

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королева»  
(национальный исследовательский университет)

**С.П.Безгласный**

**СТАБИЛИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*Электронное учебное пособие*

Самара, 2010

Автор: Безгласный Сергей Павлович – доцент кафедры теоретической механики, кандидат физико-математических наук, доцент.

Приводятся краткие сведения по теории и практические рекомендации по решению прикладных задач по курсу «Стабилизация и управление движением динамических систем». Освещены основные вопросы из теории устойчивости, теории математического управления, теории построения и стабилизации программных движений механических систем. Приведены решения примеров и прикладных задач о построении и стабилизации программных движений математического маятника и твердого тела на подвижной платформе, двойного математического маятника и маятника на вращающемся основании.

Пособие предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению 010800.68 «Механика математическое моделирование» в рамках магистерской программы «Математическое и компьютерное моделирование механики космических систем».

Работа выполнена на кафедре теоретической механики.

Ил. 37. Табл. 6. Библиогр.: 29 назв.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	6
1.1 Построение уравнений движения системы в виде уравнений Лагранжа второго рода	6
1.2 Пример построения уравнений Лагранжа второго рода для механической системы	7
1.3 Определение стационарных движений механической системы	9
1.4 Определение стационарных движений маятника	11
1.5 Вывод уравнений возмущённого движения механической системы	12
1.6 Уравнения возмущенного движения маятника и уравнения первого приближения	15
2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	16
2.1 Исследование устойчивости движения по уравнениям первого приближения	16
2.2 Исследование устойчивости движения маятника по уравнениям первого приближения	18
2.3 Исследование устойчивости движения с помощью функции Ляпунова	24
2.4 Исследование устойчивости движения маятника с помощью функции Ляпунова	27
2.5 Исследование устойчивости движения методом Рауса	33
2.6 Исследование устойчивости стационарных движений маятника методом Рауса	39
3. ПОСТРОЕНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	46
3.1 Математическая модель управляемого движущегося объекта	49
3.2 Пример построения программного движения для маятника	51
3.3 Уравнения в отклонениях и постановка задач линейного синтеза позиционного управления	54
3.4 Управляемость и стабилизируемость линейных стационарных систем	57
3.5 Построение стабилизирующего управления для программного движения маятника	63
3.6 Стабилизация неустойчивых стационарных движений маятника	70
4. СИНТЕЗ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМЫ	77
4.1 Постановка задачи	77
4.2 Основные теоремы о стабилизирующем управлении	83
4.3 Стабилизация программных движений твердого тела на подвижной основе	84
4.4 Синтез и стабилизация программных движений маятника	95
Заключение	100
Список литературы	101

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение теоретической механики как одной из фундаментальных физико-математических дисциплин играет важную роль в подготовке специалистов по механико-математическим и инженерным механическим направлениям. Теория устойчивости и управления движения представляет собой один из важнейших разделов теоретической механики. Методы теории устойчивости и математической теории управления являются математически строгими, универсальными и находят широкое применение при анализе различных технических задач. Значительный прогресс в развитии автоматического регулирования, в исследовании динамики роторных и гироскопических систем, летательных и космических аппаратов и так далее был, в частности, достигнут благодаря использованию методов теории устойчивости и управления.

Изучение поведения и конструирование систем управления, обладающих требуемыми в приложениях свойствами, является ключевой задачей теории управления. При этом на первый план выдвигаются такие свойства систем, как устойчивость, оптимальность, поведение в присутствии неопределенных помех и т. д.

Аналитические методы построения систем программного движения составляют основу построения (синтеза) материальных систем, движения которых происходит с заданными конструктивно обоснованными геометрико - кинематическими свойствами, устойчиво и оптимально в том или ином смысле. Программное движение систем различной физической природы или конструкции может быть осуществлено приложением к системе дополнительных сил (управляющих моментов) или изменением параметров системы в процессе движения, или построением специальных управляющих устройств (регуляторов), а также сочетанием этих возможностей.

Исходными задачами теории управления о стабилизации движения, в частности систем программного движения, являются обратные задачи классической динамики.

В настоящее время понятие обратных задач динамики приобретает более широкое содержание: ставятся и решаются задачи об осуществимости, об устойчивости и оптимальности заданного движения механической системы, а также задачи об определении функционалов, принимающих стационарное значение на заданном движении.

Обратными задачами динамики называются задачи определения активных сил и моментов, приложенных к механической системе, параметров системы и дополнительно наложенных на неё связей, при которых движение с заданными свойствами является одним из возможных движений рассматриваемой механической системы.

Постановкам возможных вариантов обратных задач динамики и установлению методики решения этих задач посвящена обширная библиография. В данной монографии рассмотрены некоторые конкретные

обратные задачи динамики точки и тела и также задачи по управлению их движением.

Наличие динамической аналогии между движениями систем различной физической природы позволяет распространить результаты решений обратных задач динамики с механическим содержанием на процессы иной физической природы. Таким образом, задачи классической динамики становятся своего рода исходными и направляющими задачами теории управления движениями материальных систем различной физической природы и конструкции.

Среди проблем теории управления одно из главных мест занимает задача о синтезе и стабилизации программного движения. Под программным движением в данной работе будем понимать некоторое заданное движение механической системы, которое в общем случае может не являться решением уравнений движения исследуемой системы. Под задачей о стабилизации программного движения в самом общем смысле понимают задачу о построении воздействий, обеспечивающих асимптотическую устойчивость произвольно заданного программного движения.

Освоению методов теории устойчивости и управления движения способствует разбор специальных задач, которые иллюстрируют соответствующие разделы курса теории управления и ее роль при анализе динамики механических систем. Для закрепления навыков самостоятельного решения задач механики в соответствии с учебными программами вузов в десятом семестре магистранты механических специальностей выполняют курсовую работу, в которой проводится синтез, комплексный анализ устойчивости и стабилизация свободных и программных движений системы с двумя степенями свободы на основе различных методов теории устойчивости и управления.

# 1. ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Первая часть пособия посвящена выводу уравнений движения системы и анализу их решений на устойчивость. Приведем ряд основных теоретических вопросов теории устойчивости и пример их практического применения для механической системы с двумя степенями свободы.

## 1.1 ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ В ВИДЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим механическую систему с голономными связями, находящуюся под действием потенциальных сил. Тогда положение системы определяется независимыми параметрами  $q_1, \dots, q_n$ , называемыми обобщёнными координатами, число которых  $n$  равно числу степеней свободы системы. Одним из наиболее удобных приемов составления уравнений движения механических систем является построение уравнений Лагранжа второго рода, имеющих вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1..n), \quad (1.1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы,  $q_j$ ,  $\dot{q}_j$  – обобщённые координаты и скорости соответственно,  $Q_j$  – обобщённые силы,  $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$  ( $\Pi$  – потенциальная энергия системы).

Система (1.1) имеет общий порядок  $2n$  и представляет собой систему  $n$  уравнений второго порядка относительно  $n$  функций  $q_j(t)$ . Известно, что от выбора обобщённых координат форма этих уравнений не зависит, а зависит только вид функций  $T$  и  $Q_j$ , поэтому говорят, что уравнения Лагранжа второго рода обладают свойством ковариантности.

Уравнения движения в виде уравнений Лагранжа составляются следующим образом:

1. Определяется число степеней свободы механической системы.
2. Выбираются обобщённые координаты, однозначно и наиболее удобным образом определяющие положение системы в пространстве.
3. Выписывается кинетическая энергия как функция от величин  $q_j, \dot{q}_j$ .
4. Находятся обобщённые силы  $Q_j$ , соответствующие обобщённым координатам  $q_j$ .
5. Согласно (1.1) вычисляются соответствующие производные от кинетической энергии и составляются сами уравнения движения.

Рассмотрим пример построения уравнений движения для механической системы с двумя степенями свободы в виде уравнений Лагранжа второго рода.

## 1.2 ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему, состоящую из физического маятника в виде диска массы  $m$  и радиуса  $R$  на стержне, подвешенного с помощью универсального шарнира  $O$  к вертикальной оси. Маятник имеет две степени свободы – он может вращаться с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$  вокруг вертикальной оси и может отклоняться от нее на угол  $\theta$ .  $A$  и  $C$  – главные моменты инерции маятника относительно главных центральных осей инерции  $\xi$  и  $\zeta$ ;  $h$  ( $h > \frac{R}{2}$ ) – расстояние центра тяжести маятника от шарнира.

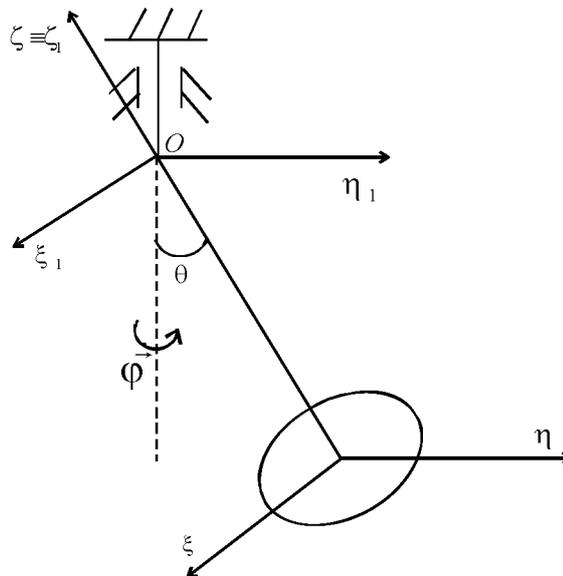


Рис.1 Механическая система

В качестве обобщенных координат удобно выбрать величины  $\varphi, \theta$ . Найдём кинетическую и потенциальную энергии системы как функции выбранных обобщенных координат и обобщенных скоростей. Для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}(A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2)$$

определим осевые моменты инерции  $A_1, B_1$  и  $C_1$  относительно осей  $\xi_1, \eta_1$  и  $\zeta_1$  по теореме Штейнера:

$$A_1 = A + mh^2, B_1 = A + mh^2, C_1 = C.$$

Учитывая составляющие угловой скорости

$$p = \dot{\theta}, q = \dot{\varphi} \sin \theta, r = \dot{\varphi} \cos \theta,$$

запишем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}(A + mh^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(A + mh^2)\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}C\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta . \quad (1.2)$$

Потенциальная энергия маятника равна

$$\Pi = -mgh \cos \theta . \quad (1.3)$$

Составим уравнения движения маятника с помощью уравнений Лагранжа второго рода. В выбранных координатах  $\varphi, \theta$  они принимают вид :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} \end{cases} \quad (1.4)$$

Вычислим производные от кинетической энергии и обобщенные силы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= (A + mh^2)\ddot{\theta} , \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= (A - C + mh^2)\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta , \\ Q_{\theta} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = -mgh \sin \theta , \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \left[ (A + mh^2) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta \right] \ddot{\varphi} + 2(A - C + mh^2)\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta , \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0 , \\ Q_{\varphi} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 . \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (1.4), получим:

$$\begin{cases} (A + mh^2)\ddot{\theta} - (A - C + mh^2)\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta = -mgh \sin \theta \\ \left[ (A + mh^2) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta \right] \ddot{\varphi} + 2(A - C + mh^2)\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Полученная система представляет собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно величин  $\varphi, \theta$  и тем самым имеет общий порядок, равный 4.



Существует более удобный способ отыскания положений равновесия системы, основанный на том факте, что положения равновесия являются одними из стационарных движений механической системы.

Пусть система (1.6) допускает не зависящие от времени и дважды непрерывно дифференцируемые по входящим в них переменным первые интегралы

$$U_0(y_1, \dots, y_n) = c_0, U_1(y_1, \dots, y_n) = c_1, \dots, U_m(y_1, \dots, y_n) = c_m \quad (m < n-1),$$

где  $c_0, c_1, \dots, c_m$  - произвольные постоянные. Самым общим определением стационарных движений склерономной системы согласно Раусу является следующее [3]:

#### Определение

Если один из интегралов системы  $U_0(y_1, \dots, y_n) = c_0$  принимает невырожденное стационарное значение при фиксированных значениях постоянных  $c_1, \dots, c_m$  других интегралов на решении  $y_1, \dots, y_n$ , то соответствующее этому решению движение называется **стационарным**.

При различных значениях постоянных  $c_1, \dots, c_m$ , доставляющих интегралу  $U_0(y_1, \dots, y_n) = c_0$  стационарное значение, будем иметь вообще говоря различные стационарные движения, зависящие от этих постоянных. Это значит, что стационарные движения образуют в пространстве  $R^n \times R^m$  ( $y \in R^n, c \in R^m$ ) некоторое семейство стационарных движений. Кроме того, при одних и тех же значениях постоянных  $c_1, \dots, c_m$  разным значениям  $c_0$  будут соответствовать разные стационарные движения (тоже зависящие от  $c_1, \dots, c_m$ ), то есть они тоже образуют семейства.

Пусть для механической системы с голономными связями среди обобщённых координат есть такие, которые явным образом не входят в выражение для кинетической энергии, а обобщённые силы, отвечающие этим координатам, равны нулю. Такие координаты называются циклическими, а соответствующие им скорости - циклическими скоростями. Все остальные обобщённые координаты называются позиционными, и им соответствуют позиционные скорости. При наличии в системе циклических координат, как следствие получаем более простое и распространенное определение [8]:

#### Определение

Движения механической системы, для которых все позиционные координаты и циклические скорости сохраняют постоянные значения, называются **стационарными движениями**.

Итак, стационарные движения механической системы будем определять следующим образом:

1. Выясняется наличие в системе циклических координат.
2. Согласно определению циклические скорости и позиционные координаты приравниваются к константам и подставляются в уравнения движения.
3. Ищутся все решения полученной системы уравнений.

Рассмотрим пример определения стационарного движения механической системы.

#### 1.4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА

Разрешив уравнения (1.5) относительно вторых производных, получим:

$$\ddot{\theta} = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta - \frac{mgh}{A+mh^2} \sin \theta \quad (1.7)$$

$$\ddot{\varphi} = -2 \frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2) \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta} \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta$$

Для получения стационарного движения согласно определению сделаем подстановку  $\theta = const = \alpha$  (тогда  $\dot{\theta} = 0$ ),  $\dot{\varphi} = \omega = const$ . Тогда система (1.7) примет вид

$$\begin{cases} \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha - \frac{mgh}{A+mh^2} \sin \alpha = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Решая уравнение (1.8), рассмотрим два случая:

1.  $\sin \alpha = 0$ , откуда  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$ .
2.  $\frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} \omega^2 \cos \alpha - \frac{mgh}{A+mh^2} = 0$ .

Найдём решения этого уравнения. Для этого выразим  $\cos \alpha$  через  $\omega$  и учтём, что  $|\cos \alpha| \leq 1$ . Сделав все преобразования, получим, что при выполнении условия

$$\left| \frac{mgh}{(A-C+mh^2)\omega^2} \right| \leq 1 \quad (1.9)$$

( то есть с учётом численных значений параметров системы  $\omega \geq 2,287$  ) существуют решения

$$\alpha = \pm \arccos \frac{mgh}{(A-C+mh^2)\omega^2} \quad (1.10)$$

Множество всех решений уравнения (1.8) изображено на рисунке 2.

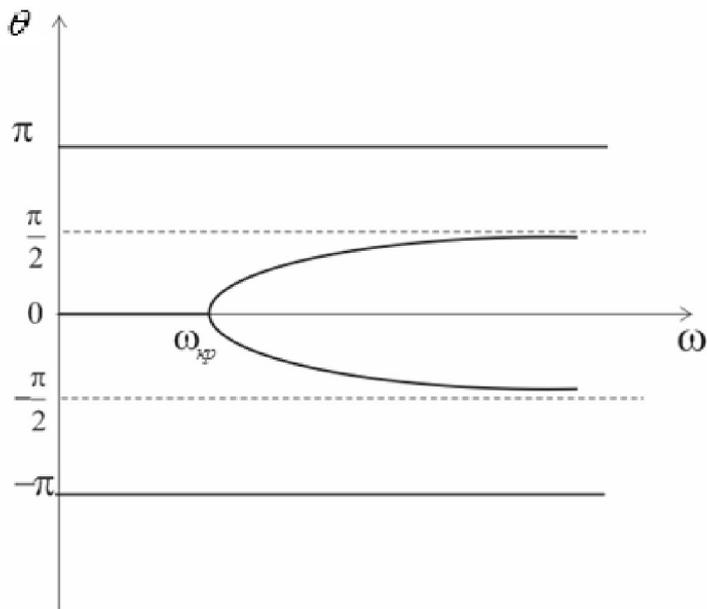


Рис. 2 Множество стационарных движений системы

Точки прямой  $\alpha = 0$  соответствуют вращениям маятника с различными угловыми скоростями вокруг вертикальной оси в наинизшем его положении. Точки прямых  $\alpha = \pm\pi$  изображают одни и те же движения - вращения маятника с различными угловыми скоростями вокруг вертикальной оси, но в наивысшем его положении. Точки кривых  $\alpha = \pm \arccos \frac{mgh}{(A - C + mh^2)\omega^2}$  обозначают вращения маятника с различными угловыми скоростями  $\omega > \omega_{кр}$  вокруг вертикальной оси при соответствующем постоянном угле отклонения оси маятника от вертикали.

### 1.5. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЁННОГО ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим склерономную механическую систему, поведение которой описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме, то есть системой (1.6) со всеми сделанными ранее предположениями. Напомним, что **невозмущенным движением** называется некоторое вполне определенное движение механической системы, которому соответствует частное решение

$$\begin{cases} \tilde{y}_1(t) = f_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{y}_n(t) = f_n(t) \end{cases} \quad (1.11)$$



$$X_i(x_1, \dots, x_n) = p_{i1}x_1 + \dots + p_{in}x_n + X_i^*(x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, \dots, n),$$

тогда дифференциальные уравнения невозмущённого движения примут вид

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + \dots + p_{in}x_n + X_i^*(x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, \dots, n), \quad (1.14)$$

где  $p_{ir}$  - постоянные,  $X_i^*(x_1, \dots, x_n)$  - аналитические функции  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , начинающиеся в своих разложениях с членов не ниже второго порядка.

Соответственно, уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + \dots + p_{in}x_n \quad (i=1, \dots, n), \quad (1.15)$$

называются **уравнениями первого приближения** для системы (1.13).

Итак, для построения уравнений возмущённого движения механической системы и уравнений их первого приближения необходимо:

1. Разрешить уравнения Лагранжа второго рода относительно ускорений.
2. Выбрать переменные  $y_1, \dots, y_n$  и записать уравнения движения в нормальной форме, то есть в виде системы (1.6).
3. Выбрать невозмущённое движение (1.11), подлежащее исследованию на устойчивость, и ввести соответствующие отклонения  $x_k(t) = y_k(t) - f_k(t)$ .

4. Выразить через полученные отклонения функции

$$X_i(x_1, \dots, x_n) = Y_i(x_1 + f_1(t), \dots, x_n + f_n(t)) - Y_i(f_1(t), \dots, f_n(t))$$

и записать систему уравнений возмущённого движения (1.13).

5. Разложить функции  $X_i(x_1, \dots, x_n)$  в ряд по степеням переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

6. Отбросить в разложениях члены не ниже второго порядка малости и записать уравнения линейного приближения в виде системы (1.15).

Рассмотрим пример построения уравнений возмущённого движения механической системы и уравнений их первого приближения.

## 1.6. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЁННОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА И УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Воспользуемся системой (1.7), представляющей собой уравнения движения маятника, разрешенные относительно обобщенных ускорений и запишем ее в нормальном виде. Для этого введём обозначения

$$\begin{cases} y_1 = \theta, \\ y_2 = \dot{\theta}, \\ y_3 = \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Уравнения движения в параметрах (1.16) запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} y_3^2 \sin y_1 \cos y_1 - \frac{mgh}{A+mh^2} \sin y_1 \\ \dot{y}_3 = -2 \frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2) \sin^2 y_1 + C \cos^2 y_1} y_2 y_3 \cos y_1 \sin y_1 \end{cases} \quad (1.17)$$

В качестве исследуемого невозмущенного движения возьмем полученные в пункте 1.4 стационарные движения  $\theta = const = \alpha$ ,  $\dot{\varphi} = \omega = const$ . Поэтому при составлении уравнений возмущенного движения определим отклонения равенствами:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \alpha \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 + \omega \end{cases} \quad (1.18)$$

Перейдём от уравнений (1.17) к уравнениям в отклонениях:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} (\omega + x_3)^2 \sin(\alpha + x_1) \cos(\alpha + x_1) - \frac{mgh}{A+mh^2} \sin(\alpha + x_1) \\ \dot{x}_3 = -2 \frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2) \sin^2(\alpha + x_1) + C \cos^2(\alpha + x_1)} x_2 (\omega + x_3) \cos(\alpha + x_1) \sin(\alpha + x_1) \end{cases} \quad (1.19)$$

Система (1.19) – уравнения возмущенного движения маятника.

Получим для уравнений возмущенного движения уравнения первого приближения. Для этого разложим правые части уравнений системы (1.19) в ряд по степеням отклонений в окрестности невозмущенного движения и оставим члены лишь только первого порядка.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{A-C+mh^2}{2(A+mh^2)} \omega^2 \sin 2\alpha - \frac{mgh}{A+mh^2} \sin \alpha + \\ + x_1 \left( \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} (\omega^2 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha) - \frac{mgh}{A+mh^2} \cos \alpha \right) \\ \dot{x}_3 = - \frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2) \sin^2 \alpha + C \cos^2 \alpha} x_2 \omega \sin 2\alpha \end{cases} \quad (1.20)$$

С учётом (1.8) получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} (\sin 2\alpha - \omega^2 \sin^2 \alpha) x_1 \\ \dot{x}_3 = \frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2) \sin^2 \alpha + C \cos^2 \alpha} x_2 \omega \sin 2\alpha \end{cases} \quad (1.21)$$

Полученные уравнения (1.21) являются уравнениями первого приближения в общем виде, то есть соответствуют уравнениям возмущенного движения в окрестности невозмущенного движения  $\theta = const = \alpha$ ,  $\dot{\varphi} = \omega = const$ .

Рассмотрим отдельно стационарные движения, соответствующие положениям  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$ .

Разложим правые части (1.19) в ряд по степеням отклонений и оставим члены лишь только первого порядка, учитывая, что  $\alpha = 0$ , получим уравнения первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \left( \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} \omega^2 - \frac{mgh}{A+mh^2} \right) x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Рассмотрим теперь положение  $\alpha = \pi$ . Разложив правые части (1.19) в ряд по степеням отклонений и оставив члены лишь только первого порядка, получим при  $\alpha = \pi$  уравнения первого приближения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \left( \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} \omega^2 + \frac{mgh}{A+mh^2} \right) x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Аналогично составляются уравнения первого приближения для стационарных движений (1.10).

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Во второй части пособия исследуется устойчивость стационарных движений механической системы на основе классических методов теории устойчивости, а именно:

- по первому приближению;
- с помощью функции Ляпунова;
- методом Рауса.

Поставим цель: провести комплексное исследование устойчивости стационарных движений механической системы с двумя степенями свободы, продемонстрировав взаимосвязь, различия и взаимодополняемость разных методов теории устойчивости.

### 2.1. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПО УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Пусть уравнения возмущенного движения рассматриваемой системы имеют вид (1.13) относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , допускают частное решение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \quad (2.1)$$

а функции  $X_i(x_1, \dots, x_n)$  в заданной области

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < H, \quad (2.2)$$

где  $H$  – заданная положительная постоянная, непрерывны и удовлетворяют условиям существования и единственности решений для каждого набора начальных при  $t = t_0$  значений  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$  величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , лежащих в области (2.2).

#### Определение

Если при всяком произвольно задаваемом положительном числе  $A$  ( $A < H$ ), как бы мало оно ни было, можно найти такое положительное число  $\lambda$ , что при всяких начальных возмущениях  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ , удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 < \lambda, \quad (2.3)$$

и при любом  $t \geq t_0$  будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < A, \quad (2.4)$$

то невозмущённое движение  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  устойчиво по отношению к величинам  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , в противном случае – неустойчиво.

### Определение

Если возмущённое движение устойчиво и можно указать такое число  $\lambda$ , что для всех возмущённых движений, удовлетворяющих неравенству (2.3), выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^2(t) = 0, \quad (2.6)$$

то невозмущённое движение (2.1) называется асимптотически устойчивым по отношению к величинам  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Пусть уравнения (1.13) представимы в виде (1.14). Рассмотрим уравнения (1.15), являющиеся уравнениями первого приближения для системы (1.13) и соответствующие уравнениям возмущенного движения в окрестности невозмущенного движения (2.1). Уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & \dots & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0 \quad (2.7)$$

называется характеристическим уравнением первого приближения.

### Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Если вещественные части всех корней  $\lambda_i$  характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущённое движение (2.1) асимптотически устойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости  $X_i^*$ .

### Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

Если среди корней  $\lambda_i$  характеристического уравнения первого приближения имеется по крайней мере один с положительной вещественной частью, то невозмущённое движение (2.1) неустойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости  $X_i^*$ .

Случай, когда характеристическое уравнение не имеет корней с положительными вещественными частями, но имеет корни с вещественными частями, равными нулю, называют критическим. В таких случаях устойчивость и неустойчивость не может быть установлена рассмотрением уравнений первого приближения и требуют дополнительного исследования другими методами. Если при этом имеется возможность управлять видом функций  $X_i^*$ , стоящих в правых частях уравнений (1.14), то их всегда можно

выбрать так, чтобы имела место устойчивость или неустойчивость, по желанию.

Итак, для исследования устойчивости решений по первому приближению необходимо:

1. Для различных стационарных движений составить по уравнениям первого приближения соответствующие характеристические уравнения.
2. Решить полученные уравнения.
3. Провести анализ корней характеристических уравнений и получить соответствующие условия устойчивости или неустойчивости исследуемых стационарных движений.
4. Провести с помощью компьютера численное интегрирование уравнений возмущенного движения и проиллюстрировать графически полученные результаты.

Рассмотрим пример исследования устойчивости движения системы по уравнениям первого приближения.

## 2.2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА ПО УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим систему (1.19), представляющую собой уравнения возмущенного движения маятника, и исследуем устойчивость её движения по уравнениям первого приближения. Уравнения первого приближения (1.21) исследуемой системы были получены ранее и имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} (\sin 2\alpha - \omega^2 \sin^2 \alpha) x_1 \\ \dot{x}_3 = \frac{C-A-mh^2}{(A+mh^2)\sin^2 \alpha + C \cos^2 \alpha} x_2 \omega \sin 2\alpha \end{cases}$$

Для удобства записи характеристического уравнения обозначим:

$$\begin{cases} M = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} (\sin 2\alpha - \omega^2 \sin^2 \alpha) \\ N = \frac{C-A+mh^2}{(A+mh^2)\sin^2 \alpha + C \cos^2 \alpha} \omega \sin 2\alpha \end{cases}$$

Тогда характеристическое уравнение системы примет вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ M & -\lambda & 0 \\ 0 & N & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

и нетрудно вычислить его корни  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{M}$

Рассмотрим отдельно два стационарных положения  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$ .

Для положения  $\alpha = 0$  уравнения первого приближения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \left( \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} \omega^2 - \frac{mgh}{A+mh^2} \right) x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Обозначив

$$\frac{\omega^2(A-C+mh^2) - mgh}{A+mh^2} = D,$$

составим соответствующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ D & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

и найдем его корни  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{D}$ .

Вид двух полученных решений  $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{D}$  зависит от знака подкоренного выражения  $D$ . Если оно положительно, а это имеет место при выполнении неравенства

$$\omega > \sqrt{\frac{mgh}{(A-C+mh^2)}}, \quad (2.8)$$

то все три корня характеристического уравнения суть действительные числа, причем среди них есть действительный положительный корень  $\lambda_2 = \sqrt{D}$ . Поэтому на основе утверждения теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению можно сделать вывод о том, что стационарное движение маятника  $\alpha = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \omega = const$ , соответствующее его равномерному собственному вращению вокруг вертикальной оси в наинижем положении, неустойчиво при вращениях с угловыми скоростями, удовлетворяющими условию (2.8)

Если выражение  $D$  имеет отрицательное значение, то есть

$$\frac{\omega^2(A-C+mh^2)-mgh}{A+mh^2} < 0$$

или

$$0 < \omega < \sqrt{\frac{mgh}{(A-C+mh^2)}}, \quad (2.9)$$

то все три корня характеристического уравнения имеют вещественные части, равные нулю, и на основе вышеизложенных теорем вывода об устойчивости или неустойчивости соответствующих стационарных движений сделать нельзя. Поэтому вращения маятника с угловыми скоростями, удовлетворяющими неравенству (2.9), требуют дополнительного исследования.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\alpha = \pi$ .

Для стационарных движений  $\alpha = \pi$  уравнения первого приближения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \left( \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} \omega^2 + \frac{mgh}{A+mh^2} \right) x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Опять, обозначив для удобства

$$\frac{\omega^2(A-C+mh^2)+mgh}{A+mh^2} = P,$$

составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ P & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

и найдем его решения  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{P}$

При выполнении условия  $h > 0.5R$  знак подкоренного выражения  $P$  положителен и не зависит от значения угловой скорости  $\omega$ , поэтому один из корней характеристического уравнения будет положительным, и по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению в положении  $\alpha = \pi$  вращения маятника неустойчивы при любых значениях угловой скорости  $\omega$ .

Аналогично исследовав стационарное движение (1.10), нетрудно получить, что все три корня соответствующего характеристического уравнения будут иметь нулевые действительные части (критический случай),

поэтому по уравнениям первого приближения вывода об устойчивости или неустойчивости стационарных движений

$$\alpha = \pm \arccos \frac{mgh}{(A - C + mh^2)\omega^2}, \quad \dot{\phi} = \omega = const$$

сделать нельзя, и этот случай требует дополнительного исследования другими методами.

Проиллюстрируем полученные в этой части работы результаты графически.

Найдём численные значения корней  $\lambda_i$  соответствующих характеристических уравнений для стационарных вращений с различной угловой скоростью и при различных значениях  $\alpha$  и запишем итоговые результаты в виде таблицы.

Таблица 1

$\alpha$ рад	$\omega$ , рад/с	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Движение
0	5	0	4.176	-4.176	Неустойчивое
0	2	0	1.043i	-1.043i	Критический случай
1.36	5	0	1.758i	-1.758i	Критический случай
3.14	5	0	5.165	-5.165	Неустойчивое

Итак, при исследовании устойчивости по первому приближению стационарных движений можно сделать следующие выводы. Вертикальные вращения маятника в наивысшем положении при любых угловых скоростях и в наинизшем положении при угловых скоростях, больших чем  $\omega_{кр} = 2,287$ , неустойчивы. Остальные движения требуют исследования другими методами.

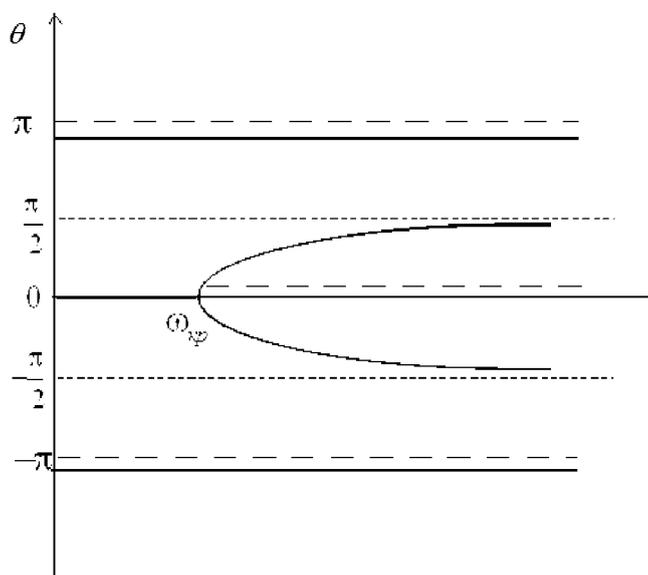


Рис. 3 Множество стационарных движений системы

На построенной по полученным результатам диаграмме (рис. 3), минусами обозначены множества неустойчивых стационарных движений маятника.

Проиллюстрируем неустойчивость полученных стационарных движений графически. Для этого приведем графики отклонений для значений  $\alpha = 0$ ,  $\omega = 5 \text{ рад/с}$  и для  $\alpha = \pi$ ,  $\omega = 5 \text{ рад/с}$ . Видно, что в обоих случаях значения отклонений  $x_1, x_2, x_3$  сильно растут с течением времени при выборе достаточно малых начальных значений.

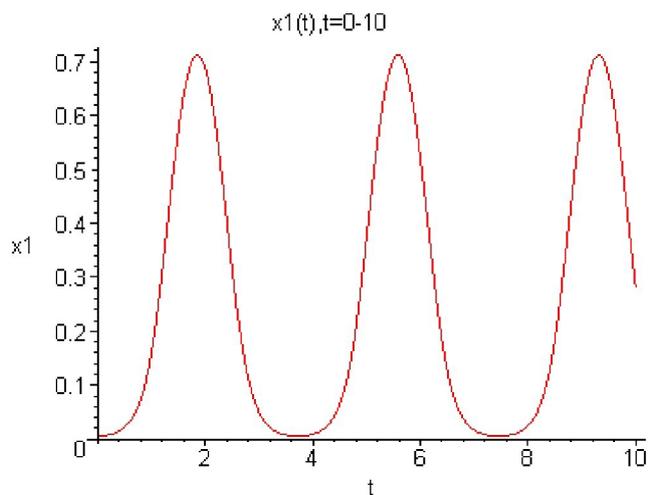


Рис. 4 График отклонения  $x_1(t)$  при  $\alpha = 0 \text{ рад}$  и  $\omega = 5 \text{ рад/с}$ .

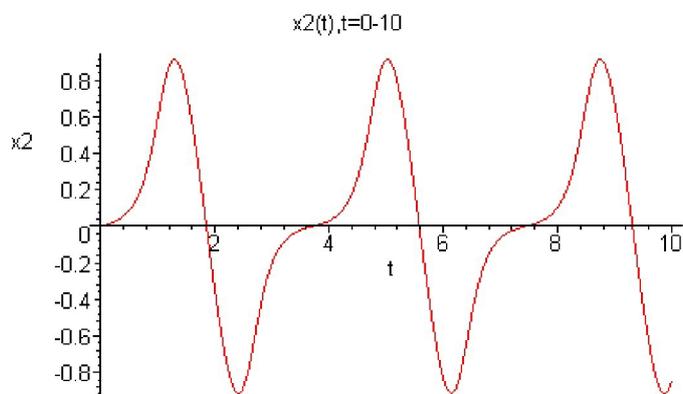


Рис. 5 График отклонения  $x_2(t)$  при  $\alpha = 0 \text{ рад}$  и  $\omega = 5 \text{ рад/с}$ .

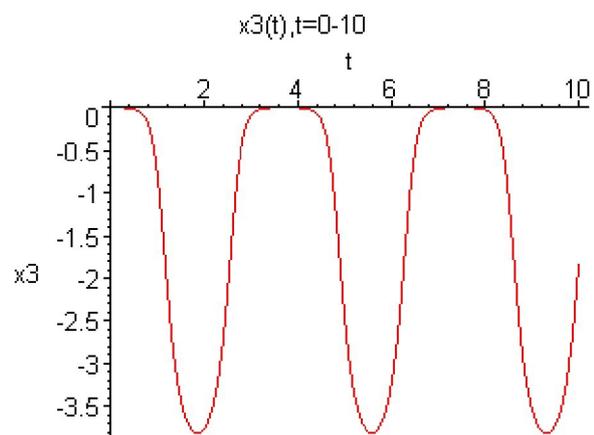


Рис. 6 График отклонения  $x_3(t)$  при  $\alpha = 0 \text{ рад}$  и  $\omega = 5 \text{ рад/с}$ .

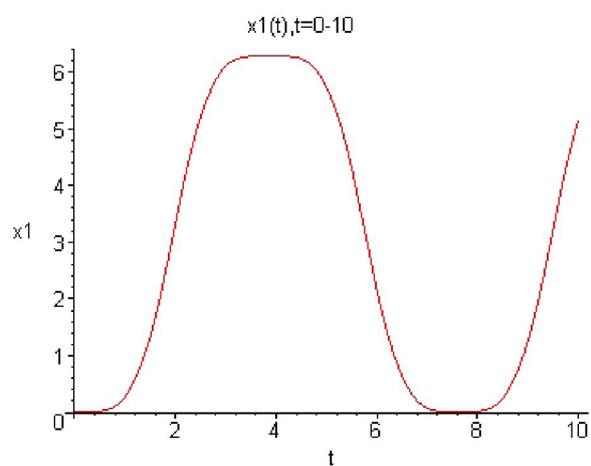


Рис. 7 График отклонения  $x_1(t)$  при  $\alpha = \pi \text{ рад}$  и  $\omega = 5 \text{ рад/с}$ .

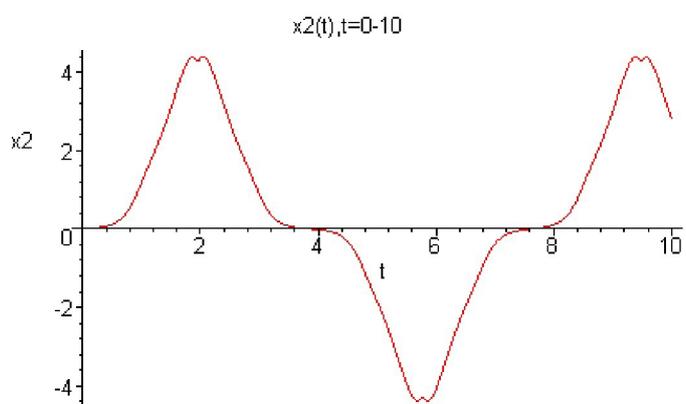


Рис. 8 График отклонения  $x_2(t)$  при  $\alpha = \pi \text{ рад}$  и  $\omega = 5 \text{ рад/с}$ .

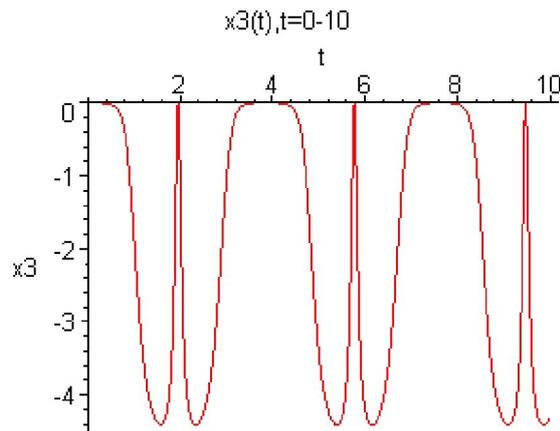


Рис. 9 График отклонения  $x_3(t)$  при  $\alpha = \pi \text{ рад}$  и  $\omega = 5 \text{ рад/с}$ .

### 2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Исследуем устойчивость стационарных движений механической системы вторым методом Ляпунова (или методом функций Ляпунова). Его суть заключается в том, что не надо решать исходную систему и исследовать ее решения, но необходимо подобрать некоторую скалярную функцию, которая в силу уравнений движения удовлетворяла бы определенным условиям.

Пусть  $V(x_1, \dots, x_n)$  - скалярная непрерывная функция переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , определённая в некоторой окрестности начала координат

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < h, \quad (h \leq H), \quad (2.10)$$

однозначная, обращающаяся в нуль при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  и обладающая непрерывными частными производными.

#### Определение

Функция  $V(x_1, \dots, x_n)$  называется знакопеременной, если в области (2.10) она может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

#### Определение

Функция  $V(x_1, \dots, x_n)$  называется знакопостоянной (положительной или отрицательной), если она в области (2.10), кроме нулевых, может принимать значения только одного определённого знака.

#### Определение

Функция  $V(x_1, \dots, x_n)$  называется знакоопределённой (определённо-положительной или определённо-отрицательной), если в области (2.10), где  $h$  - достаточно малое положительное число, она может принимать значения

только одного определённого знака и обращаться в нуль только при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

Знакоопределенность функций Ляпунова является важным свойством при установлении устойчивости движений системы, поэтому напомним некоторые свойства и способы определения знакопеременных и знакоопределенных форм.

Утверждение

Всякая однородная форма нечетной степени есть знакопеременная форма.

Утверждение

Если разложение в ряд некоторой функции начинается с однородной формы произвольной степени, являющейся знакопеременной или знакоопределенной, то исходная функция в окрестности (2.10) тоже будет знакопеременной или знакоопределенной соответственно.

Пусть в области (2.10) функцию  $V(x_1, \dots, x_n)$  можно представить в виде

$$V(x_1, \dots, x_n) = V_2(x_1, \dots, x_n) + V_*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j + V_*(x_1, \dots, x_n), \quad (2.11)$$

где в коэффициентах  $c_{ij} = c_{ji} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0$  квадратичной формы  $V_2(x_1, \dots, x_n)$  частные производные вычисляются при значениях  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , а выражение  $V_*(x_1, \dots, x_n)$  представляет собой совокупность членов выше второго порядка малости.

Утверждение

Если квадратичная форма

$$2V_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad (2.12)$$

является определённо-положительной, то и функция  $V(x_1, \dots, x_n)$ , допускающая представление (2.11), будет определённо-положительной по крайней мере в малой окрестности нуля.

Для выяснения определённо-положительности квадратичных форм можно воспользоваться критерием Сильвестра:

Для того, чтобы квадратичная форма (2.12) была определённо-положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  матрицы её коэффициентов были положительны, т.е.

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (2.13)$$

Под производной  $\dot{V}$  функции  $V$  в силу уравнений возмущённого движения (1.13) понимается её полная производная по времени  $t$ , вычисленная в

предположении, что переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.13), то есть выражение

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n \quad (2.14)$$

Основными теоремами теории устойчивости для автономных систем являются следующие.

Теорема Ляпунова об устойчивости.

Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что можно найти знакоопределённую функцию  $V$ , производная которой  $\dot{V}$  в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного с  $V$  знака, или тождественно равной нулю, то невозмущённое движение устойчиво.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что можно найти знакоопределённую функцию  $V$ , производная которой  $\dot{V}$  в силу этих уравнений была бы знакоопределённой функцией противоположного с  $V$  знака, то невозмущённое движение асимптотически устойчиво.

Теорема Ляпунова о неустойчивости.

Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что можно найти функцию  $V$ , которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределённой производной  $\dot{V}$  и могла бы принимать в окрестности нуля значения одного знака с  $V$ , то невозмущённое движение неустойчиво.

Как было отмечено ранее, факт устойчивости или неустойчивости решений исследуемой системы устанавливается с помощью приведенных теорем методом подбора соответствующих функций Ляпунова и не требует решения исходных систем. В этом заключается его несомненное достоинство и эффективность. Но вопрос о подборе самих функций Ляпунова приходится для каждой задачи решать индивидуально, так как не существует общего способа построения этих функций, а есть лишь некоторые приемы и методы для небольших классов систем. Одним из них является метод Четаева (или метод связки интегралов), который состоит в следующем.

Пусть уравнения движений (1.6) какой-либо системы допускают не зависящие от времени первые интегралы

$$U(y_1, \dots, y_n) = c, \quad U_1(y_1, \dots, y_n) = c_1, \quad \dots, \quad U_i(y_1, \dots, y_n) = c_i, \quad (i=1..k, k < n-1) \quad (2.15)$$

и пусть значения переменных  $y_1 = y_1^0, \dots, y_n = y_n^0$  отвечают некоторому стационарному движению системы. Функция Ляпунова для этого движения разыскивается в виде связки интегралов

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i V_i + \sum_{i=1}^k \mu_i V_i^2, \\ V_0(x_1, \dots, x_n) = U(y_1^0 + x_1, \dots, y_n^0 + x_n) - U(y_1^0, \dots, y_n^0), \\ V_i(x_1, \dots, x_n) = U_i(y_1^0 + x_1, \dots, y_n^0 + x_n) - U_i(y_1^0, \dots, y_n^0) \quad (2.16)$$

Постоянные  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  выбираются таким образом, чтобы функция  $V$  не содержала линейных членов своих аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а значения постоянных  $\mu_1, \dots, \mu_k$  выбирают так, чтобы  $V$  представляла знакоопределенную по отношению к  $x_1, \dots, x_n$  функцию. Ее полная производная по времени в силу уравнений (1.6) будет тождественно равна нулю, и на основе теоремы Ляпунова об устойчивости стационарное движение будет устойчивым по отношению к величинам  $y_1, \dots, y_n$ .

Если в (2.16) присутствуют квадраты всех интегралов  $V_1, \dots, V_k$ , то такую связку называют полной, в противном случае - неполной.

Итак, для исследования устойчивости с помощью функций Ляпунова необходимо:

1. Выписать первые интегралы, допускаемые системой уравнений движения (1.6), и выразить их через отклонения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
2. Составить функцию Ляпунова в виде связки интегралов.
3. Подобрать коэффициенты  $\lambda_i$  таким образом, чтобы в выражении для функции Ляпунова не осталось линейных относительно отклонений членов.
4. Подбором коэффициентов  $\mu_i$  добиться знакоопределенности функции Ляпунова и сделать вывод об устойчивости или неустойчивости стационарного движения.
5. Построить графики отклонений, иллюстрирующие устойчивость или неустойчивость исследуемых движений.

Рассмотрим пример исследования устойчивости движения с помощью функции Ляпунова.

## 2.4 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Проведём исследование устойчивости невозмущённого движения с помощью функции Ляпунова. Построим её, используя связку интегралов системы вида

$$V = U_1(x) - U_1(0) + \lambda[U_2(x) - U_2(0)],$$

где  $U_1(x) = E = \frac{1}{2}(A + mh^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(A + mh^2)\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}C\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta - mgh \cos \theta,$

$$U_2(x) = K = (A + mh^2)\dot{\phi} \sin^2 \theta + C\dot{\phi} \cos^2 \theta \quad (2.17)$$

представляют собой интегралы энергии и кинетического момента.

Сначала исследуем устойчивость стационарных движений (1.10)

$$\omega = const, \quad \alpha = \pm \arccos \frac{mgh}{(A - C + mh^2)\omega^2},$$

представляющих собой равномерное вращение оси маятника вокруг вертикали при ее отклонении на постоянный угол  $\alpha$ .

Выразим интегралы (2.17) уравнений движения маятника через переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Для этого, сохранив обозначения

$$\begin{cases} y_1 = \theta, \\ y_2 = \dot{\theta}, \\ y_3 = \dot{\varphi}, \end{cases}$$

рассмотрим отклонения, введенные ранее равенствами (1.18)

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \alpha \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 + \omega, \end{cases}$$

в окрестности стационарного движения (1.10), определенного из уравнения

$$(A - C + mh^2)\omega^2 \cos \alpha - mgh = 0. \quad (2.18)$$

Учтя (2.18), подставим величины (1.18) в выражения (2.17). Интегралы примут вид:

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2}(A + mh^2)x_2^2 + \frac{1}{2}(A + mh^2)(x_3 + \omega)^2 \sin^2(x_1 + \alpha) + \\ &\frac{1}{2}C(x_3 + \omega)^2 \cos^2(x_1 + \alpha) - mgh \cos(x_1 + \alpha) \\ U_2(x_1, x_2, x_3) &= (A + mh^2)(x_3 + \omega) \sin^2(x_1 + \alpha) + C(x_3 + \omega) \cos^2(x_1 + \alpha) \end{aligned}$$

Соответственно для функции Ляпунова получим выражение

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(A + mh^2)x_2^2 + \frac{1}{2}(A + mh^2)(x_3 + \omega)^2 \sin^2(x_1 + \alpha) + \frac{1}{2}C(x_3 + \omega)^2 \cos^2(x_1 + \alpha) - \\ &- mgh \cos(x_1 + \alpha) - \frac{1}{2}(A + mh^2)\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}C\omega^2 \cos^2 \alpha + mgh \cos \alpha + \\ &+ \lambda \left[ (A + mh^2)(x_3 + \omega) \sin^2(x_1 + \alpha) + C(x_3 + \omega) \cos^2(x_1 + \alpha) - (A + mh^2)\omega \sin^2 \alpha - C\omega \cos^2 \alpha \right] \end{aligned}$$

Разложим функцию Ляпунова  $V$  в ряд по степеням отклонений и отбросим слагаемые, содержащие отклонения в степенях, старше второй:

$$\begin{aligned}
V = & x_1^2 \left[ mgh \cos \alpha + \left( \frac{\omega}{2} - \lambda \right) \omega (A - C + mh^2) \cos 2\alpha \right] + \frac{1}{2} x_2^2 (A + mh^2) + \\
& + \frac{1}{2} x_3^2 \left[ (A + mh^2) \sin^2 \alpha + C \cos^2 \alpha \right] + 2x_1 \left( \frac{\lambda}{\omega} + 1 \right) mgh \sin \alpha + \\
& + x_3 (\lambda + \omega) \left[ (A + mh^2) \sin^2 \alpha + C \cos^2 \alpha \right] + x_1 x_3 (\omega + \lambda) \omega (A - C + mh^2) \sin 2\alpha
\end{aligned}$$

Для того чтобы в уравнении отсутствовали члены первого порядка, положим  $\lambda = -\omega$ . Функция  $V$  примет вид:

$$V = x_1^2 \left[ mgh \cos \alpha + \frac{3}{2} \omega^2 (A - C + mh^2) \cos 2\alpha \right] + \frac{1}{2} x_2^2 (A + mh^2) + \frac{1}{2} x_3^2 \left[ (A + mh^2) \sin^2 \alpha + C \cos^2 \alpha \right]$$

Видно, что все коэффициенты при квадратах отклонений положительны, поэтому функция Ляпунова суть знакоопределённая. Её производная по времени в силу того, что функция состоит из первых интегралов системы, тождественно равна нулю. Поэтому по теореме Ляпунова об устойчивости стационарное движение (1.10) маятника устойчиво.

Теперь проведем исследование на устойчивость стационарных движений, представляющих собой равномерное собственное вращение маятника в нижнем вертикальном положении, то есть при  $\alpha = 0$ . Функция Ляпунова в этом случае, составленная из интегралов

$$\begin{aligned}
U_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2} (A + mh^2) x_2^2 + \frac{1}{2} (A + mh^2) (x_3 + \omega)^2 \sin^2 x_1 + \\
& \frac{1}{2} C (x_3 + \omega)^2 \cos^2 x_1 - mgh \cos x_1 \\
U_2(x_1, x_2, x_3) &= (A + mh^2) (x_3 + \omega) \sin^2 x_1 + C (x_3 + \omega) \cos^2 x_1,
\end{aligned}$$

будет иметь вид

$$\begin{aligned}
V = & \frac{1}{2} (A + mh^2) x_2^2 + \frac{1}{2} (A + mh^2) (x_3 + \omega)^2 \sin^2 x_1 + \frac{1}{2} C (x_3 + \omega)^2 \cos^2 x_1 - \\
& - mgh \cos x_1 - \frac{1}{2} (A + mh^2) \omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} C \omega^2 \cos^2 \alpha + mgh \cos \alpha + \\
& + \lambda \left[ (A + mh^2) (x_3 + \omega) \sin^2 x_1 + C (x_3 + \omega) \cos^2 x_1 - (A + mh^2) \omega \sin^2 \alpha - C \omega \cos^2 \alpha \right]
\end{aligned}$$

Разложив ее по степеням отклонений и отбросив члены старше второго порядка, получим:

$$V = \frac{1}{2} x_1^2 \left[ mgh + \omega (\omega + 2\lambda) (A - C + mh^2) \right] + \frac{1}{2} x_2^2 (A + mh^2) + \frac{1}{2} x_3^2 C + C (\omega + \lambda) x_3.$$

Для того чтобы в уравнении отсутствовали члены первого порядка, положим  $\lambda = -\omega$ . Тогда функция Ляпунова примет вид:

$$V = \frac{1}{2} x_1^2 [mgh - \omega^2 (A - C + mh^2)] + \frac{1}{2} x_2^2 (A + mh^2) + \frac{1}{2} x_3^2 C.$$

Она будет определенно-положительной, если множитель при  $x_1^2$  положителен, то есть при выполнении условия

$$\omega < \sqrt{\frac{mgh}{(A - C + mh^2)}},$$

и будет иметь тождественно равную нулю производную. На основе теоремы Ляпунова об устойчивости заключаем, что рассматриваемые стационарные движения устойчивы.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\alpha = \pi$ . Составив из интегралов

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2} (A + mh^2) x_2^2 + \frac{1}{2} (A + mh^2) (x_3 + \omega)^2 \sin^2(x_1 + \pi) + \\ & \frac{1}{2} C (x_3 + \omega)^2 \cos^2(x_1 + \pi) - mgh \cos(x_1 + \pi) \\ U_2(x_1, x_2, x_3) &= (A + mh^2) (x_3 + \omega) \sin^2(x_1 + \pi) + C (x_3 + \omega) \cos^2(x_1 + \pi) \end{aligned}$$

функцию Ляпунова

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (A + mh^2) x_2^2 + \frac{1}{2} (A + mh^2) (x_3 + \omega)^2 \sin^2(x_1 + \pi) + \frac{1}{2} C (x_3 + \omega)^2 \cos^2(x_1 + \pi) - \\ & - mgh \cos(x_1 + \pi) - \frac{1}{2} (A + mh^2) \omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} C \omega^2 \cos^2 \alpha + mgh \cos \alpha + \\ & + \lambda [(A + mh^2) (x_3 + \omega) \sin^2(x_1 + \pi) + C (x_3 + \omega) \cos^2(x_1 + \pi) - (A + mh^2) \omega \sin^2 \alpha - C \omega \cos^2 \alpha] \end{aligned}$$

разложим ее в окрестности  $\alpha = \pi$  по степеням отклонений, отбросив члены старше вторых степеней:

$$V = \frac{1}{2} x_1^2 [\omega(\omega + 2\lambda)(A - C + mh^2) - mgh] + \frac{1}{2} x_2^2 (A + mh^2) + \frac{1}{2} x_3^2 C + C(\omega + \lambda)x_3.$$

Для того чтобы в уравнении отсутствовали члены первого порядка, выберем  $\lambda = -\omega$ . Тогда получим следующее равенство:

$$V = -\frac{1}{2} x_1^2 [mgh + 3\omega^2 (A - C + mh^2)] + \frac{1}{2} x_2^2 (A + mh^2) + \frac{1}{2} x_3^2 C$$

С помощью полученной функции Ляпунова об устойчивости движения ничего сказать нельзя, так как в окрестности исследуемого стационарного движения  $\alpha = \pi$  она может принимать значения разного знака.

Отообразим итог исследований устойчивости различных стационарных движений с учетом полученных предыдущих результатов на диаграмме (рис.10). В качестве промежуточного итога имеем следующее. Вертикальные вращения маятника в наивысшем положении при любых угловых скоростях и в наинизшем положении при угловых скоростях, больших чем  $\omega_{кр} = 2,287$  рад/сек., неустойчивы. Вертикальные вращения маятника в наинизшем положении при угловых скоростях, меньших чем  $\omega_{кр} = 2,287$  рад/сек., устойчивы. Оставшиеся движения

$$\omega = const, \quad \alpha = \pm \arccos \frac{mgh}{(A - C + mh^2)\omega^2}$$

требуют исследования другими методами.

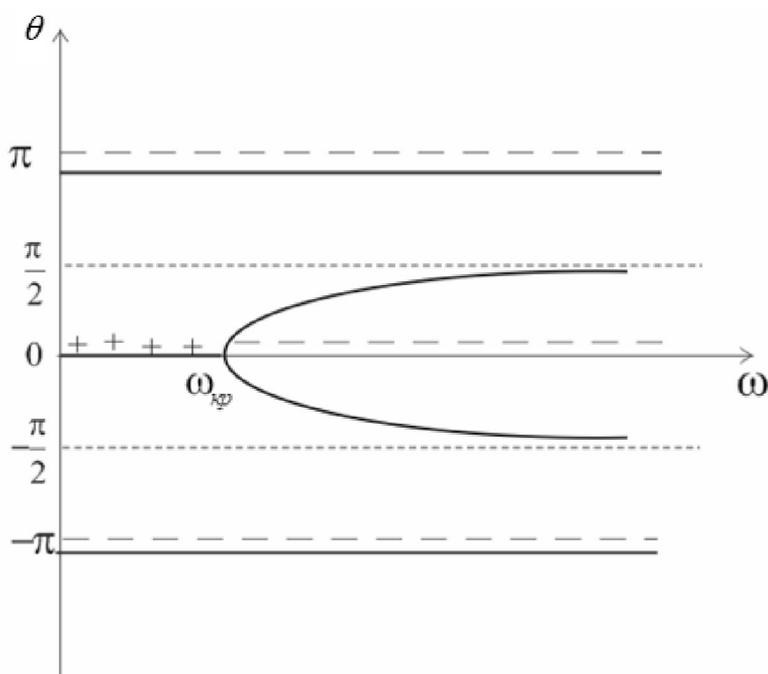


Рис. 10 Множество стационарных движений системы

Для подтверждения и иллюстрации полученных результатов построим графики отклонений в окрестности устойчивого стационарного движения. Например, выберем  $\alpha = 0 \text{ рад}$  и  $\omega < \omega_{кр}$ ,  $\omega = 2 \text{ рад/с}$ .

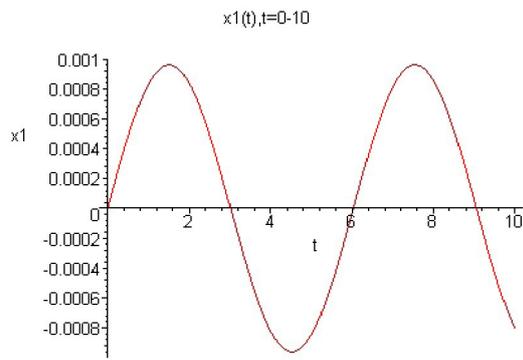


Рис. 11 График отклонения  $x_1(t)$  при  $\alpha = 0 \text{ рад}$  и  $\omega = 2 \text{ рад/с}$ .

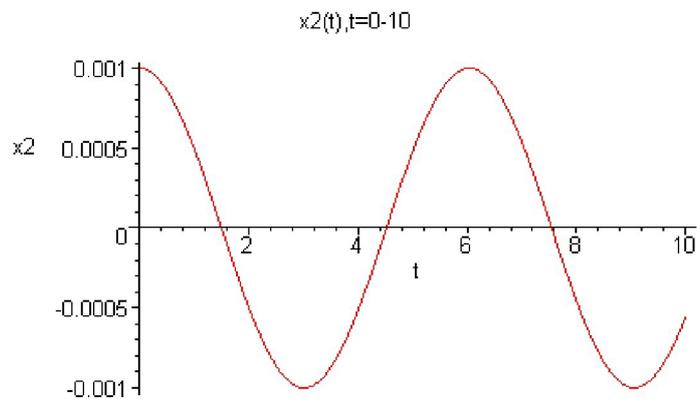


Рис. 12 График отклонения  $x_2(t)$  при  $\alpha = 0 \text{ рад}$  и  $\omega = 2 \text{ рад/с}$ .

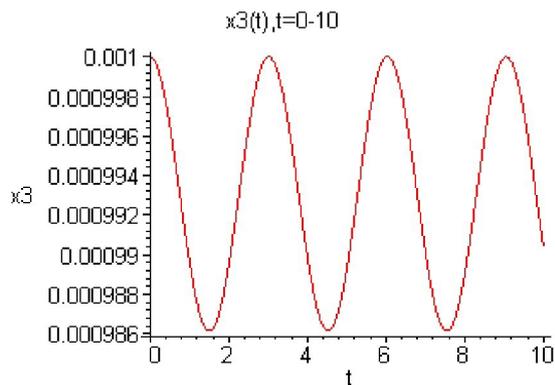


Рис. 13 График отклонения  $x_3(t)$  при  $\alpha = 0 \text{ рад}$  и  $\omega = 2 \text{ рад/с}$ .

## 2.5 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ МЕТОДОМ РАУСА

Рассмотрим механическую систему с голономными связями, находящуюся под действием потенциальных и непотенциальных сил. Положение системы пусть опять определяется обобщёнными независимыми координатами  $q_1, \dots, q_n$ , где  $n$  – число степеней свободы системы. Пусть также кинетическая энергия  $T$  и потенциальная энергия  $\Pi$  не зависят от  $t$ . Как известно, кинетическую энергию системы можно представить в виде

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \quad (2.19)$$

где  $T_i$  – однородная степени  $i$  относительно обобщённых скоростей  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ , часть кинетической энергии. Уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа второго рода запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q_s} = Q_s + \Gamma_s - \frac{\partial W}{\partial q_s} \quad (s=1, \dots, n). \quad (2.20)$$

Правые части уравнений (2.20) в общем случае представляют собой сумму некоторых неконсервативных, гироскопических и потенциальных сил, где  $Q_s$  – обобщенные неконсервативные силы,  $\Gamma_s$  – обобщённые гироскопические силы, представляемые равенствами  $\Gamma_s = \sum_{k=1}^n \gamma_{sk} \dot{q}_k$  с антисимметричными коэффициентами  $\gamma_{sk} = -\gamma_{ks} = \frac{\partial a_k}{\partial q_s} - \frac{\partial a_s}{\partial q_k}$  ( $a_s(q_1, \dots, q_n)$  – коэффициенты линейной формы  $T_1 = \sum_{s=1}^n a_s \dot{q}_s$ ),

$$W = \Pi - T_0 \quad (2.21)$$

– изменённая потенциальная энергия системы.

Замечание.

В частном (но широко встречающемся на практике) случае, когда наложенные на систему связи допускают равномерное вращение системы как одного твёрдого тела вокруг некоторой неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega$ , удобно записать в явном виде выражение для изменённой потенциальной энергии. Обозначив через  $J(q_1, \dots, q_n)$  момент инерции системы относительно указанной оси, имеем, что изменённая потенциальная энергия системы представляет собой сумму потенциальных энергий заданных сил и центробежных сил инерции:

$$W = \Pi - \frac{1}{2} \omega^2 J \quad (2.22)$$

Если связи, наложенные на систему, стационарны, то  $T_1 = T_0 = 0$ ,  $T_2 = T$ ,  $W = \Pi$ , и уравнения (2.20) принимают более простой вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s - \frac{\partial W}{\partial q_s} \quad (s=1, \dots, n) . \quad (2.23)$$

Если при этом все активные силы потенциальны ( $Q_s = 0$ ) и их потенциал не зависит от времени (случай консервативных систем), то уравнения (2.20) допускают интеграл

$$T_2 + W = h = const \quad (2.24)$$

или, учитывая стационарность связей,

$$T + \Pi = h = const , \quad (2.25)$$

выражающий закон сохранения полной механической энергии системы.

Положения относительного равновесия в отсутствие непотенциальных сил определяются из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial q_s} = 0 , \quad (s=1, \dots, n) . \quad (2.26)$$

В случае же стационарных связей эти уравнения принимают аналогичный вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0 , \quad (s=1, \dots, n) \quad (2.27)$$

и служат для определения положений абсолютного равновесия. Основными теоремами для исследования устойчивости и неустойчивости положений равновесий автономных систем являются следующие.

#### Теорема Лагранжа.

Если в положении абсолютного (относительного) равновесия потенциальная энергия  $\Pi$  ( $W$ ) имеет изолированный минимум, то такое положение равновесия устойчиво по отношению к обобщённым координатам и скоростям.

Для систем с одной степенью свободы имеет место обращение теоремы Лагранжа:

#### Теорема.

Если в положении абсолютного (относительного) равновесия потенциальная энергия  $\Pi(q)$  ( $W(q)$ ), предполагаемая аналитической функцией от  $q$ , не имеет минимума, то такое положение равновесия неустойчиво.

Для систем с несколькими степенями свободы справедлива следующая теорема.

Теорема Ляпунова.

Если в положении абсолютного равновесия потенциальная энергия системы не имеет минимума и его отсутствие определяется членами второго порядка малости без необходимости рассмотрения членов более высокого порядка малости, то равновесие неустойчиво.

Замечание. Теорема Ляпунова справедлива и для относительного положения равновесия, если уравнения (2.20) не содержат обобщенных непотенциальных и гироскопических сил.

Так как положения равновесия (абсолютного и относительного) являются частным случаем стационарных движений механических систем, то обобщением приведенных выше теорем являются теоремы об устойчивости и неустойчивости стационарных движений. Часто их применение более эффективно при решении прикладных задач.

Пусть для механической системы с голономными связями среди обобщенных координат есть такие  $q_{m+1}, \dots, q_n$  ( $m < n$ ), которые явным образом не входят в выражение для кинетической энергии, а обобщенные силы, отвечающие этим координатам, равны нулю. Такие координаты, как уже отмечалось ранее, называются циклическими, а соответствующие им скорости  $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$  - циклическими скоростями. Все остальные обобщенные координаты  $q_1, \dots, q_m$  называются позиционными, и им соответствуют позиционные скорости  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m$ . Тогда уравнения (2.20) допускают первые интегралы

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+j}} = c_j = const, \quad (j=1, \dots, n-m), \quad (2.28)$$

из которых все циклические скорости  $\dot{q}_{m+j}$  можно выразить через позиционные координаты  $q_1, \dots, q_m$  и их скорости  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m$ .

Определение

Функцией Рауса  $R(q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, p_{m+1}, \dots, p_n)$  называется преобразование Лежандра функции  $L$  по переменным  $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$ , то есть

$$R = L - \sum_{j=1}^{n-m} c_j \dot{q}_{m+j}, \quad (2.29)$$

где  $L = T - \Pi$  - лагранжиан системы или функция Лагранжа, а циклические интегралы  $c_j$  имеют вид (2.28).

Введя в рассмотрение функцию Рауса и заменив циклические координаты их значениями, получаемыми из интегралов (2.28), ее можно представить в виде суммы однородных форм нулевой  $R_0$ , первой  $R_1$  и второй  $R_2$  степеней относительно позиционных скоростей

$$R = R_0 + R_1 + R_2, \quad R_1 = \sum_{s=1}^m b_s(q_1, \dots, q_m) \dot{q}_s \quad (2.30)$$

Тогда уравнения для позиционных координат  $q_1, \dots, q_m$  можно записать в виде уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial R_2}{\partial q_s} = Q_s + \Gamma_s - \frac{\partial W}{\partial q_s} \quad (s=1, \dots, m) \quad (2.31)$$

В правых частях уравнений (2.31) аналогично предыдущему,  $Q_s$  - обобщенные неконсервативные силы,  $\Gamma_s$  - обобщенные гироскопические силы

$$\Gamma_s = \sum_{r=1}^m g_{sr} \dot{q}_r, \quad g_{sr} = -g_{rs} = \frac{\partial b_r}{\partial q_s} - \frac{\partial b_s}{\partial q_r}, \quad (2.32)$$

и потенциальная энергия приведенной системы  $W$  принимает вид

$$W = \Pi - R_0 \quad (2.33)$$

Интеграл энергии для приведенной системы (2.31) в случае, когда все активные силы потенциальны ( $Q_s = 0$ ), записывается выражением

$$R_2 + W = const \quad (2.34)$$

Замечание.

Опять рассмотрим частный случай, когда наложенные на систему связи допускают вращение системы как твёрдого тела вокруг некоторой неподвижной прямой. Пусть кроме того действующие на систему силы не дают момента относительно этой прямой. В этом случае кинетическая и потенциальная энергии не будут зависеть от угла  $q_n$  поворота системы как твёрдого тела вокруг указанной прямой. А значит, имеет место циклический интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = k = const,$$

представляющий собой интеграл площадей для плоскости, ортогональной названной прямой. Изменённая потенциальная энергия системы запишется выражением

$$W = \Pi + \frac{k^2}{2J}, \quad (2.35)$$

где  $J(q_1, \dots, q_{n-1})$  - момент инерции системы относительно упомянутой прямой.

Напомним (точное определение давалось ранее), что движения механической системы, для которых все позиционные координаты и

циклические скорости сохраняют постоянные значения, называются стационарными движениями. Для нахождения значений позиционных координат, описывающих положения равновесия приведенной системы, пользуются уравнениями

$$\frac{\partial W}{\partial q_s} = 0, \quad (s=1, \dots, n-m), \quad (2.36)$$

которые в случае отсутствия непотенциальных сил задают стационарные движения исходной системы, соответствующие положениям равновесия приведенной системы.

Основными теоремами для исследования устойчивости и неустойчивости стационарных движений автономных систем являются следующие.

Теорема Рауса.

Если в стационарном движении потенциальная энергия  $W$  приведенной системы имеет минимум, то это движение устойчиво относительно позиционных координат и скоростей, а также циклических скоростей, по крайней мере для возмущений, не изменяющих значений циклических интегралов (2.28).

Теорема Ляпунова.

Если потенциальная энергия  $W$  приведённой системы имеет минимум как при данных значениях циклических интегралов  $p_j = c_j$ , отвечающих рассматриваемому стационарному движению, так и при всяких достаточно близких к данным значениям величинах, причём значения переменных  $q_1, \dots, q_m$ , обращающие её в минимум, суть непрерывные функции величин  $p_j$ , то стационарное движение устойчиво относительно позиционных координат и скоростей, а также циклических скоростей.

Для гироскопически несвязанной системы справедлива следующая теорема.

Теорема.

Если для изолированного стационарного движения гироскопически несвязанной системы при фиксированных циклических интегралах (2.28) функция  $W$  не имеет минимума, и его отсутствие определяется членами второго порядка малости без необходимости рассмотрения членов более высокого порядка, то стационарное движение неустойчиво.

Рассмотрим консервативную механическую систему с одной степенью свободы и голономными связями. Пусть потенциальная энергия  $\Pi(q, \alpha)$  системы зависит от координаты  $q$ , определяющей положение системы, и от одного вещественного параметра  $\alpha$ . Для фиксированного значения параметра  $\alpha$  положения равновесия определяются уравнением

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0. \quad (2.37)$$

Множество положений равновесия можно представить геометрически на плоскости  $(q, \alpha)$  точками кривой  $C$ , определяемой уравнением (2.37). Отдельные ветви  $C_i$  кривой  $C$  могут пересекаться в некоторых точках  $M_j$ , в которых уничтожается выражение

$$\Delta = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} . \quad (2.38)$$

Точки  $M_j$  называются критическими, или точками бифуркации (ветвления).

Одни точки кривой  $C$  отвечают устойчивым состояниям равновесия, другие — неустойчивым. Смена устойчивости на ветвях  $C_i$  может происходить только в точках бифуркации. Распределение устойчивых и неустойчивых положений равновесия для фиксированного значения  $\alpha$  подчиняется закону смены устойчивости, состоящему в следующем. Пусть прямая  $\alpha = const$  пересекает кривую равновесий  $C$  в точках  $P_j$ , которые занумеруем последовательно при обходе прямой  $\alpha = const$  в том или ином направлении, и пусть ни одна из этих точек не является точкой бифуркации. Выражение  $\Delta$  меняет знак при переходе от точки  $P_i$  к точке  $P_{i+1}$ , если при этом потенциальная энергия  $\Pi(q, \alpha)$  принимает только вещественные значения. Поэтому при обходе прямой  $\alpha = const$  устойчивые и неустойчивые равновесия будут чередоваться.

Итак, для исследования устойчивости движений системы методом Рауса необходимо:

1. Выписать кинетическую и потенциальную энергии механической системы.
2. Определить циклические координаты и циклические интегралы.
3. Составить функцию Рауса вида (2.29) и из нее определить потенциальную энергию приведенной системы.
4. Записать уравнения (2.36) и найти стационарные движения.

5. Определить с помощью знака второй производной  $\frac{\partial^2 W}{\partial q^2}$  (для позиционной координаты  $q$ ) в окрестностях стационарных движений вид экстремума приведенной потенциальной энергии и на основе соответствующих теорем сделать заключение об устойчивости или неустойчивости рассматриваемых стационарных движений.

Рассмотрим пример исследования устойчивости движения с помощью функции Рауса.

## 2.6 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА МЕТОДОМ РАУСА

Проведём исследование устойчивости невозмущённого движения маятника с помощью функции Рауса. Она имеет вид

$$R = L - \sum_{i=1}^s c_i \dot{q}_i,$$

где соответственно  $L$  - лагранжиан приведенной системы,  $c_i$  - циклический интеграл приведенной системы.

Выписав выражения для кинетической и потенциальной энергий маятника

$$T = \frac{1}{2}(A + mh^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(A + mh^2)\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}C\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta,$$
$$\Pi = -mgh \cos \theta,$$

для лагранжиана соответственно получим выражение

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}(A + mh^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(A + mh^2)\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}C\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + mgh \cos \theta.$$

В качестве циклической обобщенной скорости  $\dot{q}$  выступает угловая скорость вращения маятника  $\dot{\phi}$  вокруг вертикальной оси. Значит, имеем циклический интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \text{const} = d,$$

где значение константы определяется равенством

$$d = (A + mh^2)\dot{\phi} \sin^2 \theta + C\dot{\phi} \cos^2 \theta.$$

Выразив отсюда величину

$$\dot{\phi} = \frac{d}{(A + mh^2)\sin^2 \theta + C \cos^2 \theta},$$

подставим полученное значение в функцию Рауса:

$$R = \frac{1}{2}(A + mh^2)\dot{\theta}^2 - \frac{d^2}{2(A + mh^2)\sin^2 \theta + 2C \cos^2 \theta} + mgh \cos \theta.$$

Представив ее в виде суммы квадратичной, линейной и нулевой форм относительно степеней обобщенной скорости  $\dot{\theta}$

$$R = R_0 + R_1 + R_2,$$

для приведенной потенциальной энергии  $W = -R_0$  будем иметь выражение

$$W = -R_0 = \frac{d^2}{2(A + mh^2)\sin^2 \theta + 2C \cos^2 \theta} - mgh \cos \theta.$$

Стационарным движениям соответствуют экстремальные значения приведённой потенциальной энергии, определяемые из уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = 0$$

или

$$-\frac{d^2(A - C + mh^2)\sin \theta \cos \theta}{[(A + mh^2)\sin^2 \theta + C \cos^2 \theta]^2} + mgh \sin \theta = 0$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $d$ , получим:

$$\omega^2(A - C + mh^2)\cos \theta \sin \theta - mgh \sin \theta = 0$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением (1.8), множество решений для которого изображено на рисунке 2.

Рассмотрим три частных случая стационарных движений, соответствующих одному и тому же значению угловой скорости вращения  $\omega = 5$  рад/с (то есть  $\omega > \omega_{ep} = \sqrt{\frac{mgh}{A - C + mh^2}}$ ) при разных значениях параметра  $\theta = \alpha$ . Они соответствуют трем различным ветвям диаграммы множества стационарных движений:

Таблица 2

$\omega$ , рад/с	$\theta_1$ , рад	$\theta_2$ , рад	$\theta_3$ , рад
5	0	1,36	3,14

Исследуем на устойчивость эти положения относительного равновесия. Для этого найдём вторую производную от приведённой потенциальной энергии по  $\theta$ .

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = d^2(A - C + mh^2)^2 \frac{\sin^2 2\theta}{[(A + mh^2)\sin^2 \theta + C \cos^2 \theta]^3} - d^2(A - C + mh^2) \frac{\cos 2\theta}{[(A + mh^2)\sin^2 \theta + C \cos^2 \theta]^2} + mgh \cos \theta.$$

Положения, в которых вторая производная имеет положительный знак, являются устойчивыми положениями равновесия; соответственно, положения, в которых вторая производная имеет отрицательный знак, суть неустойчивые положения равновесия. Установим, какие стационарные движения маятника устойчивы и какие – нет. Численные значения второй производной от приведенной потенциальной энергии, соответствующие исследуемым стационарным движениям, приведены в таблице 3.

Таблица 3

$\omega$ , рад/с	$\theta$ , рад	$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}$
5	0	-74,13
5	1,36	104,055
5	3,14	-113,362

На основе вышеизложенных теорем заключаем, что относительные положения равновесия маятника  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = \pi$  неустойчивы, так как в них  $\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} < 0$ , а положение  $\theta_3 = 1,36$  — устойчивое, так как  $\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} > 0$ .

Такой вывод имеет очевидное физическое толкование. При движениях в окрестности нижнего положения равновесия ( $\theta_1 = 0$ ) уравновешивающая сила  $mgh \cos \theta$ , направленная к оси вращения, практически равна нулю, и под действием переносной силы инерции маятник отклоняется от оси вращения, то есть движения не могут происходить в сколь угодно малой окрестности положения  $\theta_1 = 0$ , и тем самым оно неустойчиво.

При движениях в окрестности верхнего положения равновесия ( $\theta_2 = \pi$ ) обе силы –  $mgh \cos \theta$  и переносная сила инерции – действуют по одному направлению от вертикальной оси вращения маятника, разрушая его вертикальные вращения (движения неустойчивые).

При движениях в окрестности третьего положения относительного равновесия ( $\theta_3 = 1,36$ ) уравновешивающая сила  $mgh \cos \theta$ , направленная к оси вращения, оказывается равной по величине переносной силе инерции, действующей по направлению от оси вращения, не нарушая соответствующих движений маятника. Более того, указанные силы оказывают естественное стабилизирующее воздействие на эти вращения маятника. При отклонении маятника вниз ( $\theta_3 < 1,36$ ) величина силы  $mgh \cos \theta$  становится меньше величины переносной силы инерции, и последняя возвращает маятник к исследуемому положению относительного равновесия  $\theta_3 = 1,36$ . При отклонении вверх – наоборот, сила тяжести работает на уменьшение таких отклонений.

Теперь продолжим исследование множества стационарных движений, соответствующих разным угловым скоростям вращения  $\omega$  при значении угла  $\theta_1 = 0$ . Найдём граничное значение  $\omega_{cp}$ , при котором вращения маятника в

положении  $\theta_1 = 0$  теряют свойство устойчивости. Для этого, используя условие

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = 0,$$

решим относительно  $\omega$  соответствующее уравнение

$$(A-C+mh^2) \frac{\sin^2 2\theta}{[(A+mh^2)\sin^2 \theta + C \cos^2 \theta]^3} - \frac{\cos 2\theta}{[(A+mh^2)\sin^2 \theta + C \cos^2 \theta]^2} + \frac{mgh \cos \theta}{d^2(A-C+mh^2)} = 0$$

и получим  $\omega_{ep} = 2,287$ , значение которого совпадает со значением  $\omega_{кр}$ , вычисленным в этой работе ранее из условия (1.9).

Продолжим проверку с помощью метода Рауса при различных значениях угловой скорости вращения маятника и угла отклонения  $\theta$  устойчивости и неустойчивости соответствующих стационарных движений. Рассмотрим два значения угловой скорости  $\omega = 1$  рад/с и  $\omega = 2$  рад/с, которые лежат слева от  $\omega_{ep}$ , и одно значение угловой скорости  $\omega = 3$  рад/с, лежащее от него справа.

При  $\omega = 1$  рад/с результаты вычислений приведены в таблице 4.

Таблица 4

$\omega$ , рад/с	$\theta$ , рад	$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}$
1	0	15,87
1	3,14	-23,37

Итак,  $\omega = 1$  рад/с,  $\theta_1 = 0$  – устойчивое положение относительного равновесия, так как  $\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} > 0$ , а  $\omega = 1$  рад/с,  $\theta_3 = \pi$  – неустойчивое (в нем  $\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} < 0$ ).

При угловой скорости  $\omega = 2$  рад/с и разных значений угла  $\theta$  имеем следующие результаты:

Таблица 5

$\omega$ , рад/с	$\theta$ , рад	$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}$
2	0	4,62
2	3,14	-34,619

Аналогично предыдущему случаю, стационарное движение  $\omega = 2$  рад/с,  $\theta_1 = 0$  – устойчивое ( $\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} > 0$ ), а движение  $\omega = 2$  рад/с,  $\theta_3 = \pi$  – нет ( $\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} < 0$ ).

При  $\omega = 3$  рад/с результаты вычислений аналогичны случаю с  $\omega = 5$  рад/с и представлены в таблице 6.

Таблица 6

$\omega$ , рад/с	$\theta$ , рад	$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}$
3	0	-14,13
3	0,95	60,341
3	3,14	-53,367

Имеем два неустойчивых положения относительного равновесия  $\omega = 3$  рад/с,  $\theta_1 = 0$  и  $\omega = 3$  рад/с,  $\theta_3 = \pi$  ( $\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} < 0$  для обоих), и одно устойчивое  $\omega = 3$  рад/с,  $\theta_2 = 0,95$  ( $\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} > 0$ ).

С учётом проделанных исследований дополним диаграмму множества стационарных движений. Результаты следующие. Все стационарные движения маятника (при  $\theta \geq 0$ ) представляют собой объединение трех подмножеств, изображенных на рисунке 14 тремя разными линиями –  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$  и  $\theta = \arccos \frac{mgh}{(A-C+mh^2)\omega^2}$  соответственно.

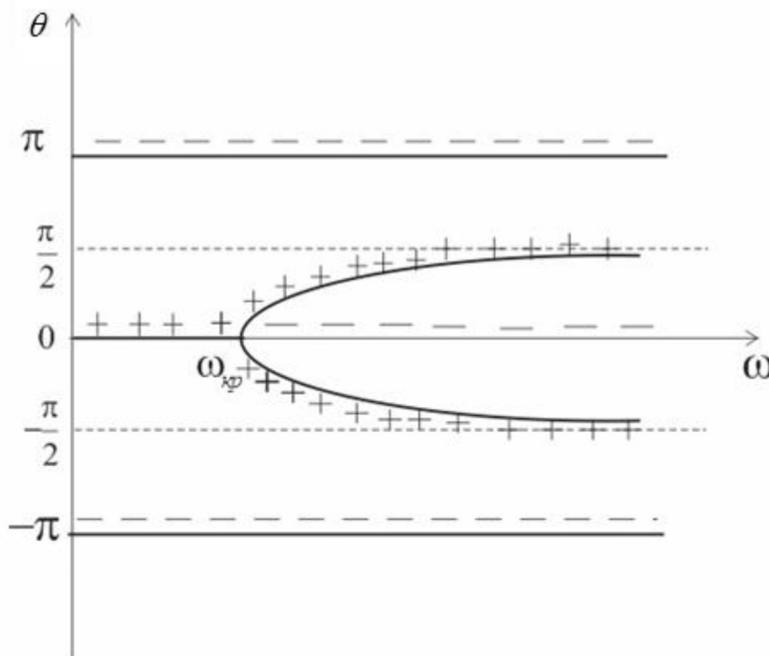


Рис. 14 Множество стационарных движений системы

Движения, соответствующие ветви  $\theta = \pi$  и представляющие собой вращения маятника вокруг вертикальной оси в наивысшем положении, неустойчивы при всех значениях угловой скорости  $\omega$ . Движения, соответствующие ветви  $\theta = \arccos \frac{mgh}{(A-C+mh^2)\omega^2}$  и представляющие собой вращения маятника вокруг вертикальной оси при неизменном угле  $\theta$  (они

существуют при  $\theta < \frac{\pi}{2}$  и  $\omega > \omega_{кр} = 2,287$ ), всегда устойчивы. Множество стационарных движений, соответствующее значению  $\theta = 0$ , имеет точку бифуркации  $\omega = \omega_{кр} = 2,287$ , в которой происходит смена устойчивых движений при  $\omega < \omega_{кр} = 2,287$  на неустойчивые при  $\omega > \omega_{кр} = 2,287$ . При  $\theta < 0$  ветви диаграммы симметричны относительно прямой  $\theta = 0$  и изображают стационарные движения, физически совпадающие с исследованными выше.

Подтвердим и проиллюстрируем полученные теоретические результаты численными. Для этого построим графики отклонений для значений  $\theta$  и  $\omega$ , не исследованных ранее, то есть лежащих на одной из веток кривой, которая соответствует устойчивым стационарным движениям для  $\omega > \omega_{кр}$ . Например, для  $\theta = 0,95 \text{ рад}$  и  $\omega = 3 \text{ рад/с}$ :

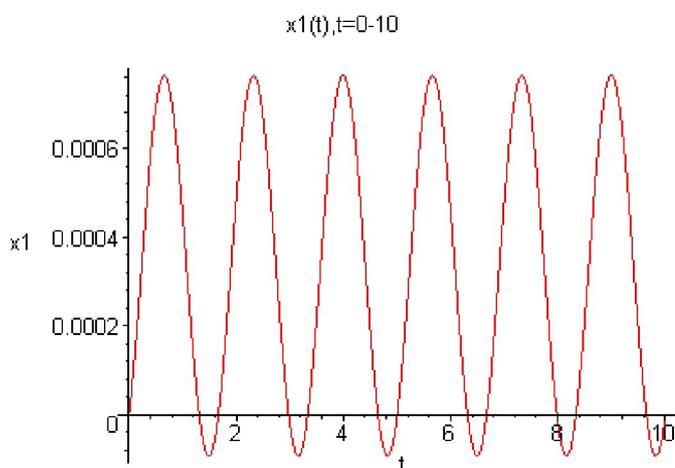


Рис. 15 График отклонения  $x_1(t)$  при  $\theta = 0,95 \text{ рад}$  и  $\omega = 3 \text{ рад/с}$ .

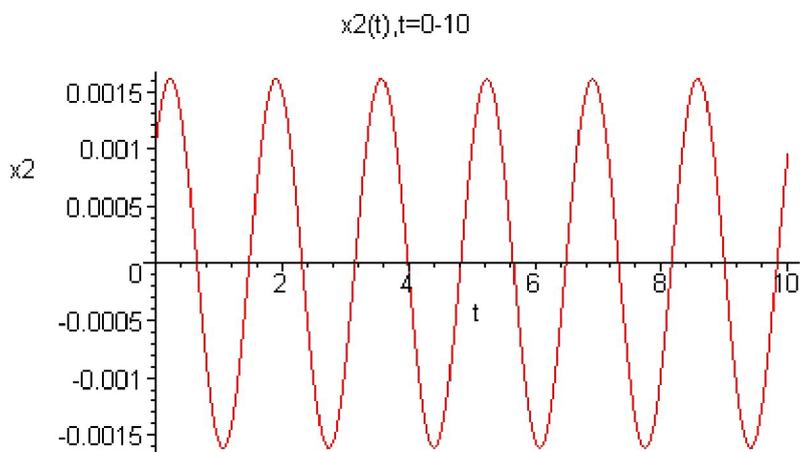


Рис. 16 График отклонения  $x_2(t)$  при  $\theta = 0,95 \text{ рад}$  и  $\omega = 3 \text{ рад/с}$ .

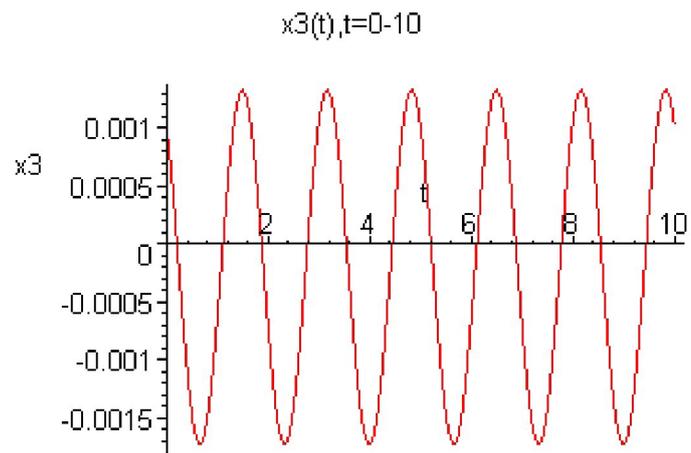


Рис. 17 График отклонения  $x_3(t)$  при  $\theta = 0,95 \text{ рад}$  и  $\omega = 3 \text{ рад/с}$ .

### ГЛАВА 3. ПОСТРОЕНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этой части пособия обсуждаются аналитические методы построения (синтеза) систем программного движения с заданными конструктивно обоснованными геометрико-кинематическими свойствами, то есть устойчивых в том или ином смысле. Отметим кратко лишь некоторые основные методы и результаты, относящиеся к решению проблем о синтезе и стабилизации программных движений механических систем.

Задача определения управляющего вектора, обеспечивающего программное движение, свойства которого задаются наложенными на систему связями, также как и задача построения систем дифференциальных уравнений по известным частным и общим интегралам, приводит к решению линейного уравнения относительно управляющего вектора. При этом размерность вектора управления не меньше числа наложенных на систему связей. Решение этой задачи заключается в определении общего решения линейного уравнения. В это линейное уравнение могут быть заложены требования, накладываемые на движение управляемой системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями: устойчивость программного движения, оценка отклонений, необходимые свойства переходных процессов относительно программного многообразия.

Найденное общее решение позволяет определить искомые дифференциальные уравнения, применением к которым численных методов решения можно получить методы решения системы нелинейных уравнений и вычисления обратных матриц, зависящих от параметра. Использование второго метода Ляпунова для исследования устойчивости позволяет сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости программных многообразий, условия равномерной устойчивости, условия устойчивости на конечном интервале времени, абсолютной устойчивости, условия устойчивости по части переменных.

Результаты исследований по этим вопросам изложены в работах [11,20,23,24].

В работе [11] ставится и решается задача о построении уравнений движения систем управления в обобщенных координатах с вложенными программными связями. Полученные уравнения достраиваются с учетом устойчивости самих связей.

При решении указанных выше задач необходимо предварительно убедиться в управляемости движений на программных многообразиях. В итоге исследования этой проблемы получены следующие результаты:

- впервые поставлена и исследована задача об управляемости линейных и нелинейных систем управления на программных многообразиях;

- получены условия управляемости нелинейных систем на программном многообразии по части переменных;
- решена задача построения инвариантных полей нелинейной возмущенной системы;
- получено единое представление сил заданной структуры и с помощью этого представления решены некоторые задачи построения уравнений управляемых механических систем на программных многообразиях.

Полученные результаты изложены, например, в работах [21,22].

Исследование влияния структуры сил на устойчивость стационарных движений систем с циклическими и квазициклическими координатами в последнее время приобрело особую актуальность. Основные результаты исследований по этой проблеме, изложенные в работах [13,14,23,25], позволили установить механизм влияния сил различной структуры на устойчивость стационарных движений голономных и неголономных систем с циклическими и квазициклическими координатами.

В рамках исследования устойчивости программных движений были проведены работы по изучению систем с программными связями. Они направлены на решение широкого круга прикладных задач управления. С этой точки зрения в последнее время были проанализированы задачи управления и подробно изучены способы программирования движения. Показано, что естественные движения широкого круга систем управления, в частности управления гиростатами и манипуляционными роботами, приводят к задаче управления программными движениями, определяемыми нелинейными связями, наложенными на координаты и скорости системы. Указанные исследования проведены в работах [19, 20, 23, 25]. Задача определения соответствующего вектора управления приводит к поиску методов составления уравнений динамики соответствующих механических систем, максимально использующих присущие ей динамические характеристики. Предлагаемые методы составления уравнений в форме уравнений Лагранжа, Рауса, Аппеля позволяют использовать разработанные алгоритмы определения уравнений движения с помощью ЭВМ.

При решении задач управления гиростатом были изучены методы управления программным движением тела постоянной (работы [26]) и переменной (работы [27, 28]) структуры с помощью активных сил. Составленные уравнения программных движений, обеспечивая асимптотическую устойчивость программных многообразий, позволяют, используя стандартные методы составления уравнений динамики, допускающие алгоритмизацию вычислений на ЭВМ (метод проективного пространства), решать задачу управления широким классом программных движений механических объектов.

Использование единого подхода исследования систем с программными связями к изучению механических систем с

параметрическими связями дает возможность построить алгоритмы управления системами, на которые наложены связи, зависящие от параметров, определяемых неявным образом через данные уравнения [19, 25]. Эти методы применяются для исследования несвободных движений твердого тела, криволинейного движения автомобиля в упрощенной модели и для решения задач оптимальной формы образующей цилиндра двигателя внутреннего сгорания.

Задача о построении уравнений программного движения механизмов в обобщенных координатах при наличии неголономных связей ставится и решается в работе [11]. Полученные при этом управления достраиваются с учетом требования устойчивости программы.

Исследованию устойчивости и неустойчивости программных движений механических систем также посвящены работы А.С. Андреева [12-14, 27], в которых получены основные принципы построения функции Ляпунова для проведения оценки устойчивости заданных программных движений. Для данного класса функций сформулирован ряд теорем, доказывающих устойчивость движений исследуемых механических систем.

### 3.1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

В курсах теоретической механики и механики сплошных сред изучаются статические и динамические системы. При этом вопросы управления этими системами не рассматриваются. В то же время и в природе и в технике имеются динамические системы, снабженные исполнительными механизмами (двигателями), что позволяет изменять позицию (состояние) этих систем, то есть управлять ими. Будем говорить в этом случае, что рассматривается движение управляемого объекта или некоторой динамической управляемой системы. Пусть движение этой (автономной) системы описывается дифференциальными уравнениями нормального вида с функциональным включением

$$\dot{y} = f(y, u) \quad , \quad (3.1)$$

где  $y = y(t)$  –  $n$ -мерный вектор-столбец координат, описывающий состояние управляемого объекта;  $u$  –  $s$ -мерный вектор-столбец управляющих воздействий, характеризующий воздействие на систему исполнительных механизмов;  $f(y, u)$  – дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция своих координат.

Физический смысл управляющих воздействий может быть разного характера: это могут быть непосредственно управляющие силы и моменты (в

случае идеальных исполнительных механизмов) или управляющие сигналы, подающиеся на эти механизмы, когда необходимо учесть их функционирование. Ограничения на управления  $u$ , встречающиеся на практике, в компактном виде можно описать выражением

$$u \in W,$$

где функциональное множество  $W$  может задавать ограничения на величину или производную управления, ограничения на интеграл или ограничение в среднеквадратичном (по энергии) и другие.

В случае отсутствия управления ( $u \equiv 0$ ) уравнения (3.1) описывают некоторые движения автономной неуправляемой системы, соответствующие ее решениям. При добавлении управления система уравнений (3.1) может иметь вообще говоря и другие решения, которые не являлись решениями неуправляемой системы.

#### Определение

Программным (желаемым) движением системы назовем ограниченную, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемую  $n$ -мерную вектор-функцию  $y''(t)$ , описывающую некоторое заданное движение механической системы.

#### Определение

Управление  $u''(t)$ , реализующее программное движение  $y''(t)$  системы (3.1) в силу тождества

$$\dot{y}''(t) = f(y''(t), u''(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (3.2)$$

называется программным управлением; совокупность, состоящую из трёх элементов ( $y'', u'', [t_0, t_1]$ ), называют программным управляемым процессом.

В разных ситуациях программный управляемый процесс может быть задан в явном виде, в неявном виде (например, как решение экстремальной задачи) или вообще быть неизвестным. Кроме того, сами программные движения по своим свойствам могут быть устойчивыми, асимптотически устойчивыми (по Ляпунову) или неустойчивыми, то есть фактически не реализуемыми соответствующим программным управлением. В зависимости от этого возникают разные задачи теории управления.

Приведем постановку и решение задачи о двухуровневом управлении, которая состоит в следующем: для выбранного программного движения механической системы надо построить программное управляющее воздействие, реализующее это заданное движение; и синтезировать позиционное стабилизирующее управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость программного движения.

Если программный процесс задан в явном виде, то можно ограничиться постановкой простейшей задачи управления – задачи позиционного

управления. При этом программное управление  $u''(t)$  считается известным или сразу определяется из равенств (3.2).

Рассмотрим на примере первую часть поставленной задачи – о реализации программного движения управляемой механической системы.

### 3.2 ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАЯТНИКА.

В качестве примера рассмотрим построение программного управления для заданных движений маятника, описанного в части 1.2 этой работы. В качестве программного движения выберем следующее:

$$\begin{cases} \theta_{np} = \kappa_1, \\ \varphi_{np} = \kappa_2 t, \end{cases} \quad (3.3)$$

то есть необходимо, чтобы маятник совершал вращения вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\dot{\varphi}_{np} = \kappa_2$ , сохраняя постоянную величину угла  $\theta_{np} = \kappa_1$  отклонения оси маятника от вертикали. Для реализации этого заданного движения (3.3) добавим к правым частям полученных ранее уравнений движения маятника (1.5) управляющие моменты  $M_1$  и  $M_2$ :

$$\begin{aligned} (A + mh^2)\ddot{\theta} - (A - C + mh^2)\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta &= -mgh \sin \theta + M_1 \\ \left[ (A + mh^2) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta \right] \ddot{\varphi} + 2(A - C + mh^2)\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta &= M_2 \end{aligned}$$

Для нахождения этих моментов, являющихся программным управлением, подставим в уравнения движения значения  $\theta_{np} = \kappa_1$  и  $\varphi_{np} = \kappa_2 t$ , соответствующие заданному движению. Тогда получим выражения для определения управляющих моментов:

$$\begin{aligned} M_1 &= -(A - C + mh^2)\kappa_2^2 \cos \kappa_1 \sin \kappa_1 + mgh \sin \kappa_1 \\ M_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

С учётом полученного управления уравнения движения управляемой системы примут вид:

$$\begin{aligned} (A + mh^2)\ddot{\theta} - (A - C + mh^2)\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta &= -mgh \sin \theta - (A - C + mh^2)\kappa_2^2 \sin \kappa_1 \cos \kappa_1 + mgh \sin \kappa_1 \\ \left[ (A + mh^2) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta \right] \ddot{\varphi} + 2(A - C + mh^2)\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

Причем исследуемое программное движение (3.3) является решением этой системы уравнений в силу выбора управляющих моментов  $M_1$  и  $M_2$ . Разрешим эти уравнения относительно вторых производных:

$$\ddot{\theta} = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2}(\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta - k_2^2 \sin k_1 \cos k_1) - \frac{mgh}{A+mh^2}(\sin \theta - \sin k_1)$$

$$\ddot{\phi} = -2 \frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2) \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta} \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta$$

и запишем полученную систему в нормальном виде. Для этого введём новые переменные согласно равенствам

$$\begin{cases} y_1 = \theta, \\ y_2 = \dot{\theta}, \\ y_3 = \dot{\phi}. \end{cases}$$

В параметрах  $y_i$  ( $i=1,2,3$ ) уравнения управляемого движения в нормальной форме будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2}(y_3^2 \sin y_1 \cos y_1 - k_2^2 \sin k_1 \cos k_1) - \frac{mgh}{A+mh^2}(\sin y_1 - \sin k_1) \\ \dot{y}_3 = -2 \frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2) \sin^2 y_1 + C \cos^2 y_1} y_2 y_3 \cos y_1 \sin y_1 \end{cases} \quad (3.5)$$

Исходное программное движение, являясь одним из решений полученной системы, будет возможным для физической реализации только в случае, если оно будет асимптотически устойчивым по Ляпунову. При неустойчивости этого движения возможность неограниченного роста отклонений величин от их заданных значений фактически означает, что система совершает неконтролируемые движения, то есть на самом деле программные движения не реализуются полученными управляющими моментами  $M_1$  и  $M_2$ .

Рассмотрим теперь вторую часть поставленной задачи – о стабилизации программного движения управляемой механической системы, то есть необходимо синтезировать позиционное стабилизирующее управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость заданного программного движения.

Пусть получено программное управление  $u^{\Pi}(t)$ , реализующее заданное программное движение  $y^{\Pi}(t)$  системы (3.1) в силу тождества (3.2):

$$\dot{y}^{\Pi}(t) = f(y^{\Pi}(t), u^{\Pi}(t)), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Если начальное состояние системы  $y(t_0) = y''(t_0)$ , то с течением времени при выполнении равенства  $u(t) \equiv u''(t)$  движение механической системы будет совпадать с программным. Но как известно, почти всегда существуют начальные отклонения (возмущения)  $x(t_0) \neq 0$ , в силу которых при движении системы равенство (3.2) не будет выполняться при действии программного управления  $u(t) \equiv u''(t)$ , причем текущие отклонения  $x(t) = y(t) - y''(t)$  могут вообще говоря неограниченно расти, фактически означая, что программное управление не реализует в действительности заданного программного движения. Таким образом, возникает задача позиционного управления – имея информацию о текущих отклонениях, построить управление, позволяющее уменьшить начальное отклонение (или, соответственно, не давать возрастать текущим отклонениям).

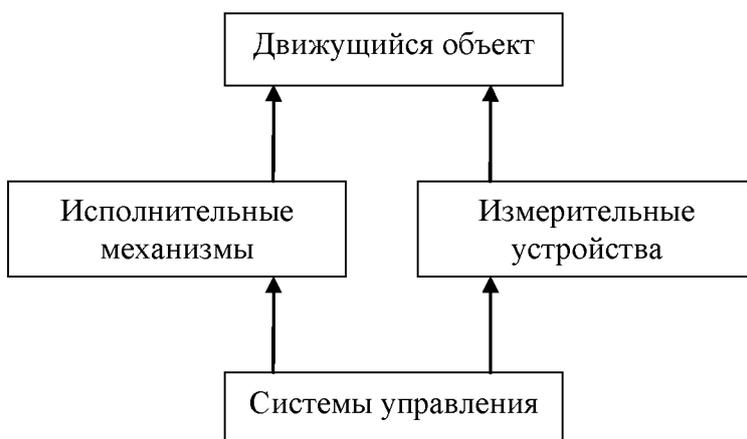
Для того, чтобы осуществить эту постановку, необходимо знать отклонения реального движения  $y(t)$  от программного  $y''(t)$ . Предположим, что имеется  $m$  измерительных устройств, с помощью которых можно получить первичную информацию о реальном движении. Обработав эту информацию, можно оценить текущее отклонение  $x(t) = y(t) - y''(t)$  и построить алгоритмы формирования управляющих сигналов.

#### Определение

Информационный процесс от обработки первичной информации до воздействия управляющих сигналов на исполнительные механизмы вместе с устройствами, реализующими этот процесс, называют **системой управления движением**. [А].

#### Определение

**Управляемой динамической системой (УДС)** называется совокупность, состоящая из движущегося объекта, системы управления движением этого объекта и терминальных элементов (измерительных устройств и исполнительных механизмов), соединенных в соответствии с функциональной схемой, представленной на рисунке.



Отметим основное принципиальное отличие управляемой динамической системы от неуправляемой. В случае УДС имеют место два процесса, взаимно влияющих друг друга: механический процесс – движение управляемого объекта и информационный процесс – процесс формирования управляющих сигналов.

Информационный управляющий процесс – это получение первичной информации о движении с помощью измерительных устройств, обработка этой информации и формирование на основе

результатов этой обработки управляющих сил и моментов. Осуществляемая таким образом связь между движением объекта и управляющими силами и моментами называется **обратной связью**.

Для математической постановки задачи позиционного управления ограничимся простейшей моделью, описывающей получение первичной информации  $z$ :

$$z = \varphi(y) + \gamma(t), \quad (3.6)$$

где  $\gamma(t)$  - инструментальные погрешности измерительных устройств.

Случаи, когда программный процесс задан в неявном виде или нет полного описания движущегося объекта, в дальнейшем рассматривать мы не будем. Их можно посмотреть, например, в [А].

### 3.3. УРАВНЕНИЯ В ОТКЛОНЕНИЯХ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО СИНТЕЗА ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аналитический анализ текущих отклонений  $x(t) = y(t) - y^n(t)$  удобнее всего проводить, составив уравнения возмущенного движения. Причем для управляемой системы уравнения возмущенного движения всегда имеют тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$ , соответствующее программному движению  $y^n(t)$ . Исследовать это тривиальное решение на устойчивость будем на основе теорем об устойчивости и неустойчивости систем по линейному приближению, изложенными ранее во второй части данной работы.

Для текущих отклонений  $x(t) = y(t) - y^n(t)$  можно выписать дифференциальные уравнения, определяющие их поведение при  $u(t) = u^n(t)$  для  $t \in [t_0, t_1)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} - \dot{y}^n = f(y, u^n) - f(y^n, u^n) = \\ &= f(y - y^n + y^n, u^n) - f(y^n, u^n) = \tilde{f}(x, t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\tilde{f}(0, t) \equiv 0$  для  $\forall t \in [t_0, t_1)$  и  $x(t_0) \neq 0$ .

В этой главе ограничимся исследованием частного, но важного для дальнейшего изложения случая – **стационарным программным движением**  $y^n(t) = y^c(t)$  и  $t_1 = \infty$ .

Для этого уточним определения циклической координаты и стационарного движения для управляемой системы (3.1).

#### Определение

Координата  $y_i (i = 0, 1, \dots, k; 0 \leq k < n)$  называется **циклической**, если для нее справедливы равенства  $\frac{\partial f(y, u)}{\partial y_i} = 0$  и  $\frac{\partial f(y, u)}{\partial u} = 0$ .

#### Определение

Движение  $y(t)$  управляемой системы (3.1) называется **стационарным**  $y^c(t)$ , если  $\dot{y}_i^c \equiv const, i = 1, 2, \dots, k, (k \geq 0), \dot{y}_j^c \equiv 0, j = k + 1, \dots, n$ , где  $y_1, \dots, y_k$  - циклические координаты.

Для осуществления стационарного движения в соответствии с (3.2) требуется, чтобы имели место  $k$  равенств

$$\dot{y}_i^c = f_i(y_{k+1}^c, \dots, y_n^c), \quad i = 1, \dots, k,$$

и  $n - k$  уравнений

$$f_j(y_{k+1}^c, \dots, y_n^c, u_1, \dots, u_n) = 0, \quad j = k + 1, \dots, n \quad (3.8)$$

Предположим, что  $n - k$  уравнений (3.8) с  $s$  неизвестными  $u_1, \dots, u_n$  имеют хотя бы одно решение  $u_1^c, \dots, u_n^c$ .

### Определение

**Стационарным управляемым процессом**  $\{y^c(t), u^c, [t_0, \infty)\}$  называется тройка  $\{y^n(t), u^n(t), t \in [t_0, t_1)\}$ , где  $y^n(t) = y^c(t), u^n(t) = u^c$  - решение уравнений (3.8).

Заметим, что в случае управляемого стационарного процесса правая часть уравнений (3.7) не зависит явным образом от  $t$

$$\dot{x} = \tilde{f}(x), \quad (3.9)$$

где  $\tilde{f}(0) \equiv 0$  и  $x(t_0) \neq 0$ .

Таким образом, необходимо исследовать тривиальное решение системы дифференциальных уравнений (3.7) (или соответственно (3.9)), соответствующее программному движению  $y^n(t)$  управляемого объекта. Теоретической основой анализа текущих отклонений, то есть нетривиальных решений системы (3.7), является теория устойчивости, разработанная А.М. Ляпуновым сто лет назад. Приведем еще два определения устойчивости, необходимые для постановки задач синтеза.

### Определение

Тривиальное решение называется устойчивым с оценкой  $\nu(t)$ , если существуют положительная конечная кусочно-непрерывная функция  $\nu(t)$  ( $\sup_{t_0 \leq t < t_1} \nu(t) < \infty$ ) такая, что выполняется неравенство

$$|x(t)| \leq \nu(t) |x(t_0)| \quad (3.10)$$

для  $\forall x(t_0) \in X_0$  и  $\forall t \in [t_0, t_1)$ , причем  $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu(t) = 0$ , а при  $t_1 < \infty - \nu(t_1) < 1$ .

### Определение

Тривиальное решение называется экспоненциально устойчивым, если существуют положительные числа  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что выполняется неравенство

$$|x(t)| \leq \beta |x(t_0)| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (3.11)$$

для  $\forall x(t_0) \in X_0, \forall t \in [t_0, \infty)$ .

Если окрестность  $X_0$  совпадает со всем пространством состояний  $R^n$ , то говорят об **экспоненциальной (асимптотической) устойчивости**

**тривиального решения в целом.** Очевидно, что из экспоненциальной устойчивости следует асимптотическая устойчивость.

При  $t_1 = \infty$  и  $y^n(t) = y^c(t)$ ,  $u^n(t) \equiv u^c$  в случае выполнения условия теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению и условия принадлежности функции  $\tilde{f}(x)$  классу дважды непрерывно дифференцируемых функций можно показать, что тривиальное решение является и экспоненциально устойчивым [33].

Перейдем к математической постановке задач линейного синтеза позиционного управления. Ограничимся при этом следующим описанием функционального множества  $W$  - это множество кусочно-заданных функций, в каждый момент времени принадлежащих замкнутому множеству  $\Omega$  пространства управлений  $R^s$ :

$$W = \{u(\cdot) \in KC \mid u(t) \in \Omega \subset R^s, t \in [t_0, t_1)\}$$

Предположим, что  $u^n(t) \in \text{int } \Omega$  при  $\forall t \in [t_0, t_1)$ . Физический смысл этого предположения заключается в том, что исполнительный механизм обладает еще некоторыми дополнительными ресурсами для уменьшения возможных текущих отклонений. Выберем линейную стратегию управления

$$u = u^n(t) + \tilde{u}(z, t), \quad (3.12)$$

где  $\tilde{u}$  - дополнительное (позиционное) управление.

Напишем **линейное уравнение в отклонениях**

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\tilde{u}, \quad (3.13)$$

где  $A(t) = \frac{\partial f(y^n(t), u^n(t))}{\partial y}$ ,  $B(t) = \frac{\partial f(y^n(t), u^n(t))}{\partial u}$

и **линейную модель измерений**

$$\tilde{z} = H(t)x + \gamma(t), \quad (3.14)$$

где  $H(t) = \frac{\partial \varphi(y^n(t))}{\partial y}$ ,  $\tilde{z} = z - \varphi(y^n(t))$ .

$z$  - первичная информация, определяемая согласно (3.6).

Требуется найти управление  $u = u^n + \tilde{u}(z, t)$  такое, чтобы текущие отклонения удовлетворяли неравенству (3.11). Задачу (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) будем называть **задачей стабилизации программного движения**. Это одна из основных задач линейного синтеза позиционного управления. Действительно, при  $t_1 = \infty$  будем иметь асимптотическое уменьшение начальных отклонений. При  $t_1 < \infty$  (стабилизация на конечном интервале) необходимо потребовать выполнение неравенства

$$\nu(t_1) < 1 \quad (3.15)$$

Если рассматривается задача стабилизации стационарного движения  $y^c(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1)$ , и функция  $\varphi(y)$  является линейной по циклическим

координатам, то матрицы  $A, B, H$  являются постоянными, что значительно облегчает решение задачи стабилизации.

Постановка задачи (3.12), (3.13), (3.14) линейного синтеза УДС не является единственно возможной. В качестве примера приведем постановку еще одной задачи линейного синтеза позиционного управления, получившей название **задачи слежения**.

Предположим, что имеется нестационарное желаемое движение  $y^r(t), t \in [t_0, \infty)$ . Соответствующее основное управляющее воздействие  $u^r(t)$  не существует или не известно, но зато известно, что

$$y(t) = y^c(t) + \Delta y(t),$$

где  $y^c(t)$  - реализуемое стационарное движение. То есть известен стационарный управляемый процесс  $\{y^c(t), u^c, t \in [t_0, \infty)\}$ . Тогда, воспользовавшись (3.12) и (3.13), где  $x = y - y^c$ , получим следующую задачу: требуется найти такое дополнительное управляющее воздействие  $\tilde{u}(\cdot)$ , чтобы текущее отклонение отслеживало со временем разность  $\Delta y(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow \Delta y(t), \\ t &\rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Задача линейного синтеза (3.12), (3.13), (3.14), (3.16) называется **задачей слежения**, а УДС, реализующая решение этой задачи, получила название **следающей системы**.

Следует отметить, что данные постановки задачи синтеза УДС, являясь простейшими, в то же самое время позволяют наиболее быстро войти в круг проблем механики управляемых систем.

### 3.4 УПРАВЛЯЕМОСТЬ И СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В этом параграфе в основном будем рассматривать линейные стационарные управляемые системы, описывающие поведение отклонений от стационарного процесса при дополнительных управляющих воздействиях  $\tilde{u}$ . Для простоты записи оставим прежние обозначения принадлежности управления  $u$  функциональному множеству  $W$

$$u(\cdot) \in W = \{u(\cdot) \in KC \mid u(t) \in \tilde{\Omega} \subset R^s\},$$

где  $KC$  – пространство векторных кусочно непрерывных функций,  $\tilde{\Omega}$  – замкнутое выпуклое множество возможных значений позиционных управлений,  $R^s$  -  $s$ -мерное пространство позиционных управлений.

Заметим, что так как  $u^c \in \text{int } \Omega$ , то  $0 \in \text{int } \tilde{\Omega}$ .

Рассмотрим линейную управляемую систему с функциональным включением

$$\dot{x} = Ax + Bu; \tag{3.17}$$

$$u(t) \in W; \quad (3.18)$$

где  $A$  - матрица коэффициентов  $a_{ij}$ ,  $x(t) = y(t) - y^{\pi}(t)$  -  $n$ -мерный вектор-столбец отклонений,  $u$  -  $s$ -мерный вектор-столбец управляющих воздействий с матрицей  $B$  размера  $n \times s$  произвольных коэффициентов  $b_{ij}$ . Исследуем влияние управления  $u$  на состояние  $x$  линейной системы (3.17). Для этого введем следующее понятие.

#### Определение

Управление  $u^c(t)$ , обеспечивающее асимптотическую устойчивость тривиального решения  $x(t) \equiv 0$  системы (3.17) (а тем самым и программного движения  $y^{\pi}(t)$  исходной системы (3.1)), называется стабилизирующим управлением.

#### Определение

Линейная система (3.17) называется вполне (или полностью) управляемой, если с помощью управления можно за конечное время  $t$  перевести систему из любого начального состояния  $x(t_0) = \xi$  в заданное состояние  $x(t) = \eta$ .

#### Определение

Если в системе (3.17) матрица  $B = 0$ , то линейная система называется неуправляемой.

#### Определение

Для линейных стационарных систем ( $A = \text{const}, B = \text{const}$ ) блочная матрица  $U = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  называется матрицей управляемости.

Для линейных стационарных систем существует простой и удобный критерий управляемости, основанный на вычислении ранга матрицы  $U$ . Предположим, что в начальный момент  $x(0) = 0$ , и найдем множество  $D$  (область достижимости) в евклидовом пространстве отклонений  $x \in R^n$ , в каждую точку которого можно привести систему (3.17) с помощью управления  $u(t) \in W$  за фиксированное время  $t_1$ ,  $0 < t_1 < \infty$ .

#### Лемма I.

Если  $\text{rank } U = n$ , то множество  $D$  - выпуклое тело в пространстве  $R^n$  ( $\dim D = n$ ).

Приведем доказательство [2] леммы. Запишем решение системы (3.17)

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} B u(t) dt, \quad (3.19)$$

где  $e^{At}$  - матричная экспонента [3]. Так как  $u(t) \in \tilde{\Omega}$  для  $\forall t \in [0, t_1]$ ,  $\tilde{\Omega}$  - выпуклое множество и оператор (3.19) линеен, то множество  $D$  выпукло.

Рассмотрим теперь плоскость в пространстве отклонений  $R^n$  наименьшей размерности  $m$ , содержащую выпуклое множество  $D$ . Такая плоскость называется несущей плоскостью. Так как  $u \equiv 0$  принадлежит функциональному множеству  $W$ , то  $x=0$  принадлежит множеству  $D$ , и следовательно, несущая плоскость является подпространством  $R^m \subset R^n$ .

Докажем, что  $O \in \text{int } D$ , то есть  $m=n$ , и тем самым  $D$  есть выпуклое тело, то есть  $\dim D = n$ .

Предположим, что точка  $O$  лежит на границе выпуклого множества  $D$ . Через любую граничную точку выпуклого множества можно провести хотя бы одну опорную гиперплоскость, т.е. такую гиперплоскость, что всё множество  $D$  расположено целиком в одном из двух (замкнутых) полупространств, на которые эта гиперплоскость разбивает пространство  $R^n$ . Через  $\eta \neq 0$  обозначим градиент этой опорной гиперплоскости, расположенный в другом полупространстве. Тогда имеет место очевидное соотношение

$$x^T \eta \leq 0, \quad \forall x \in D,$$

которое можно записать в виде следующего равенства

$$\max_{x \in D} (x^T \eta) = 0,$$

или, используя (3.19), перепишем

$$\max_{x \in D} (x^T \eta) = \max_{u(\cdot) \in U} \int_0^{t_1} \eta^T e^{A(t-t)} B u(t) dt = 0. \quad (3.20)$$

Равенство (3.20) возможно только в том случае, если

$$\eta^T e^{A(t-t)} B \equiv 0 \quad \text{для } \forall t \in [0, t_1]. \quad (3.21)$$

Положим  $t = t_1$ , тогда  $\eta^T B = 0$ . Так как левая часть тождества (3.21) является аналитической вектор-функцией, то, продифференцировав ее  $i-1$  раз, где  $i=2, \dots, n$ , и подставив  $t = t_1$ , получим еще  $n-1$  равенств

$$\eta^T A^j B = 0, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (3.22)$$

Таким образом, имеем следующее матричное равенство

$$\eta^T (B, AB, \dots, A^{n-1}B) = \eta^T U = 0 \quad (3.23)$$

Из равенства (3.23) следует, что  $n$  строк матрицы управляемости линейно независимы, то есть ее ранг меньше  $n$ . Получено противоречие с условиями леммы. Следовательно, начало координат является внутренней точкой множества  $D$ . Лемма доказана.

Предположим теперь, что  $\tilde{\Omega} = R^s$ , то есть управления  $u_1(t), \dots, u_s(t)$  могут принимать любые значения в пространстве управлений  $R^s$ . В этом случае можно дать еще два эквивалентных определения полной управляемости системы (3.17). В силу линейности системы (3.17) в качестве начальной (первой) точки можно взять начало координат. Тогда определение полной управляемости соответствует ситуации, когда область достижимости  $D$  совпадает со всем пространством отклонений  $R^n$ .

#### Определение

Если областью достижимости системы (3.17) является все пространство отклонений, то система (3.17) называется полностью управляемой.

Если же начало координат взять в качестве конечной (второй) точки, то тогда естественно сначала ввести понятие области управляемости как множества  $\tilde{D} \subset R^n$ , из каждой точки которого можно привести систему (3.17) в начало координат за конечное время. Если  $\tilde{D} = R^n$ , то говорят, что система (3.17) полностью управляема.

### Определение

Если область управляемости системы (3.17) совпадает со всем пространством отклонений, то система (3.17) называется полностью управляемой.

### Теорема I. (критерий полной управляемости линейной системы)

Для полной управляемости системы (3.17) необходимо и достаточно, чтобы  $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$ .

Доказательство [2] необходимости.

Предположим противное, что

$$\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = m < n$$

то есть  $n$  строк матрицы управляемости линейно зависимы. Следовательно, существуют не все равные нулю вещественные числа  $\eta_1, \dots, \eta_n$ , такие, что  $\eta^T(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = 0$ , где  $\eta^T = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$  и  $|\eta| \neq 0$ . Этому матричному равенству соответствует  $n \times s$  скалярных равенств или  $n$  векторных

$$\eta^T B = 0, \quad \eta^T AB = 0, \dots, \eta^T A^{n-1}B = 0. \quad (3.24)$$

Так как по теореме Гамильтона – Кэли любая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n E_n = 0. \quad (3.25)$$

где  $a_1, \dots, a_n$  - коэффициенты характеристического полинома матрицы  $A$

$$\det(\lambda E_n - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (3.26)$$

то  $\eta^T A^n B = -\eta^T (a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n E_n) B = 0$ . Следовательно, и  $\eta^T A^j B = 0$  для любого натурального  $j$ . В связи с тем, что по определению матричная экспонента  $\exp(A(t-\tau))$  есть ряд

$$e^{A(t-\tau)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^i}{i!} A^i, \quad (3.27)$$

то получаем, что  $\eta^T e^{A(t-\tau)} B \equiv 0$  для  $\forall t \geq \tau$  и

$$\eta^T x(t) = \int_0^t \eta^T e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \equiv 0 \quad \text{для } \forall u(\cdot) \in \Omega. \quad (3.28)$$

Геометрический смысл тождества (3.28) – все траектории системы (3.17) при нулевых начальных условиях находятся в гиперплоскости, проходящей через начало системы координат и имеющей градиент  $\eta$ . Следовательно, при сделанном предположении область достижимости  $D$  не совпадает со всем пространством отклонений, что противоречит условию полной управляемости. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности.

Предположим вначале, что  $u(\cdot) \in \Omega_l = \{u_i(t) \leq l, i = 1, \dots, s\}$ . Тогда по лемме I множество достижимости  $D_l$  в момент  $t_1 = 1$  есть выпуклое тело и начало координат является его внутренней точкой  $O \in \text{int } D_l$ . Пусть теперь  $l \rightarrow \infty$ . Докажем тогда, что  $D_\infty = R^n$ . Действительно, возьмем  $\forall \tilde{x} \in R^n$  и соединим эту точку с началом координат. Так как  $O \in \text{int } D_l$ , то найдется точка  $x^l \in D_l$ , лежащая на отрезке  $(0, \tilde{x})$ , то есть  $x^l = \rho \tilde{x}$ , где  $0 < \rho < 1$ . Поскольку  $x^l \in D_l$  и

существует управление  $u^l(\cdot) \in U_l = \{u^l(t) \in \Omega_l = \{|u_i^l(t)| \leq l\}$  такое, что  $x^l = \int_0^1 e^{A(1-\tau)} B u^l(\tau) d\tau$ . Тогда  $\tilde{x} = \frac{1}{\rho} x^l = \int_0^1 e^{A(1-\tau)} B \left( \frac{1}{\rho} u^l(\tau) \right) d\tau$ , то есть существует  $\tilde{u}(\cdot)$  такое,  $\tilde{u}(\cdot) = \frac{1}{\rho} u^l(\tau)$  и точка  $\tilde{x}$  достижима в момент  $t_1 = 1$ . Достаточность доказана.

Следствие 1 При  $s = 1$  критерий полной управляемости принимает более простой вид

$$\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0. \quad (3.29)$$

Следствие 2 Если в системе (3.17) матрица  $B \neq 0$  и имеет размерность  $n \times n$ , то соответствующим подбором ее элементов линейную систему всегда можно сделать полностью управляемой.

Одним из важнейших следствий критерия полной управляемости является достаточное условие стабилизируемости линейных стационарных систем.

### Теорема

Если линейная стационарная система вполне управляема, то она стабилизируема.

Эта теорема дает возможность стабилизировать программные движения и нелинейных систем. Пусть для управляемой стационарной механической системы, описываемой уравнениями (3.1), имеются идеальные измерительные устройства, причём по поступающей от них первичной информации можно узнать точные текущие значения отклонений. В этом случае можно строить управление линейное по отклонениям, то есть вида

$$Bu = Bx$$

и подобрать элементы матрицы  $B$  так, чтобы в рамках линейной постановки решить задачу стабилизации. Это всегда возможно сделать, так как линеаризованные уравнения движения примут вид

$$\dot{x} = Ax + Bx, \quad (3.30)$$

а значит, можно так подобрать коэффициенты  $b_{ij}$ , чтобы все корни характеристического уравнения для системы (3.30) имели отрицательные действительные части. Поэтому согласно теореме об устойчивости систем по линейному приближению, будем иметь асимптотическую устойчивость тривиального решения  $x \equiv 0$  нелинеаризованной системы возмущенного движения, и тем самым, асимптотическую устойчивость программного движения  $y^H(t)$  исходной управляемой системы (3.1).

При подборе значений элементов матрицы  $B$  удобно пользоваться следующими соображениями. Во-первых, желая построить по возможности простое управление, ищут его в скалярном виде, то есть два из трех столбцов матрицы  $B$  можно положить нулевыми. Во-вторых, подбор коэффициентов  $b_{ij}$ , обеспечивающих необходимые значения корней характеристического уравнения, можно провести методом неопределенных коэффициентов. Для этого заранее задаются нужные значения  $\lambda_i$ , по ним строится характеристическое уравнение (например, характеристическое уравнение  $(\lambda + 1)^n = 0$  имеет  $n$  отрицательных

корней  $\lambda_i = -1$ ) и приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$  к соответствующим коэффициентам характеристического уравнения системы (3.30). Решая полученные уравнения, определяем значения  $b_{ij}$ .

Построив стабилизирующее управление, можно проверить критерий управляемости и стабилизируемости, посчитав ранг матрицы управляемости  $U$  для найденных значений коэффициентов  $b_{ij}$ .

В завершение приведем без доказательства критерий полной управляемости нестационарных линейных систем вида (3.13), т.е. систем, у которых хотя бы одна из матриц  $A$  или  $B$  не является постоянной. В связи с этим расширим понятие управляемости.

#### Определение

Система (3.13) называется вполне управляемой с момента  $t_0$ , если существует момент  $t$  и конечное управление  $u(\tau)$  ( $t_0 \leq \tau \leq t$ ), переводящее систему из произвольного начального состояния  $x(t_0) = \zeta$  в заданное состояние  $x(t) = \eta$ .

Сформулируем критерий полной управляемости. Образует симметричную матрицу  $W(t, t_0)$ , называемую грамианом управляемости

$$W(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau. \quad (3.31)$$

Здесь  $\Phi(t, t_0)$  - переходная матрица системы (3.13), удовлетворяющая матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t, t_0) = E$$

С помощью переходной матрицы удобно записать решение системы (3.13)

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Очевидно,  $W(t, t_0) \geq 0$ .

#### Теорема

Для того, чтобы нестационарная система (3.13) была вполне управляема с момента  $t_0$ , необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой момент  $t$ , для которого  $\det W(t, t_0) \neq 0$ , т.е.  $W(t, t_0) > 0$ .

Эквивалентная формулировка теоремы об управляемости.

#### Теорема

Для полной управляемости системы (3.13) с момента  $t_0$  необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\zeta^T \Phi(t, \tau) B(\tau) = 0, \quad \text{где } t_0 \leq \tau \leq t, \quad (3.32)$$

имело единственное тривиальное решение  $\zeta \equiv 0$  для всех  $\tau$ .

Замечание Поскольку полная управляемость определяется видом матриц  $A$  и  $B$ , принято говорить об управляемости или неуправляемости пары  $(A, B)$ .

Замечание Грамиан управляемости служит мерой управляемости, поскольку позволяет судить не только о принципиальной возможности управлять системой, но и, до некоторой степени, о качестве управления.

Рассмотрим пример стабилизации программных управляемых движений маятника.

### 3.5 ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА

Для анализа устойчивости по Ляпунову заданного движения управляемой системы выпишем для уравнений (3.5) соответствующие уравнения возмущенного движения. Для этого опять введем отклонения  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ) для переменных  $y_i$  ( $i=1,2,3$ ) согласно равенствам:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + k_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 + k_2 \end{cases}$$

Перейдём от системы (3.5) к уравнениям в отклонениях и получим уравнения возмущённого движения в нормальном виде.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{A-C+mh^2}{2(A+mh^2)} ((k_2+x_3)^2 \sin 2(k_1+x_1) - k_2^2 \sin 2k_1) - \frac{mgh}{A+mh^2} (\sin(k_1+x_1) - \sin k_1) \\ \dot{x}_3 = -2 \frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2) \sin^2(k_1+x_1) + C \cos^2(k_1+x_1)} x_2 (x_3+k_2) \cos(x_1+k_1) \sin(x_1+k_1) \end{cases} \quad (3.33)$$

Линеаризуем полученную систему. Для этого разложим правые части уравнений (3.33) в ряд по степеням отклонений и оставим члены только первого порядка малости.

При этом учтем соотношения

$$\begin{aligned} \sin(x_1+k_1) \cos(x_1+k_1) &= (\sin x_1 \cos k_1 + \cos x_1 \sin k_1)(\cos x_1 \cos k_1 - \sin x_1 \sin k_1) = \\ &= (\sin k_1 + x_1 \cos k_1)(\cos k_1 - x_1 \sin k_1) = x_1 \cos 2k_1 + \sin k_1 \cos k_1 \end{aligned}$$

и для бесконечно малых величин  $\frac{1}{x+\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ . Получим линейную систему дифференциальных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = a_{32}x_2 \end{cases} \quad (3.34)$$

которую можно записать в матричном виде, где элементы  $a_{ij}$  соответствующей матрицы  $A$  определяются равенствами:

$$\begin{aligned} a_{12} &= 1 \\ a_{21} &= \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} k_2^2 \cos 2k_1 - \frac{mgh}{A+mh^2} \cos k_1 \\ a_{23} &= \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} k_2 \sin 2k_1 \\ a_{32} &= -2 \frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2) \sin^2 k_1 + C \cos^2 k_1} k_2 \sin 2k_1 \end{aligned}$$

Составив и решив характеристическое уравнение для этой системы

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & 0 \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda(a_{21} + a_{32}a_{23} - \lambda^2) = 0,$$

имеем один нулевой корень и соответственно два ненулевых:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{a_{21} + a_{32}a_{23}}.$$

При выполнении неравенства

$$a_{21} + a_{32}a_{23} > 0, \tag{3.35}$$

или в явном виде при

$$\frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} k_2^2 \cos 2k_1 - \frac{mgh}{A+mh^2} \cos k_1 - 2 \frac{(A-C+mh^2)^2}{(A+mh^2)[(A+mh^2) \sin^2 k_1 + C \cos^2 k_1]} k_2^2 \sin^2 2k_1 > 0$$

один из корней  $\lambda_{2,3}$  имеет положительную вещественную часть. Поэтому по теореме о неустойчивости системы уравнений по ее линейному приближению имеем неустойчивость заданных программных движений.

Анализ и получение аналитического решения последнего неравенства представляется очень сложной задачей. Но проверить его выполнение для заданных программных движений при соответствующих значениях  $k_1$  и  $k_2$  несложно. Пусть необходимо реализовать программные движения маятника для значений  $k_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ рад}$  и  $k_2 = 0,5 \text{ рад/с}$ . Легко видеть, что при этих значениях неравенство (3.35) выполнено, тем самым соответствующее программное

движение является неустойчивым, то есть фактически не может быть реализовано одним лишь программным управлением.

Для иллюстрации полученного результата построим графики отклонений программного движения управляемой системы для указанных значений  $k_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ рад}$  и  $k_2 = 0,5 \text{ рад/с}$ . Неограниченный рост отклонений  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ), изображенных на рисунках 18-20, подтверждает неустойчивость программного движения, реализованного полученным программным управлением.

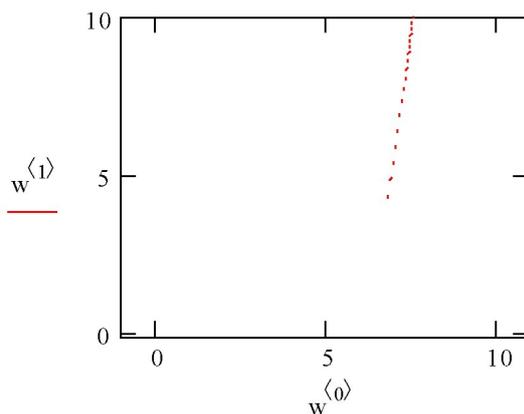


Рис. 18 График отклонения  $x_1(t)$

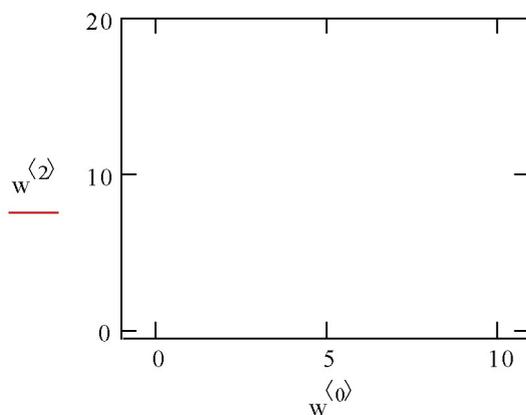


Рис. 19 График отклонения  $x_2(t)$

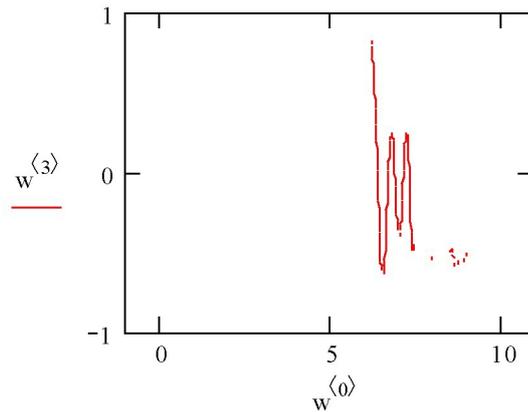


Рис. 20 График отклонения  $x_3(t)$

Неравенство (3.35) не выполняется для значений  $k_1 = \frac{\pi}{3} \text{ рад}$  и  $k_2 = 5 \text{ рад/с}$ . В этом случае все три корня характеристического уравнения имеют нулевую действительную часть, тем самым на основе анализа уравнений линейного приближения вывода об устойчивости или неустойчивости решений исходной нелинейной системы сделать нельзя. Построим графики отклонений для этого случая.

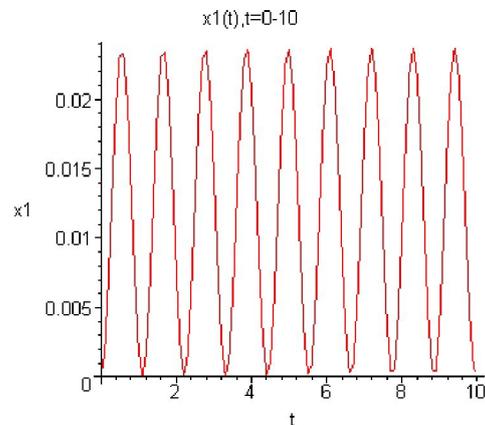


Рис. 21 График отклонения  $x_1(t)$

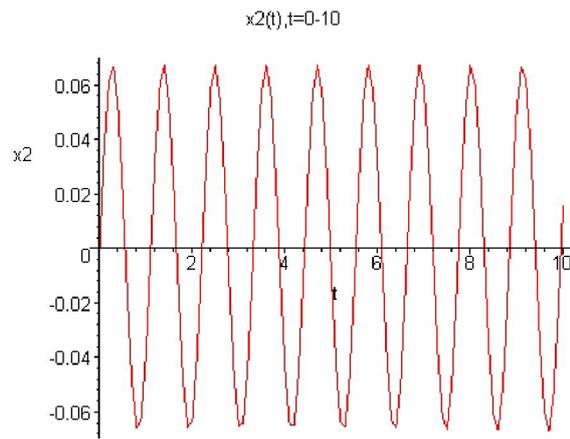


Рис. 22 График отклонения  $x_2(t)$

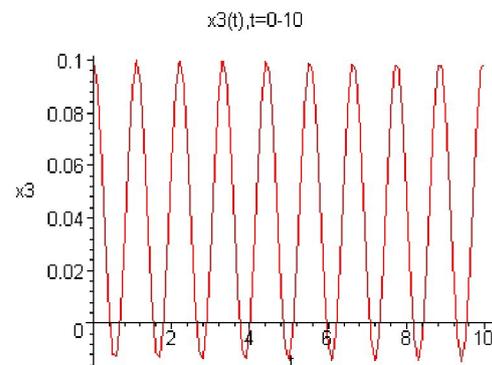


Рис. 23 График отклонения  $x_3(t)$

Добавим к системе уравнений первого приближения (3.34) стабилизирующее управление, чтобы сделать её тривиальное решение асимптотически устойчивым при любых значениях параметров  $k_1$  и  $k_2$ .

Выберем управление следующим образом:

$$u = Bx, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

и составим систему (3.30), которая с управлением (3.36) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = (a_{21} + b_{21})x_1 + a_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = b_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{cases} \quad (3.37)$$

Запишем характеристическое уравнение для этой системы.

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & a_{12} & 0 \\ a_{21} + b_{21} & -\lambda & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

После раскрытия определителя получим уравнение третьей степени относительно  $\lambda$ :

$$\lambda^3 - b_{11}\lambda^2 - \lambda(a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12} + a_{12}b_{21}) + a_{23}(a_{32}b_{11} - b_{31}) = 0 \quad (3.38)$$

Для того, чтобы тривиальное решение системы (3.37) было асимптотически устойчиво, достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (3.38) имели отрицательные вещественные части. Подберем элементы  $b_{ij}$  таким образом, чтобы уравнение (3.38) совпало с уравнением  $(\lambda + 1)^3 = 0$ , все решения которого равны  $-1$  и являются тем самым отрицательными вещественными числами. Согласно методу неопределенных коэффициентов, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$  уравнений (3.38) и

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0,$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} -b_{11} = 3 \\ -(a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12} + a_{12}b_{21}) = 3, \\ a_{23}(a_{32}b_{11} - b_{31}) = 1 \end{cases}$$

из которой определим значения элементов  $b_{ij}$ :

$$\begin{cases} b_{11} = -3 \\ b_{21} = -(3 + a_{23}a_{32} + a_{21}) \\ b_{31} = -\frac{3a_{23}a_{32} + 1}{a_{23}} \end{cases} \quad (3.39)$$

(при вычислении коэффициента  $b_{21}$  учтено, что  $a_{12} = 1$ ).

Согласно критерию управляемости автономных систем, чтобы система вида (3.17) или (3.30) была управляема, необходимо и достаточно, чтобы ранг соответствующей матрицы управляемости равнялся размерности пространства, то есть трем. Легко убедиться, что при выборе управления (3.36) с элементами матрицы  $B$ , вычисленными по формулам (3.39), этот критерий выполнен. Тем самым получили еще одно подтверждение того, что с помощью выбранного управления система (3.37) полностью управляема и тем самым стабилизируема.

Добавив полученное управление в систему возмущенного движения (3.33), получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + b_{11}x_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{A-C+mh^2}{2(A+mh^2)}((k_2+x_3)^2 \sin 2(k_1+x_1) - k_2^2 \sin 2k_1) - \frac{mgh}{A+mh^2}(\sin(k_1+x_1) - \sin k_1) + b_{21}x_1 \\ \dot{x}_3 = -2 \frac{A-C+mh^2}{(A+mh^2) \sin^2(k_1+x_1) + C \cos^2(k_1+x_1)} x_2(x_3+k_2) \cos(x_1+k_1) \sin(x_1+k_1) + b_{31}x_1 \end{cases} \quad (3.40)$$

Во-первых, система (3.40) имеет тривиальное решение  $x=0$ , соответствующее программному движению  $y^{\text{п}}(t)$  исходной управляемой системы (3.1). Во-вторых, при выборе управления вида (3.36) с коэффициентами (3.39) система (3.37), являясь ее линейным приближением, имеет все три отрицательных корня характеристического уравнения. Поэтому по теореме об устойчивости по линейному приближению заключаем, что управление (3.36), с (3.39) обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения  $x=0$  системы возмущенного движения (3.40) и, тем самым, асимптотическую устойчивость программного движения  $y^{\text{п}}(t)$  исходной управляемой системы (3.1).

Для иллюстрации полученного результата построим графики отклонений численного решения системы (3.40) с коэффициентами (3.39) для значений  $k_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ рад}$ ,  $k_2 = 0,5 \text{ рад/с}$  (ранее эти управляемые движения были неустойчивы):

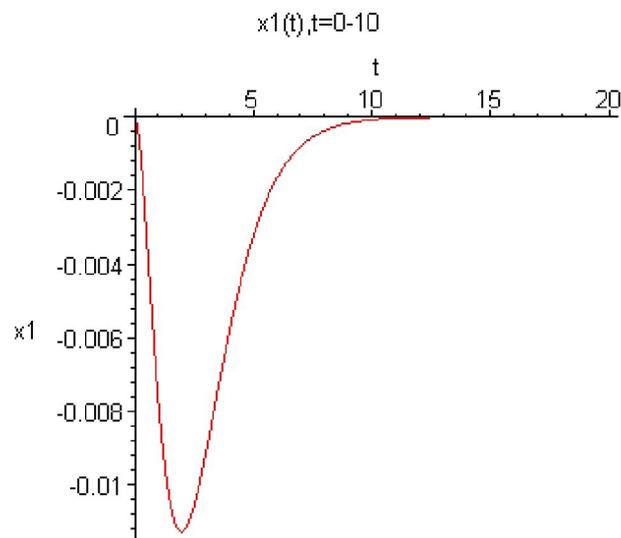


Рис. 24 График зависимости отклонения  $x_1(t)$

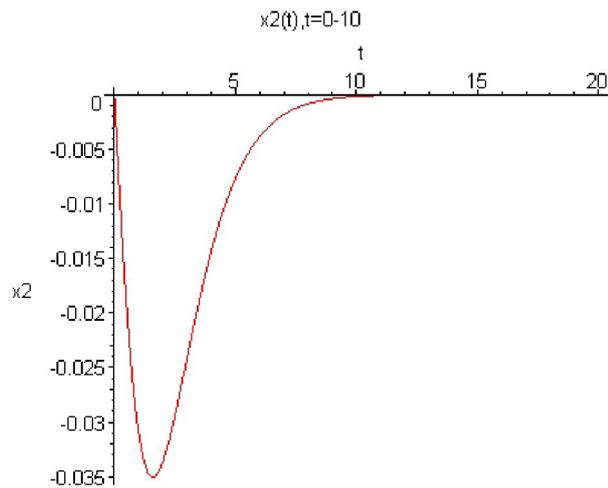


Рис. 25 График зависимости отклонения  $x_2(t)$

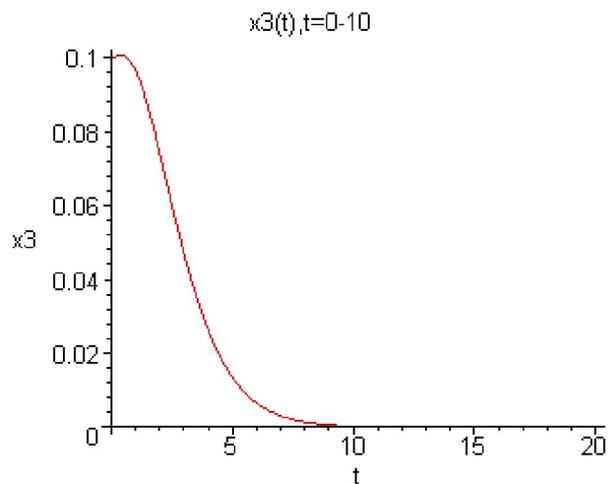


Рис. 26 График зависимости отклонения  $x_3(t)$

### 3.6 СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА.

В пункте 2.6 при исследовании методом Рауса устойчивости стационарных движений маятника было установлено (см. таблицу 3), что относительное положение равновесия маятника  $\theta = \pi$ ,  $\omega = 5$  неустойчивое, а положение  $\theta = 1,36$ ,  $\omega = 5$  — устойчивое (но не асимптотически).

Поставим и решим задачу о стабилизации этих стационарных движений, то есть определим и добавим в систему управления, делающие оба этих относительных равновесия маятника асимптотически устойчивыми.

Линеаризованные уравнения возмущенного движения в окрестности относительного равновесия  $\theta = \pi$ ,  $\omega = 5$  имеют вид (1.23):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \left( \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} \omega^2 + \frac{mgh}{A+mh^2} \right) x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\dot{x} = Ax,$$

где матрица  $A$  имеет два ненулевых элемента

$$\begin{aligned} a_{12} &= 1 \\ a_{21} &= \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} \omega^2 + \frac{mgh}{A+mh^2} \end{aligned}$$

и семь нулевых.

Выберем управление следующим образом:

$$u = Bx, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 1 & b_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

и составим систему (3.30), которая с управлением (3.36) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + b_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 + b_{33}x_3 \end{cases} \quad (3.42)$$

или в явном виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + b_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 = \left( \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2} \omega^2 + \frac{mgh}{A+mh^2} \right) x_1 + b_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 + b_{33}x_3 \end{cases}$$

Запишем для такой системы характеристическое уравнение.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & -\lambda & b_{23} \\ 0 & 1 & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - b_{33}\lambda^2 - \lambda(b_{23} + a_{12}a_{21}) + (a_{12}a_{21}b_{33} - b_{13}a_{21}) = 0. \quad (3.43)$$

Для того, чтобы тривиальное решение системы (3.42) было асимптотически устойчиво, достаточно, чтобы все корни его характеристического уравнения (3.43) имели отрицательные вещественные части. Подберем элементы  $b_{ij}$  таким образом, чтобы уравнение совпало с уравнением  $(\lambda + 1)^3 = 0$ , все решения которого равны  $-1$ . Согласно методу неопределенных коэффициентов, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$  уравнений (3.43) и

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0,$$

получим численные значения коэффициентов из равенств

$$\begin{cases} b_{13} = -\frac{3a_{21} + 1}{a_{21}} \\ b_{23} = -3 - a_{12}a_{21} \\ b_{33} = -3 \end{cases}$$

Для иллюстрации полученного результата построим графики отклонений численного решения системы возмущенного движения в окрестности положения относительного равновесия  $\theta = \pi$ ,  $\omega = 5$  с добавленным управлением (3.41) (ранее это стационарное движение было неустойчиво):

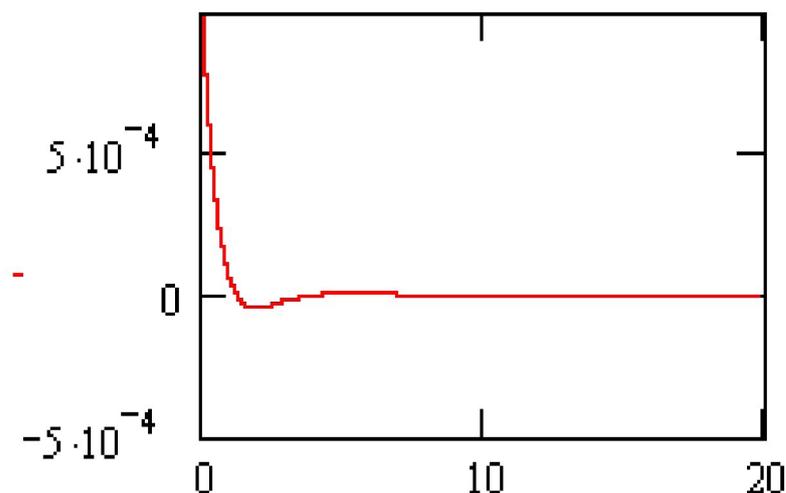


Рис.27 График зависимости отклонения  $x_1(t)$

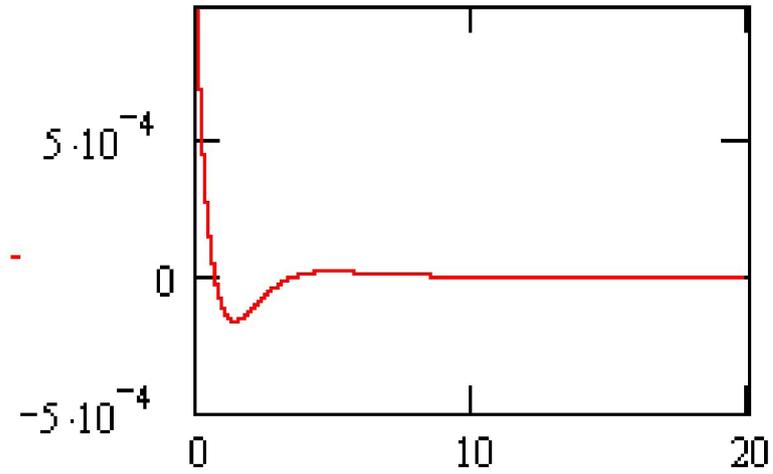


Рис.28 График зависимости отклонения  $x_2(t)$

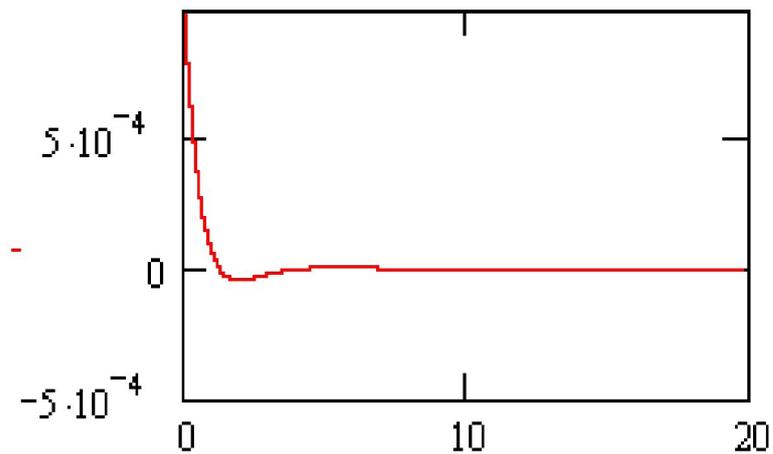


Рис.28 График зависимости отклонения  $x_3(t)$

Аналогично проведем стабилизацию стационарного движения маятника  $\theta = 1.36$ ,  $\omega = 5$  (получим из устойчивых движений асимптотически устойчивые).

Линейное приближение уравнений возмущенного движения имеют вид (1.21):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2}(\sin 2\theta - \omega^2 \sin^2 \theta)x_1 \\ \dot{x}_3 = \frac{C-A-mh^2}{(A+mh^2)\sin^2 \theta + C \cos^2 \theta}x_2\omega \sin 2\theta \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\dot{x} = Ax,$$

где матрица  $A$  имеет три ненулевых элемента

$$\begin{aligned} a_{12} &= 1 \\ a_{21} &= \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2}(\sin 2\theta - \omega^2 \sin^2 \theta) \\ a_{32} &= \frac{C-A-mh^2}{(A+mh^2)\sin^2 \theta + C \cos^2 \theta}\omega \sin 2\theta \end{aligned}$$

Добавив управление вида:

$$u = Bx, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + b_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 = \frac{A-C+mh^2}{A+mh^2}(\sin 2\theta - \omega^2 \sin^2 \theta)x_1 + b_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{C-A-mh^2}{(A+mh^2)\sin^2 \theta + C \cos^2 \theta}x_2\omega \sin 2\theta + b_{33}x_3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + b_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = a_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{cases}$$

с характеристическим уравнением.

$$\lambda^3 - b_{33}\lambda^2 - \lambda(b_{23}a_{32} + a_{21}) + (a_{21}b_{33} - b_{13}a_{32}a_{21}) = 0 \quad (3.45)$$

Подберем элементы  $b_{ij}$  таким образом, чтобы уравнение (3.45) совпало с уравнением  $(\lambda+1)^3 = 0$ , все решения которого равны  $-1$ . Применяв метод неопределенных коэффициентов, получим

$$\begin{cases} b_{13} = -\frac{3a_{21}+1}{a_{32}a_{21}} \\ b_{23} = -\frac{3+a_{21}}{a_{32}} \\ b_{33} = -3 \end{cases}$$

Поэтому по теореме об устойчивости по линейному приближению заключаем, что управление (3.44) обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения  $x=0$  системы возмущенного движения и, тем самым, асимптотическую устойчивость относительного положения равновесия  $\theta=1.36$ ,  $\omega=5$  маятника.

Для иллюстрации полученного результата проинтегрируем численно и построим графики отклонений системы возмущенного движения в окрестности положения относительного равновесия  $\theta=1.36$ ,  $\omega=5$  с добавленным управлением (3.44) (ранее это стационарное движение было просто устойчиво, но не асимптотически):

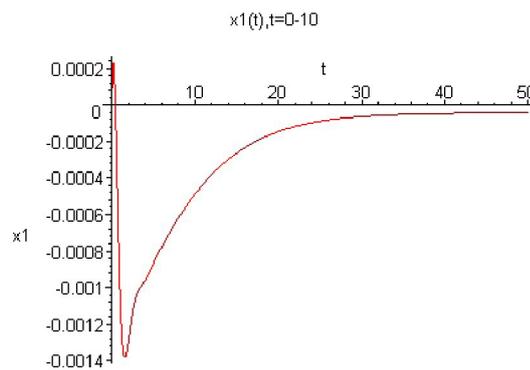


Рис.30 График зависимости отклонения  $x_1(t)$

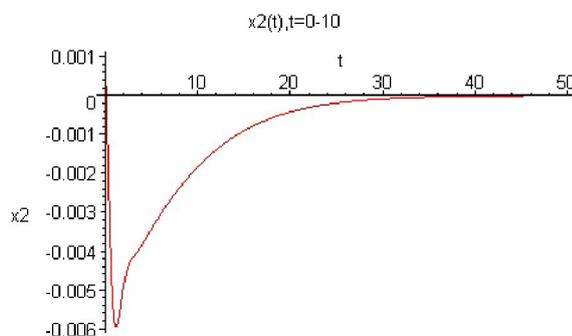


Рис.31 График зависимости отклонения  $x_2(t)$

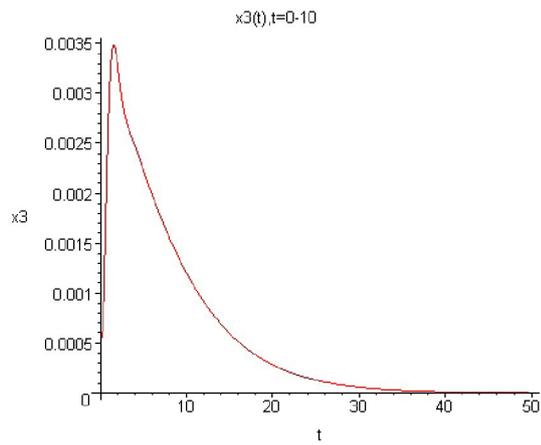


Рис.32 График зависимости отклонения  $x_3(t)$

Асимптотическая сходимость графиков к нулю демонстрирует асимптотическую устойчивость исследуемого стационарного движения  $\theta = 1.36$ ,  $\omega = 5$ , реализуемую стабилизирующим управлением (3.44).

## ГЛАВА 4. СИНТЕЗ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМ

Эта глава посвящена одной из вышеперечисленных проблем теории управления, а именно - построению и стабилизации программного движения неавтономной лагранжевой системы. Основное интерес изложенных в этой главе результатов состоит в том, что исследованное программное движение в общем случае произвольно и может не являться собственным движением системы, а управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость этого программного движения, найдено аналитически в общем виде.

В главе рассматривается неавтономная управляемая механическая система, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями Лагранжа второго рода. Для нее исследуются задача о синтезе и стабилизации управляющих воздействий, реализующих заданное нестационарное программное движение системы, не являющееся его собственным движением в том смысле, что функции, описывающие поведение системы, не обязаны быть решением соответствующей исходной системы. Стабилизация этого движения подразумевает построение управляющих воздействий, обеспечивающих асимптотическую устойчивость этого движения. Исследование проводится на основе прямого метода Ляпунова с использованием функции Ляпунова со знакопостоянными производными, с применением метода предельных уравнений и предельных систем.

Также приведено решение прикладной задачи о стабилизации нестационарных программных движений твердого тела, закрепленного на подвижной платформе, в том числе вывод уравнений движения и уравнений возмущенного движения в векторном и скалярном виде, построение программного и стабилизирующего управления с учетом внешних сил, воздействующих на рассматриваемую механическую систему.

В качестве демонстрационного примера рассматривается задача о синтезе и стабилизации нестационарных программных движений математического маятника с произвольно движущейся точкой подвеса. Представлены графики численного интегрирования уравнений с полученными управлениями, наглядно иллюстрирующие асимптотическое поведение рассматриваемых систем в окрестности заданных программных движений.

### 4.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая механическая система, описываемая уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \quad (4.1)$$

где  $q \in R^n, \dot{q} \in R^n$  — обобщённые координаты и скорости (вектор - столбцы). Кинетическая энергия системы представима в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (4.2)$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(t, q) \dot{q}$$

- квадратичная форма скоростей  $\dot{q}$ , а матрица  $A$  размерности  $n \times n$ , симметрична и такова, что для нее справедливы равенства

$$\alpha_0 E \leq A(t, q) \leq \alpha_1 E \quad (0 < \alpha_0 < \alpha_1 - const)$$

$$T_1 = B^T(t, q) \dot{q}$$

— линейная форма скоростей  $\dot{q}$ , а  $B(t, q)$  —  $n$ - вектор-столбец.

$$T_0 = T_0(t, q)$$

— скалярная функция.

Величина  $Q$  в правой части уравнений (4.1) представляет собой сумму внешних обобщенных сил, действующих на механическую систему и управляющий воздействий, определяемых в дальнейшем. В общем случае будем считать, что действующие на систему внешние силы не равны нулю, т.е.  $Q_{en} \neq 0$ .

Движение системы рассматривается на множестве  $G = R^+ \times \Gamma$ ,  $\Gamma = \{\|q\| \leq H, \|\dot{q}\| \leq H, H > 0 - const\}$ . Предполагается, что уравнения (4.1) удовлетворяют условиям существования и единственности решений в области  $G$ .

Уравнения управляемого движения системы имеют вид:

$$A\ddot{q} + M + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{q} + \left[ \frac{\partial B}{\partial q^T} - \frac{\partial B^T}{\partial q} \right] \dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q} = Q_{en} + Q_u, \quad (4.3)$$

где

$$M_i = \dot{q}^T \frac{\partial A_i}{\partial q} \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (4.4)$$

—  $i$ -ая компонента вектор-столбца, вычисляемая по формуле :

$$M_i = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (i = \overline{1, n})$$

### Определение

Программным (желаемым) движением системы назовем пару  $(r(t), \dot{r}(t))$ , где  $r(t)$ -ограниченная, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая  $n$ -мерная вектор-функция, описывающая некоторое заданное движение механической системы.

В общем случае функция  $r(t)$ , может не являться решением системы (4.1). Поэтому реализация программных движений будем рассматривать задачу о двухуровневом управлении.

Добавим к правой части системы (4.1) управляющие силы вида:

$$Q_u = Q_{np} + Q_{cm}$$

где  $Q_{np}$  – силы, реализующие программное движение  $r(t)$ ,  $Q_{cm}$  – стабилизирующие его.

Тем самым имеем две взаимосвязанные задачи:

1) О реализации программных движений  $r(t)$ : определить вид сил  $Q_{np}$ , при которых функция  $r(t)$  является решением системы (4.1) при взаимодействии сил  $Q_{np}$ .

2) О стабилизации программного движения: указать управление  $Q_{cm}$  и условия на силы  $Q_{en}$  (исходя из их вида), при которых программное движение  $(r(t), \dot{r}(t))$  системы (4.1) будет асимптотически устойчиво.

Управление  $Q_{np}$ , будем называть программным, а  $Q_{cm}$  будем называть стабилизирующим.

Тогда уравнения управляемого движения примут вид:

$$A\ddot{q} + M + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{q} + \left[ \frac{\partial B}{\partial q^T} - \frac{\partial B^T}{\partial q} \right] \dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q} = Q_{en} + Q_{np} + Q_{cm} \quad (4.5)$$

Для нахождения  $Q_{np}$  подставим в последнее уравнение функцию  $r=r(t)$ , получим:

$$Q_{np} = A\ddot{r} + M + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} + \left[ \frac{\partial B}{\partial q^T} - \frac{\partial B^T}{\partial q} \right] \dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q} - Q_{en}(t, r(t), \dot{r}(t)) \quad (4.6)$$

где

$$M_i = \dot{r}^T \frac{\partial A_i}{\partial r} \dot{r} - \frac{1}{2} \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial r_i} \dot{r} \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$A = A(t, r(t)), \quad B = B(t, r(t)), \quad T_0 = T_0(t, r(t))$$

Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче стабилизации нулевого решения неавтономной лагранжевой системы. Это позволит применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем.

Введем новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу  $x = q - r(t)$ . В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений (4.3) или (4.5) при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится. Кинетическая энергия системы примет вид:

$$\begin{aligned}
T(t, q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T A(t, q) \dot{q} + B^T(t, q) \dot{q} + T_0(t, q) = \\
&= \frac{1}{2} \dot{q}^T \bar{A}(t, x) \dot{x} + \bar{B}^T(t, x) \dot{x} + \bar{T}_0(t, x) = \bar{T}(t, x, \dot{x}),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{A}(t, x) &= A(t, x + r(t)) \\
\bar{B}^T(t, x) &= \dot{r}^T(t) A(t, x + r(t)) + B^T(t, x + r(t)) \\
\bar{T}_0(t, x) &= \frac{1}{2} \dot{r}^T(t) A(t, x + r(t)) \dot{r}(t) + B^T(t, x + r(t)) \dot{r}(t) + T_0(t, x + r(t)).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

В результате указанной замены получим выражение кинетической энергии:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \dot{x}^T A(t, x + r(t)) \dot{x} + (\dot{r}^T(t) A(t, x + r(t)) + \\
&\quad + B^T(t, x + r(t))) \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{r}^T(t) A(t, x + r(t)) \dot{r}(t) + \\
&\quad + B^T(t, x + r(t)) \dot{r}(t) + T_0(t, x + r(t))
\end{aligned}$$

Выпишем уравнения движения механической системы в отклонениях в виде уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T(t, x, \dot{x})}{\partial x} = Q_{\text{ен}}(t, x, \dot{x}) + Q_u(t, x, \dot{x}) \tag{4.8}$$

Во избежание громоздкости в дальнейшем будем опускать аргументы, то есть  $r(t) = r$ ,  $A(t, x + r(t)) = A$ ,  $B(t, x + r(t)) = B$ ,  $T_0(t, x + r(t)) = T_0$ .

Вычислим необходимые производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = A \dot{x} + A \dot{r} + B$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= A \ddot{x} + \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{x} + A \ddot{r} + \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x^T} \dot{x} + \frac{\partial B}{\partial x^T} \dot{r} \\
\frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{2} \dot{x}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} + (\dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B^T}{\partial x}) \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{r} + \frac{\partial B^T}{\partial x} \dot{r} + \frac{\partial T_0}{\partial x}
\end{aligned}$$

Подставляя полученные производные в (4.8), получим уравнение движения в отклонениях:

$$\begin{aligned}
A \ddot{x} + \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{x} + A \ddot{r} + \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x^T} \dot{x} + \frac{\partial B}{\partial x^T} \dot{r} - \\
- \frac{1}{2} \dot{x}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} - \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \dot{x} - \frac{1}{2} \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{r} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \dot{r} - \frac{\partial T_0}{\partial x} = Q_{\text{ен}} + Q_u
\end{aligned} \tag{4.9}$$

или

$$\begin{aligned}
A \ddot{x} + M + M' + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{x} + A \ddot{r} + M'' + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} + \\
+ \frac{\partial A}{\partial t} \dot{x} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} = Q_{\text{ен}} + Q_u
\end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$M_i = \dot{x}^T \frac{\partial A_i}{\partial x} \dot{x} - \frac{1}{2} \dot{x}^T \frac{\partial A}{\partial x_i} \dot{x} \quad (i = \overline{1, n})$$

$M$  – обозначает  $n$ -вектор-столбец, компоненты которого  $M_i$ , определены равенствами

$$M_i = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j;$$

$$M'_i = \dot{x}^T \frac{\partial A_i}{\partial x} \dot{r} - \frac{1}{2} \dot{x}^T \frac{\partial A}{\partial x_i} \dot{r} + \dot{r}^T \frac{\partial A_i}{\partial x} \dot{x} - \frac{1}{2} \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x_i} \dot{x} \quad (i = \overline{1, n})$$

$M'$  обозначает  $n$ -вектор-столбец, компоненты которого  $M'_i$ , определены равенствами

$$M'_i = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{r}_j + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{x}_j;$$

$$M''_i = \dot{r}^T \frac{\partial A_i}{\partial x} \dot{r} - \frac{1}{2} \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x_i} \dot{r} \quad (i = \overline{1, n})$$

$M_i$  обозначает  $n$ -вектор-столбец, компоненты которого  $M''_i$ , определены равенствами

$$M''_i = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{r}_j.$$

Разрешим систему (4.10) относительно обобщенных скоростей. Это возможно, так как матрица  $A$  не вырожденная. Получим:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} = A^{-1} \left( -M - M' - \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{x} - M'' - \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} - \frac{\partial A}{\partial t} \dot{x} - \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial x} + Q_{en} + Q_u \right) - \ddot{r}; \end{cases} \quad (4.11)$$

где  $A^{-1}$  – матрица, обратная к матрице  $A$ .

Пусть  $C$  – диагональная матрица, удовлетворяющая условию:

$$c_0 E \leq C = const \leq c_1 E \quad (0 < c_0 < c_1 - const); \quad (4.12)$$

$$0 \leq D(t, q) \leq d_1 E \quad (0 < d_1 - const); \quad (4.13)$$

$$2D + \frac{\partial A}{\partial t} \geq \alpha_0 E \quad (0 < \alpha_0 - const). \quad (4.14)$$

Рассмотрим положительно-определенную по отклонениям  $x$  и скоростям  $\dot{x}$ , допускающую бесконечно-малый высший предел функцию Ляпунова

$$V(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} x^T C x + \frac{1}{2} \dot{x}^T A \dot{x}$$

Тогда ее полная производная по времени будет иметь вид:

$$\dot{V}(t, x, \dot{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)^T \ddot{x}$$

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T Cx + \dot{x}^T A\ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{x}$$

и в силу системы (4.11) получим:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \dot{x}^T \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} + \dot{x}^T Cx + \frac{1}{2} \dot{x}^T \left( \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^T \dot{x} \right) \dot{x} + \dot{x}^T AA^{-1} \square$$

$$\square \left( -M - M' - \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{x} - M'' - \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} - \frac{\partial A}{\partial t} \dot{x} - \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial x} - A\ddot{r} + Q_{\text{вн}} + Q_u \right)$$

Учтем, что

$$AA^{-1} = E$$

– единичная матрица,

$$\dot{x}^T \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{x} = 0$$

– так как  $\left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right]$  – кососимметричная матрица,

$$-\dot{x}^T M + \frac{1}{2} \dot{x}^T \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{x} = \frac{1}{2} \dot{x}^T N,$$

– где символом  $N$  обозначен  $n$ -вектор-столбец с компонентами

$$N_i = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j \quad (i = \overline{1, n}).$$

Перепишем

$$M' = \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r} - \frac{1}{2} \dot{x}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{r} + \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} - \frac{1}{2} \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} = \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r} + \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} - \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x}$$

Учитывая последнее выражение, получаем, что производная по времени от функции Ляпунова имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \dot{x}^T \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} + \dot{x}^T \left\{ -M' - \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{x} - M'' - \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} - \frac{\partial A}{\partial t} \dot{x} - \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial x} - A\ddot{r} + \frac{1}{2} N + Q_{\text{вн}} + Q_u \right\} + \dot{x}^T Cx \quad (4.15)$$

## 4.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СТАБИЛИЗИРУЮЩЕМ УПРАВЛЕНИИ

Запишем, некоторые дополнительные определения для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x).$$

### Определение

Правая часть системы уравнений называется ограниченной, если существует константа  $M$ , такая что для любого  $t$  выполняется условие

$$\|X(t, x)\| \leq M$$

### Определение

Правая часть системы уравнений удовлетворяет условию Липшица равномерно по  $x$  относительно  $t$ , если существует константа  $K$ , такая что для любого  $t$  выполняется условие

$$\|X(t, x_2) - X(t, x_1)\| \leq K \|x_2 - x_1\|$$

Предположим, что на систему (4.1) не действует никаких внешних сил, т.е.  $Q_{\text{он}} = 0$ . Тогда поставленную задачу решает следующее утверждение.

### Утверждение 1.

Пусть для системы (4.1) справедливы следующие условия:

- 1) правые части системы (4.11) для любого  $H < \infty$  ограничены и удовлетворяют в  $G$  условиям Липшица равномерно по  $x, \dot{x}$ , относительно  $t$ ;
- 2) матрицы  $C$  и  $D$  удовлетворяют условиям (4.12), (4.13), (4.14).

Тогда управление

$$\begin{aligned} Q_u = & \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - Cx - D\dot{x} + M'' + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} + A\ddot{r} + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} - \left( \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \right) \dot{x} + \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r} \end{aligned} \quad (4.16)$$

решает задачу стабилизации программного движения  $x = \dot{x} = 0$  системы (4.11). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

При выполнении условия 1 теоремы уравнения системы (4.11) предкомпактны [12], то есть существует некоторая последовательность  $t_k \rightarrow \infty$ , при  $k \rightarrow \infty$ , для которой определены пределы:

$$A^{-1*} = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^t A^{-1}(t_k + \tau, x)$$

$$M^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^t M(t_k + \tau, x)$$

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\partial A}{\partial t}(t_k + \tau, x)$$

$$\left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\partial A}{\partial x}(t_k + \tau, x)$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x^T}\right)^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\partial B}{\partial x^T}(t_k + \tau, x)$$

$$\left(\frac{\partial B^T}{\partial x}\right)^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\partial B^T}{\partial x}(t_k + \tau, x)$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\partial B}{\partial t}(t_k + \tau, x)$$

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial x}\right)^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\partial T_0}{\partial x}(t_k + \tau, x)$$

$$(Q_{en})^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^t Q_{en}(t_k + \tau, x)$$

$$(Q_u)^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^t Q_u(t_k + \tau, x)$$

Предельные к ним уравнения имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} = A^{*-1} \left( -(M)^* - (M')^* - \left[ \left(\frac{\partial B}{\partial x^T}\right)^* - \left(\frac{\partial B^T}{\partial x}\right)^* \right] \dot{x} - (M'')^* - \left[ \left(\frac{\partial B}{\partial x^T}\right)^* - \left(\frac{\partial B^T}{\partial x}\right)^* \right] \dot{r} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^* \dot{x} - \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^* \dot{r} - \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)^* + \left(\frac{\partial T_0}{\partial x}\right)^* + (Q_{en})^* + (Q_u)^* \right) - \ddot{r}; \end{cases} \quad (4.17)$$

При указанном в теореме управлении из структуры уравнений (4.11) очевидно, что движение  $x = \dot{x} = 0$  является решением предельной системы к системе (4.17), причем согласно [12] множество  $\{\dot{x}^2 = 0\}$  не содержит решений системы (4.17), кроме  $x = \dot{x} = 0$ .

Подставляя выражение (4.16) в (4.11), получим:

$$\begin{aligned} A\ddot{x} + M + M' + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{x} + A\dot{r} + M'' + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} + \\ + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{x} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - Cx - D\dot{x} + M'' + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} + A\dot{r} + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} - \left( \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \right) \dot{x} + \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r} \end{aligned}$$

Упростив последнее выражение, имеем:

$$A\ddot{x} + M + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{x} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{x} + Cx + D\dot{x} = 0$$

Выберем функцию Ляпунова в виде:

$$V(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} x^T Cx + \frac{1}{2} \dot{x}^T A\dot{x}$$

Вычислим значение производной от функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \frac{1}{2} \dot{x}^T \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} + \dot{x}^T Cx + \dot{x}^T \left\{ -M' - \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{x} - M'' - \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial A}{\partial t} \dot{x} - \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial x} - A\ddot{r} + \frac{1}{2} N + Q_{\text{вн}} + Q_u \right\} \end{aligned}$$

Подставляя значения  $Q_{\text{вн}}$  и  $Q_u$  и упрощая, получим выражение для производной

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^T \left( \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} + D \right) \dot{x} + \dot{x}^T \frac{1}{2} N,$$

в котором последнее слагаемое является функцией третьего порядка малости относительно скоростей  $\dot{x}$ .

Поэтому производная для выбранной функции Ляпунова в силу системы (4.11) при указанном управлении и малых скоростях (т.е. в окрестности тривиального решения  $x = \dot{x} = 0$ ) будет иметь оценку:

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^T \left( \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} + D \right) \dot{x} \leq -\frac{\alpha_0}{2} \|\dot{x}\|^2 \leq 0.$$

Тем самым  $\dot{V}$  есть определенно-отрицательная форма по скоростям.

На основе теоремы об асимптотической устойчивости из [12] имеем равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения, т.е. указанное управление решает задачу стабилизации программного решения исходной системы.

Теорема доказана.

Управление, выбранное в утверждении 1, можно существенно упростить, выбрав матрицу  $D$  в специальной форме. Пусть матрица  $D$  выбрана таким образом, что удовлетворяется условие:

$$\left( \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} - \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x^T} + L + D \right) \geq c_0 E, \quad (c_0 > 0 - \text{const}) \quad (4.18)$$

где  $L$  - матрица, задающая квадратичную форму  $\dot{x}^T \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r}$ , то есть матрица  $\{l_{ik}\}$  с элементами, вычисляемыми через элементы матрицы  $A$  по правилу:

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_j$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

### Утверждение 2.

Пусть для системы (4.1) справедливы следующие условия:

1) правые части системы (4.11) для любого  $H < \infty$  ограничены и удовлетворяют в  $G$  условиям Липшица равномерно по  $x, \dot{x}$ , относительно  $t$ :

2) матрица  $C$  удовлетворяет условиям (4.12) и матрица  $D$  удовлетворяет условиям (4.13), (4.18).

Тогда управление

$$Q_u = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - Cx - D\dot{x} + M'' + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} + A\ddot{r} \quad (4.19)$$

решает задачу стабилизации программного движения  $x = \dot{x} = 0$  системы (4.11). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

Доказательство.

Как и в утверждении 1, при выполнении условия 1 теоремы уравнения системы (4.11) предкомпактны, предельные к ним уравнения имеют вид (4.17).

Подставляя выражение (4.19) в (4.11), получим:

$$A\ddot{x} + M + M' + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{x} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{x} + Cx + D\dot{x} = 0 \quad (4.20)$$

Выберем функцию Ляпунова в виде:

$$V(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} x^T Cx + \frac{1}{2} \dot{x}^T A\dot{x}$$

Вычислим значение производной от функции Ляпунова. В силу уравнений (4.20) она равна:

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^T \left( \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} - \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x^T} + L + D \right) \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T N$$

где второе слагаемое является функцией третьего порядка малости относительно скоростей  $\dot{x}$ .

Поэтому производная для выбранной функции Ляпунова в силу системы (4.11) при указанном управлении и малых скоростях (т.е. в окрестности тривиального решения  $x = \dot{x} = 0$ ) будет иметь оценку:

$$\frac{dV}{dt} \cong -\dot{x}^T \left( \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} - \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x^T} + L + D \right) \dot{x} \leq -c_0 \|\dot{x}\|^2 \leq 0$$

На основе теоремы об асимптотической устойчивости из [12] имеем равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения.

Теорема доказана.

Управление, указанное в утверждении 2, имеет меньше слагаемых и тем самым является проще, чем управление из утверждения 1 или из [29].

Пусть теперь на систему действуют некоторые обобщенные силы  $Q_{\text{вн}} = Q_{\text{вн}}(t, x, \dot{x})$ , характеризующие внешние воздействия на систему. В

общем случае они являются функциями координат  $x$ , скоростей  $\dot{x}$  и времени  $t$ .

В общем случае при воздействии на систему некоторых сил  $Q_{вн}$  неизвестной структуры поставленные задачи решает следующее утверждение.

Утверждение 3.

Пусть для системы (4.1)  $Q_u = Q_{см} + Q_{вн}$  и выполнены условия утверждения 1.

Тогда управление

$$Q_u = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - Cx - D\dot{x} + M'' + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} + A\ddot{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} - \left( \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \right) \dot{x} + \left( \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r} - Q_{np} \quad (4.21)$$

решает задачу о стабилизации программного движения  $x = \dot{x} = 0$  системы (4.11). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1.

Утверждение 4.

Пусть для системы (4.1)  $Q_u = Q_{см} + Q_{вн}$  и выполнены условия утверждения 2.

Тогда управление

$$Q_u = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - Cx - D\dot{x} + M'' + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} + A\ddot{r} - Q_{np} \quad (4.22)$$

решает задачу о стабилизации программного движения  $x = \dot{x} = 0$  системы (4.11). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 2.

### 4.3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ПОДВИЖНОЙ ОСНОВЕ (ПЛАТФОРМЕ)

Рассмотрим движение платформы относительно неподвижной системы координат  $O_1\xi\eta\zeta$ , при котором оси жестко связанной с платформой подвижной системы координат  $OXYZ$  остаются параллельными осям абсолютной системы  $O_1\xi\eta\zeta$  при произвольном заданном законе движения

$$\begin{cases} \xi = \xi(t) \\ \eta = \eta(t) \\ \zeta = \zeta(t) \end{cases}$$

точки  $O$  платформы. Пусть на платформе в точке  $O$  закреплено твердое тело массы  $m$ , имеющее одну неподвижную относительно платформы точку. Введем жестко связанную с телом систему координат  $Oxyz$  таким образом,

чтобы центр масс тела  $C$  лежал на оси  $Oz$  и имел координату  $z=a>0$ . Предположим, что  $Oz$  - главная центральная ось инерции тела, а оси  $Ox$  и  $Oy$  параллельны двум другим главным осям инерции.

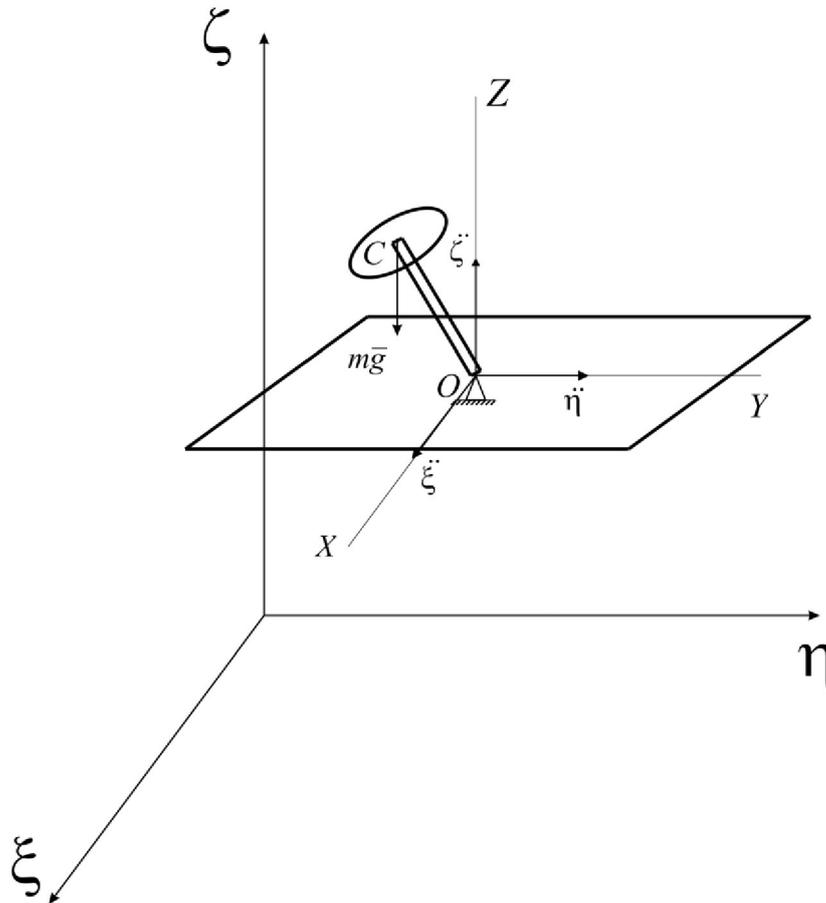


Рис. 33 - Механическая система

Поставим задачу о реализации управляющими силами, прикладываемыми к телу, произвольных заданных (программных) движений твердого тела, обладающими свойством асимптотической устойчивости.

Уравнения движения для рассматриваемого тела составим в форме уравнений Лагранжа второго рода в подвижной системе координат  $Oxyz$ , считая силу тяжести  $F = mg$  и силы инерции  $F_1 = -m\ddot{\xi}$ ,  $F_2 = -m\ddot{\eta}$ ,  $F_3 = -m\ddot{\zeta}$ , возникающие из-за движения платформы, внешними силами, приложенными к центру масс. Составив вектор обобщенных координат  $q^T = (\varphi, \psi, \theta)$  из переменных Эйлера, запишем кинетическую энергию тела в виде

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} = \frac{1}{2} A_1 (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} B_1 (-\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} C_1 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2$$

где  $A_1 = I_1 + ma^2$ ,  $B_1 = I_2 + ma^2$  и  $C_1 = I_3$ ,  $I_{1,2,3}$  - центральные осевые моменты инерции тела; квадратичная по скоростям форма  $T_2$  определяется симметричной положительно-определенной ограниченной матрицей  $A = \{a_{ij}\}$  с элементами

$$a_{11} = C_1, \quad a_{12} = a_{21} = C_1 \cos \theta, \quad a_{13} = a_{31} = 0, \quad a_{22} = (A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + C_1 \cos^2 \theta, \\ a_{23} = a_{32} = \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2\varphi \sin \theta, \quad a_{33} = A_1 \cos^2 \varphi + B_1 \sin^2 \varphi.$$

Тогда уравнения Лагранжа  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q} = Q$  можно переписать в виде

$$A\ddot{q} + M = Q_{en} + Q_u, \quad (4.23)$$

где через  $M = M(q, \dot{q})$  обозначен вектор-столбец с компонентами

$$M_i = \dot{q}^T \frac{\partial A_i}{\partial q} \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}, \quad (i = \overline{1,3}),$$

вычисляемыми по формуле

$$M_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (4.24)$$

В выбранных переменных получим

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 \frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \frac{\partial a_{33}}{\partial \varphi} + \dot{\theta} \dot{\psi} \left( \frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} - \frac{\partial a_{23}}{\partial \varphi} \right) \\ \dot{\theta}^2 \frac{\partial a_{23}}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \dot{\psi} \frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi} + \dot{\theta} \dot{\varphi} \left( \frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial a_{23}}{\partial \varphi} \right) + \dot{\theta} \dot{\psi} \frac{\partial a_{22}}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 \frac{\partial a_{22}}{\partial \theta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \left( -\frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial a_{23}}{\partial \varphi} \right) + \dot{\theta} \dot{\varphi} \frac{\partial a_{33}}{\partial \varphi} \end{pmatrix},$$

где

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} = -C_1 \sin \theta, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi} = (A_1 - B_1) \sin 2\varphi \sin^2 \theta, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial \theta} = (A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi - C_1) \sin 2\theta \\ \frac{\partial a_{23}}{\partial \varphi} = (A_1 - B_1) \cos 2\varphi \sin \theta, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial \theta} = \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2\varphi \cos \theta, \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial \varphi} = -(A_1 - B_1) \sin 2\varphi.$$

Вектор  $Q = Q_{en} + Q_u$  в правой части уравнений Лагранжа представляет собой сумму внешних обобщенных сил, действующих на механическую систему, и управляющих воздействий, определяемых в дальнейшем.

Действие сил инерции и силы тяжести описываются обобщенными силами, вычисляемыми в подвижной системе координат  $Oxyz$  согласно равенствам

$$Q^\varphi = 0,$$

$$Q^\psi = -am\ddot{\xi} \cos \psi \sin \theta - am\dot{\eta} \sin \psi \sin \theta,$$

$$Q^\theta = -am\ddot{\xi} \sin \psi \cos \theta + am\dot{\eta} \cos \psi \cos \theta + a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin \theta.$$

Уравнения управляемых движений твердого тела примут вид

$$C_1 \ddot{\varphi} + C_1 \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} ((A_1 - B_1) \cos 2\varphi + C_1) \sin \theta - \\ - \dot{\psi}^2 \frac{A_1 - B_1}{2} \sin^2 \theta \sin 2\varphi - \dot{\theta}^2 \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2\varphi = Q_{cm}^\varphi + Q_{np}^\varphi$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\phi} C_1 \cos \theta + \ddot{\psi} \left( (A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + C_1 \cos^2 \theta \right) + \ddot{\theta} \frac{A_1 - B_1}{2} \sin \theta \sin 2\varphi + \\
& + \dot{\phi} \dot{\psi} (A_1 - B_1) \sin 2\varphi \sin^2 \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \left( (A_1 - B_1) \cos 2\varphi - C_1 \right) \sin \theta + \\
& + \dot{\psi} \dot{\theta} \left( A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi - C_1 \right) \sin 2\theta + \dot{\theta}^2 \frac{A_1 - B_1}{2} \cos \theta \sin 2\varphi = \\
& = -am\ddot{\xi} \cos \psi \sin \theta - am\dot{\eta} \sin \psi \sin \theta + Q_{cm}^{\psi} + Q_{np}^{\psi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\psi} \frac{A_1 - B_1}{2} \sin \theta \sin 2\varphi + \ddot{\theta} \left( A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi \right) + \dot{\phi} \dot{\psi} \left( (A_1 - B_1) \cos 2\varphi + C_1 \right) \sin \theta - \\
& - \dot{\phi} \dot{\theta} (A_1 - B_1) \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 \left( (A_1 \sin^2 \varphi + B_1 \cos^2 \varphi) - C_1 \right) \sin 2\theta = \\
& = -am\ddot{\xi} \sin \psi \cos \theta + am\dot{\eta} \cos \psi \cos \theta + a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin \theta + Q_{cm}^{\theta} + Q_{np}^{\theta}
\end{aligned}$$

и из них для произвольного выбранного программного движения

$$r(t) = \begin{pmatrix} \varphi^*(t) \\ \psi^*(t) \\ \theta^*(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}^*(t) \\ \dot{\psi}^*(t) \\ \dot{\theta}^*(t) \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

прямой подстановкой определим управляющие силы, реализующие это движение:

$$Q_{np} = A\ddot{r} + M - Q_{сн}(t, r, \dot{r}) \quad (4.26)$$

где  $A = A(r)$ , и координаты вектора  $M = M(r, \dot{r})$  вычисляются по формулам, получающимся из формул (4.24) заменой величин  $q$  и  $\dot{q}$  на  $r$  и  $\dot{r}$  соответственно. В скалярном виде будем иметь

$$\begin{aligned}
Q_{np}^{\varphi} &= C_1 \ddot{\varphi}^* + C_1 \dot{\psi}^* \cos \theta^* - \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* \left( (A_1 - B_1) \sin \theta^* \cos 2\varphi^* + C_1 \sin \theta^* \right) - \\
& - \dot{\psi}^{*2} \frac{A_1 - B_1}{2} \sin^2 \theta^* \sin 2\varphi^* + \dot{\theta}^{*2} \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2\varphi^* \\
Q_{np}^{\psi} &= \ddot{\psi}^* C_1 \cos \theta^* + \dot{\psi}^* \left( (A_1 \sin^2 \varphi^* + B_1 \cos^2 \varphi^*) \sin^2 \theta^* + C_1 \cos^2 \theta^* \right) + \\
& + \dot{\theta}^* \frac{A_1 - B_1}{2} \sin \theta^* \sin 2\varphi^* + \dot{\phi}^* \dot{\psi}^* (A_1 - B_1) \sin 2\varphi^* \sin^2 \theta^* \\
& + \dot{\phi}^* \dot{\theta}^* \left( (A_1 - B_1) \sin \theta^* \cos 2\varphi^* - C_1 \sin \theta^* \right) + \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* \left( A_1 \sin^2 \varphi^* + B_1 \cos^2 \varphi^* - C_1 \right) \sin 2\theta^* \\
& + \dot{\theta}^{*2} \frac{A_1 - B_1}{2} \cos \theta^* \sin 2\varphi^* + am\ddot{\xi} \cos \psi^* \sin \theta^* + am\dot{\eta} \sin \psi^* \sin \theta^*
\end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
Q_{np}^{\theta} &= \ddot{\theta}^* \frac{A_1 - B_1}{2} \sin \theta^* \sin 2\varphi^* + \ddot{\theta}^* \left( A_1 \sin^2 \varphi^* + B_1 \cos^2 \varphi^* \right) + \\
& + \dot{\phi}^* \dot{\psi}^* \left( (A_1 - B_1) \sin \theta^* \cos 2\varphi^* + C_1 \sin \theta^* \right) + \dot{\phi}^* \dot{\theta}^* (B_1 - A_1) \sin 2\varphi^* - \\
& - \frac{1}{2} \dot{\psi}^{*2} \left( (A_1 \sin^2 \varphi^* + B_1 \cos^2 \varphi^*) - C_1 \right) \sin 2\theta^* + \\
& + am\ddot{\xi} \sin \psi^* \cos \theta^* + am\dot{\eta} \cos \psi^* \cos \theta^* + a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin \theta^*
\end{aligned}$$

Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче стабилизации нулевого решения неавтономной лагранжевой системы. Это позволит применить к задаче о стабилизации программных движений методы

и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем [12].

Введем новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу  $x = q - r(t)$ , то есть

$$\begin{cases} \varphi = x_1 + \varphi^* \\ \psi = x_3 + \psi^* \\ \theta = x_5 + \theta^* \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\varphi} = x_2 + \dot{\varphi}^* \\ \dot{\psi} = x_4 + \dot{\psi}^* \\ \dot{\theta} = x_6 + \dot{\theta}^* \end{cases}$$

В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится. Кинетическая энергия системы примет вид:

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^T A(x+r) \dot{x} + \dot{r}^T A(x+r) \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{r}^T A(x+r) \dot{r}$$

или в переменных Эйлера:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} A_1 (\dot{x}_5 \cos(x_1 + \varphi^*) + \dot{x}_3 \sin(x_5 + \theta^*) \sin(x_1 + \varphi^*) + \dot{\theta}^* \cos(x_1 + \varphi^*) + \dot{\psi}^* \sin(x_5 + \theta^*) \sin(x_1 + \varphi^*))^2 + \\ & + \frac{1}{2} B_1 (-\dot{x}_5 \sin(x_1 + \varphi^*) + \dot{x}_3 \cos(x_1 + \varphi^*) \sin(x_5 + \theta^*) - \dot{\theta}^* \sin(x_1 + \varphi^*) + \dot{\psi}^* \cos(x_1 + \varphi^*) \sin(x_5 + \theta^*))^2 + \\ & + \frac{1}{2} C_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_3 \cos(x_5 + \theta^*) + \dot{\varphi}^* + \dot{\psi}^* \cos(x_5 + \theta^*))^2 \end{aligned}$$

Уравнения движения в отклонениях для рассматриваемой механической системы имеют вид:

$$A\ddot{x} + M + M' + A\dot{r} + M'' = Q_{\text{вн}} + Q_u \quad (4.28)$$

где  $M = M(x, \dot{x})$  обозначает вектор-столбец, компоненты которого  $M_i$ , определены равенствами

$$M_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j, \quad (i = \overline{1,3});$$

$M'$  - вектор-столбец с компонентами

$$M'_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{r}_j + \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{x}_j; \quad (i = \overline{1,3})$$

$M''$  - вектор-столбец с компонентами

$$M''_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{r}_j, \quad (i = \overline{1,3}).$$

В скалярном виде

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \dot{x}_3^2 \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \dot{x}_5^2 \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} + \dot{x}_3 \dot{x}_5 \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) \\ \dot{x}_5^2 \frac{\partial A_{23}}{\partial x_5} + \dot{x}_3 \dot{x}_1 \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot{x}_1 \dot{x}_5 \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) + \dot{x}_3 \dot{x}_5 \frac{\partial A_{22}}{\partial x_5} \\ -\frac{1}{2} \dot{x}_3^2 \frac{\partial A_{22}}{\partial x_5} + \dot{x}_3 \dot{x}_1 \left( -\frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) + \dot{x}_1 \dot{x}_5 \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$$M' = \left( \begin{array}{c} -\dot{x}_3 \dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} - \dot{x}_5 \dot{\theta}^* \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} + \dot{x}_3 \dot{\theta}^* \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) + \dot{x}_5 \dot{\psi}^* \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) \\ 2\dot{x}_5 \dot{\theta}^* \frac{\partial A_{23}}{\partial x_5} + \dot{x}_1 \left( \dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot{\theta}^* \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) \right) + \dot{x}_3 \left( \dot{\varphi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot{\theta}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_5} \right) + \dot{x}_5 \left( \dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_5} + \dot{\varphi}^* \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) \right) \\ \dot{x}_3 \left( -\dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_5} + \dot{\varphi}^* \left( -\frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) \right) + \dot{x}_1 \left( \dot{\theta}^* \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} + \dot{\psi}^* \left( -\frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) \right) + \dot{x}_5 \dot{\varphi}^* \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} \end{array} \right)$$

$$M'' = \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \dot{\psi}^{*2} \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \dot{\theta}^{*2} \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} + \dot{\theta}^* \dot{\psi}^* \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) \\ \dot{\theta}^{*2} \frac{\partial A_{23}}{\partial x_5} + \dot{\varphi}^* \dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot{\theta}^* \dot{\varphi}^* \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) + \dot{\theta}^* \dot{\psi}^* \frac{\partial A_{22}}{\partial x_5} \\ -\frac{1}{2} \dot{\psi}^{*2} \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot{\psi}^* \dot{\varphi}^* \left( -\frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} \right) + \dot{\theta}^* \dot{\varphi}^* \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} \end{array} \right)$$

где

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial x_5} = -C_1 \sin(\theta^* + x_5)$$

$$\frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} = (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_5)$$

$$\frac{\partial A_{22}}{\partial x_5} = (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_5)$$

$$\frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} = (A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*)$$

$$\frac{\partial A_{23}}{\partial x_5} = \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) \cos(x_5 + \theta^*)$$

$$\frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} = -(A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1)$$

Обобщенные внешние силы, действующие на систему, задаются равенствами:

$$Q^\varphi = 0$$

$$Q^\psi = -am\ddot{\xi} \cos(\psi^* + x_3) \sin(\theta^* + x_5) - am\dot{\eta} \sin(\psi^* + x_3) \sin(\theta^* + x_5)$$

$$Q^\theta = -am\ddot{\xi} \sin(\psi^* + x_3) \cos(\theta^* + x_5) + am\dot{\eta} \cos(\theta^* + x_5) \cos(\psi^* + x_3) + a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin(\theta^* + x_5)$$

Тогда уравнения движения в отклонениях имеют вид:

$$C_1 \ddot{x}_1 + \ddot{x}_3 C_1 \cos(\theta^* + x_5) - \dot{x}_3^2 \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_5)$$

$$- \dot{x}_3 \dot{x}_5 \left( (A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_5) + C_1 \sin(\theta^* + x_5) \right) + \dot{x}_5^2 \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) -$$

$$- \dot{x}_3 \left( \dot{\theta}^* \left( (A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_5) + C_1 \sin(\theta^* + x_5) \right) + \dot{\psi}^* (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_5) \right) -$$

$$- \dot{x}_5 \left( \dot{\psi}^* \left( (A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_5) + C_1 \sin(\theta^* + x_5) \right) + \dot{\theta}^* (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \right)$$

$$+ C_1 \dot{\varphi}^* + \dot{\psi}^* C_1 \cos(\theta^* + x_5) - \frac{1}{2} \dot{\psi}^{*2} (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_5) -$$

$$- \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* \left( (A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_5) + C_1 \sin(\theta^* + x_5) \right) + \frac{1}{2} \dot{\theta}^{*2} (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) = Q_{cm}^\varphi + Q_{np}^\varphi$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{x}_1 C_1 \cos(\theta^* + x_5) + \ddot{x}_3 \left( (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1)) \sin^2(\theta^* + x_5) + C_1 \cos^2(\theta^* + x_5) \right) + \\
& + \ddot{x}_5 \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) + \dot{x}_1 \dot{x}_3 (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(x_5 + \theta^*) + \\
& + \dot{x}_1 \dot{x}_5 \left( (A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_5) - C_1 \sin(\theta^* + x_5) \right) + \\
& + \dot{x}_3 \dot{x}_5 \left( (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_5) + \dot{x}_5^2 \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) \cos(x_5 + \theta^*) + \right. \\
& + \dot{x}_1 \left( \dot{\theta}^* ((A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin(\theta^* + x_5) + \dot{\psi}^* (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_5) \right) + \\
& + \dot{x}_3 \left( \dot{\theta}^* ((A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_5) + \dot{\varphi}^* (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_5)) + \right. \\
& + \dot{x}_5 \left( \dot{\theta}^* (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \cos(\theta^* + x_5) + \dot{\varphi}^* ((A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_5) - C_1 \sin(\theta^* + x_5)) + \right. \\
& + \dot{\psi}^* \left( (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_5) \right) + \\
& + \ddot{\varphi}^* C_1 \cos(\theta^* + x_5) + \ddot{\psi}^* \left( (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1)) \sin^2(\theta^* + x_5) + C_1 \cos^2(\theta^* + x_5) \right) + \\
& + \ddot{\theta}^* \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) + \dot{\varphi}^* \dot{\psi}^* (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_5) + \\
& + \dot{\varphi}^* \dot{\theta}^* ((A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_5) - C_1 \sin(\theta^* + x_5)) + \\
& + \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_5) + \dot{\theta}^{*2} \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) \cos(x_5 + \theta^*) = \\
& = Q_{cm}^{\psi} + Q_{np}^{\psi} - am\ddot{\xi} \sin(\psi^* + x_3) \cos(\theta^* + x_5) + \\
& + am\dot{\eta} \cos(\theta^* + x_5) \cos(\psi^* + x_3) + a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin(\theta^* + x_5) \\
& \ddot{x}_3 \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) + \ddot{x}_5 \left( A_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) \right) + \\
& + \dot{x}_1 \dot{x}_3 \sin(x_5 + \theta^*) \left( (A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) + C_1 \right) + \dot{x}_1 \dot{x}_5 (B_1 - A_1) \sin(\varphi^* + x_1) - \\
& - \frac{1}{2} \dot{x}_3^2 \left( A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1 \right) \sin 2(x_5 + \theta^*) + \\
& + \dot{x}_1 \left( \dot{\psi}^* ((A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) + C_1 \sin(x_5 + \theta^*)) - \dot{\theta}^* (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \right) + \\
& + \dot{x}_3 \left( \dot{\varphi}^* ((A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) + C_1 \sin(x_5 + \theta^*)) - \right. \\
& - \dot{\psi}^* \left( A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1 \right) \sin 2(x_5 + \theta^*) \left. \right) - \dot{x}_5 \dot{\varphi}^* (A_1 - B_1) \sin(\varphi^* + x_1) + \\
& + \ddot{\psi}^* \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) + \ddot{\theta}^* \left( A_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) \right) + \\
& + \dot{\varphi}^* \dot{\psi}^* \left( (A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) + C_1 \sin(x_5 + \theta^*) \right) + \dot{\varphi}^* \dot{\theta}^* (B_1 - A_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) + \\
& - \frac{1}{2} \dot{\psi}^{*2} (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) = \\
& = Q_{cm}^{\theta} + Q_{np}^{\theta} - am\ddot{\xi} \sin(\psi^* + x_3) \cos(\theta^* + x_5) + am\dot{\eta} \cos(\theta^* + x_5) \cos(\psi^* + x_3) + a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin(\theta^* + x_5)
\end{aligned}$$

Согласно утверждениям 3 или 4, если на тело действуют дополнительные или возмущающие силы, то стабилизирующее управление можно взять в виде (4.21) или (4.22).

Тогда для рассматриваемой системы можно записать силы, стабилизирующие программное движение, в виде:

$$Q_{cm} = -Cx - D\dot{x} + M'' + A\ddot{r} - Q_{вн} - Q_{np} \quad (4.29)$$

или в скалярном виде:

$$\begin{aligned}
Q_{cm}^{\varphi} &= -c_{11}x_1 - D_{11}\dot{x}_1 + C_1\ddot{\varphi}^* + \dot{\psi}^* C_1 \cos(\theta^* + x_5) - \frac{1}{2}\dot{\psi}^{*2} (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_5) - \\
&\quad - \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* ((A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_5) + C_1 \sin(\theta^* + x_5)) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^{*2} (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) - Q_{np}^{\varphi} \\
Q_{cm}^{\psi} &= -c_{22}x_3 - D_{22}\dot{x}_3 + \ddot{\varphi}^* C_1 \cos(\theta^* + x_5) + \dot{\psi}^* ((A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1)) \sin^2(\theta^* + x_5) + C_1 \cos^2(\theta^* + x_5)) + \\
&\quad + \ddot{\theta}^* \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) + \dot{\varphi}^* \dot{\psi}^* (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin^2(\theta^* + x_5) + \\
&\quad + \dot{\varphi}^* \dot{\theta}^* ((A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(\theta^* + x_5) - C_1 \sin(\theta^* + x_5)) + \\
&\quad + \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* (A_1 \sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1) \sin 2(\theta^* + x_5) + \dot{\theta}^{*2} \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) \cos(x_5 + \theta^*) + \\
&\quad + am\ddot{\xi} \sin(\psi^* + x_3) \cos(\theta^* + x_5) - am\dot{\eta} \cos(\theta^* + x_5) \cos(\psi^* + x_3) - a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin(\theta^* + x_5) - Q_{np}^{\psi} \\
Q_{cm}^{\theta} &= -c_{33}x_5 - D_{33}\dot{x}_5 + \dot{\psi}^* \frac{A_1 - B_1}{2} \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) + \ddot{\theta}^* (A_1 \cos^2(\varphi^* + x_1) + B_1 \sin^2(\varphi^* + x_1)) + \\
&\quad + \dot{\varphi}^* \dot{\psi}^* ((A_1 - B_1) \cos 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) + C_1 \sin(x_5 + \theta^*)) + \dot{\varphi}^* \dot{\theta}^* (B_1 - A_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) + \\
&\quad - \frac{1}{2}\dot{\psi}^{*2} (A_1 - B_1) \sin 2(\varphi^* + x_1) \sin(x_5 + \theta^*) + am\ddot{\xi} \sin(\psi^* + x_3) \cos(\theta^* + x_5) - \\
&\quad - am\dot{\eta} \cos(\theta^* + x_5) \cos(\psi^* + x_3) - a(m\ddot{\zeta} + mg) \sin(\theta^* + x_5) - Q_{np}^{\theta}
\end{aligned}$$

Элементы матрицы  $C$  удовлетворяют условиям (4.12), элементы матрицы  $D$  удовлетворяют условиям (4.13) и (4.18). В итоге управление (4.29) согласно утверждению 4 решает задачу о стабилизации программного движения твердого тела на подвижной платформе.

#### 4.4. СИНТЕЗ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА

Для примера рассмотрим задачу о стабилизации нестационарных программных движений маятника (Рис. 1).

Уравнения движения маятника в форме уравнений Лагранжа второго рода имеют вид (1.5):

$$\begin{cases} (A + mh^2)\ddot{\theta} - (A - C + mh^2)\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta = -mgh \sin \theta \\ \left[ (A + mh^2) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta \right] \ddot{\varphi} + 2(A - C + mh^2)\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Выберем программное движение :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0(t) \\ \theta(t) = \theta_0(t) \end{cases}$$

Определим силы, реализующие программное движение (программные силы). Для этого подставим в уравнения движения маятника выбранное нами программное движение, получим:

$$\begin{aligned}
Q_{np \varphi} &= ((A + mh^2) \sin^2(\theta_0) + C \cos^2(\theta_0)) \ddot{\varphi}_0 + 2(A - C + mh^2) \dot{\varphi}_0 \dot{\theta}_0 \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) \\
Q_{np \theta} &= (A + mh^2) \ddot{\theta}_0 - (A - C + mh^2) \dot{\varphi}_0^2 \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) + mgh \sin(\theta_0)
\end{aligned}$$

Добавив к уравнениям движения программные силы, получим:

$$\begin{aligned} ((A+mh^2)\sin^2(\theta)+C\cos^2(\theta))\ddot{\varphi}+2(A-C+mh^2)\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta) &= Q_{np\ \varphi} \\ (A+mh^2)\ddot{\theta}-(A-C+mh^2)\dot{\varphi}^2\cos(\theta)\sin(\theta)+mgh\sin(\theta) &= Q_{np\ \theta} \end{aligned}$$

Введем отклонения следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi - \varphi_0(t) \\ x_2 &= \theta - \theta_0(t) \end{aligned}$$

Тогда кинетическая энергия системы будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{2}(A+mh^2)(\dot{x}_2 + \dot{\theta}_0)^2 + \frac{1}{2}(A+mh^2)(\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_0)^2 \sin^2(x_2 + \theta_0) + \frac{1}{2}C(\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_0)^2 \cos^2(x_2 + \theta_0)$$

и уравнения движения возмущенной системы примут вид:

$$\begin{cases} ((A+mh^2)\sin^2(x_2 + \theta_0) + C\cos^2(x_2 + \theta_0))(\ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_0) + \\ + 2(A-C+mh^2)(\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_0)(\dot{x}_2 + \dot{\theta}_0)\cos(x_2 + \theta_0)\sin(x_2 + \theta_0) = Q_{np\ \varphi} \\ (A+mh^2)(\ddot{x}_2 + \ddot{\theta}_0) - (A-C+mh^2)(\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_0)^2\cos(x_2 + \theta_0)\sin(x_2 + \theta_0) + \\ + mgh\sin(x_2 + \theta_0) = Q_{np\ \theta} \end{cases}$$

Составим стабилизирующее управление по формуле (4.22).

$$Q_{cm} = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - Cx - D\dot{x} + M'' + \left[ \frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} + A\ddot{r} - Q_{np}$$

Для этого сначала произведем вспомогательные вычисления:

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(t, \dot{q})\dot{q}$$

$$T_1 = B^T(t, q)\dot{q}$$

$$T_0 = T_0(t, q)$$

$$C = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_i'' = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{r}_j$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (A + mh^2) \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \left( (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0) \right) \dot{x}_1^2$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0)$$

$$a_{22} = A + mh^2$$

$$T_1 = (A + mh^2) \dot{\theta}_0 \dot{x}_2 + \left( (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0) \right) \dot{\varphi}_0 \dot{x}_1$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \left( (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0) \right) \dot{\varphi}_0$$

$$b_2 = (A + mh^2) \dot{\theta}_0$$

$$T_0 = \frac{1}{2} (A + mh^2) \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} \left( (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0) \right) \dot{\varphi}_0^2$$

$$M_1'' = \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} \dot{r}_1 \dot{r}_2 = 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0 \dot{\theta}_0$$

$$M_2'' = -\frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} \dot{r}_1^2 = -(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0^2$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial t} = 2(A + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) (\dot{x}_2 + \dot{\theta}_0) - 2C \cos(x_2 + \theta_0) \sin(x_2 + \theta_0) (\dot{x}_2 + \dot{\theta}_0) =$$

$$= 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) (\dot{x}_2 + \dot{\theta}_0)$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial t} = 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) (\dot{x}_2 + \dot{\theta}_0) \dot{\varphi}_0 + \left( (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0) \right) \ddot{\varphi}_0$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial t} = (A + mh^2) \ddot{\theta}_0$$

$$\left[ \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial B^T}{\partial \mathbf{x}} \right] \dot{\mathbf{r}} = \sum_i \sum_j \left[ \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right] \dot{r}_i = -2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0^2 +$$

$$+ 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0 \dot{\theta}_0$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_2} = (A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0^2$$

Теперь запишем выражения для управляющих воздействий согласно формуле (4.22):

$$\begin{aligned}
Q_{cm \varphi} &= 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) (\dot{x}_2 + \dot{\theta}_0) \dot{\varphi}_0 + \left( (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0) \right) \ddot{\varphi}_0 - \\
&- x_1 - \dot{x}_1 + 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0 \dot{\theta}_0 - 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0^2 + \\
&+ 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) (\dot{x}_2 + \dot{\theta}_0) \dot{\varphi}_0 + \left( (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0) \right) \ddot{\varphi}_0 - Q_{np \varphi} = \\
&= 4(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) (\dot{x}_2 + \dot{\theta}_0) \dot{\varphi}_0 - 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0^2 + \\
&+ 2 \left( (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0) \right) \ddot{\varphi}_0 + 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0 \dot{\theta}_0 - \\
&- x_1 - \dot{x}_1 - Q_{np \varphi} = \\
&= 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0 (2x_2 + 4\dot{\theta}_0 - \dot{\varphi}_0) + 2 \left( (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0) \right) \ddot{\varphi}_0 - \\
&- x_1 - \dot{x}_1 - Q_{np \varphi} \\
Q_{cm \theta} &= (A + mh^2) \ddot{\theta}_0 - (A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0^2 - x_2 - \dot{x}_2 - \\
&- (A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0^2 + (A + mh^2) \ddot{\theta}_0 + \\
&+ 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0 \dot{\theta}_0 - Q_{np \theta} = \\
&= 2(A + mh^2) \ddot{\theta}_0 - 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0 (\dot{\varphi}_0 + \dot{\theta}_0) - x_2 - \dot{x}_2 - Q_{np \theta} \\
Q_{cm \varphi} &= 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0 (2x_2 + 4\dot{\theta}_0 - \dot{\varphi}_0) + \\
&+ 2 \left( (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0) \right) \ddot{\varphi}_0 - x_1 - \dot{x}_1 - Q_{np \varphi} \\
Q_{cm \theta} &= 2(A + mh^2) \ddot{\theta}_0 - 2(A - C + mh^2) \sin(x_2 + \theta_0) \cos(x_2 + \theta_0) \dot{\varphi}_0 (\dot{\varphi}_0 + \dot{\theta}_0) - x_2 - \dot{x}_2 - Q_{np \theta} \\
&\left\{ \begin{aligned}
&\left( (A + mh^2) \sin^2(x_2 + \theta_0) + C \cos^2(x_2 + \theta_0) \right) (\ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_0) + \\
&+ 2(A - C + mh^2) (\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_0) (\dot{x}_2 + \dot{\theta}_0) \cos(x_2 + \theta_0) \sin(x_2 + \theta_0) = Q_{np \varphi} + Q_{cm \varphi} \\
&\left( A + mh^2 \right) (\ddot{x}_2 + \ddot{\theta}_0) - (A - C + mh^2) (\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_0)^2 \cos(x_2 + \theta_0) \sin(x_2 + \theta_0) + \\
&+ mgh \sin(x_2 + \theta_0) = Q_{np \theta} + Q_{cm \theta}
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Подставив стабилизирующие и программные силы в уравнения возмущенного движения, проинтегрируем их численно. Графики поведения отклонений  $x(t)$  и скоростей отклонений  $\dot{x}(t)$  показаны на рисунках 34 - 37. Наглядна асимптотическая устойчивость исследуемых решений.

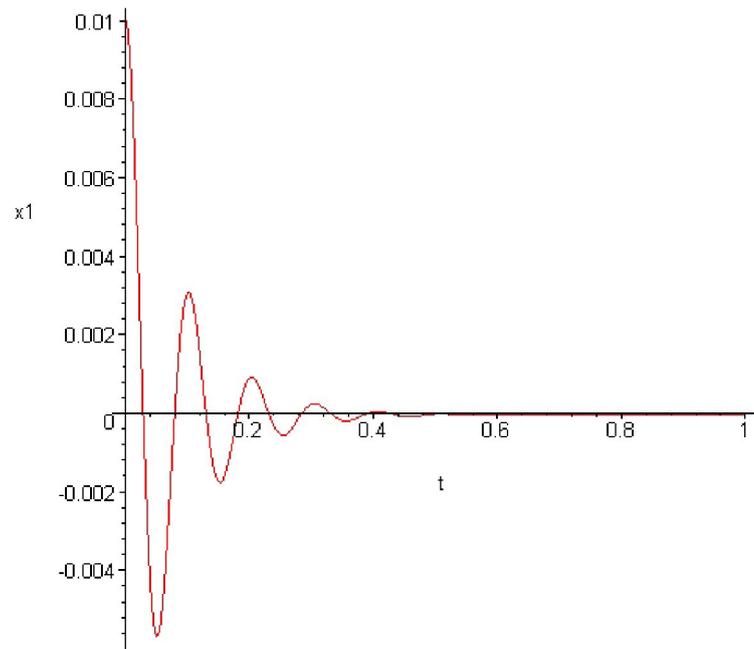


Рис. 34 - График зависимости отклонения  $x_1(t)$

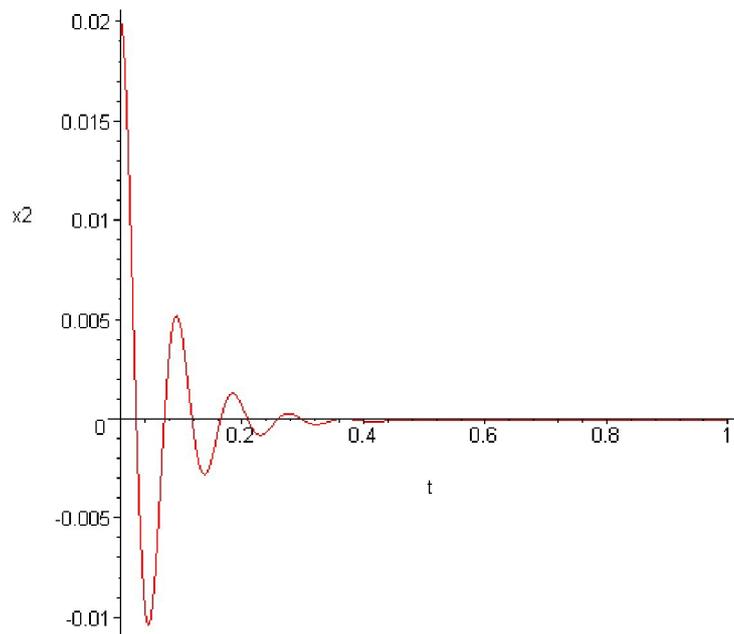


Рис. 35 - График зависимости отклонения  $x_2(t)$

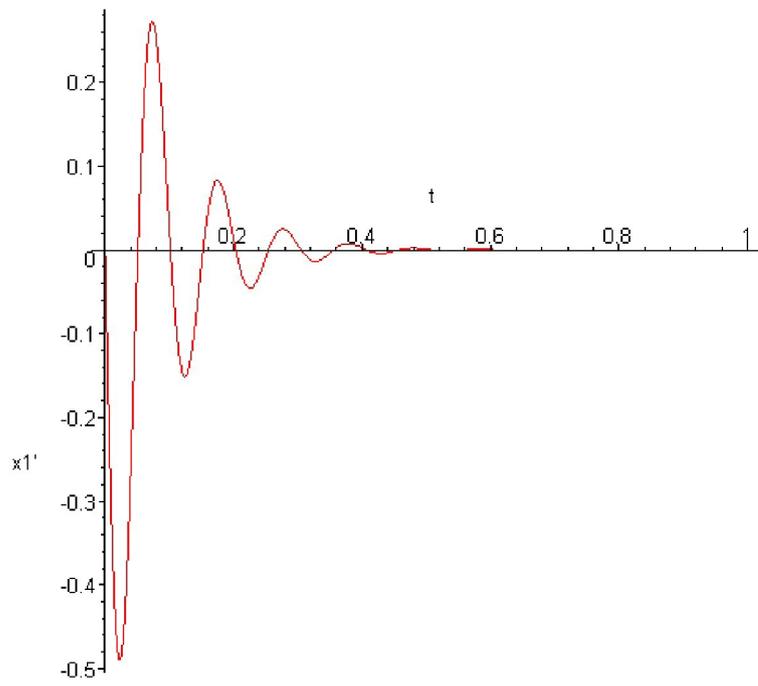


Рис. 36. - График зависимости  $\dot{x}_1(t)$

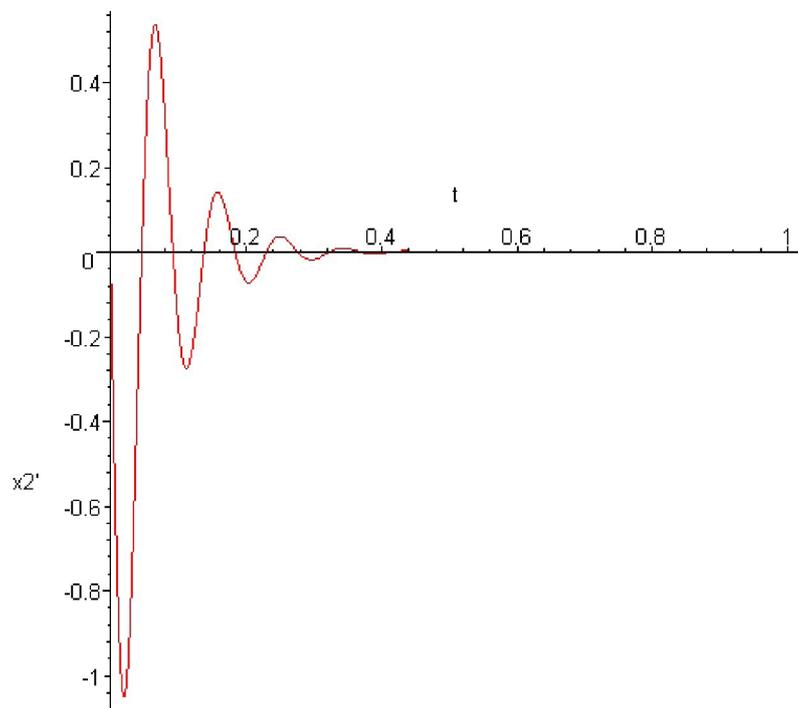


Рис. 37 - График зависимости  $\dot{x}_2(t)$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приводятся краткие сведения по теории и практические рекомендации по решению прикладных задач по курсу «Стабилизация и управление движением динамических систем». Освещены основные вопросы из теории устойчивости, теории математического управления, теории построения и стабилизации программных движений механических систем. Приведены решения примеров и прикладных задач о построении и стабилизации программных движений математического маятника и твердого тела на подвижной платформе, двойного математического маятника и маятника на вращающемся основании. В конце работы приводится список рекомендованной литературы.

На примере маятника было проведено комплексное исследование свойств устойчивости различных стационарных движений механической системы с двумя степенями свободы. С помощью разных методов теории устойчивости были выделены подмножества устойчивых и неустойчивых положений относительного равновесия маятника и получены условия их устойчивости и неустойчивости; проведен анализ возможностей применимости того или иного метода, их сравнение, продемонстрирована их взаимосвязь. Также осуществлен синтез и стабилизация заданного программного движения. Решены задача конструирования программного управления, обеспечивающего реализацию заданного желаемого движения механической системы (в общем случае не являющегося решением исходной неуправляемой системы), и задача синтеза позиционного (стабилизирующего) управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость программного движения и неустойчивых стационарных движений неуправляемой механической системы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аппель П. Теоретическая механика. Т,1-2. М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.; 487 с.
2. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.—375 с.
3. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. – 223 с.
4. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: «Эдиториал УРСС», 1998. – 168 с.
5. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. – 530 с.
6. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учеб пособие для университетов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. Лит., 1990. – 416 с.
7. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
8. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – Учеб. Пособие для вузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат лит. , 1988, 304 с.
9. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. – 300 с.
10. СТП СГАУ 6.1.4. – 97. Общие требования к оформлению учебных текстовых документов: методические указания.
11. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. – М.: Наука, 1981. 143 с.
12. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы// ПММ. -- 1984. -Т.48. Вып.2. - С.225-232.
13. Андреев А.С. Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы// ПММ. - 1996. - Т.60. Вып. 3 С. 388-396.
14. Андреев А.С., Безгласный С.П. О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления// ПММ. 1997. I .61. Вып.1. - С.44-51
15. Безгласный С.П. Стабилизация программных движений математического маятника с подвижной точкой подвеса. Учебные записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные математики и механики. Выпуск 1(5)/ Под ред. акад. РАЕН, проф.А.С. Андреева. Ульяновск: УлГУ, 1998г-179с.
16. Румянцев В.В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем// ПММ. - 1970. - Т.34. Вып.3. - С.440-456.
17. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М. Гостехиздат, 1950.
18. Bezglasny S.P. The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems// Journal of applied mathematics & computing, vol. 14, No. 1-2, Korea, 2004.

19. Безгласный С.П., Мысина О.А. Стабилизация программных движений твердого тела на подвижной основе. Известия Саратовского университета, Сер. Математика. Механика. Информатика., вып 4 (56). Саратов 2008. – С. 44-52.
20. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. М.: Изд. РУДН, 1986
21. Сривастав П.К. Управляемость в линейных системах // В кн.: Материалы 4-й конференции молодых ученых УДН. Мат., физ., химия, М., 1981.
22. Сривастав П.К. Об управляемости динамических систем при ограниченных управлениях // В кн.: Материалы 5-й конференции молодых ученых УДН. Мат., физ., химия, М., 1982. Ч. 1.
23. Бендик М.М. Об уравнениях программных движений твердого тела // Сб.: Дифференциальные уравнения и обратные задачи динамики. М.: Изд-е УДН, 1983. С. 153-157.
24. Мухаметзянов И.А. Построение одного семейства функций Ляпунова // Вестник РУДН, сер. Прикладная математика и информатика, 1995. №1. С. 9-12.
25. Мухарлямов Р.Г. Обратные задачи механики // В кн.: Устойчивость движения. Аналитическая механика. Управление движением. М.: Наука, 1981. С. 217 -222.
26. Безгласный С.П., Мысина О.А. Одноосная и трехосная ориентации соосных тел переменной структуры // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. (принята к печати)
27. Андреев А.С., Чудинова И.А. К задаче об ориентации спутника относительно произвольной системы координат // Ученые записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. – 2001. - № 1. – С. 3-11.
28. Безгласный С.П., Худякова М.А. Стабилизация программных движений уравновешенного гиростата // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. (принята к печати).
29. Смирнов Е.Я., Павликов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. Управление движением механических систем. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. – 319 с.