ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА"

Э. И. КОЛОМИЕЦ, А. А. ДЕГТЯРЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2006

УДК 519.2
ББК 22.171
К 612

Инновационная образовательная программа «Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий»

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. А. И. Ж д а н о в
д-р физ.-мат. наук, проф. С. Я. Ш а т с к и х

Коломиец Э.И.
К 612 **Сборник задач по теории вероятностей:** учеб. пособие / *Э.И. Коломиец, А.А Дегтярев*. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 244 с. : ил. .

ISBN 5-7883-0437-7

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, специализирующихся в области прикладной математики и информационных технологий. Содержит краткие теоретические сведения, наборы задач по всем основным разделам университетского курса теории вероятностей, а также примеры решения типовых задач по каждому разделу. Рекомендуется для проведения аудиторных практических занятий, а также обеспечения индивидуальных занятий и самостоятельной работы студентов.

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN 5-7883-0437-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий сборник задач представляет собой обобщение ряда методических разработок, изданных на факультете информатики Самарского государственного аэрокосмического университета за последние 20 лет. В сборнике приведено свыше 600 задач различной степени сложности по всем разделам теории вероятностей, которые изучаются в университетском курсе «Теория вероятностей и математическая статистика» при подготовке бакалавров по направлению «Прикладная математика и информатика».

Весь материал разбит на три главы, каждая глава – на параграфы в зависимости от тематики и методов решения задач.

Каждый параграф начинается с теоретических сведений, необходимых при решении представленных задач. Затем приводятся наиболее важные типовые задачи с решениями. Подборка задач в параграфах произведена «гнездовым» методом, при котором однотипные задачи располагаются рядом. При определении порядка следования задач использован принцип «от простого к сложному». Такое представление материала облегчает преподавателю выбор тех задач, которые целесообразно решить в аудитории на практических занятиях, и тех, которые могут быть оставлены для индивидуальной и самостоятельной работы студентов.

Особое внимание уделено подборке задач по темам: случайные величины, случайные векторы, функции от случайных величин и векторов, центральная предельная теорема, поскольку они играют важную роль при дальнейшем изучении вероятностных дисциплин, таких как математическая статистика, теория случайных процессов, планирование эксперимента и статистический анализ.

Некоторые из предложенных задач носят теоретический характер и их решение основано на использовании непростых аналитических методов. Такие задачи рекомендуется обсуждать на индивидуальных занятиях. С другой стороны, их включение в сборник усиливает тот теоретический справочный материал, которым можно воспользоваться при изучении ряда дисциплин магистерских программ, что способствует обеспечению преемственности и непрерывности подготовки по направлению «Прикладная математика и информатика» в области вероятностно-статистических методов.

Практически ко всем задачам приведены ответы, а к части задач – решения или указания по их решению.

В конце сборника приведены таблицы некоторых распределений, список рекомендуемой литературы и предметный указатель. Список литературы охватывает общедоступные задачники и использованные теоретические курсы. Предметный указатель отчасти выполняет функции путеводителя по основным встречающимся понятиям. В нем для каждого из ключевых понятий приводится не только номер страницы, где это понятие появляется впервые, но и номера страниц и номера задач, где оно существенно используется. За счет этого можно проследить, каким образом то или иное понятие (например, нормальный закон распределения) приобретает дополнительную смысловую нагрузку по мере изучения курса.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Случайный эксперимент, случайные события и операции над ними

В теории вероятностей рассматриваются случайные (стохастические) эксперименты, которые могут быть повторены сколько угодно раз в одних и тех же условиях, но результаты которых не могут быть наперед предсказаны.

Множество всех возможных, взаимоисключающих исходов случайного эксперимента называется ***пространством элементарных событий*** Ω. При этом элементы множества Ω называются ***элементарными событиями (элементарными исходами)*** и обозначаются ω (с индексом или без).

Случайными событиями называются подмножества пространства элементарных событий Ω. Говорят, что в результате случайного эксперимента произошло событие A, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в множество A.

Событие Ω называется ***достоверным***, оно всегда происходит в результате эксперимента. ***Невозможным*** называется событие $\varnothing$, которое никогда не может произойти в результате эксперимента.

Суммой событий A и B называется событие $A+B$ (или $A \cup B$), состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих по крайней мере одному из событий A или B. Событие $A+B$ происходит тогда и только тогда, когда происходит или событие A, или событие B, или оба этих события одновременно.

Произведением событий A и B называется событие AB (или $A \cap B$), состоящее из всех элементарных исходов, принадлежащих и событию A, и событию B. Событие AB происходит тогда и только тогда, когда события A и B происходят одновременно.

Разностью событий A и B называется событие $A-B$ (или $A \setminus B$), состоящее из всех элементарных исходов, принадлежащих событию A, но не принадлежащих событию B. Событие $A-B$ происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}=\Omega-A$, состоящее из всех элементарных исходов, не принадлежащих событию A. Событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит. Очевидно, что

$$A+\overline{A}=\Omega,\ A\overline{A}=\varnothing.$$

Симметрической разностью событий A и B называется событие

$$A \Delta B=(A-B)\cup(B-A).$$

Говорят, что событие A ***влечет*** событие B (или событие B ***следует*** из события A) и обозначают $A\subseteq B$, если все элементарные события, принадлежащие событию A, принадлежат также и событию B. Если $A\subseteq B$, то всегда, как только происходит событие A, происходит и событие B.

Говорят, что события A и B являются ***равносильными*** и обозначают $A=B$**,** если $A\subseteq B$ и одновременно $B\subseteq A$.

События A и B называются ***несовместными***, если они не могут произойти одновременно, то есть $AB=\varnothing$.

Графическая иллюстрация операций над событиями представлена на рис. 1.1.

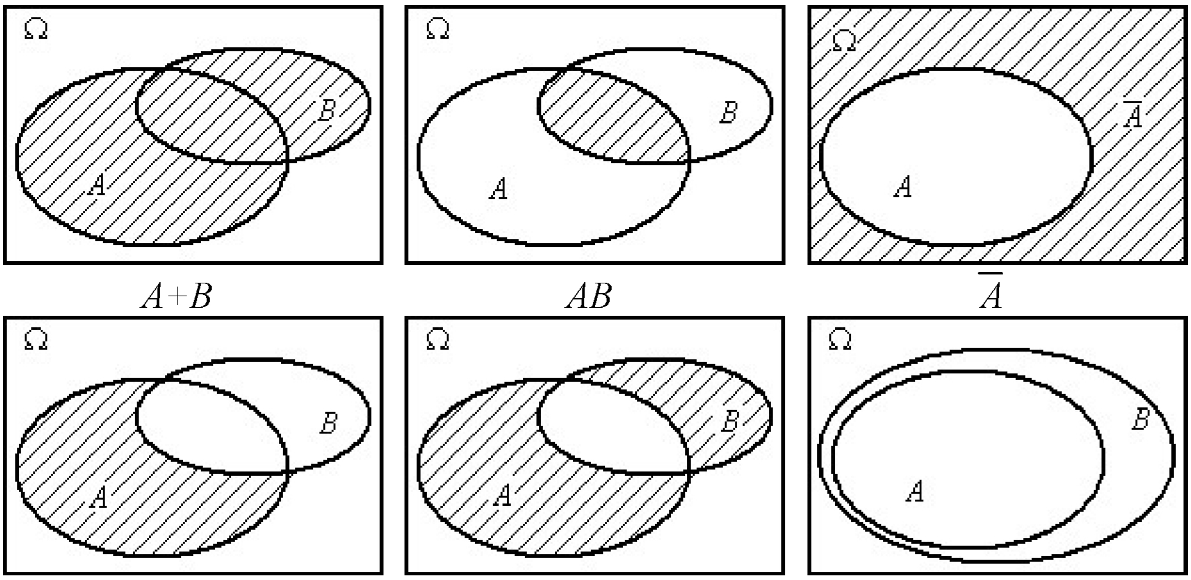

Рис. 1.1. Операции над событиями (результат – заштрихованная область)

Упростить выражения, содержащие события, часто позволяют, так называемые, соотношения дополнительности («законы де Моргана»):

$$\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}; \quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Полной группой событий называется совокупность событий $A_1,\ldots,A_n$, удовлетворяющих условиям:

1) события $A_1,\ldots,A_n$ являются попарно несовместными:

$$A_k A_j = \varnothing \text{ для всех } k \neq j;$$

2) сумма всех событий $A_1,\ldots,A_n$ есть событие достоверное:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega.$$

Пример 1. Эксперимент состоит в случайном выборе трех приборов из партии, содержащей годные и бракованные приборы. Описать пространство элементарных событий и события: A = {хотя бы один из трех выбранных приборов бракованный}, B = {все приборы годные}. Что означают события $A+B$ и AB?

Решение. Для описания пространства элементарных событий Ω необходимо указать, что является элементарным исходом случайного эксперимента ω и перечислить все возможные взаимоисключающие исходы (события). В нашем случае каждый из трех выбранных приборов может быть годным (*Г*) или бракованным (*Б*). Поэтому элементарным исходом ω является любая тройка, составленная из символов *Г* и *Б*, и пространство элементарных событий имеет вид:

$$\Omega = \{БББ, ББГ, БГБ, ГББ, БГГ, ГБГ, ГГБ, ГГГ\}.$$

Для описания события A необходимо явно указать те элементарные события $\omega \in \Omega$, которые принадлежат событию A. В нашем случае:

A = {хотя бы один из трех приборов бракованный}=

={*БББ, ББГ, БГБ, ГББ, БГГ, ГБГ, ГГБ*}.

Аналогично для события B имеем:

B = {все приборы годные}={*ГГГ*}.

Нетрудно видеть, что в данном случае сумма событий A и B есть событие ***достоверное***: $A+B=\Omega$; B является ***противоположным*** событию

$A:B=\Omega-A=\overline{A}$; $AB=A\overline{A}=\varnothing$ – событие ***невозможное***. Следовательно, события A и B являются ***несовместными***, и, более того, образуют ***полную группу событий***.

<u>Замечание:</u> Заметим, что элементарные исходы, а, следовательно, пространство элементарных событий и любое случайное событие, можно задать различными способами: формулой, текстом на естественном языке развернуто или кратко, графически. Так, например, в условиях предыдущего примера можно было бы вместо символов $Г$ и $Б$ использовать соответственно числа 1 и 0. Тогда элементарным исходом эксперимента являлось бы трехзначное двоичное число.

Отметим также, что в одном и том же случайном эксперименте возможна различная интерпретация элементарных исходов.

Пример 2. Схема электрической цепи изображена на рис. 1.2. Рассматриваются следующие события: A = {вышел из строя элемент a}, B_i = {вышел из строя элемент b_i}, $(i=1,2,3)$. Записать выражения для событий C = {разрыв цепи} и $\overline{C}$.

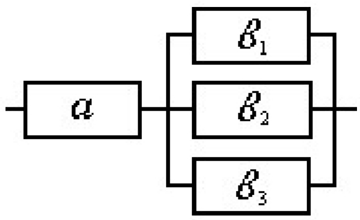

Рис. 1.2.

Решение. Разрыв цепи произойдет в том случае, если выйдет из строя или элемент a, или все элементы b_i $(i=1,2,3)$. Поскольку эти события соответственно равны A и $B_1B_2B_3$, то $C=A+B_1B_2B_3$.

Используя соотношения дополнительности («законы де Моргана»), находим:

$$\overline{C}=\overline{A+B_1B_2B_3}=\overline{A}\,\overline{B_1B_2B_3}=\overline{A}\left(\overline{B_1}+\overline{B_2}+\overline{B_3}\right).$$

Задачи

1.1.1. Эксперимент состоит в однократном бросании двух игральных костей. Пусть событие A состоит в том, что сумма выпавших очков чётная, а событие B заключается в том, что выпала хотя бы одна единица. Описать пространство элементарных событий и события AB, $A+B$, $A\overline{B}$.

1.1.2. Описать пространство элементарных исходов, соответствующее трём независимым испытаниям, в каждом из которых может наступить успех *У* или неуспех (неудача) *Н*. Выразить через элементарные исходы следующие события:

а) $A = \{$в первом испытании наступил успех$\}$;

б) $B = \{$наступило ровно два успеха$\}$;

в) $C = \{$наступило не больше двух успехов$\}$.

1.1.3. Игральная кость подбрасывается дважды. Описать пространство элементарных событий и события:

$A = \{$сумма очков равна 10$\}$;

$B = \{$по крайней мере, один раз появится 6 очков$\}$.

1.1.4. Являются ли несовместными следующие события:

а) эксперимент – бросание одной монеты; события: $A = \{$выпадение герба$\}$, $B = \{$выпадение цифры$\}$;

б) эксперимент – бросание двух монет; события: $A = \{$выпадение герба на первой монете$\}$, $B = \{$выпадение цифры на второй монете$\}$;

в) эксперимент – два выстрела по мишени; события: $A = \{$ни одного попадания$\}$, $B = \{$одно попадание$\}$, $C = \{$два попадания$\}$;

г) эксперимент – два выстрела по мишени; события: $A = \{$хотя бы одно попадание$\}$, $B = \{$хотя бы один промах$\}$;

д) эксперимент – вынимание двух карт из колоды; события: $A = \{$появление двух черных карт$\}$, $B = \{$появление туза$\}$, $C = \{$появление дамы$\}$?

1.1.5. Эксперимент состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события:

$A = \{$появление герба на первой монете$\}$;

$B = \{$появление цифры на первой монете$\}$;

$C = \{$появление герба на второй монете$\}$;

$D = \{$появление цифры на второй монете$\}$;

$E = \{$появление хотя бы одного герба$\}$;

$F = \{$появление хотя бы одной цифры$\}$;

$G = \{$появление одного герба и одной цифры$\}$;

$H = \{$не появление ни одного герба$\}$;

$K = \{$появление двух гербов$\}$.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: 1) $A+C$; 2) AC; 3) EF; 4) $G+E$; 5) GE; 6) BD; 7) $E+K$.

1.1.6. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:

$A = \{$обнаружен ровно один из четырех объектов$\}$;

$B = \{$обнаружен хотя бы один объект$\}$;

$C = \{$обнаружено не менее двух объектов$\}$;

$D = \{$обнаружено ровно два объекта$\}$;

$E = \{$обнаружено ровно три объекта$\}$;

$F = \{$обнаружены все четыре объекта$\}$.

Указать, в чем состоят события:

1) $A+B$; 2) AB; 3) $B+C$; 4) BC; 5) $D+E+F$; 6) BF.

Равносильны ли события BF и CF? Равносильны ли события BC и D?

1.1.7. Назвать противоположные для следующих событий:

$A = \{$выпадение двух гербов при бросании двух монет$\}$;

$B = \{$появление белого шара при вынимании одного шара из урны, в которой 2 белых, 3 черных и 4 красных шара$\}$;

$C = \{$три попадания при трех выстрелах$\}$;

$D = \{$хотя бы одно попадание при пяти выстрелах$\}$;

$E = \{$не более двух попаданий при пяти выстрелах$\}$;

$F = \{$выигрыш первого игрока при игре в шахматы$\}$.

1.1.8. Среди студентов, занимающихся спортом, выбирают наудачу одного. Пусть событие A заключается в том, что выбранный студент окажется юношей. Событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живет в общежитии. а) Описать событие $AB\overline{C}$; б) при каком условии будет иметь место равенство $ABC = A$? в) когда будет справедливо соотношение $\overline{C} \subseteq B$? г) когда будет справедливо равенство $\overline{A} = B$, будет ли оно иметь место, если все юноши курят?

1.1.9. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $r_k (k = 1,2,...,10)$, причем $r_1 < r_2 < \dots < r_{10}$. Событие $A_k = \{$попадание в круг радиуса $r_k\}$. Что означают события:

$$B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k \text{ ; } C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k \text{ ; } D = A_5 A_6 \text{ ; } E = \overline{A_1} A_2 \quad ?$$

1.1.10. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Рассматриваются события: $A = \{$выбранное число делится на 5$\}$, $B = \{$данное число оканчивается нулем$\}$. Что означают события $A - B$ и $A\overline{B}$?

1.1.11. Из множества супружеских пар наугад выбирается одна пара. Рассматриваются события: $A = \{$мужу больше 30 лет$\}$; $B = \{$муж старше жены$\}$; $C = \{$жене больше 30 лет$\}$.

а) Выяснить смысл событий ABC, $A - AB$, $A\overline{B}C$;

б) проверить, что $A\overline{C} \subset B$.

1.1.12. Образуют ли полную группу событий следующие события:

а) эксперимент – бросание монеты; события: $A_1 = \{$выпадение герба$\}$; $A_2 = \{$выпадение цифры$\}$;

б) эксперимент – бросание двух монет; события: $B_1 = \{$выпадение двух гербов$\}$; $B_2 = \{$выпадение двух цифр$\}$;

в) эксперимент – два выстрела по мишени; события: $A_0 = \{$ни одного попадания$\}$; $A_1 = \{$одно попадание$\}$; $A_2 = \{$два попадания$\}$;

г) эксперимент – два выстрела по мишени; события: $C_1 = \{$хотя бы одно попадание$\}$; $C_2 = \{$хотя бы один промах$\}$;

д) эксперимент – вынимание карты из колоды; события: $D_1 = \{$появление карты пиковой масти$\}$; $D_2 = \{$появление карты бубновой масти$\}$; $D_3 = \{$появление карты крестовой масти$\}$?

1.1.13. Два шахматиста играют одну партию. События: $A = \{$выигрывает первый игрок$\}$; $B = \{$выигрывает второй игрок$\}$. Какое событие следует добавить к указанной совокупности, чтобы получилась полная группа событий?

1.1.14. Пусть A и B – произвольные события. Доказать, что события A, $\overline{A}B$ и $\overline{A+B}$ образуют полную группу событий.

1.1.15. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события: $A_i = \{$попадание при i-ом выстреле$\}$, ($i = 1,2,3$). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\overline{A_i}$ следующие события:

$A = \{$все три попадания$\}$;

$B = \{$все три промаха$\}$;

$C = \{$хотя бы одно попадание$\}$;

$D = \{$хотя бы один промах$\}$;

$E = \{$не меньше двух попаданий$\}$;

$F = \{$не больше одного попадания$\}$;

$G = \{$попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле$\}$.

1.1.16. Пусть *A, B, C* - три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из *A, B, C* произошли: а) только *A*; б) *A* и *B*, но C не произошло; в) все три события; г) по крайней мере одно событие; д) одно и только одно событие; е) не произошло ни одного события; ж) не более двух событий.

1.1.17. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. Рассматриваются события: $A_k = \{$исправен k-й блок первого типа$\}$, ($k = 1,2$), $B_j = \{$исправен j-й блок второго типа$\}$, ($j = 1,2,3$). Прибор работоспособен, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Выразить событие C, означающее работоспособность прибора, через A_k и B_j.

1.1.18. Рабочий изготовил n – деталей. События: $A_i = \{i$-я деталь имеет дефект$\}$, $(i = 1, 2, ..., n)$. Выразить через A_i следующие события:

а) ни одна из деталей не имеет дефектов;

б) хотя бы одна деталь имеет дефект;

в) только одна деталь имеет дефект;

г) не более двух деталей имеют дефект;

д) по крайней мере, две детали не имеют дефектов;

е) две детали дефектны.

1.1.19. Пусть $A \subset B$. Упростить выражения:

а) AB; б) $A + B$; в) ABC; г) $A + B + C$.

1.1.20. Пусть A, B, C - случайные события. Выяснить смысл равенств:

а) $ABC = A$; б) $A + B + C = A$.

1.1.21. Когда возможны равенства:

а) $A + B = \overline{A}$; б) $AB = \overline{A}$; в) $A + B = AB$?

1.1.22. Доказать, что следующие события достоверны:

а) $(A + B)(A + \overline{B}) + (\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B})$; б) $(A + B)(\overline{A} + \overline{B}) + (A + \overline{B})(\overline{A} + B)$.

1.1.23. Доказать, что событие $(A + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B})$ невозможно.

1.1.24. Найти простые выражения для событий:

а) $(A + B)(A + \overline{B})$; б) $(A + B)(\overline{A} + B)(A + \overline{B})$; в) $(A + B)(B + C)$.

1.1.25. Обязаны ли быть равносильными события A и B, если: а) $\overline{A} = \overline{B}$; б) $A + C = B + C$ (C - некоторое событие); в) $AC = BC$ (C - некоторое событие); г) $A(A + B) = B(A + B)$; д) $A(A - B) = B(B - A)$; е) $A(A - B) = B(A - B)$; ж) $A - B = \varnothing$?

1.1.26. Сумма $A + B$ двух событий может быть выражена как сумма двух несовместных событий: $A + B = A + (B - AB)$. Выразить аналогичным образом сумму трех событий A, B, и C.

1.1.27. Установить, какие из следующих соотношений справедливы:

а) $(A+B)-C=A+(B-C)$; б) $A\overline{B}C \subseteq A+B$; в) $ABC=AB(C+B)$;

г) $(\overline{A+B})C=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; д) $\overline{\overline{A}+\overline{B}}=A+B$.

1.1.28. Найти событие X из равенства $\overline{X+A}+\overline{X+\overline{A}}=B$.

1.1.29. Показать, что равенство $(\overline{A+B})C=\overline{A}C+\overline{B}C$ имеет место тогда и только тогда, когда $AC=BC$.

1.1.30. Функцию

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, \ \omega\in A,\\ 0, \ \omega\notin A\end{cases}$$

называют индикатором события A. Доказать, что:

а) $I_{AB}(\omega)=I_A(\omega)I_B(\omega)$; б) $I_{A+B}(\omega)=I_A(\omega)+I_B(\omega)-I_A(\omega)I_B(\omega)$;

в) $I_{\overline{A}}(\omega)=1-I_A(\omega)$; г) $I_{A-B}(\omega)=I_A(\omega)\left[1-I_B(\omega)\right]$.

1.2. Классическое определение вероятности

Случайный эксперимент удовлетворяет ***классическому определению вероятности*** (или классической вероятностной схеме), если:

- пространство элементарных событий состоит из конечного числа исходов $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$;
- из соображений симметрии по отношению к условиям проведения эксперимента можно считать, что все элементарные исходы являются ***равновозможными***.

Согласно ***классическому определению вероятности*** вероятность любого события $A=\left\{\omega_{k_1},\ldots,\omega_{k_m}\right\}$, $\omega_{k_i}\in\Omega$, $k_i\in\{1,2,\cdots,n\}$, $i=\overline{1,m}$ равна отношению числа m исходов, ***благоприятствующих*** событию A, к общему числу n исходов:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{m}{n}=\frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Свойства вероятности, вытекающие из классического определения вероятности:

1) $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$;

2) $\mathrm{P}(\Omega)=1$;

3) $\mathrm{P}(\varnothing)=0$;

4) $\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)$;

5) если события A и B ***несовместны*** $(AB=\varnothing)$, то $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$;

6) $\mathrm{P}(A)\leq\mathrm{P}(B)$, если $A\subseteq B$.

Подсчет вероятностей в классической схеме сводится к нахождению общего числа исходов эксперимента и числа исходов, благоприятствующих искомому событию. Как правило, это делается комбинаторными методами. Комбинаторные формулы определяют число исходов при выборе наудачу M элементов из N различных элементов данного множества в зависимости от того, каким способом производится выбор и что понимается под различными выборками.

Схема выбора без возвращения и без упорядочивания. Если выбор M элементов из N производится без возвращения и без упорядочивания, то различными исходами считаются M-элементные подмножества данного множества, имеющие различный состав. Получаемые при этом исходы называются сочетаниями из N элементов по M, а их общее число равно $C_N^M=\dfrac{N!}{M!(N-M)!}$.

Пример. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия для контроля. Найти вероятность того, что: а) в полученной выборке ровно одно изделие бракованное; б) в полученной выборке нет ни одного бракованного изделия.

Решение. Согласно условию задачи производится выбор без возвращения и без упорядочивания 3 элементов из 10. Поэтому $|\Omega|=C_{10}^3=120$.

а) Искомому событию A благоприятствуют исходы, в которых одно изделие бракованное, а два других нет. Число всех таких исходов $|A|=C_3^1C_7^2=63$.

Поэтому $\mathrm{P}(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}=\dfrac{21}{40}$.

б) Искомому событию B благоприятствуют только такие исходы, когда все 3 отобранных элемента являются небракованными, поэтому $|B| = C_7^2 = 35$. Отсюда следует, что $\mathrm{P}(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{7}{24}$.

Схема выбора без возвращения, но с упорядочиванием. Если выбор M элементов из N производится без возвращения, но с упорядочиванием, то различными исходами считаются упорядоченные M-элементные подмножества данного множества, отличающиеся либо набором элементов, либо порядком их следования. Получаемые при этом исходы называются размещениями из N элементов по M, а их общее число равно

$$A_N^M = C_N^M M! = \frac{N!}{(N-M)!} = N(N-1)...(N-M+1).$$

В частном случае, когда $M = N$, исходами являются всевозможные перестановки элементов данного множества, а их общее число равно $P_N = A_N^N = N!$.

Пример. Из чисел 0, 1,…, 9 случайным образом выбираются два числа и записываются слева направо в порядке их появления. Какова вероятность того, что полученное при этом число является четным?

Решение. Согласно условию задачи производится выбор без возвращения, но с учетом порядка двух чисел из 10. Поэтому $|\Omega| = A_{10}^2 = 90$.

Искомому событию A благоприятствуют исходы, в которых либо первое из выбранных чисел является нечетным, а второе четным, либо оба выбранные числа являются четными. Число всех таких исходов $|A| = A_5^1 A_5^1 + A_5^2 = 45$. Поэтому $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{2}$.

Схема выбора с возвращением и с упорядочиванием. Если выбор M элементов из N производится с возвращением и с упорядочиванием, то различными исходами считаются всевозможные M-элементные наборы (вообще говоря, с повторениями), отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их следования. Получаемые при этом исходы называются размещениями с повторениями, а их общее число равно N^M .

Пример. Какова вероятность, что среди n $(n \le 365)$ случайно выбранных студентов хотя бы у двоих окажется один и тот же день рождения?

Решение. Согласно условию задачи исходами являются размещения с повторениями n дней из 365 дней. Поэтому $|\Omega| = 365^n$.

Искомому событию A благоприятствуют исходы, содержащие повторение хотя бы одного дня. Существенно проще устроено событие $\overline{A}$, противоположное событию A. Событию $\overline{A}$ благоприятствуют исходы, не содержащие ни одного повторения дней (т.е., в которых все n дней различны) и потому общее число таких исходов $|\overline{A}| = A_{365}^n$. С учетом свойств вероятности получаем, что $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = 1 - \dfrac{A_{365}^n}{365^n}$. Отметим, что при $n = 50$ $\mathrm{P}(A) \approx 0.97$.

Задачи

1.2.1. Являются ли равновозможными исходы следующих экспериментов:

1) эксперимент - бросание симметричной монеты; исходы: ω_1 - выпадение герба; ω_2 - выпадение цифры;

2) эксперимент - бросание симметричной игральной кости;

а) исходы: ω_i - выпадение i очков, $i = \overline{1,6}$;

б) исходы: ω_1 - выпадение четного числа очков, ω_2 - выпадение нечетного числа очков;

в) исходы: ω_1 - выпадение не более двух очков, ω_2 - выпадение трех или четырех очков; ω_3 - выпадение не менее пяти очков;

3) эксперимент - выстрел по мишени; исходы: ω_1 - попадание; ω_2 - промах;

4) эксперимент - бросание двух монет; исходы: ω_1 - выпадение двух гербов, ω_2 - выпадение двух цифр; ω_3 - выпадение одного герба и одной цифры;

5) эксперимент - бросание двух игральных костей;

а) исходы: $\omega_{ij} = (i, j)$ - выпадение i очков на одной кости и $j > i$ на другой, $i, j = \overline{1,6}$ (исходы (i, j) и (j, i) отождествляются);

б) исходы: $\omega_{ij} = (i, j)$ - выпадение i очков на первой кости и j на второй, $i, j = \overline{1,6}$;

в) исходы: ω_i - сумма выпавших очков на двух костях равна i, $i = \overline{2,12}$;

6) эксперимент – вынимание двух карт из колоды; исходы: ω_1 - появление двух карт красной масти, ω_2 - появление двух карт черной масти; ω_3 - появление одной карты красной масти и одной карты черной масти.

1.2.2. Приведите примеры экспериментов:

а) с тремя равновозможными исходами, образующими полную группу событий;

б) с тремя равновозможными и попарно несовместными исходами, но не образующими полную группу событий;

в) с двумя несовместными исходами, образующими полную группу событий, но не равновозможными.

1.2.3. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлечённый кубик будет иметь две окрашенные грани.

1.2.4. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго.

Найти: а) вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах; б) ошибку в предлагаемом ниже решении этой задачи.

Решение: $p = \dfrac{m}{n}$; $n = 6^3 = 216$; $m = C_6^3 = 20$, откуда $p = \dfrac{20}{216} = \dfrac{5}{54}$.

1.2.5. На шести карточках написаны буквы А, А, Б, Б, Б, О. Какова вероятность того, что расположенные наугад в ряд эти карточки составят слово БАОБАБ?

1.2.6. Десять букв разрезной азбуки А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т произвольным образом выкладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МАТЕМАТИКА?

1.2.7. Игральная кость подбрасывается шесть раз. Найти вероятность того, что выпадет: а) различное число очков на всех костях; б) одинаковое число очков на всех костях; в) хотя бы одна шестерка; г) в точности одна шестерка; д) хотя бы две шестерки.

1.2.8. (Задача игрока де Мере). Что более вероятно: при одновременном бросании четырёх костей получить хотя бы одну шестерку или при 24 бросаниях двух костей получить хотя бы один раз две шестерки.

1.2.9. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5.

1.2.10. В старинной игре в кости необходимо было для выигрыша получить при бросании трех игральных костей сумму очков, превосходящую 10. Найти вероятности: а) выбросить 11 и 12 очков; б) выигрыша.

1.2.11. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появление 6 очков имело вероятность: а) большую 0.5; б) большую 0.8; в) большую 0.9?

1.2.12. (Задача игрока де Мере). Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, большей 0.5, сумма очков, равная 12, выпала хотя бы один раз?

1.2.13. Монета подбрасывается n раз. Найти вероятность того, что число появлений герба будет нечетным.

1.2.14. Между двумя игроками проводится n партий, причем каждая партия кончается или выигрышем, или проигрышем, и все исходы партий равновозможны. Найти вероятность того, что определённый игрок выиграет ровно m партий, $0 \le m \le n$. Решить эту же задачу, если каждая партия заканчивается либо выигрышем одного из игроков, либо ничьей и все исходы партий равновозможны.

1.2.15. Чемпион мира и претендент играют матч из определенного четного числа партий. Чемпион мира сохраняет звание чемпиона, если он выигрывает матч или сводит его вничью. Что более выгодно для претендента: играть матч из большего или из меньшего числа партий? Считать, что соперники равносильны и ничьи в партиях отсутствуют.

1.2.16. Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд спортсменов разбиваются случайным образом на две подгруппы по n команд в каждой. Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе.

1.2.17. Сорок участников турнира разбиваются наугад на четыре равные группы. Найти вероятность того, что четыре сильнейших участника окажутся в разных группах.

1.2.18. Найти вероятность того, что в K выбранных наугад цифр не входит: а) 0; б) 1; в) ни 0, ни 1; г) или 0, или 1.

1.2.19. Из последовательности чисел $1,2,\ldots,n$ наугад выбирают два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1 < k < n$ - целое число?

1.2.20. Числа 1,2,3,4,5 написаны на пяти карточках. Наугад последовательно выбираются три карточки и вынутые таким образом цифры ставятся слева направо. Найти вероятность того, что полученное при этом трехзначное число будет четным.

1.2.21. Числа $1,2,..., n$ расставлены случайным образом. Найти вероятность того, что числа 1 и 2 расположены рядом и притом в порядке возрастания.

1.2.22. Найти вероятность того, что единицей окажется последняя цифра: а) квадрата; б) четвертой степени; в) результата умножения на произвольное целое число выбранного наудачу целого числа N.

1.2.23. Определить вероятность того, что номер серии наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если он может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

1.2.24. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

1.2.25. Десять студентов условились ехать определённым электропоездом, но не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если в составе поезда 10 вагонов? Предполагается, что все возможности распределения студентов по вагонам равновероятны.

1.2.26. N лиц случайным образом рассаживаются за круглым столом ($N > 2$). Какова вероятность того, что при этом два фиксированных лица A и B окажутся рядом. Найти соответствующую вероятность, если те же лица рассаживаются в ряд.

1.2.27. N лиц случайным образом рассаживаются за круглым столом или в ряд. Найти в том и другом случае вероятность того, что при этом между двумя фиксированными лицами A и B окажется ровно m человек.

1.2.28. За круглый стол в случайном порядке садятся 5 мужчин и 5 женщин. Найти вероятность того, что два лица одинакового пола не окажутся рядом.

1.2.29. Из колоды карт (52 листа) наудачу извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

1.2.30. Из колоды в 36 карт вынимаются наудачу 3 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется один туз.

1.2.31. Колода из 32-х карт тщательно перетасована. Найти вероятность того, что все четыре туза лежат в колоде один за другим, не перемежаясь другими картами.

1.2.32. Колода из 36 карт разделена на две равные части. Найти вероятность того, что каждая из полуколод будет одного цвета.

1.2.33. Колода из 36 карт четырех мастей после извлечения и возвращения одной карты перемешивается и из нее снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

1.2.34. Колода из 52 карт делится пополам. Найти вероятность того, что: а) число черных и красных карт в обеих половинах будет одинаковым; б) в каждой половине будет по два туза.

1.2.35. Из колоды карт (52 листа) наудачу извлекаются шесть карт. Найти вероятность того, что это среди этих карт будут представители всех мастей.

1.2.36. Из урны, в которой находятся три красных, три зеленых и три синих шара, наугад вынимаются три шара. Какова вероятность того, что вынутые шары имеют различные цвета.

1.2.37. Из урны, в которой находятся десять красных и пять синих шара, наугад вынимаются три шара. Каков состав шаров по цвету извлечь наиболее вероятно.

1.2.38. Из урны, содержащей шары с номерами $1,2,\ldots,N$, k раз вынимается шар, и каждый раз возвращается обратно. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров образуют возрастающую последовательность. Решить эту же задачу, если выбор k шаров производится без возвращения.

1.2.39. В урне находятся a белых и b черных шаров. Шары без возвращения извлекаются из урны. Найти вероятность того, что k-й вынутый шар оказался белым.

1.2.40. Только один из n ключей подходит к данной двери. Найти вероятность того, что придется опробовать ровно k ключей для открывания двери.

1.2.41. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, извлекается без возвращения n шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется m белых, $m \le \min(M,n)$.

1.2.42. В лотерее n билетов, из которых m выигрышные. Как велика вероятность выигрыша для того, кто имеет k билетов?

1.2.43. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам; попадание каждого шарика в ту или другую лунку равновозможно (препятствий к попаданию в одну и ту же лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что в одной лунке окажется три шарика, в другой – один, а в двух остальных лунках шариков не будет.

1.2.44. Имеются M шариков, которые случайным образом разбрасываются по N лункам ($N > M$). Определить вероятность того, что в первых M лунках будет только по одному шарику.

1.2.45. Имеется M шариков, которые случайным образом разбрасываются по N лункам. Найти вероятность того, что в первую лунку попадет k_1 шариков, во вторую - k_2 шариков и т.д., в N-ю - k_N шариков, $k_1 + k_2 + \ldots + k_N = M$.

1.2.46. Случайно размещаются n шаров по N ящикам. При $n = N$ найти вероятность того, что ровно один ящик окажется пустым.

1.2.47. Найти вероятность того, что при размещении n шаров по N ящикам заданный ящик будет содержать ровно k $(0 \le k \le n)$ шаров (все размещения равновероятны).

1.2.48. Каждый из N шаров наугад кладут в один из N ящиков. M ящиков оказываются пустыми. Найти наиболее вероятное значение M.

1.2.49. N орудий производят стрельбу по N целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом и независимо от других. Цель, обстрелянная орудием, поражается наверняка. Найти вероятность поражения всех N целей.

1.2.50. Батарея, состоящая из k орудий, ведет огонь по группе из l самолетов $(k \le l)$. Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что:

а) все k орудий будут стрелять по одной и той же цели;

б) все орудия будут стрелять по разным целям.

1.2.51. Батарея из M орудий ведет огонь по группе из N целей $(M \le N)$. Орудия выбирают себе цели последовательно, случайным образом и при условии, что никакие два орудия стрелять по одной цели не могут. Найти вероятность того, что будут обстреляны цели с номерами $1, 2, \ldots, M$.

1.2.52. В шкафу n пар ботинок. Из них случайно выбираются $2r$ ботинок ($2r < n$). Найти вероятность того, что: а) среди вынутых ботинок нет парных; б) имеется ровно одна пара.

1.2.53. Некоторые пассажиры считают номер трамвайного, троллейбусного или автобусного билета "счастливым", если сумма первых его трех цифр совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получить "счастливый" билет.

1.2.54. Группа, состоящая из $2N$ мальчиков и $2N$ девочек, делится случайным образом на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части число мальчиков и девочек одинаково. Вычислить эту вероятность, используя формулу Стирлинга.

1.2.55. Некий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда математик вынет пустую коробку, в другой коробке окажется r спичек, $r = 0,1,2,\ldots,n$, где n - число спичек, бывших первоначально в каждой из коробок.

1.2.56. Каждая из n палок разламывается на две части - длинную и короткую. Затем $2n$, полученных обломков объединяются в n пар, каждая из которых образует новую "палку". Найти вероятность того, что: а) все обломки объединены в первоначальном виде; б) все длинные части соединены с короткими.

1.2.57. Королевский казначей кладет в каждый из N ящиков по N монет, из которых одна монета - фальшивая. Король не доверяет казначею и проверяет по одной монете из каждого ящика. Какова вероятность того, что подлог будет обнаружен? Рассчитать вероятность для больших N.

1.3. Геометрическое определение вероятности

Случайный эксперимент удовлетворяет ***геометрическому определению вероятности***, если:

- исходы эксперимента можно изобразить точками некоторой области $\Omega \in \mathrm{R}^n$, имеющей конечную меру μ;

- можно считать, что попадание точки в любые области $A \subset \Omega$, имеющие одинаковую меру μ, ***равновозможно*** и не зависит от формы и расположения A внутри Ω. При этом говорят, что ***точка равномерно распределена*** в области Ω или бросается в область Ω наудачу.

Согласно ***геометрическому определению вероятности*** вероятность попадания точки в любую область A (событие A) пропорциональна ее мере μ:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

В приводимых ниже задачах под мерой $\mu(\cdot)$ понимается длина $\ell(\cdot)$ при $n=1$; площадь $S(\cdot)$ при $n=2$; объем $V(\cdot)$ при $n=3$.

Пример 1. Определить вероятность того, что длина хорды, наудачу проведенной из данной точки C единичной окружности, больше стороны правильного треугольника, вписанного в окружность.

Решение. Обозначим φ - угол между фиксированным диаметром, проходящим через точку C, и хордой (рис. 1.3). Тогда все возможные направления хорды определяются неравенством $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то есть $\Omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Благоприятствующими искомому событию A являются значения углов, для которых длина хорды $2\cos\varphi$ будет больше $\sqrt{3}$, то есть $A = \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

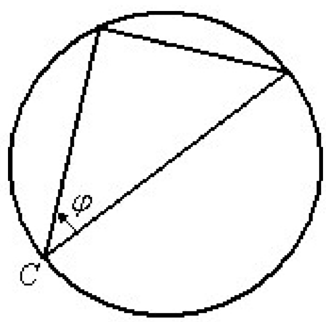

Рис. 1.3

Следовательно

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\ell(A)}{\ell(\Omega)} = \frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3}.$$

Замечание. Решить данную задачу другим способом.

Пример 2. (Задача Бюффона). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длиной $2l$ $(l < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет одну из прямых.

Решение. Обозначим $x \in [0, a]$ - расстояние от середины иглы до ближайшей прямой, а $\varphi \in [0, \pi]$ - угол, который образует игла с этой прямой (рис. 1.4).

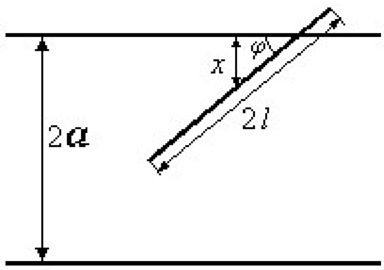

Рис. 1.4

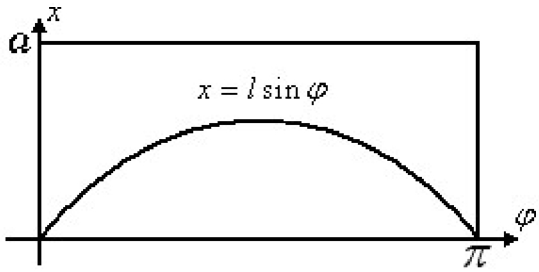

Рис 1.5

Тогда множество возможных положений иглы целиком определяется выбором наудачу точки из прямоугольника $\Omega = [0, \pi] \times [0, a]$.

Игла пересечет ближайшую прямую, если координаты выбранной наудачу точки удовлетворяют неравенствам (рис. 1.5):

$$x \le l \cdot \sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi .$$

Площадь области, соответствующей искомому событию A, равна

$$S(A) = \int_0^{\pi} l \cdot \sin\varphi \, d\varphi = 2l .$$

Так как $S(\Omega) = a\pi$, то $\mathrm{P}(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)} = \dfrac{2l}{a\pi}$.

Задачи

1.3.1. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты – красный, затем снова одну минуту – зеленый и полминуты – красный и т.д. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность, что он проедет перекресток без остановки?

1.3.2. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше 1, не превзойдет 1, а их произведение будет не больше 2/9?

1.3.3. Из отрезка [1;3] наугад выбираются 2 вещественных числа. Найти вероятность того, что их сумма больше их произведения.

1.3.4. Спутник двигается по орбите между 60° северной широты и 60° южной широты. Вероятность падения спутника в любую область пропорциональна площади этой области. Вычислить вероятность падения спутника севернее 30° северной широты.

1.3.5. В круг радиуса R наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до центра круга не превысит r?

1.3.6. На окружности радиуса R наудачу взяты две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превышает r $(r \le 2R)$?

1.3.7. В единичном круге проведена хорда параллельно заданному направлению. Определить вероятность того, что длина хорды будет больше стороны правильного треугольника, вписанного в окружность.

1.3.8. На окружности радиуса R наугад поставлены три точки A, B и C. Чему равна вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный?

1.3.9. Значения a и b равновозможны в квадрате $[-1,1]\times[-1,1]$. Определить вероятности того, что: а) корни квадратного уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ действительны; б) корни квадратного уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ положительны.

1.3.10. Паркетный пол составлен из прямоугольных плиток размером 8 см на 26 см. Найти вероятность того, что упавшая на пол монета полностью окажется на одной плитке, если ее диаметр равен 2 см.

1.3.11. На бесконечную “шахматную доску” со стороной квадрата a наудачу бросается монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятности того, что:

а) монета попадет целиком внутрь одного квадрата;

б) монета пересечет не более одной стороны квадрата.

1.3.12. Считая, что монета представляет собой цилиндр с высотой h, равной половине диаметра d, найти вероятность того, что при бросании монеты она упадет на ребро.

1.3.13. Какова вероятность не целясь попасть бесконечно малой пулей в квадратную решетку, если толщина прутьев равна a, а расстояние между их средними линиями равно l $(l > a)$?

1.3.14. На отрезок AB длины l брошена точка C так, что любое ее положение на этом отрезке равновозможно. Найти вероятность того, что меньший из отрезков (AC или CB) имеет длину большую, чем $l/4$.

1.3.15. На отрезке длины l наугад взяты две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними меньше kl, если $0 < k < 1$?

1.3.16. Какова вероятность того, что сумма трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит l, будет больше l?

1.3.17. На отрезок [0, 1] наудачу брошено две точки, разбившие его на три отрезка. Какова вероятность того, что из них можно построить треугольник?

1.3.18. В круг радиусом R вписан правильный n – угольник. В круг бросают наугад точку. Какова вероятность того, что точка попадет внутрь многоугольника?

1.3.19. (Задача о встрече). Двое договорились встретиться на отрезке времени $[0,T]$. Первый пришедший ждет второго время l $(l < T)$. Найти вероятность того, что встреча произойдет.

1.3.20. Девушка и юноша договорились встретиться у кинотеатра с 17 часов до 17 часов 30 минут. Если девушка придет раньше юноши, она будет ждать не более 10 минут, а юноша обязательно дождется девушки. Какова вероятность их встречи?

1.3.21. Два теплохода должны подойти к одному причалу. Время прихода каждого из них равновозможно в течение суток и не зависит от времени прихода другого. Определить вероятность того, что одному из теплоходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого теплохода 1 час, а второго – 2 часа.

1.3.22. К автобусной остановке в течение каждых 10 минут подходит один автобус A и один B. Оба автобуса прибывают на остановку в случайный момент времени на каждом 10-минутном интервале. Стоянка автобуса A - 1 мин, а автобуса B - 1,5 мин. Какова вероятность того, что одному автобусу придется ожидать, пока другой покинет остановку?

1.3.23. В любые моменты интервала времени T равновозможны поступления в приемник двух независимых сигналов. Приёмник пропустит сигнал, если разность между моментами поступления сигналов будет меньше τ. Определить вероятность того, что приемник пропустит сигнал.

1.3.24. В случайный момент времени $x \in [0, T]$ передается сигнал длительностью t_1. В случайный момент $y \in [0, T]$ включается приемник на время $t_2 < t_1$. Найти вероятность обнаружения сигнала, если:

а) приемник настраивается мгновенно;

б) время настройки приемника равно $t_3 \ (t_3 < t_2 < t_1)$.

1.3.25. На шарик нанесена сетка географических координат. Шарик наудачу брошен на плоскость. Найти вероятность того, что он прикоснется точкой: а) которая находится в области между 0° и 90° восточной долготы; б) которая находится в области между 45° и 90° северной широты.

1.3.26. На поверхности шара берут наудачу две точки и соединяют меньшей дугой большого круга. Найти вероятность того, что дуга не превзойдет α.

1.4. Аксиомы теории вероятностей. Условная вероятность. Независимость случайных событий

Пусть Ω - пространство элементарных событий некоторого случайного эксперимента. Множество F подмножеств Ω называется σ-алгеброй (или σ-алгеброй случайных событий), если выполнены следующие условия:

($A1$) $\Omega \in \mathrm{F}$;

($A2$) если $A \in \mathrm{F}$, то $\overline{A} \in \mathrm{F}$;

($A3$) если $A_i \in \mathrm{F} \quad (i = 1, 2, \ldots)$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{F}$.

Условия ($A1$) - ($A3$) называются аксиомами σ - алгебры.

Вероятностью или ***вероятностной мерой*** на ***измеримом пространстве*** (Ω,Φ) называется функция $\mathrm{P}:\Phi\to\mathrm{R}$, обладающая свойствами:

($P1$) $\mathrm{P}(A)\ge 0\quad \forall A\in\Phi$;

($P2$) $\mathrm{P}(\Omega)=1$;

($P3$) для любой последовательности попарно несовместных случайных событий $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots\in\Phi$ $\left(A_iA_j=\varnothing \text{ при } i\ne j\right)$ имеет место равенство

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_i).$$

Свойства ($P1$) - ($P3$) называются аксиомами вероятности.

Тройка (Ω,Φ,P), в которой Ω - пространство элементарных событий, Φ - σ-алгебра его подмножеств, P - вероятностная мера на Φ называется ***вероятностным пространством.***

Основные свойства вероятности, вытекающие из аксиом:

1. $\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)$. 2. $\mathrm{P}(\varnothing)=0$.

3. Если $A\subseteq B$, то $\mathrm{P}(A)\le\mathrm{P}(B)$. 4. $0\le\mathrm{P}(A)\le 1$.

Теорема сложения вероятностей.

Для любых событий $A,B\in\mathrm{F}$

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB).$$

Для любых трех событий $A,B,C\in\mathrm{F}$

$$\mathrm{P}(A+B+C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(AB)-\mathrm{P}(AC)-\mathrm{P}(BC)+\mathrm{P}(ABC).$$

Для любого конечного числа n событий $A_1,\ldots,A_n$

$$\mathrm{P}(A_1+\ldots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)-\sum_{i<j}\mathrm{P}(A_iA_j)+$$

$$+\sum_{i<j<m}\mathrm{P}(A_iA_jA_m)-\ldots+(-1)^{n-1}\mathrm{P}(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_n).$$

Условной вероятностью события A, при условии, что произошло событие B, называется величина

$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)},\quad \text{если}\quad \mathrm{P}(B)>0.$$

Теорема умножения вероятностей. Если $\mathrm{P}(A)>0$ и $\mathrm{P}(B)>0$, то

$$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A\,|\,B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\,|\,A).$$

В общем случае, если события $A_1,A_2,\dots,A_n$ такие, что $\mathrm{P}(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_n)>0$, то

$$\mathrm{P}(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2\,|\,A_1)\mathrm{P}(A_3\,|\,A_1A_2)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(A_n\,|\,A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}).$$

События A и B называются ***независимыми***, если

$$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Если $\mathrm{P}(B)>0$, то события A и B независимы $\Leftrightarrow \mathrm{P}(A\,|\,B)=\mathrm{P}(A)$.

Если $\mathrm{P}(A)>0$, то события A и B независимы $\Leftrightarrow \mathrm{P}(B\,|\,A)=\mathrm{P}(B)$.

События $A_1,A_2,\dots,A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если для любого $2\le k\le n$ и любого набора индексов $1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n$

$$\mathrm{P}\left(A_{i_1}\cdot\ldots\cdot A_{i_k}\right)=\mathrm{P}\left(A_{i_1}\right)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}\left(A_{i_k}\right).$$

Пример 1. Из колоды (36 карт) вынимаются последовательно без возвращения две карты. Найти вероятность того, что первой картой была шестерка, а второй семерка. Найти условную вероятность того же события при условии, что обе карты бубновой масти.

Решение. Воспользуемся классической схемой. Множество Ω состоит из всех упорядоченных пар различных карт. Поскольку любой из 36 вариантов выбора первой карты может объединиться с любым из 35 вариантов выбора второй карты, то общее число различных исходов $|\Omega|=36\cdot 35$. Рассмотрим события A и B:

A = {первая карта – шестерка, вторая - семерка};

B = {обе карты бубновой масти}.

Тогда

AB = {первая карта – бубновая шестерка, вторая карта – бубновая семерка}.

По аналогии с вычислением $|\Omega|$ находим $|B| = 9\cdot 8$. В событии A шестерка и семерка имеют любую масть, поэтому $|A| = 4\cdot 4$. Произведение AB состоит из единственного элементарного исхода, следовательно, $|AB| = 1$.

В соответствии с классическим определением вероятности получаем:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{4\cdot 4}{36\cdot 35} = \frac{4}{315}, \qquad \mathrm{P}(AB) = \frac{1}{36\cdot 35}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{9\cdot 8}{36\cdot 35}$$

и, наконец,

$$P(A\,|\,B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{1/(36\cdot 35)}{(9\cdot 8)/(36\cdot 35)} = \frac{1}{72}.$$

Пример 2. Разрыв электрической цепи может произойти, если выйдут из строя или элемент a_1, или элементы a_2 и a_3 одновременно. Предполагается, что все элементы a_i, $i = 1,2,3$ выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}2$ соответственно. Найти вероятность разрыва электрической цепи.

Решение. Рассмотрим события:

A_i = {отказ элемента a_i}, $i = 1,2,3$;

A = {разрыв цепи}.

По условию задачи событие A представляется в виде: $A = A_1 + A_2A_3$. При этом слагаемые в сумме несовместными событиями не являются. Поэтому для определения вероятности события A следует использовать теорему сложения вероятностей, в соответствии с которой

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2A_3) - \mathrm{P}(A_1A_2A_3).$$

Используя далее независимость событий A_i, $i = 1,2,3$ и подставляя числовые значения, получаем:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3) - \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3) = 0{,}1 + 0{,}2\cdot 0{,}2 - 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2 = 0{,}136.$$

Пример 3. Изготовленное изделие поступает потребителю, если при проверке оно будет признано стандартным. Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,2. В результате проверки бракованное изделие ошибочно принимается за стандартное с вероятностью 0,05, а стандартное может быть принято за бракованное с вероятностью 0,01. Найти вероятности событий:

A = {потребитель получил стандартное изделие};

B = {потребитель получил бракованное изделие}.

Решение. Рассмотрим события:

C = {изготовлено стандартное изделие};

D = {при проверке изделие признано стандартным}.

По условию задачи

$$\mathrm{P}\left(\overline{C}\right)=0{,}2;\ \mathrm{P}\left(D\,|\,\overline{C}\right)=0{,}05;\ \mathrm{P}\left(\overline{D}\,|\,C\right)=0{,}01.$$

События A и B можно представить в виде: $A=CD, B=\overline{C}D$. Поэтому получим:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(CD)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D\,|\,C)=\left(1-\mathrm{P}\left(\overline{C}\right)\right)\left(1-\mathrm{P}\left(\overline{D}\,|\,C\right)\right)=$$
$$=(1-0{,}2)(1-0{,}01)=0{,}792;$$

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}\left(\overline{C}D\right)=\mathrm{P}\left(\overline{C}\right)\mathrm{P}\left(D\,|\,\overline{C}\right)=0{,}2\cdot 0{,}05=0{,}01.$$

Задачи

1.4.1. Пусть $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...\}$ - произвольное счетное множество, $\{p_n\}, n\geq 1$ - последовательность таких неотрицательных чисел, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n=1$, F - система всех подмножеств Ω. Для каждого $A\in\mathrm{F}$ положим $\mathrm{P}(A)=\sum\limits_{\omega_i\in A}p_i$. Доказать, что $(\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P})$ - вероятностное пространство.

1.4.2. Пусть $\Omega=[0,+\infty)$ и F - σ-алгебра подмножеств Ω. Для каждого $A\in\mathrm{F}$ положим $\mathrm{P}(A)=\sum\limits_{n\in A}\frac{1}{2^n}$, где n принимает целые положительные значения. Является ли $(\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P})$ вероятностным пространством?

1.4.3. Пусть Ω - область в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, имеющая конечную меру Лебега $\mu:\mu(\Omega)<\infty$, F - множество подмножеств Ω, мера Лебега которых $\mu(\cdot)$ конечна. Для каждого $A \in \mathrm{F}$ положим $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

Доказать, что $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ - вероятностное пространство.

1.4.4. Используя аксиомы и свойства вероятности, доказать, что

$$\mathrm{P}(A - B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB);$$

$$\mathrm{P}(A \triangle B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\mathrm{P}(AB).$$

1.4.5. Показать, что для любых двух событий A и B

$$\mathrm{P}(AB) \le \mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(A + B) \le \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B);$$

$$\max[\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)] \le \mathrm{P}(A \cup B) \le 2\max[\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)].$$

1.4.6. Пусть вероятность каждого из событий A и B равна $1/2$. Доказать, что тогда $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(\overline{A}\,\overline{B})$.

1.4.7. Пусть $\mathrm{P}(A) \ge 0{,}8$, $\mathrm{P}(B) \ge 0{,}8$. Доказать, что $\mathrm{P}(AB) \ge 0{,}6$.

1.4.8. Пусть A и B - случайные события, p_0 - вероятность того, что не наступает ни одно из них, p_1 - вероятность того, что наступает одно и только одно событие, p_2 - вероятность того, что наступят оба события. Выразить p_0, p_1, p_2 через $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(AB)$.

1.4.9. Пусть p_n – вероятность того, что наступает n событий из событий A, B, C (n = 0,1,2,3). Выразить p_n через $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(C)$, $\mathrm{P}(AB)$, $\mathrm{P}(AC)$, $\mathrm{P}(BC)$ и $\mathrm{P}(ABC)$.

1.4.10. Известны вероятности событий A, B и AB. Найти вероятность событий: а) $\overline{A} + \overline{B}$; б) $\overline{A}\,\overline{B}$; в) $A + \overline{B}$; г) $A\overline{B}$; д) $\overline{A + B}$; е) $\overline{AB}$; ж) $\overline{A}(A + B)$; з) $A + (\overline{A}B)$.

1.4.11. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – случайные события. Доказать, что

а) $\mathrm{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \mathrm{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}) \le \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$;

б) $\mathrm{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i) \ge 1 - \mathrm{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i})$.

1.4.12. Доказать, что для любых n событий $A_1, A_2, ..., A_n$

$$P(A_1 A_2 ... A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - (n-1).$$

1.4.13. Доказать, что для любых двух событий A и B выполняется соотношение $|P(AB) - P(A)P(B)| \leq 1/4$.

1.4.14. Дано: $P(A|B) = 0{,}7$; $P(A|\overline{B}) = 0{,}3$; $P(B|A) = 0{,}6$. Найти $P(A)$.

1.4.15. Известно, что $P(A) = 0{,}3$, $P(\overline{B}) = 0{,}6$, $P(A|B) = 0{,}32$. Найти вероятности $P(A+B)$, $P(AB)$, $P(A|\overline{B})$, $P(B|A)$, $P\left(\overline{A+B}\right)$, $P\left(\overline{AB}\right)$.

1.4.16. Пусть $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A|\overline{B}) = 0{,}5$. Найти вероятность события $\grave{A}B$ и условную вероятность $P(\overline{B}|\overline{A})$.

1.4.17. Доказать, что если $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}8$, то $P(A|B) \geq 0{,}875$.

1.4.18. Показать, что если события A и B несовместны и $P(A+B) \neq 0$, то

$$P(A|A+B) = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}.$$

1.4.19. Эксперимент состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события:

A = {выпадение герба на первой монете};

D = {выпадение хотя бы одного герба};

E = {выпадение хотя бы одной цифры};

F = {выпадение герба на первой монете}.

Определить, являются ли независимыми следующие пары событий:

1) A и E; 2) A и F; 3) D и E; 4) D и F.

1.4.20. Пусть $A \subset B$. Зависимы в этом случае события A и B или нет?

1.4.21. Являются ли независимыми:

а) равновозможные события;

б) события, образующие полную группу событий?

1.4.22. Из колоды в 36 карт вынимается одна карта. Рассматриваются события:

A = {появление туза};

B = {появление карты красной масти};

C = {появление бубнового туза};

D = {появление десятки}.

Определить, зависимы или независимы следующие пары событий:

а) A и B; б) A и C; в) B и C; г) B и D; д) C и D.

1.4.23. Из колоды в 36 карт наугад извлекают одну карту. Определить, являются ли независимыми события:

A = {появление карты пиковой масти};

B = {появление дамы}.

Изменится ли результат, если в колоду добавить 100 «пустых» карт?

1.4.24. Из 20 студентов, находящихся в аудитории, 8 человек курят, 12 носят очки, а 6 и курят и носят очки. Одного из студентов вызвали к доске. Рассмотрим следующие события:

A = {вызванный студент курит};

B = {вызванный носит очки}.

Установить, зависимы события A и B или нет. Сделать предположение о характере влияния курения на зрение.

1.4.25. События A и B несовместны, $\mathrm{P}(A) \neq 0$ и $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Зависимы ли данные события?

1.4.26. Пусть $\mathrm{P}(B) > 0$ и выполняется равенство $\mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1$. Что можно сказать про события A и B?

1.4.27. Доказать, что если события A и B независимы, то события A и $\overline{B}$, а также $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независимы.

1.4.28. Доказать, что если $\mathrm{P}(A) > 0$ и $\mathrm{P}(B \mid \overline{A}) = \mathrm{P}(B \mid A)$, то события A и B независимы.

1.4.29. События A и B_1, а также A и B_2 независимы, а события B_1 и B_2 - несовместны. Доказать, что события A и $B_1 + B_2$ независимы.

1.4.30. Какова вероятность извлечь из колоды в 36 карт фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называется валет, дама или король)?

1.4.31. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара будут одного цвета?

1.4.32. Два стрелка, вероятности попадания в мишень каждого из которых равны 0,7 и 0,8 соответственно, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

1.4.33. Три стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятности попаданий при этом равны 0,4; 0,6; 0,7. Найти вероятность того, что в мишени будет: а) ровно одна пробоина; б) хотя бы одна пробоина.

1.4.34. Два охотника стреляют в волка, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого охотника вероятность попадания в цель равна 0,7, для второго - 0,8. Какова вероятность попадания в волка? Как изменится результат, если охотники сделают по два выстрела?

1.4.35. Монету бросают до тех пор, пока два раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятность того, что: а) опыт закончится до пятого бросания; б) потребуется четное число бросаний; в) потребуется нечетное число бросаний.

1.4.36. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

1.4.37. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка $p_1 = 0,2$, а для второго $p_2 = 0,3$. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

1.4.38. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента K_1 или трех элементов K_2, K_3 и K_4 одновременно, которые выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0,3, 0,2, 0,2 и 0,2 соответственно. Определить вероятность разрыва электрической цепи.

1.4.39. Электрическая цепь составлена из элементов 1, 2, 3, 4, 5 (рис. 1.6):

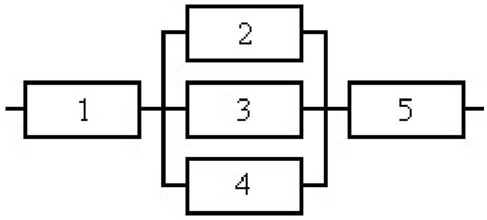

Рис. 1.6.

Вероятности отказов элементов цепи соответственно равны 0,5, 0,7, 0,9, 0,8, 0,6. Найти вероятность отказа цепи, предполагая, что элементы работают независимо друг от друга.

1.4.40. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

1.4.41. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Определить вероятность того, что в цель попал первый стрелок.

1.4.42. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков равны p_1, p_2 и p_3 соответственно. Какова вероятность, что второй стрелок промахнулся, если после стрельбы в мишени оказалось две пробоины?

1.4.43. Брошено три игральных кости. Найти вероятность того, что при этом: а) выпадет три шестёрки; б) выпадет три шестёрки, если известно, что на одной из костей выпала шестёрка.

1.4.44. Вероятность попадания в самолет равна 0,4, а вероятность сбить самолет 0,2. Найти вероятность того, что при попадании в самолет он будет сбит.

1.4.45. Против самолета были пущены две ракеты. Самолет был сбит. Найти вероятность того, что при этом первая ракета попала в самолет, если вторая попадает в него с вероятностью 0,5, а совместный пуск обеспечивает поражение с вероятностью 0,8.

1.4.46. Известно, что при бросании 10-ти игральных костей появилась по крайней мере одна единица. Какова вероятность того, что появилось две или более единиц?

1.4.47. Симметричная монета подбрасывается $n = 10$ раз. Известно, что при третьем подбрасывании выпал герб. Какова вероятность того, что этот герб выпал первый раз?

1.4.48. Бросают три игральные кости. Какова вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет единица, если на трех костях выпали разные грани?

1.4.49. Игральная кость подбрасывается два раза. Известно, что сумма выпавших очков равна 10. Какова вероятность, что при этом один раз появилось 6 очков?

1.4.50. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более трех раз.

1.4.51. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачёт будет сдан, если студент ответит не менее чем на 3 из 4-х вопросов в билете. Взглянув на первый вопрос, студент обнаружил, что знает его. Какова вероятность, что студент сдаст зачёт?

1.4.52. В урне находятся 5 шаров, отличающихся только номерами 1, 2, 3, 4, 5. Вынимается наугад шар и отмечается его номер. Вынутый шар возвращается в урну. После тщательного перемешивания из нее вновь наугад вынимается шар. Известно, что в первый раз был вынут шар с номером 1. Какова вероятность во второй раз вынуть шар с номером 2?

1.4.53. В урне находятся 5 шаров, отличающихся только номерами 1, 2, 3, 4, 5. Вынимается наугад шар. Вынутый шар не возвращается в урну. Вновь наугад вынимается шар. Известно, что в первый раз был вынут шар с номером 1. Какова вероятность во второй раз вынуть шар с номером 2?

1.4.54. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4% всей продукции брак, а 75% небракованных изделий соответствуют требованиям первого сорта.

1.4.55. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна p_1. При повышении напряжения вероятность аварии прибора равна p_2. Определить вероятность аварии прибора вследствие повышения напряжения.

1.4.56. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны 0,4, 0,3 и 0,5.

1.4.57. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,3$.

1.4.58. Элементы с номерами 1, 2, 3, 4 соединены в схемы, изображенные на рис. 1.7:

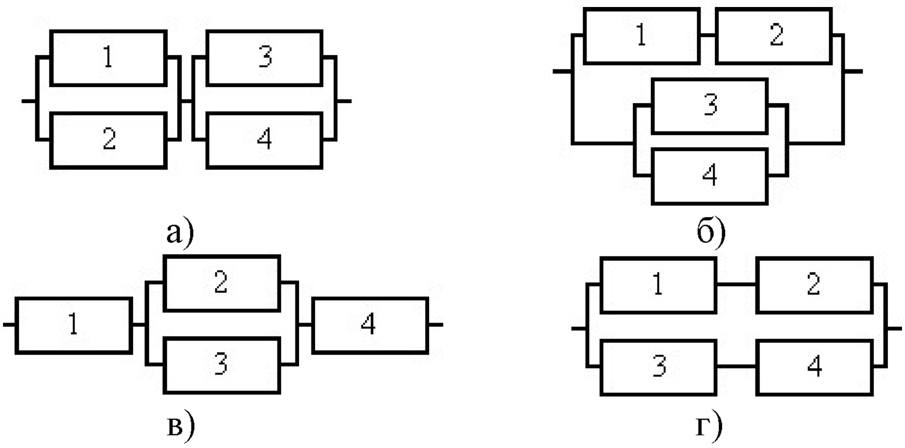

Рис. 1.7.

Предполагается, что элементы в схемах работают независимо друг от друга и имеют надежности (вероятности безотказной работы) $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,3$, $p_4 = 0,3$ соответственно.

Вычислить надежность каждой из схем и определить вероятность того, что отказал элемент с номером 4, если известно, что схема не работает.

1.4.59. При игре в бридж раздаются 52 карты. Каждый из четырех участников получает набор из 13 карт. При раздаче карт по ошибке одна карта перевернулась и оказалась тузом. Какова вероятность (условная) того, что в этом наборе карт будет ровно 3 туза?

1.4.60. Из колоды в 52 карты вытаскивается черная карта. Из оставшихся 51 карты наугад выбирается 13 карт, причем оказывается, что все они одного цвета. Показать, что условная вероятность того, что они красные, равна $2/3$.

1.4.61. Урна содержит M занумерованных шаров с номерами от 1 до M. Шары извлекаются из урны по одному без возвращения. Найти вероятность того, что не будет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Найти предельное значение этой вероятности при $\mathrm{M} \to \infty$.

1.4.62. В электропоезд, состоящий из n вагонов, входят k $(k \geq n)$ пассажиров, которые выбирают вагоны наудачу. Определить вероятность того, что в каждый вагон войдет хотя бы один пассажир.

1.4.63. Имеется группа из k космических объектов, каждый из которых независимо от других обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью p. За группой объектов ведут наблюдение независимо друг от друга m радиолокационных станций. Найти вероятность того, что не все объекты, входящие в группу, будут обнаружены.

1.4.64. Истребитель атакует бомбардировщик, делает один выстрел и сбивает бомбардировщик с вероятностью p_1. Если этим выстрелом бомбардировщик не сбит, то он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью p_2. Если истребитель этим выстрелом не сбит, то он ещё раз стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_3. Найти вероятности следующих событий:

а) A = {сбит бомбардировщик};

б) B = {сбит истребитель};

в) C = { сбит хотя бы один самолёт}.

1.4.65. Вероятность выхода прибора из строя после того, как он применялся k раз, равна $p(k)$. Найти вероятность выхода прибора из строя при его последующих n применениях, если при предшествующих m применениях прибор из строя не вышел.

1.4.66. Вероятность того, что прибор не откажет к моменту времени t_1, равна 0,8, а вероятность, что он не откажет к моменту времени t_2 $(t_2 > t_1)$, равна 0,6. Найти вероятность того, что прибор, не отказавший к моменту времени t_1, не откажет и к моменту времени t_2.

1.4.67. Вероятность поступления *k* вызовов на телефонную станцию за промежуток времени *t* равна $p_t(k)$. Считая число вызовов за любые два соседних промежутка времени независимыми, определить вероятность $p_{2t}(s)$ поступления *s* вызовов за промежуток времени 2*t*.

1.5. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если событие A может произойти в результате эксперимента только одновременно с одним из событий $H_1,..,H_n$, образующих полную группу событий, то вероятность события A вычисляется по формуле:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(H_k)\mathrm{P}(A \mid H_k),$$

называемой ***формулой полной вероятности***. При этом события H_k называются ***гипотезами*** по отношению к событию A, а вероятности $\mathrm{P}(H_k)$ - ***априорными вероятностями*** гипотез, $k = \overline{1,n}$.

Если в результате описанного выше эксперимента стало известно, что событие A произошло, то с учетом этого «новые» условные вероятности гипотез $\mathrm{P}(H_k \mid A)$, называемые ***апостериорными вероятностями***, вычисляются по формуле

$$\mathrm{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathrm{P}(H_k)\mathrm{P}(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A \mid H_i)}, \ k = \overline{1,n},$$

называемой ***формулой Байеса*** (или ***формулой гипотез***).

Формулы полной вероятности и Байеса остаются справедливыми и тогда, когда события $H_1,..,H_n$ являются только попарно несовместными и $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} H_k$.

Пример 1. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой a белых и b черных шаров; во второй c белых и d черных; в третьей только белые шары. Из случайно выбранной урны наугад извлекается один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Пусть событие A ={извлеченный шар белый}. Сформулируем гипотезы:

H_1={для извлечения шара была выбрана первая урна};

H_2={для извлечения шара была выбрана вторая урна};

H_3={для извлечения шара была выбрана третья урна}.

По условию задачи выбор любой из трех урн равновозможен, то есть

$$\mathrm{P}(H_1)=\mathrm{P}(H_2)=\mathrm{P}(H_3)=\frac{1}{3}.$$

Используя классическое определение, находим условные вероятности:

$$\mathrm{P}(A\,|\,H_1)=\frac{a}{a+b};\quad \mathrm{P}(A\,|\,H_2)=\frac{c}{c+d};\quad \mathrm{P}(A\,|\,H_3)=1.$$

Наконец, используя формулу полной вероятности, находим вероятность интересующего нас события:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\frac{a}{a+b}+\frac{1}{3}\frac{c}{c+d}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1\right).$$

Пример 2. Имеются две партии однородных изделий. Первая состоит из N изделий, среди которых n дефектных. Вторая партия состоит из M изделий, среди которых m дефектных. Из первой партии случайным образом берут K изделий, а из второй - L изделий $(K<N; L<M)$. Эти $K+L$ изделий смешиваются, и образуется новая партия, из которой наугад извлекается одно изделие. Найти вероятность того, что это изделие прежде принадлежало первой партии, если известно, что оно дефектное.

Решение. Пусть событие A={выбранное изделие дефектное}. Сформулируем гипотезы:

H_1={выбранное изделие прежде принадлежало первой партии};

H_2={выбранное изделие прежде принадлежало второй партии}.

Используя классическое определение, находим вероятности:

$$\mathrm{P}(H_1)=\frac{K}{K+L};\quad \mathrm{P}(H_2)=\frac{L}{K+L};\quad \mathrm{P}(A\,|\,H_1)=\frac{n}{N};\quad \mathrm{P}(A\,|\,H_2)=\frac{m}{\mathrm{M}}.$$

Для вычисления искомой вероятности $P(H_1\,|\,A)$ используем формулу Байеса:

$$\mathrm{P}(H_1\,|\,A)=\frac{\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A\,|\,H_1)}{\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A\,|\,H_1)+\mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A\,|\,H_2)}=$$

$$=\frac{nK}{N(K+L)}\Big/\left[\frac{n}{N}\frac{K}{K+L}+\frac{m}{\mathrm{M}}\frac{L}{K+L}\right].$$

Задачи

1.5.1. Две урны A и B содержат цветные шары в следующем составе: A - 5 зеленых и 7 красных, B - 4 зеленых и 2 красных. Какова вероятность вынуть зеленый шар, если: а) сначала случайно выбирается урна и затем вынимается из нее шар; б) шары из двух урн перекладываются в третью и шар вынимается из нее.

1.5.2. В первой урне 2 белых шара и 3 черных шара, а во второй - 1 белый и 4 черных. Из первой урны во вторую переложили два шара. Найти вероятность того, что вынутый из второй урны шар окажется белым.

1.5.3. Студент Иванов знает только 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случае шансы Иванова получить знакомый билет выше: когда он подходит тянуть билет первым или вторым по счету?

1.5.4. В урне находилось N белых и M черных шаров. Один шар потерян и цвет его неизвестен. Из урны извлекли 2 шара, и они оба оказались белыми. Найти вероятность того, что был потерян белый шар.

1.5.5. Вероятность того, что изготовленное автоматом изделие окажется дефектным, равна p. Каждое изготовленное изделие проверяется одним из трех контролеров. Поступление изделия к тому или иному контролеру равновозможно. Вероятность обнаружения дефекта (если он имеется) для i-го контролера равна p_i $(i=1,2,3)$. Найти вероятность того, что поступившее на контроль изделие будет забраковано.

1.5.6. В стройотряде 70% первокурсников и 30% студентов второго курса. Среди первокурсников 10% девушек, а среди студентов второго курса - 5% девушек. Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

1.5.7. Приборы изготавливаются двумя заводами. Первый изготавливает 2/3 всех изделий, второй - 1/3. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготовленного первым заводом, равна p_1, вторым - p_2. Определить полную надежность p прибора, поступившего в производство.

1.5.8. Передатчик на одной из позиций импульсного кода может передать "1"(импульс) с вероятностью 1/5 и "0"(отсутствие импульса) с вероятностью 4/5. Найти вероятность того, что переданную позицию приемник примет как "1", если вероятность преобразования помехами "1" в "0" равна 1/10, а "0" в "1" - 3/10.

1.5.9. Вероятность того, что во время работы компьютера возникнет сбой в процессоре, в оперативной памяти и в остальных устройствах относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в процессоре, в оперативной памяти и остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в компьютере сбой будет обнаружен.

1.5.10. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$. Известно, что вероятности каждой из последовательностей равны соответственно 0,3; 0,4; 0,3. В результате шумов буква принимается правильно с вероятностью 0,6. Вероятность того, что переданная буква будет принята за каждую из двух оставшихся, равна 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.

1.5.11. Из урны, содержащей M белых и N-M черных шаров, один шар неизвестного цвета утерян. Какова вероятность извлечь наудачу из урны белый шар?

1.5.12. Три машины производят болты, причем первая машина производит 25% всей продукции, вторая машина - 35% и третья - 40%. Доля брака в продукции первой машины 5%, в продукции второй машины - 4%, в продукции третьей - 2%. Определить:

а) чему равна вероятность того, что наудачу взятый болт окажется дефектным?

б) случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он произведен первой, второй, третьей машинами?

1.5.13. Два датчика посылают сигналы в общий канал связи, причем первый из них посылает вдвое больше сигналов, чем второй. Вероятность получить искаженный сигнал от первого датчика равна 0,06, от второго - 0,03. Какова вероятность получить искаженный сигнал в общем канале связи?

1.5.14. У рыбака имеются три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1; на втором месте - с вероятностью p_2; на третьем – с вероятностью p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

1.5.15. Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

1.5.16.. Имеется 10 урн, в каждой из которых 3 белых шара и 7 черных. Из первой урны во вторую перекладывается один шар; затем из второй в третью – один шар и т.д. Затем из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

1.5.17. В первой урне 2 белых и 3 черных шара, во второй - 2 белых и 2 черных, в третьей - 3 белых и 1 черный. Из первой урны переложен наугад один шар во вторую. После этого из второй урны также наугад переложен один шар в третью. Наконец, из третьей урны опять какой-то из шаров наугад переложили в первую. Какое распределение шаров в первой урне представляется наиболее вероятным? Что является более вероятным - сохранение первоначального состава первой урны или его изменение?

1.5.18. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовились отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно и 1- плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовившийся студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовился отлично.

1.5.19. Сообщение состоит из "точек" и "тире". Помехи искажают 2/5 "точек" и 1/3 "тире" (при искажении каждый сигнал переходит в противоположный). В сообщении "точки" и "тире" встречаются в отношении 5:3. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принята: а) "точка"; б) "тире".

1.5.20. Предположим, что экзаменующийся отвечает на тест, выбирая ответ из пяти данных альтернатив. Вероятность того, что экзаменующийся знает ответ, равна 2/3, а вероятность того, что он будет отвечать, выбирая случайным образом одну из пяти альтернатив, равна 1/3. Определить условную вероятность того, что экзаменующийся знал ответ, при условии, что из списка возможных ответов он выбрал правильный.

1.5.21. Известно, что 95% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает годной стандартную продукцию с вероятностью 0,96 и нестандартную – с вероятностью 0,06. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль (признанное годным), удовлетворяет стандарту.

1.5.22. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помехи, то за один цикл обзора станция обнаруживает его с вероятностью p_0; если применяет – с вероятностью $p_1 < p_0$. Вероятность применения объектом помех в течение любого цикла обзора равна p и не зависит от номера цикла. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен хотя бы один раз за n циклов обзора.

1.5.23. Из чисел $1,2,3,...,n$ одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым не меньше m $(m>0)$.

1.5.24. Три орудия производят стрельбу по трем целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом и независимо от других. Цель, обстрелянная одним орудием, поражается с вероятностью p. Найти вероятность того, что из трех целей две будут поражены, а третья нет.

1.5.25. В ящике лежат 20 теннисных мячей, из них 12 новых и 8 игранных. Для игры из ящика наугад вынимают два мяча и после игры их возвращают в ящик. Затем из ящика вынимают два мяча для следующей игры. Найти вероятность того, что оба эти мяча будут новыми.

1.5.26. Прибор состоит из двух узлов. Работа каждого узла безусловно необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна p_1, второго - p_2. Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружено, что он отказал. Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

1.5.27. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны p_1, p_2 и p_3. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказались две пробоины?

1.6 Схема Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Схемой Бернулли называется последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны только два исхода – «успех» и «неудача». При этом «успех» в одном испытании происходит с вероятностью $p \in (0,1)$, «неудача» – с вероятностью $q = 1 - p$.

Обозначим ν_n число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли. Тогда ***вероятность того, что в*** n ***испытаниях произойдет ровно*** k ***успехов,*** определяется ***формулой Бернулли***:

$$\mathrm{P}_n(k) = \mathrm{P}(\nu_{\mathrm{n}} = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,\ldots,n.$$

Наиболее вероятным числом успехов в n испытаниях по схеме Бернулли является:

а) единственное число $k_0 = [np + p]$, если число $np + p$ не целое, здесь [.] – целая часть числа;

б) два числа $k_0 = np + p$ и $k_0 - 1 = np + p - 1 = np - q$, если число $np + p$ целое.

Для ***приближенного*** вычисления вероятностей в схеме независимых испытаний Бернулли используют результаты следующих ***предельных теорем***.

Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа. Если $n \to \infty$, вероятность $p \in (0,1)$ - постоянна и величина $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ ограничена равномерно по k и n, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{npq} \cdot P_n(k)}{\varphi(x_k)} = 1,$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - плотность вероятностей стандартного нормального закона распределения, значения которой табулированы (табл. П3 приложения). При этом для отрицательных x следует в силу четности функции φ положить $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Из локальной теоремы Муавра-Лапласа следует вывод: при больших n, а также при условии, что p существенно отличается от 0 и 1,

$$\mathrm{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right).$$

Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа. В условиях предыдущей теоремы при $-\infty \le a < b \le \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ a \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ - ***функция Лапласа*** (функция распределения стандартного нормального закона распределения). Значения этой функции табулированы (см. приложение, табл. П4). При этом следует иметь в виду, что

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1.$$

Замечание: Иногда вместо значений функции $\Phi(x)$ табулируются значения функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$, которая связана с функцией $\Phi(x)$ равенством:

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}, \text{ и при этом } \Phi_0(-x) = -\Phi_0(x).$$

Из интегральной теоремы Муавра-Лапласа следует вывод: при больших n, а также при условии, что p существенно отличается от 0 и 1, вероятность того, что число успехов k заключено в пределах от k_1 до k_2, приближенно определяется по формуле:

$$\mathrm{P}(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \right).$$

Теорема Пуассона. Пусть $n \to \infty$ и $p_n \to 0$ так, что $np_n \to \lambda > 0$. Тогда для любого $k = 0,1,2,...$

$$\mathrm{P}_n(k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Из теоремы Пуассона следует вывод: при больших n, а также при условии, что вероятность p мала, причем «мало» также произведение $\lambda = np$,

$$\mathrm{P}_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \; k = \overline{0,n}.$$

Значения функции $\mathrm{P}(k;\lambda)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,...$ для некоторых λ приведены в табл. П5 приложения.

Практические рекомендации по применению предельных теорем (носящие, вообще говоря, условный характер).

Если число испытаний $n=\overline{10,20}$, то все приближенные формулы используют только для грубых прикидочных расчетов. При этом теорему Пуассона применяют в том случае, когда $\lambda=np$ изменяется в пределах от 0 до 2 при n = 10 и от 0 до 3 при n = 20; в противном случае необходимо пользоваться теоремами Муавра-Лапласа.

При $n=\overline{20,100}$ приближенные формулы уже можно использовать для прикладных расчетов. Теорему Пуассона при этом рекомендуется применять, когда λ заключено в пределах от 0 до 3 при n = 20 и от 0 до 7 при n = 100; в противном случае необходимо пользоваться теоремами Муавра-Лапласа.

Если $n=\overline{100,1000}$, то практически при любых расчетах можно обойтись приближенными формулами. Теорему Пуассона при этом используют в случае, когда λ изменяется в пределах от 0 до 7 при n = 100 и от 0 до 15 при n = 1000; в противном случае необходимо пользоваться теоремами Муавра-Лапласа.

Наконец, при $n>1000$ даже специальные таблицы рассчитывают с помощью приближенных формул (правда, для увеличения точности используют специальные поправки). В этом случае для применения теоремы Пуассона необходимо, чтобы λ лежало в пределах от 0 до α, где $\alpha=15$ при $n=1000$ и увеличивается с ростом n.

Независимые испытания с несколькими исходами. Предположим, что в каждом из n независимых испытаний возможны m исходов $1,2,...,m$ с вероятностями $p_1,...,p_m$ соответственно, $p_1+p_2+...+p_m=1$.

Обозначим $\mathrm{P}_n(k_1,k_2,...,k_m)$ вероятность того, что в n испытаниях исход 1 появится k_1 раз, исход 2 – k_2 раз, …, исход m – k_m раз, $k_1+k_2+...+k_m=n$.

Тогда для любого n и для любых целых $k_1 \geq 0, ..., k_m \geq 0$

$$\mathrm{P}_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}.$$

Пример 1. Частица пролетает последовательно мимо шести счетчиков. Каждый счетчик независимо от остальных регистрирует её пролёт с вероятностью $p = 0{,}8$. Частица считается обнаруженной, если она зарегистрирована не менее чем двумя счетчиками. Найти вероятность обнаружения частицы.

Решение. Пусть A – событие, состоящее в обнаружении частицы. Через A_i обозначим событие, состоящее в том, что частицу зарегистрировали ровно i счетчиков ($i = 1, 2, ..., 6$). Очевидно, что $A = A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$. Используя теорему сложения вероятностей и учитывая, что события A_i ($i = 1, 2, ..., 6$) попарно несовместны, получаем

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}(A_4) + \mathrm{P}(A_5) + \mathrm{P}(A_6),$$

причем $\mathrm{P}(A_i) = \mathrm{P}_6(i) = C_6^i p^i (1-p)^{6-i}$.

Решение этой задачи в вычислительном отношении будет более простым, если мы прежде найдем вероятность события $\overline{A}$ – частица зарегистрирована менее чем двумя счетчиками. В этом случае

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(A_0) + \mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}_6(0) + \mathrm{P}_6(1) =$$
$$= C_6^0 p^0 (1-p)^6 + C_6^1 p^1 (1-p)^5 =$$
$$= 0{,}2^6 + 6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}0016,$$

и поэтому $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}9984$.

Пример 2. На одном из факультетов университета учатся 730 студентов. Для всех студентов вероятности того, что их день рождения приходится на конкретную дату в течение года, состоящего из 365 дней, одинаковы. Найти вероятность того, что 25 января (Татьянин день) является днем рождения не менее трех студентов этого факультета.

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что случайно выбранный студент родился 25 января. Считая, что год содержит 365 суток, находим

$P(A) = p = 1/365$. Последовательная проверка в отделе кадров университета всех 730 студентов на предмет того, является ли день 25 января днем рождения конкретного студента, может рассматриваться как последовательность 730 независимых однотипных испытаний, в каждом из которых может осуществиться событие A с одной и той же вероятностью p (или не осуществиться с вероятностью $q = 1 - p$). Таким образом, можно применить формулу Бернулли. Однако поскольку число испытаний $n = 730$ велико, а вероятность $p = 1/365$ мала (значительно меньше единицы) и к тому же $\lambda = np = 2 < 15$, для решения задачи можно воспользоваться теоремой Пуассона, в соответствии с которой:

$$P_{730}(k \geq 3) = 1 - P_{730}(k \leq 2) \approx 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1 - 0{,}68 = 0{,}32.$$

Числовое значение искомой вероятности получено с помощью табл. П5 приложения.

Пример 3. Из статистических исследований известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 200 новорожденных детей мальчиков будет ровно 100.

Решение. Рождение мальчика будем рассматривать как «успех» в каждом из 200 независимых испытаний, связанных с рождением 200 детей. Очевидно, имеет место схема Бернулли, причем число $n = 200$ достаточно велико для применения предельных теорем. Заметим, что вероятности «успеха» $p = 0{,}515$ и «неудачи» $q = 1 - p = 0{,}485$ сопоставимы по своим значениям и существенно отличаются от 0 и 1. Поэтому для нахождения искомой вероятности $P_{200}(100)$ того, что в серии из $n = 200$ испытаний случится ровно $k = 100$ «успехов», воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа. Сначала подсчитаем значения:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0{,}0515 \cdot 0{,}485} = 7{,}068;$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 103}{7{,}068} = -0{,}4245.$$

Используя табл. П3 приложения, находим:

$$P_{200}(100) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{7,068} \cdot 0,364 \approx 0,05.$$

Видим, что вероятность рассматриваемого события невелика, как и следовало ожидать.

Пример 4. Определить, какое число n подбрасываний симметричной монеты надо произвести, чтобы наблюденная относительная частота k/n выпадения «герба» отличалась от вероятности $p = 1/2$ выпадения «герба» при одном подбрасывании не более чем на 0,01 с вероятностью 0,99.

Решение. Предположим, что n – число проведенных испытаний, а k – число выпадений «герба» (частота). В соответствии с условием задачи относительная частота k/n должна быть заключена в пределах от $p - 0,01$ до $p + 0,01$. Тогда для числа выпадений «герба» должно быть справедливо неравенство $k_1 \le k \le k_2$, где $k_1 = (p - \delta)n$, $k_2 = (p + \delta)n$, $\delta = 0,01$. Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \delta\right\} = P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где для $p = q = 1/2$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-n\delta}{\sqrt{npq}} = -\frac{0,01n}{0,5\sqrt{n}} = -0,02\sqrt{n};$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n\delta}{\sqrt{npq}} = \frac{0,01n}{0,5\sqrt{n}} = 0,02\sqrt{n}.$$

Тогда $P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi\left(0,02\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-0,02\sqrt{n}\right) = 2\Phi\left(0,02\sqrt{n}\right) - 1$.

Вообще полезно запомнить формулу $P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \delta\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{npq}}\right) - 1.$

Поскольку по условию задачи требуется, чтобы $P\{k_1 \le k \le k_2\} = 0,99$, то приходим к уравнению относительно n: $\Phi\left(0,02\sqrt{n}\right) = 0,995$.

Используя табл. П4 приложения, находим $0{,}02\sqrt{n} \approx 2{,}58$, откуда получаем $n = 16641$. Таким образом, необходимо произвести около 17000 подбрасываний монеты.

Задачи

1.6.1. Вероятность попадания в цель *p=0,25.* Сбрасывается единично 8 бомб. Найти вероятность того, что будет: а) не менее 7 попаданий; б) не менее одного попадания.

1.6.2. Монета бросается 20 раз. Найти вероятнейшее число появления герба.

1.6.3. Производится 10 независимых выстрелов по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0,2. Найти: а) наиболее вероятное число попаданий; б) вероятность того, что число попаданий будет не меньше 2 и не больше 4.

1.6.4. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 из 8 (ничьих не бывает).

1.6.5. Вероятность появления некоторого события в каждом из 18 независимых опытов равна 0,2. Определить вероятность появления этого события по крайней мере 3 раза.

1.6.6. В некотором семействе имеются 10 детей. Вероятность рождения мальчика и девочки 1/2. Найти вероятность того, что: а) имеются 5 мальчиков и 5 девочек; б) число мальчиков заключено между 3 и 8.

1.6.7. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит: а) цифры 5; б) двух пятерок. Известно, что все номера 4-значные, неповторяющиеся и равновозможные.

1.6.8. В одном из матчей на первенство мира по шахматам ничьи не учитывались, и игра шла до тех пор, пока один из участников матча не набирал 6 очков (выигрыш - 1 очко, проигрыш - 0 очков). Считая участников матча одинаковыми по силе, а результаты отдельных игр независимыми, найти вероятность p_k того, что при таких правилах в момент окончания матча проигравший набирает k очков, $k=0, 1, \ldots, 5$.

1.6.9. Испытание заключается в бросании 3 игральных костей. Найти вероятность того, что при 10 испытаниях ровно в 4 испытаниях появится в точности по две шестерки.

1.6.10. Сколько нужно взять случайных цифр, чтобы шестерка появилась хотя бы один раз с вероятностью, не меньшей 0,9?

1.6.11. Во время тренировок установлено, что спортсмен может улучшить прежний результат с вероятностью p при каждой попытке. Какова вероятность того, что на очередных соревнованиях, где разрешается три попытки, спортсмен улучшит свой результат?

1.6.12. При въезде в новую квартиру в осветительную сеть было включено $2n$ новых электролампочек. Каждая электролампа в течение года перегорает с вероятностью p. Найти вероятность того, что в течение года не менее половины первоначально включенных электроламп придётся заменить новыми.

1.6.13. Имеется n лунок, по которым случайным образом разбрасывается m шариков. Найти вероятность того, что в конкретную (например, в первую) лунку попадёт ровно k шариков.

1.6.14. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов, если вероятности отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках соответственно равны 0,2; 0,5; 0,8.

1.6.15. Прибор, состоящий из n узлов, работает в течение времени t. Вероятность безотказной работы каждого узла за время t равно p. По истечении времени t прибор выключают и проводят замену вышедших из строя узлов. На замену одного узла требуется время τ. Найти вероятность того, что через время 2τ после выключения прибор будет подготовлен к работе.

1.6.16. Вероятность появления события A хотя бы один раз при четырех независимых испытаниях равна 0,59. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

1.6.17. В случае воздушного налета противника на город, система противовоздушной обороны направляет на перехват каждого самолета противника по два истребителя. Каждый истребитель поражает цель независимо от другого с вероятностью p. Найти вероятность того, что при воздушном налете n самолетов будет уничтожено: а) ровно три самолета противника; б) не менее двух самолётов.

1.6.18. Для поражения цели производится серия независимых выстрелов. Цель считается пораженной, если в неё попало не менее двух снарядов. Сколько следует произвести выстрелов для поражения цели с вероятностью не менее 0,98, если вероятность попадания снаряда в цель при одном выстреле равно 0,3?

1.6.19. На отрезке [0,10] наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки попадут в отрезок [0,2], одна в отрезок [2,3] и две в отрезок [3,10]?

1.6.20. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что из 10 точек, брошенных наудачу в круг, четыре попадут в квадрат, три - в один сегмент и по одной - в оставшиеся три сегмента?

1.6.21. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаев из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть два случая: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят поодиночке. Предполагается, что зрители выбирают входы с равными вероятностями.

1.6.22. Вероятность заболевания человека гриппом во время эпидемии равна. 0,3. Найти вероятность того, что из 400 сотрудников фирмы заболеют во время эпидемии: а) ровно 120 сотрудников; б) не более 120 сотрудников.

1.6.23. Найти вероятность того, что в $2n$ испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании (p мала) в первых n испытаниях будет m успехов, а в последующих n испытаниях - l успехов, и при этом один из успехов наступит в испытании с номером $2n$.

1.6.24. Каждый из девяти шаров с одинаковой вероятностью может быть помещен в один из трех первоначально пустых ящиков. Определить вероятность того, что: а) в каждый ящик попало по три шара; б) в один ящик попало 4, в другой - 3, а в оставшийся - 2 шара.

1.6.25. В урне имеется три шара: черный, красный и белый. Из урны шары по одному извлекаются 5 раз, причем после каждого извлечения шар возвращается обратно. Определить вероятность того, что черный и белый шары извлечены не менее чем по 2 раза каждый.

1.6.26. Телефонный кабель содержит 400 жил. С какой вероятностью этим кабелем можно подключить к телефонной сети 395 абонентов, если для подключения одного абонента нужна 1 жила, а вероятность того, что она повреждена, равна 0,01?

1.6.27. Известно, что 30% призывников носят обувь 42 размера. Сколько пар обуви указанного размера необходимо иметь на складе воинской части, чтобы с вероятностью 0,9 обеспечить всех таких призывников, если планируется прибытие 200 новобранцев?

1.6.28. В жилом доме имеется 6000 ламп. Вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет: а) равно 3000; б) заключено между 2950 и 3050.

1.6.29. Брошено 6 правильных игральных костей. Какова вероятность выпадения цифры "1" а) хотя бы один раз; б) ровно один раз; в) ровно два раза? Найти точные значения и сравнить с результатом, полученным по теореме Пуассона.

1.6.30. Партия из 100 изделий подвергается выборочному контролю. Партия бракуется, если среди пяти проверяемых изделий обнаруживается хотя бы одно негодное. Какова вероятность того, что партия будет забракована, если в ней содержится 5% негодных изделий?

1.6.31. Среди семян пшеницы 0,6% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить: а) не менее 3 семян сорняков;

б) не более 16 семян сорняков; в) ровно 6 семян сорняков? (Применить теорему Пуассона).

1.6.32. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами при залпе в 5000 выстрелов. (Применить теорему Пуассона).

1.6.33. Задача - шутка. Имеется тесто в количестве V для изготовления булок с изюмом, который берется в количестве n изюминок. Какова вероятность того, что в наугад выбранной булке будет хотя бы одна изюминка, если на каждую булку идет U теста. (Решить двумя способами: с использованием теоремы Пуассона и без нее).

1.6.34. Некоторая машина состоит из 1000 деталей. Каждая деталь независимо от других деталей может оказаться неисправной с вероятностью 0,0003. Машина не работает, если в ней неисправны хотя бы две детали. Найти вероятность того, что машина не будет работать.

1.6.35. Найти вероятность того, что число выпадений "1" при 12000 бросаний игральной кости заключено между 1900 и 2150.

1.6.36. В урне находятся шары белого и чёрного цвета. Известно, что доля белых шаров равна либо 0,5, либо 0,4. Из урны извлечено с возвращением 100 шаров и обнаружено, что белые шары составляют большую часть выбранных. В результате этого наблюдения сделан вывод, что доля белых шаров в урне равна 0,5. Чему равна вероятность того, что принято ошибочное заключение?

1.6.37. На факультете 500 студентов. Вероятность рождения каждого студента в данный день равна 1/365. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января, и вероятность того, что найдутся три студента с одним и тем же днем рождения.

1.6.38. В страховом обществе застраховано 10000 лиц одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти в течении года для каждого лица равна 0,006. Каждый застрахованный вносит 1 января 12 рублей страховых. В случае смерти его родственники получат от общества 1000 рублей. Найти вероятность того, что: а) общество потерпит убыток; б) общество получит прибыль, не меньшую 40000, 60000, 80000 рублей.

1.6.39. Вероятность некоторого события в каждом из n испытаний равна p. Найти вероятность того, что: а) относительная частота наступления события при n=1500 отклонится от p = 0,4 в ту или другую сторону меньше чем на 0,02; б) число появлений события будет заключатся между 570 и 630; 600 и 660; 620 и 680; 580 и 640. (при n=1500 и p = 0,4).

В каких границах находится та частота события при n=1200, для которой вероятность отклонения относительной частоты от $p = \frac{2}{3}$ равна 0,985?

Сколько испытаний необходимо провести, чтобы вероятность отклонения относительной частоты от $p = \frac{2}{3}$ в ту или другую сторону меньше чем на 0,01 была равна 0,995?

1.6.40. Пусть m – число успехов при проведении n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p.

а) Сколько нужно произвести испытаний, чтобы относительная частота m/n успехов отличалась от вероятности p успеха не более чем на δ с вероятностью β.

б) Считая относительную частоту m/n оценкой вероятности p, определить, во сколько раз нужно увеличить число испытаний, чтобы уменьшить погрешность оценки δ в α раз. (Воспользоваться интегральной теоремой Муавра-Лапласа).

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

2.1. Случайные величины. Законы распределения и числовые характеристики

Пусть (Ω, F, P) - вероятностное пространство. ***Случайной величиной*** называется функция $X = X(\omega), \omega \in \Omega$, являющаяся измеримой относительно σ-алгебры F, то есть такая функция, что для любого действительного $x \in \mathrm{R}$

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathrm{F}.$$

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F_X(x) = F(x)$, при каждом $x \in \mathrm{R}$ определяемая равенством

$$F(x) = \mathrm{P}\{\omega : X(\omega) < x\} = \mathrm{P}(X < x).$$

Основные свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$ для любого $x \in \mathrm{R}$;

2) $F(x)$ неубывающая;

3) $F(x)$ непрерывная слева: $F(x-0) = F(x)$ для любого $x \in \mathrm{R}$;

4) $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$;

5) Для любых $a, b \in \mathrm{R}$: $a < b$

$$\mathrm{P}(a \le x < b) = F(b) - F(a);$$

6) $\mathrm{P}(X = x) = \Delta F(x)$, где $\Delta F(x) = F(x+0) - F(x)$ - скачок функции распределения в точке x.

Случайная величина называется ***дискретной***, если множество ее возможных значений ***конечно*** или ***счетно***.

Закон распределения дискретной случайной величины X (***дискретное распределение***) задается в виде ***ряда (таблицы) распределения***:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

в которой x_i - значения случайной величины X, $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$, $(i = 1, 2, \cdots)$ - вероятности, с которыми эти значения принимаются. При этом выполняется ***условие нормировки:***

$$\sum_i p_i = 1.$$

Функция распределения дискретной случайной величины определяется формулой:

$$F(x) = \sum_{i:\, x_i < x} p_i .$$

Случайная величина X называется ***непрерывной*** (имеющей ***непрерывный закон распределения*** или просто ***непрерывное распределение***), если существует функция $f(x)$ такая, что для любого $x \in \mathrm{R}$ функция распределения $F(x)$ допускает представление:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u .$$

При этом функция $f(x)$ называется ***плотностью вероятностей*** (плотностью распределения вероятностей, плотностью распределения) случайной величины X.

Если случайная величина X является непрерывной, то ее функция распределения всюду непрерывна и для почти всех $x \in \mathrm{R}$ дифференцируема. При этом почти всюду (в точках непрерывности плотности вероятностей $f(x)$) имеет место равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Свойства плотности вероятностей:

1) $f(x) \geq 0$ для любого $x \in \mathrm{R}$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ - условие нормировки;

3) Для любых $a, b \in \mathrm{R}$: $a < b$

$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Математическим ожиданием (средним значением) случайной величины X, имеющей функцию распределения $F(x)$, называется число

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}F(x),$$

если этот интеграл сходится абсолютно. Если интеграл не сходится абсолютно, то говорят, что у случайной величины X математическое ожидание не существует.

Для дискретной случайной величины, принимающей значения x_i с вероятностями $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1,2\cdots$, математическое ожидание определяется формулой:

$$MX = \sum_i x_i p_i,$$

а для непрерывной случайной величины X с плотностью вероятностей $f(x)$ формула для математического ожидания имеет вид:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x.$$

Дисперсией случайной величины X называется число

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Для дисперсии DX также справедливо выражение:

$$DX = MX^2 - (MX)^2.$$

Формулы для вычисления дисперсии DX:

- если X - дискретная случайная величина, то

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i - (MX)^2;$$

- если X - непрерывная случайная величина, то

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - (MX)^2.$$

Число $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{D}X}$ называется ***средним квадратическим отклонением*** случайной величины X.

Величина $\alpha_k = \mathrm{M}X^k$ называется ***начальным моментом*** k***- го порядка*** случайной величины X, а величина $\mu_k = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}X)^k$ - ***центральным моментом*** k***- го порядка***. Очевидно, что $\alpha_1 = \mathrm{M}X$, $\mu_2 = \mathrm{D}X$.

Вычисляются начальные и центральные моменты по формулам:

$$\mathrm{M}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}F(x) = \begin{cases} \sum_i g(x_i)\,p_i, \text{ если } X - \text{дискретная случайная величина;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x, \text{ если } X - \text{непрерывная случайная величина,} \end{cases}$$

в которых функция $g(x) = x^k$ или $g(x) = (x - \mathrm{M}X)^k$ соответственно.

Величина x_p, определяемая равенством $F(x_p) = p$, называется p***-квантилем*** распределения случайной величины X. Квантиль $x_{0,5}$ называется ***медианой*** распределения случайной величины X.

Модой распределения непрерывной случайной величины X называется число x_M, при котором плотность вероятностей $f(x)$ достигает максимального значения. Распределения с одной модой называются унимодальными, а распределения с несколькими модами – мультимодальными.

Основные законы распределения случайных величин приведены в Таблице П4.

Пример 1. Дискретная случайная величина X принимает значения –1, 0, 1 с вероятностями, соответственно равными $1/4$, $1/2$, $1/4$. Написать выражение и построить график функции распределения, определить вероятность $\mathrm{P}(|X| < 1/2)$, найти математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$.

Решение. Закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	-1	0	1
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

.

Аналитическое выражение для функции распределения случайной величины X задается формулой:

$$F(x)=\sum_{i:x_i<x} p_i=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ 1/4, & -1<x\le 0;\\ 3/4, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

График функции распределения имеет вид:

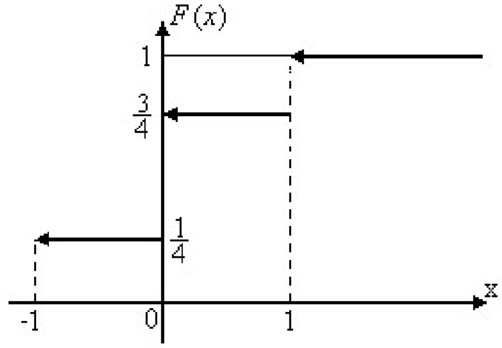

Рис. 2.1.

$$\mathrm{P}\left(|X|<\frac{1}{2}\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}+0\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

или иначе $\mathrm{P}\left(|X|<\frac{1}{2}\right)=\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}$.

$$\mathrm{M}X=\sum_i x_i p_i=-1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}=0.$$

$$\mathrm{D}X=\mathrm{M}X^2-(\mathrm{M}X)^2=\mathrm{M}X^2=\sum_i x_i^2 p_i=1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятностей, график которой изображен на рисунке 2.2 (закон распределения прямоугольного треугольника):

Найти:

а) выражение для плотности вероятностей и параметр a;

б) функцию распределения и построить ее график;

в) $\mathrm{P}\left(X>\frac{1}{2}\right)$;

г) $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$.

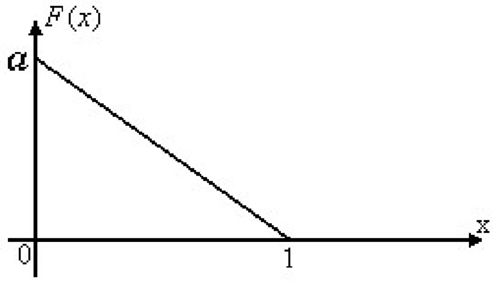

Рис. 2.2.

Решение. Аналитическое выражение для плотности вероятностей имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} a(1-x), & 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Неизвестный параметр a находится из условия нормировки:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = a\int_0^1 (1-x)dx=\frac{a}{2},\ \text{откуда}\ a=2.$$

<u>Замечание.</u> В данном случае параметр a проще найти из геометрических соображений. Из условия нормировки следует, что площадь под графиком плотности вероятностей равна 1, то есть $S_\Delta=\frac{a}{2}=1$ откуда $a=2$.

Аналитическое выражение для функции распределения случайной величины X задается формулой:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 0, & x<0;\\ \int_0^x 2(1-u)\mathrm{d}u=2x-x^2, & 0\le x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

График функции распределения имеет вид:

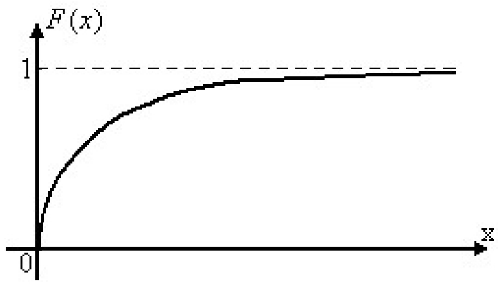

Рис. 2.3.

$$\mathrm{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^{\infty} f(x)dx = \int_{1/2}^{1} 2(1-x)dx = \frac{1}{4}.$$

$$\mathrm{M}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 2x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

$$\mathrm{D}X = \mathrm{M}X^2 - (\mathrm{M}X)^2 = \int_{0}^{1} 2x^2(1-x)dx - \frac{1}{9} = \frac{1}{6}.$$

Задачи

2.1.1. Дан график функции распределения $F(x)$ случайной величины X (см. рис. 2.4).

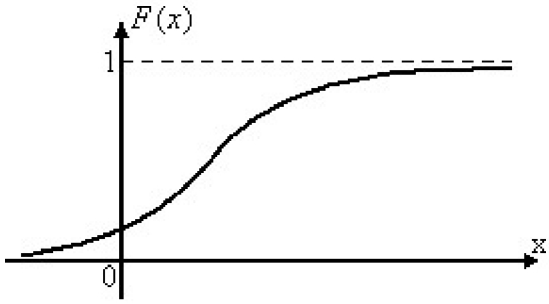

Рис.2.4.

Как изменится этот график, если:

а) прибавить к случайной величине 1;

б) вычесть из случайной величины 2;

в) умножить случайную величину на 2;

г) изменить знак случайной величины на противоположный?

2.1.2. Дан график плотности вероятностей $f(x)$ случайной величины X (см. рис. 2.5).

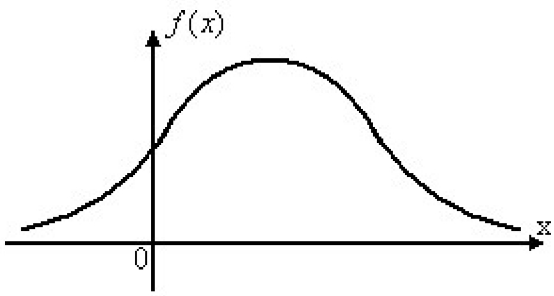

Рис. 2.5.

Как изменится этот график, если:

а) прибавить к случайной величине 1;

б) вычесть из случайной величины 2;

в) умножить случайную величину на 2;

г) изменить знак случайной величины на противоположный?

2.1.3. Может ли функция $F(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ быть функцией распределения случайной величины принимающей значения из интервала:

а) $(-\infty,+\infty)$; б) $(-\infty,0)$; в) $(0,+\infty)$?

2.1.4. К случайной величине X прибавили постоянную, неслучайную величину a. Как от этого изменятся ее характеристики:

1) математическое ожидание;
2) дисперсия;
3) среднее квадратическое отклонение;
4) второй начальный момент?

2.1.5. Случайную величину X умножили на постоянную, неслучайную величину a. Как от этого изменятся ее характеристики:

1) математическое ожидание;
2) дисперсия;
3) среднее квадратическое отклонение;
4) второй начальный момент?

Дискретные случайные величины

2.1.6. Случайная величина X полагается равной 0, если на правильной игральной кости в результате подбрасывания появляется нечетная грань, и 1, если появляется четная грань. Построить ряд распределения, записать выражение и построить график функции распределения случайной величины X. Вычислить вероятности событий:

$$(X<\frac{3}{2}),\ (X<\frac{1}{2}),\ (X>\frac{1}{3}),\ (X<1),\ (X\geq 1),\ (X=1).$$

2.1.7. Дискретная случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Найти выражение и построить график функции распределения случайной величины X. Найти вероятность того, что величина X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине единицу.

2.1.8. На пути движения автомобиля 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомобилю дальнейшее движение. Найти закон распределения числа светофоров, пройденных автомобилем без остановки. Написать выражение и построить график функции распределения этой случайной величины.

2.1.9. Мишень состоит из круга № 1 и двух концентрических колец с номерами 2 и 3. Попадание в круг № 1 дает 10 очков, в кольцо № 2 - 5 очков, в кольцо № 3 - (-1) очко. Вероятности попадания в круг № 1 и кольца № 2 и № 3 соответственно равны 0,5; 0,3; 0,2. Найти закон распределения для случайной суммы выбитых очков в результате трех выстрелов. Написать выражение и построить график функции распределения этой случайной величины.

2.1.10. Игральную кость бросают n раз. Найти функцию распределения числа выпадений шестерки.

2.1.11. Монету бросают, пока не выпадет цифра. Найти функцию распределения числа выпадений герба.

2.1.12. Монету бросают n раз. Найти функцию распределения: а) числа выпадений герба; б) разности числа выпадений герба и числа выпадений цифры.

2.1.13. Дискретная случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	0	2	4	6
P	0,2	0,3	0,3	0,2

Найти математическое ожидание $\mathrm{M}X$, дисперсию $\mathrm{D}X$ и вероятность $\mathrm{P}(X < \mathrm{M}X)$.

2.1.14. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень равна 0,9. За каждое попадание засчитывается 5 очков.

Построить ряд распределения случайной величины X - числа полученных стрелком очков. Найти математическое ожидание MX, дисперсию DX и вероятность $\mathrm{P}\left(X \geq MX\right)$.

2.1.15. В урне имеется 4 шара с номерами 1, 2, 3, 4. Наудачу из урны без возвращения вынимают два шара. Построить ряд распределения случайной величины X - суммы номеров двух шаров. Найти математическое ожидание MX, среднее квадратическое отклонение σ_X и вероятность $\mathrm{P}\left(X < MX + \sigma_X\right)$.

2.1.16. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Найти математическое ожидание и дисперсию числа стандартных деталей среди отобранных.

2.1.17. Из урны, содержащей M белых и N - M черных шаров извлекается без возвращения n шаров. Число белых шаров среди них представляет собой случайную величину X, имеющую ***гипергеометрическое распределение***:

$$\mathrm{P}(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ m = 0,1,\ldots,\min\left(M,n\right).$$

Найти математическое ожидание MX и дисперсию DX .

2.1.18. Стрелок имеет три патрона и стреляет в цель до первого попадания или пока не кончатся патроны. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 2/3. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных патронов.

2.1.19. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого промаха, но не более четырех раз. Вероятность попадания в корзину при каждом бросании равна 0,9. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных баскетболистом бросков.

2.1.20. Найти математическое ожидание и дисперсию числа очков при одном бросании игральной кости и суммы очков при бросании двух игральных костей.

2.1.21. Из ящика, содержащего 2 белых и 4 черных шара, вынимают три шара и перекладывают в другой ящик, где имелось 5 белых шаров. Затем из второго ящика 4 шара перекладываются в первый. Найти математическое ожидание числа белых шаров X_1 и X_2 в первом и втором ящиках соответственно.

2.1.22. Монету бросают до первого выпадения герба. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бросаний монеты.

2.1.23. По мишени, вероятность попадания в которую равна p, ведется стрельба в неизменных условиях до получения k попаданий. Найти математическое ожидание числа произведенных выстрелов.

2.1.24. Бросают n игральных костей. Найти математическое ожидание числа таких бросаний, в каждом из которых выпадает ровно m шестерок, если общее число бросаний равно N.

2.1.25. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, извлекается по одному шару без возвращения до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров.

2.1.26. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, извлекается по одному шару, и каждый раз возвращается обратно, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров.

2.1.27. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, x_3 с вероятностями $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}3$ и p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $\mathrm{M}X = 8$.

2.1.28. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а также известно, что $\mathrm{M}X = 0{,}1$, $\mathrm{M}X^2 = 0{,}9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3.

2.1.29. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения X, зная, что математическое ожидание $\mathrm{M}X = 2{,}6$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma_X = 0{,}8$.

2.1.30. Случайная величина X принимает все целые положительные значения с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Найти знаменатель этой прогрессии q так, чтобы $\mathrm{M}X = 10$, и при этом условии найти вероятности событий ($X \le 10$) и ($X \le 100$).

2.1.31. Дискретная случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Найти начальные и центральные моменты первых четырех порядков этой случайной величины.

2.1.32. Случайная величина X может принимать значения: -2, -1, 0, 1, 2 с вероятностями соответственно равными $p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2$. Найти эти вероятности, если:

а) $\mathrm{M}X = \mathrm{M}X^3 = 0,\ \mathrm{M}X^2 = 1,\ \mathrm{M}X^4 = 2$;

б) $\mathrm{M}X = \mathrm{M}X^3 = 0,\ \mathrm{M}X^2 = 2,\ \mathrm{M}X^4 = 6$;

в) $\mathrm{M}X = \mathrm{M}X^3 = 0,\ \mathrm{M}X^2 = a,\ \mathrm{M}X^4 = b$; любые ли значения могут принимать a и b в этом случае?

Непрерывные случайные величины

2.1.33. Непрерывная случайная величина имеет плотность вероятностей вида:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x \le 0, x > 1. \end{cases}$$

а) Найти коэффициент a и построить график $f(x)$;

б) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;

в) вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(0,5;1,5)$;

г) найти моду и медиану распределения случайной величины X;

д) вычислить математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$.

2.1.34. Случайная величина имеет плотность вероятностей, изображенную на рис. 2.6 (закон распределения Симпсона или закон равнобедренного треугольника на интервале $(-a,a)$):

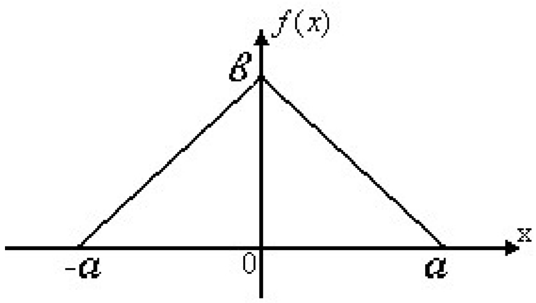

Рис. 2.6.

Найти:

а) параметр b и написать выражение для плотности вероятностей;

б) функцию распределения и построить её график;

в) числовые характеристики случайной величины X: $\mathrm{M}X$, $\mathrm{D}X$, σ_X, μ_3;

г) моду и медиану распределения случайной величины X;

д) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\frac{a}{2},a\right)$.

2.1.35. Непрерывная случайная величина имеет плотность вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x<0;\\ a\left(3x-x^2\right),\ 0\le x\le 3;\\ 0,\ x>3.\end{cases}$$

Найти:

1) коэффициент a и построить график $f(x)$;

2) функцию распределения $F(x)$ и построить её график;

3) вероятность того, что случайная величина X попадёт в интервал $(-1,2)$;

4) моду распределения;

5) медиану распределения;

6) математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$.

2.1.36. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}0, \ x<0;\\ ax^2, \ 0\le x<1;\\ a(2-x)^2, \ 1\le x<2;\\ 0, \ x\ge 2.\end{cases}$$

При каком значении a функция $f(x)$ является плотностью вероятностей случайной величины X? Найти функцию распределения $F(x)$ и построить графики $f(x)$ и $F(x)$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0{,}5;1{,}5)$. Найти математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и среднее квадратическое отклонение σ_X.

2.1.37. Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ax, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Найти коэффициент a, медиану и дисперсию случайной величины X. Вычислить вероятность того, что уклонение величины X от ее математического ожидания будет не более 0,5.

2.1.38. Случайная величина X распределена по закону прямоугольного треугольника в интервале $(-a,0)$ (см. рис. 2.7.):

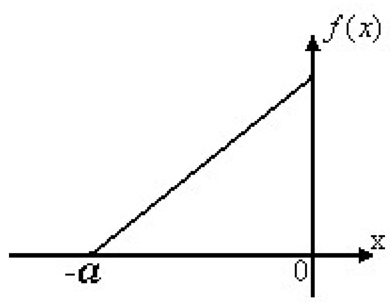

Рис. 2.7.

Требуется:

1) написать выражение для плотности вероятностей $f(x)$;

2) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график;

3) найти вероятность $\mathrm{P}\left(-a<X<-\dfrac{a}{2}\right)$;

4) найти медиану распределения;

5) найти числовые характеристики случайной величины X: $\mathrm{M}X$, $\mathrm{D}X$, σ_X, μ_3.

2.1.39. Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} A\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент A и функцию распределения;

б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2.1.40. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения случайной величины X, имеющей в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ плотность вероятностей $f\left(x\right)=\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x$.

2.1.41. Случайная величина X имеет плотность вероятностей (закон распределения Коши):

$$f(x)=\frac{A}{1+x^2}.$$

Найти:

а) коэффициент A; б) функцию распределения $F\left(x\right)$;

в) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-1;1\right)$;

г) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2.1.42. Случайная величина X имеет плотность вероятностей (закон распределения Лапласа):

$$f\left(x\right)=ae^{-\lambda|x|},\ \lambda>0.$$

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения $F\left(x\right)$ и построить графики $f\left(x\right)$ и $F\left(x\right)$; в) $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$.

2.1.43. Случайная величина X имеет функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти:

а) плотность вероятностей величины X и построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

б) вероятность $\mathrm{P}(0{,}5<X<1{,}5)$;

в) математическое ожидание и дисперсию X;

г) моду и медиану распределения случайной величины X.

2.1.44. Найти плотность вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и медиану распределения случайной величины X, имеющей функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}\left(x^2+x\right),\ 0<x\le 1;\\ 1,\ x>1.\end{cases}$$

2.1.45. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения вида:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le -2;\\ a\left(4-x^2\right),\ -2<x\le 0;\\ a\left(4+x^2\right),\ 0<x\le 2;\\ 1,\ x>2.\end{cases}$$

Найти:

1) коэффициент a;

2) плотность вероятностей $f(x)$ и построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-1;1)$;

4) числовые характеристики $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$;

5) моду и медиану распределения величины X.

2.1.46. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид (закон распределения арксинуса):

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<-a;\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a},\ -a\le x\le a;\\ 1,\ x>a.\end{cases}$$

Определить:

1) параметры A и B;

2) плотность вероятностей $f(x)$;

3) вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$;

4) числовые характеристики $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$.

2.1.47. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x},\ x\le 0;\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x},\ x>0.\end{cases}$$

Найти $\mathrm{M}X$, $\mathrm{D}X$, σ_X, моду и медиану распределения величины X.

2.1.48. Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид (закон распределения Симпсона на отрезке $[0,2]$):

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x<0;\\ x,\ 0\le x<1;\\ 2-x,\ 1\le x\le 2;\\ 0,\ x>2.\end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первых четырех порядков.

2.1.49. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию расстояния от точки до центра круга.

2.1.50. Случайная величина X, представляющая собой расстояние от точки попадания до центра мишени, имеет плотность вероятностей (закон распределения Релея):

$$f(x)=\begin{cases} Axe^{-h^2x^2}, \ x>0; \\ 0, \ x\le 0; \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент A и построить график $f(x)$;

б) моду распределения случайной величины X;

в) $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$;

г) вероятность того, что в результате выстрела расстояние от точки попадания до центра мишени окажется меньше, чем мода.

2.1.51. Плотность вероятностей случайной величины X представляет собой полуэллипс с полуосями a и b (см. рис. 2.8). Величина a известна.

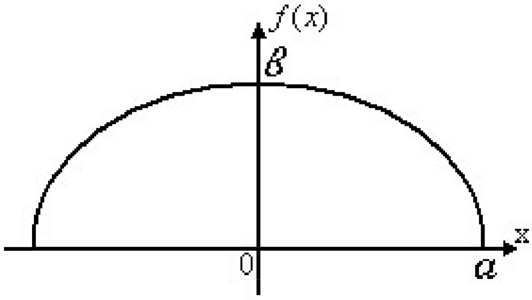

Рис. 2.8.

Найти: 1) величину b; 2) $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$; 3) функцию распределения $F(x)$.

2.1.52. Доказать, что между центральными и начальными моментами первых четырёх порядков имеют место соотношения:

$\mu_1 = 0$;

$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$;

$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$;

$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4$.

Вывести общую формулу:

$$\mu_k = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} C_k^r \alpha_r \alpha_1^{k-r} .$$

Основные законы распределения случайных величин

2.1.53. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $\left[a-l; a+l\right]$, $l>0$. Найти:

а) плотность вероятностей $f\left(x\right)$ и построить ее график;

б) функцию распределения $F\left(x\right)$ и построить ее график;

в) математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$;

г) моду и медиану распределения случайной величины X.

2.1.54. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

2.1.55. Автобус некоторого маршрута идет строго по расписанию с интервалом 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

2.1.56. Поезда метро идут с интервалом в 2 минуты. Пассажир выходит на платформу в произвольный момент времени. Найти математическое ожидание и дисперсию времени ожидания поезда.

2.1.57. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данный момент часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.

2.1.58. Случайная величина X распределена равномерно, и известно, что $\mathrm{M}X=4;\ \mathrm{D}X=3$. Найти плотность вероятностей случайной величины X.

2.1.59. Диаметр круга d измерен приближенно, и известно лишь, что $a \le d \le b$. Считая d случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $\left[a;b\right]$, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

2.1.60. Высотомер имеет случайные и систематические ошибки. Систематическая ошибка равна +20 м. Случайные ошибки распределены по нормальному закону. Какую среднеквадратическую ошибку должен иметь прибор, чтобы с вероятностью 0,9452 ошибка измерения высоты была меньше 100 м.

2.1.61. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10 м. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м.

2.1.62. Диаметр деталей, выпускаемых цехом, распределен по нормальному закону с параметрами $\mathrm{M}X = 5\,\text{см}$, $\mathrm{D}X = 0{,}81\,\text{см}^2$. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали: а) находится в пределах от 4 до 7 см; б) отличается от математического ожидания не более чем на 2 см.

2.1.63. Размер диаметра втулок, изготавливаемых цехом, можно считать нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $a = 2{,}5$ см и дисперсией $\sigma^2 = 0{,}0001$ см^2. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки, если за вероятность практической достоверности принимается 0,997?

2.1.64. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается допустимым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика D есть нормально распределенная случайная величина с характеристиками $\mathrm{M}D = \dfrac{d_1 + d_2}{2}$, $\sigma_D = \dfrac{d_2 - d_1}{4}$. Определить вероятность того, что шарик будет забракован.

2.1.65. Известно, что диаметр D шарика для подшипников является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Браковка шарика производится так же, как указано в предыдущей задаче. При этом известно, что средний размер шарика равен $MD = \dfrac{d_1 + d_2}{2}$, а брак составляет 10% всего выпуска. Определить среднее квадратическое отклонение диаметра шарика σ_D.

2.1.66. Диаметр шарика для подшипников D является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним значением $d_0 = 5$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma_D = 0{,}05$ мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от среднего (номинального) значения больше, чем на 0,1 мм. Определить, какой процент шариков в среднем будет браковаться.

2.1.67. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием, равным нулю. Вероятность попадания случайной величины внутрь интервала (-0,3; 0,3) равна 0,5. Найти σ_X и написать выражение для плотности вероятностей величины X.

2.1.68. Производится стрельба тремя независимыми выстрелами по цели, имеющей вид полосы шириной 20 м. Прицеливание производится по средней линии полосы; систематическая ошибка отсутствует; среднее квадратическое отклонение точки попадания в направлении, перпендикулярном полосе, - 16 м. Найти вероятность p попадания в полосу при одном выстреле, а также вероятности следующих событий при трех выстрелах:

A = {хотя бы одно попадание в полосу};

B = {не менее двух попаданий в полосу};

C = {одно попадание в полосу, один недолет и один перелет}.

2.1.69. Имеется случайная величина X, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием m_X и средним квадратическим отклонением σ_X. Требуется приближенно заменить нормальный закон распределения равномерным законом распределения на отрезке $[\alpha, \beta]$. Границы α и β подобрать так, чтобы сохранить неизменными основные числовые характеристики случайной величины X - математическое ожидание и дисперсию.

2.1.70. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$. Что больше: $\mathrm{P}(-0{,}5 \le X \le -0{,}1)$ или $\mathrm{P}(1 \le X \le 2)$?

2.1.71. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $(0, \sigma^2)$. При какой дисперсии σ^2 вероятность $\mathrm{P}(0 < a < X < b)$ будет наибольшей?

2.1.72. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти $\mathrm{M}|X - \mathrm{M}X|$.

2.1.73. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и σ^2. Показать, что

$$\mathrm{P}(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1,$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа.

2.1.74. По известному «правилу трех сигма» вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания более, чем на три корня из дисперсии, мала. Найти $\mathrm{P}\left(|X - \mathrm{M}X| < 3\sqrt{\mathrm{D}X}\right)$, если X имеет:

а) нормальное распределение;

б) показательное распределение;

в) равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$;

г) $\mathrm{P}(X = -1) = \mathrm{P}(X = 1) = \dfrac{1}{18}, \mathrm{P}(X = 0) = \dfrac{8}{9}$;

д) распределение Пуассона с $\mathrm{M}X = 0{,}09$.

2.1.75. Найти все центральные моменты нормально распределенной случайной величины X с плотностью вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2 / 2\sigma^2}.$$

2.1.76. Величина $S_X = \dfrac{\mu_3}{(\mathrm{D}X)^{3/2}}$ называется асимметрией случайной величины X, а величина $E_X = \dfrac{\mu_4}{(\mathrm{D}X)^2} - 3$ - эксцессом случайной величины X. Найти S_X и E_X, если:

а) X – нормально распределенная случайная величина с параметрами a и σ^2;

б) X – равномерно распределенная на отрезке $[-1,1]$ случайная величина;

в) X имеет закон распределения Лапласа с плотностью вероятностей $f(x) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$.

2.1.77. Показать, что вероятность попадания на интервал (a,b) нормально распределенной случайной величины X с математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением σ не изменится, если каждое из чисел a, b, m, и σ увеличить в λ раз $(\lambda > 0)$.

2.1.78. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с математическим ожиданием $a = 3$. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X. Найти:

а) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание;

б) вероятность того, что случайная величина X примет положительное значение.

2.1.79. Аппаратура содержит 2000 одинаковых элементов, надежность (вероятность безотказной работы) каждого из которых равна 0,9995. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

2.1.80. Вероятность позвонить на телефонную станцию в течение минуты для любого абонента равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 500 абонентов. Найти вероятность того, что:

а) в течение минуты позвонят 5 абонентов;

б) в течение минуты позвонят более 60 абонентов и телефонная станция будет перегружена.

2.1.81. Радиостанция ведет передачу информации в течение 10 мкс. Работа ее происходит при наличии хаотической импульсной помехи, среднее число импульсов которой в одну секунду составляет 10^4. Для срыва передачи достаточно попадания одного импульса помехи в период работы станции. Считая, что число импульсов помехи, попадающих в данный интервал времени, распределено по закону Пуассона, найти вероятность срыва передачи информации.

2.1.82. Автомашина проходит технический осмотр и обслуживание. Число неисправностей, обнаруженных во время техосмотра, распределено по закону Пуассона с параметром a. Если неисправностей не обнаружено, техническое обслуживание машины продолжается в среднем два часа. Если обнаружены одна или две неисправности, то на устранение каждой их них тратится в среднем еще полчаса. Если обнаружено больше двух неисправностей, то машина ставится на профилактический ремонт, где она находится в среднем четыре часа. Определить закон распределения среднего времени T обслуживания и ремонта машины и его математическое ожидание $\mathrm{M}T$.

2.1.83. Число проведенных опытов X случайно и может изменяться в пределах от 0 до ∞. Вероятность $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$. Каждый опыт может быть успешным с вероятностью p и неуспешным с вероятностью $1-p$. Найти закон распределения числа успешных опытов.

2.1.84. Случайная величина X имеет показательный (экспоненциальный) закон распределения с плотностью вероятностей вида:

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{-x/a}, & x\ge 0; \\ 0, & x<0; \end{cases} \quad a>0.$$

Найти:

а) коэффициент A и построить график $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;

в) математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$;

г) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем параметр a.

2.1.85. Время работы устройства до отказа подчинено экспоненциальному закону распределения с параметром $\lambda = 4 \cdot 10^{-4} \left(\text{ч}^{-1}\right)$.

Найти:

1) среднее время между появлением двух смежных отказов;

2) вероятность того, что устройство не откажет в течение 1000 часов после начала работы;

3) вероятность того, что устройство не откажет до момента среднего времени безотказной работы;

4) вероятность того, что устройство не откажет после момента среднего времени безотказной работы.

2.1.86. При работе некоторого прибора в случайные моменты времени возникают неисправности. Время T работы прибора от момента его включения до возникновения неисправности распределено по показательному закону с параметром λ:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

При возникновении неисправности она мгновенно обнаруживается, и прибор поступает в ремонт. Ремонт продолжается время t_0, после чего прибор снова включается в работу. Найти плотность вероятностей $f^*(t)$ и функцию распределения $F^*(t)$ промежутка времени T^* между двумя соседними неисправностями. Найти его математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность того, что время T^* будет больше, чем $2t_0$.

2.1.87. Доказать, что для показательного закона распределения с параметром λ справедливо следующее свойство «нестарения»: для любых $x_1, x_2 > 0$

$$\mathrm{P}(X > x_1 + x_2 / X > x_1) = \mathrm{P}(X > x_2).$$

Доказать, что верно также и обратное: если неотрицательная случайная величина X является непрерывной и обладает свойством «нестарения», то она имеет показательный закон распределения с параметром λ.

2.1.88. В ящике имеется 1000 радиодеталей, характеризующихся некоторым параметром X (например, величиной емкости конденсатора). Допустим, что 700 деталей изготовлены на одном заводе и 300 – на другом. На заводах применяются различные технологии, поэтому в первом случае функция распределения параметра X есть $F_1(x)$, а во втором – $F_2(x)$. Найти функцию распределения $F(x)$ параметра X для детали, взятой из ящика наугад.

2.1.89. Случайная величина X с вероятностью p_1 имеет плотность вероятностей $f_1(x)$, а с вероятностью p_2 - плотность вероятностей $f_2(x)$ $(p_1 + p_2 = 1)$. Написать выражение для плотности вероятностей случайной величины X, найти ее математическое ожидание и дисперсию.

2.2. Случайные векторы. Законы распределения и числовые характеристики. Условные законы распределения. Независимость случайных величин

Совокупность случайных величин $X_1,..,X_n$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \Phi, \mathrm{P})$, называется n-мерным ***случайным вектором*** и обозначается $\mathbf{X} = (X_1,..,X_n)$. Случайную величину X_i, $i = \overline{1,n}$ при этом называют i-й координатой случайного вектора $\mathbf{X}$. Функция n вещественных переменных, определяемая для любого $(x_1,...,x_n) \in \mathrm{R}^n$ равенством

$$F_{X_1...X_n}(x_1,..,x_n) = \mathrm{P}(X_1 < x_1,..,X_n < x_n),$$

называется ***функцией распределения*** случайного вектора $\mathbf{X}=(X_1,..,X_n)$ или совместной (n-мерной) функцией распределения случайных величин $X_1,..,X_n$.

Двумерный случай (*n* = 2). Двумерный случайный вектор обычно обозначают (X,Y), а его функция распределения определяется равенством:

$$F_{XY}(x,y)=\mathrm{P}(X<x,Y<y).$$

Основные свойства функции распределения случайного вектора (X,Y):

1) $0\le F_{XY}(x,y)\le 1$ для любых $(x,y)\in \mathrm{R}^2$.

2) $F_{XY}(x,y)$ является неубывающей и непрерывной слева функцией по каждому из своих аргументов.

3) $F_{XY}(-\infty,y)=F_{XY}(x,-\infty)=F_{XY}(-\infty,-\infty)=0$.

4) $F_{XY}(+\infty,+\infty)=1$.

5) $F_{XY}(x,+\infty)=F_X(x),\ F_{XY}(+\infty,y)=F_Y(y),$

где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ - функции распределения координат X и Y соответственно.

Свойство 5) означает, что по функции распределения двумерного случайного вектора (X,Y) всегда можно найти одномерные (маргинальные) функции распределения его координат.

6) Вероятность попадания случайного вектора (X,Y) в прямоугольник $B=\{(x,y): a\le x<b, c\le y<d\}$ со сторонами, параллельными осям координат, определяется по формуле:

$$\mathrm{P}\{(X,Y)\in B\}=\mathrm{P}(a\le X<b, c\le Y<d)=F_{XY}(b,d)-F_{XY}(a,d)-F_{XY}(b,c)+F_{XY}(a,c).$$

Случайный вектор (X,Y) называется ***дискретным***, если множество его возможных значений конечно или счетно.

Закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y) ***(двумерный дискретный закон распределения)*** задается таблицей:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_k	$\ldots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1k}	$\ldots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2k}	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\ldots$	p_{nk}	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

в которой $\left(x_i, y_j\right)$ - значения случайного вектора $\left(X,Y\right)$, $p_{ij} = \mathrm{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right)$ - вероятности, с которыми эти значения принимаются (здесь и везде далее предполагается, что, если не указаны пределы изменения индексов, то они принимают все свои возможные значения). При этом вероятности p_{ij} удовлетворяют ***условию нормировки***:

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1 .$$

По двумерному закону распределения вероятность попадания дискретного случайного вектора $\left(X,Y\right)$ в любую область $D \subset \mathbb{R}^2$ определяется по формуле:

$$\mathrm{P}\left\{\left(X,Y\right) \in D\right\} = \sum_{(i,j):(x_i,y_j)\in D} p_{ij} .$$

В частности, при $D = (-\infty, x) \times (-\infty, y)$ получается следующее выражение для функции распределения $F_{XY}\left(x,y\right)$ дискретного случайного вектора $\left(X,Y\right)$:

$$F_{XY}\left(x,y\right) = \sum_{(i,j):x_i<x,y_j<y} p_{ij} .$$

Одномерные законы распределения каждой из случайных величин X и Y в отдельности (маргинальные законы распределения) дискретного случайного вектора $\left(X,Y\right)$ являются дискретными и находятся по двумерному закону распределения следующим образом:

$p_i = \mathrm{P}\left(X = x_i\right) = \sum_j p_{ij}$ - производится суммирование вероятностей p_{ij} в i-й строке таблицы;

$q_j = \mathrm{P}\left(Y = y_j\right) = \sum_i p_{ij}$ - производится суммирование вероятностей p_{ij} в j-м столбце таблицы.

Условный закон распределения случайной величины X, являющейся координатой дискретного случайного вектора (X,Y), при условии, что другая его координата Y приняла некоторое фиксированное значение y_j, определяется совокупностью условных вероятностей:

$$p_X\left(x_i \mid y_j\right) = \mathrm{P}\left(X = x_i \mid Y = y_j\right) = \frac{p_{ij}}{q_j}.$$

Аналогично ***условный закон распределения*** координаты Y дискретного случайного вектора (X,Y) при условии, что $X = x_i$, определяется совокупностью условных вероятностей:

$$p_Y\left(y_j \mid x_i\right) = \mathrm{P}\left(Y = y_j \mid X = x_i\right) = \frac{p_{ij}}{p_i}.$$

Случайный вектор (X,Y) называется ***непрерывным*** (имеющим ***непрерывный закон распределения*** или просто ***непрерывное распределение***), если существует функция $f_{XY}(x,y)$ такая, что для любой точки $(x,y) \in \mathrm{R}^2$ функция распределения $F_{XY}(x,y)$ случайного вектора (X,Y) допускает представление:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Функция $f_{XY}(x,y)$ при этом называется ***плотностью вероятностей*** случайного вектора (X,Y) или совместной (двумерной) плотностью вероятностей случайных величин X и Y. Во всех точках $(x,y) \in \mathrm{R}^2$, являющихся точками непрерывности двумерной плотности вероятностей $f_{XY}(x,y)$, имеет место равенство:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Свойства плотности вероятностей случайного вектора (X,Y):

1) $f_{XY}(x,y)\geq 0$ для любых $(x,y)\in \mathrm{R}^2$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$ - условие нормировки;

3) вероятность попадания непрерывного случайного вектора (X,Y) в любую (измеримую) область $D\subset \mathrm{R}^2$ определяется формулой

$$\mathrm{P}\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

4) координаты непрерывного случайного вектора (X,Y) являются непрерывными случайными величинами с плотностями вероятностей $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ соответственно (маргинальные плотности вероятностей), определяемыми в точках непрерывности функций $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и $f_{XY}(x,y)$ формулами:

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y, \qquad f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x.$$

Условной плотностью вероятностей случайной величины X, являющейся координатой непрерывного случайного вектора (X,Y), при условии, что другая его координата приняла некоторое фиксированное значение y, называется функция $f_X(x\,|\,y)$, определяемая равенством:

$$f_X(x\,|\,y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

(при этом полагается, что $f_X(x\,|\,y)=0$, если $f_Y(y)=0$).

Аналогично определяется ***условная плотность вероятностей*** $f_Y(y\,|\,x)$ координаты Y непрерывного случайного вектора (X,Y) при условии, что $X=x$:

$$f_Y(y\,|\,x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

(при этом полагается, что $f_Y(y \mid x) = 0$, если $f_X(x) = 0$).

Случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если для любой точки $(x, y) \in \mathrm{R}^2$ имеет место равенство:

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y).$$

Для ***независимости дискретных*** случайных величин X и Y необходимо и достаточно, чтобы для любых i и j

$$p_{ij} = p_i q_j.$$

Для ***независимости непрерывных*** случайных величин X и Y необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

для всех точек $(x, y) \in \mathrm{R}^2$, являющихся точками непрерывности функций $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и $f_{XY}(x, y)$.

Важнейшими числовыми характеристиками двумерного случайного вектора (X, Y) являются:

- ***математическое ожидание*** $(\mathrm{M}X, \mathrm{M}Y)$ - вектор, координатами которого являются математические ожидания случайных величин X и Y;
- ***дисперсия*** $(\mathrm{D}X, \mathrm{D}Y)$ - вектор, координатами которого являются дисперсии случайных величин X и Y;
- ***корреляционный момент*** случайных величин X и Y:

$$\mathrm{R}_{XY} = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}X)(Y - \mathrm{M}Y) = \mathrm{M}XY - \mathrm{M}X \cdot \mathrm{M}Y.$$

Поскольку $\mathrm{R}_{XX} = \mathrm{D}X$, $\mathrm{R}_{YY} = \mathrm{D}Y$ и $\mathrm{R}_{XY} = \mathrm{R}_{YX}$, то можно считать, что случайный вектор (X, Y) имеет ***две*** важнейшие характеристики:

- математическое ожидание $(\mathrm{M}X, \mathrm{M}Y)$;
- корреляционную матрицу

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathrm{R}_{XX} & \mathrm{R}_{XY} \\ \mathrm{R}_{YX} & \mathrm{R}_{YY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}X & \mathrm{R}_{XY} \\ \mathrm{R}_{XY} & \mathrm{D}Y \end{pmatrix}.$$

Математические ожидания $\mathrm{M}X, \mathrm{M}Y$ и дисперсии $\mathrm{D}X, \mathrm{D}Y$ вычисляются по обычным формулам через одномерные законы распределения случайных величин X и Y. Корреляционный момент R_{XY} вычисляется только через двумерный закон распределения:

если (X,Y) - дискретный случайный вектор, то

$$\mathrm{R}_{XY} = \sum_i \sum_j (x_i - \mathrm{M}X)(y_j - \mathrm{M}Y) p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \mathrm{M}X \cdot \mathrm{M}Y;$$

если (X,Y) - непрерывный случайный вектор, то

$$\mathrm{R}_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}X)(y - \mathrm{M}Y) f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \mathrm{M}X \cdot \mathrm{M}Y.$$

Случайные величины X и Y, для которых корреляционный момент $\mathrm{R}_{XY} = 0$, называются ***некоррелированными***. Из независимости случайных величин X и Y следует их некоррелированность (обратное, вообще говоря, неверно).

Нормированный корреляционный момент

$$\mathrm{r}_{XY} = \frac{\mathrm{R}_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

называется ***коэффициентом корреляции*** случайных величин X и Y. Коэффициент корреляции удовлетворяет условию $|\mathrm{r}_{XY}| \le 1$ и определяет степень линейной зависимости между случайными величинами X и Y.

Условные числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия) определяются и находятся так же, как и безусловные, только в формулах для их вычисления следует безусловные законы распределения заменить на условные.

Если (X,Y) - дискретный случайный вектор, то условным математическим ожиданием случайной величины X при условии, что $Y = y_j$, называется величина

$$\mathrm{M}(X \mid Y = y_j) = \sum_i x_i p_X(x_i \mid y_j),$$

а условным математическим ожиданием случайной величины Y при условии, что $X = x_i$, - величина

$$\mathrm{M}(Y \mid X = x_i) = \sum_j y_j p_Y(y_j \mid x_i).$$

Если (X,Y)- непрерывный случайный вектор, то условные математические ожидания случайной величины X при условии, что $Y = y$, и случайной величины Y при условии, что $X = x$, определяются формулами:

$$\mathrm{M}(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x \mid y) \mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{M}(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y \mid x) \mathrm{d}y.$$

Аналогичные формулы имеют место и для условных дисперсий.

Если (X,Y)- дискретный случайный вектор, то

$$\mathrm{D}(X \mid Y = y_j) = \sum_i x_i^2 p_X(x_i \mid y_j) - \left[\mathrm{M}(X \mid Y = y_j)\right]^2;$$

$$\mathrm{D}(Y \mid X = x_i) = \sum_j y_j^2 p_Y(y_j \mid x_i) - \left[\mathrm{M}(Y \mid X = x_i)\right]^2.$$

Если (X,Y)- непрерывный случайный вектор, то

$$\mathrm{D}(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x \mid y) \mathrm{d}x - \left[\mathrm{M}(X \mid Y = y)\right]^2;$$

$$\mathrm{D}(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y \mid x) \mathrm{d}y - \left[\mathrm{M}(Y \mid X = x)\right]^2.$$

Говорят, что непрерывный случайный вектор (X,Y) ***распределен равномерно*** в (измеримой) области $D \subset \mathrm{R}^2$, если его плотность вероятностей имеет вид:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S(D)}, & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где $S(D)$– площадь области D.

Говорят, что непрерывный случайный вектор (X,Y) имеет ***двумерный нормальный (гауссовский) закон распределения***, если его плотность вероятностей имеет вид:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r_{XY}^2\right)}\left[\frac{\left(x-a_X\right)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2\mathrm{r}_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\left(x-a_X\right)\left(y-a_Y\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\left(y-a_Y\right)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\},$$

где $\left(a_X,a_Y\right)=(\mathrm{M}X,\mathrm{M}Y)$– математическое ожидание вектора (X,Y), σ_X и σ_Y – среднеквадратические отклонения случайных величин X и Y, а r_{XY} – их коэффициент корреляции.

Из вида плотности вероятностей двумерного гауссовского случайного вектора следует, что из некоррелированности его координат ($\mathrm{r}_{XY}=0$) следует их ***независимость***, так как в этом случае

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\exp\left\{-\left[\frac{\left(x-a_X\right)^2}{2\sigma_X^2}+\frac{\left(y-a_Y\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right]\right\}=f_X(x)f_Y(y).$$

Таким образом, в гауссовском случае понятия независимости и некоррелированности эквивалентны.

Если (X,Y)- двумерный гауссовский случайный вектор, то условные математические ожидания $\mathrm{M}(X\,|\,Y=y)$ и $\mathrm{M}(Y\,|\,X=x)$ являются линейными функциями условия и определяются формулами:

$$\mathrm{M}(X\,|\,Y=y)=a_X+\mathrm{r}_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(y-a_Y\right);$$

$$\mathrm{M}(Y\,|\,X=x)=a_Y+\mathrm{r}_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x-a_X\right);$$

а условные дисперсии $\mathrm{D}(X\,|\,Y=y)$ и $\mathrm{D}(Y\,|\,X=x)$являются постоянными величинами:

$$\mathrm{D}(X\,|\,Y=y)=\sigma_X^2\left(1-\mathrm{r}_{XY}^2\right);$$

$$\mathrm{D}(Y \mid X = x) = \sigma_Y^2\left(1 - \mathrm{r}_{XY}^2\right).$$

Все приведенные выше определения и формулы для двумерного случайного вектора (X, Y) легко обобщаются на случай n-мерного случайного вектора $\mathbf{X} = (X_1,..,X_n)$. Приведем наиболее важные среди них, которые используются для решения приводимых ниже задач.

Случайный вектор $\mathbf{X} = (X_1,..,X_n)$ называется ***непрерывным***, если существует функция $f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)$ такая, что для любой точки $(x_1,...,x_n) \in \mathrm{R}^n$ функция распределения $F_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)$ допускает представление:

$$F_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1...X_n}(u_1,...,u_n)\mathrm{d}u_1...\mathrm{d}u_n.$$

При этом функция $f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)$ называется ***плотностью вероятностей*** случайного вектора $\mathbf{X} = (X_1,..,X_n)$ или совместной (многомерной, n-мерной) плотностью вероятностей случайных величин $X_1,..,X_n$. Во всех точках $(x_1,...,x_n) \in \mathrm{R}^n$, являющихся точками непрерывности плотности вероятностей $f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)$, имеет место равенство:

$$f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n}.$$

Свойства многомерной плотности вероятностей $f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)$:

1) $f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n) \geq 0,$ для любой точки $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n = 1$ - условие нормировки;

3) вероятность попадания случайного вектора $(X_1,...,X_n)$ в любую (измеримую) область $D \subset \mathbb{R}^n$ определяется формулой:

$$\mathrm{P}\left\{(X_1,...,X_n) \in D\right\} = \int_D ... \int f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n;$$

4) если случайный вектор $(X_1,...,X_n)$ является непрерывным с плотностью вероятностей $f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)$, то случайный вектор $(X_{k_1},...,X_{k_m})$ при любом $1 \le m < n$ также является непрерывным и имеет плотность вероятностей, определяемую формулой:

$$f_{X_{k_1}...X_{k_m}}(x_{k_1},...,x_{k_m}) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-m} f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n) \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_{k_1-1} \mathrm{d}x_{k_1+1} ... \mathrm{d}x_{k_m-1} \mathrm{d}x_{k_m+1} \ldots \mathrm{d}x_n .$$

Условная плотность вероятностей «отрезка» $(X_1,...,X_m)$ вектора $(X_1,...,X_n)$ при условии, что случайные величины $X_{m+1},...,X_n$ приняли определенные значения $X_{m+1} = x_{m+1},...,X_n = x_n$, определяется формулой:

$$f_{X_1...X_m}(x_1,...,x_m | x_{m+1},...,x_n) = \frac{f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)}{f_{X_{m+1}...X_n}(x_{m+1},...,x_n)}, \quad 1 \le m < n .$$

Случайные величины $X_1, X_2,...,X_n$ называются ***независимыми*** (в совокупности), если для любой точки $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство:

$$F_{X_1X_2...X_n}(x_1,x_2,...,x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdot ... \cdot F_{X_n}(x_n),$$

где $F_{X_i}(x_i)$ – функция распределения случайной величины X_i, $i = 1,2,...,n$.

Для независимости непрерывных случайных величин $X_1, X_2,...,X_n$, имеющих плотности вероятностей $f_{X_i}(x_i)$, $i = 1,2,...,n$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{X_1X_2...X_n}(x_1,x_2,...,x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdot ... \cdot f_{X_n}(x_n)$$

для всех точек непрерывности функций $f_{X_i}(x_i)$, $i = 1,2,...,n$ и $f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n)$.

Важнейшими числовыми характеристики n-мерного случайного вектора $\mathbf{X} = (X_1,...,X_n)$ являются:

- ***математическое ожидание*** $\mathrm{M}\mathbf{X} = (\mathrm{M}X_1,...,\mathrm{M}X_n)$;
- ***корреляционная матрица*** $\mathbf{R} = \|R_{ij}\|$, элементами которой являются всевозможные корреляционные моменты пар координат:

$R_{ij} = R_{X_i X_j}$, $i, j = 1,2,...,n$. Матрица $\mathbf{R}$ является симметрической неотрицательно определенной матрицей размера $n \times n$ и при этом $R_{ii} = DX_i$ – дисперсия i-й координаты, $i = 1,2,...,n$.

Говорят, что непрерывный случайный вектор $\mathbf{X} = (X_1,...,X_n)$ имеет ***многомерный нормальный (гауссовский) закон распределения***, если его плотность вероятностей имеет вид:

$$f_{X_1...X_n}(x_1,...,x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}[\det \mathbf{R}]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij}^{-1}(x_i - a_i)(x_j - a_j)\right\},$$

где $(a_1,...,a_n) = (MX_1,...,MX_n) = M\mathbf{X}$ - математическое ожидание случайного вектора $\mathbf{X}$; $\mathbf{R}$ - корреляционная матрица случайного вектора $\mathbf{X}$; $\det \mathbf{R}$ - определитель корреляционной матрицы $\mathbf{R}$ (предполагается, что $\det \mathbf{R} > 0$); R_{ij}^{-1} – элемент обратной матрицы $\mathbf{R}^{-1}$.

Пример 1. Закон распределения случайного вектора (X,Y) задан таблицей:

X \ Y	0	1	2
-1	0,1	0,2	0
0	0,3	0	0,1
1	0,1	0,2	0

Найти:

1) Законы распределения случайных величин X и Y. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

2) Корреляционную матрицу. Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

3) Условный закон распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение, равное 0; вычислить $M(Y \mid X = 0)$ и $D(Y \mid X = 0)$.

Решение: 1) Для случайной величины X вероятности её значений $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$ находятся суммированием вероятностей $p_{ij} = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$ в i-й строке таблицы ($i = 1,2,3$):

$$p_1 = \mathrm{P}(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0 = 0{,}3;$$
$$p_2 = \mathrm{P}(X = 0) = 0{,}3 + 0 + 0{,}1 = 0{,}4;$$
$$p_3 = \mathrm{P}(X = 1) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0 = 0{,}3.$$

Поэтому закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	-1	0	1
P	0,3	0,4	0,3

Вероятности значений случайной величины Y $q_i = \mathrm{P}(Y = y_i)$ находятся суммированием вероятностей p_{ij} в j-м столбце таблицы ($j = 1,2,3$):

$$q_1 = \mathrm{P}(Y = 0) = 0{,}5;\ q_2 = \mathrm{P}(Y = 1) = 0{,}4;\ q_3 = \mathrm{P}(Y = 2) = 0{,}1.$$

Поэтому закон распределения случайной величины Y имеет вид:

Y	0	1	2
P	0,5	0,4	0,1

Условием независимости случайных величин X и Y является равенство:

$$p_{ij} = p_i q_j \ \text{ для всех } \ i, j = 1,2,3.$$

Поскольку в данном случае

$p_{11} = \mathrm{P}(X = -1, Y = 0) = 0{,}1;\ p_1 = \mathrm{P}(X = -1) = 0{,}3;\ q_1 = \mathrm{P}(Y = 0) = 0{,}5$, то $p_{11} \neq p_1 q_1$ и, следовательно, случайные величины X и Y зависимы.

2) Найдем математические ожидания случайных величин X и Y, используя одномерные законы распределения:

$$\mathrm{M}X = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 = 0;$$

$$\mathrm{M}Y = \sum_{j=1}^{3} y_j q_j = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}6.$$

Найдем далее дисперсии $\mathrm{D}X$ и $\mathrm{D}Y$ по одномерным законам распределения:

$$\mathrm{D}X = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \mathrm{M}X)^2 p_i = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i = 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}6;$$

$$\mathrm{D}Y=\sum_{j=1}^{3}y_j^2q_j-(\mathrm{M}Y)^2=1\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}1-0{,}36=0{,}44\,.$$

Корреляционный момент R_{XY} находится только по совместному закону распределения случайных величин X и Y:

$$\mathrm{R}_{XY}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x_i-\mathrm{M}X)(y_j-\mathrm{M}Y)p_{ij}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_iy_jp_{ij}-\mathrm{M}X\cdot\mathrm{M}Y=$$

$=1\cdot(-1)\cdot 0{,}2+1\cdot 1\cdot 0{,}2=0$ (отсутствующие слагаемые равны 0).

Поскольку корреляционный момент $\mathrm{R}_{XY}=0$, то случайные величины X и Y являются некоррелированными.

Корреляционная матрица имеет вид:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\mathrm{R}_{XX} & \mathrm{R}_{XY}\\ \mathrm{R}_{YX} & \mathrm{R}_{YY}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{D}X & \mathrm{R}_{XY}\\ \mathrm{R}_{XY} & \mathrm{D}Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}44\end{pmatrix}.$$

3) Условный закон распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина $X=0$ определяется совокупностью условных вероятностей:

$$p_Y\left(y_j\middle|0\right)=\mathrm{P}\left(Y=y_j\middle|X=0\right)=\frac{p_{2j}}{p_2},\ j=1,2,3\,,$$

которые равны: $p_Y\left(y_1\middle|0\right)=\dfrac{0{,}3}{0{,}4}=\dfrac{3}{4};\ p_Y\left(y_2\middle|0\right)=0;\ p_Y\left(y_3\middle|0\right)=\dfrac{0{,}1}{0{,}4}=\dfrac{1}{4}$.

Записывается условный закон распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина $X=0$ в виде таблицы:

Y	0	1	2
$p_Y\left(y\middle|0\right)$	3/4	0	1/4

Найдем условное математическое ожидание $\mathrm{M}\left(Y\middle|X=0\right)$:

$$\mathrm{M}\left(Y\middle|X=0\right)=\sum_{j=1}^{3}y_jp_Y\left(y_j\middle|0\right)=0\cdot 3/4+1\cdot 0+2\cdot 1/4=1/2\,.$$

Условная дисперсия $\mathrm{D}\left(Y\middle|X=0\right)$ вычисляется по формуле:

$$\mathrm{D}\left(Y\middle|X=0\right)=\mathrm{M}\left(Y^2\middle|X=0\right)-\left[\mathrm{M}\left(Y\middle|X=0\right)\right]^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{3} y_j^2 p_Y\left(y_j\middle|0\right)-1/4=0\cdot 3/4+1\cdot 0+4\cdot 1/4-1/4=3/4\,.$$

Пример 2. Плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ двумерного случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c(x+y), \ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1; \\ 0, \ \text{иначе.}\end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент c;

б) функцию распределения $F_{XY}(x,y)$;

в) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$;

г) условные плотности вероятностей $f_X(x|y)$ и $f_Y(y|x)$;

д) математическое ожидание и корреляционную матрицу вектора (X,Y);

е) вероятность $\mathrm{P}(X>Y)$.

Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Являются ли они некоррелированными?

Решение: а) Коэффициент c определяется из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\,.$$

В данном случае это условие означает, что

$$c\int_0^1\int_0^1 (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=c=1\,.$$

б) Функция распределения $F_{XY}(x,y)$ связана с двумерной плотностью вероятностей соотношением:

$$F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

При $\min(x,y)<0$ имеем: $\quad F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0\,.$

При $0 \le x, y \le 1$ имеем: $F_{XY}(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y (u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left(x^2 y + xy^2\right)$.

При $0 \le x \le 1$ и $y > 1$ имеем: $F_{XY}(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^1 (u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right)$.

Заметим, что в данной области $F_{XY}(x,y)$ в соответствии со свойством 5) совпадает с функцией распределения $F_X(x)$ случайной величины X.

При $x > 1$ и $0 \le y \le 1$ имеем:

$$F_{XY}(x,y) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^y (u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left(y^2 + y\right).$$

В данной области $F_{XY}(x,y)$ совпадает с функцией распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y.

При $x > 1$ и $y > 1$ имеем: $F_{XY}(x,y) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 1$.

Окончательно для функции распределения получаем выражение:

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & \min(x,y) < 0; \\ \frac{1}{2}xy(x+y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1; \\ \frac{1}{2}x(x+1), & 0 \le x \le 1, \ y > 1; \\ \frac{1}{2}y(y+1), & x > 1, 0 \le y \le 1; \\ 1, & x > 1, \ y > 1. \end{cases}$$

в) Найдём плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (x+y)\mathrm{d}y = x + \frac{1}{2}, \ 0 \le x \le 1.$$

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+y)\mathrm{d}x = y + \frac{1}{2}, \ 0 \le y \le 1.$$

г) Условные плотности вероятностей $f_X(x|y)$ и $f_Y(y|x)$ находятся по формулам:

$$f_X(x\mid y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)};\quad f_Y(y\mid x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}.$$

В данном случае

$$f_X(x\mid y)=\frac{x+y}{y+1/2},\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1;$$

$$f_Y(y\mid x)=\frac{x+y}{x+1/2},\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1.$$

д) Найдём математические ожидания $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{M}Y$ и дисперсии $\mathrm{D}X$ и $\mathrm{D}Y$, воспользовавшись одномерными законами распределения:

$$\mathrm{M}X=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{12};$$

$$\mathrm{M}Y=\frac{7}{12}\ \text{в силу симметрии.}$$

$$\mathrm{D}X=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x-(\mathrm{M}X)^2=\int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{11}{144};$$

$$\mathrm{D}Y=\frac{11}{144}\ \text{в силу симметрии.}$$

Корреляционный момент R_{XY} находится по совместной плотности вероятностей случайных величин X и Y:

$$\mathrm{R}_{XY}=\mathrm{M}XY-\mathrm{M}X\cdot\mathrm{M}Y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\mathrm{M}X\cdot\mathrm{M}Y=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\left(\frac{7}{12}\right)^2=-\frac{1}{144}.$$

Корреляционная матрица вектора (X,Y) имеет вид:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\frac{11}{144} & -\frac{1}{144}\\ -\frac{1}{144} & \frac{11}{144}\end{pmatrix}.$$

е) Вероятность $\mathrm{P}(X>Y)$ вычисляется по формуле:

$$\mathrm{P}(X > Y) = \iint\limits_D f_{XY}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

где область $D = \{(x, y) : x > y\}$.

Интегрируя, получаем:

$$\mathrm{P}(X > Y) = \int_0^1 \left(\int_0^x (x + y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, то случайные величины X и Y являются *зависимыми*. Корреляционный момент $\mathrm{R}_{XY} \neq 0$, поэтому случайные величины являются *коррелированными.*

Задачи

2.2.1. Дана функция распределения $F(x, y)$ случайного вектора (X, Y). Найти вероятность $\mathrm{P}(X > x, Y > y)$.

2.2.2. Задана функция распределения $F_{XY}(x, y)$ случайного вектора (X, Y). Определить вероятности попадания случайной точки (X, Y) в заштрихованные области на плоскости, изображенные на рис. 2.9:

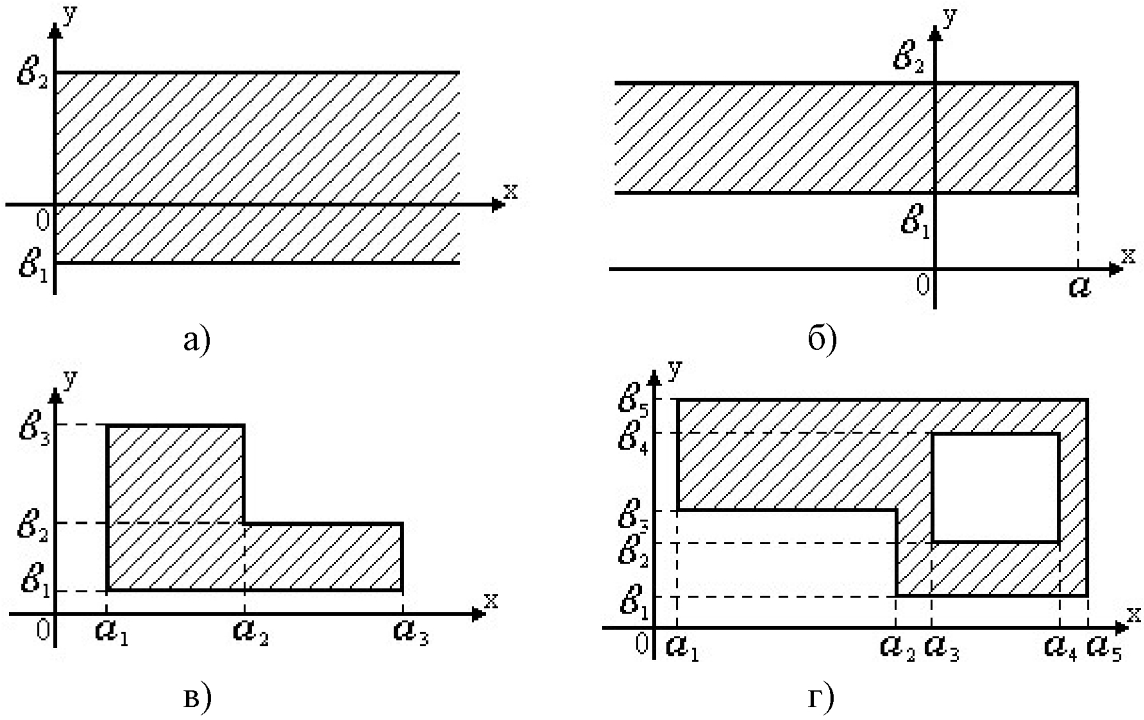

Рис. 2.9.

2.2.3. Пусть X – случайная величина с функцией распределения $F_X(x)$. Найти функцию распределения случайного вектора *(X,X).*

2.2.4. Пусть X – случайная величина с функцией распределения $F_X(x)$. Найти функцию распределения случайного вектора $(X, |X|)$.

2.2.5. Пусть $X_1, ..., X_n$ – независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(x)$. Положим $X = \min(X_1, ..., X_n)$, $Y = \max(X_1, ..., X_n)$. Найти функции распределения случайных величин X и Y и функцию распределения случайного вектора (X, Y).

Дискретные случайные векторы

2.2.6. Закон распределения дискретного случайного вектора (X, Y) задан таблицей ($p_i + q_i = 1, i = 1,2$)

$X \backslash Y$	0	1
0	$q_1\, q_2$	$p_1\, q_2$
1	$q_1\, p_2$	$p_1\, p_2$

Найти совместную функцию распределения $F_{XY}(x, y)$ и законы распределения координат X и Y.

2.2.7. Закон распределения случайного вектора (X, Y) зависит от неизвестного параметра и имеет вид:

$X \backslash Y$	1	2	3
2	3λ	2λ	λ
4	λ	4λ	2λ
6	0	2λ	5λ

Найти параметр λ, законы распределения случайных величин X и Y и функцию распределения $F_{XY}(x, y)$ вектора (X, Y).

2.2.8. Функция распределения дискретного случайного вектора (X, Y) задана таблицей:

$X \backslash Y$	$y \le 1$	$1 < y \le 3$	$3 < y \le 5$	$5 < y$
$x \le 2$	0	0	0	0
$2 < x \le 4$	0	0,25	0,3	0,4
$4 < x$	0	0,4	0,75	1

Найти: а) закон распределения случайного вектора (X,Y); б) законы распределения координат X и Y; в) математическое ожидание (среднее значение) случайного вектора (X,Y).

2.2.9. Задан закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y):

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

Найти законы распределения случайных величин X и Y, их математические ожидания, дисперсии и коэффициент корреляции. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

2.2.10. Совместный закон распределения случайных величин X и Y определяется вероятностями:

$$\mathrm{P}(X=0,Y=1)=\mathrm{P}(X=0,Y=-1)=\mathrm{P}(X=1,Y=0)=\mathrm{P}(X=-1,Y=0)=\frac{1}{4}.$$

Найти $\mathrm{M}X,\mathrm{M}Y$ и корреляционную матрицу $\mathbf{R}$. Являются случайные величины X и Y независимыми?

2.2.11. Дискретный случайный вектор (X,Y) имеет закон распределения:

$X \backslash Y$	1	2	3
9	0,1	0,2	0,1
10	0,15	0,25	0,2

Найти:

а) условный закон распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение, равное 10 и вычислить условное математическое ожидание $\mathrm{M}(Y\,|\,X=10)$ и условную дисперсию $\mathrm{D}(Y\,|\,X=10)$;

б) условный закон распределения случайной величины X при условии, что $Y=2$, и вычислить $\mathrm{M}(X\,|\,Y=2)$, $\mathrm{D}(X\,|\,Y=2)$.

2.2.12. Закон распределения случайного вектора (X,Y) задан таблицей:

$X \backslash Y$	-1	0	2
0	0,2	0	0,1
1	0,1	0,3	0
3	0	0,2	0,1

Найти: а) законы распределения случайных величин X и Y; являются ли случайные величины X и Y независимыми? б) коэффициент корреляции r_{XY}; являются ли случайные величины X и Y некоррелированными? в) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение, равное 0; вычислить условное математическое ожидание $\mathrm{M}\left(X \mid Y=0\right)$ и условную дисперсию $\mathrm{D}\left(X \mid Y=0\right)$.

2.2.13. Дискретные случайные величины X, Y независимы, одинаково распределены и $\mathrm{P}(X=x_k)=\mathrm{P}(Y=x_k)=p_k$, $k=1,2,\ldots$. Найти $\mathrm{P}(X=Y)$.

2.2.14. Дискретные случайные величины X и Y независимы, одинаково распределены и

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(Y=k)=pq^{k-1},\ q=1-p,\ 0<p<1,\ k=1,2,\ldots$$

Найти: а) $\mathrm{P}(X=Y)$; б) $\mathrm{P}(X>Y)$; в) $\mathrm{P}(X<Y)$; г) $\mathrm{P}(X=k/X>Y)$; д) $\mathrm{P}(X=k/X<Y)$; е) $\mathrm{P}(X=k/X=Y)$; ж) $\mathrm{P}(X=k/X+Y=l)$; з) $\mathrm{M}(X/X+Y=l),\ l\geq 2$.

2.2.15. По мишени производится два независимых выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Рассматриваются две случайные величины: X - число попаданий, Y - число промахов. Найти: а) закон распределения случайного вектора $\left(X,Y\right)$; б) функцию распределения $F_{XY}\left(x,y\right)$ вектора $\left(X,Y\right)$; в) законы распределения случайных величин X и Y. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

2.2.16. Дважды бросается игральная кость. Рассматриваются две случайные величины: X - число появлений шестёрки, Y - число появлений чётной цифры. Найти: а) закон распределения случайного вектора $\left(X,Y\right)$; б) функцию распределения $F_{XY}\left(x,y\right)$ вектора $\left(X,Y\right)$; в) законы распределения случайных величин X и Y; являются ли случайные величины X и Y

независимыми? г) вероятность $\mathrm{P}(X \geq Y)$; д) математическое ожидание и корреляционную матрицу вектора (X,Y); е) условный закон распределения случайной величины X при условии, что $Y=2$, и вычислить условное математическое ожидание $\mathrm{M}(X \mid Y=2)$.

Непрерывные случайные векторы

2.2.17. Задана функция распределения случайного вектора (X,Y):

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & x \geq 0, y \geq 0;\\ 0 & , \min(x,y)<0.\end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y); б) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Являются ли они некоррелированными?

2.2.18. Задана функция распределения случайного вектора (X,Y):

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases}1-a^{-x^2}-a^{-2y^2}+a^{-x^2-2y^2}, & x \geq 0, y \geq 0,\ a>0;\\ 0 & , \min(x,y)<0.\end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y); б) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; в) вероятность попадания случайного вектора (X,Y) в область, задаваемую неравенствами $(1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2)$. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Являются ли они некоррелированными?

2.2.19. Задана функция распределения случайного вектора (X,Y):

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0;\\ 0 & , \min(x,y)<0.\end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y); б) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; в) вероятность попадания вектора (X,Y) в треугольник с вершинами в точках $A(1;3)$, $B(3;3)$, $C(2;8)$. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Являются ли они некоррелированными?

2.2.20. Функция распределения непрерывного случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases} 0, & \min(x,y)\le 0; \\ \frac{1}{2}\left(\sin x+\sin y-\sin(x+y)\right), & 0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}\left(\sin x-\cos x+1\right), & 0\le x\le \frac{\pi}{2}, y>\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}\left(\sin y-\cos y+1\right), & x>\frac{\pi}{2}, 0\le y\le \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \min(x,y)>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y); б) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ и определить, являются случайные величины X и Y независимыми или нет; в) математическое ожидание вектора (X,Y); г) вероятность попадания вектора (X,Y) в область, изображенную на рис. 2.10.

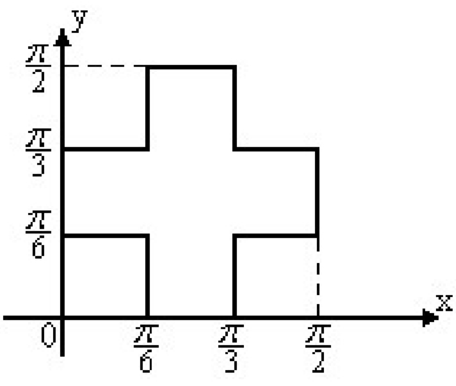

Рис. 2.10.

2.2.21. Определить плотность вероятностей, математическое ожидание и корреляционную матрицу случайного вектора (X,Y), если его функция распределения имеет вид:

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases}0, & \min(x,y)\le 0;\\ \sin x\cdot\sin y, & (x,y)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\times\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right];\\ \sin x, & (x,y)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\left(\dfrac{\pi}{2},\infty\right);\\ \sin y, & (x,y)\in\left(\dfrac{\pi}{2},\infty\right)\times\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right];\\ 1, & \min(x,y)>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

2.2.22. Функция распределения случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases}0, & \min(x,y)<0;\\ \min(x,y), & 0\le\min(x,y)<1;\\ 1, & \min(x,y)\ge 1.\end{cases}$$

Найти одномерные законы распределения случайных величин X и Y. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

2.2.23. Случайный вектор (X,Y) имеет плотность вероятностей:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{A}{1+x^2+x^2y^2+y^2}.$$

Найти: а) коэффициент A; б) функцию распределения $F_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y); в) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; г) вероятность попадания случайного вектора (X,Y) в квадрат B, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину, равную 2. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Являются ли они некоррелированными?

2.2.24. Дана плотность вероятностей случайного вектора (X,Y):

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}0{,}5\cdot\sin(x+y), 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, \quad \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y); б) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; в) математическое ожидание и корреляционную матрицу случайного вектора (X,Y). Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Являются ли они некоррелированными?

2.2.25. Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c\left(xy+y^2\right), 0\le x\le 2, 0\le y\le 2; \\ 0, \qquad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент c; б) функцию распределения $F_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y); в) плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ и определить, являются ли случайные величины X и Y независимыми; г) вероятность $\mathrm{P}(X+Y<2)$; д) математическое ожидание и корреляционную матрицу вектора (X,Y).

2.2.26. Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) равна:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} 24\cdot x^2 y(1-x), & 0<x<1, 0<y<1; \\ 0, & \min(x,y)<0, \max(x,y)>1. \end{cases}$$

Доказать, что случайные величины X и Y являются независимыми. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного вектора (X,Y).

2.2.27. Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) равна:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} 8\cdot xy(1-x^2), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказать, что случайные величины X и Y являются независимыми. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайного вектора (X,Y).

2.2.28. Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) равна:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x>0, y>0; \\ 0, \text{в остальных случаях.} & \end{cases}$$

Найти плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Являются ли они некоррелированными?

2.2.29. Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}0, & x^2+y^2\ge a^2;\\ c\cdot\sqrt{a^2-\left(x^2+y^2\right)}, & x^2+y^2<a^2.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент c; б) вероятность попадания вектора (X,Y) в первый квадрант плоскости $\mathrm{P}(X>0,Y>0)$; в) математическое ожидание и корреляционную матрицу вектора (X,Y).

2.2.30. Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{A}{(x^2+y^2+1)^3}.$$

Определить коэффициент A, математическое ожидание и корреляционную матрицу случайного вектора (X,Y).

2.2.31. Дана плотность вероятностей случайного вектора (X,Y):

$$f_{XY}(x,y)=k\cdot xye^{-(x^2+y^2)},\quad (x\ge 0, y\ge 0).$$

Определить: а) коэффициент k; б) одномерные плотности вероятностей $f_X(x), f_Y(y)$; в) условные плотности вероятностей $f_X(x\,|\,y), f_Y(y\,|\,x)$; г) первые и вторые моменты случайного вектора (X,Y).

2.2.32. Случайный вектор (X,Y) распределен с постоянной плотностью внутри квадрата с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(0;a)$, $C(a;a)$, $D(a;0)$.

Написать выражения для плотности вероятностей $f_{XY}(x,y)$ и функции распределения $F_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y). Определить, являются ли случайные величины X и Y независимыми. Найти математическое ожидание случайного вектора (X,Y) и вероятность $\mathrm{P}\left(X^2+Y^2<\dfrac{a^2}{4}\right)$.

2.2.33. Случайный вектор (X,Y) распределен равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям.

Найти плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ и функцию распределения $F_{XY}(x,y)$ случайного вектора (X,Y). Определить, зависимы или нет координаты вектора X и Y. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного вектора (X,Y).

2.2.34. Случайный вектор (X,Y) равномерно распределен в квадрате со стороной, равной единице, и диагоналями, совпадающими с осями координат. Найти коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

2.2.35. Случайный вектор (X,Y) равномерно распределен внутри прямоугольного треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(0;8)$, $C(8;0)$.

Найти плотность вероятностей вектора (X,Y). Найти одномерные плотности вероятностей, математические ожидания и условные плотности вероятностей координат X и Y.

2.2.36. Случайный вектор (X,Y) имеет постоянную плотность вероятностей внутри квадрата с диагоналями, совпадающими с осями координат и равными 2.

Написать выражение для плотности вероятностей $f_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y), плотностей вероятностей $f_X(x)$, $f_Y(y)$ его координат и условных плотностей вероятностей $f_X(x\,|\,y), f_Y(y\,|\,x)$. Зависимы или независимы случайные величины X и Y? Коррелированны они или нет? Вычислить вероятность $\mathrm{P}(XY>0)$.

2.2.37. Случайный вектор (X,Y) распределен равномерно в круге радиуса R с центром в начале координат. Доказать, что случайные величины X и Y зависимы, но некоррелированы.

2.2.38. Случайный вектор (X,Y,Z) распределён равномерно внутри шара радиуса r. Написать выражения для плотности вероятностей $f_{XYZ}(x,y,z)$ вектора (X,Y,Z), плотностей вероятностей $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и $f_Z(z)$ его координат, а также для условной плотности вероятностей $f_X(x|y,z)$. Вычислить математическое ожидание $\mathrm{M}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$.

2.2.39. Поверхность распределения $f_{XY}(x,y)$ случайного вектора (X,Y) представляет собой прямой круговой цилиндр, центр основания которого совпадает с началом координат (рис. 2.11), а высота равна h.

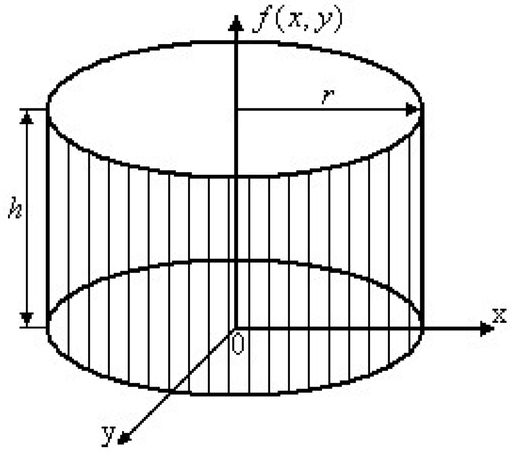

Рис. 2.11.

Определить радиус цилиндра r. Найти плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; условные плотности вероятностей $f_X(x|y)$ и $f_Y(y|x)$; корреляционную матрицу. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

2.2.40. Поверхность распределения $f_{XY}(x,y)$ случайного вектора (X,Y) представляет собой круговой конус (рис. 2.12), основанием которого служит круг радиуса r с центром в начале координат. Вне этого конуса плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ равна нулю.

а) Написать выражение для плотности вероятностей $f_{XY}(x,y)$.

б) Найти плотности вероятностей координат $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

в) Найти условные плотности вероятностей $f_X(x|y)$ и $f_Y(y|x)$.

г) Определить, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

д) Определить, являются ли случайные величины X и Y некоррелированными.

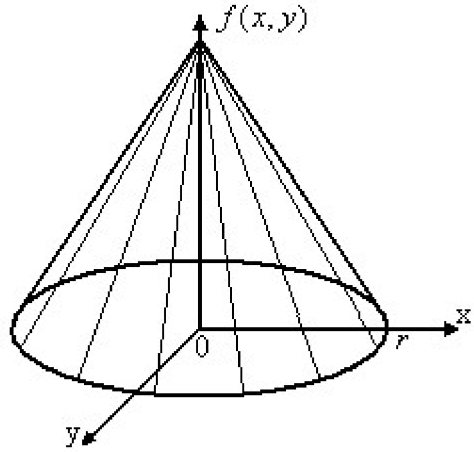

Рис. 2.12.

2.2.41. Известны математические ожидания двух нормальных случайных величин $\mathrm{M}X = 26,\ \mathrm{M}Y = -12$ и их корреляционная матрица

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{pmatrix}.$$

Написать выражение для плотности вероятностей случайного вектора (X,Y).

2.2.42. Заданы следующие характеристики двумерного нормального случайного вектора (X,Y): математические ожидания $\mathrm{M}X = -2, \mathrm{M}Y = 3$ и корреляционная матрица

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 25 \end{pmatrix}.$$

Написать выражение для плотности вероятностей $f_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y).

2.2.43. Плотность вероятностей случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$f_{XY}(x,y) = ce^{-[4(x-5)^2+2(x-5)(y-3)+5(y-3)^2]}.$$

Найти коэффициент c и корреляционную матрицу вектора (X,Y).

2.2.44. Плотность вероятностей двумерного случайного вектора (X,Y) имеет вид:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+5y^2\right)}.$$

Найти плотность вероятностей $f_X(x)$ случайной величины X и основные числовые характеристики вектора (X,Y).

2.2.45. Случайный вектор (X,Y) имеет нормальный закон распределения с плотностью вероятностей вида:

$$f_{XY}(x,y) = k \cdot \exp\left\{-\frac{1}{0,72 \cdot \sigma^2}\left[(x-5)^2 + 0,8 \cdot (x-5)(y+2) + 0,25 \cdot (y+2)^2\right]\right\}.$$

Определить: а) плотности вероятностей каждой из координат вектора (X,Y); б) условные плотности вероятностей $f_X(x|y)$ и $f_Y(y|x)$; в) условные математические ожидания и дисперсии.

2.2.46. Случайный вектор (X,Y) распределен по нормальному закону с параметрами $\mathrm{M}X = 1, \mathrm{M}Y = -1, \sigma_X = 1, \sigma_Y = 2, \mathrm{r}_{XY} = 0$. Найти вероятность того, что случайная точка (X,Y) попадет внутрь области D, ограниченной эллипсом $(x-1)^2 + (y+1)^2/4 = 1$.

2.2.47. Координаты (X,Y) точек на плоскости являются независимыми случайными величинами и распределены по нормальным законам с параметрами (a,σ^2) и (b,σ^2) соответственно. Найти радиус круга с центром в точке (a,b), вероятность попадания в который равна 0,997.

2.2.48. Случайный вектор (X,Y) распределен по нормальному закону распределения с параметрами: $m_X = -1, m_Y = 1, \sigma_X = 1, \sigma_Y = 2, \mathrm{r}_{XY} = 0$. Написать уравнение эллипса с центром в точке $(-1,1)$ и полуосями $a = \lambda\sigma_X, b = \lambda\sigma_Y$, вероятность попадания случайного вектора (X,Y) в который равна 0,9.

2.2.49. Производится стрельба по точечной (малоразмерной) цели, зона поражения которой представляет собой круг радиуса r с центром в начале координат. Рассеивание точки попадания снаряда нормальное с параметрами

$m_X = m_Y = 0,\ \sigma_X = \sigma_Y = 2r,\ \mathrm{r}_{XY} = 0$. Сколько выстрелов нужно произвести, чтобы поразить цель с вероятностью не меньшей 0,95?

2.2.50. Трехмерный нормальный случайный вектор (X,Y,Z) имеет математическое ожидание $(\mathrm{M}X,\mathrm{M}Y,\mathrm{M}Z)=(0,0,0)$ и корреляционную матрицу:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Написать выражение для плотности вероятностей $f_{XYZ}(x,y,z)$ случайного вектора (X,Y,Z).

2.2.51. Случайный вектор (X_1,X_2,X_3,X_4) имеет плотность вероятностей:

$$f_{X_1X_2X_3X_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{384\pi^2} e^{-\frac{5}{96}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)+\frac{1}{48}\left(x_1^2x_3^2+x_2^2x_4^2\right)}.$$

Найти плотности вероятностей $f_{X_1X_2}(x_1,x_2)$ и $f_{X_1X_3}(x_1,x_3)$ случайных векторов (X_1,X_2) и (X_1,X_3) соответственно.

2.2.52. Имеются независимые случайные величины X и Y. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $\mathrm{M}X = 0$, $\sigma_X = 1/\sqrt{2}$. Случайная величина Y распределена равномерно на интервале $(0,1)$. Написать выражение для плотности $f_{XY}(x,y)$ и функции распределения $F_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y).

2.2.53. Случайные величины X и Y независимы и распределены следующим образом: X - по показательному закону с параметром $\lambda = 2$, Y - по равномерному закону на интервале $(-2,2)$.

Найти вероятности $p_1 = \mathrm{P}(0 \le X \le 2,\ 0 \le Y \le 1)$ и $p_2 = \mathrm{P}(Y - X < 2)$.

2.2.54. Случайные величины X и Y независимы и распределены каждая по показательному закону с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти вероятность $\mathrm{P}(X \ge \mathrm{M}X, Y \ge \mathrm{M}Y)$.

2.2.55. Величины X_1, X_2, X_3 независимы и имеют нормальные законы распределения $N(1,1)$, $N(0,4)$, $N(-1,1)$ соответственно. Найти:

а) $\mathrm{P}(X_1 + X_2 + X_3 < 0)$; б) $\mathrm{P}(|2X_1 - X_2 + X_3| < 3)$.

2.2.56. Пусть (X,Y) – случайный вектор, у которого координата X распределена по показательному закону с параметром λ: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$; а координата Y при заданном значении $X = x > 0$ распределена по показательному закону с параметром x: $f_Y(y\,|\,x) = xe^{-xy}$, $y > 0$.

Найти плотность вероятностей $f_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y), плотность вероятностей $f_Y(y)$ случайной величины Y, условную плотность вероятностей $f_X(x\,|\,y)$.

2.2.57. Случайная величина X – дискретная величина с двумя значениями x_1 и x_2 $(x_2 > x_1)$, имеющими вероятности p_1 и p_2. Случайная величина Y – непрерывная величина, ее условным распределением при $X = x_i$ служит нормальный закон с математическим ожиданием, равным x_i, и дисперсией σ^2 $(i = 1,2)$. Найти функцию распределения $F_{XY}(x,y)$ вектора (X,Y). Найти плотность вероятностей $f_Y(y)$ случайной величины Y.

2.2.58. Для случайного вектора (X,Y) известны: плотность вероятностей $f_Y(y)$ случайной величины Y, условное математическое ожидание $\mathrm{M}(X\,|\,Y = y)$ и условная дисперсия $\mathrm{D}(X\,|\,Y = y)$. Определить $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$.

2.2.59. Коэффициент корреляции случайных величин X и Y равен единице. Может ли случайный вектор (X,Y) иметь плотность вероятностей?

2.2.60. Пусть $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ – две плотности вероятностей двумерных гауссовских распределений на плоскости с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и равными коэффициентами корреляции. Доказать, что: а) функция $f(x,y) = \frac{1}{2}[f_1(x,y) + f_2(x,y)]$ является плотностью вероятностей некоторого случайного вектора (X,Y); б) вектор

(X,Y) не является гауссовским; в) каждая из величин X и Y имеет гауссовское распределение с параметрами $(0,1)$.

2.2.61. Пусть $u(x)$ – нечетная непрерывная функция на интервале $(-\infty,\infty)$, которая равна нулю вне промежутка $(-1,1)$ и $|u(x)|<(2\pi e)^{-1/2}$. Пусть $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Доказать, что: а) функция $\varphi(x)\varphi(y)+u(x)u(y)$ является плотностью вероятностей некоторого случайного вектора (X,Y); б) вектор (X,Y) не является гауссовским; в) каждая из величин X и Y имеет гауссовское распределение.

2.3. Функции от случайных величин и векторов

Законы распределения функций от случайных величин

Пусть X – дискретная случайная величина, принимающая значения x_i с вероятностями p_i. Тогда для произвольной функции $g(x)$, область определения которой содержит множество возможных значений величины X, случайная величина $Y=g(X)$ является дискретной и ее возможными значениями y_j являются различные среди значений $g(x_i)$. При этом вероятности q_j значений y_j определяются по формуле:

$$q_j=\mathrm{P}\left(Y=y_j\right)=\sum_{i:g(x_i)=y_j}p_i,$$

то есть необходимо сложить вероятности тех значений x_i, для которых $g(x_i)=y_j$.

Если X – непрерывная случайная величина с плотностью вероятностей $f_X(x)$, а $g(x)$ – ***монотонная*** в области возможных значений случайной величины X и дифференцируемая функция, то случайная величина $Y=g(X)$ является непрерывной и ее плотность вероятностей $f_Y(y)$ определяется по формуле:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|,$$

где $g^{-1}(y)$ – функция, обратная к функции $g(x)$.

Если дифференцируемая функция $g(x)$ ***не является монотонной*** в области возможных значений случайной величины X, то

$$f_Y(y) = \sum_i f_X\left(g_i^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}g_i^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|,$$

где $g_i^{-1}(y)$ – функция, обратная к сужению функции $g(x)$ на i-й промежуток монотонности.

Законы распределения функций от случайных векторов

Пусть (X,Y) – двумерный случайный вектор с заданным законом распределения и случайная величина $Z = g(X,Y)$, где $g(x,y)$ – неслучайная скалярная функция двух переменных, область определения которой содержит множество возможных значений вектора (X,Y).

Если (X,Y) – ***дискретный*** случайный вектор, принимающий значения (x_i, y_j) с вероятностями p_{ij}, то Z – дискретная случайная величина и ее возможными значениями z_k являются различные среди значений $g(x_i, y_j)$. При этом вероятности значений z_k аналогично одномерному случаю определяются по формуле:

$$\mathrm{P}(Z = z_k) = \sum_{(i,j):\, g(x_i, y_j) = z_k} p_{ij}\,.$$

Если (X,Y) – ***непрерывный*** случайный вектор с плотностью вероятностей $f_{XY}(x,y)$, то $Z = g(X,Y)$ является непрерывной случайной величиной, если функция $g(x,y)$ дифференцируема по каждому из своих аргументов. При этом функция распределения $F_Z(z)$ случайной величины Z находится по формуле:

$$F_Z(z) = \mathrm{P}(Z < z) = \iint\limits_{(x,y):g(x,y)<z} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

а плотность вероятностей $f_Z(z)$ находится дифференцированием $F_Z(z)$ по z.

Если $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ – неслучайная векторная функция, то в результате функционального преобразования случайного вектора (X,Y) получается также двумерный случайный вектор $(Z_1,Z_2) = g(X,Y) = (g_1(X,Y), g_2(X,Y))$. При этом, если (X,Y) – дискретный случайный вектор, то (Z_1,Z_2) также будет дискретным случайным вектором при произвольной функции $g(x,y)$ и закон его распределения находится аналогично скалярному случаю. Если (X,Y) – непрерывный случайный вектор, а преобразование $(z_1,z_2) = g(x,y)$ является взаимнооднозначным и существует якобиан обратного преобразования $(x,y) = g^{-1}(z_1,z_2) = (g_1^{-1}(z_1,z_2), g_2^{-1}(z_1,z_2))$:

$$J(z_1,z_2) = \det\left\| \frac{\partial g_i^{-1}(z_1,z_2)}{\partial z_j} \right\|_{i,j=1,2},$$

то случайный вектор $(Z_1,Z_2) = g(X,Y)$ будет непрерывным и его плотность вероятностей $f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2)$ находится по формуле:

$$f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2) = f_{XY}(g_1^{-1}(z_1,z_2), g_2^{-1}(z_1,z_2))|J(z_1,z_2)|.$$

В общем случае, если $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_n)$ – n-мерный непрерывный случайный вектор с плотностью вероятностей $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1\dots X_n}(x_1,\dots,x_n)$ и $g(\mathbf{x}) = g(x_1,\dots,x_n)$ – неслучайная вектор-функция со значениями в $\mathbf{R}^m$ ($g = (g_1,\dots,g_m)$), то плотность вероятностей преобразованного случайного вектора

$$\mathbf{Y} = (Y_1,\dots,Y_m) = g(\mathbf{X}) = (g_1(X_1,\dots,X_n),\dots,g_m(X_1,\dots,X_n))$$

находится следующим образом:

если $m = n$ и преобразование $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ взаимнооднозначно, то

$$f_Y(\mathbf{y}) = f_X\left(g^{-1}(\mathbf{y})\right)\left|J(\mathbf{y})\right|,$$

где $J(\mathbf{y}) = \det\left\|\dfrac{\partial g_i^{-1}(\mathbf{y})}{\partial y_j}\right\|_{i,j=\overline{1,n}}$ – якобиан обратного преобразования $\mathbf{x} = g^{-1}(\mathbf{y})$;

если $m < n$, и уравнение $\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')$ имеет единственное решение относительно вектора $\mathbf{x}' = (x'_1,\dots,x'_m)$, состоящего из каких-нибудь m координат вектора $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$, то

$$f_Y(\mathbf{y}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(g^{-1}(\mathbf{y},\mathbf{x}''),\mathbf{x}''\right)\left|J(\mathbf{y},\mathbf{x}'')\right| \mathrm{d}\mathbf{x}'',$$

где $J(\mathbf{y},\mathbf{x}'') = \det\left\|\dfrac{\partial g_i^{-1}(\mathbf{y},\mathbf{x}'')}{\partial y_j}\right\|_{i,j=\overline{1,m}}$ – якобиан обратного преобразования $\mathbf{x}' = g^{-1}(\mathbf{y},\mathbf{x}'')$.

Задача композиции

Часто на практике возникает задача определения ***закона распределения случайной величины*** $Z = X + Y$ ***, являющейся суммой координат*** случайного вектора, закон распределения которого известен.

Если (X,Y)- дискретный случайный вектор, принимающий значения (x_i, y_j) с вероятностями p_{ij}, то Z – дискретная случайная величина и ее возможными значениями z_k являются различные среди значений $x_i + y_j$. При этом вероятности значений z_k определяются по формуле:

$$\mathrm{P}(Z = z_k) = \sum_{(i,j):\, x_i+y_j=z_k} \mathrm{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right).$$

Если (X,Y)- непрерывный случайный вектор с плотностью вероятностей $f_{XY}(x,y)$, то случайная величина $Z = X + Y$ является непрерывной и имеет плотность вероятностей $f_Z(z)$, определяемую формулой:

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, z-x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(z-y, y)\mathrm{d}y.$$

Если дополнительно известно, что координаты случайного вектора (X,Y) являются ***независимыми*** случайными величинами, то:

- случайная величина $Z=X+Y$ является дискретной, если X и Y - дискретные случайные величины, и имеет закон распределения

$$\mathrm{P}(Z=z_k)=\sum_i \mathrm{P}(X=x_i)\mathrm{P}(Y=z_k-x_i)=\sum_j \mathrm{P}(Y=y_j)\mathrm{P}(X=z_k-y_j),$$

где вероятность $\mathrm{P}(Y=z_k-x_i)=0$, если $z_k-x_i\neq y_j$ ни при каком *j*, и аналогично вероятность $\mathrm{P}(X=z_k-y_j)=0$, если $z_k-y_j\neq x_i$ ни при каком *i*;

- случайная величина $Z=X+Y$ является непрерывной, если X и Y - непрерывные случайные величины, и имеет плотность вероятностей

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y,$$

где $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ - плотности вероятностей случайных величин X и Y соответственно;

- случайная величина $Z=X+Y$ является непрерывной, если X - дискретная а Y - непрерывная случайные величины, и имеет плотность вероятностей

$$f_Z(z)=\sum_i p_i f_Y(z-x_i),$$

где x_i и p_i - значения случайной величины X и соответствующие им вероятности, $f_Y(y)$ - плотность вероятностей случайной величины Y.

Задача определения закона распределения суммы независимых случайных величин называется ***задачей композиции*** законов распределения.

Числовые характеристики функций от случайных величин и векторов

Пусть X – случайная величина с известным законом распределения, а $g=g(x)$ - неслучайная (борелевская) функция, область определения которой содержит множество возможных значений случайной величины X. Тогда ***математическое ожидание*** и ***дисперсия*** случайной величины $Y=g(X)$ вычисляются (в случае их существования) по формулам:

$$\mathrm{M}Y=\mathrm{M}g(X)=\begin{cases}\sum\limits_i g(x_i)p_i, & \text{если } X\text{-дискретная случайная величина;}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x, & \text{если } X\text{-непрерывная случайная величина.}\end{cases}$$

$$\mathrm{D}Y=\mathrm{D}g(X)=\begin{cases}\sum\limits_i\left(g(x_i)-\mathrm{M}g(X)\right)^2 p_i=\sum\limits_i\left[g(x_i)\right]^2 p_i-\left(\mathrm{M}g(X)\right)^2,\\ \qquad\qquad \text{если } X\text{-дискретная случайная величина;}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[g(x)-\mathrm{M}g(X)\right]^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[g(x)\right]^2 f(x)\mathrm{d}x-\left(\mathrm{M}g(X)\right)^2,\\ \qquad\qquad \text{если } X\text{-непрерывная случайная величина.}\end{cases}$$

Аналогичные формулы имеют место и для других начальных и центральных моментов случайной величины $Y=g(X)$.

Смысл приведенных формул состоит в том, что для вычисления числовых характеристик неслучайной функции от случайной величины достаточно знать только закон распределения случайного аргумента X и не требуется знать закон распределения самой случайной величины $Y=g(X)$.

Это правило естественно обобщается на функции от большего числа случайных аргументов. Так, если случайная величина $Z=g(X,Y)$, где $g(x,y)$ - неслучайная (борелевская) функция двух переменных, область определения которой содержит множество возможных значений случайного вектора (X,Y), то

$$\mathrm{M}Z=\mathrm{M}g(X,Y)=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j g(x_i,y_j)p_{ij}, & \text{если } (X,Y)-\text{дискретный}\\ & \text{случайный вектор;}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{если } (X,Y)-\text{ непрерывный}\\ & \text{случайный вектор.}\end{cases}$$

Свойства математического ожидания и дисперсии, используемые при решении приводимых ниже задач.

1. Для любых случайных величин X_k, имеющих конечные математические ожидания $\mathrm{M}X_k$, $k=1,2,..,n$, и любых чисел $a_1,...,a_n,b\in \mathbb{R}$

$$\mathrm{M}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k + b\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, \mathrm{M} X_k + b$$ - свойство линейности

математического ожидания.

2. Для любых случайных величин X_k, имеющих конечные дисперсии $\mathrm{D} X_k$, $k = 1,2,..,n$, и любых чисел $a_1,...,a_n,b \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k + b\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \, \mathrm{D} X_k + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} a_i a_j \, \mathrm{R}_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \, \mathrm{R}_{ij},$$

где $\mathrm{R}_{ij} = \mathrm{M}(X_i - \mathrm{M} X_i)(X_j - \mathrm{M} X_j)$ – корреляционный момент случайных величин X_i и X_j (напомним, что $\mathrm{R}_{ii} = \mathrm{D} X_i$), $i, j = 1,2,..,n$.

В частности, для двух случайных величин X и Y и любых чисел $a,b,c \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{D}(aX + bY + c) = a^2 \, \mathrm{D} X + b^2 \, \mathrm{D} Y + 2ab \, \mathrm{R}_{XY}.$$

Если случайные величины X_k, $k = 1,2,..,n$ являются ***попарно некоррелированными*** (или ***независимыми***), то

$$\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \, \mathrm{D} X_k$$ - свойство аддитивности дисперсии.

3. $\mathrm{M} XY = \mathrm{M} X \cdot \mathrm{M} Y + \mathrm{R}_{XY}$.

4. Неравенство Коши-Буняковского: $(\mathrm{M} XY)^2 \le \mathrm{M} X^2 \cdot \mathrm{M} Y^2$.

5. Если случайные величины X и Y некоррелированы (или независимы), то

$$\mathrm{D} XY = \mathrm{D} X \cdot \mathrm{D} Y + (\mathrm{M} X)^2 \cdot \mathrm{D} Y + (\mathrm{M} Y)^2 \cdot \mathrm{D} X.$$

Пример 1. Случайная величина X распределена равномерно на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Y = \sin X$.

Решение. Заметим, что функция $y=\sin x$ является монотонной и дифференцируемой на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, следовательно, для нахождения плотности вероятностей случайной величины Y можно воспользоваться формулой

$$f_Y(y)=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right|.$$

Из условия задачи следует, что

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);\\ 0, & x\notin\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

Поскольку $g(x)=\sin x$, то $g^{-1}(y)=\arcsin y$, $\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Теперь легко записать выражение для плотности

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y\in(-1;1);\\ 0, & y\notin(-1;1).\end{cases}$$

Пример 2. Случайный вектор (X,Y) имеет плотность вероятностей $f(x,y)$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z=\frac{Y}{X}$.

Решение. Зафиксируем некоторое значение z и построим на плоскости xOy множество G точек, удовлетворяющих неравенству $\frac{y}{x}<z$.(На рис. 2.13 область G заштрихована.)

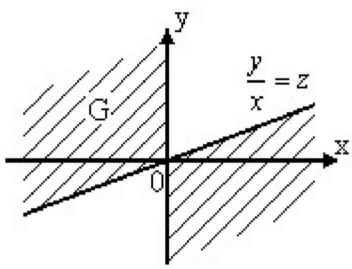

Рис. 2.13.

Запишем выражение для функции распределения

$$F_Z(z) = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{0} dx \int\limits_{zx}^{+\infty} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,dy .$$

Дифференцируя последнее равенство по z, находим выражение для плотности

$$f_Z(z) = -\int\limits_{-\infty}^{0} x f(x,zx)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} x f(x,zx)\,dx .$$

Пример 3. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = X - Y$, если X и Y - независимые случайные величины, распределенные по показательному закону с параметрами λ и μ соответственно:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \\ 0, \quad\quad x \le 0; \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y}, y > 0, \\ 0, \quad\quad y \le 0. \end{cases}$$

Решение. Плотность разности двух независимых случайных величин X и Y определяется следующей формулой «свертки» (см. задачу композиции):

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(x-z)\,dx .$$

Заметим, что $f_X(x) \ne 0$, если $x > 0$, а $f_Y(x-z) \ne 0$, если $x - z > 0$.

Пусть $z \ge 0$, тогда

$$f_Z(z) = \int\limits_{z}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(x-z)}\,dx = \frac{\lambda\mu e^{-\lambda z}}{\lambda + \mu}.$$

Пусть $z < 0$, тогда

$$f_Z(z) = \int\limits_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(x-z)}\,dx = \frac{\lambda\mu e^{\mu z}}{\lambda + \mu}.$$

В итоге выражение для искомой плотности примет вид:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu e^{-\lambda z}}{\lambda + \mu}, \; z \ge 0; \\ \dfrac{\lambda\mu e^{\mu z}}{\lambda + \mu}, \quad z < 0. \end{cases}$$

Пример 4. Случайный вектор(X,Y) имеет следующие числовые характеристики: $\mathrm{M}X=-1, \mathrm{M}Y=1, \sigma_X=2, \sigma_Y=3, \mathrm{R}_{XY}=0{,}5$. Определить математическое ожидание случайной величины $Z=(X-Y)^2$.

Решение. Воспользуемся свойствами 1 и 3 математического ожидания: $\mathrm{M}Z=\mathrm{M}\left(X^2+Y^2-2XY\right)=\mathrm{M}X^2+\mathrm{M}Y^2-2\mathrm{M}XY=\mathrm{D}X+(\mathrm{M}X)^2+\mathrm{D}Y+(\mathrm{M}Y)^2-$ $-2(\mathrm{M}X\cdot\mathrm{M}Y+\mathrm{R}_{XY})=11$.

Пример 5. На окружности радиуса r, изображенной на рис. 2.14, наудачу ставятся две точки, которые затем соединяются между собой и с центром окружности. Найти математическое ожидание площади полученного треугольника.

Решение. Так как в данном случае важно только взаимное расположение точек на окружности, то можно считать, что первая точка имеет фиксированные координаты $(r,0)$. Тогда положение второй точки, случайно поставленной на окружности, полностью определяется случайным углом $\varPhi$ между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором, проведённым во вторую точку (см. рисунок). Поскольку все значения угла $\varPhi$ возможны в пределах от 0 до 2π, то можно считать, что случайная величина $\varPhi$ распределена по равномерному закону $R(0,2\pi)$. Поэтому

$$f_\varPhi(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & \varphi\in(0,2\pi),\\ 0, & \varphi\notin(0,2\pi).\end{cases}$$

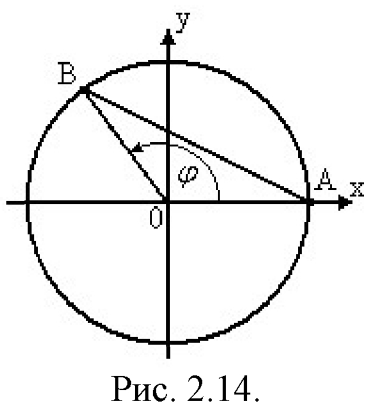

Рис. 2.14.

При фиксированных точках A и B площадь треугольника OAB равна

$$S = \frac{r^2}{2}\left|\sin \Phi\right|.$$

Таким образом

$$\mathrm{M}S = \frac{1}{2}r^2\int_0^{2\pi}\left|\sin\varphi\right|\frac{1}{2\pi}d\varphi = \frac{r^2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi = \frac{r^2}{\pi}.$$

Задачи

Функции от случайных величин и векторов

2.3.1. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	-2	-1	1	2
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^2$.

2.3.2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin X$.

2.3.3. Случайная величина X имеет закон распределения $p_k = \mathrm{P}(X = k) = pq^k$, $k = 0,1,2,\ldots\left(p+q=1,\ p>0,\ q>0\right)$. Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины $Y = 2X - 3$.

2.3.4. Случайная величина X имеет закон распределения $p_k = \mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$, $k = 0,1,2,\ldots$ Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины $Y = (X-1)^2$.

2.3.5. Случайная величина X имеет закон распределения $p_k = \mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{ek!}$, $k = 0,1,2,\ldots$ Найти закон распределения случайной величины $Y = (3X-2)^2$.

2.3.6. Случайная величина X распределена равномерно на интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Y = \mathrm{tg}\, X$.

2.3.7. Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(0,1)$. Найти плотности вероятностей случайных величин: а) $Y = X^2$; б) $Y = \dfrac{1}{X}$; в) $Y = e^X$ и построить их графики.

2.3.8. Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(0,2\pi)$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Y = \cos X$.

2.3.9. Пусть X – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-1,1]$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Y = |X|$.

2.3.10. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(0,1)$. Найти плотности вероятностей случайных величин: а) $Y = aX + b$;

б) $Y = \dfrac{1}{1+X^2}$; в) $Y = e^X$; г) $Y = \operatorname{arctg} X$; д) $Y = \sqrt[3]{|X|}$.

2.3.11. Случайная величина X распределена по закону $N(a,\sigma^2)$.

Найти: а) плотность вероятностей случайной величины $Y = X^2$ при $a = 0$; б) плотность вероятностей случайной величины $Z = e^X$ при произвольных a и σ.

2.3.12. Случайная величина X распределена по закону $N(0,1)$. Найти: а) закон распределения случайной величины

$$Y = \begin{cases} X, \text{ если } |X| \le 1, \\ -X, \text{ если } |X| > 1; \end{cases}$$

б) плотность вероятностей случайной величины $Z = X + Y$ и $\mathrm{M}Z$.

2.3.13. Случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найти плотности вероятностей случайных величин: а) $Y = X^3 + 2$; б) $Y = \operatorname{arctg} X$.

2.3.14. Случайная величина X имеет распределение Коши. Доказать, что случайные величины $\frac{1}{X}$, $\frac{2X}{1-X^2}$, $\frac{3X-X^3}{1-3X^2}$ также имеют распределение Коши.

2.3.15. Задана плотность вероятностей $f_X(x)$ случайной величины X. Найти плотность вероятностей $f_Y(y)$ случайной величины Y, если: а) $Y = AX + B$; б) $Y = |X|$; в) $Y = \frac{1}{X^2}$; г) $Y = \sin X$.

2.3.16. Задана функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X. Найти функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины $Y = 3X + 2$.

2.3.17. Задана функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X. Найти функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины $Y = -\frac{2}{3}X + 2$.

2.3.18. Диаметр круга – случайная величина X, которая равномерно распределена на отрезке $[a,b]$. Найти функцию распределения площади круга.

2.3.19. Пусть X – случайная величина с непрерывной функцией распределения $F_X(x)$, и $Y = F_X(x)$. Найти функцию распределения случайной величины Y.

2.3.20. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют законы распределения:

X	10	12	16
P	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
P	0,2	0,8

Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

2.3.21. Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей

X \ Y	-1	1
-1	$1/8$	$5/24$
0	$1/12$	$1/6$
-1	$7/24$	$1/8$

Найти: а) совместный закон распределения $q_{i,j} = \mathrm{P}(Z_1 = i, Z_2 = j)$ случайных величин $Z_1 = X + Y$ и $Z_2 = XY$; б) закон распределения $p_i = \mathrm{P}(Z_1 = i)$ случайной величины $Z_1 = X + Y$; в) закон распределения $q_j = \mathrm{P}(Z_2 = j)$ случайной величины $Z_2 = XY$.

2.3.22. Пусть величина X принимает значения -1, 0, 1 с вероятностями $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ соответственно, а величина Y принимает значения 1, 2, 3 с вероятностями $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$. Величины X и Y независимы. Найти распределение вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

2.3.23. Дискретная случайная величина X принимает значения -1,1 с вероятностями $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$, а случайная величина Y является непрерывной и не зависит от случайной величины X. Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$, если случайная величина Y распределена

а) по равномерному закону $R[0,1]$;

б) по равномерному закону $R[-1,1]$;

в) по показательному закону $E\left(\frac{1}{2}\right)$;

г) по нормальному закону $N(0,1)$;

д) по закону с плотностью вероятностей

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1-|y|, & |y| \le 1; \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$$

2.3.24. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0,1]$, а случайная величина Y имеет показательное распределение с плотностью вероятностей

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \ge 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Величины X и Y независимы. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

2.3.25. Пусть X и Y – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

2.3.26. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерные законы распределения $R[-1,1]$ и $R[0,2]$ соответственно. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

2.3.27. Случайные величины X_1, X_2 и X_3 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = X_1 + X_2 + X_3$.

2.3.28. Случайные величины X и Y независимы и равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Найти плотность вероятностей случайных величин:

а) $Z = XY$; б) $Z = X - Y$; в) $Z = |X - Y|$.

2.3.29. Пусть X и Y – независимые случайные величины, которые имеют показательное распределение с параметром λ. Найти: а) плотность вероятностей случайной величины $Z = X - Y$; б) плотность вероятностей случайной величины $Z = |X - Y|$.

2.3.30. Пусть X и Y – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

2.3.31. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = \frac{X}{Y}$, если задана плотность вероятностей $f(x, y)$ случайного вектора (X, Y).

2.3.32. Определить плотность вероятностей случайной величины $Z = XY$, если: а) задана плотность вероятностей $f(x, y)$ случайного вектора (X, Y);

б) X и Y – независимые нормальные случайные величины с математическими ожиданиями, равными "0", и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно.

2.3.33. Пусть X и Y – независимые случайные величины, которые имеют показательное распределение с параметром λ. Найти функцию распределения случайной величины $Z = \dfrac{X}{X+Y}$.

2.3.34. Случайные величины X и Y независимы и имеют плотности вероятностей

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1; \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ ye^{-\frac{y^2}{2}}, & y > 0. \end{cases}$$

Доказать, что случайная величина XY имеет нормальное распределение.

2.3.35. Случайные величины X и Y имеют нормальное распределение $N\left(0,\sigma^2\right)$ и независимы. Доказать, что отношение $Z = \dfrac{X}{Y}$ имеет распределение Коши.

2.3.36. Пусть (X,Y) – нормальный случайный вектор с плотностью вероятностей

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\mathrm{r}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\mathrm{r}^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2\mathrm{r}\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = \dfrac{X}{Y}$.

2.3.37. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $(0,1)$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по показательному закону с плотностью вероятностей

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad (y > 0)\,?$$

2.3.38. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью вероятностей $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (x > 0)$.

Каким функциональным преобразованием можно превратить ее в случайную величину, распределенную по закону Коши:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \ ?$$

2.3.39. Имеются две случайных величины: X с плотностью вероятностей $f_X(x)$ и Y с плотностью вероятностей $f_Y(y)$. Известно, что случайная величина Y представляет собой монотонную функцию от случайной величины X: $Y = g(X)$. Найти вид функции g. (Рассмотреть отдельно случаи монотонно возрастающей и монотонно убывающей функции g).

2.3.40. Пусть X и Y – независимые случайные величины, которые имеют нормальные распределения $N(0,1)$. Доказать, что случайные величины $X - Y$ и $X + Y$ независимы.

2.3.41. Пусть X и Y – независимые случайные величины, имеющие показательные распределения с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Доказать, что случайные величины $X - Y$ и $\min(X,Y)$ независимы.

2.3.42. Пусть X и Y – независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону $N(0,\sigma^2)$. Показать, что случайные величины $X^2 + Y^2$ и X/Y независимы.

2.3.43. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ – независимые случайные величины, имеющие гауссовские распределения $N(0,1)$. Пусть $Y_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ и $Y_2 = \sum_{k=1}^{n} b_k X_k$. Доказать, что Y_1 и Y_2 независимы тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$.

2.3.44. По плотности вероятностей $f(x,y)$ случайного вектора (X,Y) найти плотность вероятностей $g(x_1,y_1)$ случайного вектора (X_1,Y_1), если

$$X_1 = X\cos\alpha + Y\sin\alpha,$$

$$Y_1 = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha, \qquad 0 < \alpha < \pi/2.$$

2.3.45. Пусть (X,Y) –случайный вектор, имеющий нормальное распределение $N\left(0,0;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\mathrm{r}\right)$. Найти плотность вероятностей случайного вектора (X_1,Y_1), если $X_1 = X\cos\alpha + Y\sin\alpha$ и $Y_1 = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha$, где α - действительное число. При каком α случайные величины X_1 и Y_1 будут независимы?

2.3.46. Определить плотность вероятностей длины радиус-вектора, если сам вектор имеет нормальное распределение с плотностью

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi a^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2a^2}}.$$

2.3.47. Координаты случайной точки (X,Y) на плоскости подчинены нормальному закону распределения с плотностью вероятностей

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi ab}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Определить совместную плотность вероятностей $f_1(r,\varphi)$ полярных координат (R,Φ) этой точки.

2.3.48. Точка P равномерно распределена в круге радиусом R. Пусть X – расстояние от точки до центра круга. Найти функцию распределения $F_X(x)$ и плотность вероятностей $f_X(x)$ случайной величины X. Найти $F_X(x)$ и $f_X(x)$. Вычислить $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$.

2.3.49. На отрезок $[0,1]$ наугад брошены две точки. Пусть X – расстояние между ними. Найти функцию распределения случайной величины X и вычислить $\mathrm{M}X$, $\mathrm{D}X$, $\mathrm{M}X^n$.

2.3.50. Случайная точка (X,Y,Z) в пространстве подчинена нормальному закону распределения с плотностью

$$f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}abc}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}.$$

Определить совместную плотность вероятностей сферических координат этой точки (R,Θ,Φ).

2.3.51. Дискретные случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы и распределены по законам Пуассона с параметрами $a_1, a_2, ..., a_n$ соответственно. Показать, что их сумма $Y = \sum_{k=1}^{n} x_k$ также распределена по закону Пуассона с параметром $a = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

2.3.52. Пусть $X_1, ..., X_n$ – независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что случайная величина $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ имеет плотность вероятностей

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Замечание. Закон распределения случайной величины S_n называется *распределением Эрланга.*

2.3.53. Пусть случайные величины $X_1, ..., X_n$ независимы и имеют нормальное распределение $N(0,1)$. Доказать, что плотность вероятностей случайной величины $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ равна

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Замечание. Закон распределения случайной величины χ^2 называется *распределением хи-квадрат с n степенями свободы.*

2.3.54. Пусть $X, X_1, ..., X_n$ – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $N(0,1)$. Доказать, что плотность вероятностей случайной величины $T = \dfrac{X}{\sqrt{X_1^2 + ... + X_n^2}}$ равна

$$f_{\mathrm{T}}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{(1+x^2)^{n+1/2}}.$$

Замечание. Закон распределения случайной величины T называется *распределением Стьюдента с n степенями свободы.*

2.3.55. Найти плотность вероятностей случайной величины $\Phi=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$, где X и Y – независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат с n_1 и n_2 степенями свободы соответственно.

Замечание. Закон распределения случайной величины Φ называется *распределением Фишера с* (n_1,n_2) *степенями свободы.*

2.3.56. Пусть $X=(X_1,...,X_n)$ – гауссовский вектор с $\mathrm{M}X=a$ и корреляционной матрицей R. Пусть A – некоторая числовая матрица размерности $n\times m$. Показать, что вектор $Y=XA$ также гауссовский.

2.3.57. Пусть $Y=\sum_{k=0}^{\infty}X_k$ – сумма независимых случайных величин X_k, каждая из которых имеет показательное распределение с параметром λ_k, $k=0,1,...$. Доказать, что $Y=\infty$ с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{M}Y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\infty.$$

Числовые характеристики функций от случайных величин и векторов

2.3.58. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.4

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=2^X$.

2.3.59. Один раз брошены две игральные кости. Случайная величина S - сумма выпавших очков. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины S.

2.3.60. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Найти коэффициент корреляции между случайными величинами X и X^2.

2.3.61. Дискретный случайный вектор (X,Y) имеет закон распределения:

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0
1	0.2	0.3	0.2

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X + Y^2$.

2.3.62. Дискретная случайная величина Φ принимает значения $\varphi_k = \dfrac{k\pi}{2}$ с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии $p_k = \mathrm{P}(\Phi = \varphi_k) = qp^{k-1}, (k = 0,1,...), q = 1 - p$. Найти $\mathrm{M}Y$ и $\mathrm{D}Y$ если:

а) $Y = \sin\Phi$; б) $Y = \cos\Phi$.

2.3.63. Случайная величина X распределена по равномерному закону $R(1,2)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \dfrac{1}{X}$.

2.3.64. Непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятностей:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos(x), & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right); \\ 0, & x \notin \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Найти $\mathrm{M}Y, \mathrm{D}Y$, где $Y = |\sin(x)|$.

2.3.65. Случайная величина X имеет плотность вероятностей

$$f_X(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0, \pi/2), \\ 0, & x \notin (0, \pi/2). \end{cases}$$

Найти дисперсию случайной величины $Y = X^2$.

2.3.66. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону: $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, ($\lambda>0$). Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=e^{-X}$.

2.3.67. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $\mathrm{M}X=0,\ \mathrm{D}X=\sigma^2$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=|X|$.

2.3.68. Найти $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$, если случайная величина $Y=\ln \mathrm{X}$ имеет нормальное распределение с параметрами $\left(a,\sigma^2\right)$.

Примечание. В этом случае говорят, что случайная величина X имеет *логарифмически нормальное распределение*.

2.3.69. Случайные величины X и Y независимы и имеют следующие числовые характеристики: $\mathrm{M}X=1, \mathrm{M}Y=2, \sigma_X=1, \sigma_Y=2$. Вычислить математические ожидания случайных величин $U=X^2+2Y^2-XY-4X+Y+4$ и $V=(X+Y-1)^2$.

2.3.70. Случайный вектор (X,Y) имеет математическое ожидание $(-1,1)$ и корреляционную матрицу $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$. Найти дисперсию случайной величины $Z=2X-4Y+3$.

2.3.71. Случайная точка (X,Y) равномерно распределена в прямоугольнике с вершинами в точках $(0,0),(2,0),(2,1),(0,1)$. Вычислить $\mathrm{M}(X\pm Y)$, $\mathrm{M}\left(X^2+Y^2\right)$, $\mathrm{M}(XY)$, а также $\mathrm{D}(X\pm Y)$ и $\mathrm{D}(XY)$.

2.3.72. Случайная точка (X,Y) распределена равномерно внутри круга радиуса $R=1$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=e^{-X}$.

2.3.73. Случайные величины X и Y независимы и имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2. Найти коэффициент корреляции случайных величин $U = \alpha X + \beta Y$ и $V = \alpha X - \beta Y$. Что можно сказать о случайных величинах U и V, если $\alpha = \beta = 1$?

2.3.74. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(0, a)$. Определить: а) $\mathrm{M}(2X+3)$; б) $\mathrm{M}(3X^2 - 2X + 1)$; в) $\mathrm{D}(2X+3)$; г) $\mathrm{D}(X^2+1)$.

2.3.75. Случайная величина X распределена по нормальному закону $N(0, \sigma^2)$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = 1 - 3X^2 + 4X^3$.

2.3.76. Случайные величины X и Y независимы и распределены: X - по равномерному закону $R(0,2)$, Y - по нормальному закону $N(1,2)$. Вычислить $\mathrm{D}(X-Y)$ и $\mathrm{M}(XY^2 + X^2Y)$.

2.3.77. Случайная величина X распределена по закону $N(-1,2)$, а независящая от нее случайная величина Y по равномерному закону $R(-1,3)$. Вычислить $\mathrm{M}Z$ и $\mathrm{D}Z$, если $Z = X + Y - XY$.

2.3.78. Непрерывные случайные величины X и Y имеют плотности вероятностей $f_X(x)$ и $f_Y(y)$, графики которых изображены на рис. 2.15.

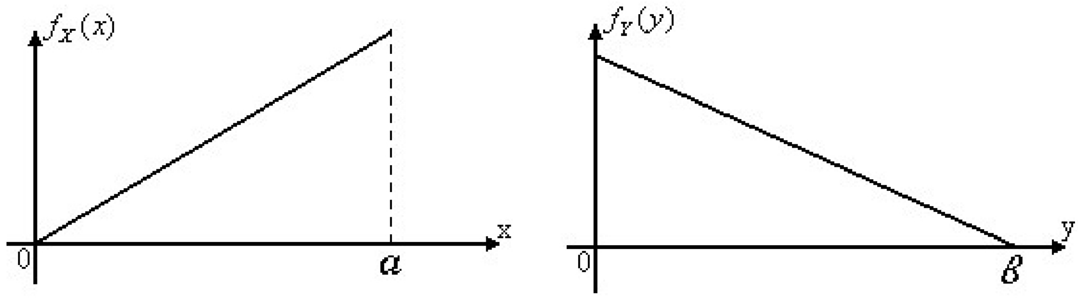

Рис 2.15.

Известно, что случайные величины X и Y зависимы и коэффициент корреляции между ними $\mathrm{R}_{xy} = -0.9$. Определить: а) $\mathrm{M}(X+Y)$; б) $\mathrm{D}(3X - 6Y + 1)$; в) $\mathrm{M}XY$.

2.3.79. На окружность радиуса r наудачу ставятся две точки. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной длины L хорды, соединяющей эти точки.

2.3.80. На отрезок AB длины l наудачу ставится точка C и проводится окружность радиуса AC. Найти $\mathrm{M}L$ и $\mathrm{D}L$, где L - длина окружности, а также $\mathrm{M}S$ и $\mathrm{D}S$, где S - площадь круга.

2.3.81. На отрезок $[0,l]$ наудачу ставятся две точки A и B. Найти $\mathrm{M}S$, где S - площадь квадрата со стороной $R=\left|\overline{AB}\right|$. Найти также $\mathrm{M}R$ и $\mathrm{D}R$.

2.3.82. На смежные стороны прямоугольника со сторонами a и b $(a<b)$ наудачу и независимо ставятся по одной точке. Найти математическое ожидание и дисперсию квадрата расстояния R^2 между ними.

2.3.83. Внутри интервала (0,1) зафиксирована точка $A(a)$ с координатой a. Случайная точка X распределена равномерно на интервале $(0,1)$, а случайная величина R - расстояние от точки A до X. Определить, при каком a величины X и R будут некоррелированными.

2.3.84. Пусть у случайной величины X существует начальный момент 4-го порядка, т.е. $\mathrm{M}X^4$. Используя неравенство Коши-Буняковского, доказать, что тогда у случайной величины X существуют начальные моменты 1-го, 2-го, и 3-го порядков.

2.3.85. Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(-1,1)$, $Y=X^m$ (m-целое, положительное). Найти коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y. Рассмотреть случаи четного и нечетного m, а также $m\to\infty$.

2.3.86. Случайные величины $X_1,X_2,...,X_{n+m}\,(n>m)$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. Найти коэффициент корреляции r между суммами случайных величин $S_{1,n}=X_1+X_2+...+X_n$ и $S_{m+1,m+n}=X_{m+1}+X_{m+2}+...+X_{m+n}$.

Указание. Рассмотреть вначале случай $n=2, m=1$.

3. ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1. Неравенство Чебышева и законы больших чисел

Если неотрицательная случайная величина X имеет конечное математическое ожидание $\mathrm{M}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$\mathrm{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{M}X}{\varepsilon}.$$

Если случайная величина X имеет конечную дисперсию $\mathrm{D}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливы следующие неравенства (***неравенства Чебышева***):

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{M}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{D}X}{\varepsilon^2};$$

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{M}X| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{D}X}{\varepsilon^2}.$$

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$, ***сходится по вероятности*** к величине X (случайной или нет), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

или, что эквивалентно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - X| < \varepsilon) = 1.$$

Краткое обозначение сходимости по вероятности: $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ при $n \to \infty$.

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$, имеющих конечные математические ожидания $\mathrm{M}X_k, k \geq 1$, ***подчиняется закону больших чисел***, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}X_k\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

или, кратко,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}X_k \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \text{ при } n \to \infty.$$

В частности, если все случайные величины в последовательности $\{X_n\}, n \geq 1$ имеют одинаковые математические ожидания $\mathrm{M}X_k = a,\ k \geq 1$, то закон больших чисел записывается в виде:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathrm{P}} a \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема Хинчина *(закон больших чисел для независимых, одинаково распределенных случайных величин).*

Если случайные величины в последовательности $\{X_n\}, n \geq 1,$ являются независимыми, одинаково распределенными и имеют конечные математические ожидания $\mathrm{M}X_k = a,\ k \geq 1,$ то

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathrm{P}} a \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема Чебышева *(закон больших чисел для независимых, разнораспределенных случайных величин).*

Если случайные величины в последовательности $\{X_n\}, n \geq 1,$ являются независимыми, а их дисперсии $\mathrm{D}X_k$ равномерно ограничены, то есть

$$\mathrm{D}X_k \leq C,\ k \geq 1,$$

то эта последовательность случайных величин подчиняется закону больших чисел.

Утверждение теоремы Чебышева остается справедливым и для попарно некоррелированных случайных величин $X_k,\ k \geq 1$, и если вместо требования равномерной ограниченности дисперсий выполняется условие:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}X_k = 0.$$

Теорема Маркова *(закон больших чисел для зависимых, разнораспределенных случайных величин).*

Если дисперсии случайных величин в последовательности $\{X_n\}, n \geq 1$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=0,$$

то эта последовательность случайных величин подчиняется закону больших чисел.

Теорема Бернулли

Относительная частота $\frac{m_A}{n}$ появления события A в n независимых испытаниях по схеме Бернулли сходится по вероятности при $n \to \infty$ к вероятности $p = \mathrm{P}(A)$ наступления события A в одном испытании, то есть для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{m_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=0,$$

или, кратко,

$$\frac{m_A}{n}\xrightarrow{\mathrm{P}}p \text{ при } n\to\infty.$$

Пример. Пусть $\{X_n\}, n \geq 1$ - последовательность случайных величин, дисперсии которых ограничены одной и той же постоянной C, а коэффициент корреляции любых случайных величин X_i и X_j $(i \neq j)$, не являющихся соседними в последовательности, равен нулю. Подчиняется ли эта последовательность случайных величин закону больших чисел?

Решение. Проверим выполнение условия в теореме Маркова:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=0.$$

Из свойств дисперсии следует, что $\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}X_k + 2\sum_{i<j} R_{ij}$, где R_{ij} - корреляционный момент случайных величин X_i и X_j. Но для $i<j$, по условию, $R_{ij}=0$, если $i \neq j-1$. Следовательно, в сумме $\sum_{i<j} R_{ij}$ равны нулю все слагаемые кроме, может быть, $R_{12}, R_{23}, \cdots, R_{(n-1)n}$ (их ровно $n-1$).

Для любых i и j $R_{ij} \leq \sqrt{\mathrm{D}X_i}\sqrt{\mathrm{D}X_j} \leq \sqrt{C}\sqrt{C} = C$, так как по условию $\mathrm{D}X_i \leq C$ для любого $1 \leq i \leq n$. Поэтому

$$\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}X_k + 2\sum_{i=1}^{n-1} R_{i(i+1)} \leq nC + 2(n-1)C = 3nC - 2C$$

и получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{3nC - 2C}{n^2} = 0.$$

Таким образом, последовательность случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$ подчиняется закону больших чисел.

Задачи

3.1.1. Показать, что если существует $\mathrm{M}X^2$, то

$$\mathrm{P}\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{M}X^2.$$

3.1.2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	*0,3*	*0,6*
P	*0,2*	*0,8*

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - \mathrm{M}X| < 0{,}2$.

3.1.3. Пусть $\mathrm{M}X = 1, \mathrm{D}X = 0{,}04$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что $0{,}5 \leq X \leq 1{,}5$.

3.1.4. Среднее значение длины детали *50* см, а дисперсия *0,1*см^2. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не меньше *49,5* см и не больше *50,5* см.

3.1.5. Длина изготовляемых изделий представляет случайную величину, среднее значение которой равно *90* см. Дисперсия этой величины равна *0,0225* см^2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что:

а) отклонение длины изготовленного изделия от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет *0,4* см;

б) длина изделия выразится числом, заключенным между *89,7* см и *90,3* см.

3.1.6. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания:

а) менее чем на три средних квадратических отклонения;

б) не менее чем на два средних квадратических отклонения.

3.1.7. $\mathrm{P}\{|X-\mathrm{M}X|<\varepsilon\}\geq 0{,}9$ и $\mathrm{D}X=0{,}009$. Пользуясь неравенством Чебышева, найти ε.

3.1.8. Устройство состоит из десяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна *0,05*. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется меньше двух.

3.1.9. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение $N(a,\sigma^2)$. Оценить с помощью неравенства Чебышева $\mathrm{P}\{|X-a|>2\sigma\}$.

Сравнить с точным значением этой вероятности.

3.1.10. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднее квадратическое отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит *1* см, оценить вероятность того, что при *1000* измерениях отклонение принятого значения от истинного не превзойдёт по абсолютной величине *0,1* см.

3.1.11. Предполагается провести 10 измерений $X_1,X_2,...,X_{10}$ неизвестной величины a. Считая измерения $X_1,X_2,...,X_{10}$ независимыми, нормально распределенными случайными величинами с $\mathrm{M}X_k = a$, $\mathrm{D}X_k = 0{,}01$, $k = \overline{1{,}10}$, найти наименьшее Δ такое, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{10}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}) - a\right| < \Delta\right\} \geq 0{,}99\,.$$

Указание. Найти точное значение Δ и сравнить с оценкой, полученной с помощью неравенства Чебышева.

3.1.12. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью не менее *0,99* можно было утверждать, что отклонение относительной частоты от вероятности события, равной *0,35,* будет не более *0,01*?

3.1.13. Сколько следует произвести испытаний, чтобы вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{m_A}{n} - p\right| < 0{,}06$ для события A превысила *0,79*? Считать вероятность появления данного события в отдельном испытании равной *0,7.*

3.1.14. Пусть случайная величина X такова, что $\mathrm{M}e^{aX}$ существует ($a>0$ – постоянная). Доказать, что тогда

$$\mathrm{P}\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{M}e^{aX}}{e^{a\varepsilon}}\,.$$

3.1.15. Пусть $f(x)$- неотрицательная неубывающая функция. Доказать, что если существует $\mathrm{M}f(X)$, то

$$\mathrm{P}\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{M}f(X)}{f(\varepsilon)}\,.$$

3.1.16. Показать, что если существует $\mathrm{M}|X|^k$, $k \geq 1$, то справедливо неравенство:

$$\mathrm{P}\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{M}|X|^k}{\varepsilon^k} \text{ (неравенство Маркова).}$$

3.1.17. Допуская существование $\mathrm{M}f(X)$, доказать, что имеют место следующие оценки сверху и снизу для $\mathrm{P}\{|X| \geq \varepsilon\}$:

а) $\mathrm{P}\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{\mathrm{M} f(X)}{f(\varepsilon)}$, если $f(x)$ неотрицательная, четная, неубывающая на интервале $[\varepsilon,+\infty)$ функция;

б) $\mathrm{P}\{|X| \geq \varepsilon\} \geq \dfrac{\mathrm{M} f(X) - f(\varepsilon)}{c}$, если $f(x)$ неотрицательная, четная, неубывающая на интервале $[\varepsilon,+\infty)$ и ограниченная $(f(x) \leq c)$ функция.

3.1.18. Дана последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$. Каждая случайная величина X_n может принимать только три значения: $\sqrt{-n}$, 0, $\sqrt{n}$ с вероятностями, равными соответственно $\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}$, $\frac{1}{n}$. Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?

3.1.19. Дана последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$. Каждая случайная величина X_n имеет закон распределения:

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$1/2n^2$	$1-1/n^2$	$1/2n^2$

Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?

3.1.20. Дана последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$, в которой каждая из случайных величин X_n имеет закон распределения:

X_n	$-a$	a
P	$(n+1)/(2n+1)$	$n/(2n+1)$

Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?

3.1.21.. Каждая случайная величина X_n в последовательности независимых случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$, может принимать только два значения $\pm\sqrt{\ln n}$ с вероятностями, равными 1/2. Подчиняется ли эта последовательность случайных величин закону больших чисел?

3.1.22. Подчиняется ли закону больших чисел последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$, если каждая из случайных величин X_k имеет закон распределения:

$$P\{X_k = \sqrt{k}\} = P\{X_k = -\sqrt{k}\} = \frac{1}{2\sqrt{k}},\ P\{X_k = 0\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}, k = 1,2,...?$$

3.1.23. Подчиняется ли закону больших чисел последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1,$ если каждая случайная величина X_n принимает значения $-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$,

причем

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right);$$

$$P(|X_n| = k) = \frac{1}{2k^3},\ k = 1, 2, \ldots, n?$$

3.1.24. Подчиняется ли закону больших чисел последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1,$ если каждая из случайных величин X_k имеет закон распределения:

$$P\{X_k = (-1)^{m-1} m\} = \frac{6}{\pi^2 m^2},\ m = 1, 2, ...,\ k \geq 1\ ?$$

3.1.25. Случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ являются независимыми и распределены по закону равнобедренного треугольника (Симпсона) на отрезке $[-a_n, a_n]$, т.е. имеют плотности вероятностей вида:

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < -a_n; \\ \dfrac{a_n + x}{a_n^2}, & -a_n \leq x < 0; \\ \dfrac{a_n - x}{a_n^2}, & 0 \leq x \leq a_n; \\ 0, & x > a_n, \end{cases}$$

причем $a_n = n^{\alpha}, \alpha < \frac{1}{2}$. Подчиняется ли последовательность таких случайных величин закону больших чисел?

3.1.26. Случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ независимы и равномерно распределены: а) на отрезке $[a,b]$; б) на отрезках $[a_n, b_n]$ соответственно, причем $b_n - a_n = b_{n-1} - a_{n-1} + \dfrac{C}{n^{1/2+\alpha}}$, где C и α - положительные постоянные. Подчиняется ли эта последовательность случайных величин закону больших чисел?

3.1.27. Доказать, что, если $\{X_n\}, n \geq 1$ - последовательность независимых случайных величин, имеющих дисперсии, удовлетворяющие условию $\dfrac{\mathrm{D}X_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то эта последовательность подчиняется закону больших чисел (теорема Хинчина).

3.1.28. Подчиняется ли закону больших чисел последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$, если $\mathrm{M}X_n = 0, \mathrm{D}X_n = Cn^{\alpha}$, где $c>0$, $\alpha>0$ - некоторые постоянные?

3.1.29. Показать, что если последовательность случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$ такова, что $\mathrm{D}X_k < C$ и $\mathrm{R}_{ik} = \mathrm{M}(X_i - \mathrm{M}X_i)(X_k - \mathrm{M}X_k) \leq 0$, $k \neq i$, $k, i = 1, 2, \ldots$, то она подчиняется закону больших чисел.

3.1.30. Дана последовательность случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$, для которых $\mathrm{D}X_n \leq C$, $\mathrm{r}_{ij} \to 0$, $|i - j| \to \infty$ (r_{ij} - коэффициент корреляции между X_i и X_j). Доказать, что эта последовательность подчиняется закону больших чисел (теорема Бернштейна).

3.1.31. Пусть $\{X_n\}, n \geq 1$ - последовательность случайных величин такая, что X_k может зависеть только от X_{k-1} и X_{k+1}, но не зависит от всех других X_i. Показать, что для этой последовательности закон больших чисел выполняется, если $\mathrm{D}X_k < c < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$.

3.1.32. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и последовательность случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$ такова, что $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} a$ при $n \to \infty$, то $f(X_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} f(a)$ при $n \to \infty$.

3.1.33. Доказать, что если последовательность случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$ такова, что $|X_k| \leq c$, $k = 1,2,...$ и $X_n \xrightarrow{P} a$ при $n \to \infty$, то и $\mathrm{M}X_n \to a$ при $n \to \infty$.

3.1.34. Доказать, что если последовательности случайных величин $\{X_n\}$ è $\{Y_n\}$, $n \geq 1$ таковы, что $X_n \xrightarrow{P} X$ è $Y_n \xrightarrow{P} Y$ при $n \to \infty$, то

а) $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$; б) $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$ при $n \to \infty$.

3.1.35. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 ... \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) dx_1 ... dx_n,$$

если $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[0,1]$.

3.1.36. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 ... \int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1 ... x_n}) dx_1 ... dx_n = f\left(\frac{1}{e}\right),$$

где $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[0,1]$.

3.1.37. Последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{\mathrm{D}X_n}{n} \to 0, \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}X_k \to a, \ n \to \infty.$$

Доказать, что для произвольной непрерывной и ограниченной на всей числовой прямой функции *f(x)* имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M} f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = f(a).$$

3.2. Производящие и характеристические функции

Пусть X – целочисленная, неотрицательная случайная величина с законом распределения вероятностей:

$$\mathrm{P}\{X = k\} = p_k, \ k=0,1,2,... .$$

Производящей функцией случайной величины X называется неслучайная функция $p(z)$, определяемая при $|z| \le 1$ равенством:

$$p(z) = \mathrm{M} z^X = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k .$$

Производящая функция $p(z)$ является аналитической внутри единичного круга $|z| < 1$ и по ней закон распределения случайной величины X однозначно определяется равенствами:

$$p_k = \frac{1}{k!} p^{(k)}(0), \text{ где } p^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dz^k} p(z)\Big|_{z=0}, \ k \ge 0.$$

Величину $MX(X-1)\ldots(X-k+1)$ называют ***k-м факториальным моментом***. Если конечен k-й факториальный момент, то существует левосторонняя производная $p^{(k)}(1)$ и

$$\mathrm{M} X(X-1)\ldots(X-k+1) = p^{(k)}(1).$$

В частности,

$$\mathrm{M} X = p'(1), \ \mathrm{M} X^2 = p''(1) + p'(1), \ \mathrm{D} X = p''(1) + p'(1) - \left[p'(1)\right]^2.$$

Производящая функция $p_X(z)$ суммы $X = X_1 + \ldots + X_n$ независимых случайных величин равна произведению производящих функций слагаемых:

$$p_X(z) = p_{X_1}(z) p_{X_2}(z) \ldots p_{X_n}(z).$$

Характеристической функцией случайной величины X называется комплекснозначная неслучайная функция $\varphi(t)$ вещественного аргумента t, определяемая равенством:

$$\varphi(t) = \mathrm{M} e^{itX} .$$

Для дискретной случайной величины X, принимающей значения x_k с вероятностями p_k, характеристическая функция представляет собой ряд Фурье:

$$\varphi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k .$$

Если X - непрерывная случайная величина с плотностью вероятностей $f(x)$, то характеристическая функция есть преобразование Фурье плотности вероятностей:

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx .$$

Характеристическая функция обладает следующими основными свойствами:

1. $\varphi(0)=1, |\varphi(t)|\leq 1$, $-\infty<t<+\infty$.

2. $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на всей числовой прямой.

3. $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$. В частности, вещественная характеристическая функция является четной.

4. $\varphi(t)$ неотрицательно определена, т. е. для любого конечного $n\geq 1$, для любых комплексных чисел $z_1,\dots,z_n$ и любых действительных чисел $t_1,\dots,t_n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,k=1}^{n} z_i \overline{z}_k \varphi(t_i-t_k)\geq 0 .$$

5. Если $\varphi_X(t)$ – характеристическая функция случайной величины X, то случайная величина $Y=a+bX$ имеет характеристическую функцию $\varphi_Y(t)=e^{iat}\varphi_X(bt)$.

6. Характеристическая функция $\varphi_X(t)$ суммы $X=X_1+\ldots+X_n$ независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых:

$$\varphi_X(t)=\varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)\cdot\ldots\cdot\varphi_{X_n}(t).$$

7. Если у случайной величины X существует момент порядка n, то характеристическая функция $\varphi(t)$ имеет n непрерывных производных и

$$\varphi^{(n)}(0)=i^n \mathrm{M}\, X^n .$$

Функция распределения $F(x)$ однозначно определяется своей характеристической функцией $\varphi(t)$. Имеет место следующая формула обращения:

$$F(x)-F(y)=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\varphi(t)dt$$

для любых точек *x* и *y*, являющихся точками непрерывности функции $F(x)$.

Если характеристическая функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|dt<\infty$, то у случайной величины существует плотность вероятностей $f(x)=F'(x)$ и

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

Характеристической функцией случайного вектора $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)$ называется комплекснозначная неслучайная функция *n* вещественных переменных $t_1,...,t_n$, определяемая равенством:

$$\varphi_{X_1...X_n}(t_1,...,t_n)=\mathrm{M}e^{i\sum_{k=1}^{n}t_kX_k}=\mathrm{M}e^{i(\mathbf{t},\mathbf{X})},$$

где $(\mathbf{t},\mathbf{X})$ - скалярное произведение векторов.

Пример 1. Найти производящую функцию геометрической случайной величины X с параметром $p>0$ и с ее помощью найти $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$.

Решение. Геометрическая случайная величина X принимает значения $1,2,...,n,...$ с вероятностями $p_k=\mathrm{P}(x=k)=pq^{k-1}$, $q=1-p$, $k=1,2,...$. Поэтому производящая функции этой случайной величины имеет вид:

$$p(z)=\mathrm{M}z^X=\sum_{k=1}^{\infty}z^kpq^{k-1}=pz\sum_{k=1}^{\infty}(qz)^{k-1}=\frac{pz}{1-qz}.$$

Найдем с помощью производящей функции математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

$$\mathrm{M}X=p'(1)=p'(z)|_{z=1}=\left.\frac{p}{(1-qz)^2}\right|_{z=1}=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p},$$

$$\mathrm{D}X = p''(1) + p'(1) - \left[p'(1)\right]^2 = \left.\frac{2pq}{(1-qz)^3}\right|_{z=1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2pq}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Отметим, что нахождение числовых характеристик геометрической случайной величины через производящую функцию существенно проще, чем непосредственным подсчетом.

Пример 2.Найти характеристическую функцию случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[-1,1]$.

Решение. Случайная величина $X \sim R[-1,1]$ имеет плотность вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1,1]; \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Поэтому

$$\varphi(t) = \mathrm{M}e^{itX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itx}dx = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t}.$$

Пример 3. Характеристическая функция непрерывной случайной величины X имеет вид $\varphi(t) = e^{-a|t|}, a > 0$. Найти плотность вероятностей этой случайной величины.

Решение. Характеристическая функция $\varphi(t) = e^{-a|t|}, a > 0$ является абсолютно интегрируемой. Поэтому плотность вероятностей $f(x)$ случайной величины X существует и она представляет собой обратное преобразование Фурье функции $\varphi(t)$**:**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(a-ix)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+ix)t}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a-ix} + \frac{1}{a+ix}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2}$$ - закон распределения Коши.

Задачи

3.2.1. Найти производящую функцию числа "успехов" X в схеме независимых испытаний Бернулли и с её помощью найти $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$.

3.2.2. Найти производящую функцию пуассоновской случайной величины X и с её помощью найти $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$.

3.2.3. Пусть N и N_m – число испытаний в схеме Бернулли до появления первого и m-го успеха соответственно. Найти производящие функции величин N и N_m, а также $\mathrm{M}N$, $\mathrm{D}N$ и $\mathrm{M}N_m$, $\mathrm{D}N_m$.

3.2.4. Найти законы распределения, которым соответствуют следующие производящие функции:

а) $\frac{1}{4}(1+z)^2$; б) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-1}$;

в) $e^{2(z-1)}$; г) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}z\right)^n$.

3.2.5. Пусть X – неотрицательная целочисленная случайная величина с производящей функцией $p(z)$. Найти производящие функции случайных величин $X+1$, $2X$ и $3X+2$.

3.2.6. Пусть u_n – вероятность того, что число успехов в последовательности n испытаний по схеме Бернулли чётно. Доказать рекуррентную формулу: $u_n = qu_{n-1} + p(1-u_{n-1})$. Вывести отсюда производящую функцию, а из неё точную формулу для u_n $(u_0 = 1)$.

3.2.7. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения –1 и 1 с равными вероятностями. Найти характеристическую функцию данной случайной величины.

3.2.8. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	-2	0	2
P	1/4	1/2	1/4

Найти характеристическую функцию случайной величины X и с ее помощью вычислить $\mathrm{D}X$.

3.2.9. Найти характеристическую функцию числа "успехов" X в схеме Бернулли и с её помощью найти $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$.

3.2.10. Найти характеристическую функцию пуассоновской случайной величины X и с её помощью найти $\mathrm{M}X$ и $\mathrm{D}X$.

3.2.11. Найти характеристическую функцию случайной величины X, принимающей значения $0, \pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_n, \ldots$ (конечное или счетное множество) с вероятностями $p_0, p_n = p_{-n}, n = 1,2,\ldots.$

3.2.12. Найти характеристические функции следующих законов распределения:

а) равномерного на отрезке $[a,b]$;

б) показательного с параметром $a>0$;

в) нормального $N(a,\sigma^2)$;

г) закона Коши с плотностью вероятностей

$$f(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)};$$

д) закона распределения Лапласа с плотностью вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|};$$

е) χ^2 с n степенями свободы с плотностью вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, x > 0.$$

3.2.13. Случайная величина X имеет плотность вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right), & |x| \le a. \end{cases}$$

Доказать, что характеристическая функция случайной величины X равна:

$$\varphi(t) = 2 \cdot \frac{1 - \cos at}{a^2 t^2} = \left(\frac{\sin \dfrac{at}{2}}{\dfrac{at}{2}} \right)^2.$$

3.2.14. Случайная величина X имеет плотность вероятностей:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos ax}{ax^2}.$$

Доказать, что характеристическая функция величины X равна:

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & |t|>a,\\ 1-\dfrac{|t|}{a}, & |t|\le a.\end{cases}$$

3.2.15. Найти характеристическую функцию гамма-распределения $\Gamma(\alpha,\beta)$ с параметрами $\alpha>0,\beta>0$, имеющего плотность вероятностей

$$f(x)=\frac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta x}, x>0.$$

3.2.16. Найти законы распределения, соответствующие характеристическим функциям: а) $\cos t$; б) $\cos^2 t$; в) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k \cos kt$; г) $\sum_{k=0}^{\infty}a_k \cos kt$, где $a_k\ge 0$, $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=1$.

3.2.17. Характеристическая функция случайной величины X имеет вид: $\varphi(t)=\dfrac{1}{2e^{-it}-1}$. Найти закон распределения этой случайной величины.

3.2.18. Найти плотности вероятностей случайных величин, имеющих следующие характеристические функции:

а) $\varphi(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$;

б) $\varphi(t)=\dfrac{1}{1-it}$;

в) $\varphi(t)=\begin{cases}0, & |\mathrm{t}|>1;\\ 1-|t|, & |\mathrm{t}|\le 1;\end{cases}$

г) *г)* $\varphi(t)=\dfrac{\sin t}{t}$..

3.2.19. Даны характеристические функции:

$$\varphi_1(t)=\frac{1+it}{1+t^2},\ \varphi_2(t)=\frac{1-it}{1+t^2}.$$

Определить соответствующие им плотности вероятностей.

3.2.20. С помощью характеристических функций доказать, что:

а) сумма независимых пуассоновских случайных величин имеет пуассоновское распределение;

б) сумма независимых биномиальных случайных величин, связанных со схемами Бернулли с одинаковыми вероятностями "успеха", является биномиальной случайной величиной;

в) сумма независимых нормально распределенных случайных величин имеет нормальное распределение;

г) сумма независимых случайных величин, имеющих распределения Коши, также распределена по закону Коши.

3.2.21. Величины X и Y независимы, одинаково распределены и их характеристическая функция равна $\varphi(t)$. Найти характеристическую функцию разности $X_1 - X_2$.

3.2.22. Показать, что если $\varphi(t)$ – характеристическая функция, то и $|\varphi(t)|^2$ также является характеристической функцией.

3.2.23. Убедиться, что функция $\varphi(t) = \dfrac{3+\cos t}{4}$ является характеристической функцией и найти соответствующий ей закон распределения.

3.2.24. Доказать, что при каждом натуральном n функция $\varphi(t) = \cos^n t$ является характеристической.

3.2.25. Доказать, что функция $\varphi(t) = 1 - \dfrac{|t|}{a}$ при $|t| \le a$, продолженная на всю числовую прямую с периодом $2a$, является характеристической.

3.2.26. Являются ли характеристическими следующие функции:

а) $\cos t$; б) $\sin t$; в) $\dfrac{1}{2}(1+\cos t)$; г) e^{-t^4};

д) $\dfrac{\sin t}{t}$; е) $\dfrac{1}{1+t^2}$; ж) $\cos t^2$?

3.2.27. Доказать, что функции

а) $\varphi(t) = e^{-i|t|}$;

б) $\varphi(t)=\dfrac{1}{1-i|t|}$;

в) $\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}+t}$;

г) $\varphi(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|\le 1;\\ 0, & |t|>1\end{cases}$

не являются характеристическими.

3.2.28. Дать теоретико-вероятностную интерпретацию равенства

$$\frac{\sin t}{t}=\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}.$$

3.2.29. Дать теоретико-вероятностную интерпретацию равенства

$$\frac{\sin t}{t}=\prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{t}{2^k}.$$

3.2.30. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ – независимые случайные величины, каждая из которых принимает значения *-1* и *1* с вероятностями *1/2*. Найти характеристическую функцию случайной величины $Y_n=\sum_{k=1}^{n}a_kX_k$, где a_k - постоянные. Показать, что при $a_k=\dfrac{1}{2^k}$ закон распределения случайной величины Y_n стремится при $n\to\infty$ к равномерному закону распределения на отрезке $[-1,1]$.

3.2.31. Пусть X_1, X_2, X_3 – независимые случайные величины, имеющие стандартный нормальный закон распределения $N(0,1)$. Найти совместную характеристическую функцию случайных величин $Y_1=X_1+X_2$ и $Y_2=X_1+X_3$.

3.2.32. Случайные величины X_1,X_2,X_3,X_4 имеют нормальное совместное распределение, причём $\mathrm{M}X_i=0$, $i=\overline{1,4}$ и $\mathrm{M}X_iX_k=r_{ik}$, i, $k=\overline{1,4}$. Найти: а) $\mathrm{M}X_1X_2X_3X_4$; б) $\mathrm{M}X_1X_2X_3$; в) $\mathrm{M}(X_1X_2X_3)^2$.

3.3. Предельные теоремы теории вероятностей

Говорят, что последовательность $\{F_n(x)\}$, $n \ge 1$ функций распределения слабо сходится к функции распределения $F(x)$ при $n \to \infty$ (обозначается $F_n \Rightarrow F$), если $F_n(x) \to F(x)$ в каждой точке непрерывности предельной функции распределения $F(x)$.

Доказательство слабой сходимости распределений часто основывается на теоремах непрерывности.

Теорема непрерывности для производящих функций

Пусть $\left\{p_k^{(n)}, k \ge 0\right\}, n \ge 1$ - последовательность законов распределений целочисленных случайных величин X_n с производящими функциями $p_n(z)$. Для сходимости последовательности законов распределения $\left\{p_k^{(n)}, k \ge 0\right\}$, $n \ge 1$ к закону распределения $\left\{p_k, k \ge 0\right\}$ при $n \to \infty$ и каждом конечном k

$$\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = p_k$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность производящих функций $\left\{p_n(s)\right\}, n \ge 1$ на полуинтервале $[0,1)$ сходилась при $n \to \infty$ и любом $0 \le s < 1$ к предельной функции $p(s)$:

$$\lim_{n\to\infty} p_n(s) = p(s).$$

При этом $p(s)$ является производящей функцией на полуинтервале $[0,1)$ предельного закона распределения $\left\{p_k, k \ge 0\right\}$:

$$p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$$

Теорема непрерывности для характеристических функций

Последовательность функций распределения $\{F_n(x)\}, n \ge 1$ слабо сходится к функции распределения $F(x)$ тогда и только тогда, когда последовательность их характеристических функций $\left\{\varphi_n(t)\right\}, n \ge 1$ сходится при $n \to \infty$ к непрерывной предельной функции $\varphi(t)$. При этом $\varphi(t)$ есть характеристическая функция предельной функции $F(x)$ и сходимость $\varphi_n(t)$ к $\varphi(t)$ равномерная на любом конечном интервале.

Пусть $\{X_n\}, n \geq 1$ - последовательность независимых случайных величин. Теоремы, которые устанавливают нормальность предельного закона распределения суммы независимых случайных величин $S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ n \geq 1$ называются ***центральными предельными теоремами (ЦПТ).***

ЦПТ для независимых, одинаково распределенных случайных величин.

Пусть $\{X_n\}, n \geq 1$ - последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные математические ожидания $\mathrm{M} X_k = a$ и дисперсии $\mathrm{D} X_k = \sigma^2,\ k \geq 1$.

Тогда при $n \to \infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - a) < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

или, что эквивалентно, функция распределения $F_n(x)$ центрированной и нормированной суммы $\dfrac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ слабо сходится к функции распределения $\Phi(x)$ стандартного нормального закона распределения $N(0,1): F_n \Rightarrow \Phi$.

ЦПТ для независимых, разнораспределенных случайных величин

Теорема Линдеберга

Пусть $\{X_n\}, n \geq 1$ - последовательность независимых, разнораспределенных случайных величин, имеющих конечные математические ожидания $\mathrm{M} X_k = a_k$ и дисперсии $\mathrm{D} X_k = \sigma_k^2, k \geq 1$. Обозначим $F_{X_k}(x) = \mathrm{P}\left(X_k < x\right)$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$. Тогда, если выполняется условие Линдеберга:

$$\text{для любого } \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\{|x-a_k| > \varepsilon B_n\}} (x - a_k)^2 dF_{X_k}(x) = 0,$$

то функция распределения $F_n(x)$ центрированной и нормированной суммы $\frac{S_n - A_n}{B_n}$ слабо сходится к функции распределения $\Phi(x)$ стандартного нормального закона $N(0,1)$: $F_n \Rightarrow \Phi$.

Из условия Линдеберга следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{B_n^2} \max_{1 \le k \le n} \sigma_k^2 = 0,$$

то есть в сумме S_n относительный вклад каждого слагаемого дисперсии равномерно бесконечно мал. В частности, из условия Линдеберга вытекает условие асимптотической малости последовательности случайных величин:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sigma_n^2}{B_n^2} = 0.$$

Условие Линдеберга является достаточным (но не необходимым) условием справедливости ЦПТ для последовательности независимых случайных величин с конечными дисперсиями. Если же для такой последовательности выполняется условие асимптотической малости и $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то условие Линдеберга оказывается и необходимым для справедливости ЦПТ.

Из теоремы Линдеберга выводятся многие другие варианты ЦПТ, в частности, следующая теорема.

Теорема Ляпунова

Пусть $\{X_n\}, n \ge 1$ - последовательность независимых, разнораспределенных случайных величин, имеющих конечные математические ожидания $\mathrm{M}X_k = a_k$, дисперсии $\mathrm{D}X_k = \sigma_k^2$ и центральные абсолютные моменты $\mathrm{M}|X_k - a_k|^{2+\delta}$ порядка $2+\delta$ при некотором $\delta > 0$ и любом $k \ge 1$. Обозначим $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$. Тогда, при выполнении условия

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}|X_k - a_k|^{2+\delta} = 0$$

функция распределения $F_n(x)$ центрированной и нормированной суммы $\frac{S_n - A_n}{B_n}$ слабо сходится к функции распределения $\Phi(x)$ стандартного нормального закона $N(0,1)$: $F_n \Rightarrow \Phi$.

Пример 1. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром λ. Показать, что предельным законом распределения стандартизованной случайной величины $Z = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ при $\lambda \to \infty$ является нормальный закон $N(0,1)$.

Решение. Характеристическая функция пуассоновской случайной величины с параметром λ имеет вид: $\varphi_X(t) = \exp\left\{\lambda(e^{it}-1)\right\}$. Величина Z линейно выражается через X: $Z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X - \sqrt{\lambda}$, поэтому по свойствам характеристических функций

$$\varphi_Z(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} \varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = e^{-it\sqrt{\lambda}} e^{\lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1)}.$$

Разложим экспоненту в показателе степени второй экспоненты в ряд Тейлора по степеням $\frac{t}{\sqrt{\lambda}}$ с точность до членов второго порядка малости:

$$e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1 \approx i\frac{t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2}{2\lambda} + o\left(\frac{t^2}{2\lambda}\right).$$

Подставляя это разложение в выражение для $\varphi_Z(t)$, получим

$$\varphi_Z(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\left(i\frac{t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2}{2\lambda} + o\left(\frac{t^2}{\lambda}\right)\right)} = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\lambda o\left(\frac{t^2}{\lambda}\right)} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

что соответствует виду характеристической функции стандартного нормального закона распределения. Так как характеристическая функция однозначно определяет закон распределения, то отсюда следует утверждение, сформулированное в примере.

Замечание. Из примера 1 вытекает, что при достаточно больших значениях λ можно пуассоновское распределение приближенно аппроксимировать нормальным.

Пример 2. Случайная величина X_n имеет распределение $\chi^2(n)$, то есть ее плотность вероятностей имеет вид:

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{n/2-1} e^{-x/2}, x > 0.$$

Показать, что случайная величина $\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$ при $n \to \infty$ распределена по нормальному закону распределения $N(0,1)$.

Решение. По смыслу распределения $\chi^2(n)$ (см. задачу 2.3.53) случайная величина $X_n = Z_1^2 + \ldots + Z_n^2$, где Z_k – независимые, нормально $N(0,1)$ распределенные случайные величины, $k = \overline{1,n}$. Поскольку случайные величины Z_k независимы, то и случайные величины Z_k^2 независимы и одинаково распределены, $k = \overline{1,n}$. Кроме того, в соответствии с выражениями для моментов гауссовской случайной величины (см. задачу 2.1.75) для каждой из случайных величин Z_k^2 имеем:

$$MZ_k^2 = 1,$$
$$DZ_k^2 = MZ_k^4 - (MZ_k^2)^2 = \mu_4 - \mu_2^2 = 3\sigma_{Z_k}^4 - \sigma_{Z_k}^4 = 2.$$

Таким образом, для последовательности случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$ выполняются все условия ЦПТ. Поэтому случайная величина

$$\frac{X_n - MX_n}{\sqrt{DX_n}} = \frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$$

имеет при $n \to \infty$ нормальный $N(0,1)$ закон распределения.

Замечание. Результат примера 2 позволяет при больших n (практически при $n \geq 30$) приближенно находить квантили распределения $\chi^2(n)$ через квантили нормального $N(0,1)$ распределения.

Задачи

3.3.1. Дисперсия каждой из 4500 независимых, одинаково распределенных случайных величин равна 5. Найти вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится от своего математического ожидания не более чем на 0,04.

3.3.2. Случайная величина X является средним арифметическим 3200 независимых и одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 2. Найти вероятность того, что X примет значение в промежутке (2,95; 3,075).

3.3.3. Случайная величина X является средним арифметическим независимых и одинаково распределенных случайных величин, дисперсия каждой из которых равна 5. Сколько нужно взять таких величин, чтобы случайная величина X с вероятностью, не меньшей 0,9973, имела отклонение от своего математического ожидания, не превосходящее 0,01?

3.3.4. Случайная величина X является средним арифметическим 10000 независимых, одинаково распределенных случайных величин, среднее квадратическое отклонение каждой из которых равно 2. Какое максимальное отклонение Δ величины X от ее математического ожидания можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,9544?

3.3.5. Игральная кость бросается 1000 раз. Найти пределы, симметричные относительно математического ожидания, в которых с вероятностью, большей 0,99, будет находиться число выпавших очков.

3.3.6. Складывается 10^m чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-m}. Предполагается, что ошибки от округления независимы и равномерно распределены в интервале $(-\frac{1}{2}10^{-m}, \frac{1}{2}10^{-m})$. Найти пределы, симметричные относительно математического ожидания, в которых с вероятностью, не меньшей 0,99, будет находиться суммарная ошибка. Проанализировать ответ при $m = 2,3,4$.

3.3.7. Стрелок попадает при выстреле по мишени в десятку с вероятностью 0,5; в девятку – с вероятностью 0,3; в восьмёрку – с вероятностью 0,1; в семерку – с вероятностью 0,05; в шестёрку – с вероятностью 0,05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал: а) более 915 очков; б) более 950 очков?

3.3.8. Дана последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}, n \geq 1$. Величина X_n может принимать значения $\pm n^{\lambda}$ с вероятностями $\frac{1}{2n^{\lambda}}$, либо значение 0 с вероятностью $1-\frac{1}{n^{\lambda}}$ (0<λ<1). Доказать, что к сумме $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ применима теорема Ляпунова.

3.3.9. Дана последовательность независимых случайных величин $\left\{X_n\right\}$, $n \geq 1$такая, что

$$\mathrm{P}\left\{X_n = n^{\alpha}\right\} = \mathrm{P}\left\{X_n = -n^{\alpha}\right\} = \frac{1}{2}\cdot$$

Доказать, что а) к этой последовательности применима теорема Ляпунова, если $\alpha > -\frac{1}{2}$; б) применим закон больших чисел, если $\alpha < \frac{1}{2}$, и неприменим, если $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

3.3.10. Случайная величина X_n имеет гамма-распределение $\Gamma(n,\alpha)$ с параметрами $n>0$ и $\lambda>0$, т.е. имеет плотность вероятностей вида:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\alpha x}, & \mathrm{x} > 0, \\ 0 & , \ \mathrm{x} \leq 0 \end{cases}$$

и $\mathrm{M}X_n = \frac{n}{\alpha}$, $\mathrm{D}X_n = \frac{n}{\alpha^2}$.

Доказать, что закон распределения случайной величины $\sqrt{n}(\frac{\alpha X_n}{n} - 1)$ сходится при $n \to \infty$ и фиксированном α к нормальному закону распределения $N(0,1)$.

3.3.11. Используя производящие функции, показать, что при $np \to \lambda(n \to \infty)$ биномиальный закон распределения сходится к пуассоновскому закону с параметром λ.

3.3.12. Используя характеристические функции, показать, что при $\lambda \to \infty$

$$\sum_{\lambda + a\sqrt{\lambda} \le k < \lambda + b\sqrt{\lambda}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

3.3.13. Пусть $\{X_n\}, n \ge 1$ - последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин. Доказать, что соотношение $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathrm{P}} C$ при некоторой постоянной C выполняется тогда и только тогда, когда характеристическая функция случайной величины X_k дифференцируема в точке $t=0$.

3.3.14. Дана последовательность независимых случайных величин $\{X_k\}$, $k \ge 1$, распределенных по нормальному закону с параметрами $\mathrm{M}\,X_k = 0, \mathrm{D}\,X_k = \sigma_k^2$. Найти предельный закон распределения суммы $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ при $n \to \infty$, если ряд $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ а) сходится; б) расходится.

3.3.15. Установить, выполняются ли закон больших чисел и центральная предельная теорема для последовательности независимых случайных величин $\{X_k\}$, $k \ge 1$ со следующими законами распределения:

а) $\mathrm{P}\{X_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2}$;

б) $\mathrm{P}\{X_k = \pm 2^k\} = 2^{-(2k+1)}$; $\mathrm{P}\{X_k = 0\} = 1 - 2^{-2k}$;

в) $\mathrm{P}\{X_k = \pm k\} = \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}}$; $\mathrm{P}\{X_k = 0\} = 1 - k^{-\frac{1}{2}}$.

3.3.16. Доказать утверждение: если последовательность функций распределения $\{F_n(x)\}, n \geq 1$ сходится на всей числовой прямой к непрерывной функции распределения, то эта сходимость равномерная.

3.3.17. Пусть V – область m-мерного пространства, имеющая единичный объём, а $|f(x_1,...,x_m)| < c$ - ограниченная функция, определённая всюду в области V. Метод Монте-Карло вычисления интеграла

$$I = \int_V \ldots \int f(x_1,\ldots,x_m)dx_1\ldots dx_m$$

состоит в следующем: в область V бросают наудачу независимо одна от другой n точек $(x_1^{(k)},\ldots,x_m^{(k)}), k=\overline{1,n}$, равномерно распределенных в области V, и за приближённое значение интеграла принимают сумму

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_1^{(k)},\ldots,x_m^{(k)}).$$

Чему равно $\mathrm{M}I_n$? Оценить $\mathrm{D}I_n$. Найти при $n \to \infty$ предельный закон распределения для величины $\sqrt{n}(I_n - I)$.

3.3.18. Вычисление интеграла $I = \int_0^1 x^2 dx$ произведено методом Монте-Карло на основании 1000 независимых опытов. Вычислить вероятность того, что абсолютная погрешность в определении величины I не превзойдёт 0,01.

3.3.19. Сколько опытов надо произвести при вычислении методом Монте-Карло интеграла

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

для того, чтобы с вероятностью $p \geq 0{,}99$ можно было считать абсолютную погрешность вычисленного значения интеграла не превосходящей 0,1% от I?

3.3.20. На улице стоит человек и продаёт газеты. Предположим, что каждый из проходящих мимо людей с вероятностью 1/3 покупает газету. Пусть X означает число людей, прошедших мимо продавца за время, пока он продавал первые 100 экземпляров газеты. Найти приближенный закон распределения X.

3.3.21. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ имеют одинаковые распределения с $\mathrm{M}X_k = 0$ и $\mathrm{D}X_k = 1$. Показать, что величины

$$Y = \sqrt{n}\,\frac{X_1 + \ldots + X_n}{X_1^2 + \ldots + X_n^2} \text{ и } Z = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}$$

имеют при $n \to \infty$ нормальный закон распределения $N(0, 1)$.

3.3.22. Пусть $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ - независимые, нормально распределённые $N(0,1)$ случайные величины. Положим

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \quad \text{и} \quad \tau_n = \frac{X_{n+1}}{\frac{1}{n}\chi_n^2}.$$

Найти предельные при $n \to \infty$ законы распределения случайных величин χ_n^2 и τ_n.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Случайные события

1.1. Случайный эксперимент, случайные события и операции над ними

1.1.1. $\Omega = \left\{\omega_{ij} = (i, j),\ i = \overline{1,6},\ j = \overline{1,6}\right\}$, где (i, j) - число очков на первой и второй костях соответственно;

АВ=$\left\{\omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{15}, \omega_{31}, \omega_{51}\right\}$; А+В=$\left\{\omega_{ij}\colon i = 1\right\} \cup \left\{\omega_{ij} : j = 1\right\} \cup \left\{\omega_{ij} : i + j - \text{четное}\right\}$;

$A\overline{B} = \left\{\omega_{ij} : i + j - \text{четное}, i \neq 1, j \neq 1\right\}$.

1.1.2. *Ω*={*УУУ, УУН, УНУ, НУУ, УНН, НУН, ННУ, ННН*};

A={*УУУ, УУН,УНУ, УНН*}; *B*={*УУН, УНУ, НУУ*};

C={*УУН, УНУ, НУУ, УНН, НУН, ННУ, ННН*} = $\Omega - \left\{\text{УУУ}\right\}$.

1.1.3. $\Omega = \left\{\omega_{ij} = (i, j),\ i = \overline{1,6},\ j = \overline{1,6}\right\}$, где (i, j) - число очков на первой и второй костях соответственно;

А=$\left\{\omega_{46}, \omega_{55}, \omega_{64}\right\}$; В=$\left\{\omega_{16}, \omega_{26}, \ldots, \omega_{56}, \omega_{61}, \omega_{62}, \ldots, \omega_{66}\right\}$.

1.1.4. а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет.

1.1.5. 1) $A + C = E$; 2) $AC = K$; 3) $EF = \varnothing$; 4) $G + E = E$; 5) $GE = G$; 6) $BD = H$; 7) $E + K = E$.

1.1.6. 1) $A + B = B$; 2) $AB = A$; 3) $B + C = B$; 4) $BC = C$; 5) $D + E + F = C$; 6) $BF = F$; BF и CF равносильны; BC и D не равносильны.

1.1.7. $\overline{A} = \left\{\text{выпадение хотя бы одной цифры}\right\}$;

$\overline{B} = \left\{\text{появление черного или красного шара}\right\}$;

$\overline{C} = \left\{\text{хотя бы один промах}\right\}$; $\overline{D} = \left\{\text{все пять промахов}\right\}$;

$\overline{E} = \left\{\text{более двух попаданий}\right\}$; $\overline{F} = \left\{\text{выигрыш второго или ничья}\right\}$.

1.1.8. а) Выбран юноша, который не живет в общежитии и не курит;
б) когда все юноши живут в общежитии и не курят;
в) когда курящие живут только в общежитии;
г) когда ни одна девушка не курит, а все юноши курят.
Нет, так как могут курить и девушки.

1.1.9. $B=A_6$; $C=A_1$; $D=A_5$; $E=\{(x,y): r_1<\sqrt{x^2+y^2}<r_2\}$.

1.1.10. Выбранное число оканчивается цифрой 5.

1.1.11. а) ABC - оба супруга старше 30 лет, причем муж старше жены; $A-AB=A\overline{B}$, т.е. мужу больше 30 лет, но он не старше своей жены; $A\overline{B}C$ - оба супруга старше 30 лет, причем муж не старше своей жены;
б) $A\overline{C}$ - мужу больше 30 лет, а жене не больше 30 лет, следовательно, муж старше жены, т.е. $A\overline{C}\subset B$.

1.1.12. а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет.

1.1.13. $C=\{\text{ничья}\}$.

1.1.14. $A(\overline{A}B)=(A\overline{A})B=\varnothing B=\varnothing$;
$A(\overline{A+B})=A(\overline{A}\overline{B})=(A\overline{A})\overline{B}=\varnothing\overline{B}=\varnothing$;
$\overline{A}B(\overline{A+B})=\overline{A}B(\overline{A}\overline{B})=\overline{A}(B\overline{B})=\overline{A}\varnothing=\varnothing$, т.е. все события попарно несовместны;
$A+\overline{A}B+(\overline{A+B})=A+\overline{A}B+\overline{A}\overline{B}=A+\overline{A}(B+\overline{B})=A+\overline{A}\Omega=A+\overline{A}=\Omega$,
т.е. события образуют полную группу событий.

1.1.15. 1) $A=A_1A_2A_3$; 2) $B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; 3) $C=A_1+A_2+A_3$ или
$C=A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ или
$C=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$;
4) $D=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$; 5) $E=\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2$;
6) $F=\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2$; 7) $G=\overline{A}_1\overline{A}_2$.

1.1.16. а) $A\overline{B}\overline{C}$; б) $AB\overline{C}$; в) ABC; г) $A+B+C$; д) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$;
е) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;
ж) $(A+B+C)-ABC$.

1.1.17. $C = (A_1+A_2)(B_1B_2+B_1B_3+B_2B_3)$.

1.1.18. а) $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$; б) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$; в) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A_i\cap(\bigcap\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\overline{A_j}))$; г) $\bigcup\limits_{i_1\neq\ldots\neq i_{n-2}}^{n}\overline{A_{i_1}}\cdot\ldots\cdot\overline{A}_{i_{n-2}}$;

д) $\bigcup\limits_{i,j=1,i\neq j}^{n}\overline{A}_i\,\overline{A}_j$; е) $\bigcup\limits_{i,j=1,i\neq j}^{n}[A_iA_j)(\bigcap\limits_{k=1,k\neq i,j}^{n}\overline{A}_k)]$.

1.1.19. *а)* $AB = A$; *б)* $A + B = B$; *в)* $ABC = AC$; *г)* $A + B + C = B + C$.

1.1.20. См. задачу 1.1.19.

1.1.21. а) $A=\varnothing$, $B=\Omega$; б) $A=\Omega$, $B=\varnothing$; в) $A=B$.

1.1.22. а) $(A+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=$

$=A+A\overline{B}+AB+\overline{A}\overline{B}+\overline{A}B=A+\overline{A}=\Omega;$

б) $(A+B)(\overline{A}+\overline{B})+(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=A\overline{B}+\overline{A}B+AB+\overline{A}\overline{B}=$

$=A(B+\overline{B})+\overline{A}(B+\overline{B})=A+\overline{A}=\Omega.$

1.1.23. $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=(A+A\overline{B}+AB)(\overline{A}+\overline{A}\overline{B}+\overline{A}B)=$

$=A(A+\overline{B}+B)\overline{A}(\overline{A}+\overline{B}+B)=A\overline{A}=\varnothing.$

1.1.24. а) A; б) AB; в) $B+AC$.

1.1.25. В случаях а), г), д), ж) – да, в остальных – нет.

1.1.26. $A+(B-AB)+(C-(A+B)C)$.

1.1.27. а), в), г), д) – не справедливы; б) – справедливо.

1.1.28. $X=\overline{B}$.

1.1.29. 1. Покажем, что $(\overline{A+B})C=\overline{A}C+\overline{B}C\Rightarrow AC=BC$. Переходя к противоположным событиям в обеих частях соотношения, имеем: $(A+B)+\overline{C}=(A+\overline{C})(B+\overline{C})\Rightarrow(A+B)+\overline{C}=AB+A\overline{C}+B\overline{C}+\overline{C}\Rightarrow$

$\Rightarrow A+B=AB+(A+B)\,\overline{C}\Rightarrow(A+B)C=ABC\Rightarrow AC+BC=AC\cdot BC\Rightarrow AC=BC.$

2. Покажем, что $AC=BC\Rightarrow(\overline{A+B})C=\overline{A}C+\overline{B}C$.

$(\overline{A+B})C=(\Omega-(A+B))C=C-(AC+BC)=C-AC;$

$\overline{A}C+\overline{B}C=(\Omega-A)C+(\Omega-B)C=(C-AC)+(C-BC)=C-AC.$

Следовательно, $(\overline{A+B})C==\overline{A}C+\overline{B}C$.

1.2. Классическое определение вероятности

1.2.1. 1) да; 2) а) да; б) да; в) да; 3) нет; 4) нет; 5) а) нет; б) да; в) нет; 6) нет.

1.2.3. 0.096.

1.2.4. 5/9.

*1.2.5.*1/60.

1.2.6. $\frac{4!}{10!} \approx 0{,}0000066$.

1.2.7. а) $\frac{6!}{6^6}$; б) $\frac{1}{6^5}$; в) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^6$; г) $\left(\frac{5}{6}\right)^5$; д) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^5-\left(\frac{5}{6}\right)^6$.

1.2.8. $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.5177; 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.4914$.

1.2.9. 1/9.

1.2.10. а) $\frac{1}{8}, \frac{25}{216}$; б) $\frac{1+3+6+10+15+21+25+27}{216}=\frac{1}{2}$.

1.2.11. а) $n \geq 4$; б) $n \geq 9$; в) $n \geq 13$.

1.2.12. $n \geq 25$.

*1.2.13.*1/2.

1.2.14. $\frac{C_n^m}{2^n}$; $\frac{C_n^m 2^{n-m}}{3^n}$

1.2.15. Из меньшего числа партий.

1.2.16. а) $\frac{n}{2n-1}$; б) $\frac{n-1}{2n-1}$.

1.2.17. $\frac{24 \cdot 10^4 \cdot 36!}{40!}$.

1.2.18. а) $9^k/10^k$; б) $9^k/10^k$; в) $8^k/10^k$; г) $(2\cdot 9^k-8^k)/10^k$.

1.2.19. $2(k-1)(n-k)/n(n-1)$.

1.2.20. 2/5.

1.2.21. $\frac{1}{n}$.

1.2.22. Указание. Лишь последняя цифра влияет на последнюю цифру квадрата и четвертой степени числа, а на последнюю цифру произведения чисел - их последние цифры. Поэтому можно рассматривать только однозначные числа. а) 0,2; б) 0,4; в) 0,04.

1.2.23. $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^4} \approx 0.302$.

1.2.24. $\dfrac{12!}{12^{12}}$.

1.2.25. $\dfrac{10!}{10^{10}}$.

1.2.26. $\dfrac{2}{N-1}$; $\dfrac{2}{N}$.

1.2.27. $\dfrac{2}{N-1}$; $\dfrac{2(N-m-1)}{N(N-1)}$.

1.2.28. 1/126.

1.2.29. $\dfrac{(C_4^1)^3}{C_{52}^3} \approx 0.0029$.

1.2.30. $\dfrac{C_4^1 C_{32}^2}{C_{36}^3}$.

1.2.31. $\dfrac{24}{32 \cdot 31 \cdot 30}$.

1.2.32. $2/C_{36}^{18}$.

1.2.33. 1/4.

1.2.34. а) $\dfrac{(C_{26}^{13})^2}{C_{52}^{26}}$; б) $\dfrac{C_4^2 C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}}$.

1.2.35. $1-\dfrac{4C_{39}^6}{C_{52}^6}-\dfrac{6C_{26}^6}{C_{52}^6}-\dfrac{4C_{13}^6}{C_{52}^6}$.

1.2.36. 9/28.

1.2.37. 2 красных шара и 1 синий.

1.2.38. а) $\frac{C_N^k}{N^k}$; б) $\frac{1}{k!}$.

1.2.39. $\frac{a}{a+b}$.

1.2.40. $\frac{1}{n}$.

1.2.41. $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m} / C_N^n$.

1.2.42. $1 - C_{n-m}^k / C_n^k$.

1.2.43. $\frac{C_4^1 C_3^1 C_4^3}{4^4} = \frac{3}{16}$.

1.2.44. $\frac{M!}{N^M}$.

1.2.45. $\frac{M!}{k_1! k_2! \ldots k_N! \, N^M}$.

1.2.46. $C_n^2 n! / n^n$.

1.2.47. $\frac{C_n^k (N-1)^{n-k}}{N^n} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, где $p = \frac{1}{N}$..

1.2.49. $\frac{N!}{N^N}$.

1.2.50. а) $\frac{l}{l^k} = \frac{1}{l^{k-1}}$; б) $\frac{C_l^k k!}{l^k}$.

1.2.51. $\frac{M!}{A_N^M} = \frac{1}{C_N^M}$.

1.2.52. а) $2^{2r} C_n^{2r} / C_{2n}^{2r}$; б) $n 2^{2r-2} C_{n-1}^{2r-2} / C_{2n}^{2r}$.

1.2.53. 0.055.

1.2.54. $C_{2N}^N \cdot C_{2N}^N / C_{4N}^{2N} \approx e^{3N} \cdot 4^{4N+\frac{1}{2}}$.

1.2.55. $C_{2n-r}^n (1/2)^{2n-r}$.

1.2.56. а) $1/1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) = 2^n n!/(2n)!$; б) $n!/1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$.

1.3. Геометрическое определение вероятности

1.3.1. 2/3.

1.3.2. 1/3 + 2/9ln2.

1.3.3. (1+ln4)/4.

1.3.4. $(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{3}$.

1.3.5. $(r/R)^2$.

1.3.6. $\dfrac{2}{\pi}\arcsin\dfrac{r}{2R}$.

1.3.7. 1/2.

1.3.8. 3/4.

1.3.9. а)2/3; б)1/12.

1.3.10. 9/13.

*1.3.11.*а) $\dfrac{(a-2r)^2}{a^2}$; б) $1-\dfrac{4r^2}{a^2}$.

1.3.13. $\dfrac{a}{l}(2-\dfrac{a}{l})$.

*1.3.14.*1/2.

1.3.15. $k(2-k)$.

1.3.16. 5/6.

1.3.17. 1/4.

1.3.18. $\dfrac{n}{2\pi}\sin\dfrac{2\pi}{n}$

1.3.19. $1-(T-l)^2/T^2$.

1.3.20. 7/9.

1.3.21. 139/1152.

1.3.22. $\approx 0,23$.

1.3.23. $1-(T-\tau)^2/T^2$.

1.3.24. а) $1-\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{t_1}{T})^2-\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{t_2}{T})^2$; б) $1-\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{t_1-t_3}{T})^2-\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{t_2}{T})^2$.

1.3.25. а) $1/4$; б) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$.

1.3.26. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

1.4. Аксиомы теории вероятностей. Условная вероятность. Независимость случайных событий

1.4.4. $A = AB + A\overline{B}$, поэтому $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A\overline{B})$, но $A\overline{B} = A - B$.

1.4.5. Следует из того, что $AB \subseteq A \subseteq A + B$ и свойств вероятности.

1.4.6. $\mathrm{P}(\overline{A}\overline{B}) = \mathrm{P}(\overline{A+B}) = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(AB)$, если $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1/2$.

1.4.7. $\mathrm{P}(AB) = 1 - \mathrm{P}(\overline{AB}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A} + \overline{B}) \geq 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) - \mathrm{P}(\overline{B}) \geq 0{,}6$.

1.4.8. $p_0 = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(AB)$; $p_1 = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\mathrm{P}(AB)$; $p_2 = \mathrm{P}(AB)$.

1.4.9. $p_0 = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(AC) + \mathrm{P}(BC) - \mathrm{P}(ABC)$;
$p_1 = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - 2\mathrm{P}(AB) - 2\mathrm{P}(AC) - 2\mathrm{P}(BC) + 3\mathrm{P}(ABC)$;
$p_2 = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(AC) + \mathrm{P}(BC) - 3\mathrm{P}(ABC)$;
$p_3 = \mathrm{P}(ABC)$.

1.4.10. а) $1 - \mathrm{P}(AB)$; б) $1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(AB)$; в) $1 - \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(AB)$; г) $\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB)$; д) $1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(AB)$; е) $1 - \mathrm{P}(AB)$; ж) $\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$; з) $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$.

1.4.14. $21/46$.

1.4.15. 0,572; 0,128; 0,2866...; 0,4266...; 0,428; 0,872.

1.4.16. $\mathrm{P}(AB) = 0{,}3$; $\mathrm{P}(\overline{B}/\overline{A}) = 0{,}75$.

1.4.17. См. задачу *1.4.7.*

1.4.19. 1) Зависимы; 2) независимы; 3) зависимы; 4) зависимы.

1.4.20. Зависимы.

1.4.21. а) Могут быть как зависимыми, так и независимыми; б) зависимы.

1.4.22. а) и г) – независимы, остальные зависимы.

1.4.23. События независимы; результат изменится.

1.4.24. События A и B зависимы. Так как $\mathrm{P}(B/A) > \mathrm{P}(B)$, то курение способствует ухудшению зрения.

1.4.25. События зависимы.

1.4.26. События A и B независимы.

1.4.27. В силу независимости событий A и B для вероятности события A справедливо выражение: $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AB + A\overline{B}) = \mathrm{P}(A)P(B) + \mathrm{P}(A\overline{B})$. Отсюда следует, что $P(A\overline{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$, т.е. события A и $\overline{B}$ независимы. Аналогично доказывается независимость событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

1.4.28. Из равенства условных вероятностей следует, что

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{A}B) = (1 - \mathrm{P}(A))\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(AB).$$

Отсюда получаем:

$$P(AB) = P(A)(P(\overline{A}B) + P(AB)) = P(A)P((A + \overline{A})B) = P(A)P(B),$$

что означает независимость событий A и B.

1.4.29. Из независимости событий A и B_1, A и B_2 и несовместности событий B_1 и B_2 следует, что

$$P(A(B_1 + B_2)) = P(AB_1) + P(AB_2) = P(A)(P(B_1) + P(B_2)) = P(A)P(B_1 + B_2),$$

что означает независимость событий A и $B_1 + B_2$.

1.4.30. $1/2$.

1.4.31. $31/96$.

1.4.32. $0{,}94$.

1.4.33. а) $0{,}324$; б) $0{,}928$.

1.4.34. 0,94; 0,9964.

1.4.35. а) 7/8; б) 2/3; в) 1/3.

1.4.36. 2/3; 1/3.

1.4.37. 5/11.

1.4.38. 0,3056.

1.4.39. 0,9008.

1.4.40. 0,8.

1.4.41. 6/7.

1.4.42. $\dfrac{p_1(1 - p_2)p_3}{(1 - p_1)p_2p_3 + p_1(1 - p_2)p_3 + p_1p_2(1 - p_3)}$.

1.4.43. а) 1/216; б) 1/36.

1.4.44. 1/2.

1.4.45. 3/4. Указание: Если события A_1 и A_2 означают попадание 1 и 2 ракеты соответственно, то для решения задачи требуется найти условную вероятность $P(A_1 / A_1 + A_2)$.

1.4.46. $1-\dfrac{10\cdot 5^9}{\left(6^{10}-5^{10}\right)}$.

1.4.47. 1/4.

1.4.48. 1/2.

1.4.49. 2/3.

1.4.50. $121/360 \approx 0{,}336$.

1.4.51. $228/253 \approx 0{,}9$.

1.4.52. 1/5.

1.4.53. 1/4.

1.4.54. 0,72.

1.4.55. $p_1 p_2$.

1.4.56. 20/29.

1.4.57. 14/47.

1.4.58. а) 0,3264; б) 0,5884; в) 0,0696; г) 0,2356.

1.4.59. $\dfrac{C_3^2 C_{48}^{10}}{C_{51}^{12}}$.

1.4.61. $\left[1-\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}-\ldots+\dfrac{(-1)^{\text{Ì}}}{\text{Ì}\ !}\right];\ \dfrac{1}{e}$.

Указание. Для решения задачи следует использовать теорему сложения вероятностей в общем случае.

1.4.62. $p=1-C_n^1\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k+C_n^2\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^k-\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\left(1-\dfrac{n-1}{n}\right)^k$.

1.4.63. $1-\left[1-\left(1-p\right)^m\right]^k$.

1.4.64. $\mathrm{P}(A)=p_1+(1-p_1)(1-p_2)p_3$; $\mathrm{P}(B)=(1-p_1)p_2$;

$\mathrm{P}(C) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3$.

1.4.65. $p(n \mid m) = \dfrac{p(n+m) - p(m)}{1 - p(m)}$.

1.4.66. 0,75.

1.4.67. $\sum_{k=0}^{s} p_t(k)\, p_t(s-k)$.

1.5. Формула полной вероятности и формула Байеса

1.5.1. а) 13/24; б) 1/2.

1.5.2. 9/35.

1.5.3. шансы одинаковы

1.5.5. $p\dfrac{p_1 + p_2 + p_3}{3}$.

1.5.6. 14/17.

1.5.7. $\dfrac{2}{3}p_1 + \dfrac{1}{3}p_2$.

1.5.8. 21/50.

1.5.9. 0,87.

1.5.10. 9/16.

1.5.11. *M/N.*

1.5.12. а) 0,0345; б) 125/345; 140/345; 80/345.

1.5.13. 0,05.

1.5.14. $p = \dfrac{p_1(1-p_1)^2}{\sum_{i=1}^{3} p_i(1-p_i)^2}$.

1.5.15. 7/18.

1.5.16. 0,3.

1.5.17. 3 белых и 2 черных; изменение.

1.5.18. $\approx 0{,}58$.

1.5.19. а) 3/4; б) 0,5.

1.5.20. 10/11.

1.5.21. 0,9968.

1.5.22. $1-\left[1-(1-p)p_0-pp_1\right]^n$.

1.5.23. $\dfrac{(n-m)(n-m+1)}{2n(n-1)}$.

1.5.24. $2p^2(1-\dfrac{2}{3}p)$.

1.5.25. Пусть гипотеза H_k $(k=0,1,2)$ - для первой игры взять k новых мячей. Событие A - для второй игры взять два новых мяча. Тогда

$$P(H_k)=\frac{C_{12}^k C_8^{2-k}}{C_{20}^2};\ P(A/H_k)=\frac{C_{12-k}^2}{C_{20}^2};\ p=0,2797229.$$

1.5.26. $\dfrac{(1-p_1)p_2}{1-p_1p_2}$.

1.5.27. $\dfrac{p_1p_3(1-p_2)}{(1-p_1)p_2p_3+(1-p_2)p_1p_3+(1-p_3)p_1p_2}$.

1.6 Схема Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли

1.6.1. а) $P_8(m \ge 7) \approx 0,00038$; б) $P_8(m \ge 1) = 0,8999$.

1.6.2. 10.

1.6.3. а) 2; б) $P_{10}(2 \le m \le 4) = 0,591$.

1.6.4. Вероятнее выиграть три партии из четырех.

1.6.5. 0,73.

1.6.6. а) $\approx 0,25$; б) 0,935.

1.6.7. а) 0,656; б) 0,948.

1.6.8. $p_k = C_{5+k}^k 2^{-5-k}$.

1.6.9. $C_{10}^4\left(\dfrac{5}{72}\right)^4\left(1-\dfrac{5}{72}\right)^6$.

1.6.10. $n \ge 22$.

1.6.11. $1 - (1-p)^3$.

1.6.12. $P_{2n}(k \ge n)=1-\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k p^k (1-p)^{2n-k}$.

1.6.13. $P_m(k)=C_m^k\left(\dfrac{1}{n}\right)^k\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{m-k}$.

1.6.14. 0,2816.

1.6.15. $\mathrm{P}_n\left(k \le 2\right) = p^n + n\left(1-p\right)p^n + \dfrac{n\left(n-1\right)}{2}\left(1-p\right)^2 p^{n-2}$.

1.6.16. 0,2.

1.6.17. а) $C_n^3\left(1-\left(1-p\right)^2\right)^3\left(1-p\right)^{2(n-3)}$;

б) $1-\left(1-p\right)^{2n} - n\left(1-p\right)^{2(n-1)}\left(1-\left(1-p\right)^2\right)$.

1.6.18. $n \ge 17$.

1.6.19. 0,0588.

1.6.20. $\left(5^2 \cdot 7 \cdot \dfrac{9}{4}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^4\left(1-\dfrac{2}{\pi}\right)^6$.

1.6.21. а) 558; б) 541.

1.6.22. а) 0,0435; б) 0,5.

1.6.23. $C_n^m C_{n-1}^{l-1} p^{m+l} q^{2n-m-l}$.

1.6.24. а) 0,085; б) 0,384.

1.6.25. 50/243.

1.6.26. 0,815.

1.6.27. 69.

1.6.28. а) 0,01; б) 0,803.

1.6.29. По формуле Бернулли: $P_6(m \ge 1) = 0,665$;

По теореме Пуассона: $P_6(m \ge 1) \approx 0,632$.

1.6.30. 0,23.

1.6.31. а) 0,93803; б) 0,99983; в) 0,16062.

1.6.32. 0,95957.

1.6.33. $1-e^{-n\frac{U}{V}}$; $1-\left(1-\dfrac{U}{V}\right)^n$.

1.6.34. $.1-1{,}3e^{-0,3} \approx 0,037$.

1.6.35. 0,99.

1.6.36. В предположении, что доля белых шаров равна 0,4, $P_{100}(m \geq 51) \approx 0,012$.

1.6.37. 2; $\approx$ 0,13.

1.6.38. а) $\approx$ 0 (с точностью более, чем 10 знаков после запятой; б) $\approx$0,99534; 0,5; 0,00466.

1.6.39. а) $\approx$ 0,8859; б) 0,8859; 0,4991; $\approx$ 0,1468; 0,8353; $764 \leq m \leq 836$ (применить интегральную теорему Муавра-Лапласа); $n = 18500$.

1.6.40. а) $n = \dfrac{c^2_{(1+\beta)/2}\, p(1-p)}{\delta^2}$, где $c_{(1+\beta)/2}$ – $(1+\beta)/2$ -квантиль стандартного нормального закона распределения, то есть корень уравнения $\Phi\left(c_{(1+\beta)/2}\right) = (1+\beta)/2$; б) в α^2 раз.

2. Случайные величины и случайные векторы

2.1. Случайные величины. Законы распределения и числовые характеристики

2.1.1. а) сдвинется влево на 1; б) сдвинется вправо на 2; в) масштаб по оси абсцисс удвоится; г) график нужно зеркально отобразить относительно оси ординат и каждую ординату вычесть из единицы.

2.1.2. а) сдвинется влево на 1; б) сдвинется вправо на 2; в) масштаб по оси абсцисс увеличится вдвое, а по оси ординат уменьшится вдвое; г) график переменится на свое зеркальное отображение относительно оси ординат.

2.1.3. а) нет; б) да; в) нет;

2.1.4. 1) прибавится a; 2) не изменится; 3) не изменится; 4) прибавится слагаемое $a^2 + 2a\mathrm{M}X$.

2.1.5. 1) умножится на a; 2) умножится на a^2; 3) умножится на a; 4) умножится на a^2.

Дискретные случайные величины

2.1.6.

X	0	1
P	$1/2$	$1/2$

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \tilde{o}\le 0;\\ 1/2\ ,\ 0<x\le 1;\\ 1\ ,\ x>1.\end{cases}$$

$$\mathrm{P}(X<\frac{3}{2})=1;\ \ \mathrm{P}(X<\frac{1}{2})=\mathrm{P}(X>\frac{1}{3})=\mathrm{P}(X<1)=\mathrm{P}(X\ge 1)=\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}.$$

2.1.7.

$$F(x)=\begin{cases}0\ \ \ \ ,\ x\le -2;\\ 0{,}1\ ,\ -2<x\le -1;\\ 0{,}3\ ,\ -1<x\le 0;\\ 0{,}5\ ,\ 0<x\le 1;\\ 0{,}9\ ,\ 1<x\le 2;\\ 1\ \ \ \ ,\ x>2.\end{cases}$$

$$\mathrm{P}(|X|\le 1)=\mathrm{P}(-1\le X\le 1)=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)=F(1+0)-F(-1)=0{,}8.$$

2.1.8.

X	0	1	2	3	4
P	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

$$F(x)=\begin{cases}0\ \ \ \ \ \ ,\ x\le 0;\\ 1/16\ ,\ 0<x\le 1;\\ 5/16\ ,\ 1<x\le 2;\\ 11/16,\ 2<x\le 3;\\ 15/16,\ 3<x\le 4;\\ 1\ \ \ \ \ \ ,\ x>4.\end{cases}$$

2.1.9.

X	-3	3	8	9	14	15	19	20	25	30
P	0,008	0,036	0,060	0,054	0,180	0,027	0,150	0,135	0,225	0,125

2.1.10.

$$F(x)=\begin{cases}0\ ,\quad x\le 0;\\ \frac{1}{6^n}\sum\limits_{m=0}^{x-1}C_n^m 5^{n-m},\quad 0<x\le n,\ x\ \text{- целое};\\ \frac{1}{6^n}\sum\limits_{m=0}^{[x]}C_n^m 5^{n-m},\quad 0<x\le n,\ x\ \text{- нецелое};\\ 1\ ,\quad x>n.\end{cases}$$

2.1.11.

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x\le 0;\\ \sum\limits_{m=0}^{x-1}\dfrac{1}{2^{m+1}}=1-\dfrac{1}{2^x}, & x>0,\ x \text{ - целое};\\ 1-\dfrac{1}{2^{[x]+1}} & , x>0,\ x \text{ - нецелое}.\end{cases}$$

2.1.12.

$$\text{а) } F(x)=\begin{cases}0 & , x\le 0;\\ \frac{1}{2^n}\sum\limits_{m=0}^{x-1}C_n^m, & 0<x\le n,\ x \text{ - целое};\\ \frac{1}{2^n}\sum\limits_{m=0}^{[x]}C_n^m, & 0<x\le n,\ x \text{ - нецелое};\\ 1 & , x>n.\end{cases}$$

2.1.13. $\mathrm{M}X=3;\ \mathrm{D}X=4{,}2;\ \mathrm{P}(X<\mathrm{M}X)=0{,}5.$

2.1.14.

X	0	5	10	15
P	0,001	0,027	0,243	0,729

$\mathrm{M}X=13{,}5;\ \mathrm{D}X=6{,}75;\ \mathrm{P}(X\ge \mathrm{M}X)=0{,}729.$

2.1.15.

X	3	4	5	6	7
P	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

$\mathrm{M}X=5;\ \sigma_X=\sqrt{5/3};\ \mathrm{P}(X<\mathrm{M}X+\sigma_X)=5/6.$

2.1.16.

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

$\mathrm{M}X=1{,}6;\ \mathrm{D}X=0{,}284$.

2.1.17. $\mathrm{M}X=\sum\limits_{m=1}^{M}\dfrac{mC_M^mC_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}=n\dfrac{M}{N};$

$$\mathrm{M}X(X-1)=\frac{1}{C_N^n}\sum_{m=2}^{M}m(m-1)C_M^mC_{N-M}^{n-m}=\frac{M(M-1)}{N(N-1)}n(n-1)=\mathrm{M}X^2-\mathrm{M}X.$$

Отсюда $\mathrm{M}X^2 = \dfrac{n(n-1)M(M-1)}{N(N-1)} + \dfrac{nM}{N}$ и, следовательно,

$\mathrm{D}X = n\dfrac{M}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\dfrac{N-n}{N-1}$.

2.1.18.

X	1	2	3
P	2/3	2/9	1/9

$\mathrm{M}X = 13/9$; $\mathrm{D}X = 38/81$.

2.1.19.

X	1	2	3	4
P	0,1	0,09	0,081	0,729

$\mathrm{M}X = 3{,}439$; $\mathrm{D}X = 1{,}026$.

2.1.20. Пусть X – число очков при бросании одной кости. Тогда $\mathrm{M}X = 3{,}5$; $\mathrm{D}X = 35/12$. Если Y - число очков при бросании двух костей, то $\mathrm{M}Y = 7$; $\mathrm{D}Y = 35/6$.

2.1.21. $\mathrm{M}X_1 = 4, \mathrm{M}X_2 = 3.$

2.1.22. $\mathrm{M}X = 2, \mathrm{D}\,X = 2.$

2.1.23. $\mathrm{M}X = \dfrac{k}{p}$.

2.1.24. $\mathrm{M}X = NC_n^m(1/6)^m(5/6)^{n-m}$.

2.1.25. $\mathrm{M}X = 1\cdot\dfrac{n}{n+m}\cdot\dfrac{m}{n+m-1} + 2\cdot\dfrac{n}{n+m}\cdot\dfrac{n-1}{n+m-1}\cdot\dfrac{m}{n+m-2} + \ldots$

$+n\cdot\dfrac{n}{n+m}\cdot\dfrac{n-1}{n+m-1}\cdot\dfrac{n-2}{n+m-2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{1}{m+1}\cdot\dfrac{m}{m}.$

2.1.26. $\mathrm{M}X = 1\cdot\dfrac{n}{m+n}\cdot\dfrac{m}{m+n} + 2\cdot\dfrac{n^2}{(m+n)^2}\cdot\dfrac{m}{m+n} + \ldots + n\cdot\dfrac{n^n}{(m+n)^2}\cdot\dfrac{m}{m+n}.$

Дифференцируя по x тождество $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ и полагая $x = \dfrac{n}{m+n}$,

получим $\mathrm{M}X = \dfrac{n}{m}\left[1-\left(\dfrac{n}{m+n}\right)^n\right] - n\left(\dfrac{n}{m+n}\right)^{n+1}$.

2.1.27. $x_3 = 21;\ p_3 = 0,2$.

2.1.28. $p_1 = 0,4;\ p_2 = 0,1;\ p_3 = 0,5$.

2.1.29. $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ p_1 = 0,2;\ p_2 = 0,8.$

2.1.30. $q = 0,9;\ \mathrm{P}(X \le 10) \approx 0,651;\ \mathrm{P}(X \le 100) \approx 0,999973.$

2.1.31. $\alpha_1 = 4,6;\ \alpha_2 = 26,6;\ \alpha_3 = 177,4;\ \alpha_4 = 1293,8;$

$\mu_1 = 0;\ \mu_2 = 5,44;\ \mu_3 = 4,992;\ \mu_4 = 64,55;$

2.1.32. а) $p_{-2} = p_2 = \dfrac{1}{24};\ p_{-1} = p_1 = \dfrac{1}{3}, p_0 = \dfrac{1}{4};$

б) $p_{-2} = p_2 = \dfrac{1}{6};\ p_{-1} = p_1 = \dfrac{1}{3}, p_0 = 0;$

в) $p_{-2} = p_2 = \dfrac{b-a}{24};\ p_{-1} = p_1 = \dfrac{4a-b}{6}, p_0 = 1 - \dfrac{5a-b}{4}, 0 \le a \le 4, a \le b \le 4a$.

Непрерывные случайные величины

2.1.33. а) $a = 3$; б) $F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ x^3, 0 < x \le 1; \\ 1, x > 1. \end{cases}$ в) $\mathrm{P}(0,5 < X < 1,5) = \dfrac{7}{8};$

г) $x_M = 1,\ x_{0,5} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};$ д) $\mathrm{M}X = \dfrac{3}{4};\ \mathrm{D}X = \dfrac{3}{80}$.

2.1.34.

а) $b = \dfrac{1}{a};\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right), x \in (-a, a); \\ 0, x \notin (-a, a); \end{cases}$

б) $F(x) = \begin{cases} 0, x \le -a; \\ \dfrac{1}{a^2}(\dfrac{x^2}{2} + ax + \dfrac{a^2}{2}), -a < x \le 0; \\ \dfrac{1}{a^2}(-\dfrac{x^2}{2} + ax + \dfrac{a^2}{2}), 0 < x \le a; \\ 1, x > a; \end{cases}$

в) $\mathrm{M}X = 0;\ \mathrm{D}X = \dfrac{a^2}{6};\ \sigma_X = \dfrac{a}{\sqrt{6}};\ \mu_3 = 0;$ г) $x_M = x_{0,5} = 0;$ д) $\mathrm{P}\left(-\dfrac{a}{2} < X < a\right) = \dfrac{7}{8}.$

2.1.35.

$$1)\ a=\frac{2}{9};\quad 2)\ F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right),\ 0<x\le 3;\\ 1,\ x>3;\end{cases}\quad 3)\ \mathrm{P}(-1<X<2)=\frac{20}{27};$$

$$4)\ x_M=\frac{1}{2};\quad 5)\ x_{0,5}=\frac{1}{2};\quad 6)\ \mathrm{M}X=3/2,\ \mathrm{D}X=9/20.$$

2.1.36.

$$a=\frac{3}{2};\ F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ \frac{x^3}{2},\ 0<x\le 1;\\ 1-\frac{(2-x)^3}{2},\ 1<x\le 2;\\ 1,\ x>2.\end{cases}$$

$$\mathrm{P}(0,5<X<1,5)=\frac{7}{8};\ \mathrm{M}X=1;\ \sigma_X=0,316.$$

2.1.37. $a=\frac{1}{2};\ x_{0,5}=\sqrt{2};\ \mathrm{M}X=\frac{4}{3};\ \mathrm{D}X=\frac{2}{9};\ \mathrm{P}(|X-\mathrm{M}X|\le 0,5)=\frac{2}{3}.$

2.1.38. $1)\ f(x)=\begin{cases}\frac{2}{a}\left(1+\frac{x}{a}\right),\ x\in(-a,0);\\ 0,\ x\notin(-a,0);\end{cases}\quad 2)\ F(x)=\begin{cases}0,\ x\le a;\\ 1+\frac{x}{a}\left(2+\frac{x}{a}\right),\ -a<x\le 0;\\ 1,\ x>0;\end{cases}$

$$3)\ \mathrm{P}\left(-a<X<-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{4};\quad 4)\ x_{0,5}=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right);\quad 5)\ \mathrm{M}X=-\frac{a}{3};\ \mathrm{D}X=\frac{a^2}{18};\ \mu_3=-\frac{a^3}{135}.$$

2.1.39.

$$\text{а)}\ A=\frac{1}{2};\ F(x)=\begin{cases}0,\ x\le-\frac{\pi}{2};\\ \frac{1}{2}(\sin x+1),\ -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2};\\ 1,\ x>\frac{\pi}{2};\end{cases}\quad \text{б)}\ \mathrm{M}X=0;\ \mathrm{D}X=\frac{\pi^2}{4}-2.$$

2.1.40.

$$\mathrm{M}X=0;\ \mathrm{D}X=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2};\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{2};\\ \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\pi}{4}\right], & -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2};\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

2.1.41. а) $A=1/\pi$; $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x$; б) $P(-1<X<1)=\frac{1}{2}$;

в) математическое ожидание не существует.

2.1.42. а) $a=\frac{1}{2}$; б) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\lambda x}, \ x\le 0;\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}, \ x>0;\end{cases}$; в) $\mathrm{M}X=0;\ \mathrm{D}X=\frac{2}{\lambda^2}$.

2.1.43. а) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, \ 0<x<2;\\ 0, \ x\le 0, x\ge 2;\end{cases}$; б) $\mathrm{P}(0{,}5<X<1{,}5)=\frac{1}{2}$;

в) $\mathrm{M}X=\frac{4}{3}$; $\mathrm{D}X=\frac{2}{9}$; г) $x_M=2;\ x_{0,5}=\sqrt{2}$.

2.1.44. $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0;\\ x+\frac{1}{2}, \ 0<x\le 1;\\ 0, \ x>1;\end{cases}$ $\mathrm{M}X=0{,}58$; $\mathrm{D}X=\frac{1}{144}$; $x_{0,5}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2.1.45. 1) $a=\frac{1}{8}$; 2) $f(x)=\begin{cases}0, \ x\le -2;\\ -\frac{1}{4}x, \ -2<x\le 0;\\ \frac{1}{4}x, \ 0<x\le 2;\\ 0, \ x>2;\end{cases}$ 3) $\mathrm{P}(-1<x<1)=\frac{1}{4}$;

4) $\mathrm{M}X=0, \mathrm{D}X=2$; 5) $x_M=\pm 2$; $x_{0,5}=0$.

2.1.46. 1) $A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{\pi}$; 2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \ |x|<a;\\ 0, \ |x|\ge a;\end{cases}$

3) $\mathrm{P}\left(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{3}$; 4) $\mathrm{M}X = 0,\ \ \mathrm{D}X = \frac{2a^2}{\pi}$.

2.1.47. $\mathrm{M}X = 0$; $\mathrm{D}X = 2$; $\sigma_X = \sqrt{2}$; $x_M = 0$; $x_{0,5} = 0$.

2.1.48. $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = \frac{7}{6}$; $\alpha_3 = \frac{3}{2}$; $\alpha_4 = 2\frac{1}{15}$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \frac{1}{6}$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = \frac{1}{15}$.

2.1.49. $F(r) = \begin{cases} 0, & r \le 0; \\ (r/R)^2, & 0 < r \le R; \\ 1, & r > R; \end{cases}$ $\quad \mathrm{M}X = \frac{2}{3}R$; $\mathrm{D}X = R^2/18$.

2.1.50. а) $A = 2h^2$; б) $x_M = \frac{1}{h\sqrt{2}}$; в) $\mathrm{M}X = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}$; $\mathrm{D}X = \frac{4-\pi}{4h^2}$;

г) $\mathrm{P}(X < x_M) = 0{,}393$.

2.1.51. 1) $b = \frac{2}{\pi a}$; 2) $\mathrm{M}X = 0, \mathrm{D}X = \frac{a^2}{4}$;

3) $F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le -a; \\ \frac{1}{\pi a^2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + \pi\right], -a < x \le a. \\ 1,\ x > a. \end{cases}$

Основные законы распределения случайных величин

2.1.53. $f(x) = \begin{cases} 0,\ |x-a| > l; \\ \frac{1}{2l},\ |x-a| \le l; \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0,\ x < a-l; \\ \frac{x-a+l}{2l}, a-l \le x \le a+l; \\ 1,\ x > a+l; \end{cases}$

$\mathrm{M}X = a$; $\mathrm{D}X = \frac{l^2}{3}$; $x_{0,5} = a$; x_{M} – нет.

2.1.54. а) 0,4; б) 0,5.

2.1.55. 0,6.

2.1.56. $\mathrm{M}X = 1$ мин, $\mathrm{D}X = 1/3$ мин^2.

2.1.57. $p = 2/3$.

2.1.58. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, 1 \le x \le 7; \\ 0,\ x < 1, x > 7. \end{cases}$

2.1.59. $\mathrm{M}S = \frac{\pi}{4}\frac{a^2 + ab + b^2}{3}$; $\mathrm{D}S = \frac{\pi^2}{720}(b-a)^2\left(4b^2 + 7ab + 4a^2\right)$.

2.1.60. 50 м.

2.1.61. 0,3413.

2.1.62. а) 0,853; б) 0,973.

2.1.63. (2,47; 2,53).

2.1.64. $p = 2 - 2\Phi(2) = 0{,}0456$.

2.1.65. $\sigma_D = \frac{d_2 - d_1}{2{,}5}$.

2.1.66. 4,6%.

2.1.67. $\sigma_X = 0{,}444$.

2.1.68. $p = 0{,}468$; $P(A) = 0{,}849$; $P(B) = 0{,}452$; $P(C) = 0{,}199$.

2.1.69. $\alpha = m_X - \sigma_X\sqrt{3}$; $\beta = m_X + \sigma_X\sqrt{3}$.

2.1.70. $\mathrm{P}(-0{,}5 \le X \le -0{,}1) \approx 0{,}1516$; $\mathrm{P}(1 \le X \le 2) \approx 0{,}1359$.

2.1.71. $\sigma = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2(\ln b - \ln a)}}$.

2.1.72. $\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

2.1.74. а) 0,99730; б) 0,98168…; в) 1; г) 8/9=0,88888…; д) 0,91393….

2.1.75. $\mu_{2k+1} = 0$; $\mu_{2k} = (2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1\cdot\sigma^{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k}, k = 1,2,\ldots$.
В частности, $\mu_4 = 3\sigma^4$.

2.1.76. а) $S_X = E_X = 0$; б) $S_X = 0$; $E_X = -12/5$; в) $S_X = 0$; $E_X = 3$.

2.1.77. $\mathrm{P}(\lambda a < X < \lambda b) = \Phi\left(\frac{\lambda b - \lambda m}{\lambda\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda a - \lambda m}{\lambda\sigma}\right) =$

$= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \mathrm{P}(a < X < b)$

2.1.78. а) 0,423; б) 0,95.

2.1.79. 0,632.

2.1.80. а) 0,17547.

2.1.81. 0,09516.

2.1.82.

T	2	2.5	3	6
P	e^{-a}	ae^{-a}	$\dfrac{a^2e^{-a}}{2}$	$1-e^{-a}\left(1+a+\dfrac{a^2}{2}\right)$

$\mathrm{M}T = 6 - e^{-a}\left(4+3{,}5a+1{,}5a^2\right)$.

2.1.83. $\mathrm{P}(X=m)=\dfrac{(ap)^m}{m!}e^{-ap}$ для всех $m \ge 0$, если X – число успешных опытов.

2.1.85. 2) 2500 часов;

2.1.86. $MT^* = \dfrac{1}{\lambda}+t_0$; $DT^* = \dfrac{1}{\lambda^2}$; $P\left(T^* > 2t_0\right) = e^{-\lambda t_0}$.

2.1.87. $\mathrm{P}(X > x_1+x_2 / X > x_1) = \dfrac{\mathrm{P}(X > x_1+x_2, X > x_1)}{\mathrm{P}(X > x_1)} = \dfrac{\mathrm{P}(X > x_1+x_2)}{\mathrm{P}(X > x_1)} =$

$$\frac{\int\limits_{x_1+x_2}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx}{\int\limits_{x_1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx} = \frac{e^{-\lambda(x_1+x_2)}}{e^{-\lambda x_1}} = e^{-\lambda x_2} = \int\limits_{x_2}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = \mathrm{P}(X > x_2).$$

2.1.88. $F(x) = 0{,}7F_1(x) + 0{,}3F_2(x)$.

2.1.89. $f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)$.

2.2. Случайные векторы. Законы распределения и числовые характеристики. Условные законы распределения. Независимость случайных величин.

2.2.1. $1+F(x,y)-\left(F_X(x)+F_Y(y)\right)$.

2.2.2. а) $F(a,b_2)-F(a,b_1)$; б) $F_Y(b_2)-F_Y(b_1)-F(0,b_2)+F(0,b_1)$;

в) $(F(a_3,b_2)-F(a_3,b_1))+(F(a_2,b_3)-F(a_2,b_2))-(F(a_1,b_3)-F(a_1,b_1))$;

г) $(F(a_5,b_5)-F(a_5,b_1))-(F(a_4,b_4)-F(a_4,b_2))+(F(a_3,b_4)-F(a_3,b_2))-$
$-(F(a_2,b_3)-F(a_2,b_1))-(F(a_1,b_5)-F(a_1,b_3))$.

2.2.3. $F(x,y) = F_X(\min(x,y))$.

2.2.4. $F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le -y,\ y < 0; \\ F_X(x) - F_X(y), & -y < x < y,\ y \ge 0; \\ F_X(y) - F_X(-y), & x \ge y,\ y \ge 0. \end{cases}$

2.2.5. $F_X(x) = 1 - (1 - F(x))^n$; $F_Y(y) = (F(y))^n$;

$$F(x,y) = \begin{cases} (F(y))^n - (F(y) - F(x))^n, & x < y; \\ (F(y))^n, & x \ge y. \end{cases}$$

Дискретные случайные векторы

2.2.6. $F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & \min(x,y) \le 0; \\ q_1 q_2, & (x,y) \in (0,\ 1] \times (0,\ 1]; \\ q_2, & (x,y) \in (0,\ 1] \times (1,+\infty); \\ q_1, & (x,y) \in (1,+\infty) \times (0,\ 1]; \\ 1, & (x,y) \in (1,+\infty) \times (1,+\infty). \end{cases}$

X	0	1
P	q_2	p_2

Y	1	2
P	q_1	p_1

2.2.7. $\lambda = 0{,}05$.

X	2	4	6
P	0,3	0,35	0,35

Y	1	2	3
P	0,2	0,4	0,4

Функция распределения $F_{XY}(x,y)$ задается таблицей вида:

X \ Y	$y \le 1$	$1 < y \le 2$	$2 < y \le 3$	$y > 3$
$x \le 2$	0	0	0	0
$2 < x \le 4$	0	0,15	0,25	0,3
$4 < x \le 6$	0	0,2	0,5	0,65
$x > 6$	0	0,2	0,6	1

2.2.8.

X \ Y	1	2	5
2	0,25	0,05	0,1
4	0,15	0,3	0,15

$(\mathrm{M}X, \mathrm{M}Y) = (3{,}2; 1{,}25)$.

2.2.9. $\mathrm{M}X = 0{,}7$; $\mathrm{M}Y = -0{,}1$; $\mathrm{D}X = 0{,}21$; $\mathrm{D}Y = 0{,}49$; $\mathrm{r}_{XY} = 0{,}218$.

2.2.10. $\mathrm{M}X = \mathrm{M}Y = 0$; $\mathrm{D}X = \mathrm{D}Y = 0{,}5$; $\mathrm{R}_{XY} = \mathrm{cov}(X,Y) = 0$; X и Y зависимы.

2.2.11. а)

Y	1	2	3
$\mathrm{p}_Y(y/10)$	1/4	5/12	1/3

$\mathrm{M}(Y/X=10) = 25/12$; $\mathrm{D}(Y/X=10) = 83/144$;

б)

X	9	10
$\mathrm{p}_X(x/2)$	1/4	5/12

$\mathrm{M}(X/Y=2) = 86/9$; $\mathrm{D}(X/Y=2) = 20/81$.

2.2.12. а)

X	0	1	3
P	0,3	0,4	0,3

Y	-1	0	2
P	0,3	0,5	0,2

X и Y зависимы; б) $\mathrm{r}_{XY} = 0{,}285$, X и Y некоррелированными не являются;

в)

X	0	1	3
$\mathrm{p}_X(x/0)$	0	3/5	2/5

$\mathrm{M}(X/Y=0) = 9/5$; $\mathrm{D}(X/Y=0) = 34/25$.

2.2.13. $\mathrm{P}(X=Y) = \sum_k p_k^2$.

2.2.14. а) $\dfrac{p}{1+q}$; б) $\dfrac{q}{1+q}$; в) $\dfrac{q}{1+q}$; г) $(1+q)\dfrac{p}{q}q^{k-1}(1-q^{k-1}), k=2,3,\ldots$;

д) $(1+q)pq^{2(k-1)}$, $k=1,2,\ldots$; е) $p(1+q)q^{2(k-1)}, k=1,2,\ldots$; ж) $\dfrac{1}{l-1}, 1 \le k \le l-1$; з) $l/2$.

2.2.15.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0	0,04
1	0	0,32	0
2	0,64	0	0

X и Y зависимы.

2.2.16.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/4	1/3	1/9
1	0	1/6	1/9
2	0	0	1/36

X и Y зависимы.

Непрерывные случайные векторы

2.2.17. $f_{XY}(x,y)=8e^{-4x-2y}, x\ge 0, y\ge 0$; X и Y независимы и некоррелированы.

2.2.18. $f_{XY}(x,y)=8\ln^2 a\, xy\, a^{-x^2-2y^2}, x\ge 0, y\ge 0$; $p=a^{-3}-a^{-6}-a^{-9}+a^{-12}$; X и Y независимы и некоррелированы.

2.2.19. $f_{XY}(x,y)=\ln^2 2\cdot 2^{-x-y},\ x\ge 0,\ y\ge 0;\ p=\dfrac{5}{3\cdot 2^{12}}$; X и Y независимы и некоррелированы.

2.2.20. а) $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\sin(x+y), 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$;

б) $f_X(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x), 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$; $f_Y(y)=\dfrac{1}{2}(\sin y+\cos y), 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$;

случайные величины X и Y зависимы;

в) $(\mathrm{M}X,\mathrm{M}Y)=\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$; г) $p=\left(3\sqrt{3}-4\right)\big/2$.

2.2.21.

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\cos x\cos y, & \text{если } (x,y)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right];\\ 0, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$\mathrm{M}X=\mathrm{M}Y=\frac{\pi}{2}-1;$$

$$\mathrm{R}=\begin{pmatrix}\pi-3 & 0\\ 0 & \pi-3\end{pmatrix}.$$

2.2.22. Случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$ и являются зависимыми.

2.2.23. а) $A=\dfrac{1}{\pi^2}$; в) $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$; $f_Y(y)=f_X(y)$;

г) $\mathrm{P}\big((X,Y)\in B\big)=\dfrac{1}{4}$; случайные величины X и Y независимы и некоррелированы;

2.2.24.

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} 0, & \min(x,y)\le 0;\\ 0,5\left[\sin x+\sin y-\sin(x+y)\right], & (x,y)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right];\\ 0,5(\sin x-\cos x+1), & (x,y)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\left(\dfrac{\pi}{2},+\infty\right);\\ 0,5(\sin y-\cos y+1), & (x,y)\in\left(\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)\times\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right];\\ 1, & (x,y)\in\left(\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)\times\left(\dfrac{\pi}{2},+\infty\right); \end{cases}$$

$\mathrm{M}X=\mathrm{M}Y=\dfrac{\pi}{4}$; $\mathrm{D}X=\mathrm{D}Y=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{2}-2$;

$\mathrm{R}_{XY}=\operatorname{cov}(X,Y)=\dfrac{\pi}{2}-1-\dfrac{\pi^2}{16}$; $\mathbf{R}=\begin{pmatrix}0,188 & -0,046\\ -0,046 & 0,188\end{pmatrix}$.

2.2.25. а) $c=\dfrac{3}{28}$; г) $\mathrm{P}(X+Y<2)=\dfrac{3}{14}$.

2.2.26. $f_X(x)=12x^2(1-x),\ x\in(0,1)$; $f_Y(y)=2y;\ y\in(0,1)$;

$(\mathrm{M}X,\mathrm{M}Y)=(3/5,2/3)$; $(\mathrm{D}X,\mathrm{D}Y)=(1/25,1/18)$

2.2.28.

$f_X(x)=e^{-x},\ x>0$;

$f_Y(y)=(1+y)^{-2},\ y>0$.

Случайные величины X и Y зависимы.

2.2.29. а) $c=\dfrac{3}{2\pi a^3}$; б) $\mathrm{P}(X>0,Y>0)=\dfrac{1}{4}$;

в) $(\mathrm{M}X, \mathrm{M}Y) = (0,0)$; $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a^2/5 & 0 \\ 0 & a^2/5 \end{pmatrix}$.

2.2.30. $\mathrm{M}X = \mathrm{M}Y = 0;$ $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

2.2.31. $k = 4;$ $f_X(x) = 2xe^{-x^2}, x \ge 0;$ $f_Y(y) = 2ye^{-y^2}, y \ge 0;$

$f_X(x/y) = f_X(x);$ $f_Y(y/x) = f_Y(y);$

$\mathrm{M}X = \mathrm{M}Y = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2};$ $\mathrm{D}X = \mathrm{D}Y = 1 - \dfrac{\pi}{4};$ $\mathrm{R}_{XY} = 0.$

2.2.32. $f_{XY}(x,y) = 1/a^2, 0 \le x \le a, 0 \le y \le a;$

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 &, \min(x,y) \le 0; \\ xy/a^2, & 0 < x \le a, 0 < y \le a; \\ x/a &, 0 < x \le a, y > a; \\ y/a &, x > a, 0 < y \le a; \\ 1 &, x > a, y > a; \end{cases}$$

$f_X(x) = 1/a, 0 \le x \le a;$ $f_Y(y) = 1/a, 0 \le y \le a.$

Величины X и Y независимы. $(\mathrm{M}X, \mathrm{M}Y) = (a/2, a/2)$.

$\mathrm{P}(X^2 + Y^2 < a^2/4) = \pi/16.$

2.2.33. $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}ab, & \text{если } |x| \le a, |y| \le b; \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$

$f_X(x) = 1/2a,$ $|x| \le a;$ $f_Y(y) = 1/2b,$ $|y| \le b.$

2.2.34. 0.

2.2.35. $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1/32, & \text{если } x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 8; \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$

$f_X(x) = \dfrac{1}{32}(8 - x), 0 \le x \le 8;$ $f_Y(y) = \dfrac{1}{32}(8 - y), 0 \le y \le 8;$

$f_X(x/y) = 1/(8 - y), x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 8;$.

$f_Y(y/x) = 1/(8 - x), x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 8.$

2.2.36. $f_X(x) = 1 - |x|, |x| < 1;$ $f_Y(y) = 1 - |y|, |y| < 1;$

$$f_X(x/y)=\frac{1}{2(1-|y|)},|x|<1-|y|;\ f_Y(y/x)=\frac{1}{2(1-|x|)},|y|<1-|x|.$$

Величины X и Y зависимы, но некоррелированы.

2.2.38. $$f_{XYZ}(x,y,z)=\begin{cases}\frac{3}{4\pi r^3}, & x^2+y^2+z^2\le r^2;\\ 0, & x^2+y^2+z^2>r^2.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{4r^3}\left(r^2-x^2\right), & |x|<r;\\ 0, & |x|\ge r.\end{cases}\qquad \mathrm{M}X=0,\ \mathrm{D}X=\frac{r^2}{5}.$$

$$f_Y(y)=f_X(y);\ f_Z(z)=f_X(z).$$

$$f_X(x|y,z)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2-z^2}}, & |x|\le\sqrt{r^2-y^2-z^2};\\ 0, & |x|>\sqrt{r^2-y^2-z^2}.\end{cases}$$

2.2.39. $$r=\sqrt{\frac{1}{\pi h}};\ f(x,y)=\begin{cases}h, & x^2+y^2\le r^2;\\ 0, & x^2+y^2>r^2.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}2h\sqrt{r^2-x^2}, & |x|\le r;\\ 0, & |x|>r.\end{cases}\qquad f_Y(y)=f_X(y);$$

$$f_X(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & |y|\le r,|x|\le\sqrt{r^2-y^2};\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$$

$f_Y(y|x)=f_X(y|x)$; $\mathbf{R}=\begin{pmatrix} r^2/4 & 0\\ 0 & r^2/4\end{pmatrix}$. Случайные величины X и Y зависимы, но некоррелированы.

2.2.40. а) $$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{\pi r^3}\left(r-\sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\le r^2;\\ 0, & x^2+y^2>r^2.\end{cases}$$

б) $$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{\pi r^3}\left[r\sqrt{r^2-x^2}-x^2\ln\left(\frac{r+\sqrt{r^2-x^2}}{|x|}\right)\right], & |x|<r;\\ 0, & |x|\ge r.\end{cases}$$

$f_Y(y) = f_X(y)$;

в) $f_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{r - \sqrt{x^2+y^2}}{r\sqrt{r^2-y^2} - y^2 \ln\left(\dfrac{r+\sqrt{r^2-y^2}}{|y|}\right)}, & |y| < r, |x| < \sqrt{r^2-y^2}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

$f_Y(y|x) = f_X(y|x)$;

г) Случайные величины X и Y зависимы;

д) Случайные величины X и Y некоррелированы.

2.2.41.

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{182\pi\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{2}{3}\left[\frac{(x-26)^2}{196} + \frac{(x-26)(y+12)}{182} + \frac{(y+12)^2}{169}\right]\right\}.$$

2.2.42. $f_{XY}(x,y) = \dfrac{1}{32\pi} \exp\left\{-\dfrac{25}{32}\left[\dfrac{(x+2)^2}{16} - 3\dfrac{(x+2)(y-3)}{50} + \dfrac{(y-3)^2}{25}\right]\right\}.$

2.2.43. а) C =1,39; б) $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0{,}132 & -0{,}026 \\ -0{,}026 & 0{,}105 \end{pmatrix}$.

2.2.44. $f_X(x) = \dfrac{2}{\sqrt{10\pi}} e^{-2x^2/5}$;.

$\mathrm{M}X = \mathrm{M}Y = 0$; $\mathrm{D}X = 5/4$; $\mathrm{D}Y = 1/4$; $\mathrm{r}_{XY} = -1/\sqrt{5}$.

2.2.45. а) $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} l^{-\frac{(x-5)^2}{2\sigma^2}}$; $f_Y(y) = \dfrac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} l^{-\frac{(y+2)^2}{8\sigma^2}}$;

б) $f_X(x/y) = \dfrac{1}{0{,}6\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{(x+0{,}4y-4{,}2)^2}{0{,}72\sigma^2}\right\}$;

$f_Y(y/x) = \dfrac{1}{1{,}2\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{(y+1{,}6x-6)^2}{2{,}88\sigma^2}\right\}$;

в) $\mathrm{M}(X/Y = y) = 4{,}2 - 0{,}4y$; $\mathrm{M}(Y/X = x) = 6 - 1{,}6x$;

$\mathrm{D}(X/Y = y) = 0{,}36\sigma^2$; $\mathrm{D}(Y/X = x) = 1{,}44\sigma^2$.

2.2.46. $p = 1 - e^{-1/2} \approx 0{,}393$.

2.2.47. $\approx 3{,}4\sigma$

2.2.48. $(x+1)^2 + (y-1)^2 / 4 = 4{,}6052$.

2.2.49. $n \geq 24$.

2.2.50.

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{230}(39x^2 + 36y^2 + 26z^2 - 44xy + 36xz - 38yz)\right\}.$$

2.2.51. $f_{X_1X_3}(x_1,x_3) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{96}} \exp\left\{-\dfrac{1}{96}(5x_1^2 - 2x_1x_3 + 5x_3^2)\right\}$;

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{20\pi} \exp\left\{-\frac{1}{20}(x_1^2 + x_2^2)\right\}.$$

2.2.52. $f_{XY}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, $y \in (0,1)$;

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0; \\ y\Phi(x\sqrt{2}), & \text{если } 0 < y \leq 1; \\ \Phi(x\sqrt{2}), & \text{если } y > 1. \end{cases}$$

2.2.53. $p_1 = \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right)$; $p_2 = \dfrac{1}{8}\left(7 + e^{-8}\right)$.

2.2.54. e^{-2}.

2.2.55. а) 0,5; б) 0,6568.

2.2.56. $f_{XY}(x,y) = \lambda x e^{-(\lambda+y)x}$, $x > 0$, $y > 0$; $f_Y(y) = \dfrac{\lambda}{(\lambda+y)^2}$, $y > 0$;

$$f_X(x/y) = x(\lambda+y)^2 e^{-(\lambda+y)x}, x > 0, y > 0.$$

2.2.57. $F_{XY}(x.y) = \mathrm{P}(X < x)\mathrm{P}(Y < y / X < x)$. Пусть $x < x_1$, тогда $\mathrm{P}(X < x) = 0$ и $F_{XY}(x.y) = 0$. Пусть $x_1 < x \leq x_2$, тогда $\mathrm{P}(X < x) = p_1$ и

$$F_{XY}(x,y) = p_1 \mathrm{P}(Y < y / X = x_1) = p_1 \Phi\left(\frac{y - x_1}{\sigma}\right).$$

При $x > x_2 x > x_2$ по формуле полной вероятности

$$F_{XY}(x,y) = p_1 \Phi\left(\frac{y - x_1}{\sigma}\right) + p_2 \Phi\left(\frac{y - x_2}{\sigma}\right).$$

Далее, полагая $x=\infty$ и дифференцируя по y, получаем

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_{XY}(\infty,y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[p_1e^{-\frac{(y-x_1)^2}{2\sigma^2}}+p_2e^{-\frac{(y-x_2)^2}{2\sigma^2}}\right].$$

2.2.58. $$\mathrm{M}X=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{M}(X/Y=y)f_Y(y)dy;$$

$$\mathrm{D}X=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{D}(X/Y=y)f_Y(y)dy+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathrm{M}X-\mathrm{M}(X/Y=y)\right]^2f_Y(y)dy.$$

2.2.59. Нет.

2.3. Функции от случайных величин и векторов

Законы распределения функций от случайных величин

2.3.1.

Y	1	4
P	0,5	0,5

2.3.2.

Y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
P	0,5	0,4	0,1

2.3.3. $\mathrm{P}_k=\mathrm{P}(Y=2k-3)=pq^k$, $k=0,1,2\ldots$; $\mathrm{M}Y=2q/p-3$.

2.3.4. $q_0=\mathrm{P}(Y=0)=\frac{1}{4}$; $q_1=\mathrm{P}(Y=1)=\frac{5}{8}$;

$q_k=\mathrm{P}(Y=k^2)=\frac{1}{2^{k+2}}$, $k=2,3,\ldots$; $\mathrm{M}Y=2$.

2.3.5. $q_0=\mathrm{P}(Y=1)=\frac{1}{e}$; $q_1=\mathrm{P}(Y=4)=\frac{3}{2e}$;

$q_k=\mathrm{P}(Y=(3k-2)^2)=\frac{1}{ek!}$, $k=2,3,\ldots$.

2.3.6. $f_Y(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, $|y|<1$.

$$2.3.7.\ \text{а)}\ F_Y(y) = \mathrm{P}(X^2 < y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \sqrt{y}, & 0 < y \le 1, \\ 1, & y > 1; \end{cases} \qquad f_Y(y) = F_Y'(y);$$

$$\text{б)}\ F_Y(y) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{X} < y\right) = \begin{cases} 0, & y \le 1, \\ 1 - \dfrac{1}{y}, & y > 1; \end{cases} \qquad f_Y(y) = F_Y'(y);$$

$$\text{в)}\ F_Y(y) = \mathrm{P}(e^X < y) = \begin{cases} 0, & y \le 1, \\ \ln y, & 1 < y \le e, \\ 1, & y > e. \end{cases} \qquad f_Y(y) = F_Y'(y).$$

$$2.3.8.\ f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, \quad |y| < 1.$$

$$2.3.9.\ F_Y(y) = \mathrm{P}(|X| < y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ y, & 0 < y \le 1, \\ 1, & y > 1; \end{cases} \quad f_Y(y) = 1, \quad y \in [0;1].$$

$$2.3.10.\ \text{а)}\ N\left(b, a^2\right); \quad \text{б)}\ f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi y(1-y)}} e^{-\frac{1-y}{2y}}, \quad y \in (0;1);$$

$$\text{в)}\ f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}, \quad y > 0; \quad \text{г)}\ f_Y(y) = \frac{1}{\cos^2 y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mathrm{tg}^2 y}{2}}, \quad |y| < \frac{\pi}{2};$$

$$\text{д)}\ f_Y(y) = \frac{6y^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^6}{2}}, \quad y \ge 0.$$

$$2.3.11.\ \text{а)}\ f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0; \end{cases}$$

$$\text{б)}\ f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \dfrac{1}{z} e^{-\frac{(\ln z - a)^6}{2\sigma^2}}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0; \end{cases}$$

$$2.3.12.\ \text{а)}\ Y \sim N(0,1); \quad \text{б)}\ f_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/4}, \ |z| \le 2.$$

$$2.3.13.\ \text{б)}\ f_Y(y) = \frac{1}{\pi}, \qquad |y| \le \frac{\pi}{2}.$$

2.3.14. Указание. Так как $X = \operatorname{tg}\varphi$, где φ - случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $\frac{1}{X} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$; $\frac{2X}{1-X^2} = \operatorname{tg}2\varphi$; $\frac{3X-X^3}{1-3X^2} = \operatorname{tg}3\varphi$.

2.3.15. а) $\frac{1}{|A|} f_X\left(\frac{y-B}{A}\right)$; б) $f_X(y)+f_X(-y)$;

в) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} f_X\left(\pi k + (-1)^k \arcsin y\right)$, $|y| \le 1$.

2.3.16. $F_X\left(\frac{y-2}{3}\right)$.

2.3.17. $1 - F_X\left(\frac{3}{2}(2-y)\right)$.

$$2.3.18.\ F_Y(y) = \mathrm{P}(Y<y) = \begin{cases} 0, & y \le \pi a^2, \\ \dfrac{\sqrt{\dfrac{y}{\pi}}-a}{b-a}, & \pi a^2 < y \le \pi b^2, \\ 1, & y > \pi b^2, \end{cases}$$

где Y – площадь круга с диаметром X.

2.3.19. Если $0<y<1$, то

$\mathrm{P}(Y<y) = \mathrm{P}(F_X(x)<y) = \mathrm{P}\left(X<F_X^{-1}(y)\right) = F_X\left(F_X^{-1}(y)\right) = y$;

если $y \le 0$, то $\mathrm{P}(Y \le y) = 0$;

если $y > 1$, то $\mathrm{P}(Y<y) = 1$.

Таким образом, Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0;1]$.

2.3.20.

Z	11	12	13	14	17	18
P	0.08	0.32	0.02	0.08	0.10	0.40

2.3.21. а) $q_{-2,1} = \frac{1}{8}$; $q_{-1,0} = \frac{1}{12}$; $q_{0,-1} = \frac{1}{2}$; $q_{1,0} = \frac{1}{6}$; $q_{2,1} = \frac{1}{8}$; остальные $q_{i,j} = 0$;

б) $p_{-2}=\frac{1}{8}$; $p_{-1}=\frac{1}{12}$; $p_0=\frac{1}{2}$; $p_1=\frac{1}{6}$; $p_2=\frac{1}{8}$; в) $q_{-1}=\frac{1}{2}$; $q_0=q$; $q_1=\frac{1}{4}$.

2.3.22.

Z	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

2.3.23. Указание. Воспользоваться формулой

$$f_Z(z)=p_1f_Y(z-x_1)+p_2f_Y(z-x_2)=\frac{1}{2}\big(f_Y(z+1)+f_Y(z-1)\big).$$

а) учесть в указанной формуле, что

$$f_Y(z+1)=\begin{cases}1, & z\in[-1,0];\\ 0, & z\notin[-1,0],\end{cases}\qquad f_Y(z-1)=\begin{cases}1, & z\in[1,2];\\ 0, & z\notin[1,2].\end{cases}$$

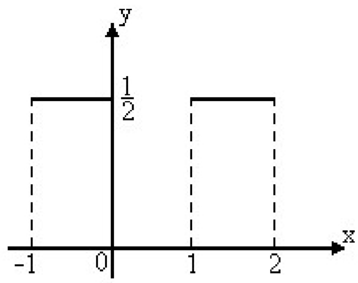

Рис. 2.16.

б) $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & z\in[-2,2];\\ 0, & z\notin[-2,2].\end{cases}$ в) $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1;\\ \frac{1}{4}e^{-\frac{z+1}{2}}, & -1\le z<1;\\ \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{z+1}{2}}+e^{-\frac{z-1}{2}}\right), & 1\le z.\end{cases}$

г) $f_Z(z)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(z+1)^2}{2}}+e^{-\frac{(z-1)^2}{2}}\right)$

д)

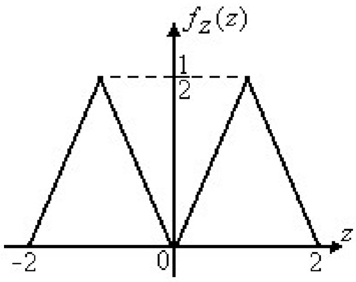

Рис. 2.17.

2.3.24. $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ 1-e^{-z}, & 0<z\le 1,\\ e^{-z}(e-1), & z>1.\end{cases}$

2.3.25. $f_Z(z)=\begin{cases}0, & |z|>1,\\ 1-|z|, & |z|\le 1.\end{cases}$

2.3.26. $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1,\\ \dfrac{1+z}{4}, & -1\le z<1,\\ \dfrac{3-z}{4}, & 1\le z<3,\\ 1, & z\ge 3.\end{cases}$

2.3.27. $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{z^2}{2}, & 0<z\le 1,\\ -\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}, & 1<z\le 2,\\ \dfrac{(z-3)^2}{2}, & 2<z\le 3,\\ 0, & z\ge 3.\end{cases}$

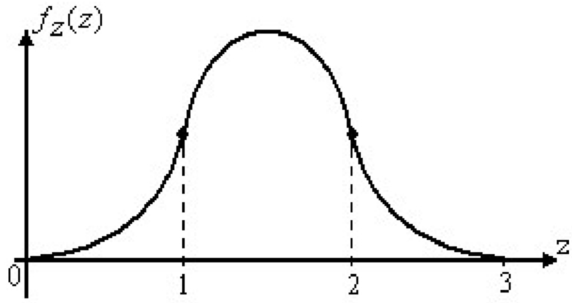

Рис. 2.18.

2.3.28. а) $f_Z(z)=\begin{cases}-\ln z, & \text{если } 0<z<1,\\ 0, & \text{если } z\notin(0;1).\end{cases}$ б) $f_Z(z)=\begin{cases}1-|z|, & \text{если } |z|\le 1,\\ 0, & \text{если } |z|>1.\end{cases}$

в) $f_Z(z)=\begin{cases}2(1-z), & \text{если } 0\le z\le 1,\\ 0, & \text{если } z\notin[0;1].\end{cases}$

2.3.29. а) $f_Z(z)=\dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|z|}$, (закон Лапласа); б) $f_Z(z)=\lambda e^{-\lambda z}$, $z\ge 0$.

2.3.30. $f_Z(z)=\frac{1}{4}e^{-|z|}(1+|z|)$.

2.3.31. $f_Z(z)=\int\limits_0^{\infty} yf(zy,y)dy-\int\limits_{-\infty}^{0} yf(zy,y)dy$

2.3.32. а) $f_Z(z)=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{x}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx-\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$; б) $f_Z(z)=\frac{1}{2\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{|z|}{\sigma_1\sigma_2}}$.

2.3.33. Равномерное распределение на отрезке $[0;1]$.

2.3.35. *Указание.* Воспользоваться результатом решения задачи *2.3.31*.

2.3.36. $f_Z(z)=\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\mathrm{r}^2}}{\pi\left(\sigma_2^2z^2-2\mathrm{r}\,z\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2\right)}$.

При $\mathrm{r}=0$ $\quad f_Z(z)=\frac{\sigma_1/\sigma_2}{\pi\left(z^2+\left(\sigma_1/\sigma_2\right)^2\right)}$ - закон распределения Коши.

2.3.37. $Y=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X),\quad 0<X<1$.

2.3.38. $Y=\mathrm{ctg}\,\pi e^{-\lambda X}\quad (X>0)$.

2.3.39. $Y=F_Y^{-1}(F_X(x))$, если функция монотонно возрастающая, $Y=F_Y^{-1}(1-F_X(x))$, если функция монотонно убывающая.

2.3.40. *Указание.* Учесть, что случайные величины $X-Y$ и $X+Y$ являются гауссовскими, а их взаимный корреляционный момент равен 0.

2.3.41. Рассмотрим два произвольных $z_1\ge 0$ и $z_2\ge 0$. Пусть вероятность $\mathrm{P}\big(X-Y\ge z_1,\min(X,Y)\ge z_2\big)=J$. Учитывая независимость X и Y, имеем

$$J=\iint\limits_{\{u-v\ge z_1,\min(u,v)\ge z_2\}}\lambda_1e^{-\lambda_1u}\lambda_2e^{-\lambda_2v}dudv=\lambda_1\lambda_2\int\limits_{z_1+z_2}^{\infty}e^{-\lambda_1u}\left\{\int\limits_{z_2}^{u-z_1}e^{-\lambda_2v}dv\right\}du=$$

$$=\lambda_1\lambda_2\int\limits_{z_1}^{\infty}e^{-\lambda_1(z_2+u)}\left\{\int\limits_{z_2}^{u+z_2-z_1}e^{-\lambda_2v}dv\right\}du=e^{-\lambda_1z_2}e^{-\lambda_2z_2}\lambda_1\lambda_2\int\limits_{z_1}^{\infty}e^{-\lambda_1u}\left\{\int\limits_{0}^{u-z_1}e^{-\lambda_2v}dv\right\}du=$$

$$=\mathrm{P}(X-Y\ge z_1)\mathrm{P}(\min(X,Y)\ge z_2).$$

Следовательно, события $(X-Y<z_1)$ и $(\min(X,Y)<z_2)$ независимы в этом случае. Аналогично рассматривается случай $z_1<0$.

2.3.43. Указание. Поскольку $Y_1 \sim N\left(0, \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)$, $Y_2 \sim N\left(0, \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$, следовательно Y_1 и Y_2 независимы тогда и только тогда, когда $\mathrm{r}_{Y_1Y_2} = 0$, а $\mathrm{r}_{Y_1Y_2} = 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = 0$.

2.3.44. $g(x_1, y_1) = f(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha,\ x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)$.

2.3.45. $g(x_1, y_1) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\mathrm{r}^2}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2\left(1-\mathrm{r}^2\right)}\left[Ax_1^2 - 2Bx_1y_1 + Cy_1^2\right]\right\}$, где

$$A = \frac{\cos^2\alpha}{\sigma_1^2} - 2\mathrm{r}\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\sin^2\alpha}{\sigma_1^2};\quad B = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1^2} - \mathrm{r}\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_2^2};$$

$$C = \frac{\sin^2\alpha}{\sigma_1^2} + 2\mathrm{r}\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\cos^2\alpha}{\sigma_2^2}.$$

Случайные величины X_1 и Y_1 будут независимы, если α выбрать так, чтобы

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\mathrm{r}\,\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}.$$

2.3.46. $f(r) = \dfrac{r}{a^2} e^{-r^2/2a^2}$ (распределение Релея).

2.3.47. $x = r\cos\varphi$, $\quad y = r\sin\varphi$;

$$f_1(r,\varphi) = f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = \frac{r}{2\pi ab} e^{-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)}.$$

2.3.48. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{R^2}, & 0 < x \le R, \\ 1, & x > R; \end{cases}$ $\quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{R^2}, & 0 < x < R, \\ 0, & x \notin (0,R); \end{cases}$

$$\mathrm{M}X = \frac{2}{3}R;\ \mathrm{D}X = \frac{R^2}{18}.$$

2.3.49. $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-\dfrac{(T-x)^2}{T^2}, & 0<x\le T,\\ 1, & x>T.\end{cases}$

2.3.50. $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi, & 0\le r\le\infty,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi, & 0\le\theta\le\pi,\\ z=r\cos\theta, & 0<\varphi<2\pi;\end{cases}$

$$f(r,\theta,\varphi)=\frac{r^2\sin\theta}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}abc}\exp\left[-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)\right].$$

2.3.51. Покажем, что случайная величина $Y=X_1+X_2$ распределена по закону Пуассона с параметром $a=a_1+a_2$.

Пусть $m=0,\ 1,\ 2,\ldots$ Найдем вероятность

$$\mathrm{P}(Y=m)=\mathrm{P}(X_1+X_2=m)=\sum_{j=0}^{m}\mathrm{P}(X_1=j)\mathrm{P}(X_2=m-j)=\sum_{j=0}^{m}\frac{a_1^j}{j!}e^{-a_1}\frac{a_2^{m-j}}{(m-j)!}e^{-a_2}=$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{m!}\frac{m!}{j!(m-j)!}a_1^ja_2^{m-j}\right)e^{-(a_1+a_2)}=\frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m}C_m^ja_1^ja_2^{m-j}e^{-(a_1+a_2)}=\frac{(a_1+a_2)^m}{m!}e^{-(a_1+a_2)}.$$

Здесь использована формула бинома Ньютона. Видим, что случайная величина Y имеет пуассоновское распределение с параметром $a=a_1+a_2$. Обобщение результата легко получить, используя метод математической индукции.

2.3.52. *Указание.* Использовать метод математической индукции и закон композиции.

2.3.53. *Указание.* Воспользоваться результатом решения задачи *2.3.11* а), положив $\sigma=1$. Далее, используя метод математической индукции и формулу свертки, доказать истинность выражения для плотности вероятностей $f_{X^2}(x)$.

2.3.54. *Указание.* Сначала показать, что плотность вероятностей случайной величины $Z=\sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2}$ имеет вид

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x^2}{2}}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

При этом следует использовать результат решения задачи *2.3.53*. Затем, используя результат решения задачи *2.3.31*, получить плотность вероятностей случайной величины T.

2.3.55. $$f_{\Phi(n_1,n_2)}(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\left(n_1 x + n_2\right)^{\frac{(n_1+n_2)}{2}}},\ 0 \leq x < \infty .$$

2.3.56. $X \,\square\, N(aA, A^{\mathrm{T}}RA)$.

2.3.57. *Указание.* Воспользоваться равенством $\mathrm{M}e^{-Y} = \lim\limits_{x\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\mathrm{M}e^{-X_k}$, где $\mathrm{M}e^{-Y} = 0$ тогда и только тогда, когда $Y = \infty$ с вероятностью 1.

2.3.58. $\mathrm{M}Y = 2.4,\ \mathrm{D}Y = 1.99$.

2.3.59. $\mathrm{M}S = 7,\ \mathrm{D}S = \dfrac{35}{6}.$

2.3.60. $\dfrac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.3162$.

2.3.61. $\mathrm{M}Z = 1.9,\ \mathrm{D}Z = 1.29.$

2.3.62. а) $\mathrm{M}Y = \dfrac{pq}{1+q^2}$; $\mathrm{D}Y = \dfrac{pq}{1-q^2} - \dfrac{p^2q^2}{\left(1+q^2\right)^2}$,

б) $\mathrm{M}Y = \dfrac{p}{1+q^2}$; $\mathrm{D}Y = \dfrac{p}{1-q^2} - \dfrac{p^2}{\left(1+q^2\right)^2}$.

2.3.63. $\mathrm{M}Y = \ln 2;\ \mathrm{D}Y = \dfrac{1}{2} - \left(\ln 2\right)^2.$

2.3.64. $$\mathrm{M}Y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\sin(x)\right| f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin(x)\right| \cos(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{M}Y^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\sin(x)|^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin(x)|^2\cos(x)dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cos(x)dx=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{D}Y=\mathrm{M}Y^2-(\mathrm{M}Y)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

2.3.65. $\mathrm{D}Y=20-2\pi^2$.

2.3.66. $\mathrm{M}Y=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$, $\mathrm{D}Y=\dfrac{\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+1)^2}$.

2.3.67. $\mathrm{M}Y=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sigma$, $\mathrm{D}Y=\left(1-\dfrac{2}{\pi}\right)\sigma^2$.

2.3.68. $\mathrm{M}X=e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}$, $\mathrm{D}X=e^{2a+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$.

2.3.69. $\mathrm{M}U=18$, $\mathrm{M}V=17$.

2.3.70. $\mathrm{D}Z=108$.

2.3.71. $\mathrm{M}(X+Y)=1.5$; $\quad\mathrm{M}(X-Y)=0.5$; $\quad\mathrm{M}\left(X^2+Y^2\right)=\dfrac{5}{3}$; $\quad\mathrm{M}XY=0.5$;

$\mathrm{D}(X\pm Y)=\dfrac{5}{12}$; $\quad\mathrm{D}XY=\dfrac{7}{36}$.

2.3.72. $\mathrm{M}Z=0$, $\mathrm{D}Z=\dfrac{1}{24}$.

2.3.73. $\mathrm{r}_{UV}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

2.3.74. *а)* $a+3$; *б)* a^2-a+1; *в)* $\dfrac{a^2}{3}$; *г)* $\dfrac{4}{45}a^4$.

2.3.75. $1-3\sigma^2$.

2.3.76. $\mathrm{D}(X-Y)=\dfrac{13}{3}$; $\quad\mathrm{M}(XY^2+X^2Y)=\dfrac{31}{3}$.

2.3.77. $\mathrm{M}Z=1$, $\quad\mathrm{D}Z=\dfrac{32}{3}$.

2.3.78. *à)* $\dfrac{1}{3}(2a+b)$; $\quad$ *á)* $\dfrac{a^2}{2}+2b^2+1.8ab$; $\quad$ *â)* $\dfrac{31}{180}ab$.

2.3.79. $\mathrm{M}L = \frac{4r}{\pi}$; $\mathrm{D}L = 2r^2\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)$.

2.3.80. $\mathrm{M}L = \pi l; \mathrm{D}L = \frac{\pi^2 l^2}{3}; \mathrm{M}S = \frac{\pi l^2}{3}; \mathrm{D}S = \frac{4\pi^2 l^4}{45}$.

2.3.81. $\mathrm{M}S = \frac{l^2}{6}$; $\mathrm{M}R = \frac{l}{3}$; $\mathrm{D}R = \frac{l^2}{18}$.

2.3.82. $\mathrm{M}R^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2)$; $\mathrm{D}R^2 = \frac{4}{45}(a^4 + b^4)$.

2.3.83. $a = \frac{1}{2}$.

2.3.84. Неравенство Коши-Буняковского: если случайные величины U и V таковы, что $\mathrm{M}U^2 < \infty$ и $\mathrm{M}V^2 < \infty$, то $(\mathrm{M}UV)^2 \le (\mathrm{M}U)^2 + (\mathrm{M}V)^2$. Если положить $U = X^2$ и $V = 1$, то из последнего неравенства получим $(\mathrm{M}X^2)^2 \le \mathrm{M}X^4$, то есть существует конечный момент $\mathrm{M}X^2$. Аналогично доказываются остальные утверждения.

2.3.85. $$\mathrm{r}_{XY} = \begin{cases} \dfrac{1}{(m+1)\sqrt{\dfrac{1}{2(2m+1)}}}, & m = 2k+1, \\ 0, & m = 2k \end{cases}; \quad \mathrm{r}_{XY} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

2.3.86. $\mathrm{r} = \frac{n-m}{n}$.

3. Законы больших чисел и предельные теоремы теории вероятностей

3.1. Неравенство Чебышева и законы больших чисел

3.1.2. $\mathrm{P}(|X - \mathrm{M}X| < 0{,}2) \ge 0{,}64$.

3.1.3. $\mathrm{P}(0{,}5 \le X \le 1{,}5) \ge 0{,}84$.

3.1.4. $\mathrm{P}(49{,}5 \le X \le 50{,}5) \ge 0{,}6$.

3.1.5 а) $\mathrm{P} \ge 0{,}86$; б) $\mathrm{P} \ge 0{,}75$.

3.1.6. а) 0,888…; б) 0,25.

3.1.7. $\varepsilon \ge 0{,}3$.

3.1.8. $p \geq 0{,}8815$.

3.1.9. $p \leq 0{,}25$; $p = 2\Phi(-2) = 0{,}0456$.

3.1.10. $p \geq 0{,}9$.

3.1.11. $\Delta \geq 1/\sqrt{10}$.

3.1.12. $n \geq 227500$.

3.1.13. $n \geq 60000$.

3.1.14. $\mathrm{P}(X \geq \varepsilon) = \mathrm{P}(e^{aX} \geq e^{a\varepsilon}) < \dfrac{\mathrm{M}e^{aX}}{e^{a\varepsilon}}$.

3.1.15. $\mathrm{P}(X \geq \varepsilon) \leq \mathrm{P}(f(X) \geq f(\varepsilon)) \leq \dfrac{\mathrm{M}f(X)}{f(\varepsilon)}$.

3.1.16. См. задачу 3.1.15.

3.1.17. а) $\mathrm{P}(|X| \geq \varepsilon) = \mathrm{P}(f(|X|) \geq f(\varepsilon)) = \mathrm{P}(f(X) \geq f(\varepsilon)) \leq \dfrac{\mathrm{M}f(X)}{f(\varepsilon)}$;

б) Пусть $F(x)$ – функция распределения случайной величины X. Тогда $Mf(X) = \mathrm{M}f(X)I(|X| < \varepsilon) + \mathrm{M}f(X)I(|X| \geq \varepsilon) \leq f(\varepsilon) + c\mathrm{P}(|X| \geq \varepsilon)$.

3.1.18. Применима, т. к. $\mathrm{M}X_n = 0$, $\mathrm{D}X_n = 2$ для всех n.

3.1.19. Применима, т. к. $\mathrm{M}X_n = 0$, $\mathrm{D}X_n = \alpha^2$ для всех n.

3.1.20. Применима, т. к. $\mathrm{M}X_n = -\dfrac{a}{2n+1}$ и $\mathrm{D}X_n \leq a^2$ для всех n.

3.1.21. $\mathrm{M}X_n = 0$, $\mathrm{D}X_n = \ln n$; $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{D}X_k < \int\limits_1^{n+1} \ln x dx = (n+1)\ln(n+1) - n$;

$\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \dfrac{(n+1)\ln(n+1) - n}{n^2\varepsilon^2} \to 1$ при $n \to \infty$, т.е. последовательность подчиняется закону больших чисел.

3.1.22. $\mathrm{M}X_n = 0$, $DX_n = \sqrt{n}$; $\sum\limits_{k=1}^{n} DX_k < \int\limits_1^{n+1} \sqrt{x} dx = \dfrac{2}{3}\left[(n+1)^{3/2} - 1\right]$.

Поэтому $P(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right| \le \varepsilon) \ge 1-\frac{2\left[(n+1)^{3/2}-1\right]}{3n^2\varepsilon^2} \to 1$ при $n\to\infty$ и, следовательно, последовательность подчиняется закону больших чисел.

3.1.23. $MX_n = 0$, $\mathrm{D}X_n = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \frac{2}{3}(1+\ln n)$. Поэтому $\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\sum_{k=1}^{n}X_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k < \frac{2}{3n}+\frac{2}{3n}\ln n \to 0$ при $n\to\infty$, т.е. в силу теоремы Маркова последовательность подчиняется закону больших чисел.

3.1.24. Не подчиняется, т.к. $\mathrm{M}X_k, k\ge 1$ не существует.

3.1.25. $\mathrm{M}X_n = 0$, $\mathrm{D}X_n = \frac{a_n^2}{6}$;

$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k = \frac{1}{6n^2}\sum_{k=1}^{n}k^{2\alpha} < \frac{1}{6n^2}\int_1^{n+1}x^{2\alpha}dx < \frac{(n+1)^{2\alpha+1}}{6(2\alpha+1)n^2} \to 0$ при $n\to\infty$, если $\alpha<1/2$.

Следовательно, последовательность подчиняется закону больших чисел.

3.1.26. а) $\mathrm{D}X_n = \frac{(b-a)^2}{12}$ - постоянная, т.е. по теореме Чебышева закон больших чисел применим.

б) $\mathrm{D}X_n = \frac{(b_n-a_n)^2}{12}$. Полагая в равенстве $b_m - a_m = b_{m-1}-a_{m-1}+\frac{C}{m^{1/2+\alpha}}$, m=1,2,…n, и складывая полученные равенства, получаем:

$$b_n - a_n = b_1 - a_1 + C\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1/2+\alpha}} < C_1 + C_2 n^{1/2-\alpha}.$$

Следовательно, $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k = O(n^{-2\alpha}) \to 0$ при $n\to\infty$, т.е. закон больших чисел применим.

3.1.27. Обозначим $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}X_k$. Тогда

$$\mathrm{P}(|Y|<\varepsilon)\ge 1-\frac{\mathrm{D}Y_n}{\varepsilon^2}=1-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k}{n^2\varepsilon^2}\to 1,\text{ если }\frac{\mathrm{D}X_n}{n}\to 0\text{ при }n\to\infty.$$

3.1.28. $$\frac{\tilde{N}(n^{\alpha+1}-1)}{(\alpha+1)n^2}=\frac{C}{n^2}\int\limits_1^n x^{\alpha}dx<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k<\frac{C}{n^2}\int\limits_1^{n+1}x^{\alpha}dx=\frac{C\left[(n+1)^{\alpha+1}-1\right]}{(\alpha+1)n^2}.$$

Поэтому последовательность подчиняется закону больших чисел при $\alpha < 1$ и не подчиняется при $\alpha \ge 1$.

3.1.29. $\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k=\frac{1}{n^2}(\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k+2\sum\limits_{1\le i<j\le n}\mathrm{R}_{ij})<\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k<\frac{Cn}{n^2}\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому в соответствии с теоремой Маркова закон больших чисел имеет место.

3.1.30. $$\mathrm{D}\sum_{k=1}^{n}X_k=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k+2\sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{\mathrm{D}X_i}\sqrt{\mathrm{D}X_j}\,\mathrm{r}_{ij}.$$

Пусть $\varepsilon>0$ – любое число; тогда $|\mathrm{r}_{ij}|<\varepsilon$ при $|i-j|>N$ и для каждого $i=1,2,...n$ $(n>N)$ и не более чем $2N$ номеров j может быть $\varepsilon<|\mathrm{r}_{ij}|\le 1$. Поэтому имеем:

$$\mathrm{D}\sum_{k=1}^{n}X_k<Cn+4CnN+\varepsilon Cn(n+1)=C_1n+C_2\varepsilon n^2.$$

Следовательно, $\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\to 0$ при $n\to\infty$, т.е. последовательность подчиняется закону больших чисел.

3.1.31. $$\mathrm{D}\sum_{k=1}^{n}X_k=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k+2(\mathrm{R}_{12}+\mathrm{R}_{13}+\ldots+\mathrm{R}_{n-1,n}).$$

Но $|\mathrm{R}_{i,i+1}|\le\sqrt{\mathrm{D}X_i\,\mathrm{D}X_{i+1}}\le C$, $i=1,2,...n$, т.е.

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\sum_{k=1}^{n}X_k\le\frac{1}{n^2}(Cn+2Cn)\to 0\text{ при }n\to\infty.$$

Таким образом, по теореме Маркова закон больших чисел имеет место.

3.1.32. Из непрерывности функции *f(x)* в точке *a* следует: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$. Рассмотрим событие $B = \{|X_n - a| < \delta\}$. Очевидно, событие B влечет событие $C = \{|f(X_n) - f(a)| < \varepsilon\}$ и поэтому $\mathrm{P}(C) \geq \mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(\overline{B})$. Из сходимости по вероятности случайной величины X_n имеем: для данного δ и любого $\gamma > 0$ существует $n_0 = n_0(\gamma)$ такое, что $\mathrm{P}(\overline{B}) = \mathrm{P}(|X_n - a| \geq \delta) < \gamma$ при $n \geq n_0$. Следовательно, $\mathrm{P}(|f(X_n) - f(a)| < \varepsilon) \geq 1 - \gamma,\ n \geq n_{0.}$

3.1.33. Для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$|\mathrm{M}X_n - a| \leq \mathrm{M}|X_n - a| = \mathrm{M}|X_n - a| I(|X_n - a| < \varepsilon) + \mathrm{M}|X_n - a| I(|X_n - a| \geq \varepsilon) <$$
$$< \varepsilon \mathrm{P}(|X_n - a| < \varepsilon) + (c + |a|)\mathrm{P}(|X_n - a| \geq \varepsilon).$$

Из сходимости по вероятности случайной величины X_n имеем: для данного $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ существует $n_0 = n_0(\delta)$ такое, что $\mathrm{P}(|X_n - a| \geq \varepsilon) < \delta$ при $n \geq n_0$. Выберем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c + |a|}$. Тогда при $n \geq n_0$ будем иметь:

$$|\mathrm{M}X_n - a| \leq 2\varepsilon,$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказывает утверждение.

3.1.34. а) $\mathrm{P}(|X_n - Y_n - X - Y| > \varepsilon) \leq \mathrm{P}(|X_n - X| + |Y_n - Y| > \varepsilon) \leq$

$\leq \mathrm{P}(|X_n - X| > \varepsilon/2$ или $|Y_n - Y| > \varepsilon/2) \leq \mathrm{P}(|X_n - X| > \varepsilon/2) + \mathrm{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon/2) \to 0$,

при $n \to \infty$, так как $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ è $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} Y$.

б) $\mathrm{P}(|X_n Y_n - XY| > \varepsilon) \leq \mathrm{P}(|X_n - X| \cdot |Y_n - Y| > \varepsilon/3) +$

$+ \mathrm{P}(|X| \cdot |Y_n - Y| > \varepsilon/3) + \mathrm{P}(|Y| \cdot |X_n - X| > \varepsilon/3)$.

Покажем вначале, что первое слагаемое стремится к 0 при $n \to \infty$.

Поскольку $2|X_n - X| \cdot |Y_n - Y| \leq (X_n - X)^2 + (Y_n - Y)^2$, то

$\mathrm{P}(|X_n - X| \cdot |Y_n - Y| > \varepsilon/3) \leq \mathrm{P}((X_n - X)^2 + (Y_n - Y)^2 > 2\varepsilon/3) \leq$

$\leq \mathrm{P}((X_n - X)^2 > 2\varepsilon/3) + \mathrm{P}((Y_n - Y)^2 > 2\varepsilon/3) \to 0$ при $n \to \infty$, так как

$X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ и $Y_n \xrightarrow{\text{P}} Y$.

Покажем теперь, что второе слагаемое стремится к 0 при $n \to \infty$.

Для любого фиксированного $M > 0$ имеем

$$\text{P}\left(|X| \cdot |Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{3} \right) = \text{P}\left(|X| \cdot |Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{3}, |X| > M \right) + \text{P}\left(|X| \cdot |Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{3}, |X| \le M \right) \le$$

$$\le \text{P}\left(|X| > M\right) + \text{P}\left(M \cdot |Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{3} \right) = \text{P}\left(|X| > M\right) + \text{P}\left(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{3} M \right).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу вначале при $n \to \infty$, а затем при $M \to \infty$, получаем, что $\text{P}\left(|X| \cdot |Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{3} \right) \to 0$.

Полностью аналогично доказывается, что $\text{P}\left(|Y| \cdot |X_n - X| > \frac{\varepsilon}{3} \right) \to 0$ при $n \to \infty$.

3.1.35. Пусть $\{X_n\}, n \ge 1$ - последовательность независимых, равномерно распределенных на отрезке [0,1] случайных величин. В соответствии с законом больших чисел

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \text{M} X_k \xrightarrow{\text{P}} \text{M} X_1 = \frac{1}{2} \text{ при } n \to \infty .$$

Из непрерывности $f(x)$ (см. задачу 3.1.32) имеем

$$f(S_n) \xrightarrow{\text{P}} f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ при } n \to \infty ,$$

а в силу ограниченности $f(x)$ (см. задачу 1.3.33)

$$\text{M} f(S_n) \to f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ при } n \to \infty .$$

Пользуясь теперь независимостью величин $\{X_n\}, n \ge 1$ и выражая $\text{M} f(S_n)$ в виде интеграла, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

3.1.36. Поскольку $\sqrt[n]{X_1 \dots X_n} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln X_k}$ и $\text{M} \ln X = -1$, то (см. задачу 3.1.34)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \dots\int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1+\dots+x_n})dx_1\dots dx_n =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \dots\int_0^1 f(e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln x_k})dx_1\dots dx_n = f(e^{\mathrm{M}\ln X_1}) = f(\frac{1}{e}).$$

3.1.37. См. задачи *3.1.27*, *3.1.32* и *3.1.33*.

3.2. Производящие и характеристические функции

3.2.1. $p(z)=(q+pz)^n$; $\mathrm{M}X=np$; $\mathrm{D}X=npq$.

3.2.2. $p(z)=e^{a(z-1)}$; $\mathrm{M}X=\mathrm{D}X=a$.

3.2.3. $p_N(z)=\dfrac{pz}{1-qz}$; $\mathrm{M}N=\dfrac{1}{p}$; $\mathrm{D}N=\dfrac{q}{p^2}$ (см. пример 1 параграфа 3.2).

$p_{N_m}(z)=\left(\dfrac{pz}{1-qz}\right)^m$; $\mathrm{M}N_m=\dfrac{m}{p}$; $\mathrm{D}N_m=\dfrac{mq}{p^2}$.

3.2.4. а) $\dfrac{1}{4}(1+z)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{4}z^2$; дискретный закон распределения: значения 0, 1, 2 принимаются с вероятностями $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}$ соответственно;

б) $\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2}z)^{-1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}z+\dfrac{1}{8}z^2+\dots$; дискретный закон распределения: значение k принимается с вероятностью $2^{-(k+1)}$, $k=0,1,2,\dots$;

в) распределение Пуассона с параметром $a=2$;

г) биномиальное распределение с вероятностью успеха $p=\dfrac{2}{3}$.

3.2.5. $p_{X+1}(z)=zp_X(z)$; $p_{2X}(z)=p_X(z^2)$; $p_{3X+2}(z)=z^2p_X(z^3)$.

3.2.6. $p(z)=\dfrac{1-(1-p)z}{(1-z)\left[1-(q-p)z\right]}$; $u_n=\dfrac{1}{2}\left[1+(q-p)^n\right]$.

3.2.7. $\varphi(t)=\cos t$.

3.2.8. $\varphi(t)=\cos^2 t$; $\mathrm{D}X=2$.

3.2.9. $\varphi(t)=(q+pe^{it})^n$; $\mathrm{M}X=np$; $\mathrm{D}X=npq$.

3.2.10. $\varphi(t)=e^{a(e^{it}-1)}$; $\mathrm{M}X=\mathrm{D}X=a$.

3.2.11. $\varphi(t)=p_0+2\sum\limits_{n\neq 0}p_n\cos tx_n$.

3.2.12. а) $\varphi(t)=\dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{i(b-a)t}=e^{it(a+b)/2}\left(\dfrac{\sin t\dfrac{b-a}{2}}{t\dfrac{b-a}{2}}\right)$;

б) $\varphi(t)=\dfrac{a}{a-it}$;

в) $\varphi(t)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}+itx}dx$. После подстановки $\dfrac{x-a}{\sigma}-it\sigma=z$ в силу аналитичности подынтегральной функции имеем:

$$\varphi(t)=\frac{e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty+it\sigma}^{+\infty+it\sigma}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$

г) Используя лемму Жордана и теорему Коши, имеем:

при $t>0$ $\quad\varphi(t)=\dfrac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{itx}}{a^2+x^2}dx=\dfrac{a}{\pi}2\pi i\operatorname*{Res}\limits_{z=ia}\dfrac{e^{itz}}{a^2+z^2}=ae^{-at}$;

при $t<0$ $\quad\varphi(t)=-\dfrac{a}{\pi}2\pi i\operatorname*{Res}\limits_{z=-ia}\dfrac{e^{itz}}{a^2+z^2}=ae^{at}$.

Окончательно получаем, что $\varphi(t)=ae^{-a|t|}$.

д) $\varphi(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ (см. пример 3 параграфа 3.2).

е) $\varphi(t)=\dfrac{1}{2^{n/2}\tilde{A}\left(\dfrac{n}{2}\right)}\int\limits_0^{+\infty}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}+itx}dx=\dfrac{1}{2^{n/2}\tilde{A}\left(\dfrac{n}{2}\right)}\int\limits_0^{+\infty}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-x(\frac{1}{2}-it)}dx=$

$=\dfrac{1}{2^{n/2}\tilde{A}\left(\dfrac{n}{2}\right)}\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}-it\right)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^{+\infty}z^{\frac{n}{2}-1}e^{-z}dz=\left(1-2it\right)^{-\frac{n}{2}}$, т.к. $\int\limits_0^{+\infty}z^{\frac{n}{2}-1}e^{-z}dz=\tilde{A}\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

3.2.13. $\varphi(t)=\dfrac{1}{a}\int\limits_{-a}^{a}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right)e^{itx}dx=\dfrac{2}{a}\int\limits_{0}^{a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\cos txdx=$

$$=-\frac{2}{at}\int\limits_{0}^{a}\sin txd\left(1-\frac{x}{a}\right)=2\cdot\frac{1-\cos at}{a^2t^2}=\left(\frac{\sin\frac{at}{2}}{\frac{at}{2}}\right)^2 .$$

3.2.14. Указание: Учитывая взаимнооднозначное соответствие между $\varphi(t)$ и $f(x)$, достаточно проверить, что $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt$ (см. задачу *3.2.13*).

3.2.15.

$$\varphi(t)=\frac{\beta^{\alpha}}{\tilde{A}(\alpha)}\int\limits_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathring{\tilde{a}}^{-\beta x}e^{itx}dx=\frac{\beta^{\alpha}}{\tilde{A}(\alpha)(\beta-it)^{\alpha}}\int\limits_{0}^{+\infty}z^{\alpha-1}e^{-z}dz=\left(1-\frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha} .$$

3.2.16. Указание: Воспользоваться определением характеристической функции дискретной случайной величины.

а) $\cos t=\dfrac{1}{2}e^{-it}+\dfrac{1}{2}e^{it}$; дискретный закон распределения: значения -1, 1 принимаются с вероятностями $\dfrac{1}{2}$;

б) $\cos^2 t=\dfrac{1}{4}e^{-2it}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}e^{2it}$; дискретный закон распределения: значения -2, 0, 2 принимаются с вероятностями $\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}$ соответственно;

в) дискретный закон распределения: значения $x_k=k$ принимаются с вероятностями $p_k=\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{1}{2^{|k|+1}}$, $k=\pm1,\pm2,...$;

г) дискретный закон распределения: значения $x_k=k$ принимаются с вероятностями $p_0=\mathrm{P}(X=0)=a_0$, $p_k=\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{a_k}{2}$, $k=\pm1,\pm2,...$.

3.2.17. $\varphi(t)=\dfrac{1}{2e^{-it}-1}=\dfrac{\frac{1}{2}e^{it}}{1-\frac{1}{2}e^{it}}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{it}\right)^k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{itk}\frac{1}{2^k}$; дискретный закон распределения: значения $x_k=k$ принимаются с вероятностями $p_k=\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{1}{2^k}$, $k=1, 2,\ldots$.

3.2.18. а) $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{-itx}}{1+t^2}dt=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ (см. задачу *3.2.12* г));

б) Используя лемму Жордана и теорему Коши, получаем:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}}{1-it}dt=\frac{1}{2\pi}2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-i}\frac{e^{-ixz}}{1-iz}=e^{-x}\text{, если } x>0;$$

в) $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-|t|\right)e^{-itx}dt=\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$ (см. задачу *3.2.13*);

г) Так как $\varphi(t)$ является абсолютно интегрируемой, то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx\sin t}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin(1+x)t}{t}dt+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin(1-x)t}{t}dt\right]=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in\left(-1,1\right);\\ 0, & x\notin\left(-1,1\right),\end{cases}$$

поскольку известно, что $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\sin tx}{t}dt=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & x>0;\\ \frac{\pi}{2}, & x<0;\end{cases}$ (ср. с примером 3 параграфа 3.2).

3.2.19. $\varphi_1(t)=\dfrac{1}{1-it}$ и поэтому $f_1(x)=e^{-x}$, $x>0$ (см. задачу *3.2.18* б)).

Аналогично, $\varphi_2(t)=\dfrac{1}{1+it}$ и поэтому $f_2(x)=e^{x}$, $x<0$.

Замечание: В частности, из этих результатов следует, что характеристической функции $\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ соответствует плотность вероятностей $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ (ср. с задачей *3.2.18* а)).

3.2.20. Указание: Воспользоваться тем, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых, а между плотностью вероятностей и характеристической функцией имеется взаимнооднозначное соответствие.

3.2.21. $|\varphi(t)|^2$.

3.2.22. См. задачу *3.2.21.*

3.2.23. $\varphi(t)=\dfrac{1}{8}e^{-it}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{8}e^{it}$; дискретный закон распределения: значения -1, 0, 1 принимаются с вероятностями $\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{8}$ соответственно.

3.2.24. При любом натуральном n функция $\varphi(t)=\cos^n t$ является характеристической функцией случайной величины $X=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$, где $X_k, k\ge 1$ - независимые, одинаково распределенные дискретные случайные величины, принимающие значения -1 и 1 с вероятностью $\dfrac{1}{2}$ (см. задачу *3.2.7*).

3.2.25. В силу четности функция $\varphi(t)$ разлагается в ряд Фурье по косинусам: $\varphi(t)=p_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k\cos\dfrac{\pi kt}{a}$. При этом $p_0=\dfrac{1}{a}\int\limits_0^a\left(1-\dfrac{t}{a}\right)dt=\dfrac{1}{2}$, $p_k=\dfrac{2}{a}\int\limits_0^a\left(1-\dfrac{t}{a}\right)\cos\dfrac{\pi kt}{a}dt=\dfrac{2}{\pi^2k^2}(1-\cos\pi k)\ge 0,\ k=1,2,\dots$. При $t=0$ получаем, что $1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k$, то есть $p_0,p_1,\dots,p_k,\dots$ являются вероятностями дискретного закона распределения с возможными значениями $x_0=0, x_k=\pm\dfrac{\pi k}{a}, k=\pm1,\pm2,\dots$.

3.2.26. а) да; б) нет; в) да; г) нет, так как в противном случае случайная величина X с такой характеристической функцией должна была бы иметь $\mathrm{M}X = -i\varphi'(0) = 0$ è $\mathrm{D}X = -\varphi''(0) = 0$, то есть $X = 0$ п.н.; д) да; е) да; ж) нет по той же причине, что и в п. г).

Замечание: Общий результат состоит в следующем: функция $\varphi(t)$, отличная от константы и такая, что $\varphi''(0) = 0$, не может быть характеристической.

3.2.27. а) и б) – не выполняется свойство характеристических функций $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$;

в) не выполняется свойство четности вещественной характеристической функции;

г) функция $\varphi(t)$ не является неотрицательно определенной, поскольку ее преобразование Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)e^{-itx}dt = \frac{2}{\pi x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

не является неотрицательной функцией при всех x и потому не может быть плотностью вероятностей;

3.2.28. Заметим, что $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ - характеристическая функция равномерного закона распределения на отрезке $[-1,1]$; $\varphi_1(t) = \dfrac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}$ - характеристическая функция равномерного закона распределения на отрезке $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; $\varphi_2(t) = \cos\frac{t}{2}$ - характеристическая функция дискретного закона распределения с возможными значениями $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, принимаемыми с равными вероятностями (см. задачу *3.2.7*). Поскольку $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$, то равенство в условии задачи означает, что равномерный закон распределения на отрезке

$[-1,1]$ может быть получен как композиция равномерного закона распределения на отрезке $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ и дискретного закона распределения с возможными значениями $-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$, принимаемыми с равными вероятностями.

3.2.29. Поскольку $\varphi_n(t)=\cos\frac{t}{2^k}$ - характеристическая функция дискретного закона распределения с возможными значениями $-\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^k}$, принимаемыми с равными вероятностями, то (см. задачу *3.2.28*) равенство в условии задачи означает, что равномерный закон распределения на отрезке $[-1,1]$ может быть получен как композиция счетного числа дискретных законов распределения с возможными значениями $-\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^k},k\ge 1$, принимаемыми с равными вероятностями.

3.2.30. $\varphi_{X_k}(t)=\cos t$, $\varphi_{Y_n}(t)=\prod\limits_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(a_k t)=\prod\limits_{k=1}^{n}\cos(a_k t)$.

При $a_k=\frac{1}{2^k}$ имеем:

$$\varphi_{Y_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2^n}}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{t}{2^k}\cdot 2\sin\frac{t}{2^n}\cos\frac{t}{2^n}=$$

$$=\frac{\sin\frac{t}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{t}{2^n}}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{t}{2^k}=\frac{\sin\frac{t}{2^{n-2}}}{4\sin\frac{t}{2^n}}\prod_{k=1}^{n-2}\cos\frac{t}{2^k}=\ldots=\frac{\sin t}{2^n\sin\frac{t}{2^n}}\to\frac{\sin t}{t},$$

то есть при $n\to\infty$ равномерно в любом конечном промежутке изменения t закон распределения случайной величины Y_n сходится на всей числовой прямой к равномерному закону распределения на отрезке $[-1,1]$.

3.2.31. По определению совместная характеристическая функция случайных величин Y_1 и Y_2 равна $\varphi_{Y_1Y_2}(t_1,t_2)=\mathrm{M}\,e^{i(t_1Y_1+t_2Y_2)}$. В данном случае

$$\varphi_{Y_1Y_2}\left(t_1,t_2\right)=\mathrm{M}e^{i[t_1(X_1+X_2)+t_2(X_1+X_3)]}=\mathrm{M}e^{i[(t_1+t_2)X_1+t_1X_2+t_2X_3)]}=$$

$$=\mathrm{M}e^{i[t_1(X_1+X_2)+t_2(X_1+X_3)]}=\mathrm{M}e^{i(t_1+t_2)X_1}\cdot\mathrm{M}e^{t_1X_2}\cdot\mathrm{M}e^{t_2X_3}=$$

$$=e^{-\frac{(t_1+t_2)^2}{2}-\frac{t_1^2}{2}-\frac{t_2^2}{2}}=e^{-(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)}.$$

3.2.32. Характеристическая функция нормального случайного вектора $(X_1,...,X_n)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционными моментами $\mathrm{M}X_iX_j=\mathrm{r}_{ij}$, $i,j=1,...,n$ имеет вид:

$$\varphi_{X_1,...,X_n}\left(t_1,...,t_n\right)=\mathrm{M}e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}t_kX_k}=e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}t_it_j\mathrm{r}_{ij}}.$$

По свойствам характеристической функции случайного вектора имеем:

а) $\mathrm{M}X_1X_2X_3X_4=i^4\left.\dfrac{\partial^4\varphi_{X_1X_2X_3X_4}(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3\partial t_4}\right|_{t_1=t_2=t_3=t_4=0}$.

В результате дифференцирования и подстановки $t_i=0,\ i=1,...,n$, получаем:

$$\mathrm{M}X_1X_2X_3X_4=r_{12}r_{34}+r_{13}r_{24}+r_{14}r_{23};$$

б) $\mathrm{M}X_1X_2X_3=i^3\left.\dfrac{\partial^3\varphi_{X_1X_2X_3}(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3}\right|_{t_1=t_2=t_3=0}=0$;

в) $\mathrm{M}(X_1X_2X_3)^2=i^6\left.\dfrac{\partial^6\varphi_{X_1X_2X_3}(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1^2\partial t_2^2\partial t_3^2}\right|_{t_1=t_2=t_3=0}=$

$$=8r_{12}r_{13}r_{23}+2(r_{12}^2+r_{13}^2+r_{23}^2)+1.$$

3.3. Предельные теоремы теории вероятностей

3.3.1. $\Phi(1,2)-\Phi(-1,2)=0,7699.$

3.3.2. $\Phi(3)-\Phi(-2)=0,9759.$

3.3.3. $n=450000.$

3.3.4. $\Delta=0,04.$

3.3.5. $(3361,\ 3639).$

3.3.6. $(-0,7436\,10^{-m/2},\ 0,7436\,10^{-m/2}).$

3.3.7.а)1/2; б) 0,0008.

3.3.8. $MX_k=0,\ DX_k=k^{\lambda},\ MX_k^{2+\delta}=k^{\lambda(1+\delta)}.$

Проверим условие Ляпунова:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} MX_k^{2+\delta}}{(\sum_{k=1}^{n} DX_k)^{1+\delta/2}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{\lambda(1+\delta)}}{(\sum_{k=1}^{n} k^{\lambda})^{1+\delta/2}} < \frac{\int_1^{n+1} x^{\lambda(1+\delta)}dx}{(\int_1^{n} x^{\lambda}dx)^{1+\delta/2}} < C\frac{(n+1)^{\lambda+\delta\lambda+1}}{n^{(\lambda+1)(1+\delta/2)}} = C\frac{(1+\frac{1}{n})^{\lambda+\delta\lambda+1}}{n^{(1-\lambda)\delta/2}} \to 0$$

при $n \to \infty$, т.к. $0 < \lambda < 1, \delta > 0,$ т.е. теорема Ляпунова применима.

3.3.9. а) $MX_k = 0, DX_k = k^{2\alpha}, M\left|X_k^{2+\delta}\right| = k^{\alpha(2+\delta)}$.

Проверим условие Ляпунова при $\delta = 1$:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} M\left|X_k^3\right|}{(\sum_{k=1}^{n} DX_k)^{3/2}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{3\alpha}}{(\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha})^{3/2}} < \frac{\int_1^{n+1} x^{3\alpha}dx}{(\int_1^{n} x^{2\alpha}dx)^{3/2}} = O(\frac{n^{3\alpha+1}}{n^{(2\alpha+1)3/2}}) = O(n^{-1/2}) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

если $\alpha > -1/2$. Следовательно, теорема Ляпунова имеет место.

б) При $\alpha < 1/2$ закон больших чисел имеет место на основании теоремы Маркова. При $\alpha \geq 1/2$ закон больших чисел неприменим (см. задачу *3.1.28*).

3.3.10. Характеристическая функция случайной величины X_n имеет вид (см. задачу 3.2.15) $\varphi_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-n}$. Поэтому характеристическая функция случайной величины $Y_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}X_n - \sqrt{n}$ равна $\varphi_{Y_n}(t) = e^{-it\sqrt{n}}\varphi_{X_n}\left(\frac{\alpha t}{\sqrt{n}}\right) =$ $= e^{-it\sqrt{n}}\left(1 - \frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$, т.е. $\ln\varphi_{Y_n}(t) = -it\sqrt{n} - n\ln\left(1 - \frac{it}{\sqrt{n}}\right)$. Пусть $t \in (-N, N)$, где N - любое конечное число. Считая $n > N^2$, разложим $\ln\left(1 - \frac{it}{\sqrt{n}}\right)$ в степенной ряд:

$$\ln\varphi_{Y_n}(t) = -it\sqrt{n} - n\left(-\frac{it}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{n} + \frac{it^3}{3n\sqrt{n}} - \ldots\right) = -\frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

т.е. при $n \to \infty$ $\ln\varphi_{Y_n}(t) \to -\frac{t^2}{2}$ равномерно в интервале $(-N, N)$. Следовательно, функция распределения Y_n сходится на всей числовой прямой к нормальному закону.

3.3.11. Производящая функция биномиальной случайной величины X имеет вид $p_X(z)=(q+pz)^n=(1+p(z-1))^n$. Пусть $s\in[0,1)$ и разложим $\ln p_X(z)$ в степенной ряд:

$$\ln p_X(z)=n\ln(1+p(s-1))=n(p(s-1)+\frac{p^2}{2}(s-1)^2+\ldots)=$$

$$=np(s-1)+n^2p^2\frac{1}{2n}(s-1)^2+\ldots$$

Из разложения видно, что при $n\to\infty$ и $np\to\lambda$ для любого $s\in[0,1)$ $\ln p_X(z)\to\lambda(s-1)$, т.е. $p_X(z)\to e^{\lambda(s-1)}$. Замечая, что $e^{\lambda(s-1)}$ есть производящая функция пуассоновского распределения с параметром λ, по теореме непрерывности для производящих функций имеем $C_n^k p^k q^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ при каждом $k\geq 0, n\to\infty$ и $np\to\lambda$.

3.3.12. Если $F_X(x)$ - функция распределения пуассоновской случайной величины X с параметром λ, то условие задачи можно переписать в виде $F_X(\lambda+b\sqrt{\lambda})-F_X(\lambda+a\sqrt{\lambda})\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}\Phi(b)-\Phi(a)$. Поэтому достаточно показать, что при $\lambda\to\infty$ для любого $x\in\mathbb{R}$ $F_X(\lambda+x\sqrt{\lambda})\to\Phi(x)$. Но поскольку $F_X(\lambda+x\sqrt{\lambda})$ есть функция распределения случайной величины $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$, то требуемое утверждение вытекает из примера 1 раздела 3.3.

3.3.13. Из теоремы непрерывности для характеристических функций следует, что соотношение $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}}C$ выполняется тогда и только тогда, когда $\varphi^n\left(\frac{t}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{itC}$, или, эквивалентно, $n\ln\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}itC$, где $\varphi(t)$ - характеристическая функция случайной величины X_k, $k\geq 1$. Откуда $\ln\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ или $\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$, причем сходимость при каждом фиксированном t является равномерной на конечных интервалах. Это означает, что в любом интервале $|t|<t_1$ для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\left|1-\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right|<1$. Тогда для таких больших n из разложения Тейлора функции $\ln(1-z)$ заключаем, что

$$n\ln\varphi\left(\frac{t}{n}\right)=n\ln\left[1-\left[1-\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]\right]=-n\left[1-\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]-\frac{n}{2}\left[1-\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^2-\ldots .$$

Отсюда следует, что для выполнения соотношения $\varphi^n\left(\frac{t}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{itC}$ необходимо и достаточно чтобы $n\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-1\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}itC$ (подробнее см. [12, т.2, гл. XVI]). Последнее соотношение эквивалентно тому, что $\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}\xrightarrow[h\to\infty]{}iC$, или $\varphi'(0)=iC$, что завершает доказательство.

Замечание. Из данной задачи следует, что закон больших чисел может выполняться также и для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, не имеющих математического ожидания. Это утверждение известно также как *обобщенный закон больших чисел* (см. подробнее [12, т.2, гл.VII]).

Если случайные величины имеют математическое ожидание $\mathrm{M}X_k=C$, то известно, что характеристическая функция $\varphi(t)$ случайной величины X_k, $k\geq 1$ имеет производную $\varphi'(t)$ и $\varphi'(t)=iC$. Обратное утверждение неверно.

3.3.14. а) Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2=\sigma^2<\infty$; $\varphi_k(t)=e^{-\frac{\sigma_k^2t^2}{2}}$ - характеристическая функция случайной величины X_k. Тогда

$$\varphi_{S_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(t)=e^{-\frac{t^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}},$$

т.е. предельный закон распределения S_n есть нормальный $N(0,\sigma^2)$.

б) Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2$ расходится, то не существует предельного распределения для S_n при $n\to\infty$.

3.3.15. а) $\mathrm{M}X_k=0$, $\mathrm{D}X_k=2^{2k}$.

$\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2^{2k}=\frac{1}{n^2}\frac{4}{3}\left(4^n-1\right)\to\infty$ при $n\to\infty$. То есть закон больших чисел не выполняется. ЦПТ не выполняется, так как последнее слагаемое в условии Линдеберга имеет порядок $B_n{}^2$.

б) $\mathrm{M}X_k=0$, $\mathrm{D}X_k=1$. Следовательно, закон больших чисел выполняется. ЦПТ не выполняется, поскольку условие асимптотической малости выполняется, а условие Линдеберга нет.

в) $\mathrm{M}X_k=0$, $\mathrm{D}X_k=k\sqrt{k}$, $\mathrm{M}X_k{}^{2+\delta}=k^{\frac{3}{2}+\delta}$.

Проверим условие Ляпунова.

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}X_k{}^{2+\delta}}{\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k\right)^{1+\frac{\delta}{2}}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{3}{2}+\delta}}{\left(\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{3}{2}}\right)^{1+\frac{\delta}{2}}}<\frac{\int_1^{n+1}x^{\frac{3}{2}+\delta}dx}{\left(\int_1^{n}x^{\frac{3}{2}}dx\right)^{1+\frac{\delta}{2}}}=C\frac{(n+1)^{\frac{5}{2}+\delta}}{n^{\frac{5}{2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}}=0\left(n^{-\frac{\delta}{4}}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Следовательно, ЦПТ выполняется. Поскольку $B_n{}^2 \sim 0\left(n^{\frac{\delta}{2}}\right)$ и ЦПТ выполняется, то $\mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right|<\varepsilon\right)<\mathrm{P}\left(\frac{1}{B_n}\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|<\varepsilon\right)\to\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, что при малом ε не стремится к 1, то есть закон больших чисел не выполняется.

3.3.17. $\mathrm{M}I_n=\mathrm{M}f\left(X_1,\ldots,X_m\right)=I$. $\mathrm{D}I_n=\frac{1}{n}\mathrm{D}f\left(X_1,\ldots,X_m\right)<\frac{C^2-I^2}{n}$.

$\sqrt{n}\left(I_n-I\right)\sim N\left(0,\mathrm{D}f\left(X_1,\ldots,X_m\right)\right)$.

3.3.18. $\mathrm{P}\left(\left|I_n - I\right| < 0{,}01\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}01}{\sqrt{\mathrm{D}X^2}}\sqrt{1000}\right) - 1$. При этом $\sqrt{\mathrm{D}X^2} = \sqrt{\mathrm{M}X^4 - \left(\mathrm{M}X^2\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{45}}$. Поэтому $\mathrm{P}\left(\left|I_n - I\right| < 0{,}01\right) = 2\Phi\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) - 1 \approx 0{,}711$.

3.3.19. $I = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}dx$. Оценкой интеграла I является сумма $I_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi X_i}{2}$, где случайные величины X_i имеют равномерное распределение на отрезке $[0{,}1]$, $\mathrm{M}I_n = \frac{\pi}{2}\mathrm{M}\left(\sin\frac{\pi X_i}{2}\right) = 1 = I$.

$$\mathrm{D}I_n = \frac{\pi^2}{4n}\mathrm{D}\left(\sin\frac{\pi X_i}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4n}\left[\mathrm{M}\left(\sin\frac{\pi X_i}{2}\right)^2 - \left(\mathrm{M}\sin\frac{\pi X_i}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi^2}{4n}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right) =$$

$= \frac{\pi^2 - 8}{8n} = \frac{1}{8n}I^2\left(\pi^2 - 8\right)$. Число опытов определяется из неравенства $2\Phi\left(\frac{0{,}001\cdot I}{\sqrt{\mathrm{D}I_n}}\right) - 1 \ge 0{,}99$, или $2\Phi\left(\frac{0{,}002}{\sqrt{\pi^2 - 8}}\sqrt{2n}\right) - 1 \ge 0{,}99$ откуда $n \ge 1499675$.

3.3.20. Пусть X_k - число людей, прошедших до продажи $k-20$ экземпляров газеты после продажи $k-1$ экземпляров. Тогда случайная величина $X = \sum_{k=1}^{100} X_k$, где X_k - независимые случайные величины, и для них имеет место геометрическое распределение $G\left(\frac{1}{3}\right)$. Поскольку $\mathrm{P}_{X_k}(z) = \frac{pz}{1-qz}$, то $\mathrm{P}_X(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^{100}$. При этом $\mathrm{M}X = \frac{m}{p}$, $\mathrm{D}X = \frac{mq}{p^2}$. Следовательно, случайная величина X имеет приближенный нормальный закон $N(300{,}600)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 2002.

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988.

5. Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: МГУ,1983.

6. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.

7. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.

8. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.

9. Розанов Ю.А. Лекции по теории вероятностей. М.: Наука, 1986.

10. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982.

11. Теория вероятностей. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: пер. с англ. 3-е изд. – М.: Мир, 1984, т. 1, 2.

13. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987.

14. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989.

Сборники задач

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. М.: Высшая школа, 1986.

2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 2002.

3. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: ЛГУ, 1967.

4. Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005.

5. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: МГУ, 1963.
6. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1986.
7. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Терия вероятностей и математическая статистика. / Под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1990.
8. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. / Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970.
9. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1982.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

Основные вероятностные распределения

Вид распределения	Обозначение	Параметры и область их изменения	Плотность распределения (дискретное распределение вероятностей)	Математическое ожидание и дисперсия
1	2	3	4	5
Равномерное	$R(a,b)$	$a,b \in R$, $a<b$	$\frac{1}{b-a}$, $0<x<b$	$\mathrm{M}\,X=\frac{a+b}{2}$; $\mathrm{D}\,X=\frac{(b-a)^2}{12}$
Нормальное (гауссовское)	$N(\mu,\sigma^2)$	$\mu \in R$, $\sigma>0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x \in R$	$\mathrm{M}\,X=\mu$; $\mathrm{D}\,X=\sigma^2$
Экспоненциальное (показательное)	$E(\lambda)$	$\lambda>0$	$\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x \ge 0$	$\mathrm{M}\,X=\frac{1}{\lambda}$; $\mathrm{D}\,X=\frac{1}{\lambda}$
Коши	$K(a,b)$	$a \in R$, $b>0$	$\frac{1}{\pi b\left(1+\frac{(x-a)^2}{b^2}\right)}$, $x \in R$	$\mathrm{M}\,X$ и $\mathrm{D}\,X$ не существуют
Лапласа	$EE(a,\lambda)$	$a \in R$, $\lambda>0$	$\frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda\lvert x-a\rvert)$, $x \in R$	$\mathrm{M}\,X=a$; $\mathrm{D}\,X=\frac{2}{\lambda^2}$
Логистическое	$l(a,\sigma)$	$a \in R$, $\sigma>0$, $k=\sqrt{3}\frac{\sigma}{\pi}$	$\frac{\exp\left(\frac{x-a}{k}\right)}{k\left(1+\exp\left(\frac{x-a}{k}\right)\right)^2}$, $x \in R$	$\mathrm{M}\,X=a$; $\mathrm{D}\,X=\sigma^2$
Логнормальное	$L(\mu,\sigma^2)$	$\mu \in R$, $\sigma>0$	$\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{x}{\mu}\right)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x \in R$	$\mathrm{M}X=\mu\sqrt{\omega}$, где $\omega=\exp(\sigma^2)$; $\mathrm{D}X=\mu^2\omega(\omega-1)$
Гамма-распределение	$\Gamma(\alpha,\lambda)$	$\alpha,\lambda>0$	$\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x)}{\Gamma(\alpha)}$	$\mathrm{M}\,X=\frac{\alpha}{\lambda}$; $\mathrm{D}\,X=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Окончание таблицы П1

1	2	3	4	5
Бета-распределение	$B(\upsilon,\omega)$	$\upsilon,\omega>0$	$\frac{\Gamma(\upsilon+\omega)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\omega)}x^{\upsilon-1}(1-x)^{\omega-1}$, $0\le x\le 1$	$\mathrm{M}X=\frac{\upsilon}{\upsilon+\omega}$; $\mathrm{D}X=\frac{\upsilon\omega}{(\upsilon+\omega)^2(\upsilon+\omega+1)}$
t-распределение Стьюдента	$S(n)$	n – целое, $n>0$	$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$	$\mathrm{M}\,X=0$, $\mathrm{D}\,X=\frac{n}{n-2}$, если n>2
χ^2-распределение	$\chi^2(n)$	n – целое, $n>0$	$\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $x\ge 0$	$\mathrm{M}\,X=n$, $\mathrm{D}\,X=2n$
Бернулли	$Bi(1,p)$	$0\le p\le 1$	$p^x(1-p)^{1-x}$, $x\in\{0,1\}$	$\mathrm{M}\,X=p$, $\mathrm{D}\,X=p(1-p)$
Биномиальное	$Bi(N,p)$	N – натуральное, $0\le p\le 1$	$C_N^x p^x(1-p)^{N-x}$, $x\in\{0,1,\dots,N\}$	$\mathrm{M}\,X=Np$, $\mathrm{D}\,X=Np(1-p)$
Гипер-геометрическое	$H(N,M,n)$	N,M,n – натуральные, $M<n$	$\frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$, $x\in\{0,1,\dots,M\}$	$\mathrm{M}\,X=Np$, $\mathrm{D}\,X=Np(1-p)$
Пуассона	$\Pi(\lambda)$	$\lambda>0$	$\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}$, $x\in\{0,1,\dots\}$	$\mathrm{M}\,X=\lambda$; $\mathrm{D}\,X=\lambda$
Геометрическое	$G(p)$	$0\le p\le 1$	$p(1-p)^x$, $x\in\{0,1,2,\dots\}$	$\mathrm{M}\,X=\frac{1-p}{p}$; $\mathrm{D}\,X=\frac{1-p}{p^2}$
Отрицательное биномиальное	$\overline{Bi}(r,p)$	r – натуральное, $0\le p\le 1$	$C_{x+r-1}^x p^r(1-p)^x$, $x\in\{0,1,2,\dots\}$	$\mathrm{M}\,X=\frac{1-p}{p}$; $\mathrm{D}\,X=\frac{r(1-p)}{p^2}$

Таблица П2

Нормальное распределение

Квантили распределения c_p : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{c_p} \exp(-\frac{x^2}{2})\, dx = p$.

p	c_p	p	c_p	p	c_p
0,50	0.000	0,860	1,080	0,9910	2,366
0,55	0,126	0,870	1,126	0,9920	2,409
0,60	0,253	0,880	1,175	0,9930	2,457
0,65	0,385	0,890	1,227	0,9940	2,512
0.70	0,524	0,900	1,282	0,9950	2,576
0,75	0,674	0,910	1,341	0,9955	2,612
0,76	0,706	0,920	1,405	0,9960	2,652
0,77	0,739	0,930	1.476	0,9965	2,697
0,78	0,772	0,940	1,555	0,9970	2,748
0,79	0,806	0,950	1,645	0,9975	2,807
0,80	0,842	0,960	1,751	0,9980	2,878
0,81	0,878	0,970	1,881	0,9985	2,968
0,82	0,915	0,975	1,960	0,9990	3,090
0,83	0,954	0,980	2,051	0,9995	3,291
0,84	0,994	0,985	2,170	0,9999	3,720
0,85	1,036	0,990	2,326	0,99999	4,265

Примечание. Если $0<p<0.5$, то $c_p = -c_{1-p}$.

Таблица П3

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица П4

Таблица значений функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, $(\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x))$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38289
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	0,47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966	
3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995	
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

Таблица П5

Таблица значений функции $P_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070
6					0,00001	0,00004	0,00008
7							0,00001

k \ λ	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,44933	0,40657	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,35946	0,36591	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,14379	0,16466	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,03834	0,04940	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,00767	0,01112	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00123	0,00200	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00016	0,00030	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00002	0,00004	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8			0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9				0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10				0,00004	0,00081	0,00529	0,01818
11				0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12					0,00006	0,00064	0,00343
13					0,00001	0,00020	0,00132
14						0,00006	0,00047
15						0,00002	0,00016
16							0,00005
17							0,00001

Таблица П6

Таблица значений функции $\sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,995321	0,982477	0,963063	0,938448	0,909796	0,878099
2	0,999845	0,998852	0,996390	0,992074	0,985612	0,977885
3	0,999996	0,999943	0,999724	0,999224	0,998248	0,997642
4	1,000000	0,999998	0,999974	0,999939	0,999828	0,999606
5	1,000000	1,000000	0,999999	0,999996	0,999986	0,999962
6	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999997
7	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

k \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,844195	0,808792	0,772483	0,735759	0,406006	0,199148
2	0,965858	0,952577	0,937144	0,919699	0,676677	0,423190
3	0,994246	0,990920	0,988542	0,981012	0,857124	0,647232
4	0,999214	0,998589	0,997657	0,996340	0,947348	0,815263
5	0,999909	0,999816	0,999658	0,999406	0,983437	0,916082
6	0,999990	0,999980	0,999958	0,999917	0,995467	0,966491
7	0,999998	0,999999	0,999997	0,999990	0,998904	0,988095
8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999763	0,996196
9				1,000000	0,999954	0,998897
10					0,999992	0,999707
11					0,999999	0,999928
12					1,000000	0,999983
13						0,999996
14						0,999999
15						1,000000

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

Коломиец Эдуард Иванович, Дегтярев Александр Александрович

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Редакторская обработка *Н.С. Куприянова*
Корректорская обработка *Т.Ю. Депцова*
Доверстка *Т.Ю. Депцова, А.А. Нечитайло*

Подписано в печать 28.12.06. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 14,18. Усл. кр.-отт. 14,30 Печ. л. 15,25
Тираж 50 экз. Заказ . ИП-35/2006

Самарский государственный аэрокосмический
университет им. академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.