

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени акад. С.П.КОРОЛЕВА

**А.Ф.Тараскин**

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И  
МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО**

Учебное пособие

САМАРА 1997

УДК 519.6

**Статистическое моделирование и метод Монте-Карло:**  
Учебное пособие / **А.Ф.Тараскин**; Самар.гос.аэрокосм.ун-т.  
Самара, 1997. 62 с.  
ISBN 5-7883-0007-X

Изложены методы моделирования случайных величин, векторов и процессов.

Предназначено для студентов специальности "Прикладная математика" при выполнении курсовых и расчетно-графических работ по курсам "Теория вероятностей и математическая статистика" и "Случайные процессы".

Подготовлено на кафедре "Техническая кибернетика".

*Библиогр.:* 10 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева

**Рецензенты:**

д-р физ.-мат. наук, проф.  
канд. физ.-мат. наук, доц.

**А.И.Жданов**  
**С.Я.Шатских**

ISBN 5-7883-0007-X

©Тараскин А.Ф., 1997  
©Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 1997

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |    |
|--|----|
| <b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....  | 4  |
| <b>1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН</b> .....                              | 6  |
| 1. Моделирование дискретных случайных величин .....                          | 6  |
| 2. Моделирование непрерывных случайных величин .....                         | 10 |
| <b>2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ</b> .....                             | 32 |
| 1. Моделирование вектора с независимыми координатами ....                    | 32 |
| 2. Универсальный метод моделирования<br>непрерывных случайных векторов ..... | 34 |
| 3. Метод преобразований .....  | 37 |
| 4. Моделирование гауссова вектора .....                                      | 39 |
| 5. Моделирование дискретных случайных векторов .....                         | 40 |
| <b>3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ</b> .....                            | 41 |
| 1. Общие замечания .....   | 41 |
| 2. Квазислучайные процессы .....   | 42 |
| 3. Приближенное моделирование случайного процесса .....                      | 44 |
| 4. Процессы с независимыми значениями .....                                  | 46 |
| 5. Процессы с независимыми приращениями .....                                | 47 |
| 6. Марковские процессы .....   | 49 |
| 7. Стационарные процессы .....   | 54 |
| <b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....   | 61 |

## ВВЕДЕНИЕ

Метод статистического моделирования, известный в литературе также под названием метода Монте-Карло, дает возможность конструировать для ряда важных задач алгоритмы, хорошо приспособленные к реализации на компьютерах. Возникновение метода Монте-Карло связывают обычно с именами Дж.Неймана, С.Улама, Н.Метрополиса, а также Г.Кана и Э.Ферми; все они в 40-х годах работали в Лос-Аламосе (США) над созданием первой атомной бомбы. Название "Монте-Карло" произошло от города Монте-Карло (княжество Монако), известного своими казино, ибо одним из простейших приборов для генерирования случайных чисел служит рулетка.

Хотя общепринятого определения методов Монте-Карло не существует, тем не менее под этим названием подразумевают численные методы решения математических задач при помощи моделирования случайных величин и процессов. Основная идея метода — связь между вероятностными характеристиками различных случайных процессов (вероятностями случайных событий или математическими ожиданиями случайных величин) и величинами, являющимися решениями задач математического анализа (значениями интегралов, решениями дифференциальных уравнений и т.д.). Оказывается, что вместо вычисления ряда сложных аналитических выражений можно "экспериментально" определить значения соответствующих вероятностей и математических ожиданий. Этот метод получил широкое развитие в связи с новыми возможностями, которые дают быстродействующие электронные вычислительные машины.

Продемонстрируем суть метода на простой задаче. Пусть требуется приближенно определить математическое ожидание  $MX$  с.в.  $X$ . Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — значения величины  $X$ , полученные при  $n$  независимых испытаниях (измерениях) с.в.  $X$ . Тогда величина

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad (1)$$

где  $X_k, k = 1, \dots, n$  — независимые с.в. с общим распределением, совпадающим с распределением с.в.  $X$ , в соответствии с центральной предельной теоремой распределена по закону, близкому к гауссовому с параметрами

$$M\bar{X} = MX, \quad D\bar{X} = \frac{DX}{n}$$

Поэтому имеет место оценка (с надежностью 0,997)

$$|\bar{X} - MX| < 3\sqrt{\frac{DX}{n}} \quad (2)$$

Таким образом, в этом случае "время" связано обратной зависимостью с достигаемой точностью  $\varepsilon$

$$n = \frac{9DX}{\varepsilon^2} \quad (3)$$

Необходимо отметить одну особенность метода Монте-Карло, состоящую в том, что оценка погрешности вычислений имеет вероятностный характер. При этом методе нельзя утверждать, что ошибка не превысит какого-либо значения. Можно только указать границы, за которые ошибка не выйдет с вероятностью, близкой к единице. В частности, в оценке (2) эта вероятность равнялась 0,997.

В соответствии с основной идеей метода Монте-Карло для приближенного вычисления величины  $a$  необходимо "придумать" такую с.в.  $X$ , чтобы  $MX = a$ . При этом сама величина  $X$  может быть функцией какой-то скалярной или векторной случайной величины, или даже функционалом от случайного процесса. Поэтому *первоочередной задачей* при использовании метода Монте-Карло является *задача моделирования случайных величин или случайных процессов*. Эта задача и рассматривается в настоящем пособии. Оно состоит из трех глав. Распределение материала по главам таково.

В первой главе даются некоторые "прямые" и "специальные" методы моделирования случайных величин. Приводятся алгоритмы моделирования большого числа часто встречающихся в различных исследованиях дискретных и непрерывных с.в. Поскольку часть рассматриваемых с.в. студентам может встретиться впервые, в пособии приводятся попутно некоторые сведения о них.

Во второй главе излагаются способы моделирования случайных векторов. Рассматривается моделирование вектора с независимыми координатами. В частности, приводятся равномерное распределение в параллелепипеде и гауссово распределение с независимыми координатами. Приводятся два общих метода моделирования векторов: так называемый универсальный метод и метод преобразований. С помощью последнего рассмотрено моделирование произвольного невырожденного гауссова вектора.

Третья глава посвящена моделированию некоторых случайных процессов. В их числе квазислучайные процессы, процессы с независимыми значениями и независимыми приращениями. К последним относятся, в частности, винеровский процесс и процессы Пуассона. Рассмотрено моделирование основных классов марковских процессов, включая цепи Маркова, марковские процессы с непрерывным временем и дискретным фазовым пространством, а также диффузионные марковские процессы. Изложены методы моделирования стационарных процессов, среди которых подробно рассмотрены стационарные процессы с непрерывным временем, имеющие дробно-рациональную спектральную плотность, и стационарные случайные последовательности авторегрессии  $k$ -скользящего среднего. Представлен также общий подход к приближенному моделированию процессов, основанный на их ортогональном разложении.

# 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Практическая работа по курсам математической статистики и случайных процессов предполагает знание студентами основ статистического моделирования, которые должны войти как обязательный раздел в программу курса. В принципе, необходимый для решения учебных задач минимум теоретического материала по вопросам моделирования может быть предложен студентам для самостоятельного изучения в форме решения некоторого набора соответствующих задач. Ниже приводится ряд простых алгоритмов моделирования выборок из различных распределений, которых вполне достаточно для решения большого числа учебных задач. Поскольку многие из рассматриваемых в пособии распределений встретятся студентам впервые, мы попутно приводим сведения о них, необходимые для неформального восприятия. Обычно для получения реализации последовательности независимых случайных величин с произвольным распределением используют реализации последовательности независимых случайных величин

$$U, U_0, U_1, \dots, U_k, \dots \quad (4)$$

равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1]$ . Случайные величины последовательности (4) "генерируются" специальной программой, входящей в математическое обеспечение компьютера, и называемой датчиком случайных чисел. Мы не будем вникать в "механизм" датчика случайных чисел, а будем использовать его для формирования реализаций последовательности (4). Не будут затрагиваться и вопросы эффективности алгоритмов моделирования, поскольку пособие нацелено только на первоначальное знакомство с предметом. В то же время иногда будут указываться разные подходы к моделированию одной и той же случайной величины.

Для обозначения закона распределения с.в.  $X$  будем использовать символ  $\mathcal{L}(X)$ . Так что для случайных величин последовательности (4) имеем  $\mathcal{L}(U) = R_{[0,1]}$ .

## 1. Моделирование дискретных случайных величин

**1.1. Универсальный метод моделирования дискретных случайных величин.** Начнем с изложения общего подхода к моделированию дискретных случайных величин. Пусть  $X$  — дискретная с.в. с множеством возможных значений  $\mathcal{X} = \{x_i, i \in I\}$ , где  $I = \{0, 1, 2, \dots\}$  — конечное или счетное множество индексов, и вероятностями  $p_i, i \in I$ , ее возможных значений:

$$p_i = P(X = x_i). \quad (5)$$

Совокупность вероятностей  $\mathcal{P} = \{p_i, i \in I\}$  удовлетворяет условиям

$$p_i > 0 \quad \text{для всех } i \in I,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$$

Если  $U$  — с.в. с равномерным распределением  $R_{[0,1]}$ , то

$$P\left\{\sum_{k=0}^{i-1} p_k \leq U < \sum_{k=0}^i p_k\right\} = p_i, \quad (6)$$

где  $p_i$  определено равенством (5). Сравнивая равенства (5) и (6), получаем алгоритм моделирования с.в.  $X$ : если величина  $U$  принимает значение

$$u \in \left[ \sum_{k=0}^{i-1} p_k, \sum_{k=0}^i p_k \right),$$

то величина  $X$  полагается равной  $i$ .

Перейдем к рассмотрению конкретных, и в то же время наиболее важных в теории и приложениях, дискретных случайных величин.

**1.2. Схема независимых испытаний Бернулли**, как известно, играет важнейшую роль в теории вероятностей. С другой стороны, она служит основой для моделирования целого ряда тесно связанных с ней с.в. Для моделирования последовательности испытаний Бернулли  $X_1, X_2, \dots$ , где  $\mathcal{L}(X_k) = Bi(1, p)$   $P(X_k = 1) = 1 - P(X_k = 0) = p$  при заданном  $p \in (0, 1)$ , достаточно, очевидно, положить  $X_k = I(U_k \leq p)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $I(A)$  — индикатор случайного события  $A$  ( $I(A) = 1$ , если  $A$  наступает, и 0 в противном случае). Событие  $A$  по традиции будем называть *успехом*.

**1.3. Биномиальная с.в.** Чтобы смоделировать выборку для биномиальной с.в.  $X$  с параметрами  $(N, p)$  (т.е.  $\mathcal{L}(X) = Bi(N, p)$ ), достаточно воспользоваться свойством воспроизводимости распределения  $Bi(N, p)$  по параметру  $N$ :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_N,$$

где  $\mathcal{L}(X_k) = Bi(1, p)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , и применить алгоритмы схемы Бернулли.

**1.4. Отрицательная биномиальная с.в.** Отрицательная биномиальная с.в.  $X$  определяется через схему Бернулли как число всех "неудач" до  $r$ -го "успеха". Для закона распределения этой с.в. используют обозначение  $\mathcal{L}(X) = \overline{Bi}(r, p)$ . При этом

$$P(X = j) = C_{r+j-1}^j p^r (1-p)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Подсчет показывает, что математическое ожидание и дисперсия отрицательной с.в.  $X$  даются равенствами

$$MX = \frac{rq}{p} \quad \text{и} \quad DX = \frac{rq}{p^2}, \quad \text{где} \quad q = 1 - p$$

**1.5. Геометрическая с.в.** В частном случае  $r = 1$  отрицательную биномиальную с.в. называют *геометрической случайной величиной*. Это будет с.в.  $X$  с законом распределения  $\overline{Bi}(1, p)$ , для которого

$$P(X = j) = p(1-p)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Иногда геометрическое распределение вероятностей называется *распределением Фарри*. Математическое ожидание и дисперсия этого распределения находятся по формулам

$$MX = \frac{q}{p}, \quad DX = \frac{q}{p^2}.$$

1.6. Случайная величина с **распределением Паскаля** определяется как число всех испытаний в схеме Бернулли до наступления  $r$ -того "успеха". Закон распределения Паскаля дается формулой

$$P(Y = j) = C_{j-1}^{r-1} p^r (1-p)^{j-r}, \quad j = r, r+1, \dots$$

Между отрицательной биномиальной с.в.  $X$  и распределенной по закону Паскаля с.в.  $Y$  (при фиксированных  $r$  и  $p$ ) имеет место простая связь  $Y = X + r$ . Отсюда имеем

$$MY = \frac{r}{p}, \quad DX = \frac{rq}{p^2}.$$

*Моделирование случайных величин с распределением Паскаля, геометрической и отрицательной биномиальной основывается на их определении и на алгоритме моделирования последовательности испытаний Бернулли.*

1.7. Пуассоновская случайная величина  $X$  является одной из наиболее важных дискретных с.в. Она принимает свои значения из множества  $X = \{0, 1, \dots\}$  целых неотрицательных чисел, а закон распределения Пуассона задается формулой

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in X,$$

где  $\lambda > 0$  — параметр распределения. Закон распределения Пуассона с параметром  $\lambda$  принято обозначать  $\Pi(\lambda)$ . Как известно из курса теории вероятностей, математическое ожидание и дисперсия пуассоновской с.в. совпадают между собой и равны параметру ее распределения:

$$MX = \lambda \quad \text{и} \quad DX = \lambda.$$

Закон Пуассона является предельным для биномиального распределения и поэтому справедлива приближенная формула

$$p_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}, \quad (7)$$

где  $p$  мало, а  $n$  — достаточно велико.

По закону Пуассона часто распределено число случайных событий, происходящих в каком-либо промежутке времени (например, число распавшихся атомов радиоактивного вещества за единицу времени). Иногда закон Пуассона описывает не временные, а пространственные случайные

явления. Тогда с.в.  $X$  трактуется как число точек, попавших в часть пространства заданного объема (например, число изюминок в булочке).

Для моделирования пуассоновской с.в. можно использовать так универсальный метод, так и аппроксимирующую формулу (7). В последнем случае следует выбрать достаточно большое  $n$  и положить  $p = \frac{\lambda}{n}$ . В этом случае, согласно (7), биномиальное распределение  $Bi(n, \frac{\lambda}{n})$  будет близко к пуассоновскому  $\Pi(\lambda)$ .

Ниже, при рассмотрении непрерывных с.в., мы укажем еще один способ моделирования пуассоновских с.в.

Приведем еще два, важных с точки зрения приложений, примера дискретных с.в., для моделирования которых можно воспользоваться описанным выше универсальным методом.

**1.8. Гипергеометрическая с.в.** Пусть в множестве  $N$  элементов содержится  $k$  элементов с признаком  $B$ . Из множества извлекаются случайным образом  $n$  элементов ( $n \leq N$ ) без возвращения. Тогда число  $X$  элементов с признаком  $B$ , содержащихся в выборке, подчиняется гипергеометрическому закону распределения вероятностей. Вероятность появления в выборке из  $n$  элементов ровно  $x$  с признаком  $B$  определяется формулой

$$p(x; N, n, k) = P(X = x) = \frac{C_k^x C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n}, \quad (8)$$

в которой  $0 \leq x \leq \min(n, k) \leq N$ . Эта формула и задает так называемое гипергеометрическое распределение вероятностей, определяемое тремя параметрами  $N, n, k$ , и обозначаемое  $Hg(N, n, k)$ . Подсчет математического ожидания и дисперсии гипергеометрической с.в.  $X$  приводит к формулам

$$MX = \frac{nk}{N}, \quad DX = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

**1.9. Равномерно распределённая дискретная с.в.**  $X$  — это с.в. с конечным множеством возможных значений  $X = \{x_i, i \in I\}$ , принимаемых с одинаковыми вероятностями. Если множество  $X$  состоит из  $N$  элементов, то

$$p_i = P(X = x_i) = \frac{1}{N}, \quad \text{для любого } i \in I. \quad (9)$$

Равномерный закон дискретной с.в., таким образом, определяется одним параметром  $N$  и обозначается  $Ud(N)$ . С.в.  $X$  с равномерным распределением  $Ud(N)$  имеет математическое ожидание

$$M. = \frac{1}{N} \sum_{i \in I} x_i$$

и дисперсию

$$DX = \frac{N-1}{N^2} \sum_{i \in I} x_i^2 - \frac{2}{N^2} \sum_{i > j} x_i x_j.$$

## 2. Моделирование непрерывных случайных величин

**2.1. Универсальный метод и метод преобразований.** Для моделирования случайных величин с непрерывным распределением можно использовать следующий простой факт: если  $F(x)$  — непрерывная и строго монотонная функция распределения и  $F^{-1}(y)$  — обратная к ней функция, то для случайной величины  $Y = F^{-1}(U)$ , где  $\mathcal{L}(U) = R_{[0,1]}$ , имеем

$$P(Y < x) = P(U < F(x)) = F(x).$$

Таким образом, с.в.  $Y = F^{-1}(U)$  имеет функцию распределения  $F(x)$ , и

$$f \quad \{F^{-1}(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n\} -$$

выборка из распределения  $F$ . Если  $F(x)$  не является строго монотонной, то вывод остается в силе, если под обратной функцией понимать  $F^{-1}(y) = \sup\{x : F(x) < y\}$ . Необходимо иметь в виду, что часто не удается выразить обратную функцию  $F^{-1}(y)$  через элементарные, что затрудняет использование "универсального" метода моделирования непрерывной с.в. Однако в этом случае для моделирования с.в.  $Y$  нередко существует удобная формула вида

$$Y = \varphi(U_1, U_2, \dots, U_k), \quad (10)$$

где  $U_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$  — независимые с.в. с  $\mathcal{L}(U_i) = R_{[0,1]}$ . Метод моделирования, основанный на использовании формулы (10), часто называют *методом преобразований*.

Ниже мы рассмотрим ряд непрерывных с.в., которые часто встречаются как в теории вероятностей и математической статистике, так и в различных областях их приложений. Часть из них можно моделировать "универсальным" методом, другие допускают моделирование методом преобразований. Для моделирования случайных величин, распределенных в соответствии с общими бета и гамма распределениями, а также величин, функционально связанных с ними, ниже будут изложены специальные методы: *метод рандомизации* и *метод исключения*.

**2.2. Равномерно распределенная на промежутке  $[a, b]$ ,  $a > -\infty$ ,  $b < +\infty$  с.в.  $X$**  может быть получена путем линейного преобразования с.в.  $U$ :

$$X = a + (b - a)U.$$

Эта формула и позволяет моделировать значения случайной величины с произвольным равномерным законом  $R_{[a,b]}$ . Для этого в правую часть следует подставлять вместо  $U$  значения, генерируемые датчиком "случайных чисел".

Напомним, что математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной с.в. находятся по формулам

$$MX = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2.3. Случайная величина с распределением Симпсона. Пусть  $X$  и  $Y$  — независимые с.в. и  $L(X) = L(Y) = R_{[a,b]}$ . Тогда случайную величину

$$Z = X + Y$$

называют распределенной по закону Симпсона:  $L(Z) = S(a, b)$ . Моделирование этой величины сводится, в силу ее определения, к моделированию пары независимых, распределенных по закону  $R_{[a,b]}$  с.в. Плотность распределения Симпсона получается как свертка плотностей равномерных распределений на  $[a, b]$ . Она равна нулю вне промежутка  $[2a, 2b]$  и имеет вид

$$f_Z(z) = \frac{z - 2a}{(b - a)^2}, \quad \text{для } 2a \leq z < a + b$$

и

$$f_Z(z) = -\frac{z - 2b}{(b - a)^2}, \quad \text{для } a + b < z \leq 2b.$$

Распределение Симпсона, очевидно, определяется двумя параметрами  $a$  и  $b$ . Так как  $MZ = MX + MY$  и  $DZ = DX + DY$ , то получаем

$$MZ = a + b \quad \text{и} \quad DZ = \frac{(b - a)^2}{6}.$$

2.4. Степенные распределения. Мы рассмотрим два таких распределения. Первое из них задается функцией распределения

$$F_0(x) = x^a, \quad x \in (0, 1),$$

содержащей единственный параметр  $a > 0$ . Это распределение будет обозначаться  $F_0(a)$ . Случайная величина  $X$  со степенным распределением  $F_0(a)$ , таким образом, является непрерывной с плотностью

$$f_0(x) = ax^{a-1}, \quad x \in (0, 1),$$

по которой легко найти любые ее начальные (а значит и центральные) моменты

$$\alpha_k = MX^k = a \int_0^1 x^{a+k-1} dx = \frac{a}{a+k}$$

Отсюда

$$MX = \frac{a}{a+1}, \quad DX = \frac{a}{(a+2)(a+1)^2}$$

Функция, обратная к функции распределения степенного закона, имеет вид

$$F^{-1}(u) = u^{\frac{1}{a}}$$

Это значит, что для моделирования с.в.  $X$  можно использовать "универсальный" метод, что приводит к алгоритму

$$X = U^{\frac{1}{a}}.$$

где значения с.в.  $U$  выдаются датчиком случайных чисел.

Другое степенное распределение задается функцией распределения

$$F_1(y) = 1 - (1 - y)^b, \quad y \in (0, 1),$$

с единственным параметром  $b > 0$ . Это распределение будет обозначаться символом  $P_1(b)$ . С.в.  $Y$  с распределением  $P_1(b)$  имеет плотность

$$f_1(y) = b(1 - y)^{b-1}, \quad y \in (0, 1).$$

Ее начальные моменты

$$\alpha_k = MY^k = b \int_0^1 (1 - y)^{b+k-1} dy = \frac{b}{b+k},$$

как и математическое ожидание и дисперсия

$$MY = \frac{b}{b+1}, \quad DY = \frac{b}{(b+2)(b+1)^2},$$

по существу, выражаются теми же формулами, что и соответствующие моменты с.в.  $X$ .

Моделирование с.в.  $Y$  на основе "универсального" метода приводит к алгоритму

$$Y = 1 - (1 - U)^{\frac{1}{b}}.$$

Рассмотренные два степенных распределения будут использованы ниже при моделировании *общего бета-распределения*.

**2.5. Распределение арксинуса.** Пусть с.в.  $U$  имеет равномерное распределение  $R_{[-1, 1]}$ . Определим с.в.  $X$ , полагая

$$X = a \sin(U + b), \quad (11)$$

где  $a > 0$  и  $b \in R$  — параметры. Распределение этой с.в. называется *законом арксинуса*. Так как с.в.  $X$  принимает значения в промежутке  $[-a, a]$ , то ее плотность равна нулю вне этого отрезка. Обычным путем находим плотность  $f_X(x; a)$  для  $x \in (-a, a)$ :

$$f_X(x; a) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (12)$$

и моменты:

$$MX = 0, \quad DX = \frac{a^2}{2}.$$

**2.6. Показательное распределение.** С.в.  $X$  называется распределенной по *показательному закону* с параметром  $c$ , обозначаемому в дальнейшем  $E(c)$ , если ее функция распределения имеет вид

$$F(x) = 1 - e^{-cx}, \quad x \geq 0.$$

Плотность распределения показательного закона задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}, \quad x > 0,$$

и легко видеть, что с.в.  $X$  имеет моменты всех порядков. Для начальных моментов получаются формулы:

$$\alpha_k = Mx^k = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} x^k e^{-\frac{x}{a}} dx = a^k k!, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда для математического ожидания и дисперсии имеем:

$$MX = a, \quad DX = a^2$$

Для моделирования с.в.  $X$  можно воспользоваться универсальным методом. Функция, обратная к функции распределения, имеет вид

$$F^{-1}(u) = -\ln(1-u), \quad 0 < u < 1.$$

Тогда значения с.в.  $X$  будут получаться по формуле

$$X = -a \ln(1-U).$$

Так как случайные величины  $U$  и  $1-U$  имеют одно и то же равномерное распределение  $R_{(0,1)}$ , то в качестве алгоритма моделирования с.в.  $X$  с распределением  $E(a)$  можно принять несколько более простую формулу

$$X = -a \ln U,$$

где значения  $U$  выдает датчик случайных чисел.

На основе показательной с.в. можно моделировать другие важные в приложениях случайные величины.

2.7. Распределение Лапласа задается плотностью вида

$$f(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x-m|}{a}}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

и нередко называется *двусторонним показательным распределением*. Это распределение содержит два параметра:  $a > 0$  и  $-\infty < m < \infty$ . Для него будет использоваться обозначение  $L(m, a)$ . С.в.  $X$  с распределением Лапласа  $L(m, a)$  обладает моментами всех порядков. Нетрудно подсчитать, что для начальных моментов справедлива формула

$$\alpha_k = MX^k = k! a^k \sum_{\substack{r=0 \\ (r, k) \leq k, k-r \text{ четное}}} \frac{(m/a)^r}{r!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В частности,  $\alpha_1 = MX = m$ . Центральные моменты нечетных порядков будут равны нулю, а четных — определяются формулой

$$\mu_{2k} = M(X_m)^{2k} = (2k)!a^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В частности,

$$\mu_2 = DX = 2a^2.$$

Функция распределения двустороннего показательного распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x-m}{a}}, & x \leq m \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x-m}{a}}, & x > m. \end{cases}$$

Обратная к ней функция  $F^{-1}(u)$  определена для  $u \in (0, 1)$  формулой

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} m + a \ln(2u) & \text{при } 0 < u \leq \frac{1}{2}, \\ m - a \ln[2(1-u)] & \text{при } \frac{1}{2} < u < 1. \end{cases}$$

Отсюда имеем алгоритм моделирования с.в.  $X$  с распределением Лапласа  $L(m, a)$ : если получаемая от датчика случайных чисел величина  $U$  (с распределением  $R_{(0,1)}$ ) имеет значение в промежутке  $(0, \frac{1}{2}]$ , то

$$X = m + a \ln(2U),$$

а если  $U$  имеет значение в промежутке  $(\frac{1}{2}, 1)$ , то

$$X = m - a \ln[2(1-U)].$$

**2.8. Распределение Эрланга** определяется как распределение суммы  $m$  независимых, одинаково распределенных по показательному закону с параметром  $a$  с.в.:  $Y = X_1 + \dots + X_m$ . Закон распределения Эрланга, таким образом, определяется парой параметров  $(a, m)$  и обычно обозначается  $\Gamma(a, m)$ . Плотность распределения с.в.  $Y$  имеет вид

$$f(y) = \frac{y^{m-1}}{a^m(m-1)!} e^{-y/a}, \quad y \geq 0.$$

Полезно знать следующее известное из теории вероятностей свойство воспроизводимости случайных величин с распределением Эрланга.

**Утверждение 1.** Пусть с.в.  $Y_1$  и  $Y_2$  независимы и имеют распределения Эрланга  $\Gamma(a, m_1)$  и  $\Gamma(a, m_2)$  соответственно. Тогда с.в.  $Z = Y_1 + Y_2$  распределена по закону Эрланга  $\Gamma(a, m_1 + m_2)$ .

**Доказательство.** Характеристическая функция с.в.  $Y_i$ ,  $i = 1, 2$ , равна

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{1}{(1 - ia\lambda)^{m_i}}.$$

Поскольку характеристическая функция суммы независимых с.в. равна произведению их характеристических функций, то

$$\varphi_Z(\lambda) = \frac{1}{(1 - ia\lambda)^{m_1 + m_2}} = \varphi_{Y_1 + Y_2}(\lambda).$$

Ввиду взаимно однозначного соответствия между распределением и характеристической функцией утверждение доказано.

**Замечание 1.** Распределение Эрланга  $\Gamma(a, 1)$  есть не что иное, как показательное распределение с параметром  $a$ . Учитывая Утверждение 1, можно сказать, что распределение Эрланга  $\Gamma(a, m)$  является  $m$ -кратной композицией показательного распределения  $E(a) = \Gamma(a, 1)$ .

Еще один алгоритм моделирования пуассоновской с.в. Если  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность с.в., независимых и одинаково распределенных по показательному закону  $E(1) = \Gamma(1, 1)$ , а  $\lambda > 0$  — заданное действительное число, то с.в.  $Y = \max\{k : X_1 + \dots + X_k \leq \lambda\}$  ( $Y = 0$ , когда  $X_1 > \lambda$ ) имеет распределение Пуассона  $\Pi(\lambda)$ . Учитывая связь величин  $X$  с равномерно распределенными величинами  $U$ , для моделирования пуассоновской с.в.  $Y$  с параметром  $\lambda$  можно также пользоваться соотношением

$$Y = \max\left\{k : \prod_{i=1}^k U_i \geq e^{-\lambda}\right\},$$

при котором исчезает необходимость вычисления логарифмов. Действительно, так как события  $\{Y \geq m\}$  и  $\{X_1 + \dots + X_m \leq \lambda\}$ , очевидно, эквивалентны, и  $\mathcal{L}(X_1 + \dots + X_m) = \Gamma(m, 1)$ , то при  $m \geq 1$

$$P(Y \geq m) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\lambda x^{m-1} e^{-x} dx = \sum_{r=m}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!},$$

т.е.

$$P(Y = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

**2.9. Логистическое распределение** задается функцией распределения

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (13)$$

которая является симметричной, что означает выполнение равенства

$$F(-x) = 1 - F(x) \quad \forall x \in R.$$

Функция (13) называется логистической (без каких-либо на то причин); она выведена Верхлюстом в 1845 г. Он предположил, что увеличение логарифма количества населения  $P(t)$  для данной страны, как функция времени  $t$ , равно разности постоянной и функции, которая увеличивается с ростом населения. Одним из решений его системы уравнений является функция

$$P(t) = \frac{P_\infty}{1 + ce^{-at}},$$

где  $P_\infty$  — предельное количество населения, которое предполагается независимым от технических и социальных условий, а  $c$  и  $a$  — положительные константы. Формула Верхлюста широко использовалась, и ею сильно злоупотребляли как общим законом роста.

Плотность логистического распределения получим из (13):

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \quad x \in R. \quad (14)$$

Она является четной функцией:  $f(-x) = f(x)$ ,  $\forall x \in R$ , что является следствием симметричности функции  $F(x)$ . Для логистической с.в.  $X$  существуют моменты всех порядков, причем начальные моменты нечетного порядка равны нулю. Для математического ожидания и дисперсии с.в.  $X$  имеем

$$MX = 0, \quad DX = \frac{\pi^2}{3}.$$

Отметим, что логистическое распределение широко используется в исследованиях по дозиметрии. Оно является также асимптотическим распределением полусуммы наибольшего и наименьшего значений выборки для симметричного распределения экспоненциального типа (см. [3], гл. 8).

Для моделирования логистической с.в.  $X$  можно использовать общий метод, описанный в предыдущем пункте. Функция распределения (13) является непрерывной, строго возрастающей на всей прямой  $R$ , и для нее существует обратная функция:

$$F^{-1}(u) = \ln \frac{u}{1-u}. \quad (15)$$

Тогда, подставляя в правую часть (15) вместо аргумента  $u$  значение с.в.  $U$  с равномерным распределением  $R_{[0,1]}$ , будем получать значения с.в.  $X$  с логистическим распределением (13). Таким образом, алгоритм моделирования логистической с.в.  $X$  можно задать формулой

$$X = \ln \frac{U}{1-U}. \quad (16)$$

**2.10. Общее логистическое распределение** определяется как распределение с.в.

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sigma X + c, \quad (17)$$

где  $X$  — с.в. с функцией распределения (13). Из этого определения получаем:

$$MY = c, \quad DY = \sigma^2$$

Моделируя с.в.  $X$  по формуле (16), из формулы (17) будем получать значения общей логистической с.в.  $Y$ .

**2.11. Распределение Вейбулла** задается функцией распределения

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-c}{b-c}\right)^k\right\}, \quad x \geq c, \quad (18)$$

где параметры удовлетворяют условиям:  $c \geq 0$ ,  $b > c$ ,  $k > 0$ . Название этого распределения связывается с именем инженера Вейбулла, который

использовал его впервые для анализа прочности на разрыв. Оно приводит также к плодотворным результатам при изучении засух. В математической статистике оно возникает как одно из предельных распределений наименьшего значения выборки.

Плотность распределения Вейбулла (18) имеет вид

$$f(x) = \frac{k}{v-\varepsilon} \left( \frac{x-\varepsilon}{v-\varepsilon} \right)^{k-1} \exp \left\{ - \left( \frac{x-\varepsilon}{v-\varepsilon} \right)^k \right\} \quad \text{для } x \geq \varepsilon, \quad (19)$$

и  $f(x) = 0$  для  $x < \varepsilon$ . У с.в.  $X$  с распределением Вейбулла существуют моменты всех порядков. Для начального момента  $\alpha_r$  ( $r > 0$  — целое) имеем

$$\alpha_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx = \frac{k}{v-\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^r \left( \frac{x-\varepsilon}{v-\varepsilon} \right)^{k-1} \exp \left\{ - \left( \frac{x-\varepsilon}{v-\varepsilon} \right)^k \right\} dx.$$

Произведем замену переменной в интеграле правой части последнего равенства, полагая

$$z = \left( \frac{x-\varepsilon}{v-\varepsilon} \right)^k.$$

Тогда, после элементарных преобразований, получим

$$\alpha_r = \sum_{i=0}^r C_r^i (v-\varepsilon)^i \varepsilon^{r-i} \Gamma \left( \frac{1}{k} + 1 \right),$$

где  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция, определяемая равенством

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} z^{x-1} e^{-z} dz, \quad x > 0.$$

Отсюда

$$MX = \varepsilon + \frac{v-\varepsilon}{k} \Gamma \left( \frac{1}{k} \right), \quad \text{и} \quad DX = \frac{(v-\varepsilon)^2}{k} \left\{ 2\Gamma \left( \frac{2}{k} \right) - \frac{1}{k} \Gamma^2 \left( \frac{1}{k} \right) \right\}.$$

Используя универсальный метод моделирования, найдем обратную функцию для функции распределения (18):

$$F^{-1}(u) = \varepsilon + \left[ -\ln(1-u) \right]^{\frac{1}{k}}, \quad 0 < u < 1.$$

Отсюда получаем алгоритм моделирования с.в. Вейбулла с функцией распределения (18):

$$X = \varepsilon + \left[ -\ln U \right]^{\frac{1}{k}},$$

где  $\mathcal{L}(U) = R_{(0,1)}$ .

**Замечание 2.** Если в распределении Вейбулла  $\varepsilon = 0$ ,  $k = 1$ , то плотность распределения (19) примет вид

$$f(x) = \frac{1}{v} e^{-\frac{x}{v}}, \quad x \geq 0,$$

в котором узнаем показательное распределение с параметром  $\nu$ .

**2.12. Моделирование гауссовых с.в.** Переходя к моделированию гауссовых с.в., рассмотрим один общий результат о преобразованиях случайных векторов.

**Утверждение 2.** Пусть случайный вектор  $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$  распределен с плотностью  $f_X(x) = f_X(x_1, \dots, x_m)$  и соотношения

$$\begin{aligned} y_1 &= \phi_1(x_1, \dots, x_m) \\ &\dots \dots \dots \\ y_m &= \phi_m(x_1, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (20)$$

представляют собой взаимно однозначное и дифференцируемое преобразование  $y = \Phi(x)$ . Тогда плотность распределения вектора  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ , где  $Y_j = \phi_j(X_1, \dots, X_m)$ , определяется выражением

$$f_Y(y) = f_X(\Phi^{-1}(y)) \left| \frac{D\Phi^{-1}}{Dy} \right| \quad (21)$$

где  $y = (y_1, \dots, y_m)$ .  $\Phi^{-1}$  — преобразование, обратное к (20), а под знаком модуля стоит якобиан этого преобразования.

**Доказательство.** Согласно определению плотности распределения вектора имеем

$$\begin{aligned} \int_D f_Y(y) dy &= P(Y \in D) = P(\Phi(X) \in D) = \\ &= P(X \in \Phi^{-1}(D)) = \int_{\Phi^{-1}(D)} f_X(x) dx. \end{aligned}$$

Сделав в последнем интеграле замену переменных  $x = \Phi^{-1}(y)$ , приходим к соотношению

$$\int_D f_Y(y) dy = \int_D f_X(\Phi^{-1}(y)) \left| \frac{D\Phi^{-1}}{Dy} \right| dy,$$

которое означает справедливость Утверждения 2.

**Стандартная гауссова (нормальная) с.в.** Она имеет нулевое среднее и единичную дисперсию, а ее закон распределения обозначают символом  $N(0, 1)$ . Один из методов получения стандартных нормальных с.в. из равномерно распределенных величин (4) состоит в построении соответствующего явно вычислимого функционального преобразования. Примером такого преобразования является следующее

**Утверждение 3.** Пусть с.в.  $U_1$  и  $U_2$  независимы и  $L(U_i) = R_{[0,1]}$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда случайные величины

$$Y_1 = \sqrt{-2 \ln U_2} \cos(2\pi U_1), \quad (22)$$

$$Y_2 = \sqrt{-2 \ln U_2} \sin(2\pi U_1),$$

независимы и  $\mathcal{L}(Y_i) = N(0, 1)$ ,  $i = 1, 2$ .

*Доказательство* представляет собой простое упражнение в вычислении плотности при взаимно однозначном преобразовании с.в. (см. Утверждение 2 выше). Якобиан указанного преобразования будет

$$J(u_1, u_2) = \frac{2\pi}{u_2} = 2\pi e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)}.$$

Отсюда совместная плотность величин  $Y_1$  и  $Y_2$  равна

$$f_{(Y_1, Y_2)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)}.$$

Таким образом, каждая пара  $(U_{2k-1}, U_{2k})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , величин последовательности (4) с помощью преобразования (22) порождает пару независимых нормальных  $N(0, 1)$  величин  $(Y_{2k-1}, Y_{2k})$ .

Другой путь получения нормальных величин из последовательности (4) основан на использовании центральной предельной теоремы теории вероятностей, в соответствии с которой можно положить

$$X_{Nk} = (U_{(k-1)N+1} + \dots + U_{kN} - \frac{N}{2}) / \sqrt{\frac{N}{12}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Этот алгоритм, очевидно, легче реализуем, чем предыдущий, однако он приводит лишь к приближенно нормальным величинам. При этом практически удовлетворительное приближение к нормальному распределению  $N(0, 1)$  получается уже при  $N = 12$ . Это значение параметра  $N$  в алгоритме (23) обычно используют для конкретных вычислений.

**Произвольная гауссова с.в.**  $X$  имеет среднее  $a$  и дисперсию  $\sigma^2$ . Ее закон распределения обозначается  $N(a, \sigma^2)$ . Гауссова с.в.  $X$  может быть получена из стандартной гауссовой с.в.  $X_0$  путем линейного преобразования:  $X = a + \sigma X_0$ .

Как известно, с гауссовыми случайными величинами функционально связаны многие важные в статистических приложениях случайные величины. Эти функциональные связи позволяют моделировать ряд с.в. путем предварительного моделирования необходимого числа независимых гауссовых с.в.

**2.13. Логарифмически нормальное распределение.** Неотрицательная с.в.  $X$  называется распределенной логарифмически нормально (лог-нормально), если ее логарифм:

$$Z = \ln X \quad (24)$$

распределен по нормальному закону  $N(m, \sigma^2)$ . Из этого определения следует, что плотность лог-нормального распределения имеет вид

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{для } x > 0,$$

и  $f_X(x) = 0$  для  $X \leq 0$ . Пользуясь формулой (24), нетрудно подсчитать математическое ожидание и дисперсию с.в.  $X$ :

$$MX = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad DX = e^{2m + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

Лог-нормальное распределение определяется двумя параметрами  $m$  и  $\sigma > 0$ , и символически будет обозначаться  $LN(m, \sigma^2)$ .

Для моделирования лог-нормальной величины  $X$  достаточно смоделировать гауссовскую с.в.  $Z$  с параметрами  $(m, \sigma^2)$ . Тогда значения с.в.  $X$  будут находиться по формуле

$$X = e^Z$$

Отметим, что лог-нормальным распределением, как правило, хорошо аппроксимируются такие с.в., которые образуются в результате умножения большого числа независимых или слабо зависимых неотрицательных с.в., дисперсия каждой из которых мала по сравнению с дисперсией их суммы.

**2.14. Хи-квадрат распределение.** Говорят, что с.в.  $\chi_n^2$ , представляемая суммой

$$\chi_n^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2, \quad (25)$$

где с.в.  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , независимы и  $\mathcal{L}(X_k) = N(0, 1)$  имеет хи-квадрат распределение с  $n$  степенями свободы. Плотность распределения с.в.  $\chi_n^2$  легко находится и имеет вид

$$f_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0, \quad (26)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма функция. Так как гамма-функция будет встречаться и в дальнейшем, приведем ее определение и некоторые простейшие свойства.

По определению

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx \quad \text{для } \lambda > 0.$$

Гамма-функция удовлетворяет соотношениям

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda \Gamma(\lambda) \quad \text{для любого } \lambda > 0$$

и, следовательно,

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \text{для натуральных } n.$$

Отметим также, что  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

Из (25) легко видеть, что

$$M\chi_n^2 = n \quad \text{и} \quad D\chi_n^2 = 2n.$$

Характеристическая функция этой случайной величины дается формулой

$$\varphi_n(t) = Me^{it\chi_n^2} = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}} \quad (27)$$

и получается в результате преобразования Фурье плотности (26). Свойством хи-квадрат распределения является его *воспроизводимость* по параметру  $n$ , которая означает, что сумма независимых с.в., распределенных по закону хи-квадрат, распределена также по закону хи-квадрат с числом степеней свободы, равным сумме степеней свободы слагаемых. Действительно, если  $\chi_{n_1}^2$  и  $\chi_{n_2}^2$  независимы, то в силу (27)

$$\varphi_{n_1+n_2}(t) = \varphi_{n_1}(t)\varphi_{n_2}(t) = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{(n_1+n_2)}{2}}}$$

**2.15. Распределение Стьюдента.** Стьюдентовым отношением называется с.в.

$$T_n = \frac{X}{\sqrt{\chi_n^2/n}}, \quad (28)$$

где с.в.  $X$  и  $\chi_n^2$  независимы и при этом  $\mathcal{L}(X) = N(0,1)$ , а с.в.  $\chi_n^2$  имеет хи-квадрат распределение с  $n$  степенями свободы. Распределение величины (28) называют *t-распределением* или *распределением Стьюдента с  $n$  степенями свободы* и обозначают  $S_n$ . Плотность этого распределения можно найти с помощью стандартного метода вычисления плотности распределения частного двух независимых с.в., а именно:

$$f_{T_n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (29)$$

Нетрудно подсчитать математическое ожидание и дисперсию Стьюдентова отношения:

$$MT_n = 0, \quad DT_n = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

**2.16. Распределение Коши** получается из распределения Стьюдента при  $n = 1$ , а случайную величину  $Z$  с распределением Коши можно представить отношением

$$Z = \frac{X}{|Y|}, \quad (30)$$

где  $X$  и  $Y$  независимые с.в. с  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) = N(0,1)$ . Как известно, у с.в.  $Z$  не существует моментов, а ее плотность имеет вид

$$f_Z(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \quad (31)$$

**2.17. Общее распределение Коши.** Дадим другое, более общее, чем это сделано выше, определение с.в. Коши, которое дает и другой алгоритм ее моделирования. Пусть  $U$  — равномерно распределенная на интервале  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  с.в.,  $a \in R$  и  $b > 0$  — некоторые параметры. Рассмотрим с.в.

$$X = a + btgU, \quad (32)$$

являющуюся монотонным преобразованием с.в.  $U \in \mathcal{L}(U) = R_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ . По известному из теории вероятностей правилу находим плотность с.в.  $X$ :

$$f_X(x) = \frac{b}{\pi[b^2 + (x-a)^2]}, \quad x \in R, \quad (33)$$

которая и задает общее распределение Коши. Будем использовать следующее обозначение закона Коши:  $\mathcal{L}(X) = K(a, b)$ . Общее распределение Коши определяется, таким образом, двумя параметрами:  $a \in R$  и  $b > 0$ . В частности, "стандартный" закон Коши, плотность которого дается формулой (31), имеет параметры  $a = 0$  и  $b = 1$ , и будет обозначаться  $K(0, 1)$ . Наконец, отметим, что с.в.  $X$  с законом распределения  $K(0, 1)$  не имеет моментов.

**2.18. Распределение Релея.** Пусть с.в.  $X$  и  $Y$  независимы и имеют одно и то же нормальное распределение  $N(0, \sigma^2)$ . Тогда модуль случайного вектора  $(X, Y)$  имеет распределение Релея с параметром  $\sigma^2$ , которое будем обозначать  $Rl(\sigma^2)$ . Таким образом, для моделирования значений релейской с.в.  $Z$  можно использовать формулу

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (34)$$

Легко найти плотность распределения закона  $Rl(\sigma^2)$ , которая имеет вид

$$f_Z(z, \sigma^2) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad \text{при } z > 0$$

и  $f_Z(z, \sigma^2) = 0$ , при  $z \leq 0$ . Распределение Релея определяется, очевидно, одним параметром  $\sigma^2 > 0$ . Нетрудно подсчитать наиболее важные моменты релейской с.в.  $Z$ :

$$MZ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, \quad DZ = (2 - \frac{\pi}{2})\sigma^2$$

**2.19. Распределение Максвелла.** Пусть с.в.  $X, Y$  и  $Z$  независимы и имеют одно и то же нормальное распределение  $N(0, \sigma^2)$ . Тогда модуль случайного вектора  $(X, Y, Z)$  имеет распределение Максвелла с параметром  $\sigma^2$ , которое будем обозначать  $M(\sigma^2)$ . Таким образом, для моделирования значений максвелловской с.в.  $V$  можно использовать формулу

$$V = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (35)$$

Обычным путем можно получить плотность распределения закона  $M(\sigma^2)$ , которая имеет вид

$$f_V(v) = \frac{v^2}{\sigma^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{при} \quad v > 0,$$

и  $f_V(v) = 0$  при  $v \leq 0$ . Следовательно, и распределение Максвелла задается единственным параметром  $\sigma^2 > 0$ . Подсчеты математического ожидания и дисперсии с.в.  $V$  приводят к формулам:

$$MV = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma; \quad DV = \left(3 - \frac{8}{\pi}\right)\sigma^2$$

**2.20. Распределение Снедекора.** Пусть с.в.  $\chi_n^2$  и  $\chi_m^2$  независимы и имеют хи-квадрат распределения с  $n$  и  $m$  степенями свободы, соответственно. Положим

$$X = \frac{\chi_n^2}{n} : \frac{\chi_m^2}{m} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\chi_n^2}{\chi_m^2}. \quad (36)$$

Распределение этой величины называют *распределением Снедекора* с  $n$  и  $m$  степенями свободы. Иногда распределение Снедекора называют *F-распределением* или *распределением дисперсионного отношения Фишера*. Будем обозначать это распределение  $F_{n,m}$ . Плотность  $f_{n,m}(x)$  распределения  $F_{n,m}$  имеет вид

$$f_{n,m}(x) = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1 + \frac{n}{m}x\right)^{\frac{n+m}{2}}}, \quad x > 0.$$

Для моделирования с.в. с распределением Снедекора можно исходить из формулы (36). Вычисляя математическое ожидание и дисперсию с.в. (36), получим

$$MX = M\left(\frac{m}{n} \frac{\chi_n^2}{\chi_m^2}\right) = \frac{m}{m-2}, \quad m > 2,$$

$$DX = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}, \quad m > 4.$$

**2.21. Бета-распределение.** Пусть, как и выше, с.в.  $\chi_n^2$  и  $\chi_m^2$  независимы и имеют хи-квадрат распределения с  $n$  и  $m$  степенями свободы соответственно. Определим с.в.

$$\bar{X} = \frac{\chi_n^2}{\chi_n^2 + \chi_m^2}, \quad (37)$$

принимающую значения в промежутке  $[0, 1]$ . Распределение этой величины называют *бета-распределением*. Его плотность равна нулю вне интервала  $(0, 1)$ , и

$$f_{\bar{X}}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{m}{2}-1}, \quad \text{при} \quad x \in (0, 1).$$

Нетрудно подсчитать любые моменты с.в.  $X$ , используя приводимую ниже связь между гамма-функцией и бета-функцией. В частности,

$$MX = \frac{n}{n+m}, \quad DX = \frac{2nm}{(n+m)^2(n+m+2)}.$$

Для моделирования значений с.в.  $X$ , как показывает формула (37), достаточно предварительно моделировать две независимые случайные величины с хи-квадрат распределениями с  $n$  и  $m$  степенями свободы.

**Замечание 3.** Если  $\frac{n}{2} = p$  — целое и  $\frac{m}{2} = q$  — целое, то  $f_X(x)$  является плотностью распределения  $p$ -той порядковой статистики для  $p+q-1$  независимых значений  $U$ , что и определяет способ моделирования бета-распределения в этом случае (см. [4]).

До сих пор для построения алгоритмов моделирования случайных величин мы использовали лишь два метода: "универсальный" метод и метод преобразований. Теперь познакомимся еще с двумя широко известными методами, которые будут использованы при моделировании случайных величин, распределенных по общему бета-распределению и по общему гамма-распределению.

**2.22. Метод рандомизации**, называемый часто "методом суперпозиции", для моделирования случайных величин основан на следующем утверждении.

**Утверждение 4.** Пусть условная плотность с.в.  $X$  при условии  $Y = y$  равна  $f(x|y)$ , причем с.в.  $Y$  имеет известную функцию распределения  $F_Y(y)$ . Тогда плотность распределения  $f_X(x)$  с.в.  $X$  имеет вид

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) dF_Y(y). \quad (38)$$

**Доказательство.** По формуле полной вероятности можно записать

$$F_X(x) = P(X < x) = M_Y P(X < x|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^x f(t|y) dt \right] dF_Y(y).$$

Дифференцируя левую и правую части этого равенства, получаем доказываемое утверждение.

Таким образом, если  $f_X(x)$  представима в виде (38), то с.в.  $X$  можно моделировать в два этапа: генерируем значение  $y$  с.в.  $Y$  в соответствии с распределением  $F_Y(y)$ , а затем моделируем  $X$  с плотностью  $f(x|y)$ .

Заметим, что если для функции распределения с.в.  $Y$  существует плотность  $f_Y(y)$ , то (38) можно переписать так:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) f_Y(y) dy. \quad (39)$$

а если  $Y$  принимает лишь целые значения  $i \in I$ , то

$$f_X(x) = \sum_{i \in I} p_i f_i(x), \quad (40)$$

где

$$p_i = P(Y = i), \quad f_i(x) = f(x|Y = i).$$

**2.23. Метод исключения.** Рассмотрим сначала общую формулировку метода исключения для моделирования случайных величин, основная идея которого была предложена Дж. фон Нейманом. Пусть  $g(x) \geq 0$ , причем

$$\bar{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx < +\infty.$$

Обозначим  $G = \{(x, y) : 0 \leq y \leq g(x)\}$ .

Следующие два утверждения связаны с равномерным "выбором" точки в области  $G$ .

**Утверждение 5.** Пусть с.в.  $X$  имеет плотность  $f(x) = g(x)/\bar{G}$ , а плотность распределения с.в.  $Y$  при условии  $X = x$  равна

$$f_1(y|x) = \frac{1}{g(x)}, \quad 0 \leq y \leq g(x).$$

Тогда плотность распределения вектора  $(X, Y)$  равна

$$f_2(x, y) = \frac{1}{\bar{G}}, \quad (x, y) \in G.$$

*Доказательство очевидно:*

$$f_2(x, y) = f(x)f_1(y|x) = \frac{1}{\bar{G}}, \quad (x, y) \in G.$$

**Утверждение 6.** Пусть плотность распределения вектора  $(X, Y)$  равна

$$f_2(x, y) = \frac{1}{\bar{G}}, \quad (x, y) \in G.$$

Тогда плотность распределения с.в.  $X$  равна

$$f(x) = g(x)/\bar{G}.$$

*Доказательство.*

$$F_X(t) = P(X < t) = \int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^t \frac{g(x)}{\bar{G}} dx = \int_{-\infty}^t f(x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, что доказанные утверждения справедливы и для многомерного случая.

Пусть заданы функции  $g(x)$  и  $g_1(x)$  такие, что  $g_1(x) \geq g(x) \geq 0$  и

$$\bar{G}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) dx < +\infty,$$

и пусть существует достаточно эффективный "прямой" метод моделирования для плотности  $f_1(x) = g(x)/\bar{G}_1$ .

Алгоритм моделирования по методу исключения для с.в.  $X$ , распределенной с плотностью  $f(x) = g(x)/\bar{G}$ , состоит в следующем:

- 1) выбирается случайная точка  $(X_0, Y)$ , равномерно распределенная в области  $G_1 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq g_1(x)\}$ ;
- 2) если  $Y \geq g(X_0)$ , то выбранная точка исключается из рассмотрения и процесс продолжается с 1), если же  $Y < g(X_0)$ , то значение  $X_0$  используется в качестве очередного выборочного значения с.в.  $X$ .

Описанный алгоритм, очевидно, реализует равномерную выборку в области  $G$ . Поэтому утверждение 6 можно рассматривать как один из возможных способов обоснования метода исключения. Утверждение 5 по существу описывает алгоритмы моделирования случайной точки непосредственно в области  $G$ .

Эффективность метода тем выше, чем больше вероятность "положительного исхода", состоящего в том, что исключения не происходит. Эта вероятность равна

$$q = \frac{\bar{G}}{\bar{G}_1}.$$

Нетрудно определить, что вероятность  $k$  исключений и положительного исхода в  $(k+1)$ -ой пробе равна  $q(1-q)^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  Следовательно, среднее время моделирования по методу исключения пропорционально величине

$$S = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} kq(1-q)^k = \frac{1}{q}.$$

Поэтому функцию  $g_1(x)$  надо подбирать так, чтобы площади  $\bar{G}_1$  и  $\bar{G}$  различались как можно меньше. Обычно в качестве  $g_1(x)$  используют "подходящие" ступенчатые или кусочно-линейные функции. Наиболее простым является вариант метода исключения, в котором  $g_1(x) = M = const$ . Этот вариант можно использовать в том случае, когда распределение сосредоточено на конечном интервале  $(a, b)$  и  $g(x) \leq M$ . Соответствующий алгоритм состоит в следующем:

- 1)  $X_0 = a + U_1(b-a)$ ,  $Y = U_2M$ ;
- 2) если  $Y > g(X_0)$ , то выполняем 1) и т.д., иначе  $X = X_0$ .

Рассмотрим один прием оптимизации метода исключения. Пусть необходимо моделировать с.в. с плотностью  $f(x)$ . Требуется выбрать оптимальную плотность величины  $X_0$  в классе плотностей  $f_1(x) = f_1(x, \lambda)$ , где

$\lambda$  — параметр. При фиксированном значении  $\lambda$  оптимальная плотность определяется соотношением

$$g_1(x) = f_1(x, \lambda) \sup_x \frac{f(x)}{f_1(x, \lambda)} \geq f(x).$$

Соответствующее значение  $q$  таково:

$$\left[ \sup_x \frac{f(x)}{f_1(x, \lambda)} \right]^{-1}$$

Следовательно, оптимальной является плотность  $f_1(x, \lambda_0)$ , где  $\lambda_0$  — то значение параметра, при котором достигается

$$\min_{\lambda} \sup_x \frac{f(x)}{f_1(x, \lambda)}.$$

2.24. Общее бета-распределение задается плотностью

$$f(x; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, \quad 0 < x < 1,$$

где  $p > 0$ ,  $q > 0$ . При  $p > 1$ ,  $q > 1$  график этой плотности колоколообразен, а при  $p < 1$ ,  $q < 1$  он  $U$ -образен. Своим названием бета-распределение обязано бета-функции

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

В связи с этим для него часто используют обозначение  $B(p, q)$ , где  $p > 0$  и  $q > 0$  — параметры бета-распределения. С.в.  $X$  с  $B(p, q)$ -распределением имеет любые моменты  $k$ -того порядка ( $k > 0$ ) и при этом

$$MX^k = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 x^{p+k-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+k)}.$$

При  $k = 1, 2$  имеем

$$MX = \frac{p}{p+q}, \quad MX^2 = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}, \quad DX = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}.$$

**Замечание 4.** Из бета-распределения получается, в частности, равномерное распределение на  $[0, 1]$  при  $p = q = 1$ , т.е.  $R_{[0,1]} = B(1, 1)$ .

Существует несколько методов моделирования бета-распределения. Сначала рассмотрим моделирование бета-распределения методом исключения. Нетрудно показать, что для  $x \in (0, 1)$  и  $a, b > -1$  выполняется неравенство

$$x^a(1-x)^b \leq x^a + (1-x)^b.$$

Считая в дальнейшем  $a = p - 1$ ,  $b = q - 1$ , введем с.в.  $X_0$  с плотностью распределения

$$f_0(x) = \frac{pq}{p+q} \cdot \{x^{p-1} + (1-x)^{q-1}\}, \quad x \in (0, 1).$$

Смоделировать эту величину можно методом рандомизации ("метод суперпозиции"), т.к. плотность  $f_0(x)$  представима по формуле (40) в виде:

$$f_0(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x), \quad x \in (0, 1),$$

где

$$p_1 = \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{p}{p+q}, \quad p_2 = \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{q}{p+q},$$

$$f_1(x) = f_0(x|Y = 1) = px^{p-1}, \quad f_2(x) = f_0(x|Y = 2) = q(1-x)^{q-1}.$$

При этом условные функции распределения с.в.  $X_0$  при возможных значениях с.в.  $Y$  будут следующими:

$$F_1(x) = \mathbf{P}(X_0 < x|Y = 1) = x^p, \quad x \in (0, 1),$$

$$F_2(x) = \mathbf{P}(X_0 < x|Y = 2) = (1-x)^q, \quad x \in (0, 1).$$

Итак, на первом этапе "метода суперпозиции" моделируем  $Y$ : если  $U \leq \frac{p}{p+q}$ , то  $Y = 1$ , а в случае  $U > \frac{p}{p+q}$  полагаем  $Y = 2$ . На втором этапе моделируем с.в.  $X_0$  с распределением  $F_1(x) = x^p$  или  $F_2(x) = (1-x)^q$ ,  $x \in (0, 1)$ , в зависимости от исхода первого этапа. В обоих случаях можно использовать "универсальный" метод моделирования непрерывной с.в.: если первый этап приводит к распределению  $F_1(x)$ , то моделируется значение  $x_0 = u_0^{1/p}$ , а если к распределению  $F_2(x)$ , то моделируется значение  $x_0 = 1 - u_0^{1/q}$ , где  $u_0$  — значение с.в.  $U_0$  с распределением  $R_{(0,1)}$ .

Наконец, в соответствии с методом исключения надо смоделировать с.в.  $Z$ , равномерно распределенную на отрезке  $[0, x_0^{p-1} + (1-x_0)^{q-1}]$ . Если для ее значений  $z$  имеем неравенство

$$z \geq x_0^{p-1} (1-x_0)^{q-1},$$

то полученная точка  $x_0$  исключается из рассмотрения и процесс повторяется до получения неравенства

$$z < x_0^{p-1} (1-x_0)^{q-1},$$

при котором  $x_0$  используется в качестве очередного значения с.в.  $X$  с бета-распределением  $B(p, q)$ .

Приведем еще один "экзотический" алгоритм моделирования бета-распределения, предложенный австрийским математиком Йонком. Для

моделирования с.в.  $X$  с распределением  $B(p, q)$ : 1) генерируются независимые с.в.  $U_1$  и  $U_2$  с равномерным распределением  $R_{[0,1]}$ ; 2) если  $U_1^{1/p} + U_2^{1/q} \geq 1$ , то повторяется 1), иначе полагаем

$$X = \frac{U_1^{1/p}}{U_1^{1/p} + U_2^{1/q}}.$$

**2.25. Гамма-распределение.** Рассмотренное выше распределение Эрланга, играющее важную самостоятельную роль в теории вероятностей и ее приложениях, является частным случаем так называемого общего гамма-распределения  $\Gamma(a, \lambda)$  с параметрами  $a > 0$  и  $\lambda > 0$ . Гамма-распределение задается плотностью, которая равна нулю для  $x \leq 0$ , и

$$f(x, a, \lambda) = \frac{x^{a-1}}{a^a \Gamma(a)} e^{-x/a} \quad \text{для } x > 0, \quad (41)$$

где  $\Gamma(\lambda)$  — гамма-функция.

Легко находят моменты с.в. с гамма-распределением  $\Gamma(a, \lambda)$ :

$$MX^k = a^k (\lambda + k - 1)(\lambda + k - 2) \dots (\lambda + 1)\lambda, \quad k > 0.$$

Для  $k = 1, 2$  имеем

$$MX = a\lambda; \quad MX^2 = a^2 \lambda (\lambda + 1) \quad \text{и} \quad DX = a^2 \lambda.$$

Для распределения Эрланга  $\Gamma(a, m)$ , в частности,

$$MX = ma, \quad DX = ma^2.$$

Из теории вероятностей известно, что характеристическая функция с.в.  $X$  с гамма-распределением  $\Gamma(a, \lambda)$  имеет вид

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{(1 - iat)^\lambda}.$$

Эта формула позволяет легко распространить свойство воспроизводимости распределения Эрланга на произвольные гамма-распределения.

**Утверждение 7.** Пусть с.в.  $X_1$  и  $X_2$  независимы и имеют гамма-распределения  $\Gamma(a, \lambda_1)$  и  $\Gamma(a, \lambda_2)$ , соответственно. Тогда с.в.  $Y = X_1 + X_2$  имеет гамма-распределение  $\Gamma(a, \lambda_1 + \lambda_2)$ .

*Доказывается* это утверждение точно так же, как и Утверждение 1.

Теперь рассмотрим моделирование гамма-распределения. Напомним, что в случае целого  $\lambda \geq 1$  мы получаем распределение Эрланга, моделирование которого сводится на основании Утверждения 1 к моделированию  $\lambda$  независимых распределенных по показательному закону случайных величин. Рассмотрим теперь случай, когда  $\lambda = m + \frac{1}{2}$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ . По правилу композиции с.в.  $Y$  с гамма-распределением  $\Gamma(a, m + \frac{1}{2})$  можно представить в виде

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_m + Z,$$

где  $X_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  — независимы и имеют показательное распределение  $E(a) = \Gamma(a, 1)$ , а  $Z$  — не зависит от  $X_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  и имеет распределение  $\Gamma(a, \frac{1}{2})$ . По формуле (41) плотность распределения с.в.  $Z$  будет иметь вид

$$f(z; a, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a z}} e^{-\frac{z}{a}} \quad \text{для } z > 0.$$

Легко убедиться, что это будет плотность квадрата гауссовой с.в.  $X$  с параметрами  $(0, \frac{a}{2})$ , т.е.  $Z = X^2$ . Следовательно,  $Y$  можно представить в виде

$$Y = -a \ln \prod_{k=1}^m U_k + X^2, \quad (42)$$

где  $U_k$  — с.в. из последовательности (4), а  $X$  распределено по нормальному закону  $N(0, \frac{a}{2})$ . Равенство (42) и дает алгоритм моделирования гамма-распределения  $\Gamma(a, m + \frac{1}{2})$ .

Для моделирования произвольного гамма-распределения воспользуемся методом, предложенным Йонком. Из правила композиции следует, что достаточно получить алгоритм моделирования для случая  $\lambda < 1$ . Для простоты мы будем предполагать, что параметр  $a = 1$ . Итак, рассмотрим моделирование с.в.  $Y_0$  с распределением  $\Gamma(1, \lambda)$ ,  $\lambda < 1$ . Известно, что  $x^{\lambda-1}$  является преобразованием Лапласа функции  $y^{-\lambda} \Gamma(1 - \lambda)$ , т.е.

$$x^{\lambda-1} = \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{y^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} dy.$$

Поэтому плотность распределения с.в.  $Y_0$  можно записать в виде

$$f(x; 1, \lambda) = \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} e^{-x} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)} \int_0^{\infty} (z+1) e^{-x(z+1)} \frac{z^{-\lambda}}{z+1} dz$$

или

$$f(x; 1, \lambda) = M\left\{(Z+1)e^{-(Z+1)}\right\},$$

где с.в.  $Z$  распределена с плотностью

$$g(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)} \frac{z^{-\lambda}}{1+z}, \quad z \geq 0.$$

Применяя метод "рандомизации", с.в.  $Y_0$  можно моделировать в два этапа: 1) получаем значение  $Z = z$ ; 2) моделируем величину  $Y_0$  с плотностью  $(z+1) \exp\{-x(z+1)\}$  по формуле

$$Y_0 = -\frac{\ln U}{z+1}, \quad (43)$$

где  $U$  распределена по закону  $R_{[0,1]}$ .

Для моделирования с.в.  $Z$  сделаем замену

$$V = \frac{Z}{Z+1}$$

Полученная величина  $V$ , как легко проверить, имеет плотность

$$f_V(v) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)} v^{-\lambda} (1-v)^{\lambda-1} \quad \text{для } v > 0,$$

представляющую собой плотность бета-распределения  $B(1-\lambda, \lambda)$ . Алгоритм моделирования бета-распределенной с.в. приведен выше. Выразив  $Z$  через  $V$  и подставляя полученное значение в (43), получаем формулу для моделирования с.в.  $Y_0$ :

$$Y_0 = (V-1) \ln U. \quad (44)$$

Учитывая связь с.в.  $Y_0$  с распределением  $\Gamma(1, \lambda)$  со случайной величиной  $U$  с распределением  $\Gamma(a, \lambda)$ ,  $a > 0$

$$Y = aY_0,$$

мы получаем алгоритм моделирования гамма-распределения  $\Gamma(a, \lambda)$  для любых  $a > 0$  и  $\lambda < 1$ .

*Замечание 5.* Сравнивая плотность (26) с плотностью гамма-распределения  $\Gamma(a, \lambda)$  (см. Замечание 2), видим, что с.в.  $\chi_n^2$  с  $n$  степенями свободы имеет гамма-распределение с параметрами  $a = 2$  и  $\lambda = \frac{n}{2}$ , т.е.  $L(\chi_n^2) = \Gamma(2, \frac{n}{2})$ .

**2.26. Распределение Парето.** Распределение с.в.

$$Y = X^{-1} - 1, \quad (45)$$

где с.в.  $X$  имеет бета-распределение  $B(p, q)$ , называют *распределением Парето* (в честь известного экономиста Парето). Как и бета-распределение, распределение Парето определяется двумя параметрами  $p > 0$  и  $q > 0$ , и для него будет использоваться обозначение  $P(p, q)$ . Плотность распределения  $P(p, q)$  имеет вид

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}, \quad 0 < y < \infty, \quad (46)$$

и  $f_Y(y) = 0$  для  $y \leq 0$ . Это распределение обладает моментами лишь порядков  $k < p$ . В частности, при  $p > 1$  будет существовать математическое ожидание, а при  $p > 2$  и дисперсия с.в.  $Y$ , причем

$$MY = \frac{q}{p-1}, \quad DY = \frac{q(p+q-1)}{(p-1)^2(p-2)}$$

Распределение Парето использовалось довольно активно в экономических расчетах. Считалось (несколько наивно с современной статистической точки зрения), что распределения дохода должны иметь плотность

с "хвостом" порядка  $Ay^{-\alpha}$ , при  $y \rightarrow \infty$ , а распределение Парето как раз удовлетворяет этому требованию.

Алгоритм моделирования с.в.  $Y$  с распределением  $F(p, q)$  явствует из формулы (45), в правую часть которой вместо  $X$  следует ставить смоделированные значения  $B(p, q)$ -распределенной с.в.

Следующее распределение часто встречается в статистической радиотехнике.

**2.27. Распределение Накагами** определяется плотностью

$$f(x) = \frac{2}{\Gamma(m)} \cdot \left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m \cdot x^{2m-1} \cdot \exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}x\right), \quad x \geq 0,$$

где  $m \geq 0$  называется параметром формы, а  $\sigma > 0$  — параметром масштаба. Для обозначения распределения Накагами с параметрами  $m$  и  $\sigma$  будем использовать обозначение  $Ng(m, \sigma^2)$ . Вычисляя математическое ожидание и дисперсию с.в.  $Y$  с распределением  $Ng(m, \sigma^2)$ , получим

$$MX = \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)}, \quad DX = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{m} \cdot \frac{\Gamma^2(m + \frac{1}{2})}{\Gamma^2(m)}.$$

Нетрудно проверить, что с.в.  $Y$ , распределенная по закону  $Ng(m, \sigma^2)$ , может рассматриваться как результат преобразования с.в.  $X$  с гамма-распределением  $\Gamma(1, m)$  по формуле

$$Y = \sigma \sqrt{X/m}.$$

Эта формула и дает алгоритм моделирования с.в. с законом Накагами.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

### 1. Моделирование вектора с независимыми координатами

Для случайного вектора  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , координаты которого  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  независимы в совокупности, функция распределения имеет вид

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n), \quad (1)$$

где  $F_k(x_k)$  — функция распределения с.в.  $X_k$ . Естественно ожидать, что в этом случае можно моделировать каждую величину  $X_k$  независимо от остальных. В соответствии с "универсальным" методом моделирования скалярной случайной величины будем иметь

$$X_k = F_k^{-1}(U_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где  $U_k$  — независимые с.в. с распределением  $R_{(0,1)}$ , а "обратная" функция  $F^{-1}(u)$  к функции  $F(x)$  понимается (см. гл.1) как

$$F^{-1}(u) = \sup\{x : F(x) < u\}. \quad (3)$$

В самом деле, так как с.в.  $U_k$  независимы, то и величины  $X_k$ , определенные формулами (2), независимы. Поэтому их совместная функция распределения (ф.р. вектора  $X$ ) равна произведению функций распределения с.в.  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ :

$$P\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\} = \prod_{k=1}^n P\{X_k < x_k\} = \prod_{k=1}^n F_k(x_k) =: F_X(x_1, \dots, x_n).$$

1.1. **Равномерное распределение в  $n$ -мерном параллелепипеде**  $\Pi = \{a_k < x_k < b_k, k = 1, \dots, n\}$ . Случайный вектор  $X$  отождествляем со случайной точкой  $P$  с декартовыми координатами  $X_1, \dots, X_n$ , попадание которой в результате эксперимента в любую точку параллелепипеда  $\Pi$  равновозможно. Тогда плотность распределения вероятностей вектора  $X = (X_1, \dots, X_n)$  имеет вид

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} c & \text{при } (x_1, \dots, x_n) \in \Pi, \\ 0 & \text{при } (x_1, \dots, x_n) \notin \Pi, \end{cases}$$

где

$$\frac{1}{c} = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

— объем параллелепипеда  $\Pi$ . Интегрируя  $f_X$  по всем, кроме  $x_k$ , переменным в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , легко получить, что плотность координаты  $X_k$  вектора  $X$  равна

$$f_k(x_k) = \begin{cases} \frac{1}{b_k - a_k}, & x_k \in (a_k, b_k), \\ 0, & x_k \notin (a_k, b_k). \end{cases}$$

Следовательно, каждая из координат  $X_k$  равномерно распределена в интервале  $(a_k, b_k)$ , и координаты эти независимы. Функция распределения координаты  $X_k$  будет равна

$$F_k(x_k) = \begin{cases} 0, & -\infty < x_k \leq a_k, \\ \frac{x_k - a_k}{b_k - a_k}, & a_k < x_k \leq b_k, \\ 1, & x_k > b_k. \end{cases}$$

Согласно (2) из предыдущей формулы вытекают *важные формулы для моделирования координат вектора  $X$* :

$$X_k = a_k + (b_k - a_k)U_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

1.2. **Гауссов вектор с независимыми координатами.** Так как плотность  $f_X(x_1, \dots, x_n)$  случайного вектора  $X = (X_1, \dots, X_n)$  выражается равенством

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}, \quad (4)$$

то в случае независимых координат согласно (1) будем иметь равенство

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n), \quad (5)$$

где  $f_k(x_k) = dF_k(x_k)/dx_k$  — плотность распределения координаты  $X_k$  вектора  $X$ . Предположив еще, что все координаты вектора  $X$  гауссовы:  $X_k \sim N(m_k, \sigma_k^2)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , получаем из (5) плотность

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{k=1}^n \sigma_k} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - m_k)^2}{\sigma_k^2} \right\}, \quad (6)$$

являющуюся плотностью гауссова вектора с независимыми координатами.

Для моделирования гауссова вектора с независимыми координатами достаточно смоделировать его независимые координаты, используя один из алгоритмов моделирования гауссовых случайных величин, описанных в предыдущей главе.

## 2. Универсальный метод моделирования непрерывных случайных векторов

Если  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — непрерывный случайный вектор, то его плотность можно представить в виде произведения условных плотностей распределения вероятностей этих величин:

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2|x_1) f_3(x_3|x_1, x_2) \dots f_n(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Все условные плотности распределения в правой части этого равенства выражаются через совместную плотность  $f_X(x_1, \dots, x_n)$ . Приведем эти выражения:

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n,$$

$$f_2(x_2|x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X(x_1, \dots, x_n)}{f_1(x_1)} dx_3 \dots dx_n,$$

$$f_3(x_3|x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X(x_1, \dots, x_n)}{f_1(x_1) f_2(x_2|x_1)} dx_4 \dots dx_n,$$

...

$$f_{n-1}(x_{n-1}|x_1, \dots, x_{n-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X(x_1, \dots, x_n)}{f_1(x_1) f_2(x_2|x_1) \dots f_{n-2}(x_{n-2}|x_1, \dots, x_{n-3})} dx_n,$$

$$f_n(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{f_X(x_1, \dots, x_n)}{f_1(x_1)f_2(x_2|x_1)\dots f_{n-1}(x_{n-1}|x_1, \dots, x_{n-2})}$$

Введем условные функции распределения

$$F_k(x_k|x_1, \dots, x_{k-1}) = \int_{-\infty}^{x_k} f_k(x|x_1, \dots, x_{k-1}) dx.$$

Тогда будет справедливо следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства.

**Утверждение 1.** Пусть  $U_1, \dots, U_n$  — независимые одинаково распределенные по закону  $R_{[0,1]}$  случайные величины. Тогда случайный вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , координаты которого получаются при последовательном решении уравнений

$$\begin{cases} F_1(X_1) = U_1 \\ F_2(X_2|X_1) = U_2 \\ \dots \\ F_n(X_n|X_1, \dots, X_{n-1}) = U_n \end{cases} \quad (7)$$

имеет плотности распределения вероятностей  $f_X(x_1, \dots, x_n)$ .

*Замечание 1.* Уравнения (7) имеют единственные решения, если эти решения находятся по формулам (3).

Представление плотности  $f_X(x_1, \dots, x_n)$  в форме произведения условных плотностей координат вектора  $X$  возможно  $n!$  способами. В частности, при  $n = 2$

$$f_X(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2|x_1) = f_2(x_2)f_1(x_1|x_2).$$

Разным произведениям соответствуют разные порядки "разыгрывания" с.в.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и, вообще говоря, разные уравнения (7). Приводимый ниже пример показывает, что иногда удачный выбор порядка позволяет упростить эти уравнения.

Если  $X_1, \dots, X_n$  независимы, то все их условные распределения равны безусловным:

$$F_k(x_k|x_1, \dots, x_{k-1}) = F_k(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

и порядок разыгрывания величин не играет роли. Уравнения (7) превращаются в уравнения

$$F_k(X_k) = U_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

и приводят к решению (2).

*Пример 1.* Рассмотрим случайную точку  $(X, Y)$ , которая принимает значения в треугольнике  $x + y < 1, x > 0, y > 0$  с плотностью  $f(x, y) = 6x$ .

а) Выберем в качестве первой величины  $X$ . Тогда

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{1-x} 6x dy = 6x(1-x) \quad \text{при } 0 < x < 1;$$

$$f_Y(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-x} \quad \text{при } 0 < y < 1-x.$$

Соответствующие этим плотностям функции распределения будут:

$$F_X(x) = 3x^2 - 2x^3 \quad \text{при } 0 < x < 1,$$

$$F_Y(y|x) = \frac{y}{1-x} \quad \text{при } 0 < y < 1-x.$$

Из формул (7) получаем уравнения для последовательного моделирования  $X$  и  $Y$ :

$$3X^2 - 2X^3 = U_1, \quad Y = U_2(1-X).$$

б) Выберем теперь в качестве первой величины  $Y$ . Тогда

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = 3(1-y)^2 \quad \text{при } 0 < y < 1,$$

$$f_X(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{2x}{1-y^2} \quad \text{при } 0 < x < 1-y.$$

Соответствующие функции распределения будут:

$$F_Y(y) = 1 - (1-y)^3 \quad \text{при } 0 < y < 1,$$

$$F_X(x|y) = \frac{x^2}{(1-y)^2} \quad \text{при } 0 < x < 1-y.$$

Согласно (7), используя  $1 - U_1$  вместо  $U_1$ , получим уравнения для последовательного моделирования  $Y$  и  $X$ :

$$(1-Y)^3 = U_1, \quad X^2 = U_2(1-Y)^2.$$

Сравним оба алгоритма для моделирования  $X$  и  $Y$ : в первом из них для нахождения  $X$  необходимо решать кубические уравнения, в то время как во втором можно использовать явные формулы

$$Y = 1 - \sqrt[3]{U_1}, \quad X = \sqrt{U_2} \sqrt{1-Y}.$$

**Замечание 2.** Часто вместо представления  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y|x)$  пишут аналогичное по форме представление  $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y|x)$ , которое на самом деле неверно. Так в рассмотренном примере в треугольнике  $F(x, y) = 3x^2y$ , а

$$F_X(x)F_Y(y|z) = \frac{3-2x}{1-x}x^2y, \quad F_Y(y)F_X(z|y) = \frac{1-(1-y)^2}{(1-y)^2}y^2.$$

Из утверждения 1 следует, что моделирование случайного вектора может быть сведено к последовательному моделированию его координат. Для этого достаточно применить "универсальный" метод, разрешая последовательно уравнения (7) и помня при этом, что при необходимости (отсутствие единственного решения) следует пользоваться формулой (3). Таким образом, мы получаем метод моделирования непрерывного случайного вектора, который, как и в случае скалярной с.в., называют "универсальным" или стандартным.

Практическое использование универсального метода моделирования случайного вектора часто связано с весьма громоздкими вычислениями, и в некоторых случаях для моделирования с.в.  $X_k$  с условной плотностью  $f_k(x|z_1, \dots, z_{k-1})$  целесообразно применить один из методов, приведенных в предыдущей главе.

### 3. Метод преобразований

В предыдущей главе при рассмотрении моделирования гауссовых с.в. было доказано важное общее Утверждение 2. о взаимно однозначном дифференцируемом преобразовании случайных векторов. Такое преобразование можно интерпретировать как переход к новым координатам, а упомянутое Утверждение 2. дает правило преобразования плотности при преобразовании координат. Во многих случаях таким путем удается упростить формулы моделирования случайных векторов.

**3.1. Равномерное распределение в шаре  $x^2+y^2+z^2 < r_0^2$ .** Обозначим через  $X, Y, Z$  декартовы координаты точки  $P$ . Их совместная плотность распределения в шаре постоянна:

$$f_P(x, y, z) = \frac{3}{4\pi r_0^3}.$$

Однако плотности распределения каждой из координат достаточно громоздки. Поэтому перейдем к сферическим координатам:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

В новых координатах шар переходит в параллелепипед  $0 \leq \rho < r_0, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ . Так как якобиан преобразования будет

$$\partial(x, y, z)/\partial(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \sin \theta,$$

то в новых координатах плотность распределения случайного вектора  $(R, \Theta, \Phi)$  (или точки  $P$ ) имеет вид

$$f_P(\rho, \theta, \varphi) = \left(\frac{3\rho^2}{r_0^3}\right) \left(\frac{\sin \theta}{2}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right),$$

и, следовательно, сферические координаты точки  $P$  независимы. Уравнения для их моделирования можно записать так:

$$\int_0^{\rho} \frac{3\rho^2}{r_0^3} d\rho = U_1, \quad \int_0^{\Theta} \frac{\sin \theta}{2} d\theta = 1 - U_2, \quad \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{2\pi} = U_3.$$

Отсюда (см. формулы (2)) получаем формулы

$$R = r_0 \sqrt[3]{U_1}, \quad \cos \Theta = 2U_2 - 1, \quad \Phi = 2\pi U_3, \quad (8)$$

по которым легко находятся и декартовы координаты точки  $P$ :

$$X = 2r_0 \sqrt[3]{U_1} \sqrt{U_2(1-U_2)} \cos(2\pi U_3),$$

$$Y = 2r_0 \sqrt[3]{U_1} \sqrt{U_2(1-U_2)} \sin(2\pi U_3),$$

$$Z = r_0 \sqrt[3]{U_1} (2U_2 - 1).$$

**3.2. Выбор случайного направления в пространстве.** Говоря о "случайном" направлении подразумевают выбор случайного направления в условиях, когда все направления в трехмерном пространстве равновозможны. Направление условимся характеризовать единичным вектором  $X = (X_1, X_2, X_3)$ , где  $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$ .

Выбор случайного направления можно трактовать как равномерное распределение конца единичного радиуса-вектора на поверхности сферы единичного радиуса. Таким образом, нас интересует единичный вектор  $X$  такой, что для любого телесного угла  $\Omega$  с вершиной в начале координат

$$P(X \in \Omega) = \frac{|\Omega|}{4\pi},$$

где  $|\Omega|$  обозначает величину телесного угла  $\Omega$ . (Напомним, что величина телесного угла определяется как отношение площади части сферы с центром, совпадающим с вершиной телесного угла, вырезаемой образующей этого телесного угла, к квадрату радиуса сферы).

Легко видеть, что если  $P$  — случайная точка, равномерно распределенная в шаре  $x^2 + y^2 + z^2 < r_0^2$ , то направление ее радиуса-вектора обладает нужным нам свойством. Действительно, если  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — два равных по величине телесных угла, то объемы соответствующих им шаровых секторов равны, и вероятности того, что точка  $P$  попадет в каждый из них, одинаковы. Поэтому из (8) получаем формулы для выбора "случайного" направления:

$$\cos \Theta = 2U_2 - 1, \quad \Phi = 2\pi U_3.$$

Используя формулы, связывающие декартовы координаты со сферическими, получаем алгоритм моделирования вектора  $X = (X_1, X_2, X_3)$ :

$$X_1 = 2\sqrt{U_1(1-U_2)} \cos(2\pi U_3),$$

$$X_2 = 2\sqrt{U_1(1-U_1)} \sin(2\pi U_2), \quad X_3 = 2U_3 - 1.$$

#### 4. Моделирование гауссова вектора

Закон распределения гауссова (нормального) случайного вектора  $X = (X_1, \dots, X_n)$  как известно, вполне определяется его вектором математических ожиданий  $m = (m_1, \dots, m_n)$  и корреляционной матрицей  $R = \|R_{ij}\|_{i,j=1}^n$ , где  $R_{ij} = M\{(X_i - m_i)(X_j - m_j)\}$ . Мы будем предполагать, что распределение вектора  $X$  является невырожденным. Это значит, что  $\det R > 0$  и плотность гауссова распределения имеет вид

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det R)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(R^{-1}(x-m), (x-m))\right\}, \quad (9)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $R^{-1}$  — матрица, обратная к  $R$ , а символ  $(\dots)$ , как обычно, обозначает скалярное произведение в евклидовом пространстве  $R^n$ : для любых  $x, y \in R^n$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Хорошо известно, что вектор  $X$  с таким распределением можно получить специальным линейным преобразованием вектора  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  с независимыми координатами, одинаково распределенными по закону  $N(0, 1)$ . Обычно предполагают, что матрица  $A$  преобразования

$$X = AY + m \quad (10)$$

является треугольной, т.е.  $k$ -тая строка матрицы  $A$  имеет вид

$$(a_{k1}, \dots, a_{kk}, 0, \dots, 0), \quad k = 1, \dots, n.$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  легко определяются рекуррентной процедурой. Поскольку  $X_1 = a_{11}Y_1 + m_1$ , то  $a_{11} = \sqrt{R_{11}} = \sqrt{DX_1}$ . Далее

$$X_2 = a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + m_2$$

$$M\{a_{21}Y_1(a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2)\} = R_{12},$$

$$M\{a_{22}Y_1 + a_{22}Y_2\}^2 = R_{22}.$$

Следовательно,

$$a_{22} = \frac{R_{12}}{a_{11}} = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}}},$$

$$a_{22} = \sqrt{R_{22} - \frac{R_{12}^2}{R_{11}}}.$$

Общая рекуррентная формула такова:

$$c_{ij} = \frac{R_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} a_{jk}}{\sqrt{R_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2}}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n,$$

где полагаем

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = 0.$$

Таким образом, моделирование произвольного невырожденного гауссова вектора  $\mathbf{X}$  сводится к моделированию гауссова вектора  $\mathbf{Y}$  с независимыми координатами с  $m = (0, \dots, 0)$  и  $\mathbf{R} = \|\delta_{ij}\|_{i,j=1}^n$ , где  $\delta_{ij}$  — символы Кронекера. Алгоритм моделирования вектора  $\mathbf{Y}$  указан в начале этой главы.

## 5. Моделирование дискретных случайных векторов

5.1. **Общий подход.** Пусть  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  — дискретный случайный вектор с множеством возможных значений  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(i)}, i \in I\}$ , где  $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ ,  $I$  — конечное или счетное множество целых индексов. Пусть

$$P = \{p_i = P(\mathbf{X} = \mathbf{x}^{(i)}), i \in I\}$$

— закон распределения вероятностей случайного вектора  $\mathbf{X}$ , при этом для всех  $i \in I$   $p_i > 0$  и  $\sum_{i \in I} p_i = 1$ . Если  $U$  — с.в. с равномерным распределением  $R_{[0,1]}$ , то, очевидно,

$$P\left\{\sum_{k \leq i-1} p_k \leq U < \sum_{k \leq i} p_k\right\} = p_i.$$

Отсюда следует алгоритм моделирования вектора  $\mathbf{X}$ : если величина  $U$  принимает значение  $u$ :

$$u \in \left[ \sum_{k \leq i-1} p_k, \sum_{k \leq i} p_k \right),$$

то вектор  $\mathbf{X}$  полагается равным  $\mathbf{x}^{(i)}$ . Отметим, что по сути этот алгоритм ничем не отличается от "универсального метода" моделирования дискретной скалярной с.в., описанного в первой главе.

5.2. **Полиномиальный случайный вектор** связан с одноименной схемой независимых испытаний, являющейся обобщением схемы Бернулли. Напомним, что полиномиальная схема испытаний представляет собой последовательность независимых испытаний, каждое из которых может иметь один из  $n$  исходов  $A_1, \dots, A_n$ , наступающих в каждом испытании с вероятностями  $p_i = P(A_i)$ ,  $i = 1, n$ . Пусть  $N$  — число испытаний по полиномиальной схеме. Введем случайный вектор  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $k$ -тая

координата  $X_i$  которого означает число наступлений события  $A_i$  в  $N$  испытаниях. Этот вектор и называют *полиномиальным случайным вектором*. Очевидно, что координаты вектора  $X$  — неотрицательные целые числа, связанные между собой равенством:  $X_1 + \dots + X_n = N$ . Множество значений этого вектора конечно, а сами значения —  $n$ -мерные векторы вида  $x^{(i)} = (k_1, \dots, k_n)$  с целыми координатами, для которых  $0 \leq k_r \leq N$ ,  $\sum_{r=1}^n k_r = N$ . Из теории вероятностей известен закон распределения вероятностей полиномиального вектора:

$$p_i^N = P\{X = x^{(i)}\} = p_N(k_1, \dots, k_n) = \frac{N!}{k_1! \dots k_n!} p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}, \quad (11)$$

где индекс  $i$  однозначно определен вектором  $(k_1, \dots, k_n)$ . Для моделирования полиномиального вектора можно применять описанный выше общий подход. Однако, целесообразнее использовать "структуру" полиномиального вектора, вытекающую из свойства "воспроизводимости", согласно которому он представим в виде суммы

$$X = X^{(1)} + \dots + X^{(N)}, \quad (12)$$

в которой слагаемое  $X^{(r)}$  порождается  $r$ -тым испытанием. При этом векторы  $X^{(r)}$ ,  $r = \overline{1, n}$  независимы и одинаково распределены. Поэтому достаточно рассматривать  $X^{(1)}$ . Множество возможных значений вектора  $X^{(1)}$  исчерпывается совокупностью  $n$  векторов вида  $x^{(i)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , у которых все координаты, кроме  $i$ -той, равны 0 а  $i$ -тая равна 1. Распределение вероятностей вектора  $X^{(1)}$  задается формулой (11) при  $N = 1$ :

$$p_i^1 = P\{x^{(1)} = x^{(i)}\} = P\{X^{(1)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\} = p_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, для моделирования полиномиального вектора  $X$  достаточно смоделировать  $N$  независимых одинаково распределенных слагаемых  $X^{(r)}$  в правой части (12). Для моделирования самих слагаемых  $X^{(r)}$  используется изложенный в предыдущем пункте "общий подход".

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

#### 1. Общие замечания

Моделирование случайного процесса (с.п.)  $\{X_t, t \in T\}$  означает построения алгоритма, позволяющего получать его реализации  $\{x_t, t \in T\}$ . В связи с приближенными вычислениями по методу Монте-Карло на ЭВМ могут быть использованы лишь реализации с.п. для некоторой последовательности значений аргумента, например,  $t_1, \dots, t_n \in T$ .

Если случайный процесс изучается в рамках определения "в широком смысле", то это предполагает возможность задания его конечномерных распределений: для любого  $n \geq 1$ , любых  $t_1, \dots, t_n \in T$  известна функция распределения  $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$  вектора значений процесса  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ . Задача формирования реализаций с.п. в этом случае ничем не отличается от задачи получения возможных значений  $n$ -мерного случайного вектора, рассмотренной в главе 2.

Следует отметить два препятствия на пути осуществления намеченного выше подхода к моделированию с.п. Первое состоит в том, что далеко не всегда бывают заданы любые конечномерные распределения с.п. Второе — в том, что даже если любые конечномерные распределения заданы, для больших  $n$  формирование реализаций случайного вектора становится громоздким и неудобным для использования на электронных цифровых вычислительных машинах.

Эти обстоятельства заставляют использовать для моделирования либо специфические свойства процессов, относящихся к тем или иным классам случайных процессов, либо возможность представления данного процесса через более простые случайные элементы.

## 2. Квазислучайные процессы

Случайный процесс  $\{X_t, t \in T\}$  называется квазислучайным (иногда козидетерминированным), если он представляется совокупностью функций времени заданного вида:  $X_t = S(t, Y)$ , где  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  — векторный случайный параметр с множеством возможных значений  $U \subset R^m$ . Каждой точке  $y \in U$  соответствует одна реализация с.п.:

$$x_t = S(t; y), \quad t \in T. \quad (1)$$

Простейшим примером квазислучайного процесса является гармонический процесс со случайными амплитудой  $\alpha$ , частотой  $\omega$  и фазой  $\varphi$ :

$$X_t = S(t; \alpha, \omega, \varphi) = \alpha \cos(\omega t + \varphi), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

причем векторный параметр  $Y = (\alpha, \omega, \varphi)$  принимает значения в области  $U$  трехмерного евклидова пространства, определяемой неравенствами:  $\alpha > 0, \omega > 0, |\varphi| \leq \pi$ . Очевидно, что процесс (2), как процесс в широком смысле, задан, если задано распределение вероятностей вектора  $(\alpha, \omega, \varphi)$ . При этом реализация гармонического процесса становится вполне определенной в соответствии с формулой (2) для всех  $t \geq 0$ , как только случайный вектор  $Y$  принимает одну из своих возможных значений, например,  $y = (\alpha_0, \omega_0, \varphi_0)$ . Таким образом, для моделирования гармонического процесса достаточно уметь моделировать случайный векторный параметр  $Y = (\alpha, \omega, \varphi)$ .

В общем случае моделирование квазислучайного процесса сводится к моделированию определяющего его случайного вектора  $Y$ . Получив одним из описанных в предыдущей главе методов значение этого вектора  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , по формуле (1) будем иметь реализацию квазислучайного процесса.

**2.1. Колебательные процессы со случайными параметрами.** Во многих вопросах с.п. аппроксимируются суммой гармонических процессов с заданными частотами и случайными амплитудами и фазами. Иными словами, рассматриваются процессы вида

$$X_t = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (3)$$

где  $\omega_k$  — заданные числа, а величины  $\alpha_k$  и  $\varphi_k$  случайны. Теоретико-вероятностная структура этого процесса (как процесса в широком смысле) полностью определяется совместным распределением случайных величин  $\alpha_k, \varphi_k, k = 1, 2, \dots, m$ . Процесс (3) представляет собой сумму  $m$  гармонических колебаний с амплитудами  $|\alpha_k|$  и частотами  $\omega_k, k = 1, \dots, m$ , образующими в совокупности спектр частот.

Иногда целесообразно рассматривать комплекснозначные с.п. колебательного характера

$$Z_t = \sum_{k=1}^m \gamma_k e^{i\omega_k t}, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (4)$$

где комплексные амплитуды  $\gamma_k$  являются случайными величинами:

$$\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

где  $\alpha_k, \beta_k, k = 1, \dots, m$  — вещественные случайные величины. Ясно, что процесс  $Z_t$  можно "расщепить" на вещественную и мнимую части, которые представляют собой колебательные процессы вида (3).

Таким образом, колебательные процессы вида (3) или (4) представляют собой квазислучайные процессы, вполне определяемые  $2m$ -мерным случайным параметром. Их моделирование, как отмечено выше, сводится к моделированию случайного вектора  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m)$  в случае вещественного процесса (3) и вектора  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m)$  в случае комплексного процесса (4).

Напомним, что колебательный процесс (4) является стационарным в широком смысле, если случайные амплитуды  $\gamma_k, k = 1, \dots, m$  обладают моментами до второго порядка включительно, причем  $M\gamma_k = 0, M\gamma_k \bar{\gamma}_j = 0$  для всех  $k, j = 1, \dots, m, k \neq j$ .

**2.2. Линейная модель квазислучайного процесса.** Еще один пример квазислучайного процесса дает так называемая линейная модель

$$X_t = S(t; Y) = \sum_{k=1}^m Y_k \psi_k(t), \quad t \in T, \quad (5)$$

где  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  — векторный случайный параметр, линейно входящий в правую часть (5),  $\psi_k(t), k = 1, \dots, m$  — заданные функции. В ряде случаев изучаемый с.п. целесообразно аппроксимировать линейной моделью

(5). Линейная модель может представлять собой частную сумму ряда в разложении некоторого случайного процесса

Для моделирования процесса (5) достаточно смоделировать случайный векторный параметр  $Y$ .

### 3. Приближенное моделирование случайного процесса

**3.1. Теоретические основания.** Как отмечено в конце предыдущего параграфа, во многих случаях представляет интерес аппроксимация данного случайного процесса  $X_t$  линейной моделью (5), т.е. конечной суммой:

$$X_t \approx \sum_{k=1}^m Y_k \psi_k(t). \quad (6)$$

Случайные коэффициенты  $Y_k$  в (6) будем называть координатами случайного процесса  $X_t$ . Выбор координат и системы детерминированных функций  $\{\psi_k(t)\}$  неоднозначен и зависит от условий задачи, для решения которой используется аппроксимация (6). Вместе с тем известен достаточно общий подход к такому выбору, основанный на теореме разложения с.к. непрерывного случайного процесса в ряд со случайными ортогональными коэффициентами.

**Теорема 1.** С.к. непрерывный вещественный гильбертов с.п.  $X_t, t \in [a, b]$ , с  $MX_t = 0$  и корреляционной функцией  $R(t, s)$  разлагается в ряд

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \psi_k(t). \quad (7)$$

сходящийся в среднем квадратическом при каждом  $t \in [a, b]$ . В этом разложении  $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$  — ортогональная последовательность с.в., определяемая равенствами

$$Y_k = \int_a^b X_t \psi_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

с  $MY_k = 0$ ,  $MY_k Y_j = 0$  при  $k \neq j$  и  $MY_k^2 = DY_k = \lambda_k$ ;  $\lambda_k > 0$ ,  $\psi_k(t)$  — соответственно собственные числа и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с ядром  $R(t, s)$ :

$$\lambda \psi(t) = \int_a^b R(t, s) \psi(s) ds. \quad (9)$$

*Доказательство* этой теоремы можно найти в [2]. Формула (7) часто называется разложением Карунена-Лоева.

**Замечание 1.** Если  $X_t$  — гауссов процесс с  $MX_t = 0$ , то коэффициенты  $Y_k$  ряда (7) являются независимыми гауссовыми величинами и ряд (7) сходится почти наверное при каждом  $t$ .

**Замечание 2.** В случае гауссова процесса случайные коэффициенты в разложении (7) можно выбирать так, чтобы они были независимыми стандартными гауссовыми случайными величинами. Для этого новые коэффициенты  $\alpha_k$  следует положить равными  $Y_k/\sqrt{\lambda_k}$ , и тогда разложение процесса  $X_1$  в ряд будет иметь вид

$$X_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t), \quad (10)$$

где  $\varphi_k(t) = \sqrt{\lambda_k} \psi_k(t)$ , а  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность независимых одинаково распределенных по закону  $N(0, 1)$  случайных величин. Последнее обстоятельство, очевидно, существенно упрощает моделирование коэффициентов разложения, а следовательно, и самого процесса.

Для приближенного моделирования произвольного процесса по формуле (6) достаточно смоделировать  $n$ -мерный вектор случайных коэффициентов  $(Y_1, \dots, Y_n)$ , координаты которого определены формулами (8). Использование формул (8) предполагает, что уже найдены собственные функции интегрального уравнения (9), хотя при решении этого уравнения можно столкнуться с серьезными трудностями. Но даже если все собственные функции уравнения (9) найдены, известны все конечномерные распределения процесса, но они не гауссовы, найти распределение даже отдельных коэффициентов  $Y_k$  из формулы (8), вообще говоря, непросто. Тем более трудной представляется задача нахождения совместного распределения  $n$  коэффициентов для достаточно больших  $n$ . Эти обстоятельства и являются существенным препятствием к использованию формулы (6) для моделирования с.п.  $X_1$ . Если всё же предположить, что мы имеем совместное распределение коэффициентов  $Y_1, \dots, Y_n$  для любого  $n$ , следовательно, в принципе можем смоделировать вектор коэффициентов, то это означает лишь, что мы моделируем аппроксимирующую частную сумму ряда, в который разлагается процесс  $X_1$ . При этом сама аппроксимация процесса  $X_1$   $n$ -й частной суммой ряда (7) вносит среднюю квадратичную погрешность величины

$$\delta_n^2 = M \left| X_1 - \sum_{k=1}^n Y_k \psi_k(t) \right|^2 = R(t, t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \psi_k^2(t). \quad (11)$$

**3.2. Приближенное моделирование винеровского процесса.** Рассмотрим винеровский процесс  $w_1$  на отрезке  $[0, 1]$ . Для него  $w_0 = 0$ ,  $Mw_t = 0$  и  $R(t, s) = \min(t, s)$ . Собственные числа и собственные функции ядра  $R(t, s)$  легко находятся (см., например, [2]):

$$\lambda_k = \left[ \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) \right]^{-2}, \quad \psi_k(t) = \sqrt{2} \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi t, \quad k = 0, 1, \dots$$

Так как винеровский процесс является гауссовым, то, учитывая замечание 2, для него запишем разложение в ряд:

$$w_1 = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\sin \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi t}{\left( k + \frac{1}{2} \right) \pi}. \quad (12)$$

где  $\{\alpha_k, k = 0, 1, \dots\}$  — последовательность независимых гауссовых величин с параметрами  $(0, 1)$ . При фиксированном  $t$  этот ряд сходится с вероятностью 1.

Для приближенного моделирования винеровского процесса при допустимой (заданной) с.к. погрешности  $\varepsilon > 0$  следует моделировать  $n$ -ю частную сумму ряда (12), выбирая  $n$  из условия

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \left( t - 2 \sum_{k=0}^n \frac{\sin^2(k + \frac{1}{2})\pi t}{\pi^2(k + \frac{1}{2})^2} \right) \leq \varepsilon. \quad (13)$$

При выбранном  $n$  остается смоделировать  $n + 1$  независимых гауссовых величин  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  и подставить их в  $n$ -ю частную сумму ряда (12). Таким образом, будем иметь приближенное равенство

$$w_t \approx \sqrt{2} \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{\sin(k + \frac{1}{2})\pi t}{(k + \frac{1}{2})\pi}, \quad (14)$$

с.к. погрешность которого не превосходит заданного  $\varepsilon$ .

*Замечание 3.* Можно получить (см. [2]) несколько иное разложение  $w_t, t \in [0, 1]$  в ряд:

$$w_t = t\alpha_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\sin k\pi t}{k\pi}, \quad (15)$$

где  $\{\alpha_k, k = 0, 1, \dots\}$  — снова последовательность независимых гауссовых с.в. с параметрами  $(0, 1)$ . В этом случае при допустимой с.к. погрешности аппроксимации  $\varepsilon$  следует выбирать  $n$  из условия

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \left( t - t^2 - 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 k\pi t}{k^2\pi^2} \right) \leq \varepsilon. \quad (16)$$

Тогда

$$w_t \approx t\alpha_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\sin k\pi t}{k\pi}. \quad (17)$$

#### 4. Процессы с независимыми значениями

Любые конечномерные распределения процесса  $\{X_t, t \in T\}$ , с независимыми значениями выражаются через семейство одномерных распределений формулой

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_{t_k}(x_k),$$

где  $F_t(x) = P\{X_t < x\}$ ,  $t \in T$ . Таким образом, семейство одномерных распределений  $\{F_t(x), t \in T\}$  такого процесса вполне задает его как процесс в широком смысле. Моделирование любого набора сечений  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  этого процесса, соответствующих моментам времени  $t_1, \dots, t_n \in T$ , сводится к

моделированию независимых скалярных с.в.  $X_k$ , с функциями распределения  $F_k(x_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

## 5. Процессы с независимыми приращениями

Из определения процесса с независимыми приращениями вытекает (см. [2]), что любые его конечномерные распределения  $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$  вполне определяются семейством двумерных распределений  $\{F_{t,s}(x, y); t, s \in T\}$ . Это семейство, таким образом, задает процесс с независимыми приращениями  $\{X_t, t \in T\}$  как процесс в широком смысле. Следовательно, если для процесса с независимыми приращениями известно семейство двумерных распределений, то для его моделирования можно использовать общий подход, изложенный выше (см. 3.1.).

Для двух наиболее простых и, в то же время, наиболее важных представителей рассматриваемого класса с.п., а именно, винеровского и пуассоновского, можно указать простые алгоритмы моделирования.

**5.1. Винеровский процесс.** Рассмотрим винеровский процесс  $\{w_t, t \geq 0\}$ , который, по определению, является процессом с независимыми гауссовыми приращениями:  $L(w_t - w_s) = N(0, \sigma^2(t - s))$  для любых  $0 \leq s < t$ . Для моделирования этого процесса на отрезке  $[0, T]$  делат этот отрезок на  $n$  равных частей точками  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ . Значения процесса  $w_t$  в этих точках получают последовательно по формулам

$$w_{t_i} = w_{t_{i-1}} + \sigma \sqrt{T/n} v_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (18)$$

где  $v_i, i = 1, \dots, n$  — независимые стандартные гауссовы с.в. Для построения приближенной траектории винеровского процесса следует соединить отрезками прямых соседние полученные по формулам (18) точки траектории.

Заметим, что выше (см. 3.2.) рассматривался другой способ (приближенного) моделирования винеровского процесса.

**5.2. Однородный пуассоновский процесс.** Этот процесс, часто называемый также простейшим потоком событий, является процессом с независимыми приращениями  $\{\pi_t, t \geq 0\}$ , начинающимся из нуля и имеющим пуассоновские приращения:  $L(\pi_t - \pi_s) = \Pi(\lambda(t - s))$  для любых  $0 \leq s < t$ . Параметр  $\lambda > 0$  процесса называется интенсивностью потока событий. Ясно, что этот процесс принимает целые неотрицательные значения для каждого  $t \geq 0$ . Можно показать, что значения процесса  $\pi_t$  возрастают в случайные моменты времени  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots$  единичными скачками, а в промежутках между соседними скачками остаются неизменяемыми. При этом промежутки между соседними скачками являются независимыми, одинаково распределенными по показательному закону с параметром  $\lambda$  случайными величинами. Отсюда, естественно, получается алгоритм моделирования однородного пуассоновского процесса на промежутке  $[0, T]$ . Достаточно смоделировать моменты скачков по формулам

$$\tau_k = \tau_{k-1} + \theta_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

где  $\tau_0 = 0$ ,  $\theta_k, k = 1, 2, \dots$  — независимые с.в. с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases} \quad (20)$$

Процедура моделирования заканчивается, как только впервые  $\tau_k$  превысит  $T$ . Смоделированная реализация будет кусочно-постоянной функцией, возрастающей единичными скачками в моменты  $\tau_k \in T$ .

**5.3. Неоднородный пуассоновский процесс.** Так называют процесс с независимыми приращениями  $X_t, t \geq 0$ , начинающийся из нуля, приращения которого  $X_t - X_s$  для любых  $0 \leq s < t$  имеют пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda(s, t) = \int_s^t \lambda(u) du, \quad (21)$$

где положительная ограниченная функция  $\lambda(t), t \geq 0$  называется *мгновенной интенсивностью* (в момент  $t$ ) пуассоновского потока событий. Можно показать, что, как и в однородном случае, значения процесса  $X_t$  возрастают единичными скачками в случайные моменты времени  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots$ , а в промежутках между соседними скачками остаются постоянными. При этом промежуток  $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k, k = 0, 1, \dots, \tau_0 = 0$  имеет закон распределения, зависящий от  $\tau_k$ :

$$F_{k+1}(x) = 1 - \exp\left\{-\int_0^x \lambda(\tau_k + u) du\right\}, \quad 0 < x < \infty. \quad (22)$$

Как следует из (22), для того, чтобы промежутки между соседними скачками были с вероятностью 1 конечными, необходимо, чтобы мгновенная интенсивность  $\lambda(t)$  удовлетворяла условию

$$\int_0^{\infty} \lambda(t) dt = \infty. \quad (23)$$

Для моделирования неоднородного процесса Пуассона с интенсивностью  $\lambda(t)$  на промежутке  $[0, T]$ , очевидно, достаточно смоделировать моменты скачков по формулам (19), где величины  $\theta_k$  теперь следует моделировать последовательно в соответствии с функцией распределения (22). Процедура моделирования останавливается, как только впервые  $\tau_k$  превышает величину  $T$ .

Величины  $\theta_{k+1}$  с распределением (22) можно моделировать с помощью "универсального метода" (см. гл. 1). При этом значение  $\theta_{k+1}$  получается как решение уравнения

$$\int_0^{\theta_{k+1}} \lambda(\tau_k + u) du = -\ln U_k, \quad \text{где } \mathcal{L}(U_k) = R_{[0,1]}.$$

6.1. **Общие марковские процессы.** Рассмотрим случайный процесс  $\{X_t, t \in T\}$  со значениями в измеримом "фазовом" пространстве  $(E, \mathcal{E})$ . Его называют *марковским*, если при любом фиксированном  $X_s = x$  значения процесса  $X_t, t > s$  не зависят от  $X_u, u < s$ . Условную вероятность события  $\{X_t \in A \subseteq E\}$  при условии  $X_s = x$  называют *переходной функцией* (вероятностью) марковского процесса и обозначают  $P(s, x, t, A)$ . Переходная функция для любых  $s < u < t$  удовлетворяет уравнению

$$P(s, x, t, A) = \int_E P(u, y, t, A)P(s, x, u, dy), \quad (24)$$

называемому *уравнением Чепмена-Колмогорова*. Оно выражает важное свойство марковского процесса — отсутствие последствия: если известно состояние системы в некоторый момент времени  $u$ , то вероятности перехода из этого состояния не зависят от движений системы в моменты времени, предшествующие  $u$ . Если существует минимальный элемент  $t_0$  множества  $T$ , то вероятности  $P_0(A) = P\{X_{t_0} \in A\}$  для всех  $A \in \mathcal{E}$  образуют так называемое *начальное распределение* процесса  $\{X_t, t \in T\}$ . Начальное распределение и переходная функция марковского процесса вполне определяют его как процесс в широком смысле. Это значит, что при заданных начальном распределении и переходной функции марковского процесса, как отмечено в начале этой главы, есть принципиальная возможность его моделирования.

Если существует неотрицательная функция  $p(s, x, t, y)$  такая, что

$$P(s, x, t, A) = \int_A p(s, x, t, y)dy$$

для всех  $s, x, A, s < t$ , то ее называют *переходной плотностью* марковского процесса. Марковский процесс называется *однородным*, если его переходная вероятность зависит не от двух временных аргументов  $s$  и  $t$ , а только от их разности  $t - s$ :

$$P(s, x, t, A) = P(t - s, x, A). \quad (25)$$

Мы рассмотрим далее моделирование некоторых подклассов марковских процессов.

6.2. **Цели Маркова.** Марковский процесс  $\{X_t, t \in T\}$ , у которого дискретно как временное множество  $T$ , так и фазовое пространство  $E$ , называют *целью Маркова*. В этом случае без потери общности можно считать, что  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  и  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Переходную функцию при этом достаточно определить для одноточечных множеств  $A_k = \{k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , и целесообразно использовать обозначение

$$P(m, i, n, k) = p_{ik}(m, n). \quad (26)$$

Определенная таким образом величина  $p_{ik}(m, n)$  называется *переходной вероятностью* цепи Маркова и представляет собой условную вероятность оказаться в  $k$ -том состоянии на  $n$ -м шаге при условии, что на  $m$ -том шаге ( $m < n$ ) она находилась в состоянии  $i$ . Уравнение Чепмена-Колмогорова для переходной вероятности будет иметь вид

$$p_{ik}(m, n) = \sum_{j \in E} p_{ij}(m, r) p_{jk}(r, n) \quad (27)$$

для любых  $m < r < n$  и  $i, k \in E$ . Если наряду с переходной вероятностью (26) задано также начальное распределение

$$\pi_k = P\{X_0 = k\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (28)$$

то будут определены и конечномерные распределения цепи Маркова: для любых  $n$  шагов с номерами  $m_1 < m_2 < \dots < m_n$  и любых состояний  $i_r \in E$ ,  $r = \overline{1, n}$  имеем

$$\begin{aligned} P\{X_{m_1} = i_1, X_{m_2} = i_2, \dots, X_{m_n} = i_n\} = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j p_{j i_1}(0, m_1) p_{i_1 i_2}(m_1, m_2) \dots p_{i_{n-1} i_n}(m_{n-1}, m_n). \end{aligned} \quad (29)$$

Моделирование значений  $X_{m_1}, X_{m_2}, \dots, X_{m_n}$  цепи Маркова сводится, таким образом, к моделированию случайного вектора с заданным законом распределения вероятностей: следует сначала смоделировать с.в.  $X_{m_1}$  в соответствии с безусловным распределением

$$p_k = P\{X_{m_1} = k\} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j p_{j k}(0, m_1), \quad k = 0, 1, \dots \quad (30)$$

а последующие значения  $X_{m_r}$ ,  $1 < r \leq n$ , цепи — в соответствии с переходными (условными) вероятностями  $p_{i_{r-1} i_r}(m_{r-1}, m_r)$ .

Моделирование цепи Маркова в частных случаях может упрощаться. Так для конечной цепи Маркова, у которой  $E = \{0, 1, \dots, N\}$ , суммы в правых частях формул (27) и (30) будут конечными. Соответственно, более простой будет и процедура моделирования, поскольку будут конечными как совокупности вероятностей начальных состояний, так и совокупности переходных вероятностей.

Другое упрощение следует из однородности цепи Маркова, что выражается равенством  $p_{ik}(m, m+n) = p_{ik}(n)$  для любых  $m \geq 0$ ,  $n \geq 1$ . Пользуясь уравнением Чепмена-Колмогорова, легко показать, что переходные вероятности однородной цепи Маркова за  $n$  шагов вполне определяются ее переходными вероятностями  $p_{ik}(1) = p_{ik}$ ,  $i, k \in E$  за один шаг. Если  $P^{(n)} = \| p_{ik}^{(n)} \|$  — матрица переходных вероятностей за  $n$  шагов, а  $P = \| p_{ik} \|$  — матрица переходных вероятностей за один шаг, то легко

убедиться, что  $P^{(n)} = P^n$ , где в правой части стоит  $n$ -я степень матрицы  $P$ . Это значит, что однородная цепь Маркова как процесс в широком смысле вполне задается начальным распределением и переходными вероятностями за один шаг. Отсюда вытекает алгоритм моделирования последовательных значений цепи Маркова:  $X_0, X_1, X_2, \dots$ . Для получения значения с.в.  $X_0$  моделируем дискретное распределение  $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$ . Пусть получено значение  $i_0$ . Тогда значение с.в.  $X_1$  моделируем в соответствии с распределением  $\{p_{i_0 k}, k = 0, 1, \dots\}$ . Этот процесс продолжается до получения реализации цепи Маркова нужной "длины".

Разумеется, моделирование будет еще проще, когда однородная цепь Маркова является конечной.

**6.3. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным фазовым пространством.** Рассмотрим марковский процесс  $\{X_t, t \in T\}$ , у которого пространство состояний  $E = \{0, 1, \dots\}$  — конечно или счетно, а  $T = [0, \infty)$ . Предположим, что он однороден во времени и обозначим его переходную вероятность

$$P(s, i, s+t, k) = p_{ik}(t) \quad (31)$$

для любых  $i, k \in E$  и  $s \geq 0, t \geq 0$ . Будем также предполагать, что с вероятностью 1 реализации  $x_t(\omega)$  рассматриваемого процесса непрерывны справа в каждой точке  $t \geq 0$ . Состояние  $i$  будем называть поглощающим, если  $p_{ii}(t) = 1$  для всех  $t > 0$ . Остальные состояния будем называть непоглощающими. Пусть  $\tau$  — момент первого выхода из начального состояния.

**Утверждение 1.** Если начальное состояние  $X_0 = i$  является непоглощающим,  $\tau$  — момент выхода из начального состояния, то при некотором  $\lambda_i > 0$

$$P_i\{\tau > t\} = \exp\{-\lambda_i t\}, \quad (32)$$

где  $P_i$  обозначает условную вероятность при условии  $X_0 = i$ ; при этом величины  $\tau$  и  $X_\tau$  независимы.

*Доказательство* этого утверждения можно найти в [7].

**Замечание 1.** Для поглощающих состояний  $j$  будем считать  $\lambda_j = 0$ . Так как в этом случае для любого  $t$   $P_j\{\tau > t\} = 1$ , то формула (32) остается справедливой.

Обозначим

$$P_i\{X_\tau = j\} = p_{ij} \quad (33)$$

и рассмотрим величины:  $\tau_1$  — момент выхода из начального состояния,  $X_1 = X_{\tau_1}$ ,  $\tau_2$  — время, которое процесс проведет в состоянии  $X_1$ ,  $\theta_2 = \tau_1 + \tau_2$ ,  $X_2 = X_{\theta_2}, \dots$ . Если  $X_{n-1}, \tau_{n-1}, \theta_{n-1}$  определены, то  $\tau_n$  — время, которое процесс находится в состоянии  $X_{n-1}$  с момента  $\theta_{n-1}$  до выхода из этого состояния,  $\theta_n = \theta_{n-1} + \tau_n$ ,  $X_n = X_{\theta_n}$ .

**Утверждение 2.** Величины  $X_0, X_1, \dots$  образуют однородную цепь Маркова, для которой вероятности перехода за один шаг  $p_{ij} = p_{ij}$  даются равенством (33); условное распределение  $\tau_1, \dots, \tau_n$  при условии, что заданы  $X_0, \dots, X_n$ , совпадает с распределением  $n$  независимых показательных распределенных с.в. с параметрами  $\lambda_{X_0}, \dots, \lambda_{X_{n-1}}$ .

Утверждение 2 позволяет описать поведение рассматриваемых марковских процессов. Имеется цепь Маркова  $X_n, n = 0, 1, \dots$ , вложенная цепью Маркова, с вероятностями перехода за один шаг  $p_{ij}$ . Последовательные состояния  $X_n$  этой цепи определяют последовательные состояния процесса с непрерывным временем. Время пребывания процесса  $X_t$  в состоянии  $X_n$  является показательно-распределенной величиной (при условии, что задано  $X_n = x_n$ ) с параметром  $\lambda_{x_n}$  и не зависит от времени пребывания в предыдущих состояниях. Таким образом, зная вложенную цепь Маркова, можно построить процесс Маркова с непрерывным временем до момента

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k.$$

Процесс называется *регулярным*, если для всех  $i \in E$

$$P_i\{\theta = +\infty\} = 1.$$

Таким образом, моделирование однородного марковского процесса с непрерывным временем и дискретным фазовым пространством сводится к моделированию вложенной однородной цепи Маркова, рассмотренному в предыдущем пункте настоящего параграфа, и моделированию последовательности независимых показательно-распределенных с.в.

**6.4. Диффузионные марковские процессы.** Так называется класс непрерывных марковских процессов, которые могут служить математической моделью явления диффузии – перемещения частицы под воздействием молекул среды, находящихся в хаотическом тепловом движении. Формально диффузионный марковский процесс можно определить через его переходную функцию. Пусть  $E$  – конечномерное евклидово пространство – фазовое пространство процесса  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ ;  $P(s, x, t, A)$  – его переходная функция. Прежде всего будем предполагать, что процесс  $X$  с вероятностью 1 имеет реализации без разрывов второго рода. Теперь сформулируем *условия диффузионности*: для  $x \in E, t \geq 0, \varepsilon > 0$

$$1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(t, x, t+h, V_\varepsilon(x)) = 0,$$

где  $V_\varepsilon(x)$  – шар радиуса  $\varepsilon$ ;

$$2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) P(t, x, t+h, dy) = a(t, x),$$

где  $a(t, x)$  – измеримая функция на  $[0, \infty) \times E$  со значениями в  $E$ ;

$$3) \quad \text{для всех } z \in E$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 P(t, x, t+h, dy) = (B(t, x)x, z),$$

где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $E$ ,  $B(t, x)$  – измеримая симметричная неотрицательно определенная матричная функция на  $[0, \infty) \times E$ , действующая из  $E$  в  $E$ . Функции  $a(t, x)$  и  $B(t, x)$  называются *диффузионными коэффициентами* процесса:  $a(t, x)$  – *вектором (коэффициентом) переноса*,  $B(t, x)$  – *оператором (коэффициентом) диффузии*.

Условие 1) вместе с отсутствием разрывов 2-го рода является условием непрерывности процесса. Условие 2) указывает на наличие движения среды, в которой находится частица: частица из точки  $x$  в момент  $t$  за время  $h$  в среднем смещается на  $\hat{a}(t, x)h$ . Условие 3) показывает, что матрица  $B(t, x)$  характеризует величину среднего квадратического отклонения частицы от ее положения  $x$  в момент  $t$ . Если среда изотропна (ее свойства одинаковы по всем направлениям), то  $B(t, x) = b^2(t, x)I$ , где  $b^2(t, x)$  — числовая функция, называемая коэффициентом диффузии,  $I$  — единичная матрица.

Далее для простоты будем рассматривать процессы в одномерном фазовом пространстве  $E = R^1$ . Широкий класс диффузионных процессов с непрерывными коэффициентами образуют решения стохастических дифференциальных уравнений

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)d\omega_t, \quad (34)$$

или, в интегральной форме,

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)d\omega_s. \quad (35)$$

Второй интеграл в правой части последнего уравнения, называемый стохастическим интегралом по винеровскому процессу  $\{\omega_t, t \geq 0\}$  просто определяется в случае непрерывной зависимости подынтегрального процесса от  $s$ . Пусть непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс  $\{Y_t, t \geq 0\}$  согласован с винеровским процессом в следующем смысле: приращения  $\omega_i - \omega_s$  при  $i > s$  не зависят от совокупности случайных величин  $Y_u, \omega_u, u \leq s$ . Тогда существует предел в смысле сходимости по вероятности интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^n Y_{s_{k-1}}(\omega_{s_k} - \omega_{s_{k-1}}), \quad 0 = s_0 < \dots < s_n = t$$

при  $\max_{1 \leq k \leq n} (s_k - s_{k-1}) \rightarrow 0$ , который называется стохастическим интегралом и обозначается символом

$$\int_0^t Y_s d\omega_s.$$

Решением уравнения (35) с непрерывными по совокупности переменных коэффициентами  $a(t, x)$  и  $b(t, x)$  называется согласованный с винеровским процессом процесс  $\{X_t, t \geq 0\}$  с непрерывными траекториями, такой, что равенство (35) справедливо для всех  $t > 0$  с вероятностью 1.

Подробнее о стохастических интегралах и стохастических дифференциальных уравнениях см. [2].

Решения стохастических дифференциальных уравнений моделируются путем перехода к разностной схеме. Так, если процесс  $\{X_t, t \geq 0\}$  определяется уравнением (34), то простейшая разностная схема имеет вид

$$X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = a(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})(t_k - t_{k-1}) + \\ + b(t_{k-1}, X_{t_{k-1}})(w_{t_k} - w_{t_{k-1}}),$$

где  $k = 1, 2, \dots$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots$

Замечание 2. Попытки формального применения метода Рунге-Кутты с целью повышения точности моделирования решения стохастического дифференциального уравнения оказываются несостоятельными, поскольку винеровский процесс не обладает никакими производными.

## 7. Стационарные процессы

7.1. Общий подход к моделированию стационарных процессов. Мы рассматриваем здесь комплекснозначные процессы  $X = \{X_t, t \in T\}$ , у которых параметрическое множество  $T$  либо совокупность целых чисел  $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  (случай дискретного времени), либо множество всех действительных чисел  $(-\infty, \infty)$  (случай непрерывного времени). Если у процесса  $X$  имеются моментные функции до второго порядка включительно, причем среднее значение  $MX_t \equiv m = \text{const}$ , а корреляционная функция

$$R(t, s) = M(X_t - m)\overline{(X_s - m)} = R(t - s), \quad (36)$$

то  $X$  называется стационарным в широком смысле. Употребляемый в дальнейшем без оговорок термин "стационарный" подразумевает стационарность в широком смысле.

В рамках теории гильбертовых случайных процессов основными характеристиками стационарного процесса являются моментные функции первого и второго порядка, а именно среднее значение  $MX_t \equiv m$  и корреляционная функция  $R(\tau) = M(X_t - m)\overline{(X_{t+\tau} - m)}$  процесса. Для простоты (и без потери общности) в дальнейшем считаем, что  $m = 0$ . Центральным результатом теории стационарных процессов является теорема А.Я.Хинчина о спектральном представлении процесса и его корреляционной функции.

**Теорема 2.** Каждый стационарный процесс  $X$  допускает спектральное представление

$$X_t = \int e^{i\omega t} dZ_\omega, \quad t \in T \quad (37)$$

в виде стохастического интеграла по комплекснозначному процессу с ортогональными приращениями  $Z$ . При этом корреляционная функция  $R(\tau)$  процесса  $X$  допускает представление

$$R(\tau) = \int e^{i\omega \tau} dF(\omega), \quad \tau \in T \quad (38)$$

в виде интеграла Стильтьеса по неубывающей непрерывной слева функции ограниченной вариации  $F(\omega)$ . Интегрирование в (37) и (38) производится в пределах  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  в случае дискретного времени  $t$ , и в пределах  $-\infty < \omega < \infty$  в случае непрерывного  $t$ .

*Замечание 1.* Функция  $\tilde{F}(\omega)$  в представлении (38) называется *спектральной функцией процесса X*. Она однозначно может быть восстановлена по корреляционной функции  $R(\tau)$ . Особенно просто это делается в случае, когда  $F(\omega)$  абсолютно непрерывна. Тогда ее производная  $f(\omega) = dF(\omega)/d\omega$  называется *спектральной плотностью процесса*. В этом случае "формулы обращения" имеют вид

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau}, \quad \omega \in [-\pi, \pi] \quad (39)$$

в случае дискретного времени и

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\omega} R(\tau) d\tau, \quad \omega \in (-\infty, \infty) \quad (40)$$

в случае непрерывного времени.

*Замечание 2.* Спектральная функция  $F(\omega)$  стационарного процесса X служит структурной функцией процесса с ортогональными приращениями Z, участвующего в представлении (37) процесса X:

$$F(\omega_2) - F(\omega_1) = M|Z_{\omega_2} - Z_{\omega_1}|^2 \quad (41)$$

для любых точек  $\omega_1 < \omega_2$  спектра процесса X.

Спектральное представление (37) стационарного процесса через процесс более простой структуры (процесс с ортогональными приращениями) можно положить в основу приближенного моделирования процесса X. Для этого разобьем интервал, в котором  $0 < F(\omega) < F(+\infty)$ , на интервалы  $\Delta_k$  и возьмем в  $\Delta_k$  произвольную точку  $\omega_k$ . Тогда, если  $F_k$  — приращение  $F(\omega)$  на интервале  $\Delta_k$ , то можно записать:

$$F(\omega) \approx \sum_{\{k: \omega_k \leq \omega\}} F_k$$

и, следовательно

$$X_t \approx \sum_k e^{i\omega_k t} Z_k, \quad (42)$$

где  $\{Z_k\}$  — ортогональные приращения процесса Z на интервалах  $\{\Delta_k\}$ . Таким образом, формула (42) указывает алгоритм моделирования значений процесса X. Для работы этого алгоритма необходимо уметь моделировать процесс с ортогональными приращениями Z со структурной функцией  $F(\omega)$ . Моделирование приращений  $Z_k$  в формуле (42) возможно, в частности, когда Z является центрированным процессом с независимыми приращениями с заданным семейством двумерных распределений.

Изложенный выше общий подход к моделированию стационарных процессов далеко не всегда удается реализовать на практике. Поэтому ниже мы рассмотрим частные случаи стационарных процессов, для которых задача моделирования решается в силу специфической структуры этих процессов.

**7.2. Моделирование процесса с дробно-рациональной спектральной плотностью.** Будем рассматривать одномерный стационарный гауссов процесс  $X_t$  с непрерывным временем, обладающий спектральной плотностью вида

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \right|^2, \quad (43)$$

где  $P(z)$  и  $Q(z)$  — многочлены от  $z$  с действительными коэффициентами;

$$P(z) = \sum_{k=0}^m b_{m-k} z^k, \quad Q(z) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} z^k, \quad a_0 = 1,$$

причем  $m < n$  и нули  $Q(z)$  лежат в левой полуплоскости. Представление  $f(\omega)$  в виде (43) означает, что процесс  $X_t$  можно получить в виде линейной комбинации процесса  $Y_t$  и  $m-1$  его производных:

$$X_t = b_0 Y_t^{(m-1)} + \dots + b_m Y_t, \quad (44)$$

где  $Y_t$  является решением линейного стохастического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$dY_t^{(m-1)} + [a_1 Y_t^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} Y_t' + a_n Y_t] dt = dW_t, \quad (45)$$

где  $W_t, t \geq 0$  — винеровский процесс. Если ввести вектор (столбец)  $V_t = (Y_t, Y_t', \dots, Y_t^{(m-1)})$ , то уравнение (45) запишется в векторной форме

$$dV_t = AV_t dt + dW_t, \quad (46)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad W_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ W_t \end{pmatrix}.$$

Заметим, что стационарное решение уравнения (45) имеет спектральную плотность

$$f_A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|Q(i\omega)|^2}. \quad (47)$$

Если вектор  $V_t$  будет найден, то значение процесса  $X_t$  находится по формуле (44) как линейная комбинация компонент вектора  $V_t$ .

Ниже излагается метод моделирования процесса  $X_t$ , предложенный Фрэнклином. Согласно уравнению (46), если известно значение процесса в момент  $t$ , то значение через промежуток времени  $\Delta t$  определяется следующим образом:

$$V_{t+\Delta t} = e^{A\Delta t} V_t + r(t), \quad (48)$$

где  $r(t)$  — гауссов случайный вектор,

$$r(t) = \int_0^{\Delta t} e^{A(t-s)A} dW_{t+s}.$$

Этот вектор некоррелирован со случайным вектором

$$V_t = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} dW_\tau.$$

Чтобы смоделировать  $r(t)$ , нужно найти его корреляционную матрицу

$$R_r = M(r r^T) = \int_0^{\Delta t} e^{sA} C e^{sA^T} ds,$$

где  $T$  — знак транспонирования, а

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что  $R_r$  удовлетворяет соотношению

$$e^{A\Delta t} C (e^{A\Delta t})^T - C = A R_r + R_r A^T,$$

откуда можно найти симметрическую матрицу  $R_r$ . Следовательно, можем смоделировать гауссов вектор  $r(t)$  и получить очередное значение  $V_{t+\Delta t}$ , а с ним, по (44), и значение процесса  $X$ .

Чтобы смоделировать начальное значение процесса  $V_0$ , достаточно знать корреляционную матрицу в нуле:

$$K(0, 0) = M(V, V^T).$$

Можно показать, что компоненты этой матрицы находятся по формуле

$$K_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i+j \text{ нечетно,} \\ (-1)^{(i-1)/2} k_{i+j}/2, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $k_i$  можно определить из соотношений

$$(-1)^l \sum_{l/2 < q < (n+1)/2} (-1)^q a_{n-2q+l} = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } l = 0, \dots, n-2, \\ 1/2 & \text{при } l = n-1, \end{cases}$$

и  $a_0 = 1$ . После нахождения матрицы  $K(0,0)$ , гауссов вектор  $V_0$  может быть смоделирован, как описано в гл. II, и по формуле (44) получается  $X_0$ . Последующие значения процесса  $V_t$ , а следовательно, и процесса  $X_t$ , будут получаться по формулам (48) и (44) соответственно.

**7.3. Случайные последовательности АРСС.** Простота структуры случайных последовательностей авторегрессии и скользящего среднего (АРСС) и возможность использования их для аппроксимации широкого класса случайных последовательностей определяют как практический, так и теоретический интерес к ним. Моделирование этих последовательностей позволяет решать самые разнообразные прикладные задачи, связанные с изучением реальных процессов в науке и технике. Случайная последовательность (с.п.) АРСС с  $p$  вещественными параметрами авторегрессии  $\beta_1, \dots, \beta_p$  и  $q$  вещественными параметрами скользящего среднего  $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_q$  описывается уравнением

$$X_t = \sum_{j=1}^p \beta_j X_{t-j} + \sum_{r=0}^q \alpha_r Z_{t-r}, \quad (49)$$

где  $Z = \{Z_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  — последовательность некоррелированных, одинаково распределенных с.в. с  $MZ_t = 0$   $DZ_t = \sigma_z^2$ . Последовательность  $Z$  часто называют *эгдной последовательностью* или шумом. В дальнейшем с.п., задаваемую уравнением (49), будем обозначать АРСС( $p, q$ ). Существует обширная литература по теории с.п. АРСС. Необходимые для целей данного пособия факты теории процессов АРСС можно найти в [9]. В частности, известно, что с.п. АРСС( $p, q$ ) будет стационарной при условии, что все корни характеристического уравнения

$$z^p = \sum_{j=1}^p \beta_j z^{p-j}$$

лежат внутри единичного круга  $|z| < 1$ . Условие стационарности в дальнейшем предполагается выполненным.

Умножая (49) на  $X_{t-k}$  и переходя к математическим ожиданиям, получаем

$$R_X(k) = \sum_{j=1}^p \beta_j R_X(k-j) + \sum_{r=0}^q \alpha_r R_{XZ}(k-r), \quad (50)$$

где  $R_{XZ}(k) = MZ_t X_{t-k}$ . Так как  $X_{t-k}$  зависит только от членов входной последовательности до момента  $t-k$ , то очевидно, что  $R_{XZ}(k) =$

0 при  $k > 0$  и  $R_{XZ}(k) \neq 0$  для  $k \leq 0$ . Значения  $R_{XZ}(k)$ ,  $k = 0, -1, -2, \dots$  находятся последовательно следующим образом. Умножим на  $Z_t$  обе части равенства (49) и перейдем к математическим ожиданиям в полученном равенстве. В результате получаем  $R_{XZ}(0) = \sigma_Z^2$ . Затем обе части (49) умножим на  $Z_{t-1}$  и перейдем к математическим ожиданиям. Получим  $R_{XZ}(-1) = (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_Z^2$ . Продолжая этот процесс, найдем необходимое число корреляционных моментов  $R_{XZ}(k)$ ,  $k \leq 0$ .

Из (50) следует, что

$$R_X(k) = \sum_{j=1}^p \beta_j R_X(k-j) \quad \text{для } k \geq q+1. \quad (51)$$

Для решения разностных уравнений (51) (для больших  $k$ ) в качестве начальных необходимы  $p$  значений, например,  $R_X(q), R_X(q-1), \dots, R_X(q-p+1)$ . Дисперсию  $\sigma_X^2 = R_X(0)$  с.п. АРСС( $p, q$ ) вместе с  $R_X(1), \dots, R_X(p)$  получим, решая систему уравнений, получающихся из (50) при  $k = 0, 1, 2, \dots, p$ . Спектральная плотность с.п. АРСС( $p, q$ ) имеет вид

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma_Z^2}{2\pi} \frac{\left| \sum_{r=0}^q \alpha_r e^{-ir\omega} \text{Bigr} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^p \beta_j e^{-ij\omega} \text{Bigr} \right|^2}, \quad \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (52)$$

При моделировании с.п. АРСС( $p, q$ ) предполагаются известными (заданными) векторы параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , а также предполагается известным распределение величин  $Z_k$  входной последовательности  $Z$ . Кроме того, величины входного случайного шума  $Z_k$  обычно считаются независимыми, а не только некоррелированными.

Для того, чтобы с помощью уравнения (49) можно было сразу начать моделирование стационарной последовательности, необходимы предварительные данные. Действительно, если на первом шаге ( $t = 1$ ) мы хотим получить значение  $X_1$ , являющееся элементом стационарной последовательности  $X$ , мы должны в формулу (49) подставить  $q+1$  значений входной последовательности:  $Z_{-q+1}, \dots, Z_0, Z_1$  и  $p$  предшествующих  $X_1$  значений входной последовательности:  $X_{-p+1}, \dots, X_{-1}, X_0$ . Следовательно, для начала процесса моделирования последовательности  $X$  нужно смоделировать случайный вектор

$$U = (Z_{-q+1}, \dots, Z_1, X_{-p+1}, \dots, X_0). \quad (53)$$

Это практически невозможно, если "шум"  $Z$  является негауссовым, поскольку невозможно найти распределение вектора  $U$ .

Моделирование с.п. АРСС( $p, q$ ) в случае гауссова шума начинается с моделирования вектора (53). Поскольку на уравнение (49) можно смотреть как на линейное преобразование "шума"  $Z$  в выходной процесс  $X$ , то в случае гауссова шума, как известно, линейное преобразование не выводит за пределы гауссовой системы. Таким образом, вектор  $U$  будет

гауссовым с нулевым средним и корреляционной матрицей  $R_U$ , имеющей вид

$$R_U = \begin{pmatrix} R_Z & R_{XZ} \\ R_{XZ}^T & R_X \end{pmatrix},$$

где  $R_Z$  — корреляционная матрица вектора  $Z^{q+1} = (Z_{-q+1}, \dots, Z_1)$  — это диагональная матрица, у которой диагональные элементы одинаковы и равны  $\sigma_Z^2$ ,  $R_X$  — корреляционная матрица вектора  $X^p = (X_{-p+1}, \dots, X_0)$ , элементы которой находятся из уравнений (50) и (51), а матрица  $R_{XZ}$  размерности  $(q+1) \times p$  имеет своими элементами корреляционные моменты  $R_{XZ}(k)$  между координатами векторов  $Z^{q+1}$  и  $X^p$ . Алгоритм вычисления корреляционных моментов  $R_{XZ}(k)$  описан выше. Итак, корреляционную матрицу  $R_U$  можно считать известной. Используя алгоритм моделирования гауссовского вектора (см. гл. II), смоделируем вектор  $U$ . Подставляя его в уравнение (49) при  $(t=1)$ , найдем значение  $X_1$ . На следующем шаге моделируется только очередное значение шума  $Z_2$ ; затем в правую часть (49) при  $(t=2)$  подставляется вектор

$$U_1 = (Z_{-q+2}, \dots, Z_1, Z_2, X_{-p+2}, \dots, X_0, X_1),$$

и в результате имеем значение  $X_2$  выходной последовательности. Процесс продолжается до получения "отрезка" стационарной с.п. АРСС( $p, q$ ) заданной длины.

Моделирование с.п. АРСС( $p, q$ ) в случае неавтоного шума осложняется, как отмечено выше, невозможностью смоделировать "начальный" вектор (53) так, чтобы входящий в него вектор  $X^p$  являлся "предшествующим отрезком" стационарной последовательности  $X$ . В этой ситуации поступают следующим образом. Моделируют независимые значения "шума"  $Z_{-q+1}, \dots, Z_0, Z_1$  в соответствии с заданным распределением, а в качестве вектора  $X^p$  "прошлых значений" с.п.  $X$  берут произвольный фиксированный (например, нулевой) вектор. Полученный таким образом вектор  $U = (Z^{q+1}, X^p)$  подставляется в правую часть (49), чем "запускается" процесс моделирования с.п.  $X$ . Однако моделируемая таким образом последовательность не будет стационарной. В то же время из теории процесса АРСС известно, что если коэффициенты авторегрессии удовлетворяют условию стационарности, то при любых начальных условиях  $X^p$  по прошествии достаточно большого времени выходная последовательность  $X$  становится достаточно близкой к стационарной. Таким образом, если моделируемая последовательность будет в дальнейшем использоваться как стационарная, то эту стационарность следует предварительно проверить, используя какой-либо статистический критерий стационарности. Один из таких критериев описывается в [9]. Если гипотеза стационарности при заданном уровне значимости отвергается, то моделирование следует продолжать до тех пор, пока "отрезок" требуемой длины последовательности  $X$  не будет в согласии с гипотезой стационарности.

1. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний. — М.: Физматгиз, 1961. — 228 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.
3. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. — М.: Мир, 1965. — 451 с.
4. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
5. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы (справочник). — Киев: Наукова думка, 1983. — 367 с.
6. Левин Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. — М.: Радио и связь, 1985. — 312 с.
7. Скороход А.В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. — Киев: Вища школа, 1980. — 344 с.
8. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. — М.: Наука, 1973. — 312 с.
9. Тараскин А.Ф. Статистический анализ временных рядов авторегрессии и скользящего среднего: Учеб. пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1995. — 63 с.
10. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.