{E}(1 - 2\mu),$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (2\sigma_m - \mu \cdot \sigma_m) = \frac{\sigma_m}{E}(2 - \mu).$$

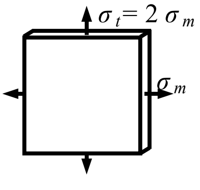


Рис. 94.6 Р

Так как $\dfrac{\varepsilon_t}{\varepsilon_m} = \dfrac{2 - \mu}{1 - 2\mu} = 5$, то $\mu = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: Коэффициент Пуассона $\mu = \dfrac{1}{3}$.

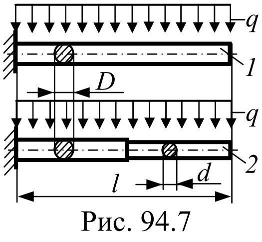


Рис. 94.7

94.7 Каков наибольший процент экономии материала при замене балки *1* на балку *2* (рис. 94.7) без снижения прочности?

РЕШЕНИЕ

Условие равнопрочности участков балки (рис. 94.7 Р)

$\dfrac{ql^2}{2\cdot 0{,}1D^3} = \dfrac{q(kl)^2}{2\cdot 0{,}1d^3}$, следовательно, $d = Dk^{\frac{2}{3}}$.

Объёмы балок *1* и *2* соответственно равны

$$V_1 = \frac{\pi D^2}{4} l,$$

$$V_2 = \frac{\pi D^2}{4} l\,(1-k) + \frac{\pi d^2}{4} kl = \frac{\pi D^2}{4} l\,(k^{\frac{7}{3}} + 1 - k).$$

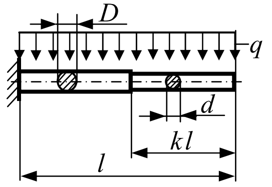


Рис. 94.7 Р

Из условия $\dfrac{dV_2}{dk} = 0$ находим $k = \left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{3}{4}}$, при котором объём V_2 минимален.

Тогда

$$\Delta = \frac{V_1 - V_2}{V_1}\cdot 100 = 100k\,(1 - k^{\frac{4}{3}}) = 100\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(1 - \frac{3}{7}\right) = 30{,}3\%.$$

Ответ: Экономия материала 30,3%.

2.2. *Олимпиада 1995 г., г. Челябинск, ЧГТУ*

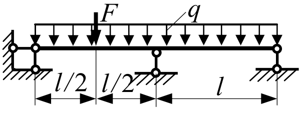


Рис. 95.1

95.1 При каком значении силы F отсутствует реакция правой опоры (рис. 95.1)? Дано: q, l.

РЕШЕНИЕ

Силовая схема и эпюра изгибающих моментов (использован принцип суперпозиции) при отсутствии реакции опоры R показаны на рис. 95.1 Р. Находим перемещение v_K, используя эпюру $\overline{M}_1$ и учитывая, что $v_K = 0$, получаем

$$v_K = 2\left(\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot\frac{3}{4}l\right) - \frac{1}{2}\frac{Fl}{4}\cdot l\cdot\frac{1}{2}l = 0,$$

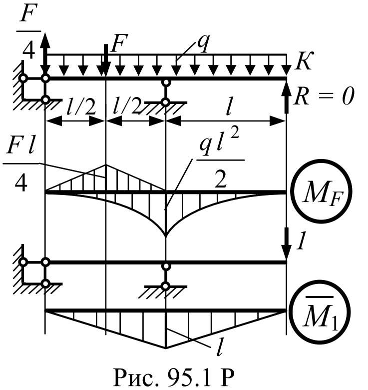


Рис. 95.1 Р

следовательно $F = 4ql$.

Ответ: Реакция правой опоры отсутствует при $F = 4ql$.

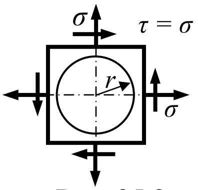


Рис. 95.2

95.2 Найти размеры и направление полуосей эллипса, в который переходит окружность при деформации элемента (рис. 95.2). Дано: σ, E, μ.

РЕШЕНИЕ

Определяем главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3, положение главных площадок I и II аналитически (рис. 95.2 Р, *а*, *б*):

$\sigma_{I,II} = \frac{1}{2}\left[\sigma + \sigma \pm \sqrt{(\sigma - \sigma)^2 + 4\sigma^2}\right] = \sigma \pm \sigma$, $\sigma_1 = 2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$,

$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$, $\alpha_0 = 45^\circ$ или графически (рис. 95.2 Р, *г*): $\sigma_1 = OA = 2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\alpha_0 = 45^\circ$.

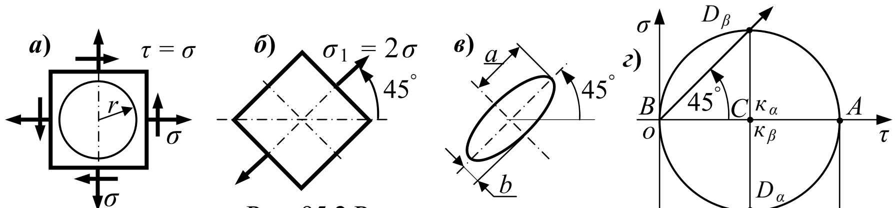


Рис. 95.2 Р

Вычислив деформации $\varepsilon_1 = \frac{2\sigma}{E}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu\frac{2\sigma}{E}$, находим размеры полуосей эллипса

$$a = r(1 + \varepsilon_1) = r\left(1 + \frac{2\sigma}{E}\right),\ b = r(1 + \varepsilon_2) = r\left(1 - \mu\frac{2\sigma}{E}\right).$$

Ответ: Параметры эллипса: $a = r\left(1 + \frac{2\sigma}{E}\right)$,

$$b = r\left(1 - \mu\frac{2\sigma}{E}\right),\ \alpha_0 = 45^\circ.$$

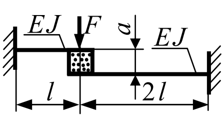


Рис. 95.3

95.3 При каком значении силы F будет разрушен бетонный кубик с ребром a (рис. 95.3)? Дано: a, l, EJ, $\sigma_в$ – предел прочности бетона.

РЕШЕНИЕ

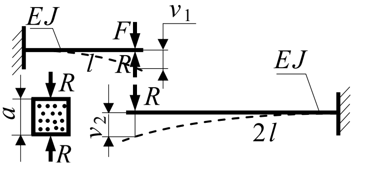


Рис. 95.3 Р

Бетонный кубик разрушается при $R=\sigma_в a^2$ (рис. 95.3 Р).

Так как $v_1 = v_2$, то

$$\frac{(F-R)l^3}{3EJ}=\frac{R(2l)^3}{3EJ}$$ и

$F=9R=9\sigma_в a^2$.

Ответ: Бетонный кубик разрушается при $F=9\sigma_в a^2$.

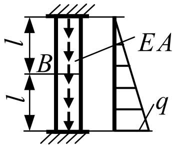


Рис. 95.4

95.4 Стержень нагружен осевыми силами с линейным изменением их интенсивности (рис. 95.4). Найти перемещение сечения *B*. Дано: *q*, *l*, *EA*.

РЕШЕНИЕ

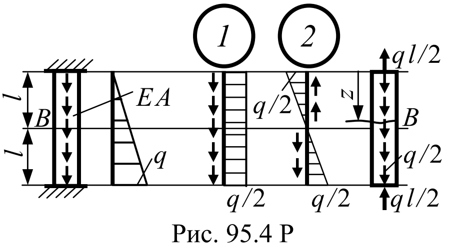


Рис. 95.4 Р

Разложим заданную нагрузку на составляющие *1* и *2* (рис. 95.4 Р). Учитывая, что при нагрузке *2* перемещение среднего сечения равно нулю, находим перемещение от нагрузки *1:*

$$w_B=\int_0^l \frac{\left(\frac{ql}{2}-\frac{q}{2}z\right)dz}{EA}=\frac{ql^2}{4EA}.$$

Ответ: Сечение *B* перемещается вверх на $w_B=\dfrac{ql^2}{4EA}$.

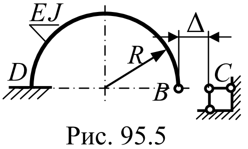


Рис. 95.5

95.5 Концевое сечение *B* соединяется с неподвижным шарниром *C* (рис. 95.5). Найти изгибающий момент в сечении *D*. Дано: Δ, *R*, *EJ*.

РЕШЕНИЕ

Задача статически неопределима. Для определения X_1 и X_2 (рис. 95.5 Р) составим уравнения перемещений

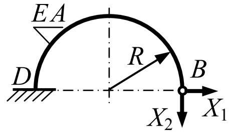


Рис. 95.5 Р

$$\Delta_{1F} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = \Delta ,$$

$$\Delta_{2F} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 .$$

Учитывая, что $M_F = 0$, $\overline{M}_1 = R \sin \alpha$, $\overline{M}_2 = -R(1 - \cos \alpha)$, находим

$$\Delta_{1F} = \Delta_{2F} = 0 ,\ EJ\delta_{11} = \int_0^{\pi} (R \sin \alpha)^2 \, R\, d\alpha = \frac{\pi R^3}{2} ,$$

$$EJ\delta_{22} = \int_0^{\pi} R^2 (1 - \cos \alpha)^2 \, R\, d\alpha = \frac{3\pi R^3}{2} ,$$

$$EJ\delta_{12} = EJ\delta_{21} = -\int_0^{\pi} R \sin \alpha\, R(1 - \cos \alpha)^2 \, R\, d\alpha = -2R^3$$

и решая систему уравнений, получаем

$$X_1 = \frac{6\pi EJ}{3\pi^2 - 16} \cdot \frac{\Delta}{R^3} ,\ X_2 = \frac{8EJ}{3\pi^2 - 16} \cdot \frac{\Delta}{R^3} .$$

Следовательно,

$$M = X_2 \cdot 2R = \frac{16EJ}{3\pi^2 - 16} \cdot \frac{\Delta}{R^2} .$$

Ответ: Изгибающий момент в сечении D – $M_D = \dfrac{16EJ}{3\pi^2 - 16} \cdot \dfrac{\Delta}{R^2}$.

95.6 При сборке стержневой системы сечения A стержня *1* и трубки *2* были взаимно повёрнуты на угол β, а затем соединены штифтом 3 (рис. 95.6). Определить потенциальную энергию деформации системы. Дано: β, l, G, J.

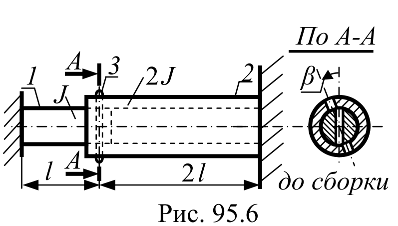


Рис. 95.6

РЕШЕНИЕ

Потенциальная энергия системы (рис. 95.6 Р) $U = \frac{1}{2}(M\varphi_1 + M\varphi_2)$, где φ_1 и φ_2 – угловые деформации сечений *A* стержня *1* и трубки *2*. Учитывая, что $\varphi_1 + \varphi_2 = \beta$, получаем $U = \frac{1}{2} M\beta$.

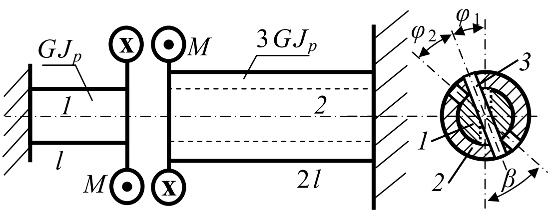


Рис. 95.6 Р

Так как $\frac{Ml}{GJ} + \frac{M \cdot 2l}{G \cdot 3J} = \beta$, то $M = \frac{3GJ}{5l} \cdot \beta$ и $U = 0{,}3\frac{GJ\beta^2}{l}$.

Ответ: Потенциальная энергия деформации системы – $U = 0{,}3\frac{GJ\beta^2}{l}$.

2.3. *Олимпиада 1996 г., г. Нижний Новгород, НГТУ*

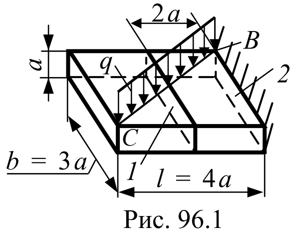


Рис. 96.1

96.1 На стальную пластинку действует нагрузка, распределённая по линии *CB* (рис. 96.1). Построив эпюры внутренних усилий, определить, во сколько раз прочность пластинки в сечении *1* больше (меньше), чем в сечении *2*. При расчёте считать справедливыми формулы для определения напряжений, полученные для брусьев постоянного сечения. При подсчёте $W_к$ принять $\alpha = 0{,}267$.

РЕШЕНИЕ

Равнодействующая распределённой нагрузки *q*, расположенной левее произвольного сечения *z* (рис. 96.1 Р),

$$R_q = q\frac{z}{\cos\beta} = \frac{5}{4}qz, \text{ где } \cos\beta = \frac{4}{5}.$$

В сечении, отстоящем на расстоянии *z*:

$$Q_q = -R_q = -\frac{5}{4} q z,$$

$$M_x = -R_q \cdot \frac{z}{2} = -\frac{5}{8} q z^2,$$

$$M_z = R_q \cdot \left(\frac{3a}{2} - \frac{z}{2} tg\,\beta \right) = \frac{15}{8} q z \left(a - \frac{z}{4} \right).$$

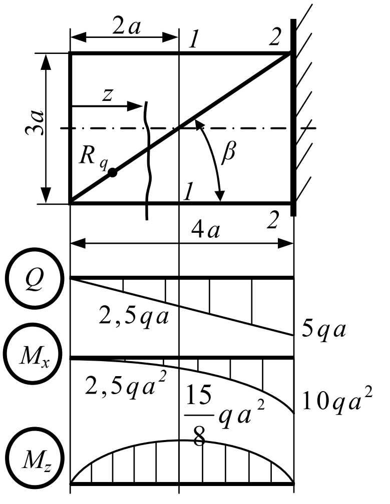


Рис. 96.1 Р

В сечении *2* в опасной точке действуют только напряжения от изгиба

$$(\sigma_z)_2 = \frac{M_{x_2}}{W_x} = \frac{10 q a^2}{\frac{3a \cdot a^2}{6}} = \frac{20 q}{a}.$$

В сечении *1* возникают напряжения от кручения и изгиба

$$(\sigma_z)_1 = \frac{M_{x_1}}{W_x} = \frac{2{,}5 q a^2}{\frac{3a \cdot a^2}{6}} = \frac{5q}{a},$$

$$(\tau_{zx})_1 = \frac{M_{z_1}}{W_к} = \frac{\frac{15}{8} q a^2}{0{,}267 \cdot 3a \cdot a^2} = 2{,}341 \frac{q}{a},$$

$$(\sigma_{экв_{III}})_1 = \sqrt{(\sigma_z)_1^2 + 4 \cdot (\tau_{zx})_1^2} = 6{,}850 \frac{q}{a}.$$

Сравнивая напряжения, видим, что

$$\frac{(\sigma_z)_2}{(\sigma_{экв_{III}})_1} = \frac{20}{6{,}85} = 2{,}92 \text{ раза.}$$

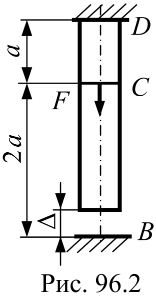


Рис. 96.2

Ответ: Прочность пластинки в сечении *1* в 2,92 раза меньше, чем в сечении *2*.

96.2 Брус растянули силой *F*, перекрывающей зазор Δ (рис. 96.2). В момент касания нижнего торца бруса с опорой *B* его приварили к ней сваркой, после чего силу *F* сняли. Определить остаточные усилия в брусе и положение сечения *C* после разгрузки, полагая напряжения, возникающие в брусе, упругими. При расчёте считать $\Delta << a$. Жёсткость поперечного сечения бруса принять равной EA.

РЕШЕНИЕ

Определим силу, перекрывающую зазор Δ,

$$\frac{F\,a}{E\,A} = \Delta, \quad \text{откуда}$$

$$F = \frac{E\,A}{a}\Delta.$$

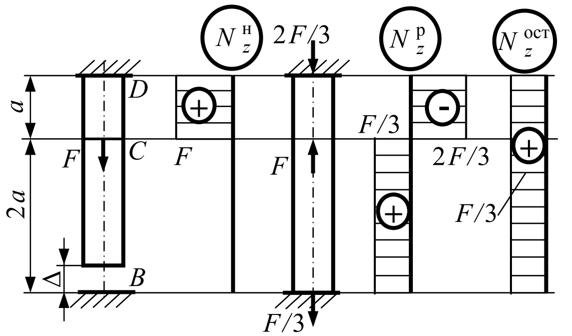


Рис. 96.2 Р

Разгрузка равносильна приложению силы в обратном направлении (рис. 96.2 Р).

Рассчитав статически неопределимую систему, находим реакции в опорах и строим эпюру N_z^p при разгрузке. Складывая эпюры при нагружении и разгрузке, построим эпюру остаточных усилий.

Положение сечения C после разгрузки найдём по выражению:

$$\Delta_C = \frac{N_z^{ост}\,a}{E\,A} = \frac{F\,a}{3E\,A} = \frac{\Delta}{3}.$$

Ответ: Остаточная сила в стержне равна $F/3$, сечение C переместится вверх на $\Delta/3$.

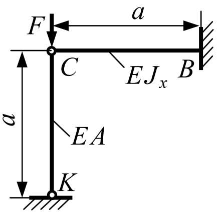


Рис. 96.3

96.3 Конструкция состоит из упругой балки CB и связанной с ней тонкой упругой струны CK (рис. 96.3). В процессе монтажа конструкции струну натянули так, что после окончания сборки она оказалась растянутой силой F_0. На собранную конструкцию приложили силу F. Построить график, характеризующий зависимость перемещения точки C от силы F при $2F_0 > F > 0$, $Aa^2/J_x = 5$.

РЕШЕНИЕ

Пока сила F мала, система работает как статически неопределимая.

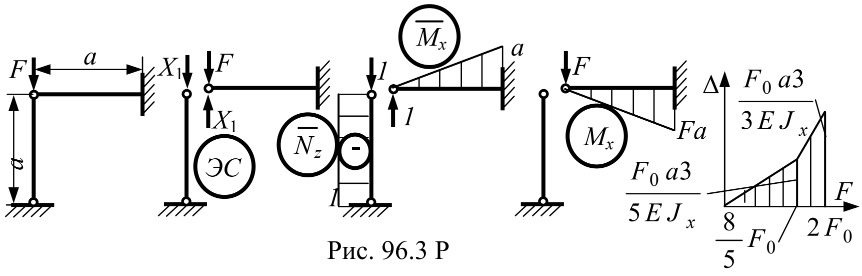


Рис. 96.3 Р

Раскроем статическую неопределимость рамы:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\frac{2}{3}a\right) + \frac{1\cdot a\cdot 1}{EA} = \frac{a^3}{3EJ_x}\left(1+\frac{3J_x}{Aa^2}\right) = \frac{8}{15}\frac{a^3}{EJ_x};$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}\cdot Fa\cdot a\cdot\frac{2}{3}a\right) = -\frac{Fa^3}{3EJ_x}; \qquad X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{5}{8}F.$$

При $\frac{5}{8}F = F_0$ или $F = \frac{8}{5}F_0$ струна выйдет из работы; в этот момент на балку действует сила $F_б = \frac{3}{8}F = \frac{3}{8}\cdot\frac{8F_0}{5} = \frac{3}{5}F_0$. Прогиб в точке C балки будет равен $\Delta_C = \frac{F_б a^3}{3EJ_x} = \frac{F_0 a^3}{5EJ_x}$.

При дальнейшем увеличении нагрузки возрастающая сила будет деформировать только балку; полное перемещение точки C балки при этом будет равно

$$\Delta'_C = \frac{F_0 a^3}{5EJ_x} + \frac{\frac{2}{5}F_0 a^3}{3EJ_x} = \frac{F_0 a^3}{3EJ_x}.$$

Строим график перемещений.

Ответ: График зависимости перемещения точки C от нагрузки показан на рис.96.3 Р.

96.4 Диаметр бруса круглого сечения изменяется по закону $d_z = d_0\left(1+\frac{3z}{l}\right)$. Он закручен равномерно распределённым

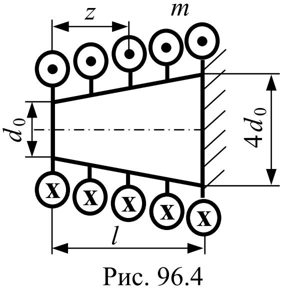


Рис. 96.4

скручивающим моментом интенсивности m (рис. 96.4). Определить максимальные напряжения в брусе. Модуль сдвига материала бруса равен G. Гипотезу плоских сечений для бруса считать справедливой.

РЕШЕНИЕ

Крутящий момент в произвольном сечении z: $M_z = m z$.

Максимальные напряжения в этом сечении

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{m z \cdot 16}{\pi d_0^3 \left(1 + \frac{3z}{l}\right)^3}.$$

Исследуем эти напряжения на экстремум

$$\frac{d\tau_{\max}}{dz} = \frac{16m}{\pi d_0^3}\left[\left(1+\frac{3z}{l}\right)^3 - 3\left(1+\frac{3z}{l}\right)^2 \cdot \frac{3z}{l}\right] = 0.$$

Отсюда находим положение опасного сечения $z = \frac{l}{6}$.

В этом сечении $\tau_{\max} = \frac{64 m l}{81 \pi d_0^3}$.

Ответ: Максимальные напряжения в брусе $\tau_{\max} = \frac{64 m l}{81 \pi d_0^3}$ возникают при $z = \frac{l}{6}$.

96.5 Средняя опора C балки квадратного сечения получила осадку Δ (рис. 96.5). Как изменятся наибольшие нормальные напряжения в балке, если при тех же условиях балка будет заменена балкой круглого сечения той же высоты? Дайте обоснование Вашему заключению.

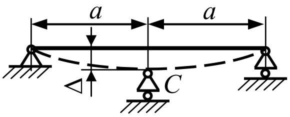


Рис. 96.5

РЕШЕНИЕ

Заданная система статически неопределимая. Реакция в средней опоре X_1 может быть найдена из канонического уравнения метода сил: $\delta_{11} X_1 + \Delta = 0$.

Так как величина δ_{11} обратно пропорциональна J_x, то X_1 и зависящий от него момент в опорном сечении C балки будут пропорциональны J_x: $M_C = \kappa J_x$.

Максимальные напряжения над опорой

$$\sigma_{\max} = \frac{M_C}{J_x} \left| y \right|_{наиб} = \kappa \left| y \right|_{наиб}.$$

Поскольку в балках круглого и квадратного поперечных сечений $\left| y \right|_{наиб}$ одинакова, то напряжения не изменяются.

Ответ: Напряжения в круглой балке будут такие же, как и в квадратной.

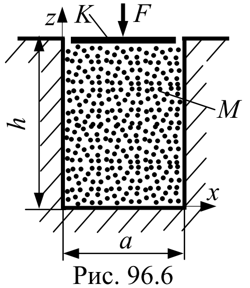


Рис. 96.6

96.6 В абсолютно жёстком материале сделано гнездо квадратного сечения $a \times a$ высотой h (рис. 96.6). В нём силой F сжат материал M с упругими константами E, ν. Определить, пренебрегая трением со стенками, на сколько поднимется крышка K, если материал M нагреть на t°. Коэффициент линейного расширения материала равен α.

РЕШЕНИЕ

При нагревании материала со стороны крышки и стенок гнезда на материал будут действовать распределённые напряжения:

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} = -\frac{F}{a^2}, \qquad \sigma_x = \sigma_y = -p.$$

Величину давления p найдём из условия

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \right] + \alpha t = 0, \text{ отсюда}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\nu F}{a^2 (1 - \nu)} - \frac{\alpha t E}{1 - \nu}.$$

Перемещения материала вдоль оси z:

$$\Delta l_z = \varepsilon_z \cdot h = \frac{h}{E} \cdot \left[\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \right] + \alpha t h = \frac{(1+\nu) h}{1 - \nu} \left[-\frac{F(1 - 2\nu)}{E a^2} + \alpha t \right].$$

Первый член этого уравнения показывает, на сколько переместится крышка K от силы F, а второй – от повышения температуры.

Ответ: Крышка поднимется на

$$\Delta l_z = \frac{(1+\nu)h}{1-\nu}\left[-\frac{F(1-2\nu)}{Ea^2} + \alpha t\right].$$

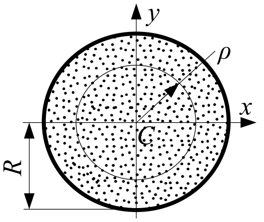


Рис. 96.7

96.7 Стержень круглого поперечного сечения сделан из пористого материала, причём плотность пор пропорциональна расстоянию от центра C (рис. 96.7). В целом поры ослабляют сечение на 25%. Определить осевой момент инерции сечения относительно горизонтальной оси x.

РЕШЕНИЕ

Элементарная кольцевая площадка dA_0 (рис. 96.7.Р) на расстоянии ρ от оси стержня z равна

$$dA_0 = 2\pi\rho\, d\rho \cdot \left(1 - \frac{\kappa_0 \rho}{R}\right),$$

где κ_0 – коэффициент плотности пор на радиусе ρ.

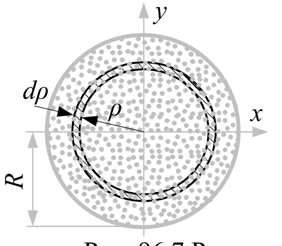


Рис. 96.7 Р

Заполненная площадь сечения

$$A_0 = \int_0^R dA_0 = \int_0^R 2\pi\rho\left(1 - \frac{\kappa_0 \rho}{R}\right) d\rho = 0{,}75\pi R^2,$$

откуда $\kappa_0 = 3/8$.

Тогда

$$J_x = \frac{J_p}{2} = \frac{1}{2}\int_0^R \rho^2\, dA_0 = \frac{1}{2}\int_0^R 2\pi\rho^3\left(1 - \frac{3\rho}{8R}\right) d\rho = \frac{7\pi R^4}{40}.$$

Ответ: Осевой момент инерции поперечного сечения стержня

$$J_x = \frac{7\pi R^4}{40}.$$

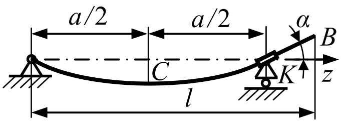


Рис. 96.8

96.8 Балка постоянного сечения закреплена на двух опорах (рис. 96.8). Левая опора – шарнирно неподвижная, правая – в виде короткой трубки, которая под малым углом α наклонена к оси z и может свободно перемещаться вдоль этой оси, изгибая балку. При каком a прогибы в точках C и B будут равны по абсолютному значению? Трением между трубкой и балкой пренебречь.

РЕШЕНИЕ

В правой опоре K возникают момент M и реактивная сила M/a.

Искомый размер a найдём из условия:

$$\left| y \right|_C = y_B = \theta_к \cdot (l - a). \quad (1)$$

Для определения прогиба в точке C и угла поворота в правой опоре K приложим в направлении искомых перемещений единичные силовые факторы, как показано на рис. 96.8 Р.

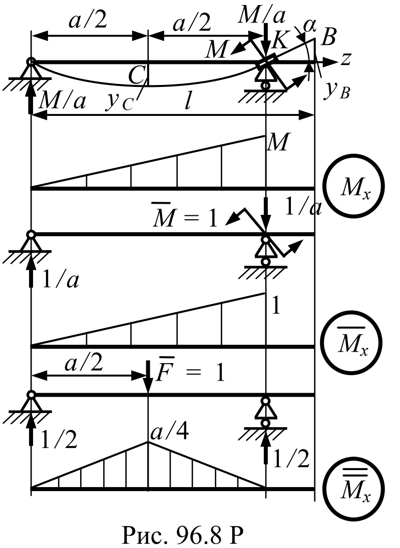


Рис. 96.8 Р

Перемножая эпюры способом Верещагина, найдем:

$$\theta_K = \frac{\frac{1}{2} M \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}{E J_x} = \frac{M a}{3 E J_x},$$

$$y_C = \frac{\frac{1}{2} \frac{a}{4} \cdot a \cdot \frac{M}{2}}{E J_x} = \frac{M a^2}{16 E J_x}.$$

Для заданной конструкции $\theta_K = \alpha$ и, следовательно, $M = \dfrac{3 \alpha E J_x}{a}$.

Из условия (1) найдём a: $\dfrac{3 \alpha a}{16} = \alpha (l - a)$, откуда $a = \dfrac{16}{19} l$.

Ответ: При $a = \dfrac{16}{19} l$ прогибы в точках C и B будут равны по абсолютному значению.

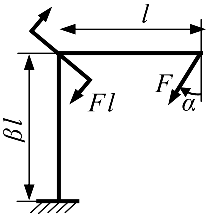


Рис. 96.9

96.9 Определить при каких величинах α и β максимальный изгибающий момент в раме (рис. 96.9) будет иметь наименьшее значение (по абсолютной величине).

РЕШЕНИЕ

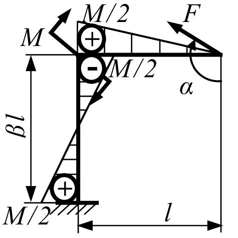


Рис. 96.9 Р

Чтобы максимальный изгибающий момент в раме был наименьшим по абсолютной величине, изгибающие моменты в опасных сечениях нужно уравнять, то есть должны выполняться следующие условия (рис. 96.9Р):

$$M_{x1} = -M_{x2} = -F \cdot \cos\alpha \cdot l = \frac{M}{2};$$

$$M_{x3} = -M - F \cdot \cos\alpha \cdot l + F \cdot \sin\alpha \cdot \beta l \le \frac{M}{2}.$$

Подставляя в эти условия значение $M = F \cdot l$, получим

$$\cos\alpha = -\frac{M}{2 \cdot l} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 120^\circ; \quad \beta \le \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155.$$

Ответ: Максимальный изгибающий момент в раме будет иметь наименьшее по абсолютной величине значение при α = 120°, β = 1,155.

2.4. *Олимпиада 1997 г., г. Новочеркасск, НГТУ*

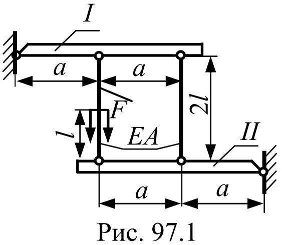


Рис. 97.1

97.1 Доказать, что работа силы F равна потенциальной энергии деформации стержневой системы (рис. 97.1). Дано: F, l, EA. Деформациями стержней *I* и *II* пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Левый стержень имеет два участка. Из уравнений равновесия обеих частей системы (рис. 97.1 Р, *а*)

$$\sum m_{o_2} = N_2 \cdot a - N_1 \cdot 2a = 0,$$

$$\sum m_{o_1} = N_2 \cdot 2a - (F + N_1) \cdot a = 0$$

следует, что $N_1 = \frac{F}{3}$,

$N_2 = \frac{2F}{3}$,

$N_3 = N_1 + F = \frac{4F}{3}$.

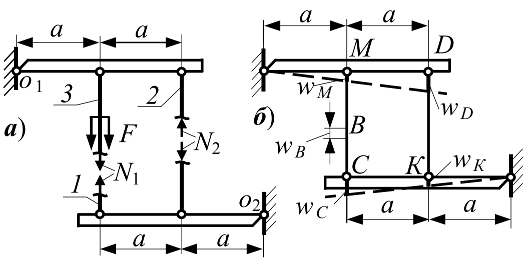


Рис. 97.1 Р

Перемещения w связаны с изменениями длины стержней (рис. 97.1 Р, *б*):

$$w_B - w_M = \frac{N_3 l}{EA} = \frac{4Fl}{3EA}, \quad w_D - w_K = \frac{N_2 2l}{EA} = \frac{4Fl}{3EA},$$

$$w_C - w_B = \frac{N_1 l}{EA} = \frac{Fl}{3EA}.$$

Учитывая, что $w_D = 2w_M$, $w_C = 2w_K$, после преобразований получим: $w_B = \frac{25Fl}{9EA}$.

Сила F производит работу $A_F = \frac{F w_B}{2} = \frac{25F^2 l}{18EA}$.

Потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2EA}\left(N_1^2 l + N_2^2 2l + N_3^2 l \right) = \frac{25F^2 l}{18EA}.$$

Ответ: $A_F = U$, что и требовалось доказать.

97.2 При какой глубине сверления a наибольшие касательные напряжения на левом и правом участках будут одинаковы? Геометрические характеристики сечений указаны на рис. 97.2.

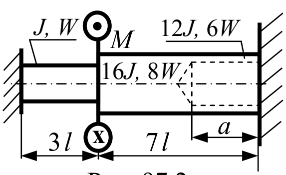


Рис. 97.2

РЕШЕНИЕ

Напряжения $\tau_{\max}$ на левом и правом участках одинаковы (рис. 97.2 Р), если $M_B = 6M_A$. Так как угол закру-

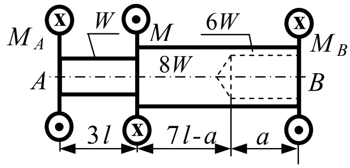


Рис. 97.2 Р

чивания $\varphi_{AB} = 0$, то

$$\frac{M_A \cdot 3l}{G \cdot J} - \frac{6M_A(7l-a)}{G \cdot 16\,J} - \frac{6M_A\,a}{G \cdot 12J} = 0\,,$$

отсюда $a = 3l$.

Ответ: При $a = 3l$ наибольшие касательные напряжения на левом и правом участках будут одинаковы.

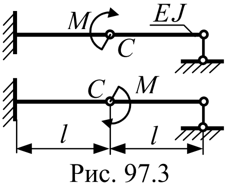


Рис. 97.3

97.3 Стержень нагружен парой сил M в двух вариантах: слева и справа от шарнира C (рис. 97.3). Найти линейное перемещение шарнира и работу пары сил M в обоих вариантах.

Дано: M, l, E, J.

РЕШЕНИЕ

На рис. 97.3 Р показаны эпюры изгибающих моментов для двух вариантов нагружения стержня (*а*, *б*) и единичного нагружения для определения вертикального (*в*) перемещения шарнира. Изгибающие

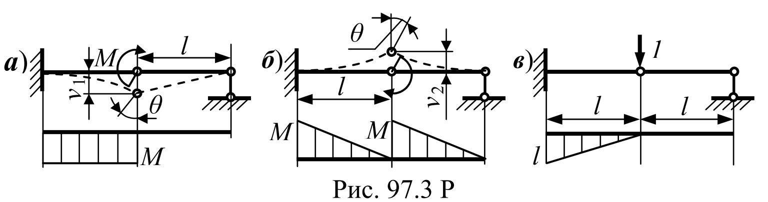


Рис. 97.3 Р

моменты от единичных нагружений для определения угловых перемещений будут такими же, как и на рис. 97.3 Р, *а*, *б* при $M = 1$. Используя способ Верещагина, находим:

$$v_1 = \frac{1}{EJ}\left(M \cdot l \cdot \frac{1}{2}l\right) = \frac{Ml^2}{2EJ} \text{ (вниз)},$$

$$v_2 = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}M \cdot l \cdot \frac{2}{3}l\right) = \frac{Ml^2}{3EJ} \text{ (вверх)}.$$

Угловые перемещения

$$\theta_1 = \frac{1}{EJ}\left(M \cdot l \cdot 1\right) = \frac{Ml}{EJ}\,,\ \theta_2 = \frac{2}{EJ}\left(\frac{1}{2}M \cdot l \cdot \frac{2}{3}1\right) = \frac{2Ml}{3EJ}\,.$$

Работа пары сил

$$A_1 = \frac{M\theta_1}{2} = \frac{M^2 l}{2EJ}, \; A_2 = \frac{M\theta_2}{2} = \frac{M^2 l}{3EJ}.$$

Ответ: $v_1 = \frac{Ml^2}{2EJ}$ (вниз), $A_1 = \frac{M^2 l}{2EJ}$, $v_2 = \frac{Ml^2}{3EJ}$ (вверх),

$$A_2 = \frac{M^2 l}{3EJ}.$$

97.4 Два стержня рамы равномерно нагреты на t° (рис. 97.4). Найти наибольшие напряжения, полагая $l = 15a$. Дано: t°, E, α – коэффициент линейного расширения материала стержней.

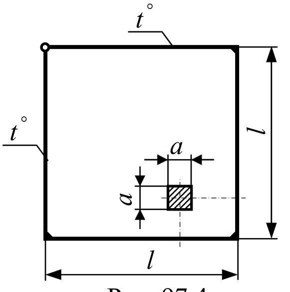


Рис. 97.4

РЕШЕНИЕ

Температурное нагружение эквивалентно силовому при $N = \alpha t^\circ EA$. На рис. 97.4 Р показаны эквивалентная система и соответствующие эпюры для вычисления коэффициента и свободного члена канонического уравнения $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1N} = 0$. Здесь

$$\Delta_{1N} = -2 \cdot \left(\alpha t^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l \right) = -\sqrt{2}\, \alpha t^\circ l,$$

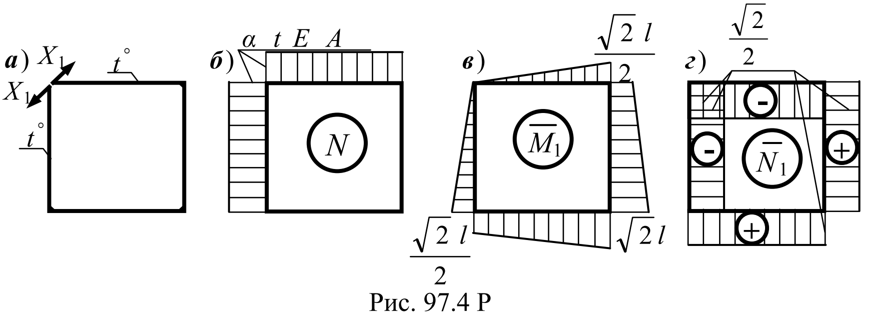


Рис. 97.4 Р

$$\delta_{11}=\frac{2}{EJ}\left(\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}l\cdot l\cdot\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}l+\frac{\sqrt{2}}{2}l\cdot l\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)+\\&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}l\cdot l\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l+\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)\end{aligned}\right)+$$

$$+\frac{4}{EA}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot l\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5l^3}{3EJ}+\frac{2l}{EA}.$$

При $l = 15a$ слагаемое $\dfrac{2l}{EA}$ составляет доли процента от первого слагаемого $\dfrac{5l^3}{3EJ}$. Следовательно,

$$X_1=\frac{\Delta_{1N}}{\delta_{11}}=\frac{3\sqrt{2}\,\alpha t^\circ EJ}{5l^2},\quad M_{\max}=X_1\cdot\sqrt{2}\,l,$$

наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{3\sqrt{2}\,\alpha t^\circ E\cdot\sqrt{2}\,l\cdot 2}{5a}=\frac{1}{25}\alpha t^\circ E\,.$$

Ответ: Наибольшие напряжения в раме – $\sigma_{\max}=\dfrac{1}{25}\alpha t^\circ E$.

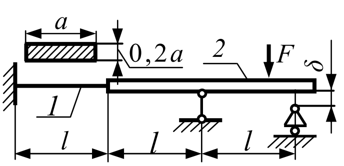


Рис. 97.5

97.5 Найти наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении стержня *1* (рис. 97.5) после закрытия зазора δ. Деформациями правого стержня *2* пренебречь. Дано: l, a, δ, E.

РЕШЕНИЕ

Угловое и линейное перемещения сечения A (рис. 97.5 Р) выражаем через M и R методом начальных параметров:

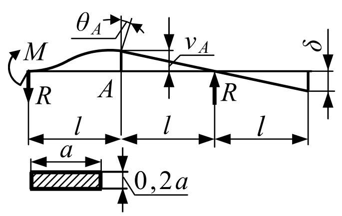


Рис. 97.5 Р

$$\theta_A=-\frac{\delta}{l}=\frac{1}{EJ}\left(Ml-\frac{Rl^2}{2}\right),$$

$$v_A = \delta = \frac{1}{EJ}\left(\frac{Ml^2}{2} - \frac{Rl^3}{6}\right).$$

Решая совместно, находим

$$M = \frac{8EJ\delta}{l^2}, \quad R = \frac{18EJ\delta}{l^3}.$$

Наибольший изгибающий момент (сечение *A*):

$$M_A = M - R \cdot l = -\frac{10EJ\delta}{l^2}.$$

Наибольшее напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_A|}{W} = \frac{10EJ\delta}{Wl^2}.$$

Так как $J/W = h/2 = 0{,}1a$, то $\sigma_{\max} = \dfrac{Ea\delta}{l^2}$.

Ответ: Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении стержня *1* – $\sigma_{\max} = \dfrac{Ea\delta}{l^2}$.

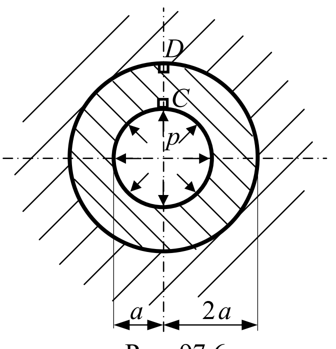


Рис. 97.6

97.6 Толстостенный цилиндр без днищ помещён без натяга в жёсткую обойму и нагружен внутренним давлением *p* (рис. 97.6). Найти и указать напряжения на гранях элементов *C* и *D*. Дано: *p*, *a*, коэффициент Пуассона $\mu = 1/3$.

РЕШЕНИЕ

Давление *q* (рис. 97.6 Р, *а*) находим из условия $u(2a) = 0$. Радиальное перемещение $u(2a) = u_p + u_q$, здесь $u = \dfrac{2a}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r)$.

Радиальное σ_r и окружное σ_t напряжения при внутреннем давлении

$$\sigma_{r,t} = \frac{pa^2}{(2a)^2 - a^2}\left(1 \mp \frac{(2a)^2}{r^2}\right);$$

$\sigma_r(a) = -p,\ \sigma_t(a) = 5p/3;$
$\sigma_r(2a) = 0,\ \sigma_t(2a) = 2p/3;$

$$u_p = \frac{2a}{E}\left(\frac{2p}{3} - 0\right) = \frac{4pa}{3E}.$$

При наружном давлении:

$$\sigma_{r,t} = \frac{qa^2}{(2a)^2 - a^2}\left(1 \mp \frac{a^2}{r^2}\right);$$

$\sigma_r(a) = 0,\ \sigma_t(a) = -8q/3;$
$\sigma_r(2a) = -q,\ \sigma_t(2a) = -5q/3;$

$$u_q = \frac{2a}{E}\left(-\frac{5q}{3} + \frac{q}{3}\right) = -\frac{8qa}{3E};$$

$$u_p + u_q = \frac{4pa}{3E} - \frac{8qa}{3E} = 0,$$

откуда $q = p/2$.

Напряжённое состояние элемента D:
$\sigma_r = 0 - q = -p/2,$
$\sigma_t = 2p/3 - 5p/6 = -p/6.$

Напряжённое состояние элемента C:
$\sigma_r = -p + 0 = -p,$
$\sigma_t = 5p/3 - 8p/6 = p/3.$

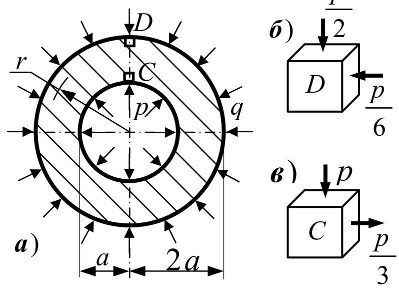


Рис. 97.6 Р

Ответ: Напряжённое состояние элемента D представлено на рис. 97.6 Р, *б*, а элемента C – на рис. 97.6 Р, *в*.

2.5. *Олимпиада 1998 г., г. Нижний Новгород, НГАСУ*

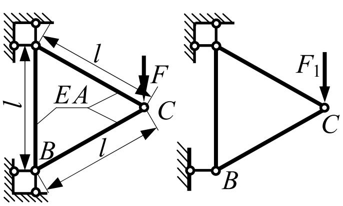


Рис. 98.1

98.1 Как изменить величину силы F, чтобы удаление одной связи в опоре B (рис. 98.1) не повлияло на величину вертикального перемещения узла C? Длина стержней l.

РЕШЕНИЕ

Выражаем вертикальное перемещение узла C через потенциальную энергию деформации системы $\delta_c = 2U/F$.

В 1-м варианте (рис. 98.1 Р, *а*) в вертикальном стержне усилий нет и

$$U_1 = 2\frac{F_1^2 l}{2EA} = \frac{F_1^2 l}{EA} = \frac{1}{2} F_1 \delta_c,$$

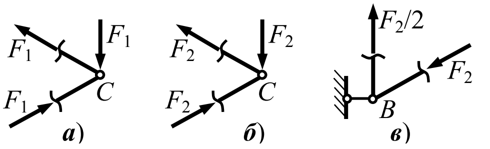


Рис. 98.1 Р

откуда $F_1 = \dfrac{EA\delta_c}{2l}$.

Во 2-м варианте (рис. 98.1 Р, *б, в*)

$$U_1 = 2\frac{F_2^2 \cdot l}{2EA} + \frac{F_2^2 \cdot l}{4 \cdot 2EA} = \frac{9F_2^2 \cdot l}{8EA} = \frac{1}{2} F_2 \delta_c, \text{ тогда}$$

$$F_2 = \frac{8}{9}\frac{EA\delta_c}{2l} = \frac{8}{9} F_1.$$

Следовательно, F_1 следует уменьшить на $F/9$.

Ответ: При удалении одной связи в опоре B вертикальное перемещение узла C не изменится, если $F_2 = \dfrac{8}{9} F_1$.

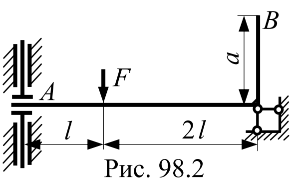


Рис. 98.2

98.2 При каком значении длины a (рис. 98.2) линейные перемещения сечений A и B будут одинаковы? Дано: l = 120 мм.

РЕШЕНИЕ

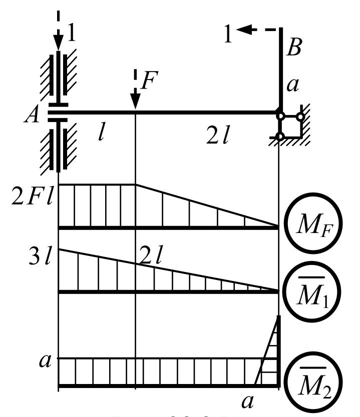


Рис. 98.2 Р

Используя эпюры изгибающих моментов от силы F (рис. 98.2 Р) и эпюры от единичных сил, приложенных в сечениях A и B, получаем

$$EJ\Delta_A = 2Fl \cdot l \cdot \left(2l + \frac{1}{2}l\right) + \frac{1}{2} 2Fl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l = \frac{23Fl^3}{3},$$

$$EJ\Delta_B = 2Fl \cdot l \cdot a + \frac{1}{2} 2Fl \cdot 2l \cdot a = 4Fl^2 a.$$

Из условия $\Delta_A = \Delta_B$ следует, что

$$a=\frac{23}{12}l=\frac{23}{12}\cdot 120=230 \text{ мм.}$$

Ответ: При $a=230$ мм линейные перемещения сечений A и B будут одинаковы.

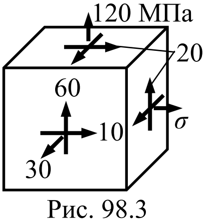


Рис. 98.3

98.3 Определить напряжение σ, при котором элемент (рис. 98.3) испытывает чистый сдвиг. Найти наибольшее касательное напряжение.

РЕШЕНИЕ

При чистом сдвиге изменение объёма

$$\Delta V=\frac{1-2\cdot\mu}{E}\cdot(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=0.$$

В данном случае (рис. 98.3 Р) это условие выполняется при

$$\sigma=-\sigma_y-\sigma_z=-30-120=-150 \text{ МПа.}$$

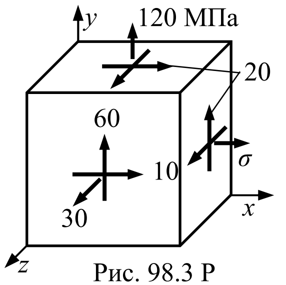


Рис. 98.3 Р

При чистом сдвиге $\tau_{\text{max}}=\sigma_1$.

Для определения σ_1 используем уравнение

$$\sigma^3-I_1\sigma^2+I_2\sigma-I_3=0.$$

Здесь $I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=0$,

$$I_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2=$$

$$=-150\cdot 30+30\cdot 120-120\cdot 150-10^2-60^2-20^2=-23000,$$

$$I_3=\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-120 & 10 & 20\\ 10 & 30 & 60\\ 20 & 60 & 120\end{vmatrix}=0.$$

Тогда уравнение примет вид $\sigma^3-23000\sigma=0$, а решение – σ_1 = 151,7 МПа, τ_{max} = 151,7 МПа.

Ответ: При σ = –150 МПа, элемент испытывает чистый сдвиг, при этом τ_{max} = 151,7 МПа.

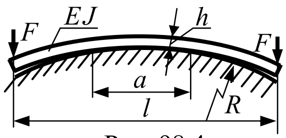


Рис. 98.4

98.4 Стержень прижат к круговому лекалу радиуса R (рис. 98.4). Считая деформации упругими и перемещения малыми, найти наибольшее нормальное напряжение и размер a зоны контакта. Принять $F = \dfrac{4EJ}{Rl}$, $h = R/700$, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ

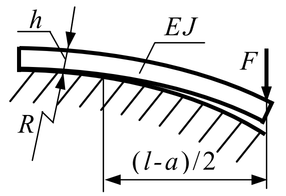


Рис. 98.4 Р

Изгибающий момент в зоне контакта (рис. 98.4 Р) $M = \dfrac{EJ}{R}$ и

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{Eh}{2R} = \frac{2{,}1 \cdot 10^5}{2 \cdot 700} = 150 \text{ МПа}.$$

Учитывая, что $M = \dfrac{F}{2}(l - a) = \dfrac{EJ}{R}$,

находим $a = l - \dfrac{2EJ}{RF} = l - \dfrac{l}{2} = \dfrac{l}{2}$.

Ответ: Наибольшее нормальное напряжение в стержне – $\sigma_{\max} = 150\,\text{МПа}$, а зона контакта – $a = l/2$.

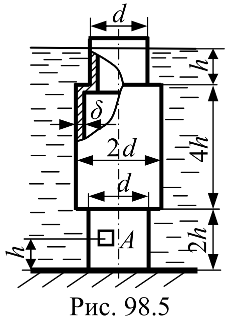


Рис. 98.5

98.5 Резервуар находится под наружным гидростатическим давлением (рис. 98.5). Объёмный вес жидкости равен γ Н/м^3. Определить напряжения на гранях элемента A и найти эквивалентное напряжение. Дано: γ, h, d, δ, $\nu = \sigma_{тр}/\sigma_{тс} = 0{,}8$.

РЕШЕНИЕ

Окружные напряжения на гранях элемента A (рис. 98.5 Р, *б*)

$$\sigma_t = -\frac{6\gamma h d/2}{\delta} = -\frac{3\gamma h d}{\delta}.$$

Из уравнения

$$\sum z = \gamma h \frac{\pi}{4}(4d^2 - d^2) - 5\gamma h \frac{\pi}{4}(4d^2 - d^2) +$$
$$+ \sigma_m \pi d \delta = 0$$

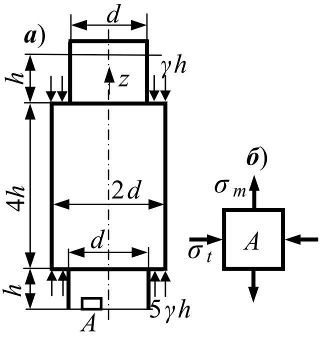


Рис. 98.5 Р

следует, что $\sigma_m = \dfrac{3\gamma h d}{\delta}$.

Так как $\sigma_1 = \sigma_m$ и $\sigma_3 = \sigma_t$, то

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \nu \sigma_3 = \frac{\gamma h d}{\delta}(3 + 0{,}8 \cdot 3) =$$

$$= 5{,}4 \frac{\gamma h d}{\delta}.$$

Ответ: На гранях элемента A:

$$\sigma_t = -\frac{3\gamma h d}{\delta}, \ \sigma_m = \frac{3\gamma h d}{\delta}, \ \sigma_{экв_{III}} = 5{,}40 \frac{\gamma h d}{\delta}.$$

98.6 Плоская рама выполнена из стержней квадратного поперечного сечения (рис. 98.6). Найти наибольшие нормальные напряжения при нагружении рамы силой F. Дано: F = 450 Н, l = 0,8 м, a = 15 мм.

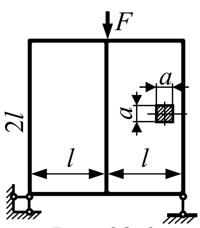


Рис. 98.6

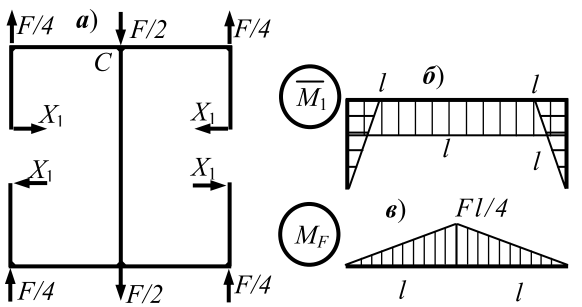


Рис. 98.6 Р

РЕШЕНИЕ

Учитывая, что нагрузка симметрична, выбираем рациональный вариант эквивалентной системы (рис. 98.6 Р, *а*). Каноническое уравнение

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Используя эпюры изгибающих моментов от внешних и единичных сил (рис. 98.6 Р, *б*, *в*), находим $EJ\delta_{11} = 2\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot l + l\cdot 2l\cdot l = \frac{8}{3}l^3$,

$$EJ\Delta_{1F} = -\frac{1}{2}\frac{Fl}{4}\cdot 2l\cdot l = -\frac{1}{4}Fl^3,$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{3}{32}F.$$

Наибольший изгибающий момент в сечении C

$$M = \frac{Fl}{4} - \frac{3}{32}Fl = \frac{5}{32}Fl.$$

Тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{5Fl\cdot 6}{32\cdot a^3} = \frac{5\cdot 450\cdot 0{,}8\cdot 6}{32\cdot 0{,}015^3} = 100 \text{ МПа}.$$

Ответ: Наибольшее нормальное напряжение в раме – $\sigma_{\max} = 100$ МПа.

2.6. *Олимпиада 1999 г., г. Пермь, ПГТУ*

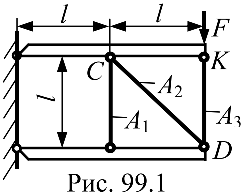


Рис. 99.1

99.1 Известно, что $A_1 = A_3 = A$, принять $A_2 = nA$. Найти зависимость перемещения w_K точки приложения силы F (рис. 99.1) от величины A.

РЕШЕНИЕ

Из уравнения равновесия (рис. 99.1 Р)

$$\sum m_o^{ниж} = -N_1\cdot l + N_2\cdot\cos 45^\circ\cdot 2l - N_3\cdot 2l = 0, \quad \Rightarrow \quad N_1 + 2N_3 = \sqrt{2}N_2,$$

$$\sum m_o^{верх} = N_1\cdot l - N_2\cdot\cos 45^\circ\cdot l + N_3\cdot 2l - F\cdot 2l = 0,$$

$$N_2 = 2\sqrt{2}F.$$

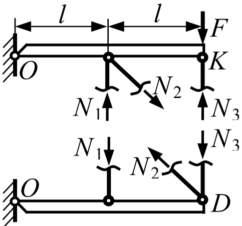


Рис. 99.1 Р

Из уравнения перемещений $\Delta l_3 = 2\Delta l_1$ находим $N_1 = 4F/5$, $N_3 = 8F/5$.

Потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{N_1^2 l}{2EA} + \frac{N_2^2 \sqrt{2}\, l}{2EnA} + \frac{N_3^2 l}{2EA} = \frac{F w_K}{2},$$

следовательно $w_K = \frac{Fl}{EA}\left(3{,}2 + \frac{8\sqrt{2}}{n}\right)$.

Ответ: Перемещение точки приложения силы F –

$$w_K = \frac{Fl}{EA}\left(3{,}2 + \frac{8\sqrt{2}}{n}\right).$$

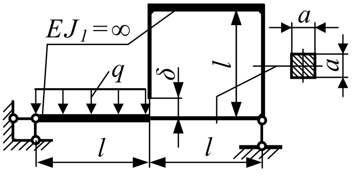


Рис. 99.2

99.2 При каком значении q (рис. 99.2) зазор δ закрывается? Найти наибольшее напряжение $\sigma_{\max}$ при нагрузке $2q$. Дано: δ, a, l, E.

РЕШЕНИЕ

Взаимное перемещение сечений K (рис. 99.2 Р) до касания

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{4}\cdot l\cdot\frac{1}{3}l\right) = \frac{ql^4}{24EJ} = \delta,$$ где $J = a^4/12$ и

$$|q| = \frac{24EJ\delta}{l^4} = \frac{2Ea^4\delta}{l^4}.$$

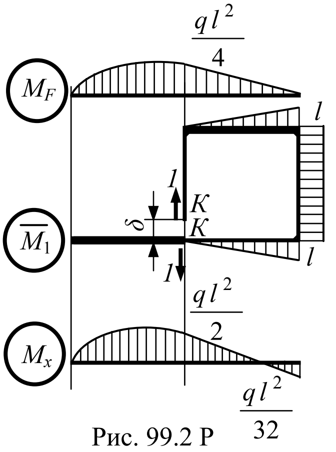


Рис. 99.2 Р

При нагрузке $2q$:

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ}\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot\frac{2}{3}l+l\cdot l\cdot l\right)=\frac{4l^3}{3EJ},$$

$$\Delta_{1F}=-\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot\frac{1}{3}\cdot l\right)=-\frac{ql^4}{12EJ},$$

$$X_1=-\frac{\delta+\Delta_{1F}}{\delta_{11}}=\frac{-\frac{ql^4}{24}+\frac{ql^4}{12}}{\frac{4l^3}{3}}=\frac{ql}{32}.$$

Строим эпюру изгибающих моментов на пролёте рамы и определяем наибольшее напряжение

$$\sigma_{z\,\max}=\frac{|M|_{наиб}}{W_x}=\frac{ql^2\cdot 6}{2\cdot a^3}=\frac{3ql^2}{a^3}.$$

Ответ: Зазор δ закрывается при $|q|=\dfrac{2Ea^4\delta}{l^4}$.

При нагрузке $2q$ – $\sigma_{z\,\max}=\dfrac{3ql^2}{a^3}$.

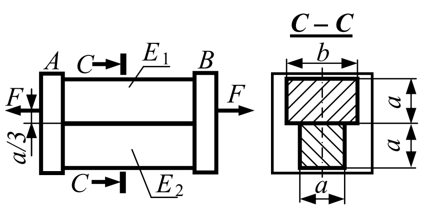


Рис. 99.3

99.3 Определить размер b, при котором жёсткие плиты A и B (рис. 99.3) смещаются параллельно друг другу. Дано: a = 30 мм, E_1 = 2,1·10^5 МПа, E_2 = 0,7·10^5 МПа.

РЕШЕНИЕ

Из уравнений равновесия (рис. 99.3 Р):

$$N_1+N_2=F,\quad N_1-N_2=\frac{2}{3}F.$$

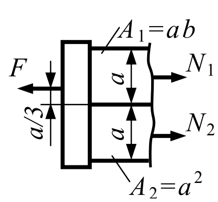


Рис. 99.3 Р

Отсюда следует, что N_1 = $5N_2$. Так как $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, то $\dfrac{5N_2}{E_1A_1}=\dfrac{N_2}{E_2A_2}$, где $A_1=ab$, $A_1=a^2$.

Учитывая, что E_1 = $3E_2$, находим

$b = \frac{5}{3} a = \frac{5}{3} \cdot 30 = 50$ мм.

Ответ: Плиты A и B смещаются параллельно друг другу при $b = 50$ мм.

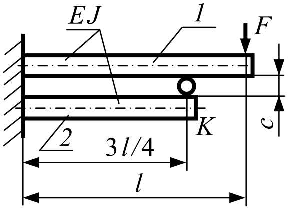


Рис. 99.4

99.4 Балки *1* и *2* установлены с просветом $c = \frac{F l^3}{64 E J}$ (рис. 99.4) и имеют контакт в сечении K. Как изменится величина просвета при нагружении силой F и чему равна его максимальная величина? Дано: F, l, E, J.

РЕШЕНИЕ

Из условия $v_1 = v_2$ при $z = 3l/4$ (рис. 99.4 Р) находим $X = 3F/4$.

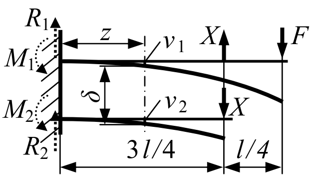


Рис. 99.4 Р

Далее определяем реакции в заделках в эквивалентной системе

$$M_1 = X \cdot \frac{3}{4} l - F \cdot l = -\frac{7}{16} F l,$$

$$R_1 = -X + F = \frac{1}{4} F,$$

$$M_2 = -X \cdot \frac{3}{4} l = -\frac{9}{16} F l,$$

$$R_2 = X = \frac{3}{4} F$$

и составляем уравнения прогибов в произвольном сечении z методом начальных параметров

$$v_1 = \frac{F}{8 E J}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{7 l z^2}{4} \right), \; v_2 = \frac{F}{8 E J}\left(z^3 - \frac{9 l z^2}{4} \right).$$

Прогибы получаются отрицательными, поэтому величина просвета в произвольном сечении

$$\delta = c + \left| v_2 \right| - \left| v_1 \right| = c + \frac{F}{4 E A}\left(-\frac{z^3}{3} + \frac{l z^2}{4} \right). \qquad (1)$$

Функция δ имеет экстремум при $z = l/2$ и, следовательно,

$$\delta_{\max} = \frac{F\,l^3}{64\,E\,J} + \frac{F\,l^3}{192\,E\,J} = \frac{F\,l^3}{48\,E\,J}.$$

Ответ: Закономерность изменения просвета выражается формулой (1), максимальный просвет $\delta_{\max} = \dfrac{F\,l^3}{48\,E\,J}$ достигается при $z = l/2$.

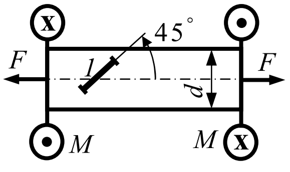


Рис. 99.5

99.5 Тензорезистор *1* указывает на отсутствие линейной деформации (рис. 99.5). Полагая $\mu = 1/3$, найти значение пары сил. Дано: d = 32 мм, F = 1 кН.

РЕШЕНИЕ

Нормальные напряжения на гранях элемента (рис. 99.5 Р)

$$\sigma_u = \sigma\cos^2 45^\circ - \tau\sin 90^\circ = \frac{F}{2A} - \frac{M}{W_p},$$

$$\sigma_v = \frac{F}{2A} + \frac{M}{W_p}, \text{ где } A = \frac{\pi\,d^2}{4},$$

$$W_p = \frac{\pi\,d^3}{16}.$$

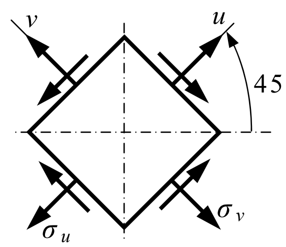


Рис. 99.5 Р

Так как $\varepsilon_u = \dfrac{1}{E}(\sigma_u - \mu\sigma_v) = 0$, то

$$M = \frac{F\,W_p}{2A}\,\frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{F\,d}{8}\,\frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{1000\cdot 0{,}032}{8}\,\frac{1-1/3}{1+1/3} = 2{,}00 \text{ Н·м}.$$

Ответ: Чтобы отсутствовала линейная деформация под углом 45° нужно приложить пару сил M = 2 Нм.

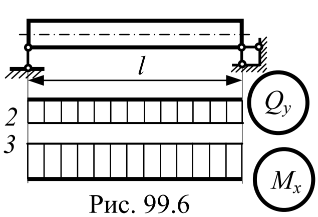


Рис. 99.6

99.6 Заданы эпюры (рис. 99.6) поперечных сил Q_y (кН) и изгибающих моментов M_x (кН·м). Эпюра изгибающих моментов построена на сжатой стороне стержня. Восстановить нагрузку, учитывая, что длина пролёта l = 1 м.

РЕШЕНИЕ

По эпюре поперечных сил Q_y (рис. 99.6 Р) определяются реакции опор: $R = 2$ кН.

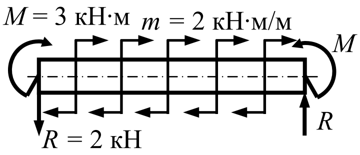


Рис. 99.6 Р

Торцевые сечения стержня, как показывает эпюра M_x, должны быть нагружены парами сил $M = 3$ кН·м.

Изгибающий момент в произвольном сечении стержня

$$M_x = M - R \cdot z + m \cdot z = M = \text{const},$$

следовательно $m = R = 2$ кН·м/м.

Ответ: Нагрузки на стержень показаны на рис. 99.6 Р: $M = 3$ кН·м, $m = 2$ кН·м/м, $R = 2$ кН.

2.7. *Олимпиада 2000 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС*

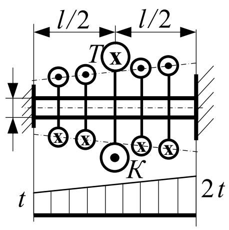


Рис. 00.1

00.1 Стержень нагружен распределёнными парами сил (рис. 00.1). Какую работу должна совершить дополнительно приложенная пара сил T, чтобы сечение K не имело углового перемещения? Дано: t, l, G, d.

РЕШЕНИЕ

Распределённую нагрузку представим суммой кососимметричной и симметричной нагрузок (рис. 00.1 Р). Первая не влияет на угловое перемещение сечения K и

$$\varphi_K(t) = \frac{1}{GJ_p}\int_0^{l/2}\left(\frac{3}{4}tl - \frac{3}{2}tz\right)dz = \frac{3tl^2}{16GJ_p}.$$

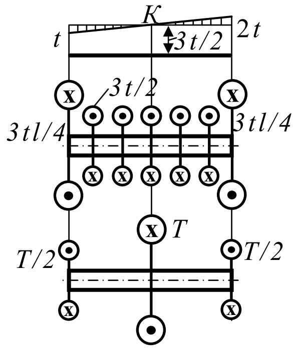


Рис. 00.1 Р

Находим значение T из условия $\varphi_K(t) = \varphi_K(T)$. Так как $\varphi_K(T) = \dfrac{Tl}{4GJ_p}$, то

$$T = \frac{3}{4}tl.$$

Работа пары сил

$$W=\frac{1}{2}T\cdot\varphi(T)=\frac{9t^2l^3\cdot 32}{128G\pi d^4}=0{,}716\frac{t^2l^3}{Gd^4}.$$

Ответ: Чтобы сечение *K* не имело углового перемещения, пара сил *T* должна совершить дополнительную работу $W=0{,}716\frac{t^2l^3}{Gd^4}$.

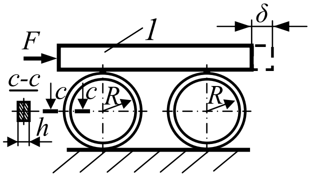


Рис. 00.2

00.2 Две кольцевые пружины жёстко соединены с основанием и стержнем *1*, деформациями которого следует пренебречь (рис. 00.2). Найти δ – наибольший допускаемый ход стержня. Дано: *R*, *h*, *E*, $[\sigma]$.

РЕШЕНИЕ

Схема нагружения и эквивалентная система показаны на рис. 00.2 Р.

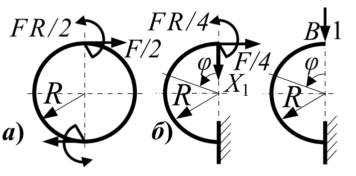


Рис. 00.2 Р

Изгибающие моменты

$$M_F=\frac{FR}{4}-\frac{FR}{4}\cdot(1-\cos\varphi)=\frac{FR}{4}\cos\varphi,$$

$$\overline{M}_1=-R\cdot\sin\varphi.$$

Так как $EJ\Delta_{1F}=\int_0^{\pi}M_F\cdot\overline{M}_1\,R\,d\varphi=0$, то $X_1=-\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}=0.$

Горизонтальное перемещение сечения *B*:

$$EJ\Delta_B=\int_0^{\pi}M_F\cdot\overline{M}_2\,R\,d\varphi=-\frac{FR^3}{4}\int_0^{\pi}\cos\varphi\cdot(1-\cos\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi FR^3}{8}.$$

Из условия прочности $\frac{FR}{4W}\le[\sigma]$ следует, что $F\le\frac{4[\sigma]W}{R}$ и

$$\Delta_B=\frac{\pi FR^3}{8EJ}=\frac{\pi R^2W}{2EJ}[\sigma].$$

Учитывая, что $\Delta_B=\delta$ и $W/J=2/h$, получим значение наибольшего допускаемого хода $\delta=\frac{\pi R^2}{Eh}[\sigma].$

Ответ: Наибольшее значение допускаемого хода $\delta = \dfrac{\pi R^2}{E h}[\sigma]$.

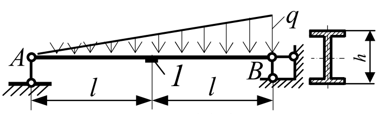


Рис. 00.3

00.3 Измеренная датчиком *1* продольная деформация (рис. 00.3) составила $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$. Найти взаимный угол поворота сечений *A* и *B* при $l = 15h$.

РЕШЕНИЕ

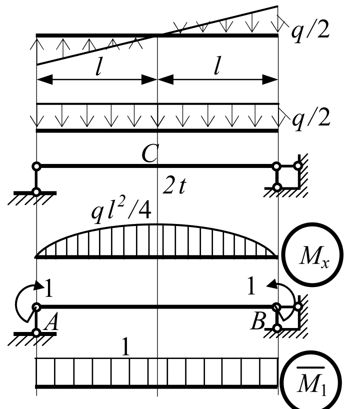


Рис. 00.3 Р

Разбивая заданную нагрузку на две составляющие (рис. 00.3 Р) и замечая, что кососимметричные силы не вызывают в сечении *C* продольных деформаций, находим в этом сечении изгибающий момент от симметричной составляющей нагрузки $M = \dfrac{q l^2}{4}$.

Наибольшее нормальное напряжение $\sigma = E \cdot \varepsilon = \dfrac{q l^2}{4W}$ и $q = \dfrac{4W E \varepsilon}{l^2}$.

Взаимный угол поворота сечений *A* и *B* зависит только от симметричной составляющей нагрузки. Используя эпюры M_x, $\overline{M}_1$, получаем искомый угол

$$\theta_{AB} = \frac{q l^3}{3EJ} = \frac{8 \varepsilon l}{3h} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 15h}{3h} = 0{,}0200\,\text{рад} = 1{,}146^{\circ}.$$

Ответ: Взаимный угол поворота сечений *A* и *B* при нагружении силой $F - \theta_{AB} = 0{,}0200\,\text{рад} = 1{,}146^{\circ}$.

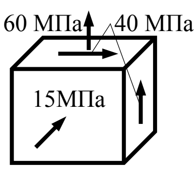


Рис. 00.4

00.4 Напряжённое состояние, указанное на рис. 00.4, дополняется всесторонним равномерным сжатием. В результате вся потенциальная энергия деформации оказывается связанной только с изменением формы. Найти коэффициент запаса по текучести, если предел текучести

$\sigma_т$ = 240 МПа. Использовать теорию наибольших касательных напряжений.

РЕШЕНИЕ

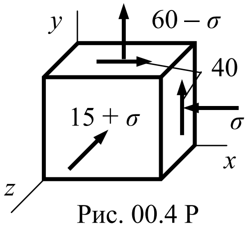


Рис. 00.4 Р

Так как объём элемента (рис. 00.4 Р) не изменяется, то

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -\sigma + (60 - \sigma) - (15 + \sigma) = 0.$$

Следовательно σ = 15 МПа, σ_x = –15 МПа, σ_y = 45 МПа, σ_z = – 30 МПа.

Главные напряжения

$$\sigma_{\mathrm{I,II}} = \frac{1}{2}\left[(-15 + 45) \pm \sqrt{(-15 - 45)^2 + 4 \cdot 40^2} \right] = 15 \pm 50,$$

σ_1 = 65 МПа, σ_2 = – 30 МПа, σ_3 = – 35 МПа.

Эквивалентное напряжение $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3$ = 65 – (– 35) = 100 МПа.

Следовательно $n_т = \sigma_т/\sigma_{экв}$ = 240/100 = 2,4.

Ответ: Коэффициент запаса $n_т$ = 2,4.

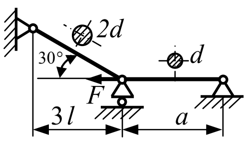


Рис. 00.5

00.5 На каком расстоянии a (рис. 00.5) следует установить правую опору, чтобы была обеспечена равнопрочность стержней? Каково значение F, при котором стержни будут работать с двукратным коэффициентом запаса? Пределы текучести материала при растяжении и при сжатии одинаковы $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_т$. Дано: l, d, $\sigma_т$.

РЕШЕНИЕ

Из условия равнопрочности стержней следует, что $N_1 = 4 \cdot N_2$ (рис. 00.5 Р). Уравнение перемещений $\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \cos 30^\circ$, то есть

$$\frac{N_1 l_1}{E A_1} = \frac{N_2 l_2}{E A_2} \cos 30^\circ, \text{ откуда } l_1 = a \cdot \cos 30^\circ.$$

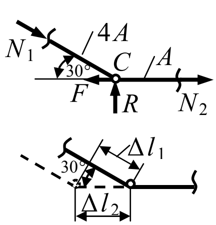


Рис. 00.5 Р

Из геометрии $l_1 = 3l/\cos 30^\circ$, следовательно $a = 3l/\cos^2 30^\circ = 4l$.

Уравнение равновесия узла C:

$$F = N_2 (1 + 2\sqrt{3}).$$

Так как по условию $N_2 = \dfrac{\sigma_т A_2}{2} = \dfrac{\sigma_т \pi d^2}{8}$, то $F = \dfrac{\sigma_{\text{т}} \pi d^2}{8}(1 + 2\sqrt{3}) = 1{,}753 \sigma_{\text{т}} d^2$.

Ответ: Для обеспечения равнопрочности стержней следует установить правую опору на расстоянии $a = 4l$. Стержни будут работать с двукратным коэффициентом запаса при $F = 1{,}753 \sigma_{\text{т}} d^2$.

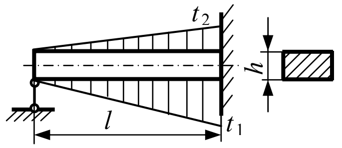


Рис. 00.6

00.6 Температура стержня после установки его на опорах (рис. 00.6) изменяется как по длине l, так и по высоте сечения h. Градиент температуры по высоте растёт от нуля в левом сечении до $t = t_1 - t_2 > 0$ в заделке. Полагая, что поперечные сечения остаются плоскими, найти наибольшие нормальные напряжения.

Дано: $t = 60^\circ$C, $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

РЕШЕНИЕ

Градиент температуры в произвольном сечении (рис. 00.6 Р) $\Delta t = \dfrac{t}{l} z$. Взаимный угол поворота сечений элемента dz при изменении температуры и этот же угол при нагружении парами сил M_t будут одинаковы: $M_t = \dfrac{EJ\alpha t}{h}$, что следует из равенства $\dfrac{M_t \, dz}{EJ} = \dfrac{\alpha t \, dz}{h}$. Поэтому перемещения в основной системе (при отсутствии левой опоры) аналогичны перемещениям при силовом нагружении с переменным изгибающим моментом M_t. Раскрывая статическую неопределимость, получаем

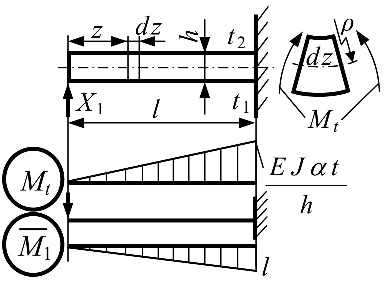


Рис. 00.6 Р

$$X_1 = \frac{\frac{1}{2} M_t \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l}{\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l} = \frac{M_t}{l} = \frac{EJ\alpha t}{hl}.$$

Учитывая, что $J/W = h/2$,

$$\sigma = \frac{X_1 \cdot l}{W} = \frac{EJ\alpha t}{hW} = \frac{E\alpha t}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^5 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 60 = 54{,}0 \text{ МПа}.$$

Ответ: Наибольшее нормальное напряжение в стержне – $\sigma_{\max} = 54{,}0$ МПа.

2.8. ***Олимпиада 2001 г., г. Йошкар-Ола, МГТУ***

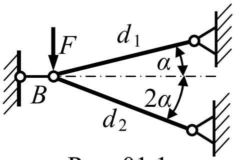


Рис. 01.1

01.1 При каком значении диаметра d_2 (рис. 01.1) перемещения в стержневой системе не изменятся после удаления опоры B? Дано: $\alpha = 15^\circ$, диаметр $d_1 = 50$ мм, $l_1 = l_2 = l$, $E_1 = E_2 = E$.

РЕШЕНИЕ

Условие задачи выполняется, если узел B не получает горизонтального перемещения. Составляя уравнения равновесия узла B для двух схем нагружения (рис. 01.1Р), получим:

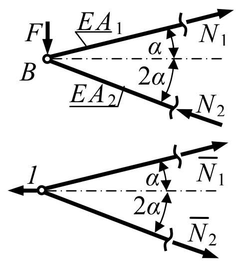


Рис. 01.1 Р

- для грузового состояния

$$\sum x = N_1 \cos\alpha - N_2 \cos 2\alpha = 0,$$

$$\sum y = N_1 \sin\alpha + N_2 \sin 2\alpha - F = 0,$$

откуда находим

$$N_1 = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha} F, \quad N_2 = \frac{\cos\alpha}{\sin 3\alpha} F;$$

– для единичного состояния

$$\sum x = \overline{N}_1 \cos\alpha + \overline{N}_2 \cos 2\alpha - 1 = 0,$$

$$\sum y = \overline{N}_1 \sin\alpha + \overline{N}_2 \sin 2\alpha = 0,$$

$$\overline{N}_1 = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}, \qquad \overline{N}_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Горизонтальное перемещение $\delta_B = \dfrac{N_1 \overline{N}_1}{EA_1} l + \dfrac{N_2 \overline{N}_2}{EA_2} l = 0.$

Подставляя значения сил, имеем $\dfrac{2\cos 2\alpha}{A_1} = \dfrac{1}{A_2}$

или $d_2 = d_1\sqrt{\dfrac{1}{2\cos 2\alpha}} = 50\sqrt{\dfrac{1}{2\cdot\cos 30^\circ}} = 38$ мм.

Ответ: После удаления опоры B перемещения в стержневой системе не изменятся, при d_2 = 38 мм.

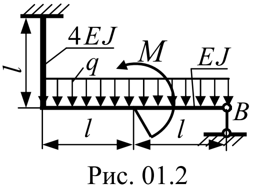


Рис. 01.2

01.2 Рама под действием распределенной нагрузки q (рис. 01.2) дополнительно нагружается парой сил M, при этом опора B полностью разгружается. Найти линейное перемещение сечения B. Заданы: размер l, модуль упругости E, момент инерции J.

РЕШЕНИЕ

Опора B разгружена, если вертикальное перемещение сечения B при отсутствии опоры равно нулю. Используя эпюры, изображенные на рис. 01.2 Р, имеем:

$$\Delta_B^{верт} = \frac{1}{4EJ}\left(2ql^2\cdot l - M\cdot l\right)\cdot 2l + \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{3}2ql^2\cdot 2l\cdot\frac{3}{4}\cdot 2l - M\cdot l\cdot\left(l+\frac{1}{2}\cdot l\right)\right] = 0.$$

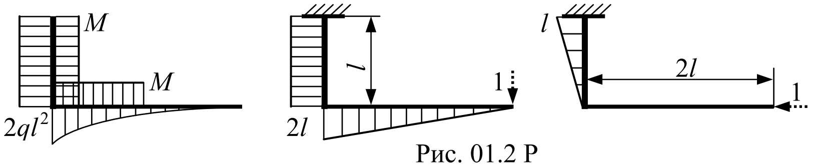


Рис. 01.2 Р

Следовательно, $M = 1{,}5\,ql^2$. Горизонтальное перемещение сечения B:

$$\Delta_B^{гор} = \frac{1}{4EJ}\left(2ql^2\cdot l - 1{,}5ql^2\cdot l\right)\cdot\frac{l}{2} = \frac{ql^4}{16EJ}.$$

Ответ: Линейное перемещение сечения B – $\Delta_B = \dfrac{ql^4}{16EJ}$.

01.3 Балка изогнута парой сил M (рис. 01.3). С помощью винта *1* сечение B получает дополнительное линейное перемещение. Каким должен быть ход h винта, чтобы осевая линия участка OB стала дугой окружности? Заданы: размер l, модуль упругости E, момент инерции поперечного сечения J.

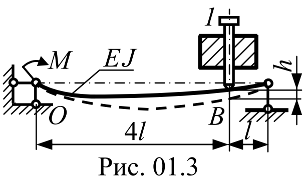


Рис. 01.3

РЕШЕНИЕ

Ось участка *OB* будет дугой окружности, если на длине $4l$ этого участка изгибающий момент постоянен. Используя эпюры изгибающих моментов (рис. 01.3 Р), находим перемещение сечения *B* при начальном нагружении парой сил *M*:

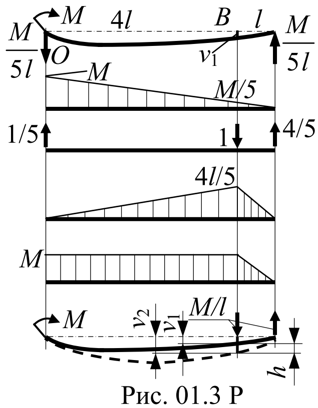


Рис. 01.3 Р

$$EJv_1 = \frac{1}{2}\frac{4l}{5}\cdot 4l\cdot\left(\frac{M}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4M}{5}\right)+$$

$$+\ \frac{1}{2}\frac{4l}{5}\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{M}{5}=\frac{4Ml^2}{5}$$

и конечное перемещение после дополнительного воздействия винта

$$EJv_2 = \frac{1}{2}\frac{4l}{5}\cdot 4l\cdot M+\frac{1}{2}\frac{4l}{5}\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot M=\frac{28Ml^2}{15}.$$

Ход винта

$$h = v_2 - v_1 = \frac{28Ml^2}{15EJ}-\frac{4Ml^2}{5EJ}=\frac{16Ml^2}{15EJ}.$$

Ответ: Чтобы осевая линия участка *OB* стала дугой окружности, ход винта должен быть равен $h=\dfrac{16Ml^2}{15EJ}$.

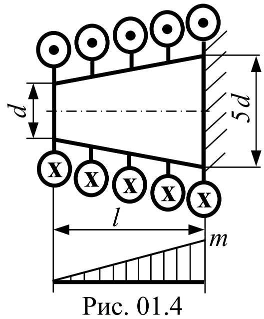


Рис. 01.4

01.4 Интенсивность распределённой нагрузки линейно изменяется от нуля до *m* (рис. 01.4). Определить, где находится опасное сечение и чему равны наибольшие касательные напряжения. Заданы размеры *d* и *l*.

РЕШЕНИЕ

В произвольном сечении *z* (рис. 01.4 Р)

$$M_z=\frac{mz^2}{2l},\quad d_z=d\left(1+\frac{4z}{l}\right),$$

следовательно

$$\tau = \frac{M_z}{W_p} = \frac{16 M_z}{\pi d_z^3} = \frac{8 m z^2}{\pi l d^3 \left(1 + \frac{4z}{l}\right)^3}.$$

Исследуем функцию $\tau(z)$ на экстремум

$$\frac{d\tau}{dz} = 2z\left(1 + \frac{4z}{l}\right)^3 - z^2 3\left(1 + \frac{4z}{l}\right)^2 \frac{4}{l} = 0.$$

Откуда $z = l/2$ и

$$\tau_{\max} = \frac{2ml^2}{27\pi d^3} = 0{,}0236\frac{ml^2}{d^3}.$$

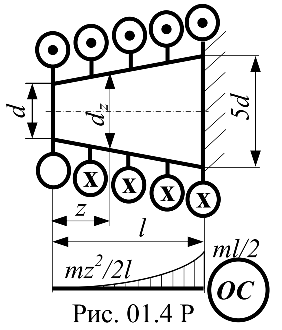


Рис. 01.4 Р

Ответ: Опасное сечение находится на растоянии $z = l/2,$ а наибольшие касательные напряжения – $\tau_{\max} = 0{,}0236\frac{ml^2}{d^3}$.

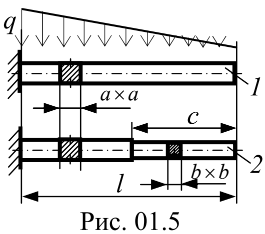


Рис. 01.5

01.5 В целях снижения массы стержень *1* (рис. 01.5) заменён ступенчатым стержнем *2*, оба участка которого равнопрочны. Какими должны быть размеры b и c? Дано: a = 26 мм, l = 330 мм.

РЕШЕНИЕ

Условие равнопрочности участков $\sigma_1 = \sigma_2$ (рис. 01.5 Р):

$$\frac{ql^2}{6}\cdot\frac{6}{a^3} = \frac{qc/l\cdot c^2}{6}\cdot\frac{6}{b^3} \text{ или } \frac{l^3}{a^3} = \frac{c^3}{b^3}.$$

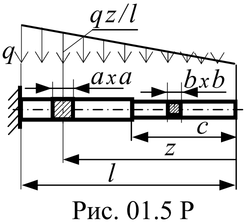


Рис. 01.5 Р

Обозначим $c = kl$, тогда $b = ka$.

Находим k из условия минимума объёма стержня. Объём стержня

$V = b^2\cdot kl + a^2\,(1 - k)\cdot l = a^2\cdot l\,(k^3 - k + 1)$.

Решая уравнение $dV/dz = 0$, находим

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577.$$

Следовательно, $b = 0{,}577 \cdot a = 0{,}577 \cdot 26 = 15$ мм, $c = 0{,}577 \cdot l = 0{,}577 \cdot 330 = 190$ мм.

Ответ: Для обеспечения равнопрочности участков необходимо: $b = 15$ мм, $c = 190$ мм.

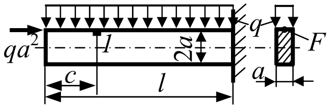


Рис. 01.6

01.6 На каком расстоянии c (рис. 01.6) расположен элемент *1*, испытывающий напряжённое состояние «чистый сдвиг»? Дано: $a = 40$ мм.

РЕШЕНИЕ

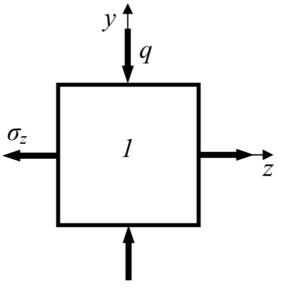


Рис. 01.6 Р

Так как $\sigma_y = -q$, то условие задачи выполняется при $\sigma_{z\max} = q$ (рис. 01.6Р). Здесь

$$\sigma_{z\max} = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{W_x},$$

где $M_x = -qac^2/2 + qa^2 \cdot a$, $N_z = qa^2$, $A = 2a^2$, $W_x = 2a^3/3$. Подставляя эти значения, находим $c = 2 \cdot a = 2 \cdot 40 = 80$ мм.

Ответ: Элемент *1*, испытывающий напряженное состояние «чистый сдвиг», расположен на расстоянии $c = 80$ мм.

2.9. *Олимпиада 2002 г., г. Санкт-Петербург, СПбГТУ*

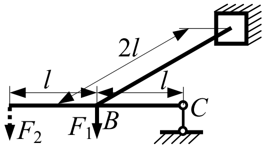


Рис. 02.1

02.1 После нагружения рамы силой $F_1 = F$ добавляется сила F_2 (рис. 02.1) и участок BC становится прямым. Определить значение силы F_2 и угол наклона участка BC. Дано: F, l, E, J_x, $GJ_к = 2EJ_x/3$.

РЕШЕНИЕ

Пусть $F_2 = nF$. Статическую неопределимость можно раскрыть методом сил $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$, но по условию задачи $X_1 = 0$, следовательно $\Delta_{1F} = 0$, тогда (рис. 02.1 Р, *б*, *в*)

$$E J_x \Delta_{1F} = nFl \cdot 2l \cdot l \cdot 3/2 +$$

$$+\frac{1}{2} 2(n+1) Fl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l = 0.$$

Отсюда $n = 8$.

Угол поворота сечения B (рис. 02.1 Р, *б*, *г*)

$$\varphi_B = \Delta_2 = \frac{8Fl \cdot 2l \cdot 1}{\frac{2}{3} E J_x} = \frac{24Fl^2}{E J_x}.$$

Угол наклона участка BC

$$\theta_{BC} = \frac{\varphi_B}{l} = \frac{24Fl}{E J_x}.$$

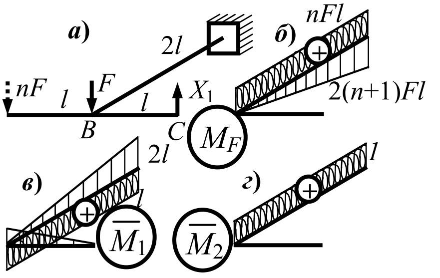


Рис. 02.1 Р

Ответ: Чтобы участок BC становился прямым, необходимо приложить силу $8F$, при этом угол наклона участка BC $\theta_{BC} = \dfrac{24Fl}{E J_x}$.

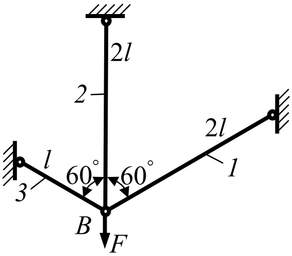


Рис. 02.2

02.2 Стержневая система нагружена силой F (рис. 02.2). Определить изменение температуры Δt° первого стержня, при которой точка B перемещается точно по вертикали.

Дано: F, l, E, α.

РЕШЕНИЕ

Из условия равновесия ($\sum x$) узла B (рис. 02.2 Р) усилия в стержнях 1 и 3 одинаковы, $N_1 = N_3$.

$$\sum y = -F + N_3 \cdot \cos 60^\circ + N_2 + N_1 \cdot \cos 60^\circ = 0, \; N_1 + N_2 = F.$$

Используем метод сил. Эквивалентная система и эпюры внутренних сил показаны на рис. 02.2 Р, *а*. $X_1 = N_1$.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}(1 \cdot 2l \cdot 1 + 1 \cdot 2l \cdot 1 + 1 \cdot l \cdot 1) = \frac{5l}{EA},$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EA}\left(-F \cdot 2l \cdot 1 + EA\,\alpha\,\Delta t \cdot 2l \cdot 1\right) = \frac{2l}{EA}(EA\,\alpha\,\Delta t - F).$$

Отсюда $X_1 = 2(F - \alpha \Delta t E A)/5$,

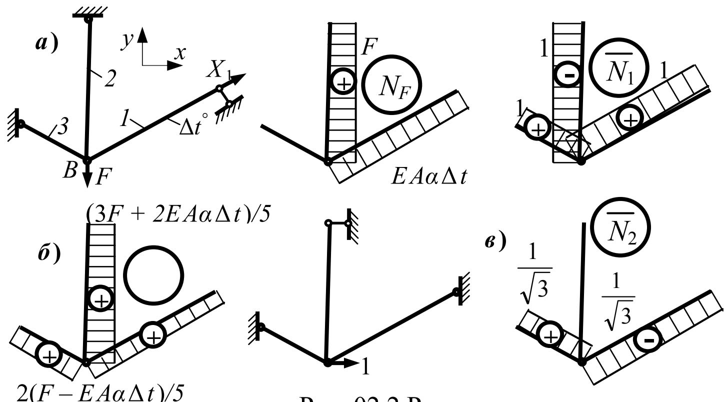


Рис. 02.2 Р

$N_2 = F - X_1 = (3F + 2\alpha\Delta t EA)/5.$

Общая эпюра показана на рис. 02.2 Р, *б*. Изменение температуры стержня 1 определяется из условия $\Delta_B^{\text{гор}} = 0$ (перемножение эпюр на рис. 02.2 Р, *б* и *в*).

$$\Delta_2 = \Delta_B^{\text{гор}} = \frac{1}{EA}\left(\begin{array}{c} 2\left(F - EA\alpha\Delta t\right)\cdot l\cdot\dfrac{1}{5\cdot\sqrt{3}} - \\ -2\left(F - EA\alpha\Delta t\right)\cdot 2l\cdot\dfrac{1}{5\cdot\sqrt{3}}\end{array}\right) - \alpha\Delta t\cdot 2l\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Отсюда точка *B* перемещается точно по вертикали при $\Delta t = -F/(4\alpha EA)$.

Ответ: Точка *B* перемещается точно по вертикали, если изменение температуры Δt° первого стержня – $\Delta t_1 = -F/(4\alpha EA)$.

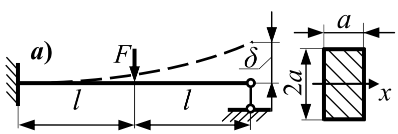


Рис. 02.3

02.3 При каком смещении δ правой опоры (рис. 02.3) коэффициент запаса прочности n балки будет наибольшим? Дано: F, l, E, a.

РЕШЕНИЕ

Эпюра изгибающих моментов после раскрытия статической неопределимости без учёта смещения правой опоры показана на рис. 02.3 Р, *а*. При смещении правой опоры возникают дополнительные моменты (рис. 02.3 Р, *б*), причём $R = 3EI_x\delta/(8l^3)$. Условие задачи выполняется при равенстве (по абсолютному значению) изгибающих моментов в сечениях *1* и *2*:

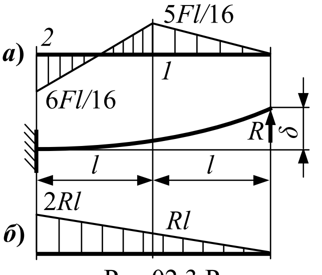


Рис.02.3 Р

$$-\left(-\frac{6Fl}{16}+R\cdot 2l\right)=\frac{5Fl}{16}+R\cdot l \quad\Rightarrow\quad R=\frac{F}{48}.$$

Тогда $\delta = Fl^3/(18EJ_x)$, так как $J_x = 2a^4/3$, то $\delta = Fl^3/(12Ea^4)$.

Ответ: Наибольший коэффициент запаса прочности n балки будет при $\delta = Fl^3/(12Ea^4)$.

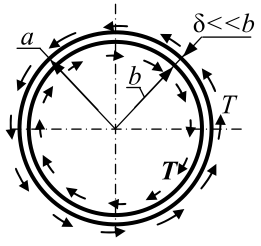


Рис. 02.4

02.4 Тонкостенный круглый стержень длиной l (рис. 02.4), защемлённый с одной стороны, нагружен по обеим поверхностям касательными нагрузками интенсивностью T. При каком значении T возникнут первые пластические деформации? Дано: l, a, b, $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_т$, $l >> \delta$.

РЕШЕНИЕ

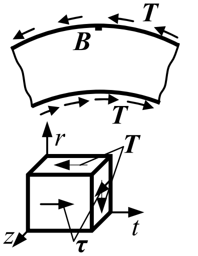


Рис. 02.4 Р

Крутящий момент в заделке
$M_{кр} = T\cdot 2\pi a\cdot l\cdot a - T\cdot 2\pi b\cdot l\cdot b = T\cdot 2\pi(a-b)\cdot l\cdot \delta$.
$\tau = M_{кр}/2A^*\delta = 4Tl/(a+b)$ или $T = (a+b)\tau/4l$.

Так как $(a+b) / 4l << 1$, то при вычислении главных напряжений величиной T (рис. 02.4Р) можно пренебречь. Тогда $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$. $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = 8Tl/(a+b)$. Первые пластические деформации наступят при $\sigma_{экв} = \sigma_т$, откуда $T_{пл} = \sigma_т (a+b)/8l$.

Ответ: Первые пластические деформации возникнут при $T_{пл} = \sigma_т (a+b)/8l$.

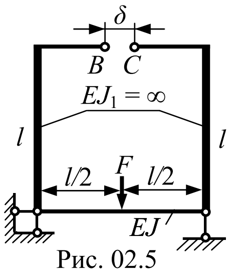


Рис. 02.5

02.5 Наибольшие нормальные напряжения, возникающие в момент закрытия зазора δ, соответствуют силе F (рис. 02.5). При дальнейшем увеличении этой силы указанные напряжения удваиваются. Во сколько раз при этом возрастает сама сила F? Дано: EJ, l.

РЕШЕНИЕ

Эпюра M_F (рис. 02.5Р, *а*) соответствует моменту закрытия зазора δ, напряжения $\sigma_{\max}(F) = Fl/(4W_x)$. При возрастании нагрузки на F_1 из условия $\delta_{BC} = 0$ находим методом сил $X_1 = F_1/8$ и строим эпюру M_{F1} (рис. 02.5Р, *б*) $\sigma_{\max}(F_1) = F_1 l/(8W_x)$. По условию задачи $Fl/(4W_x) + F_1 l/(8W_x) = 2Fl/(4W_x)$ и тогда $F_1 = 3F$.

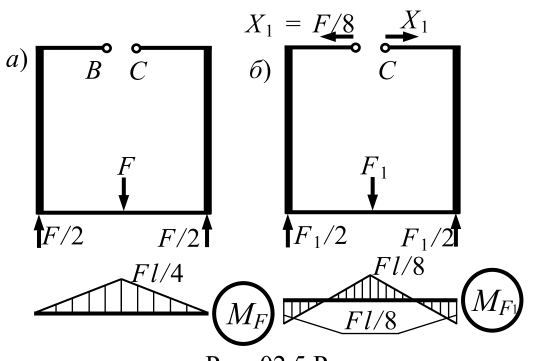


Рис. 02.5 Р

Следовательно, сила F возрастает в три раза.

Ответ: Для удвоения наибольших нормальных напряжений после закрытия зазора δ необходимо увеличить силу в три раза.

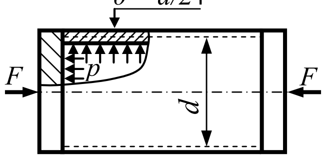


Рис. 02.6

02.6 При каком значении силы F (рис. 02.6) объём материала трубки не изменяется? Чему при этом равен коэффициент запаса $n_т$, найденный по теории максимальных касательных напряжений? Дано: p, d, $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_т$.

РЕШЕНИЕ

Изменение объёма

$\varepsilon_V = (1\text{-}2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/E$.

Напряжённое состояние элементов в точках B и C показано на рис. 02.6 Р (в точке C пренебрегаем по малости величиной $\sigma_r = -p$). Если $\sigma_r = -\sigma_z$, то $\varepsilon_V = 0$. $\sigma_t = pd/(2\delta) = 12p$, $\sigma_z = pd/(4\delta) - F/(\pi d\delta) = 6p - 24F/(\pi d^2)$. Тогда $12p = -6p + 24F/(\pi d^2)$ и $F = 3p\pi d^2/4$. Так как $\sigma_1 = 12p$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -12p$, то $\sigma_{экв} = 24p$. Коэффициент запаса $n_т = \sigma_т/24p$.

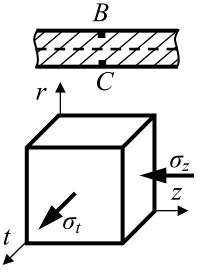


Рис. 02.6 Р

Ответ: Объём материала трубки не изменяется при $F = 3p\pi d^2/4$, а коэффициент запаса – $n_т = \sigma_т/24p$.

2.10. *Олимпиада 2003 г., г. Саранск, МГТУ*

03.1 В каком месте стержня (рис. 03.1) следует создать зону нагрева длиной l (заштрихована), чтобы сила F не производила работы? Дано: l = 90 мм, $F = \alpha\Delta tEA/3$.

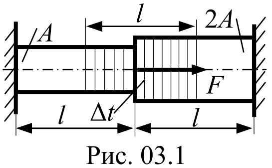


Рис. 03.1

РЕШЕНИЕ

Условие задачи выполняется при $\Delta_B = 0$ (рис. 03.1 Р). Из уравнения перемещений

$$-\frac{R_1 l}{EA} - \frac{R_1 l}{E2A} - \frac{Fl}{E2A} + \alpha\Delta t l = 0$$ следует,

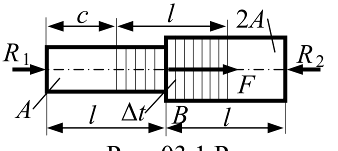


Рис. 03.1 Р

что $R_1 = \frac{5}{9}\alpha\Delta t EA$.

Перемещение сечения B составит

$$\Delta_B = -\frac{R_1 l}{EA} + \alpha\Delta t(l - c) = 0,$$ откуда при найденном значении силы R_1 получим $c = \frac{4}{9}l = \frac{4\cdot 90}{9} = 40$ мм.

Ответ: Зону нагрева длиной l следует создать на расстоянии c = 40 мм от левой опоры.

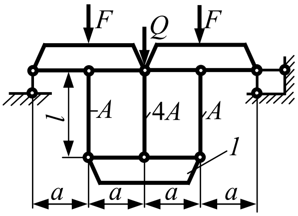


Рис. 03.2

03.2 При нагружении стержневой системы тремя силами (рис. 03.2), измеренное перемещение траверсы *1* составило $\delta = 10Fl/(EA)$. Каково отношение Q/F?

РЕШЕНИЕ

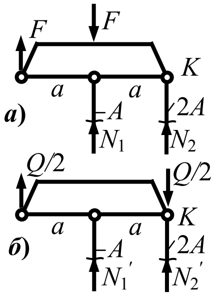


Рис. 03.2 Р

Используя симметрию и рассматривая нагружение силами F (рис. 03.2 Р, *а*) и $Q/2$ (рис. 03.2 Р, *б*), получим нормальные силы в стержнях, соответственно $N_1 = -F$, $N_2 = F$, $N_1' = -Q$, $N_2' = Q$. Из условия равенства работы сил и энергии деформации находим перемещения центрального узла K:

$$\frac{1}{2}\frac{F\,w_K(F)}{2} = \frac{F^2 l}{2EA} + \frac{F^2 l}{4EA}, \quad w_K(F) = \frac{3Fl}{EA}.$$

Аналогично $w_K(Q) = \dfrac{3Ql}{EA}$ и $w_K = \dfrac{3(F+Q)l}{EA}$.

Перемещение δ траверсы *1* составит

$$\delta = \frac{10Fl}{EA} = w_K - \frac{(N_1 + N_2')l}{E2A} = \frac{3(F+Q)l}{EA} - \frac{(F+Q)l}{E2A},$$ откуда $Q = 3F$.

Искомое соотношение $Q/F = 3$.

Ответ: Перемещение траверсы *1* составляет $\delta = 10Fl/(EA)$, при $Q/F = 3$.

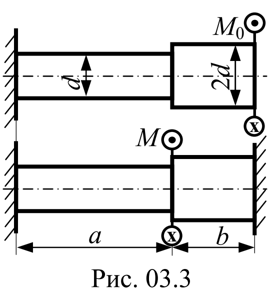


Рис. 03.3

03.3 Предварительное напряжённое состояние стержня создаётся закручиванием парой сил M_0 на угол φ и закреплением свободного торца (рис. 03.3). При последующем нагружении стержня парой сил M участки a и b должны быть равнопрочны. Найти зависимость φ от отношения b:a.

РЕШЕНИЕ

Обозначим $b{:}a = k$.

При нагружении стержня парой сил M (рис. 03.3 Р)

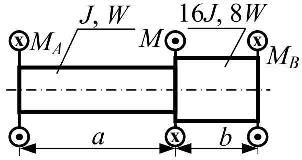


Рис. 03.3 Р

$$\frac{M_A a}{GJ} + \frac{(M_A - M)b}{G16J} = 0,$$

$$M_A = \frac{kM}{16+k}, \qquad M_B = \frac{16M}{16+k}.$$

Начальные напряжения созданы парой сил

$$M_0 = \frac{16GJ}{(16+k)a}\varphi.$$

Условие равнопрочности участков $\dfrac{M_A + M_0}{W} = \dfrac{M_B - M_0}{8W}$.

Подставляя значения моментов, получим $\varphi = \dfrac{Ma(2-k)}{18GJ}$.

Ответ: Для обеспечения равнопрочности участков a и b необходимо, чтобы $\varphi = \dfrac{Ma(2-b/a)}{18GJ}$.

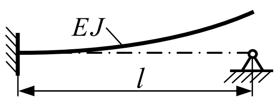


Рис. 03.4

03.4 Ось стержня имеет постоянную кривизну k. Найти положение сечения, не имеющего углового перемещения после соединения свободного конца стержня с неподвижной опорой (рис. 03.4), считая перемещения малыми и l = 600 мм.

РЕШЕНИЕ

При малых перемещениях кривизна $k \approx v''$ и линейное перемещение $v = kz^2/2$ (рис. 03.4 Р, *а*).

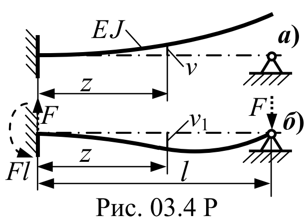


Рис. 03.4 Р

Указав и обозначив реакции опор, возникающие после соединения стержня с правой опорой, через F и Fl (рис. 03.4 Р, *б*), методом начальных параметров получим уравнение полного перемещения произвольного сечения z:

$$v_1 = \frac{kz^2}{2} + \frac{1}{EJ}\left(\frac{Fz^3}{6} - \frac{Flz^2}{2}\right).$$

Из условия $v_1(l) = 0$ находим $F = 3kEJ/(2l)$. Следовательно, $v_1 = \frac{k}{4}\left(\frac{z^3}{l} - z^2\right)$ и $v_1' = \frac{kz}{4}\left(\frac{3z}{l} - 2\right)$, откуда находим абсциссы сечений, не имеющих угловых перемещений: $z = 0$ и $z = 2l/3 = 2\cdot600/3 = 400$ мм.

Ответ: Сечения не имеют углового перемещения в точках: $z = 0$ и $z = 400$ мм.

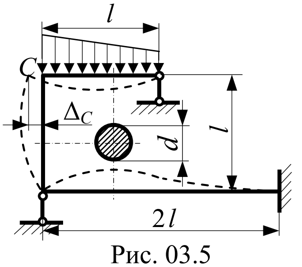


Рис. 03.5

03.5 По измеренному значению Δ_C линейного перемещения сечения C (рис. 03.5) найти наибольшее нормальное напряжение в этом сечении. Дано: $\Delta_C = 4$ мм, $d = 10$ мм, $E = 1\cdot10^5$ МПа, $l = 20d$.

РЕШЕНИЕ

На участке CB (рис. 03.5 Р) изгибающий момент M постоянен. Так как прогиб $v_B = 0$, то против центра тяжести эпюры $\overline{M}_1$ на эпюре M_X должна быть нулевая ордината. Поэтому, если $M_B = M$, то $M_D = M/2$.

Перемножая эпюры M_X и $\overline{M}_2$, получим

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ}\left[M\cdot l\cdot\frac{1}{2}\cdot l + l\cdot 2l\cdot\left(M - \frac{1}{2}\cdot\frac{3M}{2}\right)\right] = \frac{Ml^2}{EJ}.$$

Следовательно $M = \frac{EJ}{l^2}\Delta_C$.

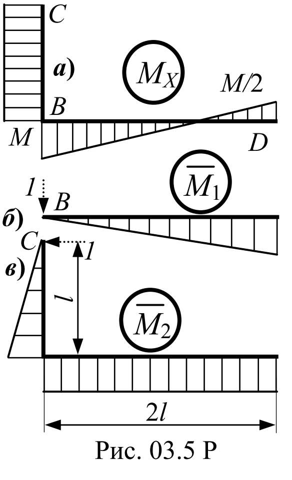


Рис. 03.5 Р

Наибольшее нормальное напряжение в сечении C равно

$$\sigma_{наиб} = \frac{M}{W} = \frac{EJ}{l^2W}\Delta_C = \frac{Ed\Delta_C}{2(20d)^2} = \frac{10^5\cdot4}{800\cdot10} = 50{,}0\ \text{МПа}.$$

Ответ: Наибольшее нормальное напряжение в сечении C – $\sigma_{наиб} = 50,0\,МПа$.

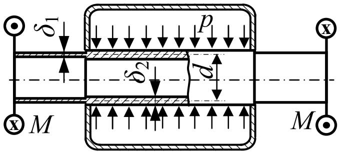


Рис. 03.6

03.6 При какой толщине δ_1 (рис. 03.6) будет обеспечена равнопрочность всех участков трубки? Использовать теорию максимальных касательных напряжений. Дано: d, $M = p\pi d^3/6$, $\delta_2 = d/12$.

РЕШЕНИЕ

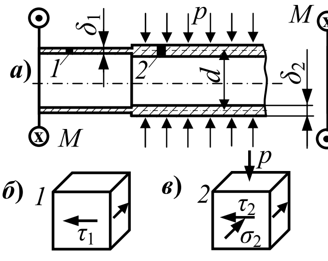


Рис. 03.6 Р

Напряжённое состояние элементов *1* и *2* (рис. 03.6 Р)

$$\tau_1 = \frac{M}{2A^*\delta_1} = \frac{p\pi d^3 4}{12\pi d^2 \delta_1} = \frac{pd}{3\delta_1},$$

$$\tau_2 = \frac{M}{2A^*\delta_2} = \frac{p\pi d^3 4\cdot 12}{12\pi d^2 d} = 4p,$$

$\sigma_2 = 6p$.

Условие равнопрочности участков

$$\sigma_{1\,экв} = \sigma_{2\,экв}, \quad 2\tau_1 = \sqrt{\sigma_2^2 + 4\tau_2^2} = 10p,$$

$$\frac{2pd}{3\delta_1} = 10p, \text{ следовательно } \delta_1 = d/15.$$

Ответ: Равнопрочность всех участков трубки будет обеспечена при $\delta_1 = d/15$.

2.11. *Олимпиада 2004 г., г. Дзержинск, ДФ НГТУ*

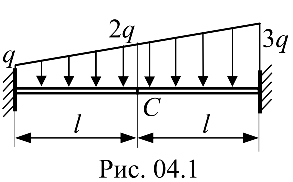


Рис. 04.1

04.1 Две одинаковых консольных балки (рис. 04.1) жёстко соединены торцевыми сечениями C. Найти значения силовых факторов в этих сечениях при нагружении балок распределёнными силами. Дано: l, q, J.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим два варианта нагружения: симметричный (*а*) и кососимметричный (*б*) (рис. 04.1 Р). В сечении C в первом варианте угол $\theta_C = 0$, во втором варианте прогиб $v_C = 0$. Так как перемещения в направлении силового фактора X_1: $\delta = \dfrac{\partial U}{\partial X_1}$, где $U = \int\limits_0^l \dfrac{M_x^2}{2EJ} dz$,

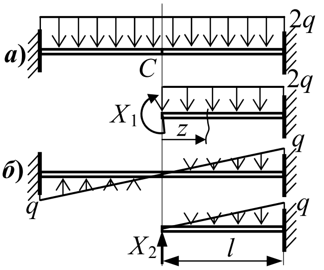


Рис. 04.1 Р

то $\delta = \dfrac{1}{EJ} \int\limits_0^l M_x \dfrac{\partial M_x}{\partial x} dz$.

В первом варианте

$M_x = X_1 - qz^2$, $\delta = \dfrac{1}{EJ} \int\limits_0^l \left(X_1 - qz^2\right) dz = 0$ и $X_1 = M = ql^2/3$.

Во втором варианте нагружения

$M_x = X_2 z - qz^3/(6l)$, $v_C = \dfrac{1}{EJ} \int\limits_0^l \left(X_2 z - \dfrac{qz^3}{6l} \right) z\, dz = 0$ и $X_2 = Q = ql/10$.

Ответ: $M = ql^2/3$, $Q = ql/10$.

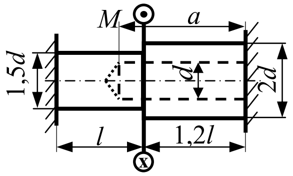


Рис. 04.2

04.2 После сверления отверстия диаметром d (рис. 04.2) наибольшие углы сдвига на участках, ослабленных отверстием, оказались одинаковы. Найти глубину сверления a при длине l = 50 мм. При вычислениях принять $1{,}5^4 = 5$.

РЕШЕНИЕ

По условию задачи $\gamma_2 = \gamma_3$, то есть $\dfrac{M_A}{W_2} = \dfrac{M_B}{W_3}$ (рис. 04.2 Р).

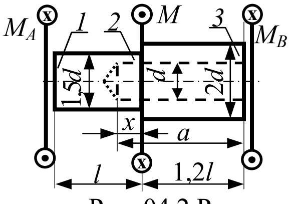


Рис. 04.2 Р

Обозначим $J = \pi d^4/32$, тогда $J_1 = 5J$, $J_2 = 4J$, $J_3 = 15J$, $W_2 = 16J/(3d)$, $W_3 = 15J/d$.

Следовательно $M_B = 45M_A/16 = 2{,}812M_A$.

Уравнение перемещений

$$\frac{M_A(l-x)}{5GJ}+\frac{M_A x}{4GJ}-\frac{M_B 1{,}2l}{15GJ}=0.$$

Подставляя значение M_B, находим $x = 0{,}5l$ и $a = l_3 + x = 1{,}7 \Rightarrow$ $\Rightarrow l = 1{,}7 \cdot 50 = 85$ мм.

Ответ: Наибольшие углы сдвига на участках, ослабленных отверстием, будут одинаковыми при глубине сверления $a = 85$ мм.

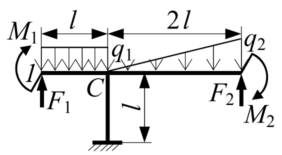


Рис. 04.3

04.3 В узле C поперечные силы и изгибающие моменты в стержнях отсутствуют. При каком отношении $q_1{:}q_2$ (рис. 04.3) значения угловых перемещений в торцевых сечениях одинаковы?

РЕШЕНИЕ

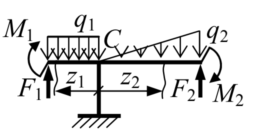


Рис. 04.3 Р

Выбрав начало координат в сечении C (рис. 04.3 Р), методом начальных параметров находим угловые перемещения в сечениях с абсциссами z_1 и z_2: $\theta_1 = \dfrac{q_1 \cdot z_1^3}{3!}$, $\theta_2 = \dfrac{q_2 \cdot z_2^4}{2l \cdot 4!}$.

В торцевых сечениях при $z_1 = l$ и $z_2 = 2l$,

$\theta_1 = \dfrac{q_1 \cdot l^3}{6}$, $\theta_2 = \dfrac{q_2 \cdot l^3}{3}$. Из условия $\theta_1 = \theta_2$ получаем $q_1{:}q_2 = 2$.

Ответ: Угловые перемещения в торцевых сечениях одинаковы при $q_1{:}q_2 = 2$.

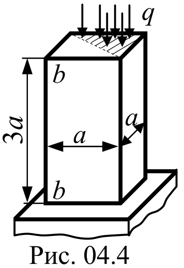


Рис. 04.4

04.4 Распределённая нагрузка занимает половину площади торцевого сечения стержня (на рис. 04.4 заштрихована). По измеренной деформации ε ребра b-b вычислить угол наклона торцевого сечения. Дано: $\varepsilon = 0{,}002$.

РЕШЕНИЕ

Напряжения в точке B поперечного сечения (рис. 04.4 Р) $\sigma = \frac{F\,y_C}{J_x}\,y_{\max} - \frac{F}{A}$.

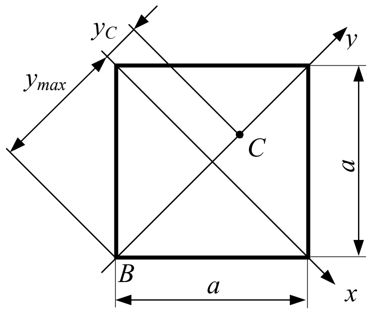


Рис. 04.4 Р

Учитывая, что $F = qa^2/2$, $y_{\max} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y_C = \frac{a\sqrt{2}}{6}$, $\sigma = E\varepsilon$, находим $q = 2E\varepsilon$. Угловое перемещение торцевого сечения $\theta = \frac{3M\,a}{EJ}$, изгибающий момент $M = F\,y_C = \frac{q\,a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{E\,\varepsilon\,a^3\sqrt{2}}{6}$ и

$$\theta = 6\sqrt{2}\,\varepsilon = 6\sqrt{2}\cdot 0{,}002 = 0{,}0170\text{ рад} \text{ или } 0{,}974^\circ.$$

Ответ: Угол наклона торцевого сечения $\theta = 0{,}0170\text{ рад} = 0{,}974^\circ$.

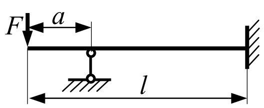


Рис. 04.5

04.5 На каком расстоянии a от конца балки (рис. 04.5) следует установить опору, чтобы значения наибольших линейных перемещений на консоли и в пролёте были одинаковы? Дано: l = 1,2 м.

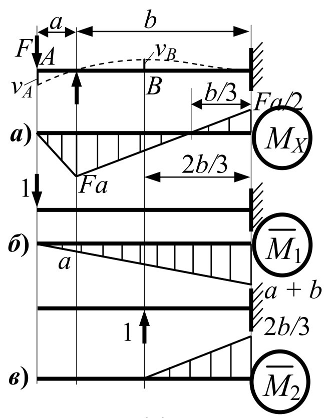


Рис. 04.5 Р

РЕШЕНИЕ

Раскрывая неопределимость, получаем эпюру M_X (рис. 04.5 Р, *а*). Наибольший прогиб на консоли находим, используя эпюры M_X и $\overline{M}_1$ (рис. 04.5 Р, *б*):

$$EJv_A = \frac{1}{2}\cdot Fa\cdot a\cdot\frac{2}{3}\cdot a + Fa\cdot b\cdot\left(a+\frac{b}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{3}{2}Fa\cdot b\cdot\left(a+\frac{2}{3}b\right) = Fa^2\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{4}\right).$$

Наибольший прогиб в пролете соответствует сечению, в котором угловое перемещение равно нулю, то есть сечению *B*. Используя эпюры M_X и $\overline{M}_2$ (рис. 04.5 Р, *в*), получаем

$$EJv_B = -\frac{1}{2}\cdot\frac{Fa}{2}\cdot\frac{b}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{Fa}{2}\cdot\frac{b}{3}\cdot\left(\frac{b}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{b}{3}\right) = \frac{Fab^2}{27}.$$

Условие $v_A = v_B$ приводит к уравнению $a^2 + \frac{3}{4}ba - \frac{1}{9}b^2 = 0$, корень которого $a = 0{,}127b$.

Так как $a + b = l$, то $b = l/1{,}127 = 1200/1{,}127 = 1065$ мм. Искомое расстояние $a = l - b = 1200 - 1065 = 135$ мм.

Ответ: Чтобы значения наибольших линейных перемещений на консоли и в пролёте были одинаковы, опору следует установить на расстоянии $a = 135$ мм.

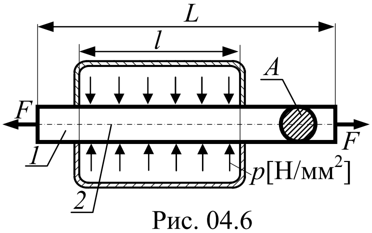


Рис. 04.6

04.6 Коэффициенты запаса на участках *1* и *2* (рис. 04.6), вычисленные по теории наибольших касательных напряжений, отличаются в три раза. При какой длине *L* стержня его объём не изменяется? Дано: $l = 80$ мм.

РЕШЕНИЕ

Эквивалентные напряжения на участках *1* и *2* (рис. 04.6 Р, *б-в*) соответственно равны σ и $\sigma + p$, где $\sigma = F/A$.

По условию задачи эквивалентное напряжение на участке *1* в три раза меньше, чем на участке *2*, по-

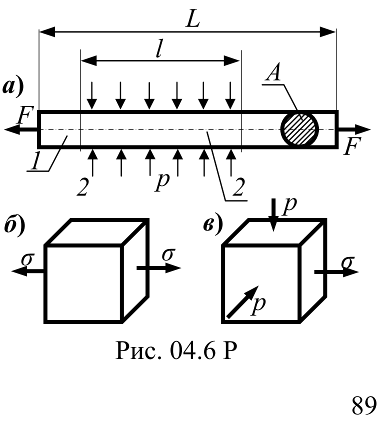


Рис. 04.6 Р

этому $3\sigma = \sigma + p$ и, следовательно, $p = 2\sigma$.

Изменение объёма

$$\Delta V = \frac{1-\mu}{E} A\left[\sigma(L-l) + (\sigma - 2p)l\right] = 0 .$$

Откуда $L = 4l = 4\cdot 80 = 320$ мм.

Ответ: Объём стержня не изменяется при $L = 320$ мм.

2.12. *Олимпиада 2005 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС*

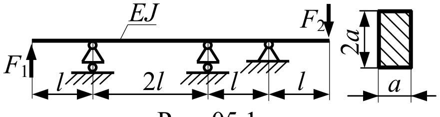


Рис. 05.1

05.1 В правом пролёте, изогнутом по дуге окружности, наибольший прогиб равен v (рис. 05.1). Найти наибольшее нормальное напряжение в поперечных сечениях балки. Дано: v, l, E, a.

РЕШЕНИЕ

На правом пролёте (рис. 05.1 Р) $M_X = F_2 l = \mathrm{const}$.

Наибольший прогиб

$$v = \frac{F_2 l^3}{8EJ} \text{ и } F_2 = \frac{8EJv}{l^3}.$$

В сечениях C взаимные угловые перемещения отсутствуют, поэтому, используя эпюры M_X и $\overline{M}_1$, находим

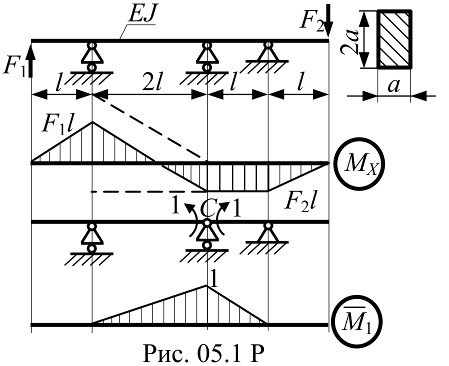


Рис. 05.1 Р

$$EJ\theta_C = -F_2\, l\cdot l\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 - F_2\, l\cdot 2l\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 +$$

$$+\ \frac{1}{2}\cdot(F_1+F_2)l\cdot 2l\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = 0,$$

$$F_1 = 3{,}5F_2 = \frac{28EJv}{l^3}.$$

Тогда $\sigma_{\max} = \dfrac{F_1 l}{W} = \dfrac{28Eav}{l^3}.$

Ответ: Наибольшее напряжение $\sigma_{\max} = \dfrac{28 E a v}{l^3}$ возникает на левой опоре.

05.2 Узел B получил перемещение δ (рис. 05.2). Найти значение силы F. Дано: δ, l, E, A.

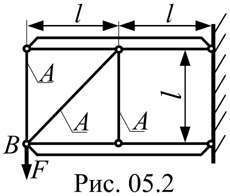


Рис. 05.2

РЕШЕНИЕ

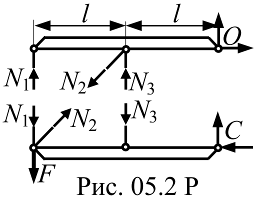


Рис. 05.2 Р

Учитывая, что $N_1 = 2 \cdot N_3$ и используя уравнения равновесия (рис. 05.2 Р)

$\sum M_O = N_1 \cdot 2l - N_2 \cdot l \cdot \cos 45^\circ + N_3 \cdot l = 0$,

$\sum M_C = -N_1 \cdot 2l + N_2 \cdot 2l \cdot \cos 45^\circ - N_3 \cdot l - F \cdot 2l = 0$, получаем

$N_1 = 4F/5$, $N_2 = 2\sqrt{2}\,F$, $N_3 = 2F/5$.

Из условия равенства работы силы F и потенциальной энергии деформации стержней

$\dfrac{1}{2} F \delta = \dfrac{1}{2EA}(N_1^2\, l + N_2^2 \sqrt{2}\, l + N_3^2\, l) = \dfrac{12{,}11 F^2 l}{2EA}$, находим

$F = 0{,}0826 \dfrac{EA\delta}{l}$.

Ответ: $F = 0{,}0826 \dfrac{EA\delta}{l}$.

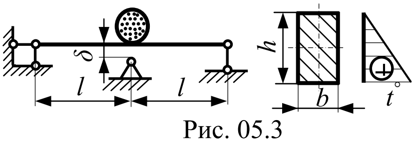


Рис. 05.3

05.3 Температура линейно изменяется по высоте сечения балки (рис. 05.3). При каком значении t° положение шарика становится неустойчивым? Весом шарика пренебречь. Дано: l, h, δ, α [1/град].

РЕШЕНИЕ

Кривизна балки, вызванная температурным градиентом по высоте сечения, постоянна по длине.

При увеличении t балка коснётся опоры, и при некотором значении t кривизна балки в среднем сечении $k = k_t - k_R = \dfrac{\alpha t}{h} - \dfrac{Rl}{2EJ} = 0$ (начальный момент неустойчивости шарика). Откуда $R = \dfrac{2EJ\alpha t}{hl}$. С последующим ростом реакции R изменяется знак k (рис. 05.3 Р) и положение шарика становится неустойчивым. Учитывая, что $\overline{M}_1 = z/2$, находим

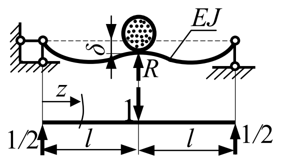


Рис. 05.3 Р

$$\delta = 2\int_0^l \overline{M}_1 (k_t - k_R)\,dz = 2\int_0^l \frac{z}{2}\left(\frac{\alpha t}{h} - \frac{Rz}{2EJ}\right)dz = \frac{\alpha t l^2}{2h} - \frac{Rl^3}{6EJ}.$$

Подставив значение R, получим $t = \dfrac{6\delta h}{\alpha l^2}$.

Ответ: Положение шарика становится неустойчивым при $t = \dfrac{6\delta h}{\alpha l^2}$.

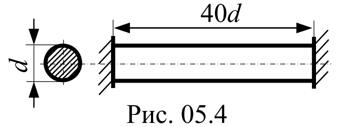


Рис. 05.4

05.4 Коэффициент запаса стержня (рис. 05.4), предварительно закрученного на угол φ, равен $n_т = 2$ (энергетическая теория). При каком повышении температуры стержня этот коэффициент будет исчерпан? Дано: φ = 0,12 рад, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/град, $G : E = 0{,}4$.

РЕШЕНИЕ

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau = \frac{M_к}{W_p} = \frac{\varphi G J_p}{l W_p} = \frac{\varphi G d}{2l} = \frac{\varphi G}{80} \text{ и } \sigma_{экв} = \sqrt{3}\,\tau.$$

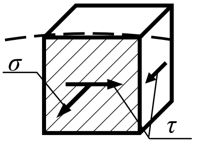


Рис. 05.4 Р

Так как $n_т = 2$, то $n_т \sigma_{экв} = 2\sqrt{3}\,\tau = \sigma_т$.

При повышении температуры на Δt нормальное напряжение (рис. 05.4 Р) $\sigma = \alpha\,\Delta t\,E$ и $\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_т \Rightarrow \sigma^2 + 3\tau^2 = \left(2\sqrt{3}\,\tau\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma = 3\tau \Rightarrow \alpha\,\Delta t\,E = 3\,\tau$.

Изменение температуры

$$\Delta t = \frac{3\tau}{\alpha E} = \frac{3\varphi G}{80\alpha E} = \frac{3 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}4}{80 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} = 150^\circ .$$

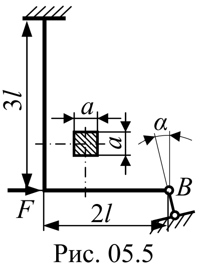


Рис. 05.5

Ответ: Коэффициент запаса $n_т$ = 2 будет исчерпан при повышении температуры стержня на $\Delta t = 150^\circ$.

05.5 Найти угол α (рис. 05.5), при котором запас потенциальной энергии деформации U максимален, и вычислить значение U_{max}. Дано: F, l, E, a.

РЕШЕНИЕ

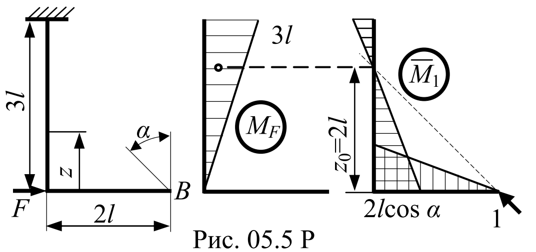


Рис. 05.5 Р

Работа силы F и, следовательно, потенциальная энергия деформации будет наибольшей при отсутствии лишней связи в сечении B (рис. 05.5 Р), то есть при $X_1 = 0$. Так как $X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11} = 0$ при $\Delta_{1F} = 0$, то центр тяжести эпюры M_F и нулевая точка эпюры M_1 должны иметь одинаковые ординаты $z_0 = 2l$.

Следовательно, $\alpha = 45^\circ$ и

$$U_{max} = \int_0^{3l} \frac{(F z)^2 \, dz}{2 E J} = \frac{54 F^2 l^3}{E a^4}.$$

Ответ: Запас потенциальной энергии деформации рамы максимален при $\alpha = 45^\circ$ и равен

$$U_{max} = \frac{54 F^2 l^3}{E a^4}.$$

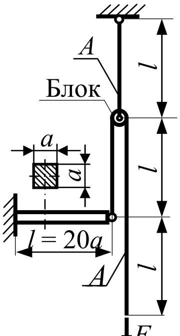


Рис. 05.6

05.6 Балка соединена с тросом, перекинутым через блок, и нагружена силой F (рис. 05.6). Блок подвешен к жесткой опоре двойным тросом. Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки равно 360 МПа. Найти работу силы F при a = 20 мм, E_1 = $2{\cdot}10^5$ МПа (балка), A = 20 мм^2, E_2 = $0{,}7{\cdot}10^5$ МПа (трос).

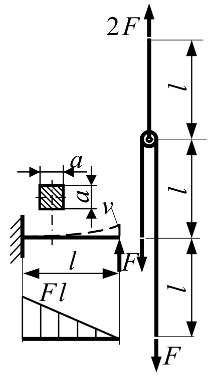


Рис. 05.6 Р

РЕШЕНИЕ

Из условия $\sigma = \dfrac{M_x}{W_x} = \dfrac{6Fl}{a^3}$

находим $F = \dfrac{\sigma a^3}{6l}$.

Прогиб балки, учитывая, что l = 20 a (рис. 05.6 Р)

$$v = \frac{Fl^3}{3E_1J_1} = \frac{800\sigma a}{3E_1} = \frac{800\cdot 360\cdot 0{,}02}{3\cdot 2\cdot 10^5} = 9{,}60 \text{ мм.}$$

Перемещение силы F, связанное с удлинением тросов:

$$\delta = \frac{F\cdot 3l}{E_2A} + \frac{2F\cdot 2l}{E_2A} = \frac{7Fl}{E_2A} = \frac{7\sigma a^3}{6E_2A} = \frac{7\cdot 360\cdot 0{,}02^3}{6\cdot 0{,}7\cdot 10^5\cdot 20\cdot 10^{-6}} = 2{,}40 \text{ мм.}$$

Суммарное перемещение $\Delta = v + \delta$ = 9,6 + 2,4 = 12,0 мм.

Работа

$$W = \frac{F\Delta}{2} = \frac{\sigma a^3\Delta}{12l} = \frac{\sigma a^2\Delta}{240} = \frac{360\cdot 10^6\cdot 0{,}02^2\cdot 0{,}012}{240} = 7{,}20 \text{ Н·м} = 7{,}20 \text{ Дж.}$$

Ответ: Работа силы F – W = 7,20 Дж.

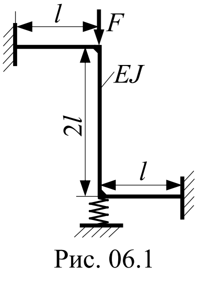


Рис. 06.1

2.13. *Олимпиада 2006 г., г. Улан-Удэ, ВСГУТУ*

06.1 Жёсткости рамы в направлении силы F и пружины одинаковы (рис. 06.1). Найти отношение наибольших линейных перемещений: вертикального и горизонтального. Дано: F, l, EJ = const.

РЕШЕНИЕ

Наибольшие перемещения возникают в среднем сечении вертикального стержня. На рис. 06.1 Р показаны эквивалентная система и эпюры изгибающих моментов для раскрытия статической неопределимости, эпюры изгибающих моментов в эквивалентной системе, а также эпюры изгибающих моментов для определения вертикального и горизонтального перемещений.

$$E J \delta_{11} = 2 \cdot (1 \cdot l \cdot 1) = 2l,$$

$$E J \Delta_{1F} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{F l}{2} \cdot l \cdot 1 = \frac{F l^2}{4},$$

$$X = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{F l}{8}.$$

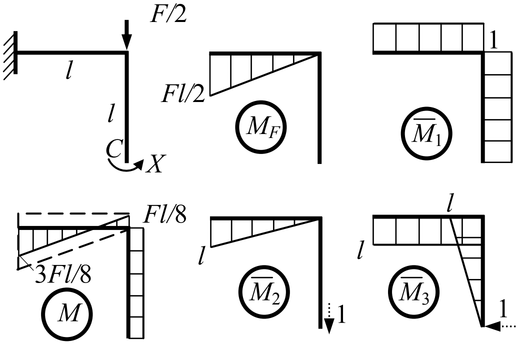


Рис. 06.1 Р

Вертикальное перемещение сечения *C*:

$$\Delta_{в} = \Delta_2 = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4Fl}{8} l \cdot \frac{2}{3} \cdot l - \frac{Fl}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l\right) = \frac{5 \cdot F \cdot l^3}{48 \cdot EJ},$$

горизонтальное перемещение:

$$\Delta_{г} = \Delta_3 = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4Fl}{8} \cdot l \cdot l - \frac{Fl}{8} \cdot l \cdot l - \frac{Fl}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l\right) = \frac{F \cdot l^3}{16 EJ},$$

их отношение $\Delta_{в}:\Delta_{г} = 5:3$.

Ответ: Отношение наибольших линейных перемещений $\Delta_{в}:\Delta_{г} = 1{,}667$.

06.2 Стержневая система нагружена силой *F*, а стержень *1* нагрет на Δt. Определить полное перемещение узла *K* (рис. 06.2). Дано: *F*, *l*, *A*, *E*, *α*, $\Delta t^{\circ} = \dfrac{5F}{6\alpha E A}$, $EA = \text{const}$.

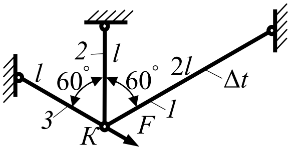


Рис. 06.2

РЕШЕНИЕ

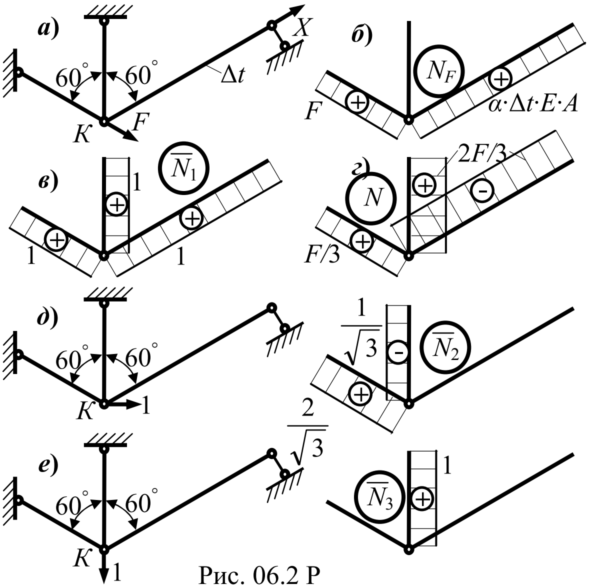


Рис. 06.2 Р

Система статически неопределима. На рис. 06.2Р показаны эквивалентная система, эпюры заданных воздействий (*б)* и единичной силы (*в*). После раскрытия статической неопределимости методом сил строим эпюру нормальных сил N в эквивалентной системе (рис. 06.2Р, *г*). Затем перемножением эпюр N и $\overline{N}_2$ определяем горизонтальное, а перемножением N и $\overline{N}_3$ – вертикальное перемещения сечения K.

$$EJ\delta_{11} = 1 \cdot l \cdot 1 + 1 \cdot l \cdot 1 + 1 \cdot 2l \cdot 1 = 4l;$$

$$EJ\Delta_{1F} = F \cdot l \cdot 1 + E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot 2l \cdot 1;$$

$$X = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{F}{4} - \frac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t^{\circ} \cdot E \cdot A = -\frac{2F}{3}.$$

$$EJ\Delta^{г} = EJ\Delta_2 = \frac{F}{3} \cdot l \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2F}{3} \cdot l \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0;$$

$$EJ\Delta^{в} = EJ\Delta_3 = \frac{2F}{3} \cdot l \cdot 1; \;\; \Delta_K = \Delta^{в} = \frac{2Fl}{3EA}.$$

Ответ: Полное перемещение узла K – $\Delta_K = \dfrac{2Fl}{3EA}$.

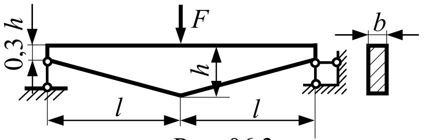


Рис. 06.3

06.3 Из условия прочности по нормальным напряжениям определить размер h поперечного сечения заданной балки (рис 06.3). Дано: F = 20 кН, [σ] = 150 МПа, l = 3 м, $b = 0{,}4 \cdot h$.

РЕШЕНИЕ

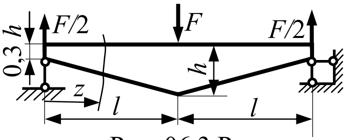


Рис. 06.3 Р

06.3 Составляем уравнение для нормальных напряжений в произвольном сечении балки (рис. 06.3Р) и ищем экстремум этой функции:

$$h(z) = 0{,}3h + 0{,}7h\frac{z}{l};$$

$$W_x(z) = \frac{bh^2(z)}{6} = \frac{0{,}4h^3}{6}\left(0{,}3 + 0{,}7\frac{z}{l}\right)^2 = \frac{h^3}{15}\left(0{,}3 + 0{,}7\frac{z}{l}\right)^2;$$

$$\sigma(z) = \frac{M_x(z)}{W_x(z)} = \frac{7{,}5Fz}{h^3\left(0{,}3 + 0{,}7\frac{z}{l}\right)^2};$$

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\frac{7{,}5Fz}{h^3\left(0{,}3 + 0{,}7\frac{z}{l}\right)^2}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{7}l;$$

$$\sigma_{экст} = \frac{7{,}5F \cdot \frac{3l}{7}}{h^3\left(0{,}3 + 0{,}7 \cdot \frac{3l}{7l}\right)^2} = \frac{8{,}929Fl}{h^3} \le [\sigma].$$

Тогда $h \ge \sqrt[3]{\frac{8{,}929Fl}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{8{,}929 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 3}{150 \cdot 10^6}} = 153$ мм.

Ответ: Максимальная высота поперечного сечения – h = 153 мм.

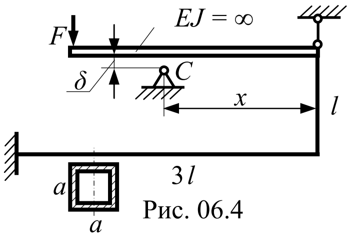


Рис. 06.4

06.4 Под действием силы F зазор δ закрывается (рис. 06.4). При каком положении x подвижной опоры C обеспечивается прочность рамы? Дано: l = 400 мм, a = 60 мм, δ = 4 мм, $E = 0{,}7\cdot10^5$ МПа, $[\sigma]$ = 120 МПа.

РЕШЕНИЕ

Определим угол поворота сечения K способом Верещагина (рис. 06.4 Р) из условия касания подвижной опоры C:

$$\theta_K = \frac{\delta}{x} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1{,}5M\cdot 3l\cdot 1 - 0{,}5M\cdot 3l\cdot 1 + M\cdot l\cdot 1\right) = \frac{7Ml}{4EJ},$$

откуда $x = \dfrac{4EJ\delta}{7Ml}$.

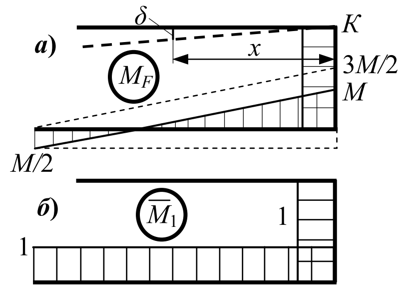


Рис. 06.4 Р

Из условия прочности $M = [\sigma]\cdot W$, учитывая, что $J/W = a/2$,

получим $x = \dfrac{2Ea\delta}{7l[\sigma]} = \dfrac{2\cdot 0{,}7\cdot 10^{11}\cdot 0{,}06\cdot 0{,}004}{7\cdot 0{,}4\cdot 120\cdot 10^{6}} = 100$ мм.

Ответ: Прочность рамы обеспечивается при x = 100 мм.

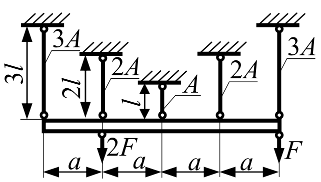


Рис. 06.5

06.5 Определить работу внешних сил (рис. 06.5). Деформациями траверсы пренебречь. Дано: F, l, E, A.

РЕШЕНИЕ

Жёсткость всех элементов стержневой системы $k = l/(E\cdot A)$ = const, следовательно, $\Delta l = k\cdot N$.

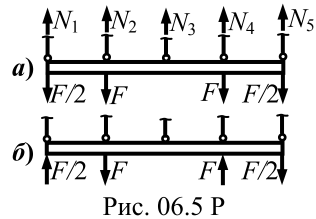


Рис. 06.5 Р

Представляя заданную нагрузку как сочетание симметричного (рис. 06.5 Р, *а*) и кососимметричного (рис. 06.5 Р, *б*) нагружений, получим: в первом варианте

$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_5 = 3 \cdot F/5$, во втором – $N_i = 0$. Следовательно $\Delta l_i = k \cdot N_i = \Delta l = \text{const}$.

Тогда работа внешних сил составит

$$W = \frac{(F + 2F)\Delta l}{2} = \frac{3FkN}{2} = \frac{0{,}9F^2 l}{EA}.$$

Ответ: Работа внешних сил – $W = \dfrac{0{,}9F^2 l}{EA}$.

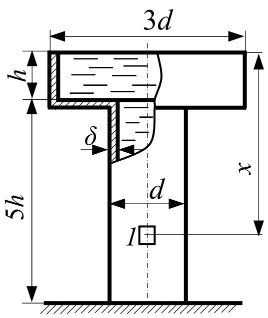


Рис. 06.6

06.6 Тонкостенная оболочка (рис. 06.6) находится под внутренним гидростатическим давлением. Найти положение элемента оболочки *1*, испытывающего чистый сдвиг. Дано: h, γ [Н/м^3] – объёмный вес жидкости.

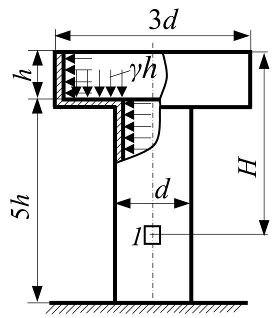


Рис. 06.6 Р

РЕШЕНИЕ

Ординату элемента *1* обозначим через H (рис. 06.6 Р). При сдвиге $\sigma_1 = -\sigma_3$ (1).

Окружное напряжение в элементе равно

$\sigma_t = \sigma_1 = \dfrac{\gamma H d}{2\delta}$, а меридиональное –

$$\sigma_m = \sigma_3 = \frac{-\pi\gamma h}{4\pi d\delta}(9d^2 - d^2) = \frac{-2\gamma h d}{\delta}.$$

Из условия (1) следует, что $H = 4 \cdot h$.

Ответ: Элемент оболочки *1* испытывает чистый сдвиг при $H = 4 \cdot h$.

2.14. *Олимпиада 2007 г., г. Новочеркасск, ЮРГТУ*

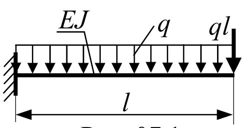


Рис. 07.1

07.1 Для заданной балки (рис. 07.1), вычислить: а) работу внешних сил, б) потенциальную энергию деформации. Дано: q, l, EJ.

РЕШЕНИЕ

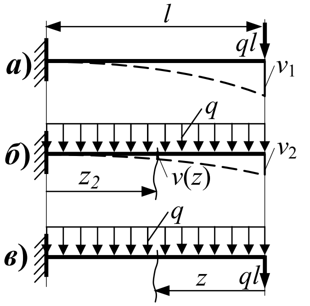


Рис. 07.1 Р

Любым способом (или из справочников) определяем перемещения консоли от сосредоточенной $v_1 = \frac{q\,l^4}{3EJ}$ и распределённой $v_2 = \frac{q\,l^4}{8EJ}$ сил. Затем определяем совместную работу этих сил. Вначале прикладывается сила $F = ql$ (рис. 07.1Р, *а,*), а затем – q (рис. 07.1Р, *б*).

$$W_1 = \frac{F\,v_1}{2} + F\,v_2 = \frac{ql\cdot ql^4}{6EJ} + \frac{ql\cdot ql^4}{8EJ} = \frac{7q^2 l^4}{24EJ}.$$

Перемещения в произвольном сечении z от нагрузки q равны (метод начальных параметров) $v_2(z_2) = -\frac{q\,l^2 z_2^2}{4} + \frac{q\,l\,z_2^3}{6} - \frac{q\,z_2^4}{24}$, поэтому

$$W_2 = -\frac{1}{2EJ}\int_0^l q\,v_2(z_2)\,dz_2 = \frac{q^2 l^4}{24EJ} - \frac{q^2 l^4}{48EJ} + \frac{q^2 l^4}{240EJ} = \frac{q^2 l^4}{40EJ}.$$

Тогда $W = W_1 + W_2 = \frac{7q^2 l^4}{24EJ} + \frac{q^2 l^4}{40EJ} = \frac{19q^2 l^4}{60EJ}$.

Изгибающий момент в произвольном сечении z (рис. 07.1Р, *в*)

$$M_x = -\left(q\,l\,z + \frac{q\,z^2}{2}\right) = -\frac{q}{2}\left(2lz + z^2\right).$$

Потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2EJ}\int_0^l M_x^2\,dz = \frac{q^2}{8EJ}\int_0^l \left(2lz + z^2\right)^2 dz = \frac{q^2}{8EJ}\left(\frac{4}{3}l^4 + l^4 + \frac{1}{5}l^4\right) = \frac{19q^2 l^4}{60EJ}.$$

Ответ: Работа внешних сил – $W = \frac{19q^2 l^4}{60EJ}$, потенциальная энергия деформации – $U = \frac{19q^2 l^4}{60EJ}$.

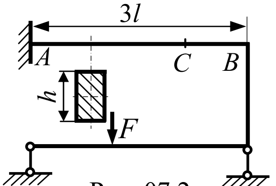


Рис. 07.2

07.2 На участке AB (рис. 07.2) наибольшее перемещение $v_C = 2$ мм. Найти σ_{max} в этом сечении при $l = 200$ мм, $h = 40$ мм, $E = 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ

Так как $v_B = 0$ (опора), то $M_B = -2M_A$. Схема нагружения и эпюра изгибающих моментов при $M_B = M$ показана на рис. 07.2 Р. Из условия $v'(z) = 0$ находим $z = 2l$ и $v_{\max} = Ml^2/3EJ = v_C$, откуда $M = 3EJv_C/l^2$. Так как $M_C(z{=}2l) = M/2$, то

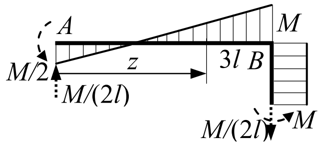


Рис. 07.2 Р

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{2W} = \frac{3Ehv_C}{4l^2} = \frac{3\cdot 10^5\cdot 0{,}04\cdot 0{,}002}{4\cdot 0{,}2^2} = 150\,\text{МПа}.$$

Ответ: Наибольшее напряжение в сечении C – $\sigma_{\max} = 150$ МПа.

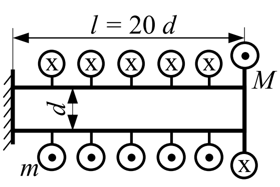


Рис. 07.3

07.3 Наибольшее угловое перемещение $\varphi_{\max}$ в стержне и угол поворота торцевого сечения (рис. 07.3) равны по величине. Найти наибольшее касательное напряжение при $m = 100$ Нм/м, $d = 10$ мм.

РЕШЕНИЕ

Поворот произвольного сечения $GJ_p\varphi_z = M_0z - mz^2/2$. Координата сечения с наибольшим углом поворота $\varphi_z = \varphi_{\max}$ равна $a = M_0/m$ (рис. 07.3 Р). По условию задачи $\varphi_a = \varphi_l$,

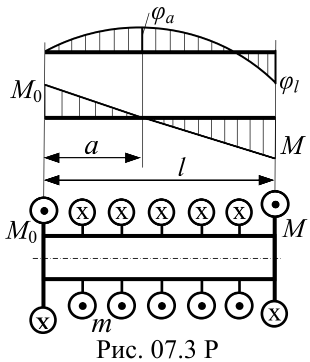


Рис. 07.3 Р

$$M_0a - \frac{ma^2}{2} = -\left(M_0l - \frac{ml^2}{2}\right),$$

откуда находим $a = 0{,}414l = M_0/m$ и $M_0 = 0{,}414ml$.

Следовательно, $M_{\max} = 0{,}586ml$ и

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_P} = \frac{0{,}586 \cdot m \cdot 20 \cdot d \cdot 16}{\pi \cdot d^3} = \frac{0{,}586 \cdot 100 \cdot 20 \cdot 16}{\pi \cdot 0{,}01^2} = 59{,}7\,\text{МПа}.$$

Ответ: Наибольшее касательное напряжение – $\tau_{\max} = 59{,}7\,\text{МПа}$.

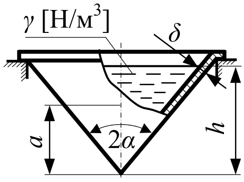


Рис. 07.4

07.4 На каком уровне a тонкостенная оболочка (рис. 07.4) равномерно растянута в окружном и меридиональном направлениях? Дано: h, δ, γ, $\alpha = 30^{\circ}$.

РЕШЕНИЕ

Из уравнения Лапласа имеем (рис. 07.4 Р)

$$\sigma_t = \frac{\gamma(h-a)\rho_t}{\delta} = \frac{\gamma(h-a)a\,tg\,30^{\circ}}{\delta\cos 30^{\circ}} = \frac{2\gamma a(h-a)}{3\delta}.$$

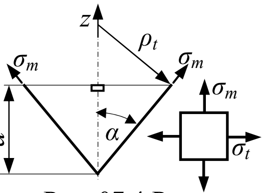


Рис. 07.4 Р

Из уравнения равновесия отсечённой части получаем выражение для меридионального напряжения $\sigma_m = \dfrac{\gamma a\left(h - \dfrac{2a}{3}\right)}{3\delta}$.

По условию задачи $\sigma_t = \sigma_m$, откуда $a = 3h/4$.

На этом уровне $\sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{\gamma h^2}{8\delta}$, $\sigma_3 = 0$ (на внешней стороне оболочки).

Ответ: Тонкостенная оболочка равномерно растянута в окружном и меридиональном направлениях при $a = 3h/4$.

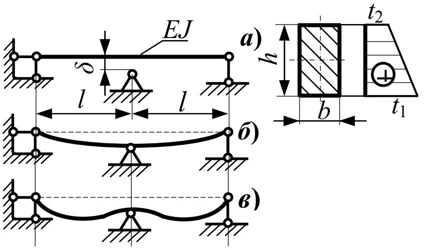


Рис. 07.5

07.5 Температура стержня изменяется по высоте сечения (рис. 07.5, *а*). При некотором значении $t = t_1 - t_2$ кривизна достигает значения k и зазор δ закрывается (рис. 07.5, *б*). Найти наибольшее нормальное напряжение в среднем сечении стержня при $t_1 - t_2 = nt$, полагая, что кривизна оси в этом сечении равна – k (рис. 07.5, *в*). Дано: $h = 60$ мм, $l = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\delta = l/600$.

РЕШЕНИЕ

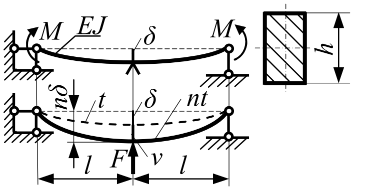


Рис. 07.5 Р

Кривизна оси стержня при закрытии зазора δ составляет $k = \dfrac{\alpha t}{h}$, где α – коэффициент линейного расширения материала. При этом форма изогнутой оси соответствует нагружению стержня моментами M (рис. 07.5 Р, *а*) и $\delta = \dfrac{Ml^2}{2EJ}$. Так как $k = \dfrac{M}{EJ} = \dfrac{\alpha t}{h}$, то $\delta = \dfrac{\alpha t l^2}{2h}$.

При $t_1 - t_2 = nt > t$ реакция средней опоры (рис. 07.5 Р, *б*) определяется уравнением $v = n\delta - \delta$. Учитывая, что $v = \dfrac{Fl^3}{6EJ}$, получим $F = \dfrac{6EJ\delta(n-1)}{l^3}$. Кривизна оси стержня в среднем сечении равна $k^* = \dfrac{\alpha n t}{h} - \dfrac{Fl}{2EJ}$. По условию задачи $k^* = -k = -\alpha t/h$. В этом случае $F = \dfrac{2EJ\alpha t(n+1)}{hl} = \dfrac{4EJ\delta(n+1)}{l^3}$.

Приравнивая полученные для F выражения, находим, что $n = 5$, тогда $F = \dfrac{24EJ\delta}{l^3}$ и наибольшее нормальное напряжение в среднем сечении стержня составит

$$\sigma_{наиб} = \frac{Fl}{2W} = \frac{6Eh\delta}{l^2} = \frac{6\cdot 2\cdot 10^5\cdot 0{,}06}{600\cdot 1^2} = 120\ \text{МПа}.$$

Ответ: В сечении, кривизна оси в котором равна – k, наибольшее нормальное напряжение – $\sigma_{наиб}$ = 120 МПа.

07.6 После введения шарнира C напряженное состояние стержня (рис. 07.6, *б*) под действием собственного веса не изменилось. На каком расстоянии от шарнира находится сечение с наибольшим линейным перемещением, если l = 1,4 м?

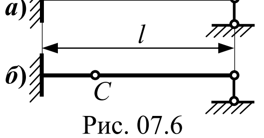


Рис. 07.6

РЕШЕНИЕ

Раскрывая статическую неопределимость, находим реакции опор (рис. 07.6Р, *б*). Из условия $M(z) = -\frac{ql^2}{8} + \frac{5ql}{8}z - \frac{q}{2}z^2 = 0$ определяем положение шарнира $z_1 = l/4$. Из условия

$$v'(z_2) = -\frac{ql^2 z_2}{8} + \frac{5qlz_2^2}{16} - \frac{qz_2^3}{6} = 0$$

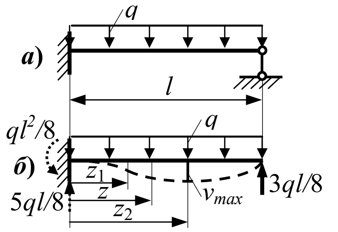


Рис. 07.6 Р

находим абсциссу сечения, для которого $v = v_{max}$: $z_2 = 0{,}578l$. Искомое расстояние составит $a = z_2 - z_1 = (0{,}578 - 0{,}25)\cdot 1{,}4 = 0{,}459$ м.

Ответ: Сечение с наибольшим линейным перемещением находится на расстоянии $a = 0{,}459$ м от шарнира.

2.15. *Олимпиада 2008 г., г. Дзержинск, ДФ НГТУ*

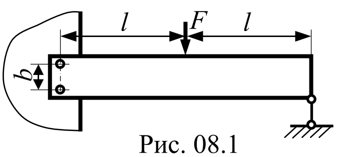


Рис. 08.1

08.1 Кронштейн закреплён слева двумя заклёпками, справа – шарнирной опорой (рис. 08.1). Определить силу F, разрушающую заклёпочное соединение, если усилие среза равно Q.

Дано: Q, $l/b = 40$.

РЕШЕНИЕ

В заклёпанном сечении возникают и сила, и момент (рис. 08.1Р, *в*). Т.к. деформирование кронштейна не имеет значения, то не имеет значения и его форма в месте крепления слева. Эпюры M_x и Q_y после раскрытия статической неопределимости показаны на рис. 08.1Р, *б*. Из уравнений равновесия определяем силы, действующие на заклёпки $R = Q_B/2 = 11F/32$, $S = M_B/b = 6Fl/16b$.

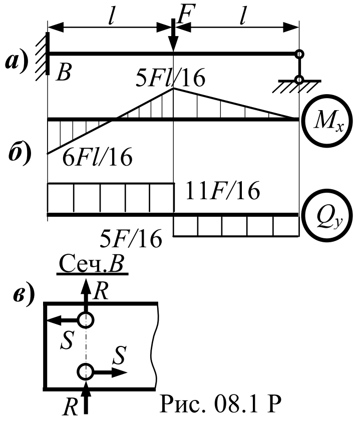


Рис. 08.1 Р

Условие прочности заклёпок:

$$R^2+S^2\le Q^2 \Rightarrow \left(\frac{11F}{32}\right)^2+\left(\frac{6Fl}{16b}\right)^2\le Q^2$$, отсюда $F = 0{,}0666\ Q$.

Ответ: Сила, разрушающая заклёпочное соединение, – $F = 0{,}0666\ Q$.

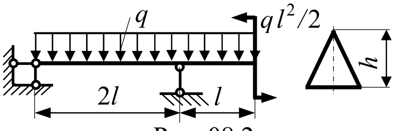


Рис. 08.2

08.2 Продольная деформация ε, измеренная в середине пролёта, составляет $4\cdot10^{-4}$. При $l = 20h$ и $h = 20$ мм вычислить прогиб в середине пролёта, считая деформации упругими (рис. 08.2).

РЕШЕНИЕ

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 08.2 Р, *а*. Прогиб в середине пролёта составляет (рис. 08.2 Р, *б*)

$$EJv_K=\frac{1}{2}2ql^2\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2}-2\left(\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{l}{2}\right)=\frac{5ql^4}{24}.$$

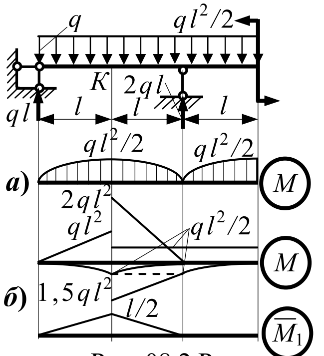


Рис. 08.2 Р

Найдём продольную деформацию в середине пролёта

$$\varepsilon_K=\frac{\sigma}{E}=\frac{M_K\,y_{наиб}}{EJ}=\frac{ql^2\,\frac{2}{3}h}{2EJ}=\frac{ql^2h}{3EJ}.$$

Отсюда $\dfrac{ql^2}{EJ}=\dfrac{3\varepsilon_K}{h}$. Подставляя найденное значение в выражение для v_K и числовые данные, получим

$$v_K=\frac{5ql^4}{24EJ}=\frac{5l^2\,3\varepsilon_K}{24h}=$$

$$=\frac{5\cdot(20\cdot0{,}02)^2\cdot3\cdot4\cdot10^{-4}}{24\cdot0{,}02}=2{,}00\,\text{мм}.$$

Ответ: Прогиб в середине пролёта – $v_K = 2{,}00$ мм.

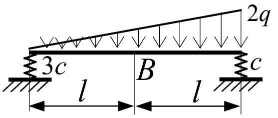


Рис. 08.3

08.3 Балка установлена на упругих опорах (рис. 08.3). Найти линейное перемещение сечения B, полагая $c = \dfrac{4FJ}{3l^3}$.

РЕШЕНИЕ

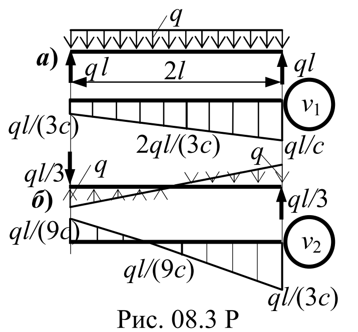


Рис. 08.3 Р

Внешняя нагрузка раскладывается на симметричную (рис. 08.3 Р, *а*) и кососимметричную (рис. 08.3 Р, *б*) составляющие. Суммарное перемещение середины жёсткой балки за счёт перемещений концевых сечений

$$v_o = v_1 + v_2 = \frac{2ql}{3c} + \frac{ql}{9c} = \frac{7ql}{9c}.$$

Упругое перемещение середины балки при кососимметричном нагружении равно нулю, при симметричном – $f = 5ql^4/24EJ$. Тогда полное перемещение

$$v = v_o + f = \frac{7ql \cdot 3l^3}{9 \cdot 4EJ} + \frac{5ql^4}{24EJ} = \frac{19ql^4}{24EJ}.$$

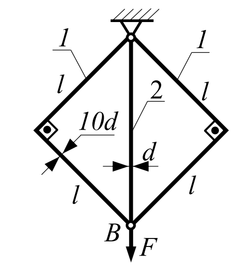


Рис. 08.4

Ответ: Линейное перемещение сечения B – $v = \dfrac{19ql^4}{24EJ}$.

08.4 Найти перемещение узла B (рис. 08.4). Дано: F, E, d, $l = 100\,d$.

РЕШЕНИЕ

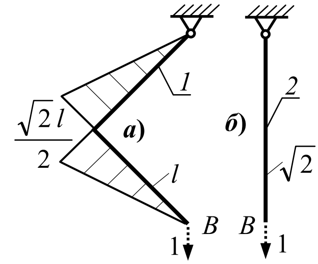


Рис. 08.4 Р

Перемещение узла B равно $w_B = F/k$, $k = 2k_1 + k_2$, где k_1 и k_2 – жёсткости элементов *1* и *2* соответственно.

Определим податливости и жёсткости элементов.

Элемент *1* (рис. 08.4 Р, *а*):

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ_1}\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,l}{2}\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}l}{2}\right)\cdot 2=\frac{l^3}{3EJ_1}=\frac{(100d)^3\cdot 64}{3\cdot E\cdot\pi\cdot(10d)^4}=\frac{679}{Ed},$$

$$k_1=\frac{1}{\delta_{11}}=\frac{Ed}{679}=14{,}73\cdot 10^{-4}\,Ed.$$

Элемент *2* (рис. 08.4 Р, *б*):

$$\delta_{22}=\frac{1\cdot l\sqrt{2}\cdot 1}{EA_2}=\frac{100\cdot d\cdot\sqrt{2}\cdot 4}{E\cdot\pi\cdot d^2}=\frac{180}{Ed},$$

$$k_2=\frac{1}{\delta_{22}}=\frac{Ed}{180}=55{,}54\cdot 10^{-4}\,Ed\ .$$

Теперь $k=2k_1+k_2=(2\cdot 14{,}73+55{,}54)\cdot 10^{-4}\,Ed=85{,}0\cdot 10^{-4}\,Ed$ и тогда $w_B=\dfrac{F}{k}=\dfrac{F}{85\cdot 10^{-4}Ed}=117{,}6\dfrac{F}{Ed}$.

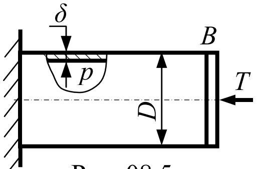


Рис. 08.5

Ответ: Перемещение узла *B* –

$$w_B=117{,}6\frac{F}{Ed}.$$

08.5 Тонкостенная оболочка нагружена внутренним давлением *p* и силой *T* (рис. 08.5). При каком значении силы *T* осевое перемещение сечения *B* составит $w_B=\dfrac{5pl(1-2\mu)}{8E}$? Краевой эффект не учитывать, *D*/*δ* = 10.

РЕШЕНИЕ

Из безмоментной теории оболочек $\sigma_m=\dfrac{pD}{4\delta}$, $\sigma_t=\dfrac{pD}{2\delta}$.

$\varepsilon_m=\dfrac{\sigma_m-\mu\sigma_t}{E}=\dfrac{pD(1-2\mu)}{4\delta E}$, где σ_m и σ_t – меридиональное и окружное напряжения (рис. 08.5Р).

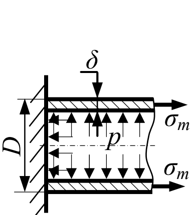


Рис. 08.5 Р

Перемещения сечения *B*:

$$w_B=\varepsilon_m l-\frac{Tl}{EA}=\frac{pD(1-2\mu)l}{4\delta E}-\frac{Tl}{E\pi D\delta},$$

где *A* – площадь поперечного сечения оболочки.

По условию $w_B = \dfrac{5pl(1-2\mu)}{8E}$. Здесь возможны два варианта: движение вправо и движение влево.

Движение вправо:

$$\frac{10p(1-2\mu)l}{4E} - \frac{Tl}{0{,}1E\pi D^2} = \frac{5pl(1-2\mu)}{8E} \quad \Rightarrow \quad T = 0{,}1875\, p\pi D^2(1-2\mu).$$

Движение влево:

$$\frac{10p(1-2\mu)l}{4E} - \frac{Tl}{0{,}1E\pi D^2} = -\frac{5pl(1-2\mu)}{8E} \quad \Rightarrow \quad T = 0{,}3125\, p\pi D^2(1-2\mu).$$

Ответ: При $T = 0{,}1875\, p\pi D^2(1-2\mu)$ сечение B перемещается влево, а при $T = 0{,}3125\, p\pi D^2(1-2\mu)$ – вправо на $w_B = \dfrac{5pl(1-2\mu)}{8E}$.

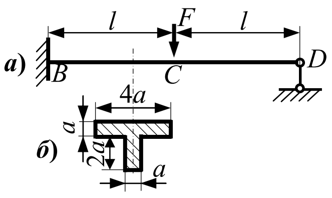


Рис. 08.6

08.6 Опора D может перемещаться по вертикали (рис. 08.6, *а*).

1) На сколько надо переместить опору D после приложения силы F, чтобы обеспечить равенство максимальных нормальных напряжений в сечениях B и C?

2) Как правильно расположить заданное сечение (рис. 08.6, *б*), если $\sigma_{тс} = 2\sigma_{тр}$? $\sigma_{тр}$ и $\sigma_{тс}$ – пределы текучести при растяжении и сжатии соответственно.

РЕШЕНИЕ

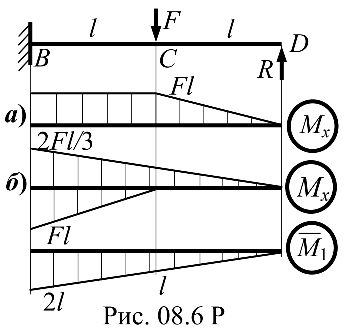


Рис. 08.6 Р

1) Равенство максимальных нормальных напряжений в сечениях B и C обеспечивается при $|M_B| = |M_C|$.

Это возможно в двух вариантах перемещения опоры:

Вариант 1 (рис. 08.6 Р, *а*):
$Rl = 2Rl - Fl$, откуда $R = F$.

Перемножение эпюр M_x и $\overline{M}_1$ дает $v_D = -\dfrac{1}{EJ}\left(\dfrac{1}{2}Fl \cdot l \cdot \dfrac{2}{3} \cdot l + Fl \cdot l \cdot \dfrac{3}{2}l\right) = -\dfrac{11Fl^3}{6EJ}$ (вверх).

Вариант 2 (рис. 08.6 Р, *б*): $-Rl = 2Rl - Fl$; $R = F/3$ даёт

$$v_D = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{1}{2}\frac{2Fl}{3}\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2l + \frac{1}{2}Fl\cdot l\cdot(\frac{2}{3}l + l)\right) = -\frac{Fl^3}{18EJ} \text{ (вверх).}$$

2) При $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}}/2$ полку таврового сечения следует располагать в зоне растяжения, поэтому в варианте 1 полка должна быть снизу, в варианте 2 – безразлично.

Ответ: Чтобы обеспечить равенство максимальных нормальных напряжений в сечениях *B* и *C* опору *D* нужно перемещать вверх: вариант 1 – $v_D = \dfrac{11Fl^3}{6EJ}$, вариант 2 – $v_D = \dfrac{Fl^3}{18EJ}$. В варианте 1 полка должна быть снизу, в варианте 2 – безразлично.

2.16. *Олимпиада 2009 г., г. Улан-Удэ, ВСГУТУ*

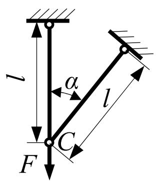


Рис. 09.1

09.1 Система из двух одинаковых стержней нагружена вертикальной силой *F* (рис. 09.1). Определить полное перемещение точки *C*. Дано: перемещения малы, площадь стержней *A*, длина *l*, модуль упругости *E*, $\alpha = 30^\circ$.

РЕШЕНИЕ

<u>1-й способ</u>

Нагружен только 1-й стержень (вертикальный): $N_1 = F$, $N_2 = 0$.

Таким образом, вертикальное перемещение точки *C* равно

$$\Delta_C^{в} = \Delta l_1 = \frac{Fl}{EA}.$$

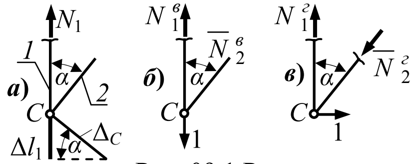


Рис. 09.1 Р

Второй стержень не деформируется и поворачивается относительно точки крепления (рис. 09.1Р).

$$\Delta_C^{г} = \Delta l_1 \cdot \text{ctg}\alpha \text{ и } \Delta_C = \frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ} = \frac{2Fl}{EA}.$$

2-й способ

Найдём горизонтальное и вертикальное перемещения точки C, приложив единичные силы в соответствующем направлении (рис. 09.1 Р, *б-в*) и вычислив интеграл Мора.

$\overline{N}_1^{в}=1;\quad \overline{N}_2^{в}=0;\quad \overline{N}_1^{г}=\dfrac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{3};\quad \overline{N}_2^{г}=\dfrac{1}{\sin 30^\circ}=2.$ Тогда

$$\Delta_C^{в}=\frac{Fl}{EA},\ \ \Delta_C^{г}=\frac{1}{EA}\cdot F\cdot l\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\,Fl}{EA},\ \ \Delta_C=\sqrt{\left(\Delta_C^{г}\right)^2+\left(\Delta_C^{в}\right)^2}=\frac{2Fl}{EA}.$$

Ответ: Полное перемещение точки C – $\Delta_C=\dfrac{2Fl}{EA}$.

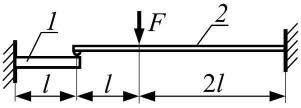


Рис. 09.2

09.2 Стержень *2* с жёсткостью EJ опирается на стержень *1* с жёсткостью kEJ (рис. 09.2). При каком значении k прочность стержня *2* будет максимальна?

РЕШЕНИЕ

Расчётная схема показана на рис. 09.2 Р. Взаимное перемещение точек C равно нулю, то есть

$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0,$

$$\delta_{11}=\frac{1}{kEJ}\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot l\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 3l\cdot 3l\cdot\frac{2}{3}\cdot 3l\right)=$$

$$=\frac{l^3}{3kEJ}+\frac{9l^3}{EJ}=\frac{l^3(1+27k)}{3kEJ},$$

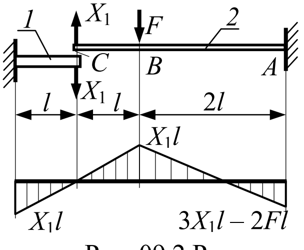


Рис. 09.2 Р

$$\Delta_{1F}=-\frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2}\cdot 2Fl\cdot 2l\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2l+l\right)\right]=-\frac{14Fl^3}{3EJ}.$$

Таким образом: $X_1=-\dfrac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}=\dfrac{14kF}{1+27k}$.

Понятно, что прочность стержня *2* будет максимальной, если $M_A=M_B$. Поэтому $-(3X_1l-2Fl)=X_1l$ или $X_1=F/2$.

Тогда $\dfrac{F}{2}=\dfrac{14kF}{1+27k}$, откуда следует, что $k=1$.

Ответ: Прочность стержня *2* будет максимальна при $k=1$.

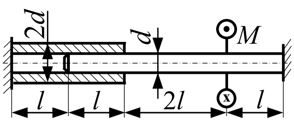


Рис. 09.3

09.3 В трубку с натягом вставлен стержень (рис. 09.3). Считая давление p между трубкой и стержнем постоянным по поверхности контакта, определить минимальное значение момента M, при котором начнётся проскальзывание стержня относительно трубки по всей поверхности контакта. Дано: p, l, d, коэффициент трения f, модули сдвига для трубки и стержня соотносятся как $G_{\text{ст}} = 5\cdot G_{\text{тр}}$.

РЕШЕНИЕ

В предельном состоянии распределённый момент сил трения имеет интенсивность

$$m=2\pi\frac{d}{2}f\,p\frac{d}{2}=\pi\frac{d^2}{2}f\,p.$$

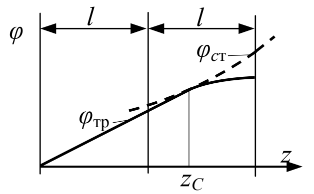


Рис. 09.3 Р

Рассмотрим нагружение трубки и стержня раздельно (рис. 09.3 Р). В момент начала проскальзывания существует сечение C с координатой z_C, для которого углы поворота стержня и трубки равны. Причём нужно учесть, что углы поворота сечений стержня на остальных участках контакта должны быть больше соответствующих углов поворота сечений трубки. Если построить эпюры углов поворота для стержня и трубки на участке контакта, то единственно возможная ситуация соотношения углов будет такой, как показано на рис. 09.3 Р. В этом случае координату z_C можно найти из условия

$$\frac{d}{dz}\varphi_{\text{тр}}=\frac{d}{dz}\varphi_{\text{ст}} \quad \text{или} \quad \frac{M_к^{\text{тр}}}{G_{\text{тр}}J_p^{\text{тр}}}=\frac{M_к^{\text{ст}}}{G_{ст}J_p^{\text{ст}}}.$$

Учитывая, что полярный момент трубки равен $J_p^{\text{тр}}=15J_p^{\text{ст}}$, получим $M_к^{\text{тр}}=3M_к^{\text{ст}}$ или $ml-mz_C=3mz_C$, откуда получим $z_C = l/4$.

Тогда для углов поворота системы имеем: $\Delta\varphi_{\text{тр}}+\Delta\varphi_{\text{ст}}=0$, где $\Delta\varphi_{\text{тр}}$ – угол закручивания трубки на участке до координаты z_C,

$$\Delta\varphi_{\text{тр}} = \frac{ml^2}{G_{\text{тр}} J_p^{\text{тр}}} + \frac{(ml + ml - mz_C)z_C}{2G_{\text{тр}} J_p^{\text{тр}}},$$

$\Delta\varphi_{\text{ст}}$ – угол закручивания стержня, начиная с координаты z_C до правой заделки:

$$\Delta\varphi_{\text{ст}} = \frac{(ml + mz_C)(l - z_C)}{2G_{\text{ст}} J_p^{\text{ст}}} + \frac{2ml^2}{G_{\text{ст}} J_p^{\text{ст}}} + \frac{(ml - M)l}{G_{\text{ст}} J_p^{\text{ст}}}.$$

Суммируя углы поворота $-4mz_C^2 + 2mlz_C + 23ml^2 - 6Ml = 0$ и подставляя $z_C = l/4$, получим $M = 31ml/8$.

Окончательно запишем

$$M = \frac{31}{16}\pi d^2 fpl = 6{,}09 fpld^2.$$

Ответ: Проскальзывание стержня относительно трубки по всей поверхности контакта начнется при $M = 6{,}09 fpld^2$.

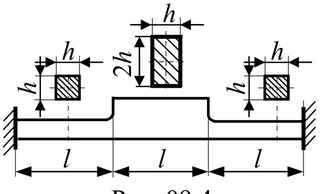


Рис. 09.4

09.4 Ступенчатый стержень закреплен между двумя жёсткими опорами (рис. 09.4). Определить напряжения, возникающие в центральном участке, при равномерном нагреве всего стержня на Δt. Дано: температурный коэффициент линейного расширения стержня α, модуль упругости E.

РЕШЕНИЕ

Эквивалентная система показана на рис. 09.4 Р, *а*.

Изгибающий момент M_x в поперечных сечениях крайних участков равен M, центрального участка – $M - Rh/2$.

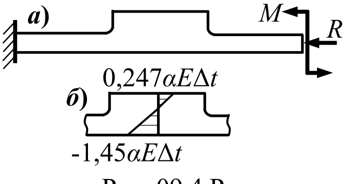


Рис. 09.4 Р

Силу R определяем из условия равенства нулю изменения длины стержня $\alpha \cdot 3l \cdot \Delta t = \dfrac{R \cdot 2l}{E \cdot h^2} + \dfrac{R \cdot l}{E \cdot 2h^2} = \dfrac{5Rl}{2Eh^2}$.

В результате получим $R = \dfrac{6}{5}\,\alpha\,\Delta t\,E\,h^2$.

Условие равенства нулю угла поворота на правом краю стержня дает возможность определить соотношение между моментом M и силой R:

$$\int\limits_0^{3l} \frac{M_x(z)}{EJ_x(z)}dz = 0 \text{ или } \frac{M \cdot 2l}{E \cdot J_x^{(1)}} + \frac{M \cdot l}{E \cdot J_x^{(2)}} = \frac{R\,h \cdot l}{2 \cdot E \cdot J_x^{(2)}} = 0\,.$$

Из последнего выражения, учитывая $J_x^{(1)} = \dfrac{h^4}{12}$ и $J_x^{(2)} = \dfrac{2h^4}{3}$,

получаем $M = \dfrac{1}{34}\,R\,h$.

Центральный (2-й) участок стержня находится в состоянии одновременного изгиба и сжатия – распределение напряжений по высоте поперечного сечения линейное. Напряжения в крайних волокнах сечений вычислим по формуле $\sigma = \dfrac{R}{2h^2} + \dfrac{M - Rh/2}{h(2h)^2/6}$.

Наибольшее растягивающее напряжение (верхние волокна) составляет 0,247 $\alpha E \Delta t$, сжимающее (нижние волокна) – 1,45 $\alpha E \Delta t$ (см. рис. 09.4 Р, *б*).

Следует отметить, что в крайних участках нет областей с растягивающими напряжениями.

Ответ: В центральном участке наибольшее растягивающее напряжение (верхние волокна) составляет 0,247 $\alpha E \Delta t$, сжимающее (нижние волокна) – 1,45 $\alpha E \Delta t$.

09.5 Стержень *2* закреплён на вращающемся с угловой скоростью ω жёстком диске *1* (рис. 09.5). Найти максимальное напряжение в стержне и изменение его длины по сравнению с неподвижным состоянием.

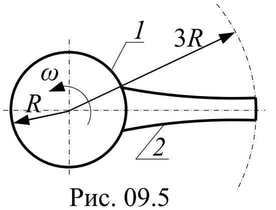


Рис. 09.5

Дано: зависимость площади поперечного сечения от радиуса $A(r) = A_0 R/r$, плотность ρ и модуль упругости E материала стержня.

РЕШЕНИЕ

Расчётная схема показана на рис. 09.5 Р.

Выражение для распределённой инерционной силы $q(r)$ запишем в виде

$$q(r) = \rho A r \omega^2 = \rho A_0 R \omega^2.$$

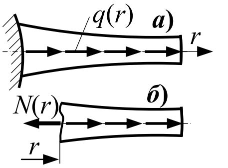


Рис. 09.5 Р

Нормальную силу в поперечном сечении стержня вычислим следующим образом (рис. 09.5 Р, *а*):

$$N(r) = \int_r^{3R} q(r)\,dr = \rho A_0 R \omega^2 (3R - r).$$

Тогда нормальное напряжение в поперечном сечении стержня зависит от радиуса как $\sigma(r) = \dfrac{N(r)}{A(r)} = \rho r \omega^2 (3R - r)$.

Максимального значения напряжение достигнет при $r = 1{,}5R$ и будет равно $\sigma_{\max} = 2{,}25 \rho \omega^2 R^2$.

Изменение длины стержня вычисляется как

$$\Delta l = \frac{1}{E}\int_R^{3R} \sigma(r)\,dr = \frac{10}{3E}\rho\omega^2 R^3.$$

Ответ: Максимальное напряжение в стержне – $\sigma_{\max} = 2{,}25 \rho \omega^2 R^2$, а изменение его длины – $\Delta l = \dfrac{10}{3E}\rho\omega^2 R^3$.

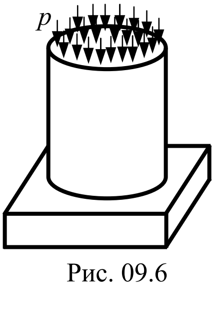


Рис. 09.6

09.6 Сплошной резиновый цилиндр вставлен без зазора в тонкостенную алюминиевую трубку диаметром $D_{\text{ср}}$ = 100 мм и толщиной h = 1 мм (рис. 09.6). Определить возникающие в трубке напряжения и изменение её диаметра при нагружении цилиндра по торцу давлением p = 2 МПа (рис. 09.6). Упругие постоянные резины: E = 40 МПа, μ = 0,45; алюминия: $E = 7\cdot10^4$ МПа. Трением между трубкой, цилиндром и жёстким основанием пренебречь.

РЕШЕНИЕ

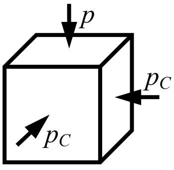


Рис. 09.6 Р

Напряжённое состояние для резинового цилиндра показано на рис. 09.6 Р, где p_c – контактное давление между цилиндром и трубкой. В трубке будут окружные напряжения $\sigma_t = \dfrac{p_c D_{cp}}{2h}$, по сравнению с которыми радиальными напряжениями (контактным давлением) можно пренебречь.

Контактное давление найдем из условия $\Delta D_{\text{ц}} = \Delta D_{\text{тр}}$ или

$$\frac{1}{E_{\text{ц}}}(-p_C + \mu p_C + \mu p) D_{\text{ц}} = \frac{\sigma_t}{E_{\text{тр}}} D_{\text{тр}}.$$

Если принять, что $D_{\text{ц}} = D_{\text{тр}} = D_{\text{ср}}$, то контактное давление будет равно

$$p_C = \frac{\mu p}{E_{\text{ц}}}\left(\frac{1-\mu}{E_{\text{ц}}} + \frac{D_{\text{ср}}}{2E_{\text{тр}} h}\right)^{-1} = \frac{0{,}45 \cdot 2}{40}\left(\frac{1-0{,}45}{40} + \frac{0{,}1}{2 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0{,}001}\right)^{-1} =$$

$= 1{,}556$ МПа.

Окружное напряжение в трубке равно $\sigma_t = \dfrac{1{,}556 \cdot 0{,}1}{2 \cdot 0{,}001} =$ 77,8 МПа,

изменение диаметра – $\Delta D_{\text{ср}} = \dfrac{\sigma_t}{E_{\text{тр}}} D_{\text{ср}} = \dfrac{77{,}8 \cdot 0{,}1}{7 \cdot 10^4} = 0{,}111$ мм.

Ответ: Напряжения в трубке $\sigma_t =$ 77,8 МПа, а изменение её диаметра – $\Delta D_{\text{ср}} = 0{,}111$ мм.

2.17. *Олимпиада 2010 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС*

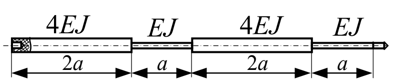


Рис. 10.1

10.1 Определить величину изгибающего момента *M*, при котором торцевые сечения прямолинейного упругого стержня (рис. 10.1) сомкнутся, образуя брус малой кривизны с замкнутым гладким контуром. Дано: a, EJ.

РЕШЕНИЕ

Кольцо, получаемое после смыкания торцевых сечений стержня, показано на рис. 10.1 Р.

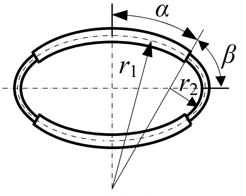


Рис. 10.1 Р

Ввиду симметрии рассмотрим четверть кольца. Изгибающий момент во всём стержне равен прикладываемому моменту, поэтому участки с разной жёсткостью будут изгибаться по окружностям с соответствующими радиусами:

$$\frac{1}{r_1}=\frac{M}{4EJ}, \qquad \frac{1}{r_2}=\frac{M}{EJ}.$$

Если ввести углы α и β, то можно установить следующие геометрические соотношения:

$$r_1\,\alpha = a, \qquad r_2\,\beta = a/2.$$

Тогда $\alpha=\dfrac{M\,a}{4EJ}, \qquad \beta=\dfrac{M\,a}{2EJ}.$

Условие смыкания будет записываться как: $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

Расписывая его, получаем: $\dfrac{3}{4}\dfrac{M\,a}{2EJ}=\dfrac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad M=\dfrac{2\pi}{3}\dfrac{EJ}{a}$.

Следует отметить, что $\alpha=\dfrac{\pi}{6}, \quad \beta=\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: Торцевые сечения прямолинейного упругого стержня сомкнутся при $M=\dfrac{2\pi}{3}\dfrac{EJ}{a}$.

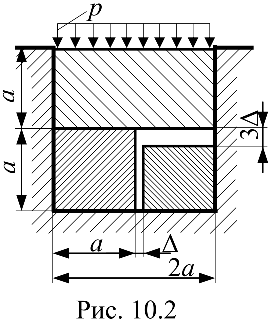


Рис. 10.2

10.2 Два кубика вставлены, как показано на рис. 10.2, в жёлоб и нагружены сверху пуансоном (давление приложено только над кубиками). Принимая жёлоб и пуансон абсолютно гладкими, жёсткими и бесконечными, определить минимальную величину прикладываемого к пуансону давления, при котором будут перекрыты зазоры. Дано: a, $\mu = 0{,}25$, $3\Delta \ll a$.

РЕШЕНИЕ

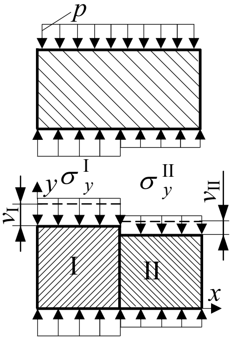


Рис. 10.2 Р

Определим, какой из зазоров перекроется первым. Для этого найдём величину опускания пуансона v_1 в момент перекрытия зазора величиной Δ (рис. 10.2 Р), считая, что второй зазор ещё не перекрылся. Из условия задачи следует, что в поперечном к рисунку направлении деформации упругих тел ничем не ограничены. Поэтому в левой заготовке под действием пуансона будет возникать однородное сжимающее напряжение σ_y^I, а деформации (в абсолютных величинах) – в горизонтальном и вертикальном направлениях:

$$\varepsilon_x^I = \frac{\mu}{E}\sigma_y^I, \qquad \varepsilon_y^I = \frac{1}{E}\sigma_y^I,$$

при этом $\varepsilon_x^I \cdot a = \Delta$, тогда

$$\sigma_y^I = \frac{\Delta}{a}\frac{E}{\mu} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_y^I = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta}{a} \qquad \Rightarrow \qquad v_I = \varepsilon_y^I \cdot a = \frac{\Delta}{\mu} = 4\Delta .$$

Таким образом, пуансон опустится ниже, чем зазор 3Δ, и правая заготовка тоже «включится в работу». Следовательно, первоначальное предположение неправильное и первым будет перекрыт зазор 3Δ. Причём, когда будет перекрыт этот зазор, другой ещё останется. Дальнейшее вдавливание пуансона приведет к тому, что в правой заготовке возникнет также однородное сжимающее напряжение σ_y^{II}, а деформации (в абсолютных величинах) – в горизонтальном и вертикальном направлениях:

$$\varepsilon_x^{II} = \frac{\mu}{E}\sigma_y^{II}, \qquad \varepsilon_y^{II} = \frac{1}{E}\sigma_y^{II}.$$

Осадка тел в вертикальном направлении, когда будут перекрыты все зазоры (между заготовками ещё не будет возникать контактное давление) и пуансон опустится на величину v:

$$v_{\mathrm{I}} = v, \qquad v_{\mathrm{II}} = v - 3\Delta \qquad \Rightarrow \qquad v_{\mathrm{II}} = v_{\mathrm{I}} - 3\Delta .$$

С другой стороны:

$$v_{\mathrm{I}}=\varepsilon_y^{\mathrm{I}}\cdot a=\frac{1}{E}\sigma_y^{\mathrm{I}}\cdot a,\qquad v_{\mathrm{II}}=\varepsilon_y^{\mathrm{II}}\cdot a=\frac{1}{E}\sigma_y^{\mathrm{II}}\cdot a\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{E}\sigma_y^{\mathrm{II}}\cdot a=\frac{1}{E}\sigma_y^{\mathrm{I}}\cdot a-3\Delta\quad\Rightarrow\quad\sigma_y^{\mathrm{II}}=\sigma_y^{\mathrm{I}}-\frac{3\Delta}{a}E.$$

Условие перекрытия зазора Δ:

$$\varepsilon_x^{\mathrm{I}}\cdot a+\varepsilon_x^{\mathrm{II}}\cdot a=\Delta\quad\Rightarrow\quad\frac{\mu}{E}\sigma_y^{\mathrm{I}}\cdot a+\frac{\mu}{E}\sigma_y^{\mathrm{II}}\cdot a=\Delta\quad\Rightarrow\quad\sigma_y^{\mathrm{I}}+\sigma_y^{\mathrm{II}}=\frac{\Delta}{a}\frac{E}{\mu}.$$

Тогда

$$\sigma_y^{\mathrm{I}}+\sigma_y^{\mathrm{I}}-\frac{3\Delta}{a}E=\frac{\Delta E}{a\mu}\quad\Rightarrow\quad 2\sigma_y^{\mathrm{I}}=\frac{4\Delta E}{a}+\frac{3\Delta E}{a}=\frac{7\Delta E}{a},$$

$$\sigma_y^{\mathrm{I}}=\frac{7\Delta E}{2a},\ \sigma_y^{\mathrm{II}}=\frac{7\Delta E}{2a}-\frac{3\Delta E}{a}=\frac{\Delta E}{2a}.$$

Из условия равновесия пуансона: $p\cdot 2a\cdot b=\sigma_y^{I}\cdot a\cdot b+\sigma_y^{II}\cdot a\cdot b$, отсюда

$$p=\frac{1}{2}\left(\sigma_y^{\mathrm{I}}+\sigma_y^{\mathrm{II}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7\Delta E}{2a}+\frac{\Delta E}{2a}\right)=\frac{2\Delta E}{a},$$

при этом:

$$v=v_I=\frac{1}{E}\sigma_y^{I}\cdot a=\frac{7}{2}\Delta.$$

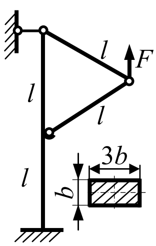


Рис. 10.3

Ответ: Все зазоры будут перекрыты при $p=\dfrac{2\Delta E}{a}$.

10.3 Для приведённой балочно-стержневой конструкции (рис. 10.3) определить вертикальное перемещение точки приложения силы. Деформации считать малыми. Все стержни имеют одинаковое сечение. Дано: b, $l=15b$, E, F.

РЕШЕНИЕ

Решим задачу методом Мора-Верещагина. Рассмотрим систему под действием силы F. Из равновесия шарнира, в котором прикладывается сила, определяются усилия в наклонных стержнях (рис. 10.3 Р, a). Тогда становятся известны усилия, действующие на вертикальный стержень со стороны наклонных стержней.

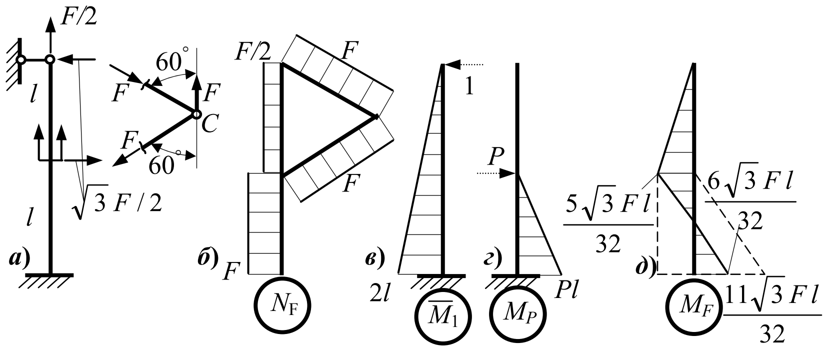


Рис. 10.3 Р

Вертикальный стержень испытывает растяжение и изгиб, влияние которых, ввиду малости деформаций, можно рассматривать отдельно, а наклонные стержни – только растяжение-сжатие.

Нормальные усилия в стержнях, определяемые из уравнений равновесия, показаны на эпюрах (рис. 10.3 Р, *б*).

С точки зрения изгиба вертикального стержня он один раз статически неопределим. Раскроем статическую неопределимость, рассмотрев стержень с действующей на него поперечной силой произвольной величины P (рис. 10.3 Р, *в-г*). Ниже приводится ход раскрытия статической неопределимости при $P = \sqrt{3}\,F/2$.

$$EJ\delta_{11} = \frac{1}{2}2l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l = \frac{8}{3}l^3,$$

$$EJ\Delta_{1P} = \frac{1}{2}Pl \cdot l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot l + l\right) = \frac{5}{6}Pl^3,$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{5}{16}P = \frac{5\sqrt{3}}{32}F.$$

Теперь построим эпюры изгибающего момента (рис. 10.3 Р, *д*).

Для определения перемещения точки приложения силы необходимо вместо силы F приложить единичную силу. Эпюры нормальных сил и изгибающих моментов при единичном нагружении получаются такими же, как и на рис. 10.3 Р, *б* и *д* при $F = 1$.

Итак, искомое перемещение, обусловленное только:

– осевыми жёсткостями стержней конструкции:

$$\delta_C^N = \frac{1}{EA}\left[3\cdot l\cdot F\cdot 1 + l\cdot\frac{F}{2}\cdot\frac{1}{2}\right] = \frac{13}{4}\frac{Fl}{EJ} = 3{,}25\frac{Fl}{EA};$$

– изгибной жёсткостью вертикального стержня:

$$\delta_C^M = \frac{1}{EJ}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}l\cdot\frac{5\sqrt{3}}{32}Fl\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{32}l + l\cdot\frac{5\sqrt{3}}{32}Fl\cdot\left(\frac{5\sqrt{3}}{32}l - \frac{1}{2}\frac{11\sqrt{3}}{32}l\right) + \\ +\frac{1}{2}l\cdot\frac{11\sqrt{3}}{32}Fl\cdot\left(-\frac{5\sqrt{3}}{32}l + \frac{2}{3}\frac{11\sqrt{3}}{32}l\right)\end{array}\right] =$$

$$= \frac{3}{32^2}\frac{Fl^3}{EJ}\left(\frac{25}{3} - \frac{5}{2} + \frac{77}{6}\right) = \frac{112}{32^2\cdot 2}\frac{Fl^3}{EJ} = 0{,}0547\frac{Fl^3}{EJ}.$$

Принимая во внимание геометрические характеристики сечений:

$$A = 3b^2, \qquad J = \frac{b(3b)^3}{12} = \frac{9b^4}{4},$$

полное вертикальное перемещение:

$$\delta_C = \frac{Fl}{E}\left(3{,}25\frac{1}{A} + 0{,}0547\frac{l^2}{J}\right) = \frac{Fl}{Eb^2}\left(3{,}25\cdot\frac{1}{3} + 0{,}0547\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{l}{b}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{Fl}{Eb^2}\left(1{,}083 + 0{,}0243\left(\frac{l}{b}\right)^2\right) = \frac{15F}{Eb}(1{,}083 + 5{,}47) = 98{,}3\frac{F}{Eb}.$$

Ответ: Вертикальное перемещение точки приложения силы – $\delta_C = 98{,}3\dfrac{F}{Eb}$.

10.4 Вал, состоящий из двух участков разной крутильной жёсткости (рис. 10.4), сочленён с двумя абсолютно жёсткими брусьями. На свободные концы брусьев оказывает давление абсолютно жёсткое коромысло, к которому прикладывается момент (в вертикальной плоскости, параллельной оси вала). Определить угол поворота коромысла. Деформации и перемещения считать малыми. Дано: l, M, GJ_p.

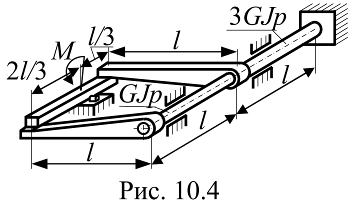


Рис. 10.4

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим коромысло отдельно от остальной конструкции, заменяя взаимное действие друг на друга реактивными силами R_1, R_2 (рис. 10.4 Р, *а*):

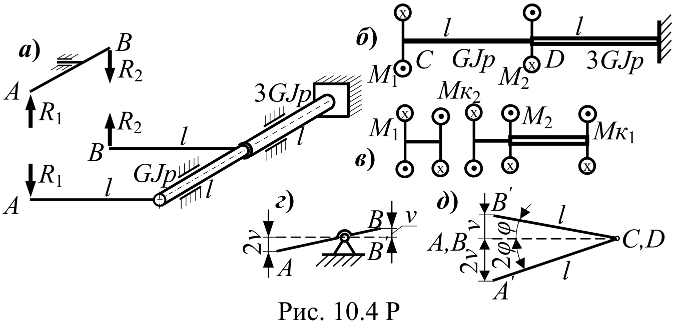


Рис. 10.4 Р

Сумма моментов для коромысла относительно его опоры позволяет связать неизвестные реактивные силы:

$$2R_1 + R_2 = \frac{3M}{l} \qquad \Rightarrow \qquad R_2 = \frac{3M}{l} - 2R_1 .$$

Реактивные силы оказывают на рассматриваемый вал воздействие в виде крутящих моментов:

$$M_1 = R_1 l, \qquad M_2 = R_2 l \qquad \Rightarrow \qquad M_2 = 3M - 2R_1 l = 3M - 2M_1 ,$$

от которых на каждом участке возникают внутренние крутящие моменты:

$$M_{к_1} = M_1 - M_2 = 3M_1 - 3M , \qquad M_{к_2} = M_1 .$$

Система один раз статически неопределима. Рассмотрим систему в деформированном состоянии (рис. 10.4 Р, *б*-*в*). Запишем два кинематических соотношения:

$$\varphi_C = 2\varphi, \qquad \varphi_D = -\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_C = -2\varphi_D ,$$

распишем:

$$\varphi_D = \frac{M_{к_1} l}{3GJ_p}, \quad \varphi_C = \varphi_D + \frac{M_{к_2} l}{GJ_p}, \text{ тогда}$$

$$\frac{M_{\kappa_1} l}{3GJ_p} + \frac{M_{\kappa_2} l}{GJ_p} = -2\frac{M_{\kappa_1} l}{3GJ_p}, \qquad \Rightarrow \qquad M_{\kappa_1} + 3M_{\kappa_2} = -2M_{\kappa_1}, \qquad \Rightarrow$$

$$3(3M_1 - 3M) + 3M_1 = 0, \ \Rightarrow \ M_1 = \frac{3}{4}M, \ \Rightarrow \ M_2 = 3M - \frac{3}{2}M = \frac{3}{2}M.$$

Следовательно:

$$M_{\kappa_1} = \frac{9}{4}M - 3M = -\frac{3}{4}M, \qquad M_{\kappa_2} = \frac{3}{4}M,$$

$$\varphi = -\varphi_D = \frac{Ml}{4GJ_p}, \qquad \Rightarrow \qquad v = l\cdot\varphi, \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{v}{l/3} = \frac{3Ml}{4GJ_p}.$$

Ответ: Угол поворота коромысла – $\theta = \dfrac{3Ml}{4GJ_p}$.

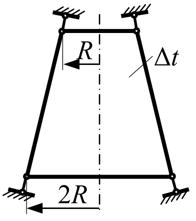


Рис. 10.5

10.5 Тонкостенная шарнирно-закреплённая оболочка в форме усечённого конуса (рис. 10.5) нагревается на Δt. Определить допускаемую степень нагрева. Дано: α, E, R, $\sigma_т$, $n_т$.

РЕШЕНИЕ

Применим метод сечений и рассмотрим равновесие конического элемента оболочки:

$$\sigma_0 \cdot 2\pi R\delta\cdot\cos\alpha = \sigma_m \cdot 2\pi r\delta\cdot\cos\alpha, \quad \sigma_0 = \sigma_m \Big|_{r=R},$$

$$\Rightarrow \qquad \sigma_m(r) = \frac{R}{r}\cdot\sigma_0.$$

Записывая соотношение Лапласа для безмоментной теории оболочек:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}, \qquad \Rightarrow \qquad \rho_m = \infty, \quad p = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_t = 0 .$$

Таким образом, напряжённое состояние одноосное и согласно закону Гука с учётом температурного расширения:

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} + \alpha\cdot\Delta t = \frac{R\sigma_0}{Er} + \alpha\cdot\Delta t .$$

Из закрепления оболочки следует, что изменение длины образующей цилиндра $\Delta l = 0$, с другой стороны:

$\Delta l = \int\limits_L \varepsilon_m \, ds$, где $ds = \dfrac{dr}{\sin\alpha}$ – длина бесконечно малого элемента образующей цилиндра, поэтому

$$\Delta l = \frac{1}{\sin\alpha}\int\limits_R^{2R}\left(\frac{R\sigma_0}{Er} + \alpha\cdot\Delta t\right)dr = \frac{R\sigma_0}{E\sin\alpha}\Big(\ln\big(2R\big) - \ln R\Big) + \frac{\alpha\cdot\Delta t}{\sin\alpha}R =$$

$$= \frac{R\sigma_0}{E\sin\alpha}\ln 2 + \frac{\alpha\cdot\Delta t}{\sin\alpha}R = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_0 = -\frac{E\alpha\,\Delta t}{\ln 2}.$$

Тогда $\sigma_m(r) = -\dfrac{E\alpha\Delta t}{\ln 2}\cdot\dfrac{R}{r}$.

Согласно условию прочности:

$$\left|\sigma_m^{\max}\right| = \left|\sigma_0\right| = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad \Rightarrow \quad \left[\Delta t\right] = \frac{\sigma_T \ln 2}{E\alpha\Delta t\, n_T}.$$

Ответ: Допускаемая степень нагрева – $\left[\Delta t\right] = \dfrac{\sigma_T \ln 2}{E\alpha\Delta t\, n_T}$.

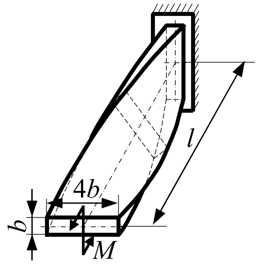


Рис. 10.6

10.6 Определить горизонтальное перемещение торцевого сечения спиралевидного бруса (рис. 10.6), нагруженного изгибающим моментом. Дано: b, E, M, $l >> b$.

РЕШЕНИЕ

Для определения перемещений воспользуемся интегралом Мора. Вначале получим зависимости изгибающих моментов в произвольном сечении от действия приложенного момента M (рис. 10.6 Р) и единичной горизонтальной силы, приложенной также к торцевому сечению. В произвольном сечении во всех случаях нагружения имеет место косой изгиб.

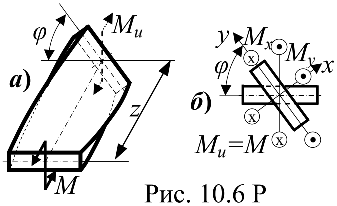


Рис. 10.6 Р

$$M_x = M\cos\varphi, \qquad M_y = -M\sin\varphi,$$

$$\overline{M}_x^{\,г} = z\sin\varphi, \qquad \overline{M}_y^{\,г} = z\cos\varphi.$$

Запишем интеграл Мора для определения горизонтального смещения торцевого сечения, учитывая что $z = \dfrac{2l}{\pi}\varphi$ и $dz = \dfrac{2l}{\pi}\,d\varphi$:

$$\Delta_г = \int_l \frac{M_x \overline{M}_x^{\,г}}{EJ_x}dz + \int_l \frac{M_y M_y^{\,г}}{EJ_y}dz = \frac{4Ml^2}{\pi^2 E}\left(\frac{1}{J_x} - \frac{1}{J_y}\right)\int_0^{\pi/2} \varphi\cdot\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi.$$

Отдельно вычислим интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \varphi\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\varphi\sin 2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\varphi d\left(\cos 2\varphi\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\varphi\cos 2\varphi\,\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos 2\varphi\, d\varphi\right] = -\frac{1}{4}\left[-\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{8}.$$

Таким образом, $\Delta_г = \dfrac{Ml^2}{2\pi E}\left(\dfrac{1}{J_x} - \dfrac{1}{J_y}\right)$.

Вычислим:

$$J_x = \frac{4b\cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{3}, \qquad J_y = \frac{b\cdot\left(4b\right)^3}{12} = \frac{16b^4}{3}.$$

Итак, окончательная величина искомого перемещения:

$$\Delta_г = \frac{3Ml^2}{2\pi Eb^4}\left(1 - \frac{1}{16}\right) = 0{,}448\frac{Ml^2}{Eb^4}.$$

Ответ: Горизонтальное перемещение торцевого сечения бруса – $\Delta_г = 0{,}448\dfrac{Ml^2}{Eb^4}$.

2.18. *Олимпиада 2011 г., г. Пермь, ПНИПУ*

11.1 Дан брус переменного сечения (рис. 11.1), нагруженный в центре силой F. В каком сечении стержня возникает максимальное по модулю нормальное напряжение?

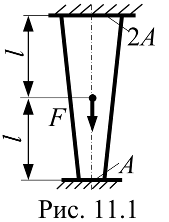


Рис. 11.1

РЕШЕНИЕ

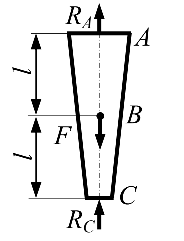


Рис. 11.1 Р

Запишем уравнение равновесия (рис. 11.1 Р) $R_A + R_C = F$ и условие совместности перемещений:

$$\Delta l_{AC} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta l_{AB} = \int_0^l \frac{R_A\,dz}{E\,A(z)},\ \Delta l_{BC} = \int_l^{2l} \frac{(R_A - F)\,dz}{E\,A(z)},$$

$$A(z) = A\left(2 - \frac{z}{2l}\right),\ \int \frac{dz}{2 - z/2l} = -2l\ln(2 - z/2l).$$

Поэтому из (1) имеем:

$$\frac{R_A}{E\,A}\left\{-2l\ln(2 - z/2l)\right\}\Big|_0^l + \frac{R_A - F}{E\,A}\left\{-2l\ln(2 - z/2l)\right\}\Big|_l^{2l} = 0,$$

$$R_A\left\{-2(\ln 1{,}5 - \ln 2)\right\} + (R_A - F)\left\{-2(\ln 1 - \ln 1{,}5)\right\} = 0,$$

$$R_A = \frac{\ln 2/3}{\ln 0{,}5}F = 0{,}585F,\ R_C = F - R_A = 0{,}415F.$$

Таким образом, в сечении, принадлежащем участку AB, чуть выше точки приложения силы F: $\sigma^{(1)} = \dfrac{0{,}585F}{1{,}5A} = 0{,}390\dfrac{F}{A}$ (растягивающее напряжение), а в точке C: $\sigma^{(2)} = \dfrac{0{,}415F}{A} = 0{,}415\dfrac{F}{A}$ (сжимающее напряжение).

Следовательно, самое большое по модулю напряжение возникает у нижней заделки стержня: $\left|\sigma\right|_{наиб} = 0{,}415\dfrac{F}{A}$.

Ответ: максимальное нормальное напряжение – $\left|\sigma\right|_{наиб} = 0{,}415\dfrac{F}{A}$ возникает у нижней заделки стержня.

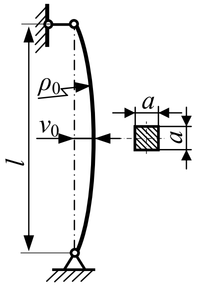


Рис. 11.2

11.2 Имеется стержень с начальным несовершенством, выгнутый по дуге окружности большого радиуса со стрелой прогиба в центре v_0 (рис. 11.2). Как необходимо нагреть стержень, чтобы он стал прямым, если коэффициент температурного расширения равен α?

РЕШЕНИЕ

Очевидно, стержень необходимо нагревать неравномерно по ширине сечения. Поскольку равномерный нагрев не влияет на кривизну стержня, нужно нагревать стержень следующим образом (рис. 11.2 Р, *а*): выпуклую часть не нагревать, а вогнутую нагревать на Δt. Можно нагревать и обе поверхности с перепадом температур Δt. На основании гипотезы плоских сечений деформация вогнутого слоя равна $\varepsilon = a/\rho$, с другой стороны, деформация этого слоя равна $\varepsilon = \alpha\ \Delta t$. Тогда $1/\rho = \alpha\ \Delta t/a$.

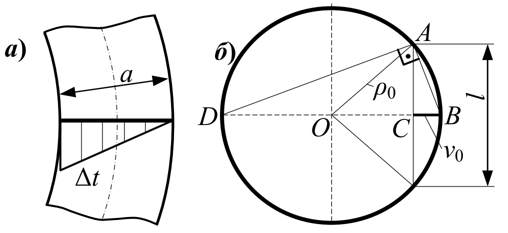


Рис. 11.2 Р

Исходную кривизну можно вычислить, зная длину стержня и стрелу прогиба (рис. 11.2 Р, *б*): $\Delta\ ABC$ подобен $\Delta\ ABD$, откуда получаем: $\dfrac{v_0}{l/2} = \dfrac{l/2}{2\rho_0 - v_0}$, где ρ_0 – исходный радиус кривизны. Так как

v_0 намного меньше, чем ρ_0, то $\dfrac{1}{\rho_0} \approx \dfrac{8v_0}{l^2}$.

Приравнивая начальную кривизну к температурной, получим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}, \quad \Rightarrow \quad \frac{8v_0}{l^2} = \frac{\alpha\,\Delta t}{a}, \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{8av_0}{\alpha l^2}.$$

Ответ: Чтобы стержень стал прямым, его вогнутую поверхность необходимо нагреть на $\Delta t = \dfrac{8av_0}{\alpha l^2}$.

11.3 При каких значениях $\dfrac{b}{a} = \lambda$ максимальное нормальное напряжение в первом брусе станет больше, чем во втором (рис. 11.3)?

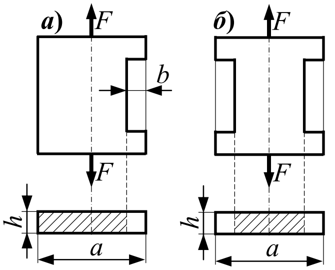


Рис. 11.3

РЕШЕНИЕ

Первый брус подвержен внецентренному растяжению, а второй – центральному растяжению. В ослабленном сечении первого бруса сила приложена не в центре сечения и создает изгибающий момент $M_u = Fb/2$.

$$\sigma_{(1)}^{\max} = \sigma_F + \sigma_u = \frac{F}{A_{(1)}} + \frac{M_u}{W_u} = \frac{F}{(a-b)h} + \frac{Fb/2}{h(a-b)^2/6} =$$

$$= \frac{F}{(a-b)h} + \frac{3Fb}{h(a-b)^2} = \frac{F}{ah}\left(\frac{1}{1-\lambda} + \frac{3\lambda}{(1-\lambda)^2}\right).$$

$$\sigma_{(2)}^{\max} = \frac{F}{A_{(2)}} = \frac{F}{ah}\left(\frac{1}{1-2\lambda}\right).$$

Возьмем крайний случай $\sigma_{(1)}^{\max} = \sigma_{(2)}^{\max}$, тогда

$$\frac{1}{1-\lambda} + \frac{3\lambda}{(1-\lambda)^2} = \frac{1}{1-2\lambda}, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\cdot(1-2\lambda) + 3\lambda\cdot(1-2\lambda) - (1-\lambda)^2 = 0, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\lambda^2 + 2\lambda = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2/5.$$

Нулевой корень не подходит по физическим соображениям, следовательно, при соотношении

$$\lambda \geq \frac{2}{5} \quad \sigma_{(1)}^{\max} \geq \sigma_{(2)}^{\max}.$$

Ответ: Нормальное напряжение в первом брусе станет больше, чем во втором, при $\lambda \geq 2/5$.

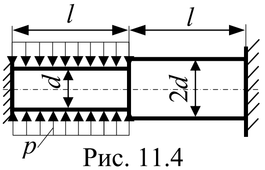


Рис. 11.4

11.4 Дан двухступенчатый брус, защемленный по концам в заделках (рис. 11.4). Левая часть бруса нагружена давлением p. Найти изменение объёма бруса.

РЕШЕНИЕ

Суммарная длина бруса не изменяется

$$\Delta l_{(1)} + \Delta l_{(2)} = 0, \qquad (1)$$

но $\Delta l_{(1)} = \varepsilon_z^{(1)} l, \quad \Delta l_{(2)} = \varepsilon_z^{(2)} l$. Так как длины обоих участков одинаковы, то $\varepsilon_z^{(1)} = \varepsilon_z^{(2)}$.

Напряженное состояние в обеих частях стержня показано на рис. 11.4 Р, *б-в*. Из обобщённого закона Гука $\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_t + \sigma_r)\right]$ следует, что

$$\varepsilon_z^{(1)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z^{(1)} - \mu(-p-p)\right] = \frac{\sigma_z^{(1)} + 2\mu p}{E}, \ \varepsilon_z^{(2)} = \frac{\sigma_z^{(2)}}{E}.$$

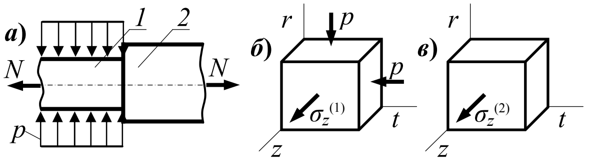


Рис. 11.4 Р

Учитываем, что напряжения от реакций в заделках равны $\sigma_z^{(1)} = \dfrac{4N}{\pi d^2}$, $\sigma_z^{(2)} = \dfrac{N}{\pi d^2}$. Подставляя деформации и напряжения в уравнение (1), получим: $\dfrac{1}{E}\left(\dfrac{4N}{\pi d^2} + 2\mu p + \dfrac{N}{\pi d^2}\right) = 0$. Тогда внутренняя сжимающая сила равна $N = -\dfrac{2\mu p \pi d^2}{5}$, а напряжения:

$$\sigma_z^{(1)} = -\frac{8\mu p}{5}, \ \sigma_z^{(2)} = -\frac{2\mu p}{5}.$$

Изменение объёма стержня выразим через объёмную деформацию

$$\Delta V = \theta^{(1)} V^{(1)} + \theta^{(2)} V^{(2)} = 0,\ \ \theta = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_z + \sigma_t + \sigma_r\right), \text{ тогда}$$

$$\Delta V = \frac{1-2\mu}{E}\left(-\frac{8\mu p}{5} - 2p\right)\frac{\pi d^2 l}{4} + \frac{1-2\mu}{E}\left(-\frac{2\mu p}{5}\right)\pi d^2 l.$$

Окончательно имеем: $\Delta V = -\dfrac{\pi d^2 pl}{20E}(1-2\mu)(10+16\mu)$.

Ответ: При нагружении левого участка давлением p объём бруса уменьшается на $\Delta V = -\dfrac{\pi d^2 pl}{20E}(1-2\mu)(10+16\mu)$.

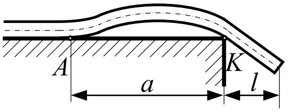


Рис. 11.5

11.5 Бесконечный стержень, имеющий плотность ρ, лежит на абсолютно жёстком столе таким образом, что его конец выдвинут за край стола на участок длиной l (рис. 11.5). Найти координату точки касания стержня со столом a.

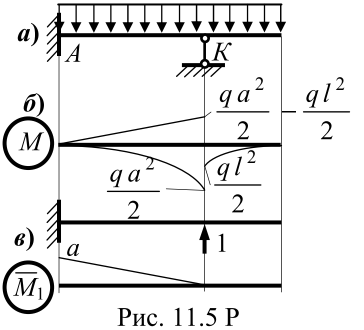


Рис. 11.5 Р

РЕШЕНИЕ

Можно считать, что стержень нагружен распределённой нагрузкой q, равной произведению плотности на площадь поперечного сечения (рис. 11.5 Р, *а*). Очевидно, что в точке A, в которой стержень касается стола $M_x = 0$, так как кривизна стержня равна нулю, а в точке K – $M_x = \dfrac{ql^2}{2}$.

Тогда эпюра моментов качественно выглядит так, как показана на рис. 11.5 Р, *б*.

Найдём a из условия равенства нулю перемещения в точке K, при этом будем считать, что в точке A стержень закреплён в заделке (рис. 11.5 Р, *в*).

$$EJ_x \Delta_K = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{qa^2}{2} - \frac{ql^2}{2}\right)\cdot a\cdot\frac{1}{3}\cdot a - \frac{1}{3}\cdot\frac{qa^2}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{4}\cdot a = 0.$$

Откуда координата точки касания стержня со столом $a = \sqrt{2}\, l$.

Ответ: Координата точки касания стержня со столом – $a = \sqrt{2}\,l$.

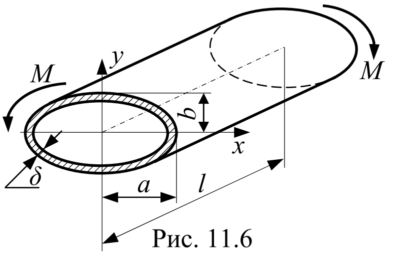


Рис. 11.6

11.6 Тонкостенная трубка эллиптического поперечного сечения ($\delta << b$) закручивается моментами M (рис. 11.6). Найти величину равнодействующей касательных напряжений в первой четверти сечения: $x \geq 0, y \geq 0$.

РЕШЕНИЕ

Как известно, касательные напряжения в тонкостенном замкнутом контуре при кручении равны $\tau = \dfrac{M}{W_к} = \dfrac{M}{2A^*\delta} = \dfrac{M}{2\pi a b \delta}$.

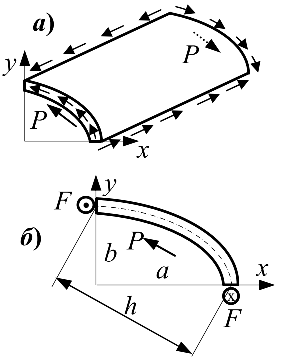


Рис. 11.6 Р

Равнодействующую силу P можно найти из уравнения равновесия моментов отсечённой части трубки (рис. 11.6 Р, *б*): $P{\cdot}l = F{\cdot}h$, где l – длина трубки, $h = \sqrt{a^2 + b^2}$ – плечо силы $F = \tau\delta l$ (рис. 11.6 Р, *а*), создаваемой касательными напряжениями τ, действующими в продольных сечениях трубки. Отсюда

$$P = \frac{F\,h}{l} = \frac{\tau\,\delta\,l\,h}{l} = \tau\,\delta\,h\,.$$

В итоге получаем значение силы P: $P = \dfrac{M\sqrt{a^2 + b^2}}{2\pi a b}$.

Ответ: Равнодействующая касательных напряжений в первой четверти сечения – $P = \dfrac{M\sqrt{a^2 + b^2}}{2\pi a b}$.

2.19. ***Олимпиада 2012 г., г. Самара, СГАУ***

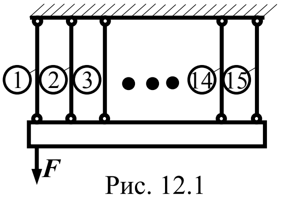


Рис. 12.1

12.1 Абсолютно жёсткий брус (рис. 12.1) подвешен через равные расстояния на пятнадцати одинаковых тягах (*E, A, l*) и нагружен силой *F*. Найти усилие в 10-й тяге.

РЕШЕНИЕ

Введём в рассмотрение угол θ и расстояние между тягами a (рис. 12.1 Р). Тогда удлинения стержней могут быть записаны следующим образом:

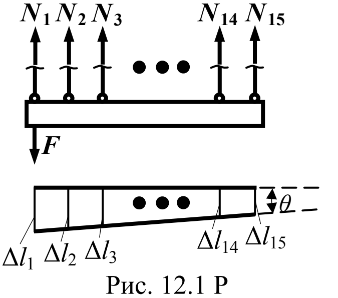


Рис. 12.1 Р

$$\Delta l_1 = \Delta l_{15} + \theta \cdot 14a; \quad \Delta l_2 = \Delta l_{15} + \theta \cdot 13a;$$

$$\ldots \Delta l_{14} = \Delta l_{15} + \theta \cdot a,$$

где $\Delta l_i = \dfrac{N_i \cdot l}{E \cdot A}$.

Запишем уравнения равновесия для сил

$$\sum N_i = F, \quad \Rightarrow \quad F = 15N_{15} + \frac{105 \cdot \theta \cdot a \cdot EA}{l}$$

и моментов относительно точки приложения силы

$$\sum M_0 = N_2 \cdot a + N_3 \cdot 2a + \ldots + N_{15} \cdot 14a =$$

$$= \left(N_{15} + \frac{13 \cdot \theta \cdot a \cdot EA}{l}\right) \cdot a + \left(N_{15} + \frac{12 \cdot \theta \cdot a \cdot EA}{l}\right) \cdot 2a +$$

$$+ \ldots + N_{15} \cdot 14a = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N_{15} = -\frac{13}{120}F, \quad \frac{\theta \cdot a \cdot EA}{l} = \frac{1}{40}F.$$

Тогда

$$N_{10} = N_{15} + \frac{5 \cdot \theta \cdot a \cdot EA}{l} = -\frac{13}{120}F + \frac{5}{40}F = \frac{1}{60}F.$$

Ответ: Усилие в 10-й тяге – $N_{10} = \dfrac{1}{60}F$.

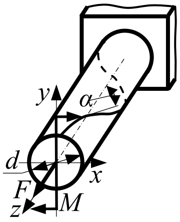


Рис. 12.2

12.2 На стержень круглого поперечного сечения наклеена нить по винтовой линии с углом подъёма α (рис. 12.2). Найти соотношение между крутящим моментом $M_к$ и растягивающей силой F, которые прикладываются к брусу, при котором длина нити не меняется.

Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0{,}25$, d.

РЕШЕНИЕ

Вырежем призматический элемент стержня и уравновесим его (рис. 12.2 Р):

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2\alpha - \tau \sin 2\alpha.$$

Аналогично в направлении β:

$$\sigma_\beta = \sigma_z \sin^2\alpha + \tau \sin 2\alpha.$$

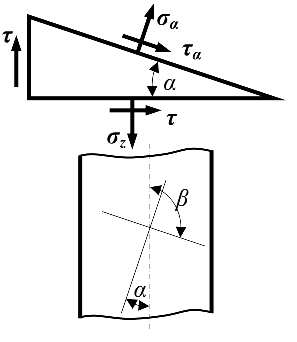


Рис. 12.2 Р

Для того, чтобы длина нити не менялась в процессе нагружения бруса, должно выполняться следующее условие:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \mu \cdot \sigma_\beta) = 0\,,$$

$$\sigma_z(\cos^2\alpha - \mu \cdot \sin^2\alpha) - \tau(\mu \cdot \sin 2\alpha + \sin 2\alpha) = 0,$$

$$\sigma_z = \frac{4F}{\pi d^2}, \qquad \tau = \frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi d^3}.$$

Подставляя угол и коэффициент Пуассона получим:

$$\frac{4F}{\pi d^2}\left(\frac{3}{4} - 0{,}25\frac{1}{4}\right) = \frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi d^3}\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - 0{,}25) = 0\,.$$

Откуда следует соотношение между силой F и моментом $M_{\text{кр}}$:

$$F = \frac{10\sqrt{3}}{2{,}75}\frac{M_{\text{кр}}}{d} = 6{,}298\,\frac{M_{\text{кр}}}{d}.$$

Ответ: Длина нити не меняется при $F = 6{,}298\,\dfrac{M_{\text{кр}}}{d}$.

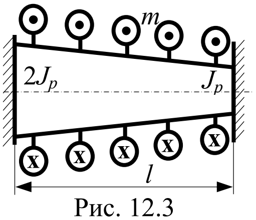


Рис. 12.3

12.3 В каком сечении бруса с линейно меняющейся по длине жёсткостью и нагруженном равномерно распределенными парами сил m (рис. 12.3) будет возникать максимальный угол закручивания $\varphi_{\max}$?

РЕШЕНИЕ

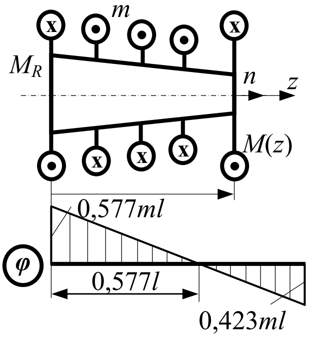


Рис. 12.3 Р

Вводя момент реакции в левой заделке M_R (рис. 12.3 Р), получим выражение внутреннего момента в сечении z: $M(z) = M_R - m{\cdot}z$. Полярный момент инерции произвольного сечения: $J_p(z) = J_p{\cdot}(2 - z/l)$. Запишем условие совместности перемещений для бруса:

$$\Delta\varphi = \int_0^l \frac{(M_R - m\cdot z)dz}{G\cdot J_p} = \frac{M_R}{G\cdot J_p}\int_0^l \frac{dz}{2-z/l} -$$

$$-\frac{m}{G\cdot J}\int_0^l \frac{z\,dz}{2-z/l} = 0.$$

Интегралы, входящие в данные выражения, табличные:

$$\int_0^l \frac{dz}{2-z/l} = \frac{1}{(-1/l)}\left(\ln\left|2-z/l\right|\right)\Bigg|_0^l = l\cdot\ln 2,$$

$$\int_0^l \frac{z\,dz}{2-z/l} = \frac{1}{(1/l)^2}\left(2-z/l-2\cdot\ln\left|2-z/l\right|\right)\Bigg|_0^l = l^2\cdot(2\ln 2-1).$$

Откуда имеем:

$$\frac{M_R\cdot l}{G\cdot J_p}\ln 2 - \frac{m\cdot l^2}{G\cdot J_p}(2\ln 2-1) = 0,$$

$$M_R = \frac{ml(2\ln 2-1)}{\ln 2} = 0{,}577\,ml.$$

Ответ: Максимальный угол закручивания возникает при $z = 0{,}577l$.

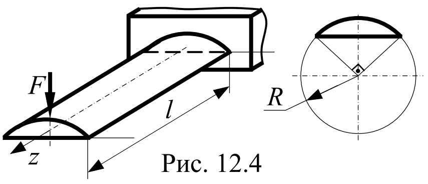


Рис. 12.4

12.4 Найти максимальное нормальное напряжение в консольной балке (рис. 12.4) при нагружении силой *F*.

Дано: *F, l, R*.

РЕШЕНИЕ

Найдём центр тяжести сечения (рис. 12.4 Р). Статический момент относительно оси x_0 равен:

$$S_{x_0} = \int_A y\,dA,$$

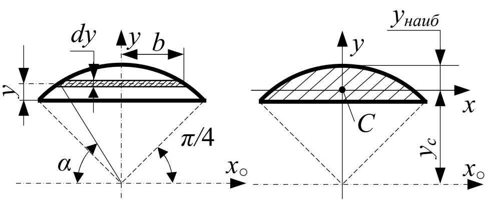


Рис. 12.4 Р

где $y = R\sin\alpha$, $dA = dy\cdot 2b$, $b = R\cos\alpha$, $dy = R\cos\alpha$ или

$$S_{x_0} = 2R^3\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha\,d\alpha =$$

$$= -2R^3\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2\alpha\,d(\cos\alpha) = -\frac{2R^3}{3}\cos^3\alpha\,\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{R^3\sqrt{2}}{6}.$$

Площадь сегмента определяется как четверть разности площадей круга и квадрата: $A = \frac{1}{4}(\pi R^2 - 2R^2)$. Тогда $y_c = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{2R\sqrt{2}}{3(\pi-2)} =$ $= 0{,}8259R$. Таким образом, максимальное расстояние от центральной оси до наиболее удалённой точки сечения равно: $y_{\max} = R(1-0{,}8259) = 0{,}1741R$.

Осевой момент инерции сегмента относительно оси x_0 равен:

$$J_{x_0} = \int y^2\,dA = 2R^4\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha\,d\alpha = 2R^4\left[\frac{1}{8}\left(\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4}\right)\right]\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi R^4}{16}.$$

Осевой момент инерции сечения относительно центральной оси сегмента x_c: $J_{x_c} = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{R^2(\pi-2)}{4}\cdot(0{,}8259R)^2 \approx 1{,}6764\cdot 10^{-3}R^4$.

Максимальное напряжение в балке возникает в заделке и равно:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_{x_c}} y_{\max} = \frac{F\,l \cdot 0{,}1741 R}{1{,}6764 \cdot 10^{-3} R^4} \approx 103{,}9 \frac{F\,l}{R^3}.$$

Ответ: Максимальное нормальное напряжение в консольной балке – $\sigma_{\max} \approx 103{,}9 \dfrac{F\,l}{R^3}$.

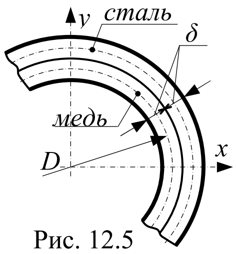


Рис. 12.5

12.5 На медную тонкостенную трубку со средним диаметром D и толщиной стенки δ надевается стальная трубка с такой же толщиной стенки без натяга и зазора (рис. 12.5). Система в сборе нагревается на Δt. Найти контактное давление $p_{к}$, возникающее между трубками. Дано: D = 60 мм, δ = 6 мм, $E_{ст}$ = 2·10^5 МПа, $E_{м}$ = 1·10^5 МПа, $\mu_{м}$ = 0,35, $\mu_{ст}$ = 0,24, $\alpha_{м}$ = 1,8·10^{-5} 1/град, $\alpha_{ст}$ = 1,2·10^{-5} 1/град, $\Delta t = 100^{\circ}$.

РЕШЕНИЕ

Как видно из рис. 12.5 Р, средний диаметр стальной наружной трубки равен $D + 2\delta$. При нагревании системы в сборе радиальные перемещения обеих трубок в месте контакта равны друг другу: $u_M = u_{CT}$, где

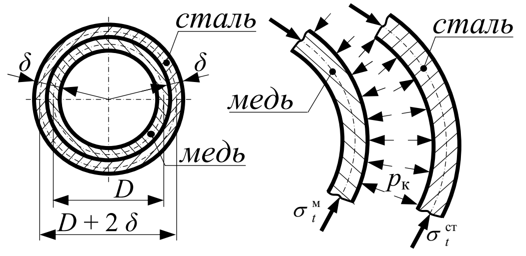


Рис. 12.5 Р

$$u_M = \varepsilon_t^{(M)} \frac{D+\delta}{2}, \; u_{CT} = \varepsilon_t^{(CT)} \frac{D+\delta}{2}.$$

Окружные деформации $\varepsilon_t^{(M)}$ $\varepsilon_t^{(CT)}$ равны:

$$\varepsilon_t^{(M)} = \varepsilon_t^{(M)}(\Delta t) + \varepsilon_t^{(M)}(p_k), \quad \varepsilon_t^{(CT)} = \varepsilon_t^{(CT)}(\Delta t) + \varepsilon_t^{(CT)}(p_k),$$

где первые слагаемые – температурные деформации $\varepsilon_t = \alpha \cdot \Delta t$, а вторые – от контактного давления p_k.

Согласно обобщённому закону Гука: $\varepsilon_t = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_t - \mu\cdot(\sigma_z - \sigma_r)\right]$.

Напряжения в медной и стальной трубках равны:

$$\sigma_t^{(CT)} = \frac{p_k(D+2\delta)}{2\delta}, \quad \sigma_z^{(CT)} = 0, \quad \sigma_r^{(CT)} = -p_k,$$

$$\sigma_t^{(M)} = \frac{p_k D}{2\delta}, \quad \sigma_z^{(M)} = 0, \quad \sigma_r^{(M)} = -p_k.$$

Тогда имеем $\varepsilon_t^{(M)} = \varepsilon_t^{(CT)}$,

$$\alpha_M\,\Delta t + \frac{1}{E_M}\left(-\frac{p_k D}{2\delta} + \mu_M\,p_k\right) = \alpha_{CT}\,\Delta t + \frac{1}{E_{CT}}\left(\frac{p_k(D+2\delta)}{2\delta} + \mu_{CT}\,p_k\right).$$

Учитывая соотношение модулей Юнга $E_{CT} = 2E_M$ и соотношение коэффициентов $\alpha_{CT} = \dfrac{2}{3}\alpha_M$, имеем:

$$p_k = \frac{1/3\cdot\alpha_M\cdot\Delta t\cdot 2E_M}{\dfrac{D}{2\delta} + 1 + \mu_{CT} + \dfrac{D}{\delta} - 2\mu_M} = \frac{1/3\cdot 1{,}8\cdot 10^{-5}\cdot 100\cdot 2\cdot 1\cdot 10^5}{\dfrac{60}{2\cdot 6} + 1 + 0{,}24 + \dfrac{60}{6} - 2\cdot 0{,}35} = 7{,}722\,\text{МПа}.$$

Ответ: Контактное давление, возникающее между трубками – $p_k = 7{,}722\,\text{МПа}$.

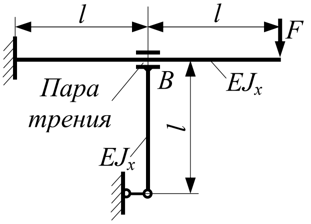


Рис. 12.6

12.6 На горизонтальный консольно закреплённый стержень надета с трением втулка, к которой приварен вертикальный стержень (рис. 12.6). Нижний край вертикального стержня закреплён в горизонтальном направлении. Сила трения между втулкой и стержнем равна $F_{ТР}$.

1 Определить величину внешней силы $F = F^*$, при которой начинается проскальзывание в паре трения.

2 Определить смещение втулки B при $F = 1{,}5\ F_{ТР}$.

РЕШЕНИЕ

Пока проскальзывания в паре трения нет, система является статически неопределимой. Раскроем неопределимость методом сил (рис.12.6 Р *а – в*): $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$.

$$EJ_x \delta_{11} = l \cdot l \cdot l + \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{4}{3} l^3,$$

$$EJ_x \Delta_{1F} = -l \cdot l \cdot \left(Fl + \frac{1}{2} Fl \right) = -\frac{3}{2} F l^3, \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{9}{8} F.$$

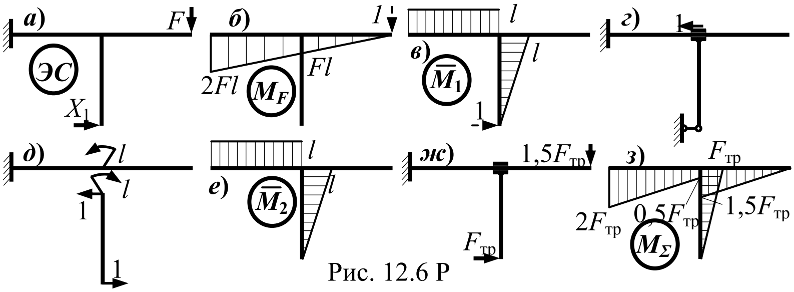


Рис. 12.6 Р

Когда сила реакции в катке X_1 и равная ей сила в паре трения достигает значения, равного силе трения, начинается проскальзывание.

Тогда $F_{\text{ТР}} = X_1 = \dfrac{9}{8} F$. Откуда $F^* = \dfrac{8}{9} F_{\text{ТР}}$.

После начала проскальзывания задача становится статически определимой (рис.12.6 Р, *г – з*), т.к. сила реакции в катке становится известной и равной $F_{\text{ТР}}$. Для определения перемещения узла трения при силе $F = 1{,}5 F_{\text{ТР}}$ необходимо перемножить суммарную эпюру M_Σ (рис.12.6 Р, *з*) на эпюру $\overline{M}_2$ от единичной силы, приложенной к паре трения (рис.12.6 Р, *д, е*):

$$EJ_x \Delta_B = -l \cdot l \cdot \left(0{,}5 F_{TP} + \frac{1}{2} 1{,}5 F_{TP} \right) + \frac{1}{2} F_{TP} \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = -\frac{11 F_{TP} l^3}{12}.$$

Ответ: Сила, при которой начинается проскальзывание в паре трения. $F^* = \frac{8}{9} F_{\text{ТР}}$, смещение втулки B при F = 1,5 $F_{\text{ТР}}$ –

$$\Delta_B = -\frac{11 F_{TP} l^3}{12 E J_x}.$$

2.20. *Олимпиада 2013 г., г. Владивосток, ДВФУ*

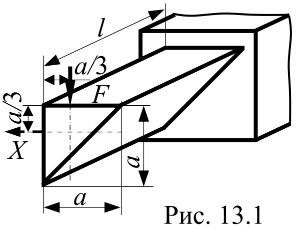


Рис. 13.1

13.1 Консольно закреплённый брус треугольного поперечного сечения нагружен силой F (рис. 13.1). Какой силой X необходимо нагрузить брус дополнительно, чтобы его изогнутая ось располагалась в вертикальной плоскости?

РЕШЕНИЕ

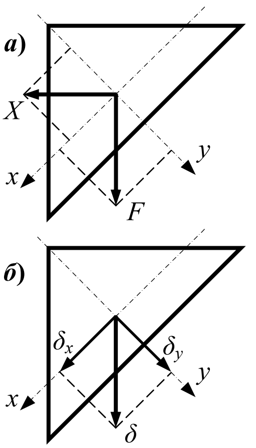


Рис. 13.1 Р

Как известно, для равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 13.1 Р) $J_x = \frac{a^4}{72}$, $J_y = \frac{a^4}{24}$. Таким образом, $J_x = \frac{J_y}{3}$. Очевидно, что суммарные проекции сил на оси x и y должны соотноситься в обратной пропорции $F_x^\Sigma = 3F_y^\Sigma$. Только тогда вектор перемещения центра тяжести сечения будет лежать в вертикальной плоскости, так как

$$\delta_x = \frac{F_x^\Sigma \cdot l^3}{3E \cdot J_y}, \quad \delta_y = \frac{F_y^\Sigma \cdot l^3}{3E \cdot J_x}.$$

Суммарные проекции сил равны:

$$F_x^\Sigma = \frac{\sqrt{2}}{2} F + \frac{\sqrt{2}}{2} X,$$

$$F_y^{\Sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2}F - \frac{\sqrt{2}}{2}X,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}F + \frac{\sqrt{2}}{2}X = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}F - \frac{\sqrt{2}}{2}X\right).$$

Откуда следует: $X = \dfrac{F}{2}$.

Ответ: Чтобы изогнутая ось бруса располагалась в вертикальной плоскости, нужно приложить дополнительную силу $X = \dfrac{F}{2}$.

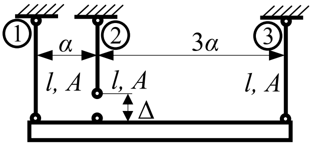


Рис. 13.2

13.2 Абсолютно жёсткий брус подвешен на трёх стержнях (рис. 13.2). Второй стержень имеет монтажный натяг Δ. Как нужно изменить температуру первого стержня после сборки системы, чтобы абсолютно жёсткий брус принял горизонтальное положение?

РЕШЕНИЕ

Уравнения статики (рис. 13.2 Р, *а*):

$$-N_1 + N_2 - N_3 = 0,\ \ N_2 \cdot a - N_3 \cdot 4a = 0.$$

Уравнения совместности перемещений (рис. 13.2 Р, *б*):

$$\Delta l_1 = \Delta l_3,\ \ \Delta - \Delta l_2 = \Delta l_3.$$

Удлинения стержней:

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A} + \alpha \cdot l \cdot \Delta t,$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A},\ \ \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l}{E \cdot A}.$$

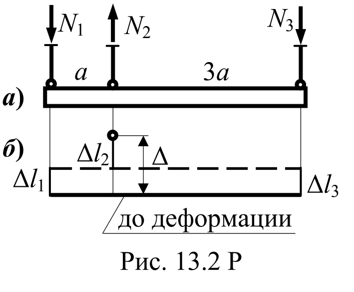


Рис. 13.2 Р

Таким образом, имеем четыре неизвестных N_1, N_2, N_3, Δt и четыре уравнения для их решения. Решая совместно эти уравнения, имеем:

$$N_1 = \frac{3}{2}\alpha E A \Delta t,\ \ N_2 = 2\alpha E A \Delta t,\ \ N_3 = \frac{1}{2}\alpha E A \Delta t,\ \ \Delta t = \frac{3\Delta}{5\alpha l}.$$

Ответ: Чтобы абсолютно жёсткий брус принял горизонтальное положение, нужно нагреть первый стержень на $\Delta t_1 = \dfrac{3\Delta}{5\alpha l}$.

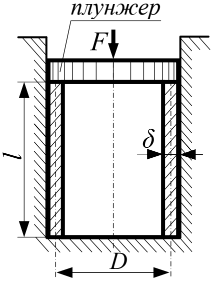


Рис. 13.3

13.3 Трубка длиной l, толщиной δ и средним диаметром $D = 20\,\delta$ вставляется без зазора и натяга в абсолютно жёсткий и гладкий канал и нагружается через жёсткий плунжер сжимающей силой F. (рис. 13.3) Определить силу F, при которой изменение длины трубки будет равно Δl, если коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$.

РЕШЕНИЕ

Напряжённое состояние в трубке показано на рис. 13.3 Р. Поскольку контактное давление $p_r \ll \sigma_{z,t}$, им можно пренебречь.

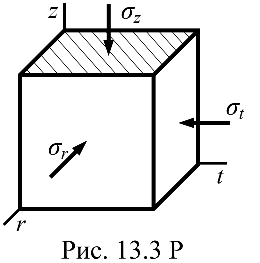


Рис. 13.3 Р

$$\Delta D = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_t = \frac{\Delta D}{D} = 0,$$

$$\sigma_z = -\frac{F}{\pi D \delta},$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu \cdot \sigma_z) = 0, \qquad \sigma_t = \mu \cdot \sigma_z = -\frac{\mu F}{\pi D \delta},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu \cdot \sigma_t) = \frac{1}{E}\frac{F}{\pi D \delta}(-1 + \mu^2).$$

Так как длина трубки уменьшается, в дальнейшем при вычислении силы возьмём её по модулю:

$$\left|\Delta l\right| = \left|\varepsilon_z\right| \cdot l = \frac{l}{E}\frac{F}{\pi D \delta}(1 - \mu^2).$$

Откуда получаем искомую силу:

$$F=\frac{\left|\Delta l\right|E\,\pi\,D\,\delta}{l\,(1-\mu^2)}=\frac{69{,}05\left|\Delta l\right|E\,\delta^2}{l}.$$

Ответ: Сила, при которой изменение длины трубки будет Δl –

$$F=\frac{69{,}05\left|\Delta l\right|E\,\delta^2}{l}.$$

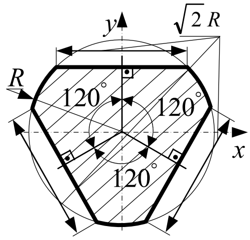


Рис. 13.4

13.4 Определить осевые моменты сопротивления W_x и W_y данной плоской фигуры (рис. 13.4).

РЕШЕНИЕ

Сечение имеет более двух осей симметрии, следовательно, все центральные оси будут главными и $J_x=J_y=\dfrac{J_p}{2}$ Обозначим полярные моменты инерции сегмента, круга и квадрата соответственно: $J_p^{сег}, J_p^{кр}, J_p^{кв}$.

Очевидно, что для каждого сегмента (рис. 13.4 Р, *а*) $J_p^{сег}=\dfrac{1}{4}(J_p^{кр}-J_p^{кв})$. Учитывая, что осевые моменты инерции квадрата

$$J_x^{кв}=J_y^{кв}=\frac{\left(R\sqrt{2}\right)^4}{12},$$

$$J_p^{кв}=J_x^{кв}+J_y^{кв}=\frac{\left(R\sqrt{2}\right)^4}{6},$$ имеем

$$J_p^{сег}=\frac{1}{4}\left[\frac{\pi R^4}{2}-\frac{\left(R\sqrt{2}\right)^4}{6}\right]=\frac{(3\pi-4)R^4}{24}.$$

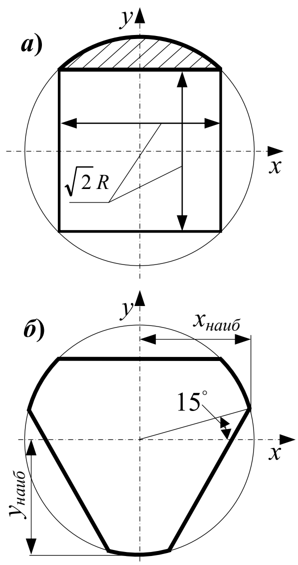


Рис. 13.4 Р

Тогда очевидно, что полярный момент заданной фигуры (рис. 13.4 Р, *б*) равен

$$J_p = J_p^{кр} - 3J_p^{сег} = \frac{\pi R^4}{2} - 3\frac{(3\pi - 4)R^4}{24} =$$

$$= \frac{(\pi + 4)R^4}{8}.$$

Тогда $J_x = J_y = \dfrac{J_p}{2} = \dfrac{(\pi + 4)R^4}{16}.$

Окончательно имеем:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{J_x}{R} = \frac{(\pi + 4)R^3}{16} = 0,4463R^3;$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{J_x}{R\cos 15^\circ} = \frac{(\pi + 4)R^3}{16\cos 15^\circ} = 0,4311R^3.$$

Ответ: Моменты сопротивления изгибу плоской фигуры: $W_x = 0,4463R^3$; $W_y = 0,4311R^3$.

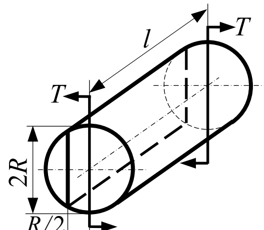


Рис. 13.5

13.5 Круглый брус (рис. 13.5) диаметром $2R$ и длиной l скручивается моментами T (рис. 13.5). Определить момент M от касательных напряжений, возникающий в продольных сечениях бруса, отстоящих от оси на расстоянии $R/2$, если l = $20R$.

РЕШЕНИЕ

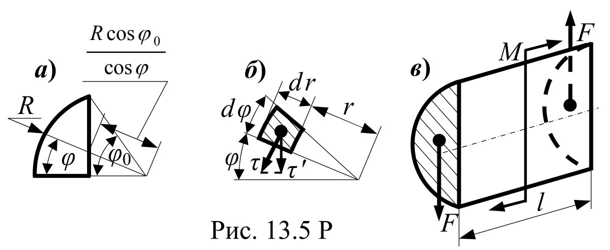


Рис. 13.5 Р

Все указанные сечения равноценны, поэтому остановимся на анализе вертикального продольного сечения. Определим равнодействующую касательных напряжений в сегменте. Причём в силу симметрии рассмотрим только половину сегмента (рис. 13.5 Р, *а*). Искомый момент, исходя из условия равновесия, будет равен произведению равнодействующей силы на длину бруса. Касательное напряжение равно $\tau = \dfrac{T}{J_p} r = \dfrac{2T}{\pi R^4} r$, а его вертикальная проекция

$\tau' = \tau \cos\varphi = \dfrac{2T}{\pi R^4} r \cos\varphi.$

Тогда равнодействующая сила в сегменте будет равна (рис. 13.5 Р, *б*):

$$F = 2\int_0^{\varphi_0} \int_{\frac{R\cos\varphi_0}{\cos\varphi}}^{R} \frac{2T}{\pi R^4} r\cos\varphi\, r\, dr\, d\varphi = \frac{4T}{\pi R^4}\int_0^{\varphi_0} \int_{\frac{R\cos\varphi_0}{\cos\varphi}}^{R} r^2 \cos\varphi\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{4T}{\pi R^4}\int_0^{\varphi_0} \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{R\cos\varphi_0}{\cos\varphi}}^{R} \cos\varphi\, d\varphi.$$

$$\int_0^{\varphi_0} \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{R\cos\varphi_0}{\cos\varphi}}^{R} \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{\varphi_0}\left(\frac{R^3}{3}\cos\varphi - \frac{R^3\cos^3\varphi_0}{3\cos^2\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{3}(\sin\varphi - \cos^3\varphi_0 \operatorname{tg}\varphi)\Bigg|_0^{\varphi_0} = \frac{R^3}{3}\sin^3\varphi_0 .$$

Для сегмента, отстоящего на $R/2$ от оси, угол φ_0 равен 60^0. Поэтому имеем $F = \dfrac{4TR^3}{3\pi R^4}\sin^3 60^\circ = \dfrac{4T3\sqrt{3}}{3\pi R8} = \dfrac{\sqrt{3}T}{2\pi R}$. Момент в продольном сечении $M = F\,l = F\,20\,R = \dfrac{10\sqrt{3}\,T}{\pi}$.

Ответ: Момент от касательных напряжений, возникающий в продольных сечениях бруса, отстоящих от оси на расстоянии $R/2$ – $M = \dfrac{10\sqrt{3}\,T}{\pi}$.

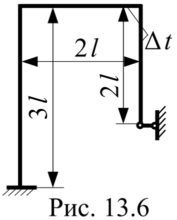


Рис. 13.6

13.6 Построить эпюру изгибающих моментов в плоской раме (рис. 13.6) при нагреве двух её элементов на Δt. Модуль Юнга равен E, коэффициент линейного температурного расширения материала α, поперечное сечение рамы – квадрат со стороной a, $l = 10a$.

РЕШЕНИЕ

Для решения воспользуемся методом сил. Введём фиктивную температурную нормальную силу $N = \varepsilon_t EA = \alpha \Delta t EA$. Построим эпюры этой силы, а также изгибающего момента, нормальной и перерезывающей силы от действия единичной нагрузки, приложенной по направлению силы X_1 (рис. 13.6 Р). Вычислим коэффициент и свободный член канонического уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left[2\left(\frac{1}{2}2l\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2l\right)+\frac{1}{2}l\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot l+2l\cdot 2l\cdot 2l\right]+$$

$$+\frac{1}{EA}(1\cdot 2\ldots l\cdot 1)+\frac{k_y}{GA}(1\cdot 2l\cdot 1+1\cdot 3l\cdot 1)=\frac{41l^3}{3EJ_x}+\frac{2l}{EA}+\frac{5k_y l}{GA}.$$

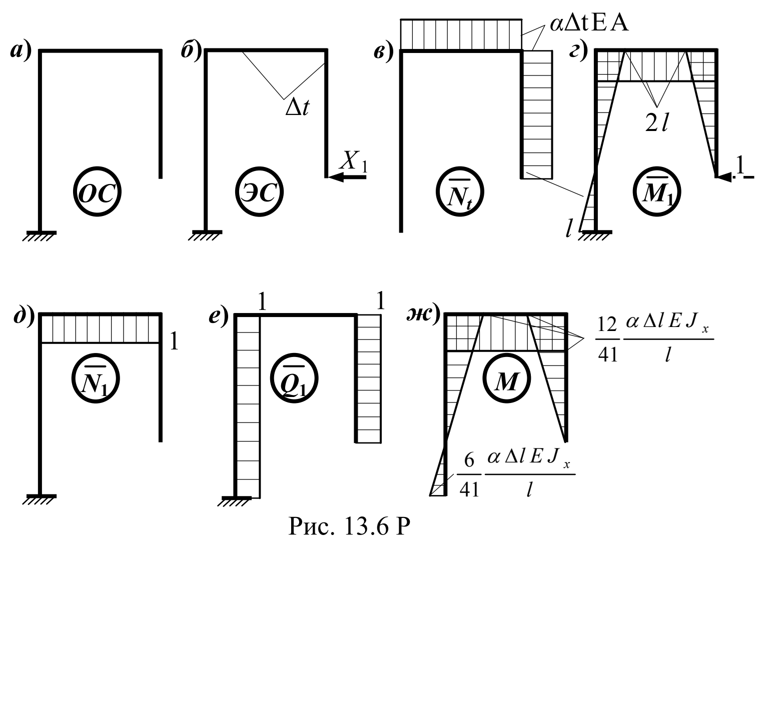


Рис. 13.6 Р

Теперь раскрываем статическую неопределимость $X_1 = -\dfrac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = \dfrac{6\alpha\,\Delta t\,E\,J_x}{41 l^2}$. Определив силу X_1, строим эпюру изгибающих моментов.

Ответ: Эпюра изгибающих моментов в плоской раме при нагреве двух её элементов на Δt представлена на рис. 13.6 Р, *ж*.

2.21 Олимпиада 2014 г., г. Туапсе, РГСУ

14.1 Найти осевые моменты инерции J_x, J_y данной фигуры (рис. 14.1).

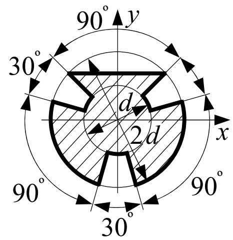


Рис. 14.1

РЕШЕНИЕ

Для данной фигуры, но без вырезанного сегмента, в силу того, что она обладает более чем двумя осями симметрии, имеем: $J'_x = J'_y = J_p/2$,

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} + \frac{3\pi (2d)^4}{4\cdot 32}\left(1-\left(\frac{d}{2d}\right)^4\right) = \frac{49}{128}\pi d^4 .$$

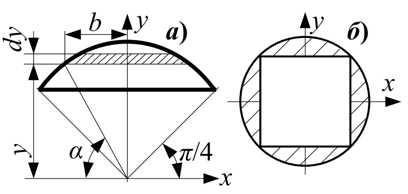


Рис. 14.1 Р

Тогда $J'_x = J'_y = \dfrac{49}{256}\pi d^4$.

Теперь найдём осевые моменты инерции сегмента (рис. 14.1 Р). Относительно оси x: $J_x^{сег} = \int\limits_A y^2\, dA$, где $y = d\cdot\sin\alpha$,

$d A = 2b\cdot d y$, $b = d\cdot\cos\alpha$, $d y = d\cdot\cos\alpha\cdot d\alpha$.

Тогда имеем:

$$J_x^{сег} = 2d^4\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha\, d\alpha = 2d^4\left\{\frac{1}{8}\left(\alpha-\frac{\sin 4\alpha}{4}\right)\right\}_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi d^4}{16}.$$

Относительно оси y момент инерции сегмента можно найти через момент инерции круга, квадрата и уже найденный момент инерции сегмента $J_x^{сег}$:

$$J_y^{сег} = \frac{1}{2}(J_y^{кр} - J_y^{кв} - 2J_x^{сег}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi(2d)^4}{64} - \frac{(d\sqrt{2})^4}{12} - 2\frac{\pi d^4}{16}\right] = 0{,}02968 d^4.$$

Ответ: Осевые моменты инерции – $J_x^{сег} = 0{,}1992 d^4$, $J_y^{сег} = 0{,}02968 d^4$.

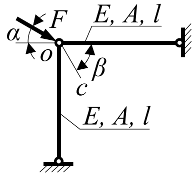


Рис. 14.2

14.2 Определить перемещение узла *о* фермы (рис. 14.2) в направлении *ос*. Дано: *F, E, A, l*, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

РЕШЕНИЕ

Согласно теореме Кастильяно перемещение точки приложения силы в упругой системе в направлении приложенной силы определяется по формуле $\delta = \dfrac{\partial U}{\partial F}$. Потенциальная энергия системы равна

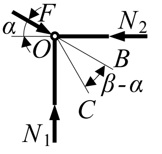


Рис. 14.2 Р

$$U = \frac{N_1^2 l}{2EA} + \frac{N_2^2 l}{2EA}.$$

Усилия в стержнях находим из уравнения равновесия (рис. 14.2 Р): $N_1 = F\sin\alpha$, $N_2 = F\cos\alpha$.

Тогда $U = \dfrac{N_1^2 l}{2EA}\sin^2\alpha + \dfrac{N_2^2 l}{2EA}\cos^2\alpha = \dfrac{F^2 l}{2EA}$.

Таким образом, $\delta_O^{OB} = \dfrac{Fl}{EA}$. Следовательно, перемещение узла *O* в направлении *OC* будет равным:

$$\delta_O^{OC} = \delta_O^{OB}\cos(\beta - \alpha) = \frac{Fl}{EA}\cos(\beta - \alpha) = \frac{Fl}{EA}\cos(60^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}Fl}{2EA}.$$

Ответ: Перемещение узла *о* фермы в направлении *ос* – $\delta_O^{OC} = \dfrac{\sqrt{3}Fl}{2EA}$.

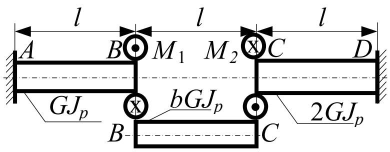


Рис. 14.3

14.3 Участки AB и CD стержня (рис. 14.3) закручиваются некоторыми моментами M_1 и M_2 на углы $2\varphi_0$ и φ_0 соответственно. Затем между участками AB и CD жестко закрепляется участок BC, а внешние моменты снимаются. Какой должна быть жёсткость центрального участка BC (каков коэффициент b?), чтобы после монтажа взаимный угол поворота сечений B и C составлял $\varphi_{BC} = 2\varphi_0$ Построить эпюры крутящего момента и угла закручивания для этого случая.

РЕШЕНИЕ

Эпюры крутящих моментов и углов закручивания до монтажа представлены на рис. 14.3 Р, *а-б* ($M'_{кр}$ и φ'). После монтажа и снятия внешних моментов во всем брусе возникает постоянный крутящий момент M_0, препятствующий полному раскручиванию участков AB и CD. Углы закручивания участков AB и CD после монтажа составят: $\varphi_B = \dfrac{M_0 l}{GJ_p}$, $\varphi_C = \dfrac{M_0 l}{2GJ_p}$. Сечения B и C участков AB и CD повернутся (раскрутятся) на углы $\varphi_B = 2\varphi_0 - \dfrac{M_0 l}{GJ_p}$ и $\varphi_C = \varphi_0 - \dfrac{M_0 l}{2GJ_p}$ соответственно. Очевидно, что сечения B и C центрального участка повернутся на такие же углы. Взаимный угол закручивания будет равен $\varphi_{BC} = 2\varphi_0 - \dfrac{M_0 l}{GJ_p} + \varphi_0 - \dfrac{M_0 l}{2GJ_p} = 2\varphi_0$.

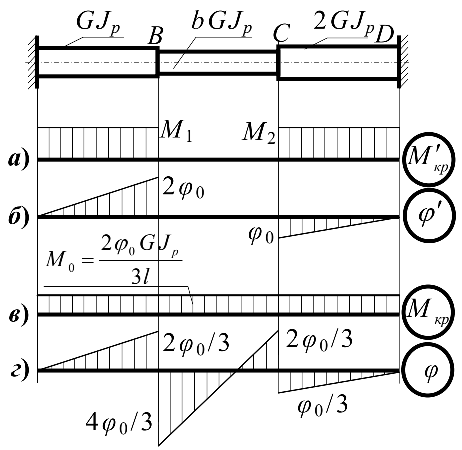


Рис. 14.3 Р

Откуда $M_0 = \dfrac{2\varphi_0 GJ_p}{3l}$.

С другой стороны, $\varphi_{BC} = \dfrac{M_0 l}{bGJ_p} = 2\varphi_0$.

Тогда $b = \dfrac{1}{3}$ и угол закручивания сечения B участка AB равен $\dfrac{M_0 l}{GJ_p} = \dfrac{2}{3}\varphi_0$, а участка BC $\dfrac{M_0 l}{GJ_p} - 2\varphi_0 = -\dfrac{4}{3}\varphi_0$, угол закручивания сечения C участка BC равен $-\dfrac{4}{3}\varphi_0 + \dfrac{M_0 l}{\frac{1}{3}GJ_p} = \dfrac{2}{3}\varphi_0$, а участка CD $\dfrac{M_0 l}{2GJ_p} - \varphi_0 = -\dfrac{1}{3}\varphi_0$. В сечении D угол закручивания равен $-\dfrac{1}{3}\varphi_0 + \dfrac{M_0 l}{2GJ_p} = 0$.

Строим эпюры крутящих моментов и углов закручивания.

Ответ: Жёсткость центрального участка BC – $GJ_p/3$. Эпюры крутящих моментов и углов закручивания после монтажа и разгрузки представлены на рис. 14.3 Р, *в-г*.

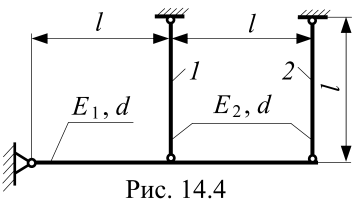


Рис. 14.4

14.4 Найти усилия в стержнях *1* и *2* при нагревании второго на Δt с учётом податливости горизонтальной балки (рис. 14.4). Дано: Δt, d, $E_1 = 100E$, $E_2 = E$, $l = 10d$.

РЕШЕНИЕ

Из уравнения равновесия ($M_A = 0$) (рис. 14.4 Р, *а*) находим: $N_1 = 2N_2$. Аналогично из рис. 14.4 Р, *б* – $\overline{N}_2 = 1/2$. С помощью правила Верещагина (рис. 14.4 Р, *в-г*) определяем прогиб горизонтальной балки в т. O:

$$v = \frac{1}{E_1 J_x}(M_F \times \overline{M}_1) = \frac{N_2 l^3}{3E_1 J_x}.$$

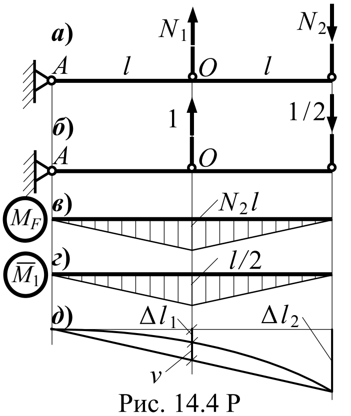


Рис. 14.4 Р

Удлинения стержней 1 и 2 равны:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_2 J_x}, \quad \Delta l_2 = -\frac{N_2 l}{E_2 A} + \alpha \Delta t l.$$

Из геометрии очевидно:

$$\Delta l_2 = 2(\Delta l_1 + v),$$

$$-\frac{N_2 l}{E_2 A} + \alpha \Delta t l = 2\left(\frac{N_1 l}{E_2 A} + \frac{N_2 l^3}{3E_1 J_x}\right),$$

$$N_2\left(1 + 4 + \frac{2l^2 E_2 A}{3E_1 J_x}\right) = E_2 A \alpha \Delta t l,$$

$$\frac{l^2 E_2 A}{E_1 J_x} = \frac{(10d)^2 \pi d^2 64}{4\pi d^4}\frac{E_2}{E_1} = 1600\frac{E_2}{E_1} = 16.$$

Тогда

$$N_2 = \frac{EA\alpha\Delta t l}{5 + \frac{2\cdot 16}{3}} = 0{,}06383 EA\alpha\Delta t l = 0{,}05013 Ed^3\alpha\Delta t.$$

$$N_1 = 2N_2 = 0{,}1003\, Ed^3\alpha\Delta t.$$

Ответ: При нагревании второго стержня на Δt в стержнях возникают усилия – $N_1 = 0{,}1003\, Ed^3\alpha\Delta t$, $N_2 = 0{,}05013 Ed^3\alpha\Delta t$.

14.5 П-образная рама *1* (рис. 14.5) сжимается силами F так, что образуются прогибы Δ. Затем к ней шарнирно присоединяется полукруглая рама *2* и нагрузка снимается. Построить эпюру изгибающих моментов в получившейся конструкции после монтажа, считая $\Delta << R$. Дано: E, J_x, Δ, R.

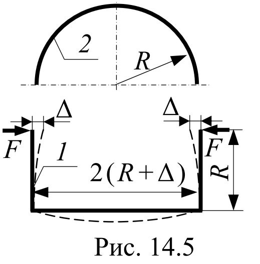


Рис. 14.5

РЕШЕНИЕ

Система после сборки один раз статически неопределима. Раскроем статическую неопределимость методом сил (рис. 14.5 Р):

$$\delta_{11} X = 2\Delta,$$

$$\delta_{11}^{(1)} = \frac{1}{EJ_x}\left(2\cdot\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\frac{2}{3}R + R\cdot 2R\cdot R\right) = \frac{8R^3}{3EJ_x},$$

$$\delta_{11}^{(2)} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{\pi}(R\sin\alpha)^2 R\,d\varphi = \frac{\pi R^3}{2EJ_x},$$

$$\delta_{11} = \delta_{11}^{(1)} + \delta_{11}^{(2)} = \frac{\pi R^3}{2EJ_x}\left(\frac{8\cdot 2}{3\pi}+1\right) = 4{,}237\frac{R^3}{EJ_x}.$$

$$X = \frac{2\Delta}{\delta_{11}} = \frac{2\Delta EJ_x}{4{,}237R^3} = 0{,}472\frac{\Delta EJ_x}{R^3}.$$

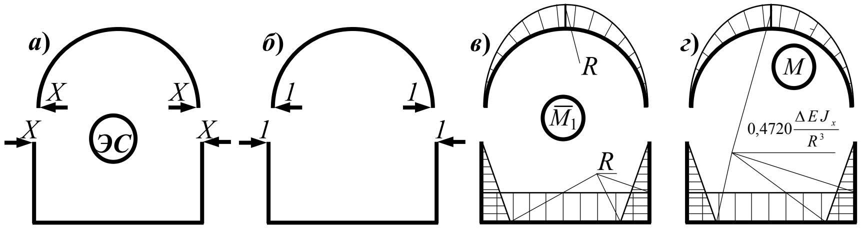


Рис. 14.5 Р

Строим эпюру изгибающих моментов.

Ответ: Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 14.5 Р, *г*.

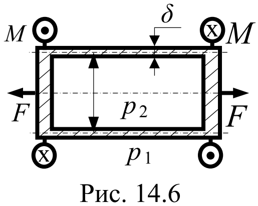


Рис. 14.6

14.6 Определить, какими должны быть приложенные к трубке сила F и момент M (рис. 14.6), чтобы в центральной части трубки (удалённой от днищ), возникало напряженное состояние «чистый сдвиг» и чему равны при этом касательные напряжения? Дано $D = 20\delta,\ p_1 = p,\ p_2 = 1{,}16p$.

РЕШЕНИЕ

Как известно, главные напряжения в общем случае напряжённого состояния находятся из решения кубического уравнения: $\sigma^3 + J_1 \cdot \sigma^2 + J_2 \cdot \sigma - J_3 = 0$, где J_1, J_2, J_3 – инварианты напряжённого состояния. Очевидно, что при «чистом сдвиге» должно выполняться следующее условие: $J_1 = J_3 = 0$. На рис. 14,6 Р представлены напряжённые состояния только под действием давления (*а* и *б*) и при действии силы и момента (*в*), в которых:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 0{,}16\,p, \quad \sigma_z^F = \frac{F}{\pi D \delta} = \frac{20F}{\pi D^2}, \quad \tau = \frac{M}{W_p} = \frac{40M}{\pi D^3}.$$

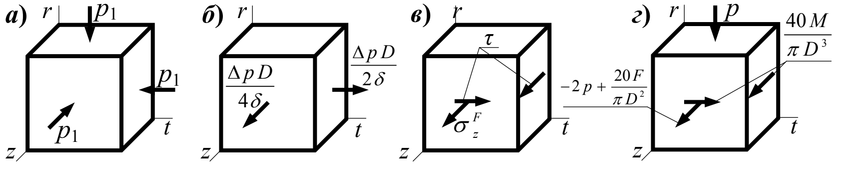


Рис. 14.6 Р

Суммарное напряжённое состояние представлено на рис. 14.6 Р, *г*.

Первый инвариант:

$$J_1 = \sigma_z + \sigma_t + \sigma_r = -0{,}2\,p + \frac{20F}{\pi D^2} - p + 0{,}6\,p = 0.$$

Откуда $F = 0{,}03\,p\pi D^2 = 37{,}70\,p\delta^2$.

Третий инвариант:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_r & \tau_{rt} & \tau_{rz} \\ \tau_{tr} & \sigma_t & \tau_{tz} \\ \tau_{zr} & \tau_{zt} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6\,p & \tau \\ 0 & \tau & 0{,}4\,p \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда $p \cdot (0{,}4\,p \cdot 0{,}6\,p - \tau^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = p\sqrt{0{,}24} = 0{,}490\,p.$

Тогда момент

$$M = \tau \cdot W_p = \frac{0{,}49}{40} p\pi D^3 = 307{,}9\,p\delta^3.$$

Касательное напряжение, характеризующее искомое напряжённое состояние «чистый сдвиг», равно:

$$\tau' = \sqrt{I_2} = \sqrt{-\sigma_r\sigma_t - \sigma_t\sigma_z - \sigma_z\sigma_r - \tau^2} =$$

$$= \sqrt{-(-0{,}6p^2) - (-0{,}4p^2 - 0{,}6p \cdot 0{,}4p - 0{,}24p^2} = p.$$

Ответ: Чтобы в центральной части трубки возникало напряжённое состояние «чистый сдвиг», нужно, чтобы $F = 37{,}70 p\delta^2$, $M = 307{,}9 p\delta^3$, при этом касательные напряжения – $\tau' = p$.

2.22 *Олимпиада 2015 г., г. Казань, КГАСУ*

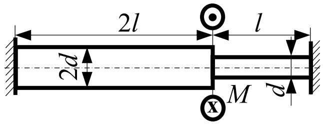


Рис. 15.1

15.1 На сколько нужно нагреть правый участок бруса (рис. 15.1), чтобы максимальное касательное напряжение увеличилось втрое? Дано: *l, d, M, E, G, α,* где *α* – коэффициент линейного температурного расширения материала.

РЕШЕНИЕ

Раскроем сначала статическую неопределимость в задаче кручения (рис. 15.1 Р, *а*):

$$\frac{M_R \cdot 2l \cdot 32}{G\pi(2d)^4} + \frac{(M_R - M)\cdot l \cdot 32}{G\pi d^4} = 0.$$

Тогда $M_к^I = M_R = \dfrac{8M}{9}$, $\quad M_к^{II} = M_R - M = -\dfrac{M}{9}.$

Очевидно, что максимальные касательные напряжения, вызываемые крутящим моментом, одинаковы на двух участках и равны.

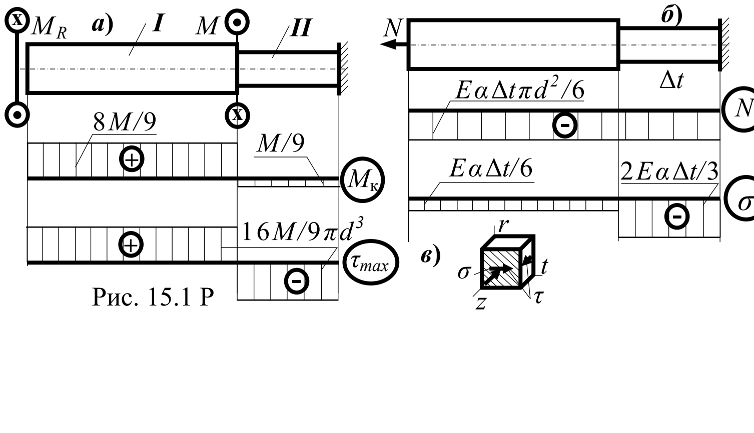


Рис. 15.1 Р

Затем раскроем статическую неопределимость в задаче о нагреве (рис. 15.1 Р, *б*): $\dfrac{N\cdot 2l\cdot 4}{E\cdot\pi(2d)^2}+\dfrac{N\cdot l\cdot 4}{E\cdot\pi d^2}+\alpha\cdot\Delta t\cdot l=0$, откуда

$N=-E\alpha\Delta t\pi d^2/6.$

Нормальные напряжения соответственно равны: $\sigma^I=-E\alpha\Delta t/6$, $\sigma^{II}=-2E\alpha\Delta t/3$.

После нагрева напряжённое состояние в брусе становится упрощённым плоским (рис. 15.1 Р, *в*), для которого

$$\sigma_1=\frac{-\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}}{2},\quad \sigma_2=0,\quad \sigma_3=\frac{-\sigma-\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}}{2},$$

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}}{2}.$$

Максимальное касательное напряжение после нагрева будет на втором участке бруса, где нормальные напряжения больше.

Тогда: $3\dfrac{16M}{9\pi d^3}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(2E\alpha\Delta t/3\right)^2+4\left(\dfrac{16M}{9\pi d^3}\right)^2}$, откуда

$$\Delta t=\frac{32\sqrt{2}M}{3E\alpha\pi d^3}=4{,}802\frac{M}{E\alpha d^3}.$$

Ответ: Чтобы максимальное касательное напряжение увеличилось втрое, нужно нагреть правый участок бруса на $\Delta t=4{,}802\dfrac{M}{E\alpha d^3}$.

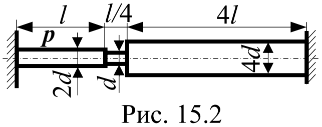


Рис. 15.2

15.2 Брус нагружен наружным давлением p (рис. 15.2). Чему должен быть равен коэффициент Пуассона μ материала бруса, чтобы сила реакция в левой заделке была равна нулю?

РЕШЕНИЕ

Давление, действующее на выступы бруса, создаёт осевые силы (рис. 15.2 Р, *а*):

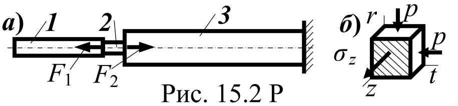


Рис. 15.2 Р

$$F_1 = p(\pi d^2 - \pi d^2 / 4) = 0{,}75\, p \pi d^2,$$

$$F_2 = p(4\pi d^2 - \pi d^2 / 4) = 3{,}75\, p \pi d^2.$$ То есть $F_2 = 5F_1$.

Составим уравнение совместности перемещений

$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$, где $\Delta l_i = \varepsilon_{z_i} \cdot l_i$.

Осевые деформации ε_{z_i} на каждом участке определим для напряжённого состояния, приведённого на рис. 15.2 Р, *б*, по обобщённому закону Гука $\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_r - \sigma_t)\right]$:

$$\varepsilon_{z_1} = \frac{2p}{E}\mu, \qquad \varepsilon_{z_2} = \frac{1}{E}\left[\frac{4F_1}{\pi d^2} - \mu(-p-p)\right] = \frac{p}{E}(3 + 2\mu),$$

$$\varepsilon_{z_3} = \frac{1}{E}\left[\frac{F_1 - F_2}{4\pi d^2} - \mu(-p-p)\right] = \frac{p}{E}(-\frac{3}{4} + 2\mu).$$

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{2p}{E}\mu l + \frac{p}{E}(3 + 2\mu)\frac{l}{4} + \frac{p}{E}(-\frac{3}{4} + 2\mu)4l = 0$$

или $\dfrac{pl}{E}(2\mu + \dfrac{3}{4} + \dfrac{\mu}{2} - 3 + 8\mu) = 0$.

Откуда имеем: $\mu = \dfrac{3}{14} = 0{,}2143$.

Ответ: Чтобы сила реакция в левой заделке была равна нулю коэффициент Пуассона материала бруса должен быть равен – $\mu = 0{,}2143$.

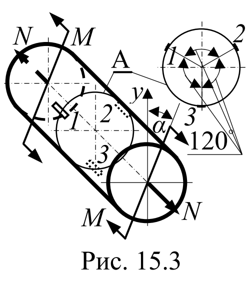


Рис. 15.3

15.3 Вал диаметром *d* нагружается изгибающим моментом *M* и нормальной силой *N*. На вал в некотором сечении *A* наклеено три тензодатчика в продольном направлении (как показано на рис. 15.3). На них наблюдаются следующие значения деформаций: $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0, \varepsilon_2 = 3\varepsilon_0,\ \varepsilon_3 = \varepsilon_0$.

Найти изгибающий момент, нормальную силу и угол α между плоскостью момента и осью y. Дано: d, E, ε_0.

РЕШЕНИЕ

1 вариант. Изгибающий момент можно представить (рис. 15.3 Р) как геометрическую сумму двух моментов M_x и M_y. Нормальные осевые напряжения для i-го датчика при внецентренном растяжении-сжатии можно определить по формуле:

$$\sigma_i = \frac{M_x}{J_x} y_i + \frac{M_y}{J_y} x_i + \frac{N}{A},$$

где $J_x = J_y = J$.

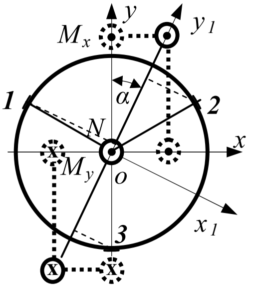


Рис. 15.3 Р

Координаты датчиков ($R = d/2$):

$y_1 = R \sin 30^\circ = R/2$, $y_2 = R/2$, $y_3 = -R$, $x_1 = -R\cos 30^\circ = -\sqrt{3}\,R/2$, $x_2 = \sqrt{3}\,R/2$, $x_3 = 0$.

На основании закона Гука имеем:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{\sigma^{(1)}}{E} = \frac{1}{E}\left(\frac{M_x}{J}\frac{R}{2} + \frac{M_y}{J_y}\left(-\frac{\sqrt{3}\,R}{2}\right) + \frac{N}{A}\right),$$

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{\sigma^{(2)}}{E} = \frac{1}{E}\left(\frac{M_x}{J}\frac{R}{2} + \frac{M_y}{J_y}\frac{\sqrt{3}\,R}{2} + \frac{N}{A}\right),$$

$$\varepsilon^{(3)} = \frac{\sigma^{(3)}}{E} = \frac{1}{E}\left(\frac{M_x}{J}(-R) + \frac{N}{A}\right).$$

Решая эту систему трёх уравнений с тремя неизвестными (M_x, M_y, N), имеем:

$$M_x = \frac{EJ}{3R}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 3\varepsilon_3) = \frac{\varepsilon_0 E J}{R} = \frac{\varepsilon_0 E \pi d^3}{32},$$

$$M_y = \frac{\sqrt{3}\,EJ}{3R}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \frac{\sqrt{3}\,\varepsilon_0 E J}{3R} = \frac{\sqrt{3}\,\varepsilon_0 E \pi d^3}{96},$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \frac{\sqrt{3}\,\varepsilon_0 E \pi d^3}{48},$$

$$N=\frac{EA}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=2\varepsilon_0 EA=\frac{\varepsilon_0 E\pi d^2}{2}.$$

Очевидно, что $M_x = M \sin\beta$, $M_y = M \cos\beta$.

Откуда $\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{M_x}{M_y}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=60^\circ$. Угол β отсчитывается от оси x. Тогда искомый угол α, отсчитываемый от оси y, будет равен $\alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

2 вариант. Так как поперечное сечение (круглое) имеет бесконечное число главных центральных осей и $J_x = J_y = J,$ то нагружение можно рассматривать как изгиб в плоскости y_1oz.

Координаты датчиков ($R = d/2$):

$$y_1^{(1)}=R\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{R}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha),$$

$$y_1^{(2)}=R\cos(60^\circ-\alpha)=\frac{R}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha),$$

$$y_1^{(3)}=-R\cos\alpha.$$

На основании закона Гука имеем:

$$\varepsilon^{(1)}=\frac{\sigma^{(1)}}{E}=\frac{1}{E}\left(\frac{M}{J}\frac{R}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha)+\frac{N}{A}\right),$$

$$\varepsilon^{(2)}=\frac{\sigma^{(2)}}{E}=\frac{1}{E}\left(\frac{M}{J}\frac{R}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha)+\frac{N}{A}\right),$$

$$\varepsilon^{(3)}=\frac{\sigma^{(3)}}{E}=\frac{1}{E}\left(\frac{M}{J}(-R\cos\alpha)+\frac{N}{A}\right).$$

Решая эту систему трёх уравнений с тремя неизвестными (M, N, α), имеем:

$$M=\frac{\sqrt{3}\,\varepsilon_0 E\pi d^3}{48},\ N=\frac{\varepsilon_0 E\pi d^2}{2},\ \alpha=30^\circ.$$

Ответ: $M=\dfrac{\sqrt{3}\,\varepsilon_0 E\pi d^3}{48}$, $N=\dfrac{\varepsilon_0 E\pi d^2}{2}$, $\alpha=30^\circ$.

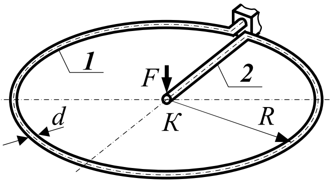


Рис. 15.4

15.4 Определить вертикальное перемещение точки K (рис. 15.4) упругого элемента круглого поперечного сечения в виде плоской круговой рамы (*1*) с отогнутым прямолинейным элементом (*2*) под действием силы F. Дано: R, E, F, d, $\mu = 0{,}25$, где μ – коэффициент Пуассона.

РЕШЕНИЕ

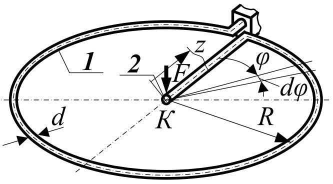


Рис. 15.4 Р

В данной конструкции элемент *1* работает только на кручение. Крутящий момент равен $M_F(\varphi) = F\cdot R = \text{const}$. Элемент 2 работает только на изгиб $M_F(z) = F\cdot z$. Поэтому перемещение точки K складывается из двух слагаемых: $\Delta_к = \Delta_к^{(1)} + \Delta_к^{(2)}$ (рис. 15.4 Р). Определим перемещение с использованием интеграла Мора. Для этого на рис 15.4 Р заменим силу F единичной силой: $\overline{M}_1(\varphi) = 1\cdot R =$ $= \text{const}$, $\overline{M}_1(z) = 1\cdot z$.

$$\Delta_K = \frac{1}{GJ_p}\int_0^{2\pi} M_F(\varphi)\cdot\overline{M}_1(\varphi)R\,d\varphi + \frac{1}{EJ_x}\int_0^R M_F(z)\cdot M_1(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{GJ_p}\int_0^{2\pi} F\,R\cdot R\cdot R\,d\varphi + \frac{1}{EJ_x}\int_0^R F\,z\cdot z\,dz = \frac{2\pi F R^3}{GJ_p} + \frac{F R^3}{3EJ_x}.$$

Учитывая, что $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)} = \dfrac{E}{2(1+0{,}25)} = 0{,}4E$, $J_p = 2J_x$, имеем:

$$\Delta_K = \frac{2\pi F R^3}{0{,}4E\cdot 2J_x} + \frac{F R^3}{3EJ_x} = \frac{64 F R^3}{E\pi d^4}\left(\frac{2\pi}{0{,}8} + \frac{1}{3}\right) = 166{,}8\frac{F R^3}{E d^4}.$$

Ответ: Вертикальное перемещение точки K – $\Delta_K^{верт} = 166{,}8\dfrac{F R^3}{E d^4}$.

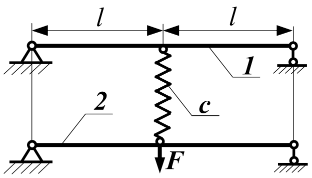


Рис. 15.5

15.5 Какой жёсткости c должна быть пружина, соединяющая две балки *1* и *2* (рис. 15.5), чтобы при нагружении системы силой F соотношение максимальных изгибающих моментов в балках было $M_{\max}^{(1)} = 0{,}1 M_{\max}^{(2)}$. Жёсткости балок одинаковы. Дано: E, J_x, l.

РЕШЕНИЕ

Обозначим внутреннюю силу в пружине N (рис. 15.5 Р). Тогда к первой балке (рис. 15.5 Р, *а*) приложена сила N, а ко второй (рис. 15.5 Р, *б*) – $F + N$. Максимальные изгибающие моменты в балках соответственно равны:

$$M_{\max}^{(1)} = \frac{Nl}{2}, \quad M_{\max}^{(2)} = \frac{(F-N)l}{2}.$$

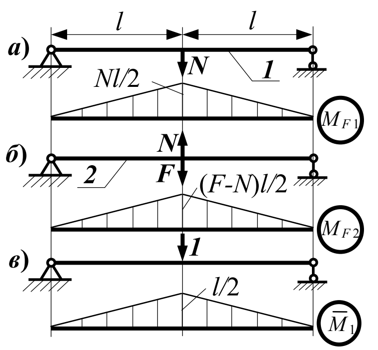


Рис. 15.5 Р

Из соотношения, заданного по условию задачи, имеем:

$$\frac{Nl}{2} = 0{,}1\frac{(F-N)l}{2} \quad \Rightarrow \quad N = F/11.$$

Способом Верещагина найдём вертикальные перемещения в точках крепления пружины для каждой балки:

$$EJ\Delta_1^{(1)} = 2\left(\frac{1}{2}\frac{Nl}{2}\cdot l\cdot\frac{2}{3}\frac{l}{2}\right) = \frac{Nl^3}{6} = \frac{Fl^3}{66},$$

$$EJ\Delta_1^{(2)} = 2\left(\frac{1}{2}\frac{(F-N)l}{2}\cdot l\cdot\frac{2}{3}\frac{l}{2}\right) = \frac{(F-N)l^3}{6} = \frac{10Fl^3}{66}.$$

Удлинение пружины равно разнице между прогибами балок:

$$\Delta l_{пр} = \Delta_1^{(2)} - \Delta_1^{(1)} = \frac{N}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{9Fl^3}{66EJ} = \frac{1}{11}\frac{F}{c}.$$

Откуда имеем: $c = \dfrac{2}{3}\dfrac{EJ}{l^3}$.

Ответ: Чтобы при нагружении системы силой F соотношение максимальных изгибающих моментов в балках было $M^{(1)}_{\max} = 0{,}1 M^{(2)}_{\max}$, жёсткость пружины должна быть – $c = \frac{2}{3}\frac{EJ}{l^3}$.

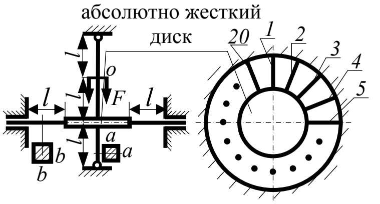


Рис. 15.6

15.6 Брус, соединённый с абсолютно жёстким диском, висящим на двадцати равномерно расположенных балках (рис. 15.6), нагружается силой F. Определить перемещение точки приложения силы o, считая, что потеря устойчивости бруса исключена. Дано: F, l, E, $a = l/20$, $b = l/10$.

РЕШЕНИЕ

Пусть со стороны бруса на диск действует сила X (рис. 15.6 Р, *а*). Каждая балка изгибается кососимметрично, поэтому прогиб на конце балки δ будет равен двум прогибам балки в середине δ_1 (рис. 15.6 Р, *б*). Причём в середине балки изгибающий момент равен нулю. Тогда, согласно способу Верещагина:

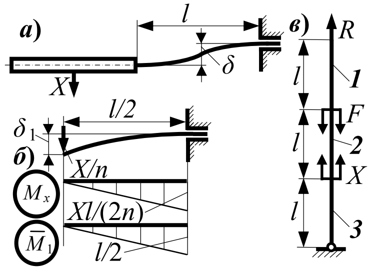


Рис. 15.6 Р

$$\delta = 2\delta_1 = \frac{2}{EJ}\left(\frac{1}{2}\frac{Xl}{2n}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{l}{2}\right) = \frac{Xl^3}{12nEJ},$$

где $n = 20$ – число балок.

Задача два раза статически неопределимая, поэтому нужно записать два уравнения совместности перемещений. Вначале запишем уравнение совместности перемещений для бруса (рис. 15.6 Р, *в*) $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$.

Распишем перемещения по закону Гука

$$\frac{Rl}{EA} + \frac{(R-F)l}{EA} + \frac{(R-F+X)l}{EA} = 0.$$

Получим связь между силой реакции бруса R и суммарной силой реакции от 20-ти балок X:

$$X = 2\,F - 3\,R.$$

Далее учтем, что перемещение бруса и прогибы балок в месте соединения равны $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta$,

$$\frac{Rl}{EA} + \frac{(R-F)l}{EA} = \frac{Xl^3}{12nEJ}.$$

Но $J = \dfrac{b^4}{12} = \dfrac{l^4}{120000}$, $\quad A = a^2 = \dfrac{l^2}{400}$. Тогда

$$X = \frac{(2R-F)12nJ}{l^2 A} = \frac{4}{5}(2R-F).$$

Приравнивая два выражения для X, найдём значение силы реакции R. Перемещение точки приложения силы

$$2F\ \ R = \frac{4}{5}(2R-F) \quad \Rightarrow \quad R = \frac{14}{23}F.$$

Тогда

$$\delta_o = \frac{Rl}{EA} = \frac{14Fl\,400}{23El^2} = 243{,}5\frac{F}{El}.$$

Ответ: Перемещение точки приложения силы – $\delta_o = 243{,}5\dfrac{F}{El}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов: учеб. пособие / В.И. Феодосьев. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во «Наука», 1978. – 400 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.С. Вольмир, Ю.П. Григорьев, А.И. Коданев [и др.]; под ред. А.С. Вольмира. – М.: Изд-во «Наука», 1984. – 408 с.
3. Нестандартные задачи сопротивления материалов. Методы решения / сост.: Ю.В. Глявин, Ю.П. Золотарев, Н.А. Ильичев; Нижегород. политехн. ун-т. – Нижний Новгород: ННПИ, 1991. – 56 с.
4. Сборник конкурсных задач Всероссийского тура студенческой олимпиады по сопротивлению материалов / сост.: Р.Р. Мавлютов, М.Х. Муллагулов; Уфим. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа: УГАТУ, 1993. – 64 с.
5. Несмеянов, А.С. Сопротивление материалов. Нестандартные задачи и подходы к их решению: учеб. пособие / А.С. Несмеянов, О.С. Саадаков; Челяб. гос. техн. ун-т. – Челябинск: ЧГТУ, 1994. – 92 с.
6. Нестандартные задачи по сопротивлению материалов: учеб. пособие: в 2 ч. / сост.: Ю.В. Глявин, Н.А. Ильичев, А.А. Прохоров. – Самара: НПЦ «Авиатор», 1995. – Ч. 1 – 170 с., Ч. 2 – 60 с.
7. Исаченко, В.В. Учебное пособие по решению конкурсных задач по сопротивлению материалов / В.В. Исаченко, М.И. Мартиросов, В.И. Щербаков; под ред. В.В. Исаченко; Моск. инж.-физ. ин-т (ТУ). – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МИФИ, 2006. – 248 с.
8. Логвинов, В.Б. Сборник олимпиадных задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие / В.Б. Логвинов, А.М. Покровский, С.А. Алексеев; Юж.-Рос. гос. техн. ун-т, Моск. гос. техн. ун-т им. Н.Э. Баумана. – Новочеркасск: Изд-во «Лик», 2010. – 148 с.
9. Покровский, А.М. Задачи Всероссийских олимпиад по сопротивлению материалов: учеб. пособие / А.М. Покровский, А.М. Наумов, В.К. Шадрин; Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Моск. гос. техн. ун-т им.Н.Э. Баумана. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2012. – 112 с.

ИТОГИ ВСЕРОССИЙСКИХ (МЕЖДУНАРОДНЫХ) ОЛИМПИАД ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

№ п/п	Год	Город, вуз	Кол-во участ.	Личный зачет	Командный зачет
XIV	1994	Самара, СГАУ	26	1. Терешин Д., ЧГТУ – 62 2. Лебедев С., МГТУ – 61 3. Суровергин Е., МГТУ – 56, Демидов С., Марийский ГТИ – 56	1. МГТУ – 117 2. Марийский ГТИ – 97 3. ЧГТУ – 95
XV	1995	Челябинск, ЧГТУ		1. Прасолов А.Н., МГТУ – 58 2. Угринович С.С., МГААТМ – 55 3. Забирохин П.Г, СПбГТУ – 52, Ревин А.В., МИФИ – 52	1. Москва – 165 2. Самара – 165 3. С.-Петербург – 165
XVI	1996	Н. Новгород, НГТУ	24	1. Ветюков Ю.М., СПбГТУ – 71 2. Ведерников П.А., МИФИ – 68 3. Сергиенко А.С., Нижегор. АСА – 64, Поляков Д.В., МГТУ – 64	
XVII	1997	Новочеркасск, НГТУ		1. Руссинковский В., МГТУ – 60 2. Антипов А., МИФИ – 44 3. Соколов В., ЧГТУ – 40	1. Москва – 127 2. Урал. рег. – 102 3. С.-Петербург – 67
XVIII	1998	Н. Новгород, НГАСУ		1. Хлыстин С., Марийский ГТУ – 47 2. Лапухин Ю., МГУПБ – 46 3. Смекалов В., НГАСУ – 45	
XIX	1999	Пермь, ПГТУ	42	1. Серегин С.А., СГУПС – 43 2. Крук С.С., МГТУ – 40 3. Чирак А.В., НГСУ – 38	
XX	2000	Ст. Оскол, СТИ МИСиС		1. Китаев В.,. МГТУ – 52, 2. Маслаков В., МГТУ – 51, 3. Ефимов А., Марийский ГТИ – 40, Савиных А., ЮУГТУ – 40, Пчелинцев Д., Новосиб. ГТУ – 39, Окунев А., МИФИ – 38.	
XXI	2001	Йошкар-Ола, Марийский ГТИ	45	1. Щербатюк О., Украина – 59, 2. Форенталь М., ЮУГТУ – 54,	1. Урал – 142, 2. Москва – 128,

Продолжение табл.

1	2	3	4	5	6
				Перевалов В., ЮУГТУ – 52, 3. Соколов А., Марийский ГТИ – 50, Шекотуров А., МГТУ – 48.	
XXII	2002	С.-Петербург, СПбГТУ	64	1. Воронков О.В., НГТУ – 54, 2. Иванов М.Ю., РГТУ – 50, 3. Надеждин В.С., МГТУ МАМИ – 44.	1. В.-Вятский рег. – 128, 2. Москва – 116,
XXIII	2003	Саранск, МГТУ им. Огарева	35	1. Сосновских В.М., ЮУрГУ – 52, 2. Сипиков Е.А., НГТУ – 48, 3. Матвеев И.О., СТИ МИСиС – 47.	1. В.-Вятский рег. – 112, 2. Москва – 111, 3. Урал. рег. – 99.
XXIV	2004	Дзержинск, фил. НГТУ		1. Лысенков Д., НГТУ – 52, 2. Чудинов Д., ПГТУ – 50, 3. Анненков Г., МГТУ – 47.	1. Урал, В.-Вятский рег. – 131, 2. Москва – 108, 3. С.-Петербург – 95.
XXV	2005	Ст. Оскол, СТИ МИСиС	35	1. Стриженов Е.М., МГТУ – 54, 2. Ельцов А.Б., ПГТУ – 51, 3. Козьмин Н.А., СГУПС – 42.	1. Урал – 120, 2. С.-Петербург – 89, 3. В.-Вятский рег. – 86.
XXVI	2006	Улан-Удэ, ВСГУТУ	37	1. Киселев И.А., МГТУ – 49, 2. Скориков Р.А., ЮУрГУ – 45, 3. Алексеев В.А., МГТУ – 41.	1. Урал – 104, 2. Москва – 102, 3. С.-Петербург – 74.
XXVII	2007	Новочеркасск, ЮРГТУ (НПИ)	46	1. Вайшвилас М.А., КГТУ – 44, 2. Подпругин А.Ю., МГТУ – 42, 3. Двас Н.Г., МГТУ – 40.	1. Украина – 104, 2. Москва – 102, 3. С.-Петербург – 97.
XXVIII	2008	Дзержинск, фил. НГТУ	64	1. Антонов А.В., МГТУ – 57, 2. Позднышев Е.О., ЧВВАКИУ – 54, Зайцев С.С., СПбГТУ – 54,	
XXIX	2009	Улан-Удэ, ВСГУТУ	47	1. Нгуен Чонг Там, МИИТ – 48, 2. Кудрявцев О.А., ЮУрГУ – 40, 3. Делков А.В., СибГАУ – 39.	1. Москва – 116, 2. Урал – 102, 3. Сибирь – 88.
XXX	2010	Ст. Оскол, СТИ МИСиС	46	1. Самойлов С.П., ЮУрГУ – 43, Шакиртов М.М., СГУПС – 43,	1. Сибирь – 118, 2. Урал – 95, 3. Москва – 92.

Окончание табл.

1	2	3	4	5	6
				2. Шириазданов К.В., МГТУ – 41, 3. Ершов Д.И., НГАСУ – 39.	
XXXI	2011	Пермь, ПНИПУ	62	1. Башкатов А.А., МГТУ – 52, 2. Вербовский Р.И., КГТУ – 51, 3. Рябев А.В., МАМИ – 50.	1. МГТУ – 133, 2. ПНИПУ – 98, КГТУ – 96, 3. ЮУрГТУ – 82.
XXXII	2012	Самара, СГАУ	72	1. Констандов М.В., ЮУрГУ – 42, 2. Москаленко И.Н., НИЯУ «МИФИ» – 37, 3.Тарасов М.В., ЮУрГУ – 42	1. ЮУрГУ – 96, 2. МГТУ – 79, 3. ПГТУ (Йошк.-Ола) – 70, СПбПУ – 69.
XXXIII	2013	Владивосток, ДВФУ	41	1. Анисимов П.Д., МГТУ – 43, 2. Белых М.А., КнАГТУ – 42, 3. Рябев С.В., МАМИ – 32.	1. МГТУ – 100, 2. КнАГТУ –60, 3. СПбПУ – 55.
XXXIV	2014	Туапсе, РГСУ	53	1. Черемушкин В.А., МГТУ – 37, 2. Чулюков В.А., МГТУ – 36, 3. Карпенко А.В., КГТУ – 35	1. МГТУ – 103, 2. КГТУ – 86, СПбПУ – 85, 3. ПНИПУ – 64, МИИТ – 56.
XXXIV	2015	Казань, КГАСУ	67	1. Тяпкин А.В., МГТУ – 55, 2. Нягин П.В., МГТУ – 44, 3. Минкин А.Д., СПбПУ – 42	1. МГТУ – 121, 2. СПбПУ – 101, ПНИПУ– 91, 3. СГАУ – 64, СибГУПС – 61, КГАСУ – 53 МГУПС – 52.

Учебное издание

Покровский Алексей Михайлович,
Наумов Андрей Михайлович,
Вакулюк Владимир Степанович,
Шадрин Валентин Карпович

СБОРНИК ЗАДАЧ ВСЕРОССИЙСКИХ ОЛИМПИАД ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Издание второе, исправленное и дополненное

Учебное пособие

Редактор Н.С. К у п р и я н о в а
Доверстка Л.Р. Д м и т р и е н к о

Подписано в печать 14.06.2016. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ. л. 10,5.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. 12/2016

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Э. БАУМАНА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Изд-во Самарского университета. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.