ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

***В.Н. ПОНОМАРЕНКО***

# СБОРНИК ЗАДАЧ
# ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

**С А М А Р А 2010**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

В.Н. Пономаренко

# СБОРНИК ЗАДАЧ
# ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета*
*в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2010

УДК 517(076)
ББК 22.1
П 563

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. С.В. Б у ш к о в,
канд. техн. наук, доц. Т.Д. К о в а л е н к о

***Пономаренко В.Н.***

П 563 **Сборник задач по математическому анализу:** учеб. пособие / *В.Н. Пономаренко*. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2010. – 132 с.

ISBN 978-5-7883-0774-9

В настоящем учебном пособии собраны задачи по темам, включая задания для самостоятельной работы, соответствующим программе 1-го курса математического анализа, который читается на факультете информатики.

Предназначено для студентов специальностей и направлений: «Комплексное обеспечение информационной безопасности и автоматизированных систем», «Прикладная математика и информатика» и др.

УДК 517(076)
ББК 22.1

ISBN 978-5-7883-0774-9

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Предисловие

Изучение курса математического анализа, как и любого математического предмета, невозможно без систематического решения задач.

Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий в аудитории, а также выдачи индивидуальных заданий по основным разделам математического анализа.

Для удобства пользования книгой в начале каждого параграфа приведены краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач. Подавляющая часть задач вполне посильна для самостоятельного решения при условии усвоения предшествующего материала. Также имеется ряд заданий, требующих для решения строгие математические доказательства.

Основу сборника составляют задачи, которые рассматривались на практических занятиях по курсу математического анализа на факультете информатики Самарского государственного аэрокосмического университета. В целом определения, формулировки теорем и порядок изложения соответствуют этому курсу.

Автор благодарен Первовой Татьяне Геннадьевне за предоставленные материалы и многочисленные ценные замечания, рецензентам Коваленко Татьяне Дмитриевне и Бушкову Станиславу Владимировичу за полезные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

## §1. Элементы теории множеств. Метод математической индукции

*Множеством* называется произвольная совокупность объектов, называемых *элементами* этого множества. Формула $a \in M$ означает, что элемент *a принадлежит* множеству *M*, формула $a \notin M$ – элемент *a* не принадлежит *M*.

Если любой элемент множества *M* является элементом множества *P*, то говорят, что *M* является *подмножеством* множества *P*, обозначается $M \subseteq P$. Множества M и P равны $(M = P)$, если $M \subseteq P$ и $P \subseteq M$.

Операции над множествами:

$M \cap P = \{x | x \in M \text{ и } x \in P\}$ (пересечение);

$M \cup P = \{x | x \in M \text{ или } x \in P\}$ (объединение);

$M \setminus P = \{x | x \in M \text{ и } x \notin P\}$ (разность);

$\overline{M}_P = \{x | x \notin M \text{ и } x \in P\}$ (дополнение множества *M* до множества *P*).

Пусть $X = \{x\}$ – подмножество вещественных чисел. Число $m = \inf\{x\}$ называется *нижней гранью* множества *X*, если: 1) каждое $x \in X$ удовлетворяет неравенству $x \geq m$; 2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $x' \in X$ такое, что $x' < m + \varepsilon$. Аналогично число $M = \sup\{x\}$ называется *верхней гранью* множества *X*, если: 1) каждое $x \in X$ удовлетворяет неравенству $x \leq M$; 2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $x'' \in X$ такое, что $x'' < M - \varepsilon$.

*Метод математической индукции.* 1) Пусть высказывание *F(1)* истинно; 2) из истинности *F(k)* следует истинность *F(k+1)*, тогда для всех натуральных чисел *n* высказывание *F(n)* истинно.

1.1. Докажите, что для любых множеств А и В справедливы равенства:

1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$; 2) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

1.2. Докажите, что для любых множеств А, В и С справедливы равенства:

1) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; 2) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

3) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; 4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

5) $C \setminus (A \setminus B) = (C \setminus A) \cup (B \cap C)$; 6) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

1.3. Докажите, что $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$.

1.4. Докажите, что для любых множеств $A$, $B$ существует ровно одно множество $X$, удовлетворяющее уравнению $A\Delta X = B$. Найдите формулу для множества $X$ и убедитесь, что оно является также решением уравнения $B\Delta X = A$.

1.5. Решить неравенства:

1) $|x-2|<3$; 2) $|x^2-5|>2$;

3) $|x+3|-|x+1|<2$; 4) $|x^2-2x|>x^2-2|x|$;

5) $3x^2+6|x|-5<1$; 6) $||3-x|-2|\le x-1$.

1.6. Даны множества $A=\{x: x^2-8x+15<0\}$, $B=\{x: |x-3|\le 4\}$ и $C=\{x: |x-2|\ge 3\}$. Найдите следующие множества:

1) $(A\cup B)\cap\overline{C}$; 2) $B\setminus A$;

3) $(A\Delta B)\setminus C$; 4) $(\overline{A}\setminus C)\cup B$.

1.7. Даны множества $A=\{x: x^2-4x+5\le 0\}$, $B=\{x: -6\le x<0\}$ и $C=\{x: |x-1|>2\}$. Найдите следующие множества:

1) $A\cap B\cup\overline{C}$; 2) $\overline{(A\cup B)}$;

3) $(B\setminus A)\cup C$; 4) $(C\Delta A)\Delta B$.

1.8. Докажите, что число:

1) $11^{n+1}+12^{2n-1}$ делится на 133; 2) $5\cdot 2^{3n+1}+3^{3n+2}$ делится на 19.

1.9. Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа $n$ справедливы следующие равенства:

1) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$; 2) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1^3+\ldots n^3=(1+2+\ldots+n)^2$; 4) $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

1.10. Применяя метод математической индукции, доказать, что для натурального $n$ справедливы следующие неравенства:

1) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 2} + \frac{1}{2^n - 1}$; 2) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$;

3) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$; 4) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$;

5) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$; 6) $\left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1} < n!$;

7) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; 8) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

1.11. Доказать, что $\forall n \in \boldsymbol{N}$ и $\forall x > -1$ справедливо неравенство (неравенство Бернулли) $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

1.12. Числа $f_n = 2^{2^n} + 1$ называются числами Ферма. Докажите равенство $\prod_{k=0}^{n-1} f_k = f_n - 2$.

1.13. Докажите, что десятичная запись числа Ферма $f_n$ при $n \geq 2$ оканчивается цифрой 7.

1.14. Докажите равенство $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ (в левой части равенства $n$ корней).

1.15. Пусть $\{-x\}$ – множество чисел, противоположных числам $x \in \{x\}$. Доказать, что:

1) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$; 2) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

1.16. Пусть $\{x + y\}$ есть множество всех сумм $x + y$, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$. Доказать равенства:

1) $\inf\{x + y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$; 2) $\sup\{x + y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

1.17. Пусть $\{xy\}$ есть множество всех произведений $xy$, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$. Доказать равенства:

1) $\inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$; 2) $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

## §2. Функции действительного переменного

Переменная $y$ называется однозначной функцией $f$ от переменной $x$ в данной области изменения $X = \{x\}$, если каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие одно определенное действительное значение $y = f(x)$, принадлежащее некоторому множеству $Y = \{y\}$. Множество $X$ носит название *области определения* функции $f(x)$, $Y$ называется *множеством значений* этой функции.

Функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной), если: 1) область определения функции $f(x)$ симметрична относительно нуля; 2) выполняется равенство $y(-x) = y(x)$ $\left(y(-x) = -y(x)\right)$.

Функция $y = f(x)$ называется называется *периодической*, если существует положительное число $T$ $(T > 0)$ такое, что выполняется равенство $f(x \pm T) = f(x)$, число $T$ – называется *основным периодом*.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*) на промежутке $\langle a, b \rangle$, если для любых $x_1$ и $x_2$ из указанного промежутка выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $\left(f(x_1) < f(x_2)\right)$.

2.1. Дана функция $f(x) = |x| - x$. Найти значения $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$ и построить ее график.

2.2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Найти значения: $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(2)$, построить график данной функции.

2.3. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -1 < x < 0, \\ x^2, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Найти значения: $f(1)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $f(0)$. Существует ли $f(3)$?

2.4. Найти области определения следующих функций:

1) $y = 1 - \lg x$;  2) $y = \sqrt{5 - 2x}$;

3) $y = \lg(x+3)$;  4) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

5) $y = \dfrac{1}{x^3 - x}$;  6) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$;

7) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$;  8) $y = \arccos\dfrac{1 - 2x}{4}$;

9) $y = \arcsin(x - 2)$;  10) $y = \log_x 2$;

11) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$;  12) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$.

2.5. Определить, какие из данных ниже функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

1) $y = 3 - x^2 + 2x^4$;  2) $y = x^3 + 3$;

3) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$;  4) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$;

5) $y = \dfrac{3}{x}$;  6) $y = \ln\dfrac{1 - x}{1 + x}$;

7) $y = \log_2 x$;  8) $y = 2^{-x^2}$.

2.6. Исследовать на периодичность следующие функции (определить, какие из них будут периодическими и указать их период):

1) $y = \cos\dfrac{x}{2}$;  2) $y = \sin\dfrac{2x + 1}{2}$;

3) $y = \sin 3x$;  4) $y = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} + 3\right)$;

5) $y = x\cos x$;  6) $y = x - [x]$.

2.7. Построить график такой периодической функции с периодом $T = 1$, которая на полуинтервале $[0;1)$ задана формулой:

1) $y = x$;  2) $y = x^2$.

2.8. Указать наибольшее и наименьшее значения функций:

1) $y=\sin^2 x$;

2) $y=\cos x^3$;

3) $y=1-\sin x$;

4) $y=2^{x^2}$.

2.9. Исследовать на возрастание и убывание функции:

1) $y=x+\operatorname{arctg} x$;

2) $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y=\frac{1}{x^3-1}, x\neq 1$;

4) $y=\frac{1}{1+\cos^2 x}$.

2.10. Выяснить, какие из нижеследующих функций ограничены, а какие не ограничены на указанных промежутках. Для ограниченных сверху (снизу) функций найти точную верхнюю (нижнюю) грань:

1) $f(x)=x^2+2$ на $[-1;3]$;

2) $y=\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$ на $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $y=x+\frac{1}{x}$ на $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

2.11. Найти $f(x)$, если:

1) $f(x+1)=x^2-3x+2$;

2) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$ $(|x|\geq 2)$;

3) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$;

4) $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$.

## §3. Построение графиков функций

Основными элементарными функциями считаются: *константа* $y = c$, где $c \in \mathbb{R}$, *степенная функция* $y = x^{\alpha}$, *показательная функция* $y = a^x, a > 0, a \neq 1$, *логарифмическая функция* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, *тригонометрические функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, *обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

*Элементарной* называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их композиций и арифметических операций.

Построение графика функции $y = Cf\left[a\left(x + \dfrac{b}{a}\right)\right] + D$ в общем случае сводится к ряду преобразований (сдвиг, сжатие, отображение и т.д.) графика функции $y = f(x)$.

| Функция | Преобразование, которое следует провести с графиком $y = f(x)$ на плоскости $xOy$ |
|---|---|
| $f(x) + A,\ A \neq 0$ | Сдвиг вверх по оси $Oy$ графика функции $y = f(x)$ на $A$ единиц, если $A > 0$, и сдвиг вниз на $\lvert A\rvert$ единиц, если $A < 0$ |
| $f(x - a),\ a \neq 0$ | Сдвиг вправо по оси $Ox$ на $a$ единиц, если $a > 0$, и сдвиг вниз на $\lvert a\rvert$ единиц, если $a < 0$ |
| $kf(x),\ k > 0,\ k \neq 1$ | Растяжение вдоль оси $Oy$ относительно оси $Ox$ в $k$ раз, если $k > 1$, сжатие вдоль оси $Oy$ в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$ |
| $f(kx),\ k > 0,\ k \neq 1$ | Сжатие вдоль оси $Ox$ относительно оси $Oy$ в $k$ раз, если $k > 1$, и ратяжение вдоль оси $Ox$ в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$ |
| $-f(x)$ | Симметричное отображение графика относительно оси $Ox$ |
| $\lvert f(x)\rvert$ | Часть графика, расположенная ниже оси $Ox$, симметрично отражается относительно этой оси, остальная часть остается без изменения |
| $f(-x)$ | Симметричное отображение графика относительно оси $Oy$ |
| $f(\lvert x\rvert)$ | Стереть часть графика функции $y = f(x)$, лежащую слева от оси $Oy$; часть графика лежащего справа от оси $Oy$ симметрично отобразить относительно оси $Oy$, в область $x < 0$ |

3.1. Используя правило построения графика функции $y = Af(x)$ по графику функции $y = f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

1) $y = -x^2$;  2) $y = -\cos x$;

3) $y = \frac{1}{4}\operatorname{tg} x$;  4) $y = \frac{1}{2}\log_{1/3} x$.

3.2. Используя правило построения графика функции $y = f(-x)$ по графику функции $y = f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

1) $y = \log_2(-x)$;  2) $y = \sqrt{-x}$;

3) $y = \sin(-x)$;  4) $y = 2^{-x}$;

5) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$;  6) $y = \operatorname{ctg}(-x)$.

3.3. Используя правило построения графика функции $y = f(kx)$ $(k \neq 0)$ по графику функции $y = f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

1) $y = \sin 2x$;  2) $y = \cos \pi x$;

3) $y = \log_2 2x$;  4) $y = \operatorname{ctg}(-2x)$;

5) $y = \operatorname{tg}\frac{1}{4}x$;  6) $y = \sin\frac{x}{\pi}$.

3.4. Используя правило построения графика функции $y = f(x+a)$ $(a \neq 0)$ по графику функции $y = f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

1) $y = (x-2)^2$;  2) $y = \sqrt{2+x}$;

3) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;  4) $y = \frac{1}{x-3}$;

5) $y = 2^{1-x}$;  6) $y = \log_{1/3}(x+1)$.

3.5. Используя правило построения графика функции $y = f(ax+b)$ по графику функции $y = f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

1) $y=\log_3(2x+3)$;

2) $y=\sqrt[3]{2-3x}$;

3) $y=\dfrac{1}{1-2x}$;

4) $y=\operatorname{ctg}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

5) $y=2x-x^2+4$;

6) $y=\sin x+\cos x$.

3.6. Используя правило построения графика функции $y=f(x)+A$ по графику функции $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

1) $y=1+\sin x$;

2) $y=2+\log_2(1+x)$;

3) $y=2-x$;

4) $y=x^2+4x+8$;

5) $y=2-3(x-1)^2$;

6) $y=\operatorname{tg}x+1$.

3.7. Построить эскизы графиков следующих рациональных функций:

1) $y=\dfrac{5x-1}{3x+2}$;

2) $y=\dfrac{7x+2}{x}$;

3) $y=-\dfrac{x+2}{x+5}$;

4) $y=\dfrac{4+x}{2x+1}$.

3.8. Построить эскиз графиков следующих функций, используя преобразования графиков:

1) $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$;

2) $y=-2\operatorname{tg}\dfrac{3\pi x-4\pi}{6}$;

3) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{|1-x|}{\sqrt{3x+2}}$;

4) $y=3\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)+1$;

5) $y=x-4+|x-2|$;

6) $y=\left|4-5^{x+1}\right|$;

7) $y=\dfrac{|1-3x|}{2x+1}$;

8) $y=\dfrac{|2x+3|}{|x|-1}$.

3.9. Построить эскизы графиков обратных тригонометрических функций:

1) $y=\arcsin(2x+1)$;

2) $y=\arccos(3x-2)$;

3) $y=\arcsin\left(\dfrac{1-5x}{4}\right)$;

4) $y=\arcsin\left(\dfrac{1+3x}{7}\right)$;

5) $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+|x|}{4}\right)$;

6) $y=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{2|x|-3}{5}\right)$;

7) $y=\arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;

8) $y=\arccos\left(\frac{2}{x-3}\right)$;

9) $y=\frac{1}{\operatorname{arctg}\left||x|-1\right|}$;

10) $y=\operatorname{arcctg}\frac{x+1}{|x|-2}$.

3.10. Построить эскизы графиков сложных функций:

1) $y=2^{\frac{1}{x}}$;

2) $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x\right)$;

3) $y=2^{x^2}$;

4) $y=\sin^2 x$;

5) $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$;

6) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$;

7) $y=2^{\sin x}$;

8) $y=e^{-x^2+x}$;

9) $y=x-\sin x$;

10) $y=x^2\cos x$.

3.11. Построить эскизы графиков кривых, заданных в полярной системе координат уравнениями:

1) $r=2\varphi$;

2) $r=\sin\varphi$;

3) $r=\cos\varphi$;

4) $r=\cos 2\varphi$;

5) $r=\sin 3\varphi$;

6) $r=2$;

7) $r=\frac{a}{\varphi}$;

8) $r=\frac{1}{\cos\varphi}$;

9) $r^2=a^2\cos 2\varphi$;

10) $r=1+2\cos\varphi$.

3.12. Построить эскизы графиков функций:

1) $y=x\operatorname{sgn} x$;

2) $y=x\operatorname{sgn}(\sin x)$;

3) $y=e^{\operatorname{sgn} x}$;

4) $y=\operatorname{sgn}(\lg x)$;

5) $y=\{\lg x\}$;

6) $y=[\lg x]$;

7) $y=\sqrt{x-[x]}$.

3.13. Построить график функции $y=\cos(2\arccos x)$.

## §4. Числовые последовательности и теория пределов

Функция целочисленного аргумента называется *последовательностью*. Число $a$ называется пределом последовательности $a_n$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\right)$, если для любого положительного $\varepsilon$ найдется такой номер $N$, что при $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность $a_n$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, последовательность называется бесконечно большой.

Последовательность $a_n$ называется: а) *ограниченной*, если существует $c \in \mathbb{R}$ такая, что $|a_n| < c$, $n = 1, 2, \ldots$; б) *монотонной*, если $a_{n+1} \le a_n$ (или $a_{n+1} \ge a_n$), $n = 1, 2, \ldots$ .

*Теорема Вейерштрасса.* Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

4.1. Доказать, что последовательности, общий член которых имеет указанный ниже вид, монотонно возрастают:

1) $a_n = n^3 + 2n$;
2) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2 + 10}$;
3) $a_n = 3 - \arcsin\dfrac{1}{n^2 + 4}$;
4) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

4.2. Найти наибольшие члены последовательностей, имеющих общий член $a_n$:

1) $a_n = \dfrac{n}{n^3 + 1000}$;
2) $a_n = \dfrac{\left(\sqrt{39}\right)^n}{n!}$;
3) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$;
4) $a_n = \dfrac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$.

4.3. Последовательность $\{a_n\}$ задается рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, n = 2, 3, \ldots$ . Выразить $\{a_n\}$ через $a_1$, $a_2$ и $n$.

4.4. Найти формулу общего члена рекуррентной последовательности $\{a_n\}$, если $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, n = 2, 3, \ldots$ .

4.5. Доказать, что последовательности являются бесконечно малыми:

1) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$; 2) $x_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\left(\sqrt{n}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4.6. Доказать, пользуясь определением предела, равенства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{4n+5}=\dfrac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}=0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-1)^n}{2^n}=1$.

4.7. Докажите следующие равенства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$, где $k\in\mathbb{N}$, $a>1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^{n^{1/k}}}=0$, где $k\in\mathbb{N}$, $a>1$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$, где $a>0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/n}=1$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n!)^{1/n}}=0$.

4.8. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n=3+(-1)^n$ не имеет предела.

4.9. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+6}{n+1}=5$. Начиная с какого $n$ $\left|\dfrac{5n+6}{n+1}-5\right|$ не превосходит 0,01?

4.10. Пользуясь теоремой о пределе монотонной последовательности, доказать, что существуют пределы данных последовательностей:

1) $x_n=\dfrac{2n^2+1}{n^2}$; 2) $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$;

3) $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$; 4) $x_n=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$;

5) $x_n=1+\dfrac{1}{2\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$; 6) $x_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$.

4.11. Найти пределы последовательностей, пользуясь теоремами о пределах суммы, произведения, частного последовательностей:

1) $x_n = \frac{3-n}{2n+1} - \frac{3n^2+2}{4n^2+1}$;

2) $x_n = \frac{2n}{2n^2-1}\cos\frac{n+1}{2n-1}$;

3) $x_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1} \cdot \frac{n}{n^2+n+1}$;

4) $x_n = \frac{1-n-n^2}{(3n+1)^3}$;

5) $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt{n}}$;

6) $x_n = \frac{n+\lg n+2^n}{n^2+\lg n-2^n}$.

4.12. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\right)$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)$;

24) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$;

26) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$;

27) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$;

28) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$;

29) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$;

30) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$;

31) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$;

32) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$;

33) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$;

34) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$.

4.13. Построить графики предельных функций:

1) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$;

2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $-\infty<x<+\infty$;

3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right), 0<x<+\infty$;

4) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}, x\ge 0$;

5) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg} nx, -\infty<x<+\infty$.

4.14. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\pi\sqrt{n^2+n}$.

4.15. Найти предел последовательности, опреляемой следующими условиями:

$x_1=2$; $x_2=2+\dfrac{1}{3}$; $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{3+1/x_{n-1}}$, $n\ge 2$.

## §5. Предел функции одной переменной

Всякий интервал $(a-\delta; a+\delta)$, содержащий точку $a$, называется *$\delta$-окрестностью точки $a$*.

*Число $b$* называется *пределом функции* $y=f(x)$ в точке $x=a$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$), если, каково бы ни было наперед заданное положительное число $\varepsilon$, существует такое число $\delta(\varepsilon)>0$, что для любого $x$, отличного от $a$, содержащегося в $\delta$-окрестности точки $a$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$, иначе говоря, если выполнение неравенства $0<|x-a|<\delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно малой* в окрестности точки $x=a$, если ее предел в этой точке равен нулю.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ две бесконечно малые функции. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, то при $c\neq 0$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми *одного порядка*, причем если $c=1$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* бесконечно малыми; если $c=0$, $\alpha(x)$ называется бесконечно малой *высшего порядка* по отношению к $\beta(x)$, а $\beta(x)$ бесконечно малой *низшего порядка* по отношению к $\alpha(x)$.

Основные эквивалентности (при $x\to 0$):

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\sin x \sim x$; | 2) $1-\cos x \sim x^2/2$; | 3) $\operatorname{tg} x \sim x$; |
| 4) $\arcsin x \sim x$; | 5) $\operatorname{arctg} x \sim x$; | 6) $e^x-1 \sim x$; |
| 7) $\ln(1+x) \sim x$; | 8) $(1+x)^m-1 \sim mx$; | 9) $a^x-1 \sim x\ln a$. |

5.1. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ не существует. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\varphi(x)$ не существует.

5.2. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке $x_0$, а функция $\varphi(x)$ не имеет предела. Будут ли существовать пределы:

1) $\lim\limits_{x \to x_0}\left[f(x)+\varphi(x)\right]$; 2) $\lim\limits_{x \to x_0}\left[f(x)\varphi(x)\right]$?

Рассмотреть в качестве примера предел $\lim\limits_{x \to 0} x\sin(1/x)$.

5.3. $f(x)=3x-5$. Пользуясь $(\varepsilon-\delta)$ – определением предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$.

5.4. $f(x)=3x^2-2$. Пользуясь $(\varepsilon-\delta)$ – определением предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=10$.

5.5. $f(x)=\dfrac{x-1}{3x+2}$. Пользуясь $(\varepsilon-\delta)$ – определением предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{1}{3}$.

5.6. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$; 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

5.7. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{x^3-27}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-2x-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1,5}\dfrac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{2x^2-7x-4}{-2x^2+5x+3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$;

9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x^3-64}$; 10) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

11) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$; 12) $\lim\limits_{z\to -a}\dfrac{z^3+a^3}{a^2-z^2}$;

13) $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{z^2-a^2}{a^4-z^4}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$;

15) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$;

16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$;

17) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$;

18) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

19) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$;

20) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$;

21) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

22) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$;

24) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

25) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$;

26) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

27) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$;

28) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$;

29) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}2x-\dfrac{2}{\sin 4x}\right)$;

30) $\lim\limits_{x\to -\pi/4}\dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$;

31) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3\cos^2\dfrac{x}{2}}$;

32) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}$;

33) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}$;

34) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$;

35) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$;

36) $\lim\limits_{x\to -\pi/4}\dfrac{1+\operatorname{ctg}x}{\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}}$;

37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}6x}{\sin 8x}$;

38) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}10x}{\sin^2 2x}$;

39) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10\pi x}{\operatorname{tg}5x}$;

40) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 6x}$;

41) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{8}\operatorname{tg}^2\dfrac{5x}{4}$;

42) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{x^2-1}$;

43) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}6x}{\sin 3x}$;

44) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\arcsin 12x}$;

45) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$;

46) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{\arcsin 10x}$;

47) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\arcsin(x-1)}$;

48) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x+5}$;

49) $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}/2-\cos x}$;

50) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$;

51) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$;

52) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4+2x^3-1}{100x^3+2x^2}$;

53) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+7x-1}{3x^2-5x+6}$;

54) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}$;

55) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$;

56) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x+\dfrac{x^2}{x+3}\right)$;

57) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$;

58) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{2x-3}\right)$;

59) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)$;

60) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x-1}-\sqrt{x}\right)$;

61) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$;

62) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(x-\sqrt{x^2+7x}\right)$;

63) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)$;

64) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$;

65) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

66) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$;

67) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;

68) $\lim\limits_{t\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^t$;

69) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;

70) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$;

71) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$;

72) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$;

73) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$;

74) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$;

75) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right)^{x}$;

76) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$;

77) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$;

78) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$;

79) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$;

80) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{1/x}$;

81) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$;

82) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$;

83) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$;

84) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$;

85) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$;

86) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e}{x-1}$;

87) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x^2}$;

88) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

89) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$;

90) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(x+5)-\ln x\right)$.

5.8. Определить порядок малости бесконечно малых функций в окрестности точки $x=0$ по отношению к функции $\beta(x)=x$:

1) $\alpha(x)=x^5$;

2) $\alpha(x)=2\sqrt{\sin x}$;

3) $\alpha(x)=x^2+x^4$;

4) $\alpha(x)=1-\cos x$;

5) $\alpha(x)=\operatorname{tg} x+x^2$;

6) $\alpha(x)=x\cdot\operatorname{tg} x+\sin x$.

5.9. Доказать эквивалентность бесконечно малых функций при $x\to 0$:

1) $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$;

2) $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$;

3) $\sin x+\operatorname{tg} x\sim 2x$;

4) $\operatorname{tg} x-\sin x\sim x^3$;

5) $\sqrt[3]{x+8}-2\sim\dfrac{x}{12}$;

6) $a^x-1\sim x\ln a$.

5.10. Определить порядок малости бесконечно малых функций в окрестности точки $x=1$ по отношению к функции $\beta(x)=x-1$:

1) $\alpha(x)=4(x-1)$; 2) $\alpha(x)=x^3-1$;

3) $\alpha(x)=(x-1)^2$; 4) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

5.11. Применяя принцип замены эквивалентными, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{\operatorname{tg} 10x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos 5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x/3)}{\operatorname{tg} 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 5x}{x\sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2}{\sin^2(x/4)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-\operatorname{arctg} x}{4x+\operatorname{arctg} x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{\beta x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+2x)}{\sin^2 6x}$; 10) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{2x-x^2}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x^3}{x^2\operatorname{arctg}^2 4x^2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt[3]{e^x-1}\cdot\sqrt[6]{\operatorname{tg} x}}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+8x)\sin^2\dfrac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{4}\sin 6x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 9x^2\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{2}}{\sin^3 x\cdot\left(e^{\frac{x}{4}}-1\right)}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(e^{\pi x}-1\right)}{3\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}$; 16) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2-2x\right)}{\sin 3\pi x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\sin 2\pi x}$;

19) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; 20) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-2x}}{3}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$; 22) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[13]{7+3x}-\sqrt[40]{2x+5}}{x^2-4x-12}$;

23) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$; 24) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$;

25) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{\sin(ax)+\operatorname{arctg}(bx)}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27-x}-\sqrt{9+x}}{x+2\sqrt[4]{x^5}}$;

29) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$;

30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[13]{1+3x}-\sqrt[40]{1-2x}}{x^2+x+4x^3}$;

31) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt[5]{1-7x}}{\ln\left(x^3+e^{-2x}\right)}$;

32) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+xe^x\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$;

33) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\cos\left(m/\sqrt{x}\right)}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\sqrt{x}}}$;

34) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{4}-\sin\dfrac{x}{4}\right)}$;

35) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

36) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}\right)^{\ln\left(e^x+1\right)}$;

37) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^x+\sin x\right)^{\operatorname{ctg} x}$;

38) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(x^2+e^{x+1}\right)\right]^{\operatorname{ctg} x}$;

39) $\lim\limits_{x\to 1}\left(4^x-\sqrt{x+8}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$;

40) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos\left(\sin x\right)\right]^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$;

41) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{th} x\right)^{\operatorname{sh} 2x}$;

42) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\operatorname{th} x\right)^{\operatorname{sh} 2x}$;

43) $\lim\limits_{x\to \pi+}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$;

44) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\arcsin x}$;

45) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2\cos x}-\operatorname{ch}x}{x^5+x^3\sin^3 x}$;

46) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\cos x-\operatorname{ch}x+x^5}{x^6+x^2\sin^3 x}$.

5.12. Определить $\lambda$ и $\mu$ таким образом, чтобы имело место равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right)=0$.

5.13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^3]{1-x+\sin x}$.

## §6. Непрерывность и точки разрыва функции

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x=a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (или $\lim\limits_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right]=0$).

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва*. Точки разрыва *первого рода*, если односторонние пределы слева и справа существуют и конечны, в остальных случаях точка разрыва *второго рода*.

6.1. Используя определение непрерывности, показать, что данные функции непрерывны во всей своей области определения:

1) $y=x^2-2x$; 2) $y=1-x^3$;

3) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; 4) $y=e^x$;

5) $y=\cos 3x$; 6) $y=\ln(1+2x)$.

6.2. Для каждой из заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер:

1) $y=\dfrac{1}{2-x}$; 2) $y=\dfrac{1}{(x+5)^2}$;

3) $y=\dfrac{1}{4x-x^2-3}$; 4) $y=\dfrac{3}{2^x-1}$;

5) $y=\dfrac{\sin x}{x}$; 6) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

7) $y=\lg|x-3|$; 8) $y=3^{\frac{1}{x+4}}$.

6.3. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и построить графики:

1) $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$. 2) $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$.

3) $y=\begin{cases} 1-2x\ , \ x\le 0, \\ 2\sin x,\ 0<x<\pi, \\ 4-x,\ x\ge\pi. \end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} \sqrt{1-x},\ x\le 0, \\ 0\ ,\ 0<x\le 2, \\ x-2\ ,\ x>2. \end{cases}$

5) $y=\begin{cases} -x-1, & x\le -1, \\ 0, & -1<x<0, \\ \sqrt{x}, & x\ge 0. \end{cases}$

6) $y=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ x^3, & 0<x\le 2, \\ x+4, & x>2. \end{cases}$

7) $y=\begin{cases} x^3, & x<0, \\ 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

8) $y=\begin{cases} 2^{-x+1}, & x\le 1, \\ 2-x, & 1<x\le 3, \\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{3}, & x>3. \end{cases}$

9) $y=\begin{cases} 2-x, & x\le 0, \\ \cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x\ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

10) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x\ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

6.4. Исследовать на непрерывность следующие функции:

1) $y=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;

2) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$;

3) $y=[x]\sin \pi x$;

4) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg} x)\right)$;

5) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^n+3\right)$ при $0\le x\le 1$;

6) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^n+x\right)$ при $0\le x\le 1$.

6.5. Возможно ли доопределить функции:

1) $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$;  2) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;  3) $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2-x}$

в точке $x=0$ так, чтобы они стали непрерывными в этой точке?

6.6. Исследовать на непрерывность функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$, где $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $g(x)=1+x-[x]$.

## §7. Дифференцирование функций

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента в некоторой точке при стремлении приращения аргумента к нулю называется *производной* функции в этой точке и обозначается $y' = \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

### *Таблица производных основных функций*

1) $C' = 0$;

2) $\left(u^n\right)' = n u^{n-1} u'$;

3) $\left(\sin u\right)' = u' \cos u$;

4) $\left(\cos u\right)' = -u' \sin u$;

5) $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

6) $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

7) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

8) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

9) $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

10) $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$;

11) $\left(a^u\right)' = u' a^u \ln a$;

12) $\left(e^u\right)' = u' e^u$;

13) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$;

14) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$;

15) $\left(\operatorname{sh} u\right)' = u' \operatorname{ch} u$;

16) $\left(\operatorname{ch} u\right)' = u' \operatorname{sh} u$;

17) $\left(\operatorname{th} u\right)' = \dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$;

18) $\left(\operatorname{cth} u\right)' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$.

### *Основные правила дифференцирования*

1) $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$;

2) $\left(Cu\right)' = Cu'$;

3) $\left(uv\right)' = u'v + uv'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Производная сложной функции $y = f\left(u(x)\right)$ определяется так: $y' = y'_u \cdot u'_x$.

*Дифференциалом* функции $y(x)$ называется выражение $dy = y'dx$.

7.1. Найти по определению производную функции:

1) $y = x^2$;
2) $y = x^3$;
3) $y = \sqrt{x}$;
4) $y = x\sqrt{x}$;
5) $y = \dfrac{1}{x^2}$;
6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
7) $y = \sin\dfrac{2x}{3}$;
8) $y = \cos\dfrac{x}{2}$;
9) $y = \sqrt{1+3x}$;
10) $y = \sqrt{1+x^2}$.

7.2. Используя таблицу производных основных элементарных функций и правила дифференцирования, найти производные указанных функций:

1) $y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$;
2) $y = 7x^7 + 3x^2 - 4x - 1$;
3) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} + 4$;
4) $y = \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} + 2$;
5) $y = 4x^5 - 3\sin x + 5\operatorname{ctg} x$;
6) $y = 3\sqrt{x} + 4\cos x - 2\operatorname{tg} x$;
7) $y = \log_2 x + 3\log_3 x$;
8) $y = 4e^x + \operatorname{arctg} x + \arcsin x$;
9) $y = e^x - \dfrac{\operatorname{tg} x}{2} + \dfrac{x^4}{4}$;
10) $y = 5^x + 6^x + \left(\dfrac{1}{7}\right)^x$;
11) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;
12) $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x$;
13) $y = x\sin x$;
14) $y = x^2 \operatorname{tg} x$;
15) $y = \sqrt[7]{x}\ln x$;
16) $y = x\arccos x$;
17) $y = \sqrt[3]{x}\operatorname{arcctg} x$;
18) $y = x^2\log_3 x$;
19) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;
20) $y = \dfrac{\ln x}{\sin x} + x\operatorname{ctg} x$;
21) $y = \dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$;
22) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;
23) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}$;
24) $y = \dfrac{x\operatorname{tg} x}{1+x^2}$;
25) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$;
26) $y = \dfrac{1-10^x}{1+10^x}$.

7.3. Найти производные сложных функций:

1) $y=\sin 3x$;

2) $y=\sin\left(x^2+5x+2\right)$;

3) $y=\sqrt{1-x^2}$;

4) $y=\sqrt{1+5\cos x}$;

5) $y=\sqrt{2x-\sin 2x}$;

6) $y=\sin^2 x$;

7) $y=\sin^3 x$;

8) $y=\cos^{100} x$;

9) $y=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)$;

10) $y=\operatorname{tg}\left(x^2+3\right)$;

11) $y=\ln\cos x$;

12) $y=\ln\operatorname{tg}5x$;

13) $y=\ln(1+\cos x)$;

14) $y=e^{\operatorname{tg}x}$;

15) $y=\ln\left(x^2-3x+7\right)$;

16) $y=\ln\left(x^2+2x\right)$;

17) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$;

18) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

19) $y=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}$;

20) $y=\frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3}$;

21) $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$;

22) $y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$;

23) $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$;

24) $y=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$;

25) $y=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$;

26) $y=\operatorname{tg}^3x-3\operatorname{tg}x+3x$;

27) $y=\sin^2 x^3$;

28) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

29) $y=\operatorname{ctg}^3\left(\frac{x}{3}\right)$;

30) $y=\frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$;

31) $y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$;

32) $y=2^{3x}+x^5+e^{-x^2}+\frac{1}{x}$;

33) $y=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$;

34) $y=x^2e^{-x}$;

35) $y=(x+2)e^{-x^2}$;

36) $y=e^{x/3}\cos(x/3)$;

37) $y=e^{\frac{1}{\cos x}}$;

38) $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$;

39) $y=10^{3-\sin^3 2x}$; 40) $y=\sin 2^x$;

41) $y=\ln\left(e^{2x}+\sqrt{1+e^{4x}}\right)$; 42) $y=\log_5\cos 7x$;

43) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$; 44) $y=\dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$;

45) $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$; 46) $y=\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)$;

47) $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$; 48) $y=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$;

49) $y=\arccos(1-2x)$; 50) $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$;

51) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$; 52) $y=\arcsin e^{4x}$;

53) $y=\arcsin\sqrt{x}$; 54) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}$;

55) $y=\operatorname{arctg} e^{2x}+\ln\sqrt{\dfrac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}}$; 56) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$;

57) $y=\ln\arccos 2x$; 58) $y=\operatorname{arctg}\ln(5x+3)$;

59) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+3}{x-3}$; 60) $y=\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x}$;

61) $y=\arccos e^{-\frac{x^2}{2}}$; 62) $y=e^{x^2\operatorname{ctg}3x}$;

63) $y=\operatorname{tg}\sin\cos x$; 64) $y=\ln^5\sin x$;

65) $y=\ln\sin\operatorname{tg}e^{-\frac{x}{2}}$; 66) $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$;

67) $y=\sqrt[5]{\ln\sin\dfrac{x+4}{5}}$; 68) $y=\sqrt{1-\arccos^2 x}$;

69) $y=\sqrt[5]{\operatorname{arctg}e^{5x}}$; 70) $y=e^{\sqrt{1+\ln x}}$;

71) $y=\operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$; 72) $y=\ln\left(x\sin x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)$;

73) $y=x^{1/x}$; 74) $y=x^{\sin x}$;

75) $y=(\operatorname{tg}x)^{\sin x}$; 76) $y=(\cos x)^{\sin x}$;

77) $y=\operatorname{sh}^3 x$; 78) $y=\ln\operatorname{ch}x$;

79) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)$; 80) $y=\operatorname{th}(1-x^2)$;

81) $y=\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x$; 82) $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh}x)$;

83) $y=\sqrt{\operatorname{ch}x}$; 84) $y=e^{\operatorname{ch}^3 x}$;

85) $y=\operatorname{th}(\ln x)$; 86) $y=x\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x$;

87) $y=\sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}}$; 88) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{th}x+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$;

89) $y=\dfrac{1}{x}\operatorname{ch}2x+\sqrt{x}\operatorname{sh}2x$; 90) $y=x^2e^{3x}\operatorname{ch}\operatorname{sh}x$.

7.4. Продифференцировать данные функции, используя правило логарифмического дифференцирования:

1) $y=x^{x^2}$; 2) $y=x^{x^x}$;

3) $y=(\sin x)^{\cos 2x}$; 4) $y=(\ln x)^x$;

5) $y=(x+1)^{2/x}$; 6) $y=x^3e^{x^2}\sin 2x$;

7) $y=\dfrac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$; 8) $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$;

9) $y=x^{\ln x}$; 10) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$;

11) $y=x^{\frac{1}{x}}$; 12) $y=x^{\frac{1}{\sin x}}$;

13) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$; 14) $y=2x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$;

15) $y=(x^2+1)^{\sin x}$; 16) $y=(x^2+4x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

7.5. Найти производные функций $y(x)$, заданных неявно:

1) $3x+7y-15=0$; 2) $x^2-y^2-2y=0$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

5) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$; 6) $x^3+y^3-3axy=0$;

7) $y^2\cos x=a^2\sin 3x$; 8) $y^3-3y+2ax=0$;

9) $y^2 - xy + b^2 = 0$;

10) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$;

11) $x^3 + ax^2 y + bxy^2 + y^3 = 0$;

12) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$;

13) $2y \ln y = x$;

14) $x^y = y^x$;

15) $\cos(xy) = x$;

16) $y = x + \operatorname{arctg} y$.

7.6. Найти дифференциал функции:

1) $y = x^5$;

2) $y = \operatorname{tg} x$;

3) $y = \sin^3 2x$;

4) $y = \ln x$;

5) $y = \ln\left(\sin\sqrt{x}\right)$;

6) $y = 2^{-x^2}$.

7.7. Найти дифференциал функции в точке $x_0$:

1) $y = x^{-4}$, $x_0 = -1$;

2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$, $x_0 = 0$;

3) $y = \sqrt{1 + x^2}$, $x_0 = -3$;

4) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;

5) $y = \ln\cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

6) $y = e^{-2x}$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$;

7) $y = \sqrt{x} + 1$, $x_0 = 4$;

8) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x - 1}$, $x_0 = 3$.

7.8. Исследовать непрерывность и дифференцируемость функции $y = |x|^3$ при $x = 0$.

7.9. Исследовать непрерывность и дифференцируемость функции $y = e^{-|x|}$ при $x = 0$.

7.10. $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Будет ли функция $f(x)$ непрерывной и дифференцируемой при $x = 0$?

7.11. $f(x) = x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Будет ли функция $f(x)$ непрерывной и дифференцируемой при $x = 0$? Истолковать результат геометрически.

7.12. Пусть $f(x) = \sin x + \dfrac{\sin 3x}{3} + \dfrac{\sin 5x}{5} + \dfrac{\sin 7x}{7}$. Показать, что $f'\left(\dfrac{\pi}{9}\right) = \dfrac{1}{2}$.

## §8. Производные и дифференциалы высших порядков

*Производные высших порядков* от функции $y = f(x)$ определяются последовательно соотношениями: $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$. *Дифференциалы высших порядков* от функции $y = f(x)$ последовательно определяются формулами: $d^n y = d\left(d^{n-1}y\right)$, где принято $d^1 y = dy = y'dx$.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют производные $n$-го порядка, то справедлива *формула Лейбница* $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$.

8.1. Найти производную второго порядка от функции:

1) $y = e^{-x^2}$;
2) $y = \operatorname{tg} x$;
3) $y = \arcsin \frac{x}{2}$;
4) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;
5) $y = \sqrt{1 + x^2}$;
6) $y = \ln \operatorname{tg} x$;
7) $y = e^x \cos x$;
8) $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

8.2. Найти производную третьего порядка от функции:

1) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$;
2) $y = xe^{-x}$;
3) $y = x^2 \sin x$;
4) $y = x^3 2^x$.

8.3. Найти производную $n$-го порядка от функции:

1) $y = e^x$;
2) $y = \ln x$;
3) $y = 3^x$;
4) $y = x^m$, где $m \in \boldsymbol{N}$;
5) $y = \sin 3x$;
6) $y = \ln(1 + x)$;
7) $y = 2^{3x}$;
8) $y = \sin^2 x$;
9) $y = \cos^2 x$;
10) $y = \ln(2 - 3x)$;
11) $y = (4x + 1)^n$;
12) $y = x \cos x$, $n = 10$;
13) $y = \left(x^3 - 1\right)e^{5x}$, $n = 37$;
14) $y = x^2 \ln x$, $n = 100$.

8.4. Применить формулу Лейбница для вычисления производной:

1) $\left[\left(x^2+1\right)\sin x\right]^{(20)}$; 2) $\left(e^x \sin x\right)^{(n)}$;

3) $\left(x^3 \sin\alpha x\right)^{(n)}$; 4) $\left(e^x \sin mx\right)^{(n)}$.

8.5. Найти дифференциал второго порядка от функции:

1) $y=\operatorname{ctg} x$; 2) $y=\cos^2 x$;

3) $y=\ln(2x+3)$; 4) $y=xe^x$.

8.6. Найти дифференциал $n$-го порядка от функции:

1) $y=\sin x$; 2) $y=\cos x$;

3) $y=e^{x/2}$; 4) $y=e^{-x}$.

8.7. Найти производные второго порядка от функций заданных неявно:

1) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; 2) $x^2+y^2=r^2$;

3) $y=\operatorname{tg}(x+y)$; 4) $y^3+x^3-3axy=0$;

5) $y=\sin(x+y)$; 6) $e^{x+y}=xy$.

8.8. Найти $y'_x$ и $y''_{xx}$ функций заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x=at^2, \\ y=bt^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=a\sin^2 t; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^2-1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\ln\left(1-t^2\right); \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t. \end{cases}$

8.9. Доказать, что выражение $S=\dfrac{y'''}{y'}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y''}{y'}\right)^2$ не изменится, если заменить $y$ на $1/y$.

## §9. Приложения производной

Значение производной в точке $x_0$ равно *угловому коэффициенту* касательной к графику функции в точке $(x_0;y_0)$ $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$. Уравнение касательной в точке $(x_0;y_0)$ $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, уравнение нормали в этой точке $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Если функция $f(x)$ в окрестности точки $a$ имеет $(n+1)$ производную, то справедлива *формула Тейлора* (при $a=0$ получаем *формулу Маклорена*):

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots+f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+f^{(n)}(a+\theta(x-a))\frac{(x-a)^n}{n!},$$

где $0<\theta<1$.

9.1. Под каким углом пересекается парабола $y=x^2$ с прямой $3x-y-2=0$?

9.2. Под какими углами пересекаются параболы: $y=x^2$ и $y^2=x$?

9.3. Под какими углами пересекаются гипербола $y=\dfrac{1}{x}$ с параболой $y=\sqrt{x}$.

9.4. Написать уравнения касательной и нормали, проведенных к кривой $y=x^3$ в точке с абсциссой 2.

9.5. При каком значении независимой переменной касательные к кривым $y=x^2$ и $y=x^3$ параллельны?

9.6. В какой точке касательная к параболе $y=x^2$:

1) параллельна прямой $y=4x-5$;
2) перпендикулярна к прямой $2x-6y+5=0$;
3) образует с прямой $3x-y+1=0$ угол в $45^0$?

9.7. На параболе $y=x^2$ взяты две точки $x_1=1$, $x_2=3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей?

9.8. Через фокусы параболы проведена хорда, перпендикулярная оси параболы. Через точки пересечения этой хорды с параболой проведены касательные. Доказать, что эти касательные пересекаются под прямым углом.

9.9. Составить уравнение нормали к параболе $y = x^2 + 4x + 1$, перпендикулярной к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

9.10. Доказать, что касательная к гиперболе $xy = a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади.

9.11. Составить уравнения касательной и нормали к данным линиям в указанных точках:

1) $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^t; \end{cases} \quad t_0 = 0$.  2) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t; \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

3) $\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.  4) $\begin{cases} x = t^2 \cos t - 2t \sin t, \\ y = t^2 \sin t + 2t \cos t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

9.12. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = 1 + 2t + t^2$. Определить его скорость в момент времени $t = 2$.

9.13. Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется формулой $v = 3t + t^2$. Какое ускорение будет иметь тело через 4 *с* после начала движения?

9.14. Точка движется по прямой $y = 2x + 3$ так, что абсцисса ее возрастает с постоянной скоростью $v = 3$. С какой скоростью изменяется ее ордината?

9.15. Точка движется в первом квадранте по кубической параболе $48y = x^3$, отправляясь от точки $x = 0$. Какая из координат, $x$ или $y$, при этом меняется быстрее?

9.16. Найти приближенные значения заданных выражений:

1) $\sqrt[3]{8{,}01}$;  2) $\sqrt[4]{17}$;  3) $e^{0,2}$;

4) $\cos 32^0$;  5) $\operatorname{tg} 44^0 52'$;  6) $0{,}96^3$;

7) $\lg 10{,}08$;  8) $\arcsin 0{,}48$;  9) $\ln 1{,}01$.

9.17. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена:

1) $f(x) = \cos 5x$;  2) $f(x) = \sin 3x$;

3) $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$;  4) $f(x) = \sin x^2$;

5) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{1+3x^2}$;

7) $f(x)=e^{3x}$; 8) $f(x)=\cos\left(2x^3/3\right)$.

9.18. Разложить по формуле Тейлора данные функции в окрестности указанной точки $x_0$:

1) $f(x)=\sqrt{3+2x}$, $x_0=4$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{2-5x}$, $x_0=-1$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{4-3x}$, $x_0=2$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}$, $x_0=2$;

5) $f(x)=2^{x+1}$, $x_0=0$; 6) $f(x)=\ln(2x+1)$, $x_0=3$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{(5-x)^2}$, $x_0=-1$; 8) $f(x)=\log_7(x+1)$, $x_0=5$.

9.19. Выяснить поведение данных функций в указанных точках:

1) $f(x)=2x^6-x^3+3$, $x_0=0$; 2) $f(x)=x^{11}+3x^6+1$, $x_0=0$;

3) $f(x)=2\cos x+x^2$, $x_0=0$; 4) $f(x)=6\sin x+x^2$, $x_0=0$.

9.20. $f(x)=x^8-2x^7+5x^6-x+3$. Найти первые три члена разложения по формуле Тейлора при $x_0=2$. Подсчитать приближенно $f(2{,}02)$ и $f(1{,}97)$.

9.21. $f(x)=x^5-5x^3+x$. Найти первые три члена разложения по степеням $x-2$. Подсчитать приближенно $f(2{,}1)$. Вычислить $f(2{,}1)$ точно и найти абсолютную и относительную погрешности.

9.22. Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема, $f(0)=f(1)=0$ и $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$. Используя формулу Тейлора, доказать, что $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geq 8$.

## §10. Правило Лопиталя

Если при $x$, стремящемся к конечному или бесконечному пределу $a$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ одновременно стремятся к нулю или бесконечности, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при условии, что предел справа существует.

10.1. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{2\sin x-1}{\cos 3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\cos 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x x-2}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(7^x+x\right)}{x-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x}-\frac{1}{x}\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x\cdot\operatorname{tg}3x$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\ln 2x\cdot\lg(1-2x)$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{\sin x}$;

12) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$;

14) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{\ln(5-2x)}$;

15) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$;

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt[5]{5x-2}}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}x}{\ln x}$;

20) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$;

21) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{e^{\cos x}-1}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

24) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x\sin^2 x}$.

10.2. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to1/2}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin3\pi x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln\left(x-\sqrt[3]{2x-3}\right)}{\sin(\pi x/2)-\sin(\pi x-\pi)}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2}{\sin\ln(x-1)}$;

5) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{e^{\operatorname{tg}2x}-e^{-\sin2x}}{\sin x-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\ln\sin x}{(6x-\pi)^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin\left(\sqrt{2x^2-3x-5}-\sqrt{1+x}\right)}{\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln2}$;

8) $\lim\limits_{x\to2\pi}\dfrac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x-1)}$;

9) $\lim\limits_{x\to1/2}\dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln\left(x^3-6x-8\right)}$;

11) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin\left(\dfrac{x+2}{2}\right)}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$;

12) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\cos2x}{\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{tg}\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$;

14) $\lim\limits_{x\to2\pi}\dfrac{\ln\cos x}{3^{\sin2x}-1}$;

15) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2x}-1}{1+\cos\pi x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos(x/2)}{e^{\sin x}-e^{\sin4x}}$;

17) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$;

18) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos6x}$;

19) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{e^{\sin2x}-e^{\operatorname{tg}2x}}{\ln(2x/\pi)}$;

20) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\operatorname{tg}\left(e^{x+2}-e^{x^2-4}\right)}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2}$;

21) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}$;

22) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{\left(3^{\sin x}-1\right)^2}$;

23) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\left(x^3-\pi^3\right)\sin5x}{e^{\sin^2x}-1}$;

24) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e}$;

25) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(\cos2x)}{\ln(\cos4x)}$;

26) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg}3x}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$;

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$;

30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$;

31) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg}x+x^3}$;

32) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}x}$;

33) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+\operatorname{tg}x^2}$;

34) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$;

35) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$;

36) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$;

37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}x+1}-\sqrt{\sin x+1}}{x^3}$;

38) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin(\pi-3x)}$;

39) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2-1}}$;

40) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{x^3+1}-e}$;

41) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$;

42) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln\operatorname{tg}x}$;

43) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$;

44) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$;

45) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x}-2}{\ln x}$;

46) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$;

47) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

48) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin \pi x}$;

49) $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$;

50) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$;

51) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln\left(1+x\sqrt{1+xe^{x}}\right)}$;

52) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$;

53) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$;

54) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

10.3. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}\right)^{2/\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{1/x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 3x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\pi x\right)^{1/(x\sin\pi x)}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{1/\ln\cos x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2\left(\pi/4+x\right)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+\pi x^3\right)}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\cos 3x\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{\frac{1}{1-\cos\pi x}}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+3x^2\right)}}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{x+3}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\left(x/\pi\right)\right)^{1+x}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$;

20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x}\right)^{2+x}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{2/(x+5)}$;

24) $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$;

25) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$;

26) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$;

27) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$;

28) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$;

29) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\left(\operatorname{tg} x\right)^{\frac{1}{\cos(3\pi/4-x)}}$;

30) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(\cos x\right)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}}$;

31) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$;

32) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{6\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}3x}$;

33) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$;

34) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$;

35) $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$;

36) $\lim\limits_{x\to \pi/6}(\sin x)^{\frac{6x}{\pi}}$;

37) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$;

38) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{\frac{1}{x}}$;

39) $\lim\limits_{x\to 1}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}\pi x}$;

40) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\cos x+1)^{\sin x}$.

## §11. Применение первой производной к исследованию функций

*Теорема Ролля.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует точка $\xi \in (a; b)$: $f'(\xi) = 0$.

*Теорема Лагранжа.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$, то существует точка $\xi \in (a; b)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Функция $y = f(x)$, определенная в промежутке $\langle a; b\rangle$, в точке $x_0 \in \langle a; b\rangle$ принимает *наибольшее* (*наименьшее*) значение, если $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$) для всех $x \in \langle a; b\rangle$.

Функция $y = f(x)$, определенная в промежутке $\langle a; b\rangle$, имеет в точке $x_0 \in (a; b)$ *максимум* (*минимум*), если существует такая окрестность этой точки $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, что $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$) для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$. Если $f'(x_0) = 0$, причем $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс) при прохождении точки $x$ через точку $x_0$, то функция $f(x)$ в точке $x_0$ имеет максимум (минимум).

11.1. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ на отрезке [-1; 2].

11.2. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \ln \sin x$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

11.3. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ на отрезке [1; 2].

11.4. Показать, что уравнение $x^3 - 3x + c = 0$ не может иметь двух различных корней в интервале (0; 1).

11.5. Написать формулу Лагранжа для функции $y = \sin 3x$ на отрезке $[x_1; x_2]$.

11.6. Написать формулу Лагранжа для функции $y = x(1 - \ln x)$ на отрезке $[a; b]$.

11.7. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = \ln x$ на отрезке $[1; e]$.

11.8. Доказать с помощью формулы Лагранжа справедливость при $a \geq b$ неравенств $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$, если $n > 1$, и неравенств противоположного смысла, если $n \leq 1$.

11.9. Показать, что функция $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ убывает в интервале $(-2; 1)$.

11.10. Показать, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ возрастает в интервале $(0; 1)$ и убывает в интервале $(1; 2)$. Построить график данной функции.

11.11. Показать, что функция $y = \operatorname{arctg} x - x$ везде убывает.

11.12. Найти интервалы монотонности функций:

1) $y = (x-2)^5 (2x+1)^4$;

2) $y = x^2 e^x$;

3) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$;

4) $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$;

5) $y = 2x^2 - \ln x$;

6) $y = x - 2\sin x$, $(0 \leq x \leq 2\pi)$;

7) $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$;

8) $y = x\sqrt{ax - x^2}$, $(a > 0)$.

11.13. Найти экстремумы функций:

1) $y = 2x^3 - 3x^2$;

2) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

3) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$;

4) $y = \dfrac{1}{\ln\left(x^4 + 4x^3 + 30\right)}$;

5) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 64}$;

6) $y = -x^2\sqrt{x^2 + 2}$;

7) $y = \dfrac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x - 7}$;

8) $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - a^2\right)^2}$;

9) $y = \dfrac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1 - x}}$;

10) $y = \dfrac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}}$;

11) $y = x - \ln(1 + x)$;

12) $y = x - \ln\left(1 + x^2\right)$;

13) $y = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$;

14) $y = \left(x^2 - 2x\right)\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

11.14. Найти наибольшее и наименьшее значения данных функций на указанных отрезках и в указанных интервалах:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in [-2; 2]$;  2) $y = x + 2\sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$;

3) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $x \in [-1; 2]$;  4) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $x \in [-1; 1]$;

5) $y = \sqrt{100 - x^2}$, $x \in [-6; 8]$;  6) $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 2x\right)^2}$, $x \in [0; 3]$;

7) $y = \sin 2x - x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;  8) $y = x^x$, $x \in [0{,}1; +\infty)$.

11.15. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

11.16. Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

11.17. Число 36 разбить на два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

11.18. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был равен 72 см$^2$, причем стороны основания относились бы как 1 : 2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

11.19. Объем правильной треугольной призмы равен $V$. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

11.20. Найти соотношение между радиусом $R$ и высотой $H$ цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

11.21. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

11.22. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса $R$.

11.23. На окружности дана точка $A$. Провести хорду $BC$ параллельно касательной в точке $A$ так, чтобы площадь треугольника $ABC$ была наибольшей.

11.24. На отрезке длиной $l$, соединяющем два источника света силы $I_1$ и $I_2$, найти наименее освещенную точку.

11.25. Доказать, что в эллипсе расстояние от центра до любой нормали не превосходит разности полуосей. (Удобно воспользоваться параметрическим заданием эллипса.)

11.26. Доказать, что $\ln(1+x) \le x$ при $x \ge 0$.

11.27. Доказать, что $\pi \sin x \ge 2x$ при $0 \le x \le \pi/2$.

11.28. Найти наименьшее значение функции $f(x) = x - a\sin x$ на отрезке $[0;\ \pi/2]$ в зависимости от параметра $a$.

11.29. Найдите множество всех действительных чисел $a$, для каждого из которых функция $f(x) = \sin 2x - 8(a+1)\sin x + (4a^2 + 8a - 14)x$ является возрастающей на всей числовой прямой и не имеет критических точек.

11.30. Доказать, что многочлен $P(x) = 12x^3 + 12ax^2 - 8ax - 3$ имеет хотя бы один корень в интервале $(0;\ 1)$ при любом $a \in \mathbb{R}$.

11.31. Пусть

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}.$$

Доказать, что найдется такое число $c \in (0;\ 1)$, что $f'(c) = 0$.

11.32. Непрерывная функция $f(x)$ выпукла вниз и $f(0) = 0$. Доказать, что $\dfrac{f(x)}{x}$ возрастает при $x > 0$.

## §12. Применение второй производной к исследованию функций

Критическая точка $x_0$, в которой $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$), является *точкой минимума* (*максимума*).

Функция $y=f(x)$ называется *выпуклой вниз* (*вверх*) на отрезке $[a;\,b]$, если для любых $x_1$, $x_2\in[a;b]$ дуга графика функции лежит ниже (выше) хорды, соединяющей точки $(x_1,f(x_1))$ и $(x_2,f(x_2))$. Если $f''(x)\ge 0$ ($f''(x)<0$) на интервале $(a;\,b)$, то $f(x)$ выпукла вниз (вверх) на этом интервале. Точка, в которой меняется направление выпуклости графика функции, называется *точкой перегиба*. В точке перегиба $f''(x)$ равна нулю или не существует.

12.1. Найти экстремумы данных функций, пользуясь второй производной:

1) $y=x^3-2ax^2+a^2x$; 2) $y=x^2(a-x)^2$;

3) $y=x\sqrt{2-x^2}$; 4) $y=x+\sqrt{1-x}$;

5) $y=\operatorname{ch}ax$; 6) $y=x^2e^{-x}$.

12.2. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графиков данных функций:

1) $y=x^3-5x^2+3x-5$; 2) $y=(x+1)^4+e^x$;

3) $y=x^4-12x^3+48x^2-50$; 4) $y=x+36x^2-2x^3-x^4$;

5) $y=\dfrac{x^3}{x^2+3a^2}$, $(a>0)$; 6) $y=\dfrac{a}{x}\ln\dfrac{x}{a}$, $(a>0)$;

7) $y=a-\sqrt[3]{x-b}$; 8) $y=x^4(12\ln x-7)$.

12.3. Показать, что линия $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

12.4. Убедиться в том, что графики функций $y=\pm e^{-x}$ и $y=e^{-x}\sin x$ (кривая затухающих колебаний) имеют общие касательные в точках перегиба линии $y=e^{-x}\sin x$.

12.5. Показать, что точки перегиба линии $y = x\sin x$ лежат на линии $y^2\left(4 + x^2\right) = 4x^2$.

12.6. При каких значениях $a$ график функции $y = e^x + ax^3$ имеет точки перегиба?

12.7. Доказать, что абсцисса точки перегиба графика функции не может совпадать с точкой экстремума этой функции.

12.8. Доказать, что у любой дважды дифференцируемой функции между двумя точками экстремума лежит по крайней мере одна абсцисса точки перегиба графика функции.

12.9. Найти точки перегиба линии $x = t^2$, $y = 3t + t^3$.

12.10. Найти точки перегиба линии $x = e^t$, $y = \sin t$.

12.11. Пусть функция $f\left(x\right)$ выпукла на $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x} = 0$. Докажите, что $f\left(x\right)$ постоянна.

12.12. Пусть функция $f\left(x\right)$ выпукла на $\left[a; +\infty\right)$. Докажите, что существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, причем $l > -\infty$.

## §13. Исследование функций и построение кривых

Исследование рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) Определить область определения функции.
2) Установить точки разрыва и интервалы непрерывности функции. Найти нули функции и промежутки знакопостоянства. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.
3) Найти асимптоты графика функции.
4) Найти первую производную, интервалы монотонности, точки экстремума.
5) Найти вторую производную, промежутки выпуклости (вогнутости), точки перегиба.
6) Определить, если необходимо, дополнительные точки, построить график функции.

13.1. Провести полное исследование данных функций и начертить их графики:

1) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;
2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;
3) $y=\dfrac{x^4}{x^3-2}$;
4) $y=\dfrac{(x+2)(x^2+6x+4)}{(1+x)^2}$;
5) $y=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$;
6) $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}$;
7) $y=\sqrt[3]{x^2}e^{-\frac{2x}{3}}$;
8) $y=(x-6)e^{-\frac{1}{x}}$;
9) $y=\sqrt{x}\ln x$;
10) $y=x^2\ln^2 x$;
11) $y=x^2e^{-x^2}$;
12) $y=x^2e^{-x}$;
13) $y=2x+4\,\mathrm{arcctg}\,x$;
14) $y=x-2\,\mathrm{arctg}\,x$;
15) $y=x+\sin x$;
16) $y=\ln(x^2+1)$;
17) $y=x\sin x$;
18) $y=\cos x-\ln\cos x$;
19) $y^2=x^3+1$;
20) $y^2=x^3-x$;
21) $y^2=x(x-1)^2$;
22) $x^2y+xy^2=2$;
23) $y^2=x^2-x^4$;
24) $x^2y^2=4(x-1)$.

13.2. Исследовать и начертить кривые, заданные параметрически:

1) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t^3+1}, \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t^3+1}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{3-t^2}, \\ y(t) = \dfrac{t(2-t^2)}{3-t^2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t + 1, \\ y(t) = t^3 - 3t + 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3\pi, \\ y(t) = t^3 - 6\operatorname{arctg} t; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x(t) = te^t, \\ y(t) = te^{-t}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x(t) = 2a\cos t - a\cos 2t, \\ 4y(t) = 2a\sin t - a\sin 2t. \end{cases}$

13.3. Исследовать линии, уравнения которых заданы в полярных координатах:

1) $\rho = a\sin 3\varphi$; 2) $\rho = a \cdot \operatorname{tg}\varphi$;

3) $\rho = a(1+\cos\varphi)$; 4) $\rho = a(1+\operatorname{tg}\varphi)$.

13.4. Исследовать и построить линии, предварительно приведя их уравнения к полярным координатам:

1) $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$; 2) $(x^2+y^2)x = a^2y$;

3) $x^4+y^4 = a^2(x^2+y^2)$; 4) $(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2 = 4x^2y^2$.

## §14. Простейшие приемы интегрирования

### *Таблица основных интегралов*

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

3) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$;

4) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$;

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$;

6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;

7) $\int a^x \, dx = a^x \ln a + C$;

8) $\int e^x \, dx = e^x + C$;

9) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$;

10) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$;

11) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

12) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

13) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

14) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

15) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;

16) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u) du = F(u) + C$.

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то $\int u \, dv = uv - \int v du$.

Если $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$.

14.1. Путем преобразования подынтегрального выражения найти следующие интегралы:

1) $\int \left(2 - 3\sqrt{x}\right)^2 dx$;

2) $\int (x+1)^{15} dx$;

3) $\int \dfrac{dx}{2x-1}$;

4) $\int \dfrac{dx}{(2x-3)^5}$;

5) $\int \dfrac{x dx}{4 + x^4}$;

6) $\int \dfrac{x^3 dx}{x^4 - 2}$;

7) $\int \dfrac{x dx}{(1+x^2)^2}$;

8) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$;

10) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}$;

11) $\int \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$;

12) $\int \frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$;

13) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$;

14) $\int \sqrt{8-2x}\,dx$;

15) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$;

16) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$;

17) $\int \left(e^x+1\right)^3 dx$;

18) $\int e^{-3x+1}dx$;

19) $\int xe^{-x^2}dx$;

20) $\int x^2e^{-x^3}dx$;

21) $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$;

22) $\int \frac{dx}{e^{-x}+e^x}$;

23) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$;

24) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$;

25) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$;

26) $\int \frac{dx}{9+2x^2}$;

27) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$;

28) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^4}}$;

29) $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

30) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

31) $\int \operatorname{tg} x\,dx$;

32) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$;

33) $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$;

34) $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$;

35) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$;

36) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

37) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

38) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;

39) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$;

40) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$;

41) $\int \cos 2x\,dx$;

42) $\int \cos^2 x\,dx$;

43) $\int \sin^2 x\,dx$;

44) $\int \cos x\sin 3x\,dx$;

45) $\int \cos 2x\cos 3x\,dx$;

46) $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$;

47) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$; 48) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$;

49) $\int \cos^3 x\,dx$; 50) $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$.

14.2. Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

1) $\int \ln x\,dx$; 2) $\int x^4 \ln x\,dx$;

3) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$; 4) $\int xe^{-x}\,dx$;

5) $\int x^2 e^{-2x}\,dx$; 6) $\int x\cos x\,dx$;

7) $\int x^2 \sin 2x\,dx$; 8) $\int x\operatorname{ch} x\,dx$;

9) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; 10) $\int \arcsin x\,dx$;

11) $\int x^2 \arccos x\,dx$; 12) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$;

13) $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)dx$; 14) $\int \sin(\ln x)dx$;

15) $\int \sqrt{a^2-x^3}\,dx$; 16) $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$;

17) $\int \frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^2}dx$; 18) $\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^2}$;

19) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; 20) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$.

14.3. Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

1) $\int \sin^4 x\,dx$; 2) $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$;

3) $\int \cos^6 x\,dx$; 4) $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$;

5) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$; 6) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$;

7) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$; 8) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$;

9) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$; 10) $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx$;

11) $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}dx$; 12) $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$;

13) $\int 5^{\sqrt{x}}dx$; 14) $\int x\cos\sqrt{x}\,dx$;

15) $\int \sqrt{1-x^2}dx$; 16) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

## §15. Основные классы интегрируемых функций

Интеграл от функции вида $R\left(x,\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}},\sqrt[p]{\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}},\ldots\right)$ находится с помощью подстановки $z^n=\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}$, где $n$ – наименьшее общее кратное чисел $m, p, \ldots$ .

Дифференциальные биномы $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$. Данные интегралы вычисляются в конечном виде только в следующих трех случаях:

1) $p$ – целое число;
2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число, подстановка $a+bx^n=z^s$, где $s$ – знаменатель дроби $p$;
3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое число, подстановка $ax^{-n}+b=z^s$, где $s$ – знаменатель дроби $p$.

Универсальная тригонометрическая подстановка $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x=2\operatorname{arctg}t$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$.

15.1. Найти интегралы от дробно-рациональных функций, знаменатель которых имеет действительные корни:

1) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$;
2) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$;
3) $\displaystyle\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$;
4) $\displaystyle\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$;
5) $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;
6) $\displaystyle\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$;
7) $\displaystyle\int\frac{32x\,dx}{(2x-1)\left(4x^2-16x+15\right)}$;
8) $\displaystyle\int\frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$.

15.2. Найти интегралы от дробно-рациональных функций, знаменатель которых имеет только действительные корни, некоторые корни – кратные:

1) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+2}{x\left(x^2+2x+1\right)}dx$;
2) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$;

3) $\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}$;

4) $\int\frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}dx$;

5) $\int\frac{dx}{x^4-x^2}dx$;

6) $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$;

7) $\int\frac{(x^2-2x+3)dx}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}$;

8) $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$.

15.3. Найти интегралы от дробно-рациональных функций, знаменатель которых имеет комплексные различные корни:

1) $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$;

2) $\int\frac{dx}{x^3+1}$;

3) $\int\frac{xdx}{1-x^3}$;

4) $\int\frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$;

5) $\int\frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}$;

6) $\int\frac{x^2dx}{1-x^4}$;

7) $\int\frac{(3x^2+x+3)dx}{(x^2+1)(x-1)^3}$;

8) $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

15.4. Найти интегралы от дробно-рациональных функций, знаменатель которых имеет комплексные кратные корни:

1) $\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$;

2) $\int\frac{dx}{x(x^2+4)^2(x^2+1)}$;

3) $\int\frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2}$;

4) $\int\frac{(x+1)^4dx}{(x^2+2x+2)^3}$;

5) $\int\frac{dx}{(x^2+9)^3}$;

6) $\int\frac{2x\,dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$;

7) $\int\frac{x^9dx}{(x^4-1)^2}$;

8) $\int\frac{x^7dx}{(x^4+1)^2}$.

15.5. С помощью приведения подынтегральных функций к рациональным функциям найти следующие интегралы:

1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

2) $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$;

3) $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$;

4) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

5) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$;

6) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$;

7) $\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$;

8) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$.

15.6. Вычислить интегралы, используя соответствующие подстановки Чебышева:

1) $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx$;

2) $\int x^{-1}\left(1+x^{1/3}\right)^{-3} dx$;

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$;

6) $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$;

7) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

8) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$;

9) $\int \sqrt[3]{x\left(1-x^2\right)}dx$;

10) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx$.

15.7. Вычислить интегралы, содержащие $\sqrt{ax^2+bx+c}$:

1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$;

2) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$;

3) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$;

4) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}$;

5) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$;

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

7) $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$;

8) $\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx$.

15.8. Найти интегралы от тригонометрических функций:

1) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$;

2) $\int \cos^6 x\,dx$;

3) $\int \mathrm{ctg}^4 x\,dx$;

4) $\int \mathrm{tg}^5 x\,dx$;

5) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$;

6) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$;

7) $\int \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$;

8) $\int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^2}$.

15.9. Найти интегралы, используя универсальную тригонометрическую подстановку:

1) $\int \frac{dx}{3+\sin x}$;

2) $\int \frac{dx}{1+5\cos x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 6}$;

4) $\int \frac{\cos x\, dx}{2-\cos x}$;

5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin 2x}$;

6) $\int \frac{\sin x\, dx}{2\sin x + 3\cos x}$;

7) $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x}$;

8) $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x + 3\cos x}$.

15.10. Применяя различные методы, найти следующие интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x\ln x - x}$;

2) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 \ln x + x^3}} dx$;

3) $\int \frac{dx}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}$;

4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$;

5) $\int \frac{dx}{e^{2x}+6}$;

6) $\int \frac{x^3+1}{x^2(1-x)} dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$;

8) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$;

9) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$;

10) $\int \frac{x}{\sin^4 x} dx$;

11) $\int x \ln \frac{x}{1+x^2} dx$;

12) $\int \frac{dx}{2+\sin x + \cos x}$;

13) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}$;

14) $\int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^3 x}$;

15) $\int x \operatorname{arctg} x dx$;

16) $\int x^3 \operatorname{arctg}^2 x dx$;

17) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+4} dx$;

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$;

19) $\int x^3\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$;

20) $\int\left(e^x-\sin x\right)^2dx$;

21) $\int\frac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}dx$;

22) $\int\frac{5x-1}{\sqrt{3-4x^2+8x}}dx$;

23) $\int\frac{3x+2}{\sqrt{3x^2-6x+13}}dx$;

24) $\int\frac{4\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}\left(2\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}\right)^3}dx$;

25) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{4x^2-10x+7}}$;

26) $\int\frac{x^4+1}{x^6-1}dx$;

27) $\int\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3\left(x^2+1\right)}dx$;

28) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{3x^2+4x}}$;

29) $\int x^4\sqrt{1+x^2}dx$;

30) $\int x^2\sqrt{x^2+4x}dx$;

31) $\int(\arccos x)^2dx$;

32) $\int\frac{x-2}{(1-x)^2}e^xdx$;

33) $\int\frac{dx}{3\operatorname{ctg}x+2\sin x}$;

34) $\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx$;

35) $\int\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

36) $\int\frac{\sqrt{x}+3}{x^2-\sqrt{x}}dx$;

37) $\int\frac{dx}{\sin^3x+\cos^3x}$;

38) $\int\frac{x\operatorname{arctg}x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}$;

39) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$;

40) $\int\frac{\left(e^{3x}+e^x\right)}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$.

15.11. Найти первообразную для функции $y=\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$.

15.12. Доказать, что

$$\int\frac{\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma}{a\sin x+b\cos x+c}dx=Ax+B\ln\left|a\sin x+b\cos x+c\right|+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}.$$

15.13. Через какие функции может быть выражен интеграл от рациональной дроби $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$?

## §16. Определенные интегралы

Формула Ньютона – Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $x = \varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, заданная на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

16.1. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}dx$;

2) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$;

3) $\int\limits_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$;

4) $\int\limits_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$;

5) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$;

6) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x^2}{1+x^2}dx$;

7) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}dx$;

8) $\int\limits_{-\pi/4}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$;

9) $\int\limits_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$;

10) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;

11) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 xdx$;

12) $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$.

16.2. Применяя метод интегрирования по частям, вычислить следующие определенные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$;

2) $\int\limits_0^3 \ln(x+3)dx$;

3) $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$;

4) $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$;

5) $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$;

6) $\int\limits_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$;

7) $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

8) $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx$;

9) $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx$;

10) $\int\limits_0^1 \cos^2(\ln x)\,dx$;

11) $\int\limits_{-1}^1 \arcsin^2 x\,dx$;

12) $\int\limits_{-1}^1 \cos\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

16.3. Применяя метод замены переменной, вычислить следующие определенные интегралы:

1) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$;

3) $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}+1}dx$;

5) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$;

6) $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$;

7) $\int\limits_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2}dx$;

8) $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^7 2x\,dx$;

9) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^3}$;

10) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$;

11) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$;

12) $\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$;

13) $\int\limits_0^1 \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}dx$;

14) $\int\limits_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}dx$;

15) $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$;

16) $\int\limits_{\sqrt{8/3}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{\left(x^2-2\right)^5}}$.

16.4. С помощью определенного интеграла доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

16.5. Вычислить пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

1) $S_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{\pi(n-1)}{n}\right)$;

2) $S_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$;

3) $S_n = \frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \ldots + \frac{(4n-1)^3}{n^4}$;

4) $S_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}$;

5) $S_n = n^2\left(\frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{(n^2+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n^2+n)^2}\right)$;

6) $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

7) $S_n = \frac{1+\sqrt[3]{2}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$.

16.6. Доказать, что $\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$.

16.7. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$ и $f(1)-f(0)=1$. Доказать, что $\int\limits_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx \geq 1$.

16.8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$.

16.9. Найти производную первого порядка от следующих функций:

1) $F(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)dt$; 2) $F(x) = \int\limits_{x^2}^{x} \ln t\,dt$, $x > 0$.

16.10. Найти точки экстремума функции $F(x) = \int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$.

## §17. Вычисление площадей фигур

Площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=a$ и $x=b$ и двумя непрерывными кривыми $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ такими, что для любых $a\le x\le b$ $y_1(x)\le y_2(x)$ равна $S=\int\limits_a^b\left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx$.

Если $x=x(t)$, $y=y(t)$ $[0\le t\le T]$ – параметрические уравнения кусочно-гладкой простой замкнутой кривой $C$, пробегаемой против хода часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру с площадью $S$, то $S=-\int\limits_0^T y(t)x'(t)dt=\int\limits_0^T x(t)y'(t)dt$.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ и кривой $r=r(\varphi)$, равна $S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

17.1. Найти площадь области, ограниченной кривыми, заданными в прямоугольных координатах:

1) $y=x^2e^{-x}$, $y=0$, $x=2$;
2) $y=x^2$, $x+y=2$;
3) $y=2x-x^2$, $x+y=0$;
4) $y=a\sin x$, $y=a\cos x$;
5) $y=x\ln^2 x$, $y=x\ln x$;
6) $y=2^x$, $y=2$, $x=0$;
7) $y=\frac{2a}{3}\cos x$, $y=a\operatorname{tg}x$, $x=0$;
8) $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=0$;
9) $y=x^4-4x^3+4x^2$, $y=\cos\pi x-1$;
10) $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, $x\in[0,\pi]$;
11) $y^2=x^3-x^4$;
12) $x^3=x^2-y^2$;
13) $a^2y^4=x^4\left(a^2-x^2\right)$;
14) $x=\cos\pi y$, $4y^2=3(x+3)$.

17.2. Вычислить площадь, заключенную между параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке $M(3,5)$, и осью ординат.

17.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^4-2x^3+x^2+3$, осью абсцисс и двумя ординатами, соответствующими точкам, в которых функция $y$ имеет минимум.

17.4. В каком отношении парабола $y^2 = 2x$ делит площадь круга $x^2 + y^2 = 8$?

17.5. Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

1) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin 2t; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = a\cos 3t, \\ y = a\sin t; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{t}}{\left(1+t^2\right)^2}, \\ y = \dfrac{t\sqrt{t}}{\left(1+t^2\right)^2}; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = \dfrac{a\sin^2 t}{2+\sin t}. \end{cases}$

17.6. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

17.7. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a\left(t - \sin t\right)$, $y = a\left(1 - \cos t\right)$ и осью абсцисс.

17.8. Привести уравнение к параметрическому виду и найти площадь области, ограниченной петлей кривой:

1) $x^3 + y^3 = axy$; 2) $\left(x + y\right)^3 = axy$;

3) $x^4 = axy^2 + ay^3$; 4) $x^5 + y^5 = ax^2y^2$.

17.9. Найти площадь области, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах:

1) $r = a\cos 5\varphi$; 2) $r = a\cos 4\varphi$;

3) $r = a\left(1 - \sin\varphi\right)$; 4) $r = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $\varphi = \pi/4$;

5) $r = a\left(2 - \cos\varphi\right)$; 6) $r^2 = a^2\cos 4\varphi$;

7) $r = 2\varphi$, $\varphi \in \left[0, 2\pi\right]$, $\varphi = 0$; 8) $r = a\left(1 + \sin^2 2\varphi\right)$.

17.10. Найти площадь области, ограниченной кривой $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ и находящейся внутри круга $r = a/\sqrt{2}$.

17.11. Найти площадь области, ограниченной кривой $r = a(1+\cos\varphi)$ и лежащей вне кривой $r = 3a\cos\varphi$.

17.12. Найти сумму площадей областей, ограниченных кривой $r = a\cos 3\varphi$ и лежащих вне круга $r = a/2$.

17.13. Перейти к полярным координатам и найти площадь области, ограниченной кривой:

1) $x^4 + y^4 = a^2xy$;
2) $x^4 + y^4 = a^2xy$;
3) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = ax^4y$;
4) $x^6 + y^6 = a^2\left(x^4 + y^4\right)$;
5) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2x^2y^2$;
6) $x^6 + y^6 = a^2x^4$.

17.14. Найти площадь области, являющейся пересечением областей, ограниченных кривыми $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ и $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy$.

17.15. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линией $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и ее асимптотой.

17.16. Вычислить площадь общей части кругов $r = a\cos\varphi$, $r = a\cos\varphi + a\sin\varphi$.

17.17. Найти площадь области, лежащей между кривыми $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ и $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4a^2\left(x^2 - y^2\right)$.

17.18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$, $x^2 + y^2 \ge a^2$.

## §18. Вычисление длины дуги плоской фигуры

Длина дуги $y = f(x)$, $a \le x \le b$: $L = \int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

При параметрическом задании $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \le t \le b$: $L = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$.

Если кривая задана в полярных координатах $r = f(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$.

18.1. Найти длины дуг следующих кривых:

1) $y = \ln x$, $3/4 \le x \le 12/5$;
2) $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/3$;
3) $y = \ln\left(1 - x^2\right)$, $0 \le x \le 1/2$;
4) $y = \arccos e^{-x}$, $0 \le x \le 1$;
5) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $0 \le x \le 7/9$;
6) $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x$, $0 \le x \le 8/9$.

18.2. Определить длину дуги кривой:

1) $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = 4/3$;
2) $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$, отсеченной осью $Ox$;
3) $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$;
4) $9y^2 = x(x-3)^2$, между точками пересечения с осью $Ox$;
5) $y = \sqrt{e^{2x}-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}$ от начала координат до точки, для которой $x = 1$.

18.3. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями $x^2 = (y+1)^3$ и $y = 4$.

18.4. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями $y^3 = x^2$ и $y = \sqrt{2 - x^2}$.

18.5. Найти длину линии:

1) $y(x) = \int\limits_1^x \sqrt{t^4 - 1}\,dt$, $1 \le x \le 2$;
2) $y(x) = \int\limits_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt$, $0 \le x \le \pi/4$;
3) $y(x) = \int\limits_0^x \sqrt{\sin 2t}\,dt$, $0 \le x \le \pi/4$;
4) $y(x) = \int\limits_{-\pi/4}^x \sqrt{\cos x}\,dx$.

18.6. Найти длины дуг следующих кривых, заданных параметрически:

1) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

2) $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$, $0 \le t \le \pi/2$;

3) $x = 2a\sin^2 t$, $y = 2a\cos t$;

4) $x = \ln\left(1+t^2\right)$, $y = 2\operatorname{arctg} t - 2t + 8$ от точки $A(0, 8)$ до точки $B(\ln 2, \pi/2+6)$;

5) $x = \left(t^2-2\right)\sin t + 2t\cos t$, $y = \left(2-t^2\right)\cos t + 2t\sin t$, $0 \le t \le 1$;

6) $x = 6at^5$, $y = 5at\left(1-t^8\right)$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(6a, 0)$;

7) $x = 2a\operatorname{sh}^3 t$, $y = 3a\operatorname{ch} t$ от точки $A(0, 3a)$ до точки $B(x_0, y_0)$;

8) $x = \dfrac{a}{2}\sin t\left(1+2\cos^2 t\right)$, $y = a\cos^3 t$ от точки $A(0, a)$ до точки $B(a/2, 0)$.

18.7. Найти длины дуг кривых, заданных в полярных координатах:

1) $r = \cos^3\dfrac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \pi/2$;

2) $r = a\cos^4\dfrac{\varphi}{4}$;

3) $r = \varphi^2$, $0 \le \varphi \le \pi$;

4) $\varphi = \dfrac{r}{2}\sqrt{r^2+2} + \ln\left|r+\sqrt{r^2+2}\right|$, $0 \le r \le 2$.

18.8. Найти длину дуги спирали Архимеда $r = a\varphi$, находящейся внутри круга радиусом $2a\pi$.

18.9. Найти длину гиперболической спирали $r = \dfrac{\pi a}{\varphi}$, $\varphi > 0$, находящейся внутри кольца $a/4 \le r \le 2a$.

18.10. Найти длину границы областей, ограниченных кривыми $r = \dfrac{a}{4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$ и $r = a\left(1+\cos\varphi\right)$.

## §19. Вычисление площадей поверхностей и объемов тел

Площадь поверхности, полученной вращением кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$ вокруг оси $Ox$: $S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

Объем тела, полученного вращением кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$ вокруг оси $Ox$: $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$; вокруг оси $Oy$: $V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$.

Если площадь сечения тела, перпендикулярного оси $Oz$ и отстоящего от начала координат на расстояние $z$, равно $S(z)$, $a \le z \le b$, его объем $V = \int_a^b S(z)\,dz$.

19.1. Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

1) $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ $(0 \le x \le a)$ вокруг оси $Ox$;

2) $y = a\cos\dfrac{\pi x}{2b}$ $(|x| \le b)$ вокруг оси $Ox$;

3) $y = \operatorname{tg} x$ $(0 \le x \le \pi/4)$ вокруг оси $Ox$;

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b \le a)$ вокруг осей $Ox$ и $Oy$;

5) $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(b \ge a)$ вокруг оси $Ox$;

6) $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(b \ge a)$ вокруг оси $Oy$;

7) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси $Ox$;

8) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$; а) вокруг оси $Ox$; б) вокруг оси $Oy$; в) вокруг прямой $y = 2a$;

9) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг прямой $y = x$;

10) $r = a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси;

11) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$: а) вокруг полярной оси; б) вокруг оси $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; в) вокруг оси $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

19.2. Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \cos x$, $y = 2\cos x$, $x = \pm\pi/2$: а) вокруг оси $Ox$; б) вокруг оси $Oy$.

2) $y = e^x - 1$, $y = 2$, $x = 0$: а) вокруг оси $Oy$; б) вокруг прямой $y = 2$.

3) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = \pm 1$: а) вокруг оси $Ox$; б) вокруг оси симметрии; в) относительно прямой $y = 1$.

4) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$: а) вокруг прямой $y = -1$; б) вокруг прямой $y = 1$; в) вокруг прямой $x = -1$.

19.3. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением кривой $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ вокруг ее асимптоты.

19.4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением циссоиды $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ вокруг ее асимптоты.

19.5. Вычислить объем тела, получаемого при вращении вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс и первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

19.6. Вычислить объем тела, получаемого при вращении вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс и первой аркой циклоиды $x = a\sin t$, $y = b\sin 2t$.

19.7. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг полярной оси фигуры, ограниченной кривой $r = a\cos^2\varphi$.

19.8. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг полярной оси фигуры, ограниченной кривой $r = a\cos^3\varphi$.

19.9. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс лепестка лемнискаты $r^2 = a^2\sin 2\varphi$.

19.10. Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=\dfrac{c}{a}x$, $z=0$;

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $z=\pm c$;

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$;

5) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$;

6) $z^2=b\left(a-x\right)$, $x^2+y^2=ax$;

7) $x+y+z^2=1$, $x=y=z=0$;

8) $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.

19.11. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=ax$, $x-z=0$, $x+z=0$, рассмотрев сечения, перпендикулярные $Ox$.

19.12. Найти объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами $a$ и $b$, верхнее ребро равно $c$, а высота $h$.

19.13. Найти объем параболоида вращения, основание которого $S$, а высота равна $H$.

19.14. Найти объем тела, полученного при вращении круга радиусом $a$ относительно прямой, лежащей в плоскости круга и отстоящей от его центра на расстоянии $b$ ($b>a$).

19.15. Через фокус $F\ (c,\ 0)$ гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ проведена хорда, перпендикулярная оси абсцисс. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг этой хорды отсекаемого ею сегмента гиперболы.

19.16. Через фокус $F\ (c,\ 0)$ эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ проведена хорда, перпендикулярная оси абсцисс. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг этой хорды отсекаемого ею сегмента эллипса (рассмотреть случаи, когда сегмент больше полуэллипса и когда он меньше полуэллипса).

## §20. Несобственные интегралы

Если функция $f(x)$ интегрируема на каждом конечном сегменте $[a,b]$, то, по определению, полагают: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки $b$ и интегрируема на каждом сегменте $[a, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, то принимают: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Если пределы существуют, то соответствующий интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

*Признак сравнения 1*. Пусть $|f(x)| \le F(x)$ при $x \ge a$. Если $\int\limits_0^{+\infty} F(x)dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

*Признак сравнения 2*. а) Если при $x\to+\infty$ функция $f(x)\ge 0$ является бесконечно малой порядка $p>0$ по сравнению с $1/x$, то интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

б) Если функция $f(x)\ge 0$ определена и непрерывна в промежутке $a\le x<b$ и является бесконечно большой порядка $p$ по сравнению с $1/(b-x)$ при $x\to b-0$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится при $p<1$ и расходится при $p\ge 1$.

20.1. Вычислить несобственные интегралы:

1) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x+x^3}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx$;

3) $\int\limits_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$; 4) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+2x+5}$; 6) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$;

7) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

8) $\int\limits_{0}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$;

9) $\int\limits_{0}^{1}\ln x dx$;

10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$;

11) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

12) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$;

13) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}$;

14) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$;

15) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

16) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

17) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;

18) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

19) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\ln\sin x dx$;

20) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

21) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$;

22) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$;

23) $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-ax}\cos bx dx \ (a>0)$;

24) $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx \ (a>0)$.

20.2. Исследовать сходимость интегралов:

1) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$;

2) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

3) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\ln x}$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx \ (n\geq 0)$;

5) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx \ (a\neq 0)$;

6) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$;

7) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^m\operatorname{arctg} x}{2+x^n}dx \ (n\geq 0)$;

8) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx \ (n\geq 0)$;

9) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$;

10) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$;

11) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$;

12) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$;

13) $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$;

14) $\int\limits_0^{1} x^p \ln^q \frac{1}{x}dx$;

15) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx$;

16) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^n}dx$;

17) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$;

18) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^p}{x^q}dx$;

19) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}dx$;

20) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^p}{x^q+1}dx$;

21) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^q+x^p}$;

22) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$;

23) $\int\limits_0^{1} x^p \ln^q x\,dx$;

24) $\int\limits_0^{1} \frac{x^p}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

20.3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x+1}$, если известно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

20.4. Пусть интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится и равен $J$. Доказать, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$ также сходится и равен $J$.

20.5. Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4\cos^2 x}$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2\cos^2 x}$.

## §21. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

Выражение вида $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_i \in \mathbb{R}^+$ называется *положительным числовым рядом*. Числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называются *членами ряда*, число $a_n$ – *общим членом ряда*.

Суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, …, $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$ называются частичными суммами, а $S_n$ – *n - частичной суммой ряда*. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и равен числу $S$, то ряд называется *сходящимся*, а $S$ – его суммой, в противном случае (если предел не существует или бесконечен) ряд называется *расходящимся*.

*Необходимый признак сходимости ряда*. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Признак сравнения 1*. Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, если при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $0 \leq a_n \leq b_n$, то 1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; 2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

*Признак сравнения 2*. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = h$, где $h$ – число отличное от нуля, то оба ряда ведут себя одинаково в смысле сходимости.

*Признак Даламбера*. Если $a_n > 0$ $(n = 1,2,...)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$, то а) при $d < 1$ ряд сходится и б) при $d > 1$ расходится.

*Признак Коши*. Если $a_n \geq 0$ $(n = 1,2,...)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$, то а) при $k < 1$ ряд сходится и б) при $k > 1$ расходится.

*Интегральный признак Коши.* Если $f(x)$ $(x \geq 1)$ – неотрицательная невозрастающая непрерывная функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится вместе с интегралом $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

21.1. Для каждого ряда найти $S_n$, доказать сходимость ряда, пользуясь определением сходимости, найти сумму ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n-2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n-3}$.

21.2. С помощью необходимого признака сходимости ряда установить, какие из указанных рядов заведомо расходятся:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,001}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1,5}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n+1}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2+n+1}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^3+3}\right)^{n^2}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{3n}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

21.3. Используя признаки сравнения, исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000n+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2(1+n)^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n^2+1)}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{3n^4+n^3+1}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^3}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)2^n}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+2n^3)}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n^2}}$;

14) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;

15) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+3n^3}{n^4+1}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}n\arcsin\frac{1}{n^3}$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}}$.

21.4. Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

21.5. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью признака Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)}$;  2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$;  4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{n} \right)^n$;  6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos \frac{3}{n} \right)^{n^3}$.

21.6. Используя интегральный признак, исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$;  2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;  4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$;  6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$;  8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;  10) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln^2 n}$.

21.7. Используя признаки сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \sin \frac{1}{n^2}$;  2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \sin n}$;  4) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^3+5}$;  6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^5}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n+1)^2}$;  8) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^5+1}{n^5}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{10^n - n}$;  10) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 3^{1/n} - 1 \right) \sin \frac{\pi}{n}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n!}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{2n+5}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[7]{n}\left(\ln\cos\frac{1}{n}\right)^2$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin(1/n)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{10}e^{-\sqrt{n}}$;

16) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{e^n}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n!}$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt[3]{n^2}}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n-1}\right)^n$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\arccos\frac{1}{n}$;

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{3^n(3^n-1)}\cdot\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$;

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[4]{n}-1)}$;

25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}$;

26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^{2n}n!(n+1)!}$;

27) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2}{(3+1/n)^n}$;

29) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$;

30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{5\cdot 18\cdot 47\cdot\ldots\cdot(n^3+2n^2+2)}$;

31) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\sin\frac{\pi}{2^n}}{n!}$;

32) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$;

33) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{-\ln n}$;

34) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$;

35) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^p\frac{1}{n^7}$;

36) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^2\cdot 5^2\cdot 8^2\cdot\ldots\cdot(3n+2)^2}{(2n+1)!}\sin\frac{1}{3^n}$;

37) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n+\sqrt{\ln^3 n}}$;

38) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln\ln(n+2)}$.

21.8. Доказать каждое из следующих соотношений с помощью ряда, общим членом которого является данная функция:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{a^{n!}}=0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}=0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0$.

21.9. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)2^n}$.

21.10. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ расходится.

21.11. Сходятся ли следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-\ln n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n!}$.

21.12. Последовательность $\{x_n\}$ задается соотношениями $x_1=a>1$, $x_{n+1}=x_n^{\;2}-x_n+1$ $(n\ge 1)$. Найти $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_n}$.

21.13. Найти:

$$\frac{1+\dfrac{\pi^4}{2^4\cdot 4!}+\dfrac{\pi^8}{2^8\cdot 8!}+\dfrac{\pi^{12}}{2^{12}\cdot 12!}+\ldots}{\dfrac{1}{2!}+\dfrac{\pi^4}{2^4\cdot 6!}+\dfrac{\pi^8}{2^8\cdot 10!}+\dfrac{\pi^{12}}{2^{12}\cdot 14!}+\ldots}.$$

## §22. Ряды с произвольными членами. Абсолютная и условная сходимость рядов

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого $a_n \in \mathbb{R}$, называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Абсолютно сходящийся ряд сходится, обратное утверждение неверно.

*Признак Лейбница.* Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ знакочередующийся, где $a_n \geq 0$, если последовательность $\{|a_n|\}$ убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, то ряд сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого $a_n \in \mathbb{R}$, называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, расходится.

22.1. Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2n+1)}{2^n}$;  2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

22.2. Применяя признак Лейбница, показать, что данный ряд сходится:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;  2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n+5)^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$;  4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+20}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$;  6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin(\pi/n)}{n}$.

22.3. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$;  2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \sqrt[3]{n}}{n+2}$;  4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n-1)}{\sqrt[8]{n}(n+1)}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}$;

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln^3 n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{10}e^{-n}$;

8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{3n+1}{4n+5}\right)^n$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-\operatorname{arctg}n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)^2}{n^2+1}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\operatorname{arctg}n}{n^2+1}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n+1)!!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos(\pi/n)}{n}$;

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$;

17) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}\cos\dfrac{\pi n^2}{n+1}$;

18) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$;

19) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\left(n+(-1)^n\right)^p}$;

20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\left(\sqrt{n}+(-1)^{n+1}\right)^p}$;

21) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{12}}{\ln n}$;

22) $\sum\limits_{n=10}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n+10\sin n}$.

22.4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\ln\left(1-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)$.

## §23. Функциональные и степенные ряды

Множество значений $x$, при которых функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, называется его *областью сходимости*, а функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – *суммой ряда*.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве $X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N$, не зависящий от $x$, такой, что при $n > N$ $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ одновременно для всех $x \in X$.

*Признак Вейерштрасса*. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве $X$, если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что $\left|f_n(x)\right| \le a_n$ при $x \in X$.

23.1. Найти сумму следующих функциональных рядов:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$;  2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}$;  4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$.

23.2. Найти область сходимости функциональных рядов:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n}$;  2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n+1}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{nx-1}}$;  4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;  6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}\left(\frac{1+2x}{1+3x}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[5]{n}}\left(\frac{1+2x}{4+x}\right)^n$;  8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{\sqrt[5]{n}(n+1)}\left(\frac{x}{3x-1}\right)^n$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\left(\frac{2+3x}{3+x}\right)^n$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}-\ln n}\left(\frac{1+x}{3+2x}\right)^n$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$;

14) $\sum_{n=2}^{\infty}n^{\ln x}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$;

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{x}{a^n}$;

17) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{x}{a^n}$;

18) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{a^{nx}}\ (a>1)$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{x^{n^n}}$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{2^n x^n}\right)$;

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\ldots(x+n)}$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$;

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n x}{n}$;

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$;

25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3x-2}}$;

26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$;

27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(nx^2)\sin x}{\sqrt{n^3+x^2}}$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n n}{n}$;

29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)(2+x^2)\ldots(n+x^2)}$;

30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n$.

23.3. Исследовать функциональные последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

1) $f_n(x)=x^n$, а) $0\le x\le 1/2$; б) $0\le x\le 1$.

2) $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$, $0\le x\le 1$.

3) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $0\le x\le 1$.

4) $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$, $0<x<+\infty$.

5) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x}$, $0\le x\le 1$.

6) $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, а) $0\le x\le 1$; б) $1<x<+\infty$.

7) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$, $-\infty<x<+\infty$.

8) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$, $-\infty<x<+\infty$.

9) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$, $0<x<+\infty$.

10) $f_n(x)=x\cdot\operatorname{arctg} nx$, $0<x<+\infty$.

11) $f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$, $0<x<1$.

12) $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$, $0\le x\le 2$.

13) $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+nx+1}$, $1\le x<+\infty$.

14) $f_n(x)=n(1-x)x^{n-1}$, $0\le x\le 1$.

15) $f_n(x)=\sin^{2n}x+\dfrac{1}{n^2}$, а) $0\le x\le\pi$; б) $\delta\le x<\pi-\delta$, $\delta>0$.

23.4. Исследовать характер сходимости следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$, а) на интервале $|x|<q$, где $q<1$; б) на интервале $|x|<1$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$, на отрезке $-1\le x\le 1$.

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, на интервале $0<x<+\infty$.

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$, на отрезке $0\le x\le 1$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, на интервале $0<x<+\infty$.

23.5. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$, $-\infty<x<+\infty$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2<x<+\infty$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\le x<+\infty$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $-\infty<x<+\infty$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$, $\frac{1}{2}\le|x|\le 2$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n^4+x^4}}$, $-\infty<x<+\infty$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $-\infty<x<+\infty$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $-\infty<x<+\infty$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$, $0\le x<+\infty$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}$, $-\infty<x<+\infty$.

23.6. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$, если $a_0=0$, $a_1=1$ и коэффициенты $a_n$ удовлетворяют соотношениям $a_{n+2}+2na_{n+1}+\left(n^2-n+\frac{2}{9}\right)a_n=0$ при $n=0, 1, 2, \ldots$.

23.7. Доказать, что если $0\le x<1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n}=1-2x$. Найти сумму данного ряда при $x\ge 1$.

23.8. Является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x\frac{\left(1-x^2\right)^n}{n}$ равномерно сходящимся на отрезке $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$?

23.9. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\cos\left(n\left(x+\ln\ln n\right)\right)$ расходится при всех $x$.

23.10. Доказать, что существует бесконечно много положительных $x$, для которых сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ есть рациональное число.

## §24. Степенные ряды и их применения

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ называется *степенным рядом*. Для каждого ряда существует число $R$, которое называется *радиусом сходимости*. Ряд сходится в интервале $(a-R; a+R)$.

Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки $a$ раскладывается в степенной ряд, то этот ряд имеет вид:

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$ (*ряд Тейлора*).

Разложение в *ряд Маклорена* основных элементарных функций:

1) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $(x\in\mathbb{R})$;

2) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(x\in\mathbb{R})$;

3) $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(x\in\mathbb{R})$;

4) $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$, $(x\in(-1,1))$;

5) $(1+x)^m=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$, $(x\in(-1,1))$.

24.1. Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}5^n x^n$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(ax)^n$, $(a\neq 0)$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\ln n}$;

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}-\ln n}$;

7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2n+1}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}x^n$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n+1}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{n(x-5)^{n+1}}{(n+1)!}$;

14) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2}x^n \quad (0<\alpha<1)$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}}x^n \quad (a>1)$;

21) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^3}{(2n+1)!}\right)^p x^n$;

22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}, \ (a>0)$;

23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$;

24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$;

25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$;

26) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$;

27) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^4+1}$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n\cdot\sqrt[3]{n^2+1}}$;

29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\ln n}$;

30) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}(x+2)^{2n}$.

24.2. Пользуясь основными разложениями, написать разложения в степенной ряд относительно $x$ следующих функций:

1) $e^{-x^2}$;

2) $\cos^2 x$;

3) $\frac{x}{1-x}$;

4) $\frac{x^{10}}{1-x}$;

5) $\frac{1}{(1-x)^2}$;

6) $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$;

7) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

8) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$;

9) $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$;

10) $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$;

11) $\dfrac{1}{1-x-x^2}$;

12) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$;

13) $\dfrac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}$;

14) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

24.3. Разложив предварительно производные, путем почленного интегрирования получить разложения в степенной ряд следующих функций:

1) $f(x)=\operatorname{arctg}x$;

2) $f(x)=\arcsin x$;

3) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

4) $f(x)=\ln\left(1-2x\cos\alpha+x^2\right)$.

24.4. Применяя различные методы, найти разложение в степенной ряд следующих функций:

1) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$;

2) $f(x)=\arccos\left(1-2x^2\right)$;

3) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$;

4) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}$.

24.5. Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

1) $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\ldots$;

2) $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots$;

3) $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots$;

4) $1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots$;

5) $\dfrac{x}{1\cdot 2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3}+\dfrac{x^3}{3\cdot 4}-\ldots$;

6) $1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3\ldots$.

24.6. Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

1) $x+2x^2+3x^3+\ldots$;

2) $x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots$.

24.7. Пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена функций $e^x$, $\sin x$ и $\cos x$, вычислить указанные выражения:

1) $e^2$ с точностью до 0,001;

2) $e^{-1}$ с точностью до 0,001;

3) $e^{-1/4}$ с точностью до 0,0001;

4) $\sin 1^0$ с точностью до 0,0001;

5) $\cos 1^0$ с точностью до 0,001;

6) $\sin 10^0$ с точностью до 0,00001;

7) $\cos 10^0$ с точностью до 0,0001;

8) $\sin 0{,}5$ с точностью до 0,001.

24.8. Пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена функции $(1+x)^m$, вычислить указанные корни с точностью до 0,001:

1) $\sqrt[3]{30}$; 2) $\sqrt[3]{4}$; 3) $\sqrt[3]{128}$;

4) $\sqrt[6]{10}$; 5) $\sqrt[5]{15}$; 6) $\sqrt[8]{516}$;

7) $\sqrt[4]{2000}$; 8) $\sqrt{2000}$; 9) $\sqrt[10]{1027}$.

24.9. Вычислить с точностью до 0,001 интегралы:

1) $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$;

3) $\int\limits_{0}^{0,8} x^{10}\sin x dx$; 4) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$;

5) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{\sin x}{x}dx$; 6) $\int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}dx$;

7) $\int\limits_{2}^{3} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx$; 8) $\int\limits_{0}^{0,5} \sqrt{x}e^{x}dx$.

## §25. Индивидуальные задания по теме «Пределы»

1. Исходя из определения предела, доказать:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x-4}=7$; <br> б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2^x-1}=\infty$. | 2. | а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{1-x}=-2$; <br> б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+x)}=\infty$. |
| 3. | а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{1-x}=-2$; <br> б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{\pi x}{6}=0$. | 4. | а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}=10$; <br> б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{2^x-1}=\infty$. |
| 5. | а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{4x+3}=\dfrac{1}{2}$; <br> б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin(\pi x)}{x^2+1}=0$. | 6. | а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}=4$; <br> б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{1-3^x}=\infty$. |
| 7. | а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}=6$; <br> б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\pi x=0$. | 8. | а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$; <br> б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\ln(1-x)}=\infty$. |
| 9. | а) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}=49$; <br> б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}=1$. | 10. | а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{x+3}=2$; <br> б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-2x+1}=\infty$. |
| 11. | а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+7}}=\dfrac{1}{3}$; <br> б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1}\cos\dfrac{\pi}{x}=0$. | 12. | а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$; <br> б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x}=\infty$. |
| 13. | а) $\lim\limits_{x\to 2-0}2^{\frac{1}{x-2}}=0$; <br> б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x+2}=-5$. | 14. | а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{3^{x-1}-1}=\infty$; <br> б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x}{1-x}=3$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15. | а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=-1$;<br>б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}\sin\left(\pi x^2\right)=0$. | 16. | а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5x^2-24x-5}{x-5}=26$;<br>б) $\lim\limits_{x\to -2+0}4^{\frac{1}{x+2}}=0$. |
| 17. | а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x+1}{x^2+2}=\frac{1}{2}$;<br>б) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x-1}}=1$. | 18. | а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=0$;<br>б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}=0$. |
| 19. | а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x+5}{x^2-25}=\infty$;<br>б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4x+1}}=0$. | 20. | а) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{3x^2-40x+128}{x-8}=8$;<br>б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}\sin\frac{\pi}{x}=0$. |

2. Доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела при $x\to x_0$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $f(x)=\sin\frac{\pi}{x-2}$, $x_0=2$. | 2. | $f(x)=\sin\frac{\pi}{x-3}$, $x_0=3$. |
| 3. | $f(x)=1-2\cos\frac{\pi}{x}$, $x_0=0$. | 4. | $f(x)=\cos\frac{\pi}{x-2}$, $x_0=2$. |
| 5. | $f(x)=\cos\frac{\pi}{x-1}$, $x_0=1$. | 6. | $f(x)=1+\sin\frac{\pi}{x}$, $x_0=0$. |
| 7. | $f(x)=2\sin\frac{\pi}{x+1}$, $x_0=-1$. | 8. | $f(x)=\cos\frac{1}{x-5}$, $x_0=5$. |
| 9. | $f(x)=1+\cos\frac{1}{x}$, $x_0=0$. | 10. | $f(x)=\sin\frac{1}{x-5}$, $x_0=5$. |
| 11. | $f(x)=\sin\frac{\pi}{2x}$, $x_0=0$. | 12. | $f(x)=\sin\frac{\pi}{x+3}$, $x_0=-3$. |
| 13. | $f(x)=\sin\frac{1}{x+2}$, $x_0=-2$. | 14. | $f(x)=1-\cos\frac{\pi}{x-1}$, $x_0=1$. |
| 15. | $f(x)=1+\sin\frac{\pi}{x-1}$, $x_0=1$. | 16. | $f(x)=1+2\cos\frac{1}{x-3}$, $x_0=3$. |
| 17. | $f(x)=2\cos\frac{2}{x-3}$, $x_0=3$. | 18. | $f(x)=\cos\frac{1}{x+3}$, $x_0=-3$. |
| 19. | $f(x)=\cos\frac{2}{x-2}$, $x_0=2$. | 20. | $f(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{x}-2$, $x_0=0$. |

3. Исходя из определения непрерывности, убедиться, что функция $f(x)$ непрерывна на всей области определения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $f(x)=x^3+3x+2$. | 2. | $f(x)=\cos 2x$. |
| 3. | $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$. | 4. | $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$. |
| 5. | $f(x)=e^{x+1}$. | 6. | $f(x)=x^2+3x-2$. |
| 7. | $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$. | 8. | $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$. |
| 9. | $f(x)=\ln(x-2)$. | 10. | $f(x)=e^{3x}$. |
| 11. | $f(x)=x+e^x$. | 12. | $f(x)=\sin(x+1)$. |
| 13. | $f(x)=\cos(x^2)$. | 14. | $f(x)=1+\sin(x^2)$. |
| 15. | $f(x)=e^{3x}+\sin x$. | 16. | $f(x)=e^{2x}-x^2$. |
| 17. | $f(x)=4-\operatorname{tg}(2x)$. | 18. | $f(x)=x^4+3x^2-1$. |
| 19. | $f(x)=x^3+3x+\sin x$. | 20. | $f(x)=x-\sin x$. |

4. Вычислить пределы:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^3-2x-1)}{x^4+4x^2-5}$; | б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; |
| | в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin(4x-4\pi)}$; | г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$; |
| | д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg} x}$; | е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln(1+x^3)\right)^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}$; |
| | ж) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{2^{\cos 2x}-1}{\ln\sin x}$; | з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$. |
| 2. | а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$; | б) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; |
| | в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi x+7\pi)}$; | г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln 2x-\ln 2\pi}{\sin\left(\dfrac{5x}{2}\right)\cos x}$; |

| | | |
|---|---|---|
| | д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{x}}{x-\sin 9x}$; | е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{x^2}\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+tg^2\left((\pi x)/3\right)\right)}}$; |
| | ж) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$; | з) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$. |
| 3. | а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; | б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; |
| | в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10(x+\pi)}{e^{x^2}-1}$; | г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$; |
| | д) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$; | е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$; |
| | ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$; | з) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$. |
| 4. | а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$; | б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; |
| | в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x}{\arcsin 2x^2}$; | г) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$; |
| | д) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$; | е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\operatorname{arctg}x-\sin x}$; |
| | ж) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$; | з) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\arcsin(x-3)}{\sin 3\pi x}\right)^{x^2-8}$. |
| 5. | а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; | б) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; |
| | в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$; | г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$; |
| | д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x-\sqrt[3]{2x-3}\right)}{\sin(\pi x/2)-\sin(\pi x)}$; | е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$; |
| | ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; | з) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\left(\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}\right)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$. |

| | |
|---|---|
| 6. | а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; <br> в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$; <br> д) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\operatorname{tg}2x}}{\ln(2x/\pi)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^{x}-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$; <br> ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[5]{x}-1}}$. |
| 7. | а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-4\right)^2}}$; <br> в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$; <br> д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2}{\sin\ln(x-1)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$; <br> ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}}$; з) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$. |
| 8. | а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}$; <br> в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\sin 2\pi x}$; <br> д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\left(e^{x+2}-e^{x^2-4}\right)}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$; <br> ж) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$. |
| 9. | а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}}$; <br> в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg}x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$; |

| | |
|---|---|
| | д) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{e^{\operatorname{tg}2x}-e^{-\sin 2x}}{\sin x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg}x+x^3}$; <br> ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$; з) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}$. |
| 10. | а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; <br> в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$; <br> д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{arctg}x-x^2}$; <br> ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; з) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$. |
| 11. | а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$; <br> в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}(\pi(1+2x))}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{(x-\pi)^4}$; <br> д) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$; <br> ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$. |
| 12. | а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$; <br> в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2\pi}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$; <br> д) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^3}$; <br> ж) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}\right)^{\frac{x^2}{a^2}}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$. |

| | |
|---|---|
| 13. | а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$; д) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{(x-2\pi)^2}{\lg(\cos x-1)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{3}{x}}$; з) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{x}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$. |
| 14. | а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$; д) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^{7x}}{\operatorname{tg}3x-x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{\frac{1}{x}}$; з) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$. |
| 15. | а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{\left(e^{\sin^2 x}-1\right)^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin\pi x}}$; з) $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin 4x}}$. |
| 16. | а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{1-\cos 2x}{\pi-3x}$; |

| | |
|---|---|
| | д) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\mathrm{tg}2x-\sin x}$; <br> ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$. |
| 17. | а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$; <br> в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}2x}{\sin\left(2\pi(x+10)\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$; <br> д) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\cos 2x}{\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-2x}}{\sin 3x-\mathrm{tg}2x}$; <br> ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\mathrm{ctg}\,x}$; з) $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{5}{\mathrm{tg}5x\sin 2x}}$. |
| 18. | а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$; <br> в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$; <br> д) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x^2-a^2}}{\mathrm{tg}\ln(x/a)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\mathrm{tg}2x-\mathrm{arctg}\,x}$; <br> ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+\pi x^3\right)}}$; з) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$. |
| 19. | а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{9-8x}-1}{x-1}$; <br> в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{2-\sqrt{2x^2+4}}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{arctg}\left(x^2-2x\right)}{\sin 3\pi x}$; <br> д) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\cos x}{3^{\sin 2x}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-2^{3x}}{\mathrm{arctg}2x-7x}$; <br> ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{\mathrm{ctg}\pi x}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$. |

| | |
|---|---|
| 20. | а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{17-8x}-1}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos(x/2)}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\operatorname{tg} x^2+x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$. |

5. Сравнить бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\alpha(x)=1+\cos 3x$, $\beta(x)=\sin^2 7x$, $x_0=\pi$. | 2. | $\alpha(x)=a^x-a^{-x}$, $\beta(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=0$. |
| 3. | $\alpha(x)=\ln\left(1+\sqrt{x^2\operatorname{tg} x}\right)$, $\beta(x)=x$, $x_0=0$. | 4. | $\alpha(x)=e^{\sqrt{x^3}}$, $\beta(x)=1-\cos(\sin x)$, $x_0=0$. |
| 5. | $\alpha(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}-1$, $\beta(x)=x$, $x_0=0$. | 6. | $\alpha(x)=\sin\left(\sqrt{9+x}-3\right)$, $\beta(x)=x$, $x_0=0$. |
| 7. | $\alpha(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$, $\beta(x)=x$, $x_0=0$. | 8. | $\alpha(x)=\ln\left(1+\sqrt{x^3}\right)$, $\beta(x)=x$, $x_0=0$. |
| 9. | $\alpha(x)=1-\cos\sqrt{x}$, $\beta(x)=x$, $x_0=0$. | 10. | $\alpha(x)=1-\cos\sqrt[3]{x^2}$, $\beta(x)=x$, $x_0=0$. |
| 11. | $\alpha(x)=\ln(x-3)$, $\beta(x)=x^2-5x+4$, $x_0=4$. | 12. | $\alpha(x)=\ln(x-6)$, $\beta(x)=\sqrt[3]{8-x}-1$, $x_0=7$. |
| 13. | $\alpha(x)=\ln\cos x$, $\beta(x)=3^{\sin x}-1$, $x_0=2\pi$. | 14. | $\alpha(x)=\cos^2 3x-1$, $\beta(x)=\sin^2 2x$, $x_0=\pi$. |
| 15. | $\alpha(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $\beta(x)=2-2\sqrt{x}$, $x_0=1$. | 16. | $\alpha(x)=\dfrac{x-4}{x+4}$, $\beta(x)=2-\sqrt{x}$, $x_0=4$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17. | $\alpha(x)=\dfrac{4-x^2}{2+x}$, $\beta(x)=\ln(3-x)$, $x_0=2$. | 18. | $\alpha(x)=\dfrac{9-x^2}{3+x}$, $\beta(x)=\ln(4-x)$, $x_0=3$. |
| 19. | $\alpha(x)=(10x+1)^{x-10}-1$, $\beta(x)=\ln(11-x)$, $x_0=10$. | 20. | $\alpha(x)=(100x+1)^{x-100}-1$, $\beta(x)=\ln(101-x)$, $x_0=100$. |

6. Исследовать на непрерывность, выяснить характер точек разрыва и изобразить графически следующие функции:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | а) $y(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4}, x<-2;\\ \lvert x-3\rvert, x\ge -2.\end{cases}$ б) $y(x)=\dfrac{1}{2^x-1}$. | 2. | а) $y(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4}, x<-3;\\ \lvert x-4\rvert, x\ge -3.\end{cases}$ б) $y(x)=\dfrac{1}{3^x-1}$. |
| 3. | а) $y(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, x\le 0;\\ 2, 0<x\le 2;\\ x^2+3, x>2.\end{cases}$ б) $y(x)=2-3^{\frac{x+1}{x}}$. | 4. | а) $y(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le 1;\\ 2x, 1<x\le 3;\\ x+3, x>3.\end{cases}$ б) $y(x)=1-2^{\frac{x-2}{x}}$. |
| 5. | а) $y(x)=\begin{cases}x-3, x<0;\\ x+1, 0\le x\le 4;\\ 3+\sqrt{x}, x>4.\end{cases}$ б) $y(x)=1-\dfrac{1}{x+2}$. | 6. | а) $y(x)=\begin{cases}x^2, x<0;\\ 1-x, 0\le x<1;\\ \ln x, x\ge 1.\end{cases}$ б) $y(x)=\left(1+8^{\frac{1}{3-x}}\right)^{-1}$. |
| 7. | а) $y(x)=\begin{cases}-1, x\le 0;\\ 2\sin x, 0<x\le \pi/2;\\ \dfrac{\pi+4}{2}-x, x>\pi/2.\end{cases}$ б) $y(x)=1+2^{\frac{1}{3x-2}}$. | 8. | а) $y(x)=\begin{cases}e^x, x\le 0;\\ \sin x, 0<x\le \pi/2;\\ \ln(x-\pi/2), x>\pi/2.\end{cases}$ б) $y(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$. |
| 9. | а) $y(x)=\dfrac{x\lvert a-x\rvert}{a-x}$. б) $y(x)=2+\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}$. | 10. | а) $y(x)=\dfrac{\lvert x-2\rvert}{x-2}-\dfrac{1}{x}$. б) $y(x)=-1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}}$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11. | а) $y(x)=\begin{cases} x-3, \ x<0; \\ 2x, \ 0\le x<3; \\ x^2-6x+5, \ x\ge 3. \end{cases}$<br>б) $y(x)=2^{-\frac{1}{x-1}}-1.$ | 12. | а) $y(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, \ x\ne 0; \\ 0, \ x=0. \end{cases}$<br>б) $y(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$ |
| 13. | а) $y(x)=\begin{cases} \lvert x-3\rvert, \ x\le 2; \\ \frac{2}{x}, \ x>2. \end{cases}$<br>б) $y(x)=2^{-\frac{1}{x}}.$ | 14. | а) $y(x)=\begin{cases} x\cdot\cos\frac{1}{x}, \ x\ne 0; \\ 0, \ x=0. \end{cases}$<br>б) $y(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}.$ |
| 15. | а) $y(x)=\begin{cases} e^{2x}, \ x\le 0; \\ \ln x, \ 0<x\le 100; \\ -2\sqrt{x}, \ x>100. \end{cases}$<br>б) $y(x)=4^{\frac{1}{2-x}}.$ | 16. | а) $y(x)=\begin{cases} e^{x}+1, \ x<0; \\ \lvert x-2\rvert, \ x\ge 0. \end{cases}$<br>б) $y(x)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}.$ |
| 17. | а) $y(x)=\begin{cases} x, \ x<0; \\ 2x+3, \ 0\le x<5; \\ \sqrt{x}, \ x\ge 5. \end{cases}$<br>б) $y(x)=\frac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}.$ | 18. | а) $y(x)=\begin{cases} x-3, \ x<0; \\ x+1, \ 0\le x\le 4; \\ 4+\sqrt{x}, \ x>4. \end{cases}$<br>б) $y(x)=\frac{3^{\frac{1}{1-x}}-1}{3^{\frac{1}{1-x}}+1}.$ |
| 19. | а) $y(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}, \ x\le 0; \\ 2x, \ 0<x\le 3; \\ x^2-3, \ x>3. \end{cases}$<br>б) $y(x)=1-2^{\frac{x+1}{x}}.$ | 20. | а) $y(x)=\begin{cases} \lvert x-2\rvert, \ x\le 0; \\ x+2, \ 0<x\le 4; \\ 4-\sqrt{x}, \ x>4. \end{cases}$<br>б) $y(x)=1-2^{\frac{1}{x+2}}.$ |

## §26. Индивидуальные задания по теме «Дифференцирование функций»

1. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $f(x)=\begin{cases}\mathrm{tg}\left(x^3+x^2\sin\frac{2}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ | 2. | $f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{3}x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ |
| 3. | $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}\left(x\cos\frac{1}{5x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ | 4. | $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-\sin\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ |
| 5. | $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x\sin\frac{3}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ | 6. | $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{4}{3x}+\frac{x^2}{2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ |
| 7. | $f(x)=\begin{cases}\sin\left(e^{x^2\sin\frac{5}{x}}-1\right)+x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ | 8. | $f(x)=\begin{cases}\sin x\cdot\cos\frac{5}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ |
| 9. | $f(x)=\begin{cases}x+\arcsin\left(x^2\sin\frac{6}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ | 10. | $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}x\cdot\sin\frac{7}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ |
| 11. | $f(x)=\begin{cases}2x^2+x^2\cos\frac{1}{9x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ | 12. | $f(x)=\begin{cases}x^2\cos^2\frac{11}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ |
| 13. | $f(x)=\begin{cases}2x^2+x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ | 14. | $f(x)=\begin{cases}6x+x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ |
| 15. | $f(x)=\begin{cases}e^{x\sin\frac{5}{x}}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ | 16. | $f(x)=\begin{cases}3^{x^2\sin\frac{2}{x}}-1+2x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ |
| 17. | $f(x)=\begin{cases}e^{x\sin\frac{3}{5x}}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ | 18. | $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}\left(\frac{3x}{2}-x^2\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ |
| 19. | $f(x)=\begin{cases}x^2e^{\|x\|}\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ | 20. | $f(x)=\begin{cases}1-\cos\left(x\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ |

2. Найти производные следующих функций:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | а) $y=\dfrac{2\left(3x^3+4x^2-x-2\right)}{15\sqrt{1+x}}$; <br> в) $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$; <br> д) $y=\dfrac{1}{4\sqrt{5}}\ln\dfrac{2+\sqrt{5}\,\mathrm{th}\,x}{2-\sqrt{5}\,\mathrm{th}\,x}$; | б) $y=\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right)-\sqrt{x+a}$; <br> г) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x}{\sqrt{2}}$; <br> е) $y=\left(\mathrm{arctg}\,x\right)^{(1/2)\ln(\mathrm{arctg}\,x)}$. |
| 2. | а) $y=\dfrac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$; <br> в) $y=\cos\ln 2-\dfrac{1}{3}\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$; <br> д) $y=\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{4\,\mathrm{ch}^4 x}+\dfrac{3\,\mathrm{sh}\,x}{8\,\mathrm{ch}^2 x}+\dfrac{3}{8}\mathrm{arctg}(\mathrm{sh}\,x)$; | б) $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$; <br> г) $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$; <br> е) $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)}$. |
| 3. | а) $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2\left(x^2-4\right)}$; <br> в) $y=\mathrm{tg}\lg\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$; <br> д) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{\mathrm{th}\,x}}{1-\sqrt{\mathrm{th}\,x}}-\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{th}\,x}$; | б) $y=2\sqrt{x}-4\ln\left(2+\sqrt{x}\right)$; <br> г) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; <br> е) $y=(\sin x)^{5e^x}$. |
| 4. | а) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$; <br> в) $y=\mathrm{ctg}\sqrt[3]{5}-\dfrac{1}{8}\dfrac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$; <br> д) $y=\dfrac{3}{8\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{th}\,x}{\sqrt{2}-\mathrm{th}\,x}-\dfrac{\mathrm{th}\,x}{4\left(2-\mathrm{th}^2 x\right)}$; | б) $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$; <br> г) $y=\arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$; <br> е) $y=(\arcsin x)^{e^x}$. |
| 5. | а) $y=\dfrac{\left(1+x^8\right)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$; <br> в) $y=\dfrac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$; <br> д) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{th}\,x+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,x}{1-\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,x}$; | б) $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$; <br> г) $y=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\mathrm{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}$; <br> е) $y=(\ln x)^{3^x}$. |

| | | |
|---|---|---|
| 6. | а) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$; | б) $y=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$; |
| | в) $y=\dfrac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$; | г) $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$; |
| | д) $y=-\dfrac{1}{2}\ln\left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2 x}$; | е) $y=x^{\arcsin x}$. |
| 7. | а) $y=\dfrac{\left(x^2-6\right)\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}{120x^5}$; | б) $y=\ln^2\left(x+\cos x\right)$; |
| | в) $y=\dfrac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$; | г) $y=\dfrac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2}+\dfrac{1}{3x\sqrt{x}}$; |
| | д) $y=\dfrac{1}{2a\sqrt{1+a^2}}\ln\dfrac{a+\sqrt{1+a^2}\operatorname{th}x}{a-\sqrt{1+a^2}\operatorname{th}x}$; | е) $y=\left(\operatorname{ctg}3x\right)^{2e^x}$. |
| 8. | а) $y=\dfrac{\left(x^2-8\right)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$; | б) $y=\ln^3\left(1+\cos x\right)$; |
| | в) $y=\cos\left(\operatorname{ctg}2\right)-\dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$; | г) $y=\dfrac{x^3}{3}\arccos x-\dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$; |
| | д) $y=\dfrac{1}{18\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{cth}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{cth}x}$; | е) $y=x^{e^{\operatorname{tg}x}}$. |
| 9. | а) $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}$; | б) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$; |
| | в) $y=\operatorname{ctg}\left(\cos 2\right)+\dfrac{1}{6}\dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$; | г) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; |
| | д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}2x}}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}$; | е) $y=\left(\operatorname{tg}x\right)^{4e^x}$. |
| 10. | а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{\left(1+x^{3/4}\right)^2}{x^{3/2}}}$; | б) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$; |
| | в) $y=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}2}-\dfrac{1}{20}\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$; | г) $y=\dfrac{3+x}{2}\sqrt{x\left(2-x\right)}+3\arccos\sqrt{\dfrac{x}{2}}$; |
| | д) $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{1-\operatorname{sh}2x}{2+\operatorname{sh}2x}$; | е) $y=\left(\cos 5x\right)^{e^x}$. |

| | |
|---|---|
| 11. | а) $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$; <br> в) $y=\dfrac{1}{3}\cos\left(\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{10}\dfrac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$; г) $y=\dfrac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{x}$; <br> д) $y=\sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}}$; е) $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$. |
| 12. | а) $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$; б) $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+a^{\pi^{\sqrt{2}}}$; <br> в) $y=\ln\sin\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{24}\dfrac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$; г) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; <br> д) $y=\dfrac{1+8\operatorname{ch}^2 x\cdot\ln(\operatorname{ch}x)}{2\operatorname{ch}^2 x}$; е) $y=(x-5)^{\operatorname{ch}x}$. |
| 13. | а) $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; б) $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$; <br> в) $y=8\sin(\operatorname{ctg}3)+\dfrac{1}{5}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$; г) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}-\dfrac{\arccos x}{2x^2}$; <br> д) $y=-\dfrac{12\operatorname{sh}^2 x+1}{3\operatorname{sh}^2 x}$; е) $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg}x}$. |
| 14. | а) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$; б) $y=\log_{16}\log_5\operatorname{tg}x$; <br> в) $y=\dfrac{\cos(\operatorname{ctg}3)\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x}$; г) $y=6\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}$; <br> д) $y=-\dfrac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\dfrac{3}{2}\arcsin(\operatorname{th}x)$; е) $y=x^{\sin x^3}$. |
| 15. | а) $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$; б) $y=\log_4\log_2\operatorname{tg}x$; <br> в) $y=\dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$; г) $y=\dfrac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x}$; <br> д) $y=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\arcsin\dfrac{3+\operatorname{ch}x}{1+3\operatorname{ch}x}$; е) $y=(x^2-1)^{\operatorname{sh}x}$. |

| | |
|---|---|
| 16. | а) $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$; б) $y=\ln\cos\dfrac{2x+3}{x+1}$; <br> в) $y=\dfrac{\operatorname{tg}(\ln 2)\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x}$; г) $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$; <br> д) $y=-\dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{5+3\operatorname{ch}x}{3+5\operatorname{ch}x}$; е) $y=\left(x^4+5\right)^{\operatorname{ctg}x}$. |
| 17. | а) $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$; б) $y=\lg\ln(\operatorname{ctg}x)$; <br> в) $y=\operatorname{ctg}(\cos 5)-\dfrac{1}{40}\dfrac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$; г) $y=\operatorname{arctg}x+\dfrac{5}{6}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$; <br> д) $y=\dfrac{1-8\operatorname{ch}^2 x}{4\operatorname{ch}^4 x}$; е) $y=(\sin x)^{5x/2}$. |
| 18. | а) $y=\left(1-x^2\right)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}}$; б) $y=\log_a\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$; <br> в) $y=\sqrt{\operatorname{tg}4}+\dfrac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$; г) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$; <br> д) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)-\dfrac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}$; е) $y=19^{x^{19}}x^{19}$. |
| 19. | а) $y=\dfrac{\left(2x^2+3\right)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$; б) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$; <br> в) $y=\cos(\ln 13)-\dfrac{1}{44}\dfrac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$; г) $y=\sqrt{1-x^2}-x\arcsin\sqrt{1-x^2}$; <br> д) $y=\dfrac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)$; е) $y=x^{3^x}\cdot 2^x$. |
| 20. | а) $y=\dfrac{x-1}{\left(x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}$; б) $y=\ln\left(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right)$; <br> в) $y=\ln\cos\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$; г) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$; <br> д) $y=\dfrac{2}{3}\operatorname{cth}x-\dfrac{\operatorname{ch}x}{3\operatorname{sh}^3 x}$; е) $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}$. |

3. Составить уравнение нормали и касательной к данным кривым в точке с абсциссой $x_0$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | а) $y=\left(4x-x^2\right)/4,\quad x_0=2$; <br> б) $\begin{cases} x=a\sin^3 t, \\ y=a\cos^3 t, \quad t_0=\pi/3. \end{cases}$ | 2. | а) $y=2x^2+3x-1,\quad x_0=-2$; <br> б) $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sin t, \quad t_0=\pi/3. \end{cases}$ |
| 3. | а) $y=x-x^3,\quad x_0=-1$; <br> б) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \quad t_0=\pi/3. \end{cases}$ | 4. | а) $y=x^2+8\sqrt{x}-32,\quad x_0=4$; <br> б) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3, \quad t_0=1. \end{cases}$ |
| 5. | а) $y=x+\sqrt{x^3},\quad x_0=1$; <br> б) $\begin{cases} x=t(t\cos t-2\sin t), \\ y=t(t\sin t+2\cos t), \quad t_0=\pi/4. \end{cases}$ | 6. | а) $y=\sqrt[3]{x^2}-20,\quad x_0=-8$; <br> б) $\begin{cases} x=2\ln(\mathrm{ctg}\, t)+\mathrm{ctg}\, t, \\ y=\mathrm{tg}\, t+\mathrm{ctg}\, t, \quad t_0=\pi/4. \end{cases}$ |
| 7. | а) $y=8\sqrt[4]{x}-70,\quad x_0=16$; <br> б) $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t, \quad t_0=\pi/2. \end{cases}$ | 8. | а) $y=2x^2-3x+1,\quad x_0=1$; <br> б) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t, \quad t_0=\pi/6. \end{cases}$ |
| 9. | а) $y=\left(x^2-3x+6\right)/x^2,\quad x_0=3$; <br> б) $\begin{cases} x=a\sin^3 t, \\ y=a\cos^3 t, \quad t_0=\pi/6. \end{cases}$ | 10. | а) $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x},\quad x_0=64$; <br> б) $\begin{cases} x=a(t\sin t+\cos t), \\ y=a(\sin t-t\cos t), \quad t_0=\pi/4. \end{cases}$ |
| 11. | а) $y=\left(x^3+2\right)/\left(x^3-2\right),\quad x_0=2$; <br> б) $\begin{cases} x=\sin^3 t, \\ y=\cos^3 t, \quad t_0=\pi/6. \end{cases}$ | 12. | а) $y=2x^2+3,\quad x_0=-1$; <br> б) $\begin{cases} x=2(t\sin t+\cos t), \\ y=2(\sin t-t\cos t), \quad t_0=\pi/4. \end{cases}$ |
| 13. | а) $y=3\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}\right),\quad x_0=1$; <br> б) $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3, \quad t_0=2. \end{cases}$ | 14. | а) $y=1/(3x+2),\quad x_0=2$; <br> б) $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t-\mathrm{arctg}\, t, \quad t_0=1. \end{cases}$ |
| 15. | а) $y=x/\left(x^2+1\right),\quad x_0=-2$; <br> б) $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t, \quad t_0=0. \end{cases}$ | 16. | а) $y=\left(x^2-3x+3\right)/3,\quad x_0=3$; <br> б) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=4\sin t, \quad t_0=\pi/4. \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17. | а) $y=2x/\left(x^2+1\right),\quad x_0=1$;<br>б) $\begin{cases} x=t-t^4, \\ y=t^2-t^3, \quad t_0=1. \end{cases}$ | 18. | а) $y=-2\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right),\quad x_0=1$;<br>б) $\begin{cases} x=2\operatorname{tg}t, \\ y=2\sin^2 t+\sin 2t, \quad t_0=\pi/4. \end{cases}$ |
| 19. | а) $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2,\quad x_0=1$;<br>б) $\begin{cases} x=t^3+1, \\ y=t^2+t+1, \quad t_0=1. \end{cases}$ | 20. | а) $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x},\quad x_0=1$;<br>б) $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=\sin t, \quad t_0=-\pi/3. \end{cases}$ |

4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $y=\sqrt[3]{x},\quad x=7{,}76.$ | 2. | $y=x^7,\quad x=2{,}002.$ |
| 3. | $y=\sqrt[3]{x^3+7x},\quad x=1{,}012.$ | 4. | $y=\sqrt{4x-3},\quad x=1{,}78.$ |
| 5. | $y=\left(x+\sqrt{5-x^2}\right)/2,\quad x=0{,}98.$ | 6. | $y=\sqrt{1+x+\sin x},\quad x=0{,}01.$ |
| 7. | $y=\sqrt[3]{x},\quad x=27{,}54.$ | 8. | $y=\sqrt[3]{3x+\cos x},\quad x=0{,}01.$ |
| 9. | $y=\arcsin x,\quad x=0{,}08.$ | 10. | $y=\sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)},\quad x=1{,}02.$ |
| 11. | $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5},\quad x=0{,}97.$ | 12. | $y=\sqrt{x^2+5},\quad x=1{,}97.$ |
| 13. | $y=\sqrt[3]{x},\quad x=26{,}46.$ | 14. | $y=1/\sqrt{2x+1},\quad x=1{,}58.$ |
| 15. | $y=\sqrt{x^2+x+3},\quad x=1{,}97.$ | 16. | $y=1/\sqrt{x},\quad x=4{,}16.$ |
| 17. | $y=x^{11},\quad x=1{,}021.$ | 18. | $y=1/\sqrt{2x^2+x+1},\quad x=1{,}016.$ |
| 19. | $y=\sqrt[3]{x},\quad x=1{,}21.$ | 20. | $y=\sqrt{4x-1},\quad x=2{,}56.$ |

5. Найти производную второго порядка $y''_{xx}$ от функции, заданной параметрически и неявно:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | а) $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=2\sec^2 t. \end{cases}$<br>б) $y^2=8x$. | 2. | а) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\operatorname{arctg}t. \end{cases}$<br>б) $y=x+\operatorname{arctg}y$. |
| 3. | а) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=1/t. \end{cases}$<br>б) $y^2=25x^2-4$. | 4. | а) $\begin{cases} x=\cos t+\sin t, \\ y=\sin 2t. \end{cases}$<br>б) $y^2-x=\cos y$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5. | а) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t, \\ y = \mathrm{e}^t \sin t. \end{cases}$<br>б) $\operatorname{arctg} y = 4x + 5y$. | 6. | а) $\begin{cases} x = 1/t^2, \\ y = 1/\left(t^2+1\right). \end{cases}$<br>б) $3x + \sin y = 5y$. |
| 7. | а) $\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = 1/\operatorname{ch}^2 t. \end{cases}$<br>б) $y^2 + x^2 = \sin y$. | 8. | а) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$<br>б) $y = e^y + 4x$. |
| 9. | а) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$<br>б) $4\sin^2(x+y) = x$. | 10. | а) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$<br>б) $\operatorname{tg} y = 4y - 5x$. |
| 11. | а) $\begin{cases} x = \cos t/(1+2\cos t), \\ y = \sin t/(1+2\cos t). \end{cases}$<br>б) $xy^2 - y^3 = 4x - 5$. | 12. | а) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$<br>б) $x^4 + y^2x^2 + y = 4$. |
| 13. | а) $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$<br>б) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$. | 14. | а) $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$<br>б) $\ln y - y/x = 5$. |
| 15. | а) $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$<br>б) $xy - 6 = \cos y$. | 16. | а) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^2/2. \end{cases}$<br>б) $3y = 4 + xy^3$. |
| 17. | а) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$<br>б) $y^2 = (x-y)/(x+y)$. | 18. | а) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4(t/2). \end{cases}$<br>б) $\operatorname{ctg}^2(x+y) = 5x$. |
| 19. | а) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$<br>б) $xy = \operatorname{ctg} y$. | 20. | а) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$<br>б) $x^y = 4x$. |

## §27. Индивидуальные задания по теме «Исследование и построение графиков функций»

Провести полное исследование функции, построить ее график.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | а) $y(x)=\dfrac{12}{x^2-4}$; <br> б) $y(x)=x+\dfrac{\ln x}{x}$. | 2. | а) $y(x)=x-\ln x$; <br> б) $y(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$. |
| 3. | а) $y(x)=x+\dfrac{4}{x+2}$; <br> б) $y(x)=x^2\sqrt{x+1}$. | 4. | а) $y(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$; <br> б) $y(x)=\ln(4-x^2)$. |
| 5. | а) $y(x)=2-\dfrac{1}{x^2}$; <br> б) $y(x)=x+2\operatorname{arcctg} x$. | 6. | а) $y(x)=\dfrac{1-x^3}{x^2}$; <br> б) $y(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$. |
| 7. | а) $y(x)=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$; <br> б) $y(x)=(x^2-6x+3)e^{x-1}$. | 8. | а) $y(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; <br> б) $y(x)=\ln[(x^2-1)^2]$. |
| 9. | а) $y(x)=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; <br> б) $y(x)=5xe^{-x}$. | 10. | а) $y(x)=\dfrac{10x}{(1+x)^3}$; <br> б) $y(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$. |
| 11. | а) $y(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; <br> б) $y(x)=\dfrac{e^x}{2x}$. | 12. | а) $y(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{2(x+1)}$; <br> б) $y(x)=\sqrt{x}\ln x$. |
| 13. | а) $y(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}$; <br> б) $y(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}$. | 14. | а) $y(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$; <br> б) $y(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$. |
| 15. | а) $y(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}$; <br> б) $y(x)=\dfrac{1}{x^2e^x}$. | 16. | а) $y(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$; <br> б) $y(x)=1+e^{-x^2}$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17. | а) $y(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$;<br>б) $y(x)=x\ln x$. | 18. | а) $y(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}$;<br>б) $y(x)=xe^{1/x}$. |
| 19. | а) $y(x)=3\sqrt[3]{x}-x$;<br>б) $y(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. | 20. | а) $y(x)=5\dfrac{x+1}{x^2}$;<br>б) $y(x)=x+\ln(x^2-1)$. |

## §28. Индивидуальные задания по теме «Неопределенный интеграл»

Вычислить неопределенные интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | а) $\int\left(-6-x+x^2\right)\ln 5x dx$;<br>б) $\int\sqrt{48-x^2-8x}dx$;<br>в) $\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+20}}dx$;<br>г) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;<br>д) $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)\sqrt{x+1}}dx$;<br>е) $\int\frac{2x^2+31x+145}{(x-3)(x+5)^2}dx$;<br>ж) $\int\frac{\left(10x^2+4x-4\right)dx}{(3+x)\left(x^2-6x+10\right)}$;<br>з) $\int\frac{\cos x-3\sin x}{\cos x-3\sin x+3}dx$;<br>и) $\int\frac{-4\cos^2 x+3\sin x\cos x+5\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}dx$. | 2. | а) $\int 2e^{2x}\left(6+7x-x^2\right)dx$;<br>б) $\int\sqrt{x^2+2x-3}dx$;<br>в) $\int\frac{3+2x}{\sqrt{x^2-10x+9}}dx$;<br>г) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$;<br>д) $\int\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$;<br>е) $\int\frac{x^2+10x-35}{(3+x)(x-1)(x-4)}dx$;<br>ж) $\int\frac{\left(23x^2-14x-17\right)dx}{3(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}$;<br>з) $\int\frac{\cos x+2\sin x}{3\cos x-3\sin x+3}dx$;<br>и) $\int\frac{-2\cos^2 x+4\sin x\cos x+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}dx$. |
| 3. | а) $\int\left(-1+4x-x^2\right)\ln 9x dx$;<br>б) $\int\sqrt{48-x^2-2x}dx$;<br>в) $\int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-10x-11}}dx$;<br>г) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$;<br>д) $\int\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$;<br>е) $\int\frac{3x^2+14x+19}{(x-1)(x+2)^2}dx$; | 4. | а) $\int\left(-12-48x-27x^2\right)e^{-9x}dx$;<br>б) $\int\sqrt{x^2-4x-21}dx$;<br>в) $\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+10x+34}}dx$;<br>г) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$;<br>д) $\int\frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$;<br>е) $\int\frac{7x^2-27x-12}{(x-3)(x+2)(x-5)}dx$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ж) $\int \frac{\left(17x^2+34x+21\right)dx}{(x+1)\left(x^2+2x+5\right)}$;<br>з) $\int \frac{\cos x-3\sin x}{\cos x-3\sin x+3}dx$;<br>и) $\int \frac{-3\cos^2 x+2\sin x\cos x+3\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}dx$. | | ж) $\int \frac{\left(-x^2-20x+36\right)dx}{(3+2x)\left(x^2-6x+10\right)}$;<br>з) $\int \frac{\cos x+2\sin x}{3\cos x-3\sin x+3}dx$;<br>и) $\int \frac{-5\cos^2 x-\sin x\cos x+2\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}dx$. |
| 5. | а) $\int\left(-4+2x-7x^2\right)\ln 7x dx$;<br>б) $\int\sqrt{60-x^2+4x}dx$;<br>в) $\int \frac{2x+2}{\sqrt{5+6x+x^2}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$;<br>д) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$;<br>е) $\int \frac{x^2-19x-113}{(x-2)(x+5)^2}dx$;<br>ж) $\int \frac{4\left(2x^2+9x+15\right)dx}{(x+2)\left(x^2+6x+18\right)}$;<br>з) $\int \frac{(\cos x-2\sin x)dx}{3\cos x-\sin x+1}$;<br>и) $\int \frac{-3\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}dx$. | 6. | а) $\int\left(-29-64x-28x^2\right)e^{7x}dx$;<br>б) $\int\sqrt{x^2+8x+52}dx$;<br>в) $\int \frac{3+2x}{\sqrt{x^2+4x-21}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$;<br>д) $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$;<br>е) $\int \frac{x^2-6x+32}{(x+2)(x-5)(x-6)}dx$;<br>ж) $\int \frac{\left(-7x^2-4x+16\right)dx}{2(x-1)\left(x^2-4x+8\right)}$;<br>з) $\int \frac{(\cos x-\sin x)dx}{\cos x-\sin x+1}$;<br>и) $\int \frac{-2\cos^2 x+4\sin x\cos x+2\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}dx$. |
| 7. | а) $\int\left(-8+x+9x^2\right)\ln 5x dx$;<br>б) $\int\sqrt{35+2x-x^2}dx$;<br>в) $\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2+10x+74}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$; | 8. | а) $\int\left(14+42x-27x^2\right)e^{-9x}dx$;<br>б) $\int\sqrt{x^2-6x+13}dx$;<br>в) $\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x-48}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | д) $\int\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}dx$;<br>е) $\int\frac{4x^2+17x-23}{(x-3)(x+5)^2}dx$;<br>ж) $\int\frac{(-7x^2+8x-19)dx}{(x+1)(x^2-8x+25)}$;<br>з) $\int\frac{(\cos x+2\sin x)dx}{3\cos x-3\sin x+3}$;<br>и) $\int\frac{-6\cos^2 x-4\sin x\cos x+2\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}dx$. | | д) $\int\frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$;<br>е) $\int\frac{-2(3x^2-6x-10)}{(x+3)(x-2)(x-4)}dx$;<br>ж) $\int\frac{(11x^2-28x+4)dx}{3(1-x)(x^2-8x+20)}$;<br>з) $\int\frac{(\cos x-2\sin x)dx}{3\cos x-\sin x+1}$;<br>и) $\int\frac{-5\cos^2 x-4\sin x\cos x+4\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}dx$. |
| 9. | а) $\int(-3+4x-9x^2)\ln 5x\,dx$;<br>б) $\int\sqrt{48+2x-x^2}\,dx$;<br>в) $\int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-8x}}dx$;<br>г) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;<br>д) $\int\frac{\sqrt{x+3}\,dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}$;<br>е) $\int\frac{8x^2+55x+81}{(x-1)(x+5)^2}dx$;<br>ж) $\int\frac{-2(10x^2+14x+13)dx}{(1+3x)(x^2+2x+10)}$;<br>з) $\int\frac{(\cos x+3\sin x)dx}{2\cos x-3\sin x+3}$;<br>и) $\int\frac{-6\cos^2 x+2\sin x\cos x+2\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}dx$. | 10. | а) $\int(-14-30x+12x^2)e^{-4x}dx$;<br>б) $\int\sqrt{25+6x+x^2}\,dx$;<br>в) $\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2-4x-21}}dx$;<br>г) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$;<br>д) $\int\frac{\sqrt[6]{x-1}\,dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}$;<br>е) $\int\frac{-2x^2+9x-19}{(x+2)(x-1)(x-3)}dx$;<br>ж) $\int\frac{(-16-6x+5x^2)dx}{3(x+1)(x^2+6x+10)}$;<br>з) $\int\frac{(\cos x-2\sin x)dx}{3\cos x-2\sin x+2}$;<br>и) $\int\frac{-2\cos^2 x+2\sin x\cos x+5\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}dx$. |
| 11. | а) $\int(-4+2x+3x^2)\sin 2x\,dx$;<br>б) $\int\sqrt{21-4x-x^2}\,dx$; | 12. | а) $\int(-6-19x-15x^2)\cos 2x\,dx$;<br>б) $\int\sqrt{-55+6x+x^2}\,dx$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | в) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-2x-48}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$;<br>д) $\int \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$;<br>е) $\int \frac{3x^2+27x+34}{(x-2)(x+3)^2}dx$;<br>ж) $\int \frac{(18-6x-37x^2)dx}{3(x+1)(x^2+6x+18)}$;<br>з) $\int \frac{(\cos x+3\sin x)dx}{\cos x-\sin x+1}$;<br>и) $\int \frac{-4\cos^2 x-5\sin x\cos x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}dx$. | | в) $\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+4x-60}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x+x^2}}$;<br>д) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$;<br>е) $\int \frac{21-3x}{(x-2)(x^2-9)}dx$;<br>ж) $\int \frac{(14x^2+28x-22)dx}{(2x+1)(x^2-6x+13)}$;<br>з) $\int \frac{(\cos x+2\sin x)dx}{\cos x-3\sin x+3}$;<br>и) $\int \frac{-5\cos^2 x+5\sin x\cos x+3\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}dx$. |
| 13. | а) $\int (8x^2+2x+9)\sin 4x\,dx$;<br>б) $\int \sqrt{16+6x-x^2}\,dx$;<br>в) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x-15}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x+x^2}}$;<br>д) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}\,dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}$;<br>е) $\int \frac{5x^2+x+6}{(x-1)(x+1)^2}dx$;<br>ж) $\int \frac{(47x^2+36x-16)dx}{(1+3x)(x^2-8x+20)}$;<br>з) $\int \frac{(\cos x-\sin x)dx}{2\cos x-2\sin x+2}$;<br>и) $\int \frac{-2\cos^2 x+\sin x\cos x+4\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}dx$. | 14. | а) $\int (8x-8-3x^2)\cos 4x\,dx$;<br>б) $\int \sqrt{x^2-4x-45}\,dx$;<br>в) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-1}}$;<br>д) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx$;<br>е) $\int \frac{x^2-17x-24}{(3+x)(x-1)(x-6)}dx$;<br>ж) $\int \frac{(49x^2-50x+22)dx}{(2x-1)(x^2-2x+10)}$;<br>з) $\int \frac{(\cos x+2\sin x)dx}{\cos x-\sin x+1}$;<br>и) $\int \frac{-4\cos^2 x+\sin x\cos x+3\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}dx$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15. | а) $\int (4-2x-5x^2)\sin 5x dx$;<br>б) $\int \sqrt{-x^2-10x-9}dx$;<br>в) $\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+2x-15}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$;<br>д) $\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}dx$;<br>е) $\int \frac{8x^2+24x+13}{(x-1)(x+2)^2}dx$;<br>ж) $\int \frac{(6x^2-32x+22)dx}{(2x-3)(x^2-6x+13)}$;<br>з) $\int \frac{(\cos x+\sin x)dx}{2\cos x-3\sin x+3}$;<br>и) $\int \frac{-4\cos^2 x+3\sin x\cos x+5\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}dx$. | 16. | а) $\int (9-6x^2)\cos 5x dx$;<br>б) $\int \sqrt{x^2+8x-48}dx$;<br>в) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+10x+34}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$;<br>д) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$;<br>е) $\int \frac{2x^2+5x-54}{(x-5)(x^2-4)}dx$;<br>ж) $\int \frac{(13x^2+12x+9)dx}{(1-3x)(x^2-8x+17)}$;<br>з) $\int \frac{(\cos x+\sin x)dx}{\cos x-2\sin x+2}$;<br>и) $\int \frac{-3\cos^2 x-2\sin x\cos x+5\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}dx$. |
| 17. | а) $\int (3-2x+7x^2)\sin 2x dx$;<br>б) $\int \sqrt{-x^2+8x-15}dx$;<br>в) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-8x+32}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}}$;<br>д) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$;<br>е) $\int \frac{6x^2+58x+116}{(x-1)(x+5)^2}dx$;<br>ж) $\int \frac{(7x^2+26x+34)dx}{(x+1)(x^2+6x+10)}$; | 18. | а) $\int (-24-46x-30x^2)\cos 2x dx$;<br>б) $\int \sqrt{x^2+10x+29}dx$;<br>в) $\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2-2x+65}}dx$;<br>г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$;<br>д) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}}$;<br>е) $\int \frac{2x^2+10x-82}{(x+1)(x-4)(x-5)}dx$;<br>ж) $\int \frac{(30x^2-28x-16)dx}{(2x-1)(x^2+2x+10)}$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | з) $\int\frac{(\cos x+\sin x)dx}{\cos x-3\sin x+3}$;<br>и) $\int\frac{-5\cos^2 x+3\sin x\cos x+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}dx$. | | з) $\int\frac{(\cos x+3\sin x)dx}{2\cos x-2\sin x+2}$;<br>и) $\int\frac{-4\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}dx$. |
| 19. | а) $\int(8+7x+8x^2)\sin 3xdx$;<br>б) $\int\sqrt{5+4x-x^2}dx$;<br>в) $\int\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-8x+52}}dx$;<br>г) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$;<br>д) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$;<br>е) $\int\frac{3+x-6x^2}{(x-3)(x+1)^2}dx$;<br>ж) $\int\frac{(17x^2-16x+12)dx}{(x-1)(x^2+4x+8)}$;<br>з) $\int\frac{(\cos x-3\sin x)dx}{2\cos x-\sin x+1}$;<br>и) $\int\frac{-5\cos^2 x+4\sin x\cos x+3\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}dx$. | 20. | а) $\int(-34-51x-15x^2)\cos 3xdx$;<br>б) $\int\sqrt{x^2+4x+13}dx$;<br>в) $\int\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-10x-24}}dx$;<br>г) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}$;<br>д) $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{(\sqrt[3]{x+1}+1)\sqrt{x+1}}dx$;<br>е) $\int\frac{17-8x-x^2}{(x-5)(x^2-1)}dx$;<br>ж) $\int\frac{(11x^2-16x-5)dx}{(1-x)(x^2-8x+17)}$;<br>з) $\int\frac{(\cos x-3\sin x)dx}{\cos x-2\sin x+2}$;<br>и) $\int\frac{-3\cos^2 x-5\sin x\cos x+2\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}dx$. |

## §29. Индивидуальные задания по теме «Определенный интеграл и его приложения»

1. Вычислить определенные интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | а) $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$; <br> б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x\, dx$. | 2. | а) $\int\limits_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2}$; <br> б) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x\, dx$. |
| 3. | а) $\int\limits_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}dx$; <br> б) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \cos^8(x/2)\, dx$. | 4. | а) $\int\limits_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2+4}$; <br> б) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^8 x\, dx$. |
| 5. | а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; <br> б) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x\, dx$. | 6. | а) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3}dx$; <br> б) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x/4)\cos^6(x/4)\, dx$. |
| 7. | а) $\int\limits_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$; <br> б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x\, dx$. | 8. | а) $\int\limits_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$; <br> б) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x\, dx$. |
| 9. | а) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$; <br> б) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x\, dx$. | 10. | а) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; <br> б) $\int\limits_0^{2\pi} \cos^8(x/4)\, dx$. |
| 11. | а) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; <br> б) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^8(x/2)\, dx$. | 12. | а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2}dx$; <br> б) $\int\limits_{-\pi}^{0} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x\, dx$. |
| 13. | а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}dx$; | 14. | а) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | б) $\int\limits_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x \, dx$. | | б) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x \, dx$. |
| 15. | а) $\int\limits_{0}^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$;<br>б) $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^8 x \, dx$. | 16. | а) $\int\limits_{1}^{3} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$;<br>б) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^8 (x/4) \, dx$. |
| 17. | а) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;<br>б) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^6 (x/2) \cos^2 (x/2) \, dx$. | 18. | а) $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x} dx$;<br>б) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x \, dx$. |
| 19. | а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;<br>б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x \, dx$. | 20. | а) $\int\limits_{1}^{e} \frac{x^2+\ln x^2}{x} dx$;<br>б) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \cos^8 x \, dx$. |

2. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями, в различных системах координат:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | а) $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$;<br>б) $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x=2 \quad (x \ge 2)$;<br>в) $r=4\cos 3\varphi, \quad r=2 \quad (r \ge 2)$. | 2. | а) $y=x\sqrt{9-x^2}$, $y=0 \ (0 \le x \le 3)$;<br>б) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y=2 \quad (y \ge 2)$;<br>в) $r=\cos 2\varphi$. |
| 3. | а) $y=4-x^2, y=x^2-2x$;<br>б) $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$ $y \ge 4 (0 < x < 8\pi)$;<br>в) $r=\sqrt{3}\cos\varphi, r=\sin\varphi, \varphi \in [0, \pi/2]$. | 4. | а) $y=\sin x \cos^2 x$, $y=0 \ (0 \le x \le \pi/2)$;<br>б) $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ $x=2 \ (x \ge 2)$;<br>в) $r=4\sin 3\varphi$, $r=2 \ (r \ge 2)$. |
| 5. | а) $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $x=0, x=1$;<br>б) $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$ $y=3 \ (y \ge 3)$;<br>в) $r=\sin 3\varphi$. | 6. | а) $y=x^2\sqrt{4-x^2}$, $y=0 \ (0 \le x \le 2)$;<br>б) $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $x=6\sqrt{3} \quad (x \ge 6\sqrt{3})$;<br>в) $r=6\sin 3\varphi$, $r=3 \ (r \ge 3)$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. | а) $y=\cos x\sin^2 x,\ y=0\ (0\le x\le \pi/2)$;<br>б) $\begin{cases}x=6\cos t,\\ y=2\sin t,\end{cases}\ y=\sqrt{3}\left(y\ge\sqrt{3}\right)$;<br>в) $r=\cos 3\varphi$. | 8. | а) $y=\sqrt{e^x-1}, y=0,\ x=\ln 2$;<br>б) $\begin{cases}x=8\sqrt{2}\cos^3 t,\\ y=\sqrt{2}\sin^3 t,\end{cases}\ x=4\ \ (x\ge 4)$;<br>в) $r=1/2+\sin\varphi$. |
| 9. | а) $y=\arccos x, y=0, x=0$;<br>б) $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\cos t,\\ y=3\sqrt{2}\sin t,\end{cases} y=3\ (y\ge 3)$;<br>в) $r=\cos\varphi,\ r=\sin\varphi\ (0\le\varphi\le\pi/2)$. | 10. | а) $y=(x+1)^2,\ y^2=x+1$;<br>б) $\begin{cases}x=32\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t,\end{cases}\ x=4\ (x\ge 4)$;<br>в) $r=\cos\varphi,\ r=2\cos\varphi$. |
| 11. | а) $y=2x-x^2+3, y=x^2-4x+3$;<br>б) $\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=8\sin t,\end{cases}\ y=4\ \ (y\ge 4)$;<br>в) $r=\sin\varphi,\ r=2\sin\varphi$. | 12. | а) $y=x\sqrt{36-x^2},\ y=0\ \ (0\le x\le 6)$;<br>б) $\begin{cases}x=8\cos^3 t,\\ y=4\sin^3 t,\end{cases}\ x=3\sqrt{3}\ \ \left(x\ge 3\sqrt{3}\right)$;<br>в) $r=1+\sqrt{2}\cos\varphi$. |
| 13. | а) $x=\arccos y, y=0,\ x=0$;<br>б) $\begin{cases}x=6\cos^3 t,\\ y=4\sin^3 t,\end{cases}\ x=2\sqrt{3}\ \ \left(x\ge 2\sqrt{3}\right)$;<br>в) $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$. | 14. | а) $y=\operatorname{arctg} x,\ y=0,\ x=\sqrt{3}$;<br>б) $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\cos^3 t,\\ y=\sqrt{2}\sin^3 t,\end{cases}\ x=1\ \ (x\ge 1)$;<br>в) $r=(5/2)\sin\varphi,\ r=(3/2)\sin\varphi$. |
| 15. | а) $y=x^2\sqrt{8-x^2}, y=0\left(0\le x\le 2\sqrt{2}\right)$;<br>б) $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\\ y=4\sqrt{2}\sin t,\end{cases}\ y=4\ \ (y\ge 4)$;<br>в) $r=4\cos 4\varphi$. | 16. | а) $x=\sqrt{e^y-1},\ x=0,\ y=\ln 2$;<br>б) $\begin{cases}x=8\cos^3 t,\\ y=8\sin^3 t,\end{cases}\ x=1\ (x\ge 1)$;<br>в) $r=\sin 6\varphi$. |
| 17. | а) $x=(y-2)^3,\ \ x=4y-8$;<br>б) $\begin{cases}x=9\cos t,\\ y=4\sin t,\end{cases}\ y=2\ \ (y\ge 2)$;<br>в) $r=2\cos\varphi,\ r=3\cos\varphi$. | 18. | а) $x=4-y^2,\ x=y^2-2y$;<br>б) $\begin{cases}x=24\cos^3 t,\\ y=2\sin^3 t,\end{cases}\ x=9\sqrt{3}\ \ \left(x\ge 9\sqrt{3}\right)$;<br>в) $r=\cos\varphi+\sin\varphi$. |
| 19. | а) $y=(x-1)^2,\ y^2=x-1$;<br>б) $\begin{cases}x=32\cos^3 t,\\ y=3\sin^3 t,\end{cases}\ x=12\sqrt{3}\ \ \left(x\ge 12\sqrt{3}\right)$;<br>в) $r=\cos\varphi-\sin\varphi$. | 20. | а) $y=x^2\cos x,\ y=0\ (0\le x\le \pi/2)$;<br>б) $\begin{cases}x=4\sqrt{2}\cos^3 t,\\ y=\sqrt{2}\sin^3 t,\end{cases}\ x=2\ \ (x\ge 2)$;<br>в) $r=2\cos 6\varphi$. |

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в различных системах координат:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | а) $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$;<br>б) $\begin{cases}x=5(t-\sin t),\\ y=5(1-\cos t),\end{cases} 0\le t\le\pi$;<br>в) $\rho=3e^{3\varphi/4},\quad -\pi/2\le\varphi\le\pi/2$. | 2. | а) $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\ 0\le x\le 7/9$;<br>б) $\begin{cases}x=3(2\cos t-\cos 2t),\\ y=3(2\sin t-\sin 2t),\end{cases} 0\le t\le 2\pi$;<br>в) $\rho=2e^{4\varphi/3},\quad -\pi/2\le\varphi\le\pi/2$. |
| 3. | а) $y=-\ln\cos x,\ 0\le x\le\pi/6$;<br>б) $\begin{cases}x=4(\cos t+t\sin t),\\ y=4(\sin t-t\cos t),\end{cases} 0\le t\le 2\pi$;<br>в) $\rho=\sqrt{2}\,e^{\varphi},\ -\pi/2\le\varphi\le\pi/2$. | 4. | а) $y=e^x+6,\ \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$;<br>б) $\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t,\end{cases} 0\le t\le\pi$;<br>в) $\rho=5e^{5\varphi/12},\ -\pi/2\le\varphi\le\pi/2$. |
| 5. | а) $y=\ln(x^2-1),\ 2\le x\le 3$;<br>б) $\begin{cases}x=10\cos^3 t,\\ y=10\sin^3 t,\end{cases} 0\le t\le\pi/2$;<br>в) $\rho=6e^{12\varphi/5},\ -\pi/2\le\varphi\le\pi/2$. | 6. | а) $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,\ 0\le x\le 8/9$;<br>б) $\begin{cases}x=e^t(\cos t+\sin t),\\ y=e^t(\cos t-\sin t),\end{cases} 0\le t\le\pi$;<br>в) $\rho=3e^{3\varphi/4},\ 0\le\varphi\le\pi/3$. |
| 7. | а) $y=\ln(1-x^2),\ 0\le x\le 1/4$;<br>б) $\begin{cases}x=3(t-\sin t),\\ y=3(1-\cos t),\end{cases} \pi\le t\le 2\pi$;<br>в) $\rho=4e^{4\varphi/3},\ 0\le\varphi\le\pi/3$. | 8. | а) $y=2+\operatorname{ch} x,\ 0\le x\le 1$;<br>б) $\begin{cases}x=3(\cos t+t\sin t),\\ y=3(\sin t-t\cos t),\end{cases} 0\le t\le\pi/3$;<br>в) $\rho=\sqrt{2}\,e^{\varphi},\ 0\le\varphi\le\pi/3$. |
| 9. | а) $y=1-\ln\cos x,\ 0\le x\le\pi/6$;<br>б) $\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t,\end{cases} 0\le t\le\pi/3$;<br>в) $\rho=5e^{5\varphi/12},\ 0\le\varphi\le\pi/3$. | 10. | а) $y=e^x+13,\ \ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}$;<br>б) $\begin{cases}x=6\cos^3 t,\\ y=6\sin^3 t,\end{cases} 0\le t\le\pi/3$;<br>в) $\rho=12e^{12\varphi/5},\ 0\le\varphi\le\pi/3$. |
| 11. | а) $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2},\ 0\le x\le 1/4$;<br>б) $\begin{cases}x=e^t(\cos t+\sin t),\\ y=e^t(\cos t-\sin t),\end{cases} \pi/2\le t\le\pi$;<br>в) $\rho=1-\sin\varphi,\ -\pi/2\le\varphi\le-\pi/6$. | 12. | а) $y=2-e^x,\ \ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}$;<br>б) $\begin{cases}x=2{,}5(t-\sin t),\\ y=2{,}5(1-\cos t),\end{cases} \pi/2\le t\le\pi$;<br>в) $\rho=2(1-\cos\varphi),\ -\pi\le\varphi\le-\pi/2$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13. | а) $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 15/16$;<br>б) $\begin{cases} x=3{,}5(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3{,}5(2\sin t-\sin 2t), \end{cases} 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}$;<br>в) $\rho=3(1+\sin\varphi)$, $-\pi/6\le\varphi\le 0$. | 14. | а) $y=1-\ln\sin x$, $\pi/3\le x\le \pi/2$;<br>б) $\begin{cases} x=6(\cos t+t\sin t), \\ y=6(\sin t-t\cos t), \end{cases} 0\le t\le\pi$;<br>в) $\rho=4(1-\sin\varphi)$, $0\le\varphi\le\pi/6$. |
| 15. | а) $y=1-\ln\left(x^2-1\right)$, $3\le x\le 4$;<br>б) $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases} 0\le t\le\pi/6$;<br>в) $\rho=5(1-\cos\varphi)$, $-\pi/3\le\varphi\le 0$. | 16. | а) $y=\ln\sin x$, $\pi/3\le x\le\pi/2$;<br>б) $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} 0\le t\le 2\pi$;<br>в) $\rho=6(1+\sin\varphi)$, $-\pi/2\le\varphi\le 0$. |
| 17. | а) $y=\operatorname{ch}x+3$, $0\le x\le 1$;<br>б) $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases} \pi/2\le t\le 2\pi/3$;<br>в) $\rho=7(1-\sin\varphi)$, $-\pi/6\le\varphi\le\pi/6$. | 18. | а) $y=\ln\cos x+2$, $0\le x\le\pi/6$;<br>б) $\begin{cases} x=2(2\cos t-\cos 2t), \\ y=2(2\sin t-\sin 2t), \end{cases} 0\le t\le\pi/3$;<br>в) $\rho=8(1-\cos\varphi)$, $-2\pi/3\le\varphi\le 0$. |
| 19. | а) $y=e^x+26$, $\ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{24}$;<br>б) $\begin{cases} x=8(\cos t+t\sin t), \\ y=8(\sin t-t\cos t), \end{cases} 0\le t\le\pi/4$;<br>в) $\rho=2\varphi$, $0\le\varphi\le 3/4$. | 20. | а) $y=e^x+e$, $\ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{15}$;<br>б) $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} 0\le t\le 3\pi/2$;<br>в) $\rho=2\varphi$, $0\le\varphi\le 4/3$. |

4. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями и образованных вращением фигур, ограниченных заданными функциями (в вариантах 1–10 ось вращения $Ox$, в вариантах 11–20 ось вращения $Oy$):

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | а) $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$, $z=y$, $z=0$ $(y\ge 0)$;<br>б) $y=-x^2+5x-6$, $y=0$. | 2. | а) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1$, $z=0$, $z=3$;<br>б) $y=3\sin x$, $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$. |
| 3. | а) $z=x^2+4y^2$, $z=2$;<br>б) $y=5\cos x, y=\cos x, x=0, x\ge 0$. | 4. | а) $x^2+y^2=9$, $z=y$, $z=0$ $(y\ge 0)$;<br>б) $y=\sin^2 x$, $x=\pi/2$, $y=0$. |
| 5. | а) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{36}=-1$, $z=12$;<br>б) $x=\sqrt[3]{y-2}$, $x=1$, $y=1$. | 6. | а) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$, $z=1$, $z=0.$;<br>б) $y=xe^x$, $y=0$, $x=1$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. | а) $z=x^2+9y^2,\ z=3$;<br>б) $y=2x-x^2,\ y=-x+2,\ x=0$. | 8. | а) $z=x^2+5y^2,\ z=5$;<br>б) $y=2x-x^2,\ y=-x+2$. |
| 9. | а) $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1,\ z=0,\ z=3$;<br>б) $x^2+(y-2)^2=1$. | 10. | а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{64}=-1,\ z=16$;<br>б) $y=x^3,\ y=\sqrt{x}$. |
| 11. | а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1,\ z=2,\ z=0$;<br>б) $y=x^2,\ x=2,\ y=0$. | 12. | а) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1, z=y\sqrt{3}, z=0\ (y\geq 0)$;<br>б) $y=\ln x,\ x=2,\ y=0$. |
| 13. | а) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}-z^2=1,\ z=0,\ z=2$;<br>б) $y=x^3,\ y=x^2$. | 14. | а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=-1,\ z=12$;<br>б) $y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=0$. |
| 15. | а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1,\ z=3,\ z=0$;<br>б) $y=x^2-2x+1,\ x=2,\ y=0$. | 16. | а) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{16}=1, z=y\sqrt{3}, z=0\ (y\geq 0)$;<br>б) $y=x^3,\ y=x$. |
| 17. | а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1,\ z=20$;<br>б) $y=\arccos x,\ y=\arcsin x,\ x=0$. | 18. | а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{64}=1,\ z=4,\ z=0$;<br>б) $y=(x-1)^2,\ x=0,\ x=2,\ y=0$. |
| 19. | а) $z=2x^2+18y^2,\ z=6$;<br>б) $y=\arccos(x/3),\ y=\arccos x,\ y=0$. | 20. | а) $z=2x^2+8y^2,\ z=4$;<br>б) $y^2=x-2, y=0,\ y=x^3,\ y=1$. |

## §30. Индивидуальные задания по теме «Ряды»

1. Найти сумму ряда:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}$. | 2. | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$. |
| 3. | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-n}{(n+3)(n+1)n}$. | 4. | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$. |
| 5. | $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4}{n(n-1)(n-2)}$. | 6. | $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}$. |
| 7. | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4-n}{n(n+1)(n+2)}$. | 8. | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}$. |
| 9. | $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3n+1}{(n-1)n(n+1)}$. | 10. | $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$. |
| 11. | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n(n+1)(n+3)}$. | 12. | $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n^2-1)}$. |
| 13. | $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-1)}$. | 14. | $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{8n-10}{(n-1)(n-2)(n+1)}$. |
| 15. | $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n-2}{(n-1)n(n+1)}$. | 16. | $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n+5}{(n^2-1)(n+2)}$. |
| 17. | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$. | 18. | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$. |
| 19. | $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{2-n}{n(n+1)(n+2)}$. | 20. | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+2)(n+1)n}$. |

2. Исследовать на сходимость ряды:

| | |
|---|---|
| 1. | а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$; <br> г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. |
| 2. | а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{2+(-1)^n}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; |

| | |
|---|---|
| | г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. |
| 3. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$; <br> г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$; е) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$. |
| 4. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(n\pi/2)}{n(n+1)(n+2)}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n 2n!}{(2n)!}$; <br> г) $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$; д) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$; е) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln\ln n)\ln n}$. |
| 5. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$; <br> г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}$. |
| 6. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$; <br> г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n(n+1)^3$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$; е) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$. |
| 7. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$; <br> г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$; д) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$; е) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$. |
| 8. | а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 6n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n)!}\mathrm{tg}\frac{1}{5^n}$; <br> г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$. |
| 9. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$; <br> г) $\sum_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\frac{\pi}{4n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{6n}$. |

| | |
|---|---|
| 10. | а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$; д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$. |
| 11. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3+n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\frac{n}{5^n}$; д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$; е) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$. |
| 12. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\frac{1}{n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$; д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$. |
| 13. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}\operatorname{arctg}\frac{n+3}{n^2+5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n!)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n(n-1)^2$; д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$. |
| 14. | а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n+\sqrt[3]{\ln^2 n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{3^n(n+1)!}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$; д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$. |
| 15. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$; д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^n}$. |
| 16. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left[2+(-1)^n\right]}{\ln(1+n)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$; д) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n-1)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3n}$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg}(-1)^n}{\sqrt{n(2+n^2)}}$; | б) $\sum_{n=3}^{\infty}n^3\operatorname{tg}^5\frac{\pi}{n}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$; |
| | г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$; | д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$; | е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}$. |
| 18. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n}$; | б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$; |
| | г) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$; | д) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$; | е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$. |
| 19. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3-10}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$; |
| | г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$; | д) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$; | е) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$. |
| 20. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n^2}}$; | б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$; | в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$; |
| | г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$; | д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$; | е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$. |

3. Найти область сходимости функционального ряда:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/5}}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n}x^{2n}\sin(x+\pi n)$. | 2. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}x^{4n}\sin(2x-\pi n)$. |
| 3. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^{4n}\cos(x+\pi n)$. | 4. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n\frac{1}{\sqrt{n}}x^{2n}\cos(x-\pi n)$. |
| 5. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{\sqrt[3]{n}}x^{4n}\sin(3x+\pi n)$. | 6. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+1}\frac{1}{(27x^2+12x+2)^n}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n}x^{2n}\sin(5x-\pi n)$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^{3n}\sin\frac{x}{n}$. | 8. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{n+1}\frac{1}{\left(3x^2+8x+6\right)^n}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{2n}x^n\sin\frac{x}{2n}$. |
| 9. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{3n}x^n\sin\frac{2x}{n}$. | 10. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-6x+12\right)^n}{4^n\left(n^2+1\right)}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n x^{3n}\sin\frac{3x}{\sqrt{n}}$. |
| 11. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+1\right)^{2x+1}}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n x^n \mathrm{tg}\frac{3x}{n}$. | 12. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}8^n x^{3n}\mathrm{tg}\frac{x}{4\sqrt{n}}$. |
| 13. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{x+n}}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{3n}\mathrm{tg}\frac{2x}{3n}$. | 14. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-5x+11\right)^n}{5^n\left(n^2+5\right)}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^{3n}\arcsin\frac{x}{3n}$. |
| 15. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^n}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}27^n x^{3n}\mathrm{arctg}\frac{3x}{2n+3}$. | 16. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+x)}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}\sin^{2n}(2x)$. |
| 17. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\mathrm{tg}^{2n}x$. | 18. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}\sin^n(3x)$. |
| 19. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{xn^x}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^2}\sin^{2n}x$. | 20. | а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^{x^2-1}}$;<br>б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n/2}}\mathrm{tg}^n x$. |

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $x$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\dfrac{9}{20-x-x^2}$. | 2. | $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$. |
| 3. | $\ln\left(1-x-6x^2\right)$. | 4. | $2x\cos^2(x/2)-x$. |
| 5. | $\dfrac{\mathrm{sh}2x}{x}-2$. | 6. | $\dfrac{7}{12+x-x^2}$. |
| 7. | $\dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$. | 8. | $\dfrac{\mathrm{ch}3x-1}{x^2}$. |
| 9. | $\ln\left(1+x-6x^2\right)$. | 10. | $(x-1)\sin 5x$. |
| 11. | $\dfrac{6}{8+2x-x^2}$. | 12. | $\dfrac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$. |
| 13. | $\ln\left(1-x-12x^2\right)$. | 14. | $\left(3+e^{-x}\right)^2$. |
| 15. | $\dfrac{\arcsin x}{x}-1$. | 16. | $\dfrac{7}{12-x-x^2}$. |
| 17. | $x^2\sqrt{4-3x}$. | 18. | $\ln\left(1+2x-8x^2\right)$. |
| 19. | $2x\sin^2(x/2)-x$. | 20. | $(x-1)\mathrm{sh}x$. |

## Список литературы


1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Решение типичных и трудных задач [Текст]: учеб. пособие. 2-е изд., стер. / Г. Н. Берман. – СПб.: Лань, 2006. – 608 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Бутузов, В. Ф. Математический анализ в вопросах и задачах [Текст]: учеб. пособие. / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев [и др.]; под ред. В. Ф. Бутузова. – 4-е изд., исправ. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 480 с.
3. Васильев, Н. Б. Задачи всесоюзных математических олимпиад [Текст] / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М.: Наука. 1988. – (Б-ка мат. кружка; вып. 18). – 288 с.
4. Виленкин, Н. Я. Задачник по курсу математического анализа [Текст]: учеб. пособие для студентов заочн. отд. физ.-мат. фак. désинститутов. В 2 ч. / Н. Я. Виленкин, К. А. Бохан, И. А. Марон [и др.]. Ч. I; под ред. Н. Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1971. – 350 с.
5. Виленкин, Н. Я. Задачник по курсу математического анализа [Текст]: учеб. пособие для студентов заочн. отд. физ.-мат. фак. пединститутов. В 2 ч. / Н. Я. Виленкин, К. А. Бохан, И. А. Марон [и др.]. Ч. II; под ред. Н. Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1971. – 336 с.
6. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу [Текст] В 2 ч. Ч. 1. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий; под общ. ред. В. А. Садовничего. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – 725 с.: ил.
7. Гелбаум, Б. Контрпримеры в анализе [Текст] / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед; пер. с англ. Б. И. Голубова. – М.: Мир, 1967. – 252 с.: ил.
8. Гурова, З. И. Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами [Текст] / З. И. Гурова, С. Н. Каролинская, А. П. Осипова; под ред. А. И. Кибзуна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 352 с.
9. Давыдов, Н. А. Сборник задач по математическому анализу [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / Н. А. Давыдов. 4-е изд., доп. – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.: ил.
10. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие для студентов втузов. В 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. Ч. 1. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Мир и образование, 2007. – 304 с.: ил.

11. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие для студентов втузов. В 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. Ч. 1. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Мир и образование, 2007. – 416 с.: ил.
12. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст]: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. – 13-е изд., испр. – М.: АСТ, 2009. – 558 с.
13. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа [Текст]: учеб. для студентов ун-тов и втузов. В 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2003. Т. 1. – 704 с.: ил.
14. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа [Текст]: учеб. для студентов ун-тов и втузов. В 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Высш. школа, 2004. Т. 2. – 720 с.: ил.
15. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты [Текст]: учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – 10-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 240 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
16. Макаров, Б. М. Избранные задачи по вещественному анализу [Текст]: учеб. пособие для вузов / Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин [и др.]. – М.: Наука, 1992. –432 с.
17. Очан, Ю. С. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного [Текст] / Ю. С. Очан. – М.: Просвещение, 1965. – 232 с.
18. Подольский, В. А. Сборник задач по математике [Текст]: учеб. пособие / В. А. Подольский, А. М. Суходский, Е. С. Мироненко. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 495 с.: ил.
19. Рожков, В. И. Сборник задач математических олимпиад [Текст] / В. И. Рожков, Г. Д. Курдеванидзе, Н. Г. Панфилов. – М.: Изд-во УДН, 1987. – 28 с.: ил.
20. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст]: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 1./ А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1990. – 270 с.: ил.
21. Садовничий, В. А. Задачи студенческих олимпиад по математике [Текст] / В. А. Садовничий, А. С. Подколзин. – М.: Наука, 1978. – 207 с.: ил.
22. Садовничий, В. А. Задачи студенческих математических олимпиад [Текст] / В. А. Садовничий, А. А. Григорян, С. В. Конягин. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1987. – 311 с.

Учебное издание

***Пономаренко Владимир Николаевич***

**СБОРНИК ЗАДАЧ**
**ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

*Учебное пособие*

Редактор Н.С. К у п р и я н о в а
Доверстка Т.С. П е т р е н к о

Подписано в печать 03.08.2010 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ. л. 8,25.
Тираж 100 экз. Заказ .

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.