

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»  
(Самарский университет)

*Л. М. САВЕЛЬЕВ, Ю. В. СКВОРЦОВ*

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА РАКЕТ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов и направлению подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика

© Самарский университет, 2017

ISBN 978-5-7883-1202-6

САМАРА  
Издательство Самарского университета  
2017

УДК 629.78(075)  
ББК 39.62я7  
С 128

Рецензенты: начальник отдела АО «РКЦ «Прогресс» В. К. Д у п л и х и н;  
канд. техн. наук, доц. В. К. Ш а д р и н

***Савельев, Леонид Макарович***

С 128 **Строительная механика ракет** : учеб. пособие / Л. М. Савельев, Ю. В. Скворцов. – Электрон. текст. и граф. дан. (7 Мб). – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 6 опт. компакт-дисков (CD-ROM). – Систем. требования: ПК Pentium; Adobe Acrobat Reader. – Загл. с титул. экрана.

**ISBN 978-5-7883-1202-6**

Учебное пособие предназначено для подготовки к традиционным занятиям и самостоятельного освоения курса «Строительная механика ракет» студентами специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов, а также направления подготовки бакалавров 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика.

Оно может быть полезно не только при изучении теоретического материала по строительной механике ракет, но и при выполнении курсовых работ и дипломных проектов студентами 3...6 курсов.

Подготовлено на кафедре космического машиностроения.

УДК 629.78(075)  
ББК 39.62я7

Редактор Н.С. Купрянова  
Компьютерная верстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано для тиражирования 11.12.2017.  
Объем издания 7,0 Мб.  
Количество носителей 6 экз.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени академика С.П. КОРОЛЕВА»  
(Самарский университет)  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского университета. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	8
1 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ .....	9
1.1 Расчётная схема ферменной конструкции .....	9
1.2 Необходимые условия геометрической неизменяемости и статической определимости ферм.....	9
1.3 Способы образования ферм .....	12
1.4 Методы исследования геометрической неизменяемости стержневых систем .....	16
1.5 Методы определения усилий в стержнях ферм.....	21
2 МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ .....	27
2.1 Понятие о матрице жёсткости .....	27
2.2 Местная и общая системы координат.....	31
2.3 Матрица жёсткости ферменного элемента.....	35
2.4 Матрица жёсткости балочного элемента в местной системе координат.....	38
2.5 Матрица жёсткости балочного элемента при изгибе его в одной плоскости .....	41
2.6 Матрица жёсткости балочного элемента в общих координатах.....	44
2.7 Учёт внеузловой нагрузки.....	48
2.8 Объединение элементов в стержневую систему и построение её матрицы жёсткости .....	50
2.9 Сокращение матрицы жёсткости стержневой системы и определение узловых перемещений .....	54
3 ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....	58
3.1 Предмет и гипотезы теории упругости.....	58
3.2 Тензор напряжений.....	59
3.3 Напряжения на наклонной площадке. Статические условия на поверхности тела.....	61
3.4 Главные напряжения .....	64
3.5 Дифференциальные уравнения равновесия .....	67
3.6 Формулы Коши. Тензор деформации .....	69
3.7 Главные деформации .....	72
3.8 Объёмная деформация.....	73
3.9 Уравнения совместности деформаций Сен-Венана .....	73

3.10	Закон Гука для изотропного тела .....	76
3.11	Постановка задачи теории упругости .....	78
3.12	Решение задачи теории упругости в перемещениях .....	80
3.13	Решение задачи теории упругости в напряжениях .....	81
4	ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....	83
4.1	Плоская деформация и обобщённое плоское напряжённое состояние .....	83
4.2	Основные соотношения плоской задачи теории упругости .....	86
4.3	Функция напряжений Эри .....	89
4.4	Решение плоской задачи теории упругости в полиномах .....	91
4.5	Изгиб консольной балки силой на конце .....	93
4.6	Основные соотношения плоской задачи теории упругости в полярных координатах .....	98
4.6.1	Дифференциальные уравнения равновесия в полярных координатах .....	98
4.6.2	Геометрические соотношения в полярных координатах .....	100
4.6.3	Закон Гука в полярных координатах .....	102
4.6.4	Уравнение совместности деформаций в полярных координатах .....	103
4.6.5	Функция напряжений в полярных координатах .....	103
4.7	Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах в тригонометрических рядах .....	104
4.8	Осесимметричное напряжённое состояние. Задача Ламе .....	106
4.9	Концентрация напряжений около круглого отверстия в пластине (задача Кирша) .....	110
5	ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....	115
5.1	Работа и потенциал внешних сил .....	115
5.2	Потенциальная энергия деформации .....	119
5.3	Вариационное уравнение Лагранжа .....	121
5.4	Метод Ритца .....	125
5.5	Расчёт балки на изгиб методом Ритца .....	126
5.6	Метод Бубнова-Галёркина .....	131
5.7	Расчёт балки на изгиб методом Бубнова-Галёркина .....	133
5.8	Дополнительная работа и дополнительная энергия деформации .....	136
5.9	Принцип дополнительных виртуальных работ. Вариационный принцип Кастильяно .....	138

6	БАЛОЧНАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЁТА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	142
6.1	Основные допущения .....	142
6.2	Определение нормальных напряжений в тонкостенной конструкции.....	143
6.3	Примеры расчёта нормальных напряжений.....	149
6.4	Касательные напряжения в тонкостенной конструкции с открытым сечением.....	153
6.5	Примеры расчёта касательных напряжений в сечениях с открытым контуром .....	157
6.6	Центр изгиба открытого сечения .....	164
6.7	Примеры расчёта центра изгиба.....	167
6.8	Касательные напряжения в тонкостенной конструкции с однозамкнутым сечением.....	168
6.9	Упругие перемещения тонкостенных конструкций.....	172
6.10	Центр изгиба однозамкнутого сечения.....	176
6.11	Касательные силы в тонкостенной конструкции с многозамкнутым контуром сечения при произвольном нагружении .....	178
6.12	Расчёт касательных сил при простом изгибе и при кручении .....	181
7	БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ.....	184
7.1	Геометрия оболочек вращения .....	184
7.2	Основные уравнения безмоментной теории оболочек вращения при осесимметричном нагружении .....	186
7.3	Определение результирующей внешних сил. Оболочка вращения под действием внутреннего давления.....	189
7.4	Пределы применимости безмоментной теории .....	193
7.5	Примеры расчёта оболочек вращения по безмоментной теории.....	195
8	ИЗГИБ ПЛАСТИН .....	201
8.1	Основные определения.....	201
8.2	Перемещения, деформации и напряжения при изгибе пластины....	202
8.3	Погонные силы и моменты. Дифференциальное уравнение изгиба пластины .....	204
8.4	Граничные условия при изгибе пластин .....	209
8.5	Расчёт напряжений при изгибе пластин .....	211
8.6	Расчёт на изгиб прямоугольной пластины, свободно опертой по всем сторонам.....	213
9	УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН .....	218

9.1	Дифференциальное уравнение устойчивости пластины .....	218
9.2	Устойчивость прямоугольной пластины, свободно опёртой по всем сторонам, при одноосном сжатии .....	222
9.3	Влияние условий закрепления на устойчивость пластины при сжатии .....	226
9.4	Устойчивость пластины при сдвиге и при комбинированном нагружении .....	228
9.5	Расчёт пластины на устойчивость за пределом пропорциональности .....	229
9.6	Закритическое поведение обшивки при сжатии.....	232
9.7	Закритическое поведение пластины при сдвиге.....	233
10	<b>ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ.....</b>	<b>239</b>
10.1	Основные зависимости осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки .....	239
10.2	Дифференциальное уравнение изгиба цилиндрической оболочки.....	243
10.3	Решение дифференциального уравнения изгиба для длинной оболочки.....	244
10.4	Пример расчёта длинной цилиндрической оболочки на изгиб .....	248
10.5	Расчёт короткой цилиндрической оболочки.....	250
11	<b>МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....</b>	<b>254</b>
11.1	Дискретизация тела.....	254
11.2	Перемещения, деформации и напряжения конечного элемента.....	255
11.3	Матрица жёсткости конечного элемента .....	258
11.4	Приведение распределённых внешних нагрузок к эквивалентным узловым силам .....	261
11.5	Объединение конечных элементов и определение узловых перемещений .....	263
11.6	Плоский треугольный конечный элемент .....	265
11.7	Плоский прямоугольный элемент .....	270
11.8	О сходимости метода конечных элементов .....	274
	<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>	<b>277</b>

## ВВЕДЕНИЕ

При выполнении расчётов на прочность элементов конструкций используются так называемые расчётные схемы (или расчётные модели). Они получаются путём пренебрежения второстепенными факторами и выделения главных особенностей, определяющих способность данного элемента воспринимать внешние нагрузки. Простейшими примерами служат расчётные модели в виде стержня или балки, изучаемые в сопротивлении материалов. В строительной механике рассматриваются более сложные схемы: стержневые системы (фермы, рамы), тонкостенные конструкции балочного типа, пластины, оболочки. Для них разработаны прикладные методы расчёта, позволяющие определять характер распределения напряжений и деформаций при заданных условиях нагружения и закрепления и являющиеся, в сущности, развитием тех подходов, которые используются в сопротивлении материалов. Изложению этих методов и посвящено данное учебное пособие.

В пособии даны также сведения об основах теории упругости, соотношения которой составляют фундамент большинства методов расчёта конструктивных элементов. Отдельный раздел посвящён формулировке вариационных принципов теории упругости и основанных на них приближённых методов расчёта. Заключительный раздел посвящён методу конечных элементов, который приобрёл в настоящее время роль основного инструмента для проведения прочностных расчётов разнообразных конструкций.

При написании пособия использованы методические материалы, выполненные на кафедре прочности летательных аппаратов КуАИ–СГАУ. Особые заслуги в этом принадлежат основателю кафедры профессору Х. С. Хазанову, а также доценту И. С. Ахмедьянову, памяти которых посвящается данная работа.

# **1 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ**

## **1.1 Расчётная схема ферменной конструкции**

Всякое сооружение или конструкция должны быть геометрически неизменяемыми. Под геометрической неизменяемостью понимается свойство системы не допускать перемещений одних её точек относительно других без деформации. В геометрически неизменяемой системе невозможны взаимные кинематические перемещения составляющих её конструктивных элементов. Этим сооружения отличаются от механизмов.

*Фермой называется расчётная схема такой стержневой системы, геометрическая неизменяемость которой обеспечивается в предположении о шарнирном соединении стержней в узлах.* Каждый стержень заменяется в расчётной схеме прямолинейным отрезком, представляющим геометрическую ось. Концы стержней, образующие узел, считаются сходящимися в одной точке. Принимается, что стержни между собой соединяются в узлах посредством идеальных шарниров и что силы приложены в узловых точках. При таких предположениях в стержнях будут возникать только осевые силы.

Если оси всех стержней лежат в одной плоскости, ферма называется плоской, в противном случае речь идёт о пространственной ферме. Плоская ферма может воспринимать только нагрузки, лежащие в её плоскости.

Ферма статически определима, если при любой внешней нагрузке усилия в стержнях могут быть найдены с помощью одних только уравнений равновесия без привлечения деформационных соотношений. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением статически определимых ферм.

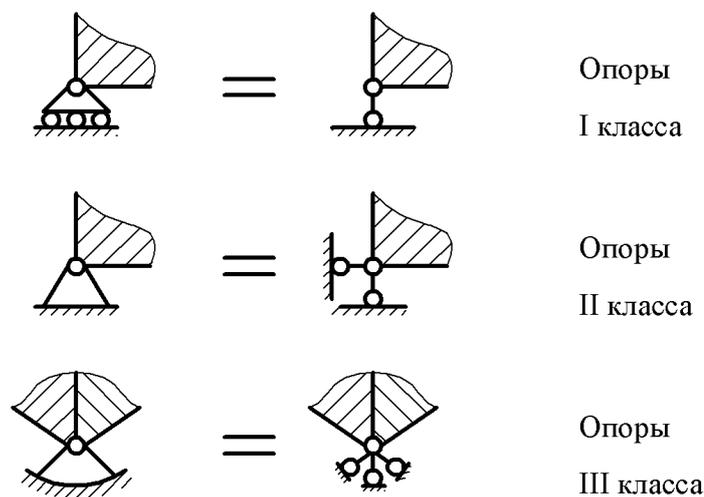
## **1.2 Необходимые условия геометрической неизменяемости и статической определимости ферм**

Числом степеней свободы системы называется количество независимых параметров, определяющих её положение в пространстве. Например, узел в пространстве обладает тремя степенями свободы, узел на плоскости – двумя. Всякое устройство, уменьшающее число степеней свободы, называется связью. Так, стержень, соединяющий два узла, запрещает взаимное кинематическое смещение узлов вдоль своей оси, то есть накладывает одну связь.

Ферму можно рассматривать как совокупность узлов, взаимная неподвижность которых обеспечивается соединением их стержнями. Если система закреплена на опорах, то неподвижность узлов и всей системы в целом обеспечивается помимо стержней ещё и опорными связями.

Опорные устройства разделяются на классы по числу накладываемых связей (рисунок 1.1).

Проще всего представлять опорные связи в виде совокупности опорных стержней, каждый из которых накладывает одну связь, как показано на рисунке 1.1.



**Рисунок 1.1 – Примеры опорных устройств**

Пусть закреплённая стержневая система имеет  $U$  узлов и  $C$  стержней, а также  $C_0$  опорных связей. Наложённые на узлы связи должны устранить  $2U$  степеней свободы в случае закреплённой плоской системы и  $3U$  степеней свободы в случае пространственной. Следовательно, минимально необходимое количество связей должно подчиняться условию

$$C + C_0 = 2U \quad (1.1)$$

– для плоской системы и

$$C + C_0 = 3U \quad (1.2)$$

– для пространственной системы.

Если же стержневая система не закреплена, то она как жёсткое тело обладает тремя степенями свободы в случае плоской системы и шестью степенями свободы – в случае пространственной. Тогда минимально необходимое число связей определится для соответствующих систем равенствами

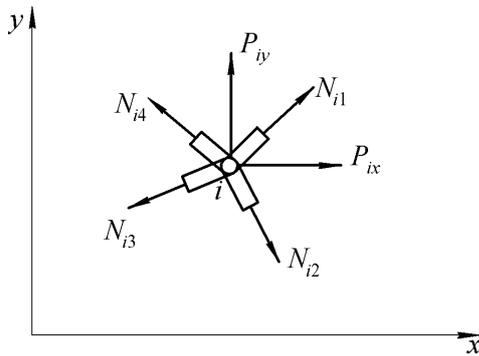
$$C = 2U - 3 \quad (1.3)$$

и

$$C = 3U - 6. \quad (1.4)$$

Мысленно вырежем далее из плоской фермы некоторый узел и рассмотрим его равновесие (рисунок 1.2). Через  $N_{i1}$ ,  $N_{i2}$  и т.д. на рисунке 1.2 обозначены осевые силы в стержнях, сходящихся в этом узле, а через  $P_{ix}$ ,  $P_{iy}$

– компоненты внешней силы, действующей на узел. Можно составить два уравнения равновесия узла, спроектировав все силы на оси  $x$  и  $y$ :



**Рисунок 1.2 – Силы, действующие на плоский узел**

$$\sum x = 0; \quad \sum y = 0.$$

Уравнение моментов  $\sum M = 0$  удовлетворяется тождественно, так как направления действия всех внешних и внутренних сил проходят через одну точку – ось шарнира. Общее число уравнений равновесия, которыми мы располагаем для нахождения осевых сил, будет, таким образом, равно  $2U$ , где  $U$  – количество узлов. Для пространственной фермы это число будет  $3U$ , поскольку для каждого узла могут быть составлены три уравнения равновесия.

С учётом реакций опорных связей общее число неизвестных составит для закреплённой фермы  $C + C_0$ , так что в статически определимой системе должно выполняться условие

$$C + C_0 = 2U \quad (1.5)$$

– для плоской системы или

$$C + C_0 = 3U \quad (1.6)$$

– для пространственной.

Если ферма не закреплена, то внешние нагрузки должны подчиняться трём уравнениям равновесия фермы в целом – в случае плоской и шести уравнениям – в случае пространственной системы. Соответственно уменьшается число независимых уравнений равновесия для определения усилий в стержнях фермы. Необходимое условие статической определимости запишется поэтому для незакреплённой фермы как

$$C = 2U - 3 \quad (1.7)$$

– для плоской и

$$C = 3U - 6 \quad (1.8)$$

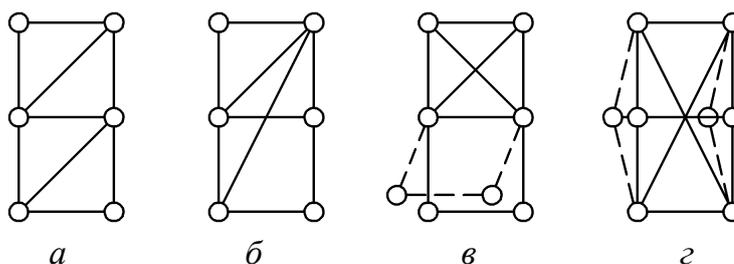
– для пространственной ферм.

Равенства (1.5)...(1.8), устанавливающие необходимые условия статической определимости, совпадают с необходимыми условиями геометрической неизменяемости (1.1)...(1.4). Следует только иметь в виду, что для того, чтобы ферма была статически определимой, равенства (1.5)...(1.8) должны выполняться строго. В случае же геометрической неизменяемости число стержней может быть и больше, чем это определяется равенствами (1.1)...(1.4). Последние устанавливают лишь минимально необходимое коли-

чество стержней, позволяющее обеспечить геометрическую неизменяемость системы.

Можно доказать следующую теорему. *Всякая геометрически неизменяемая стержневая система, имеющая минимально необходимое число стержней, статически определима.* Справедливо и обратное утверждение: *статически определимая стержневая система геометрически неизменяема и имеет минимально необходимое число стержней.* Отсюда следует, что если при минимально необходимом числе стержней система оказывается статически неопределимой, то она геометрически изменяема, то есть некоторые стержни ориентированы неправильно.

На рисунке 1.3 показаны четыре плоские незакрепленные стержневые системы, у каждой из которых  $C = 9$ ,  $U = 6$ . Необходимое условие геометрической неизменяемости  $C = 2U - 3$  выполняется. Геометрическая неизменяемость системы на рисунке 1.3,а очевидна. Геометрически неизменяемой является также система на рисунке 1.3,б. Система на рисунке 1.3,в представляет собой механизм; штриховыми линиями показано здесь возможное положение стержней при кинематическом перемещении. Наконец, в системе на рисунке 1.3,г также возможны кинематические перемещения, хотя и бесконечно малые. Такие системы называются мгновенно геометрически изменяемыми и они считаются недопустимыми наряду с системами типа в. Последние две системы на рисунке 1.3, в отличие от первых двух, являются и статически неопределимыми.



**Рисунок 1.3 – Примеры геометрически неизменяемых (а, б) и геометрически изменяемых (в, г) стержневых систем**

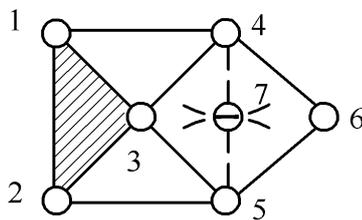
### 1.3 Способы образования ферм

Следующие способы гарантируют получение геометрически неизменяемых систем с помощью минимально необходимого числа связей.

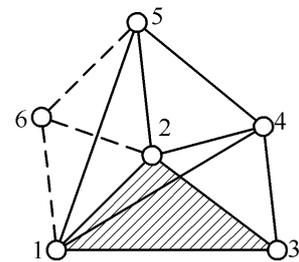
**Способ последовательного присоединения узлов.** К исходному геометрически неизменяемому элементу каждый последующий узел присоединяется с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой, – в случае

плоской фермы и с помощью трёх стержней, не лежащих в одной плоскости, – в случае пространственной.

На рисунке 1.4 данный способ показан на примере плоской фермы. К исходному элементу 1-2-3, который на рисунке заштрихован и геометрическая неизменяемость которого очевидна, последовательно присоединены узлы 4, 5 и 6. Относительная неподвижность этих узлов обеспечена. Узел 7 присоединён двумя стержнями, лежащими на одной прямой и не препятствующими бесконечно малым его перемещениям в направлении, перпендикулярном к этим стержням. Следовательно, указанное на рисунке присоединение узла 7 недопустимо.



**Рисунок 1.4 – Последовательное присоединение узлов для плоской фермы**



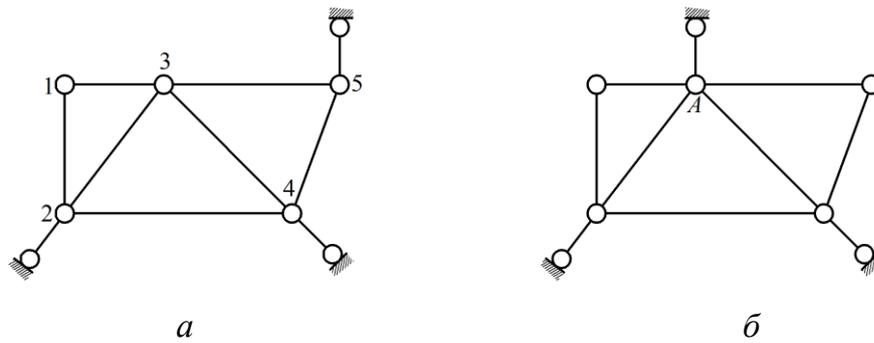
**Рисунок 1.5 – Последовательное присоединение узлов для пространственной фермы**

Другой пример, относящийся к пространственной ферме, представлен на рисунке 1.5. Здесь к исходному элементу 1-2-3 последовательно присоединены узлы 4 и 5. Показанное на рисунке присоединение узла 6 недопустимо, так как три стержня, осуществляющие его прикрепление, лежат в одной плоскости, и узел 6 может совершать бесконечно малые кинематические перемещения перпендикулярно этой плоскости.

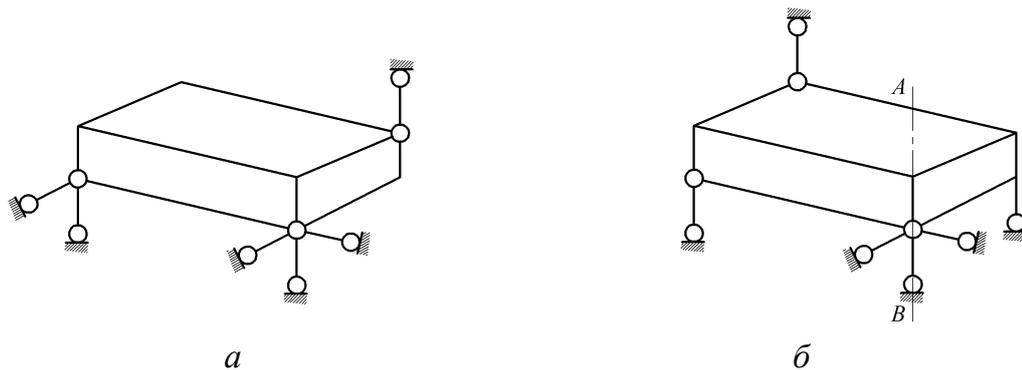
Фермы, которые могут быть образованы последовательным присоединением узлов, называются простыми.

В процессе образования плоская ферма может быть закреплена неподвижно с помощью трёх связей, направления которых не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу (рисунок 1.6,а). В примере на рисунке 1.6,б точка *A* является мгновенным центром вращения фермы относительно основания.

Пространственная ферма может быть закреплена неподвижно с помощью шести связей. Их направления не должны пересекаться на одной прямой в конечной или бесконечно удалённой точке (рисунок 1.7,а). В противном случае эта прямая будет мгновенной осью вращения (прямая *AB* на рисунке 1.7,б).

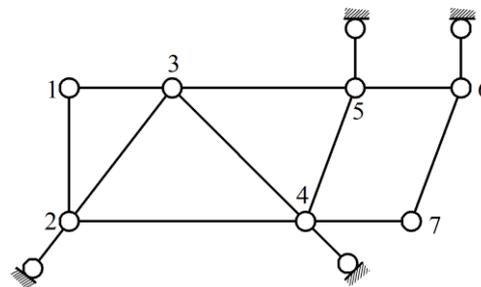


**Рисунок 1.6 – Закрепление плоской фермы:**  
*a* – правильное закрепление; *б* – неправильное закрепление



**Рисунок 1.7 – Закрепление пространственной фермы:**  
*a* – правильное закрепление; *б* – неправильное закрепление

После закрепления процесс последовательного присоединения узлов может быть продолжен, причём для присоединения узлов могут быть использованы в дальнейшем новые опорные стержни. На рисунке 1.8 показана ферма, изображённая выше на рисунке 1.6,*a*, к которой дополнительно присоединены узлы 6 и 7.

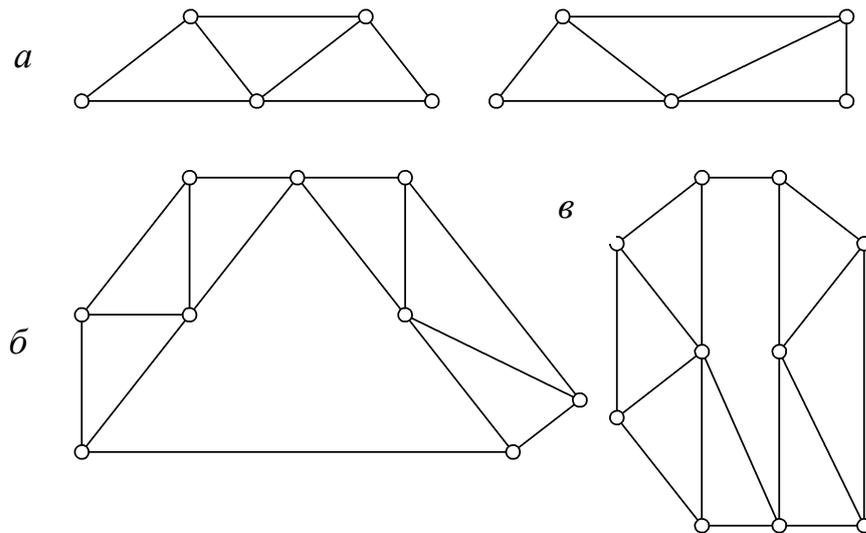


**Рисунок 1.8 – Присоединение узлов 6 и 7 к закреплённой ферме**

**Способ последовательного соединения ферм.** Две или несколько простых незакреплённых ферм соединяются между собой так, чтобы была обеспечена их взаимная неподвижность.

На рисунке 1.9,*a* показаны две простые плоские фермы. Каждая из них, будучи геометрически неизменяемой, имеет три степени свободы в своей

плоскости. Соединив их посредством трёх связей, получим более сложную систему. В варианте, показанном на рисунке 1.9,б, фермы соединены в узле, что означает наложение двух связей, и ещё одним стержнем. В другом варианте (рисунок 1.9,в) соединение осуществлено тремя стержнями. При этом соединяющие стержни не должны пересекаться в одной точке или быть параллельными. В представленном примере оба варианта приводят к такой ферме, которую нельзя получить методом последовательного присоединения узлов.



**Рисунок 1.9 – Соединение двух плоских ферм**

Чтобы обеспечить взаимную неподвижность двух *пространственных* ферм, нужно устранить шесть степеней свободы, наложив такое же число правильно ориентированных связей. Соединение можно выполнить с помощью пространственного шарнира, накладывающего три связи, и трёх стержней, направления которых не пересекаются в одной точке и не параллельны. Можно соединить фермы шестью стержнями, направления которых не пересекаются на одной прямой (рисунок 1.10). В частности, оси стержней не должны лежать в двух параллельных плоскостях.

**Способ замены стержней.** В исходной геометрически неизменяемой системе удаляется один из стержней. Взамен него устанавливается другой с таким расчётом, чтобы устранить появившуюся степень свободы.

На рисунке 1.11,а показана плоская ферма, которая может быть образована последовательным присоединением узлов к исходному элементу 2-4-5. Если удалить стержень 4-5, то получим геометрически изменяемую систему. Замечая, что взаимное сближение или удаление узлов 4 и 5 сопровождается взаимным смещением узлов 6 и 7, устраним эту подвижность путём поста-

новки стержня 6-7. В итоге получим изображённую на рисунке 1.11,б геометрически неизменяемую систему. Нетрудно видеть, что она не может быть образована первыми двумя способами.

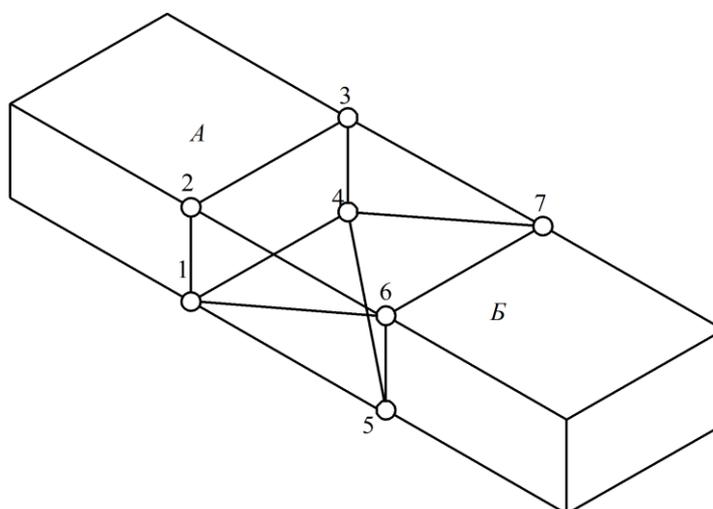


Рисунок 1.10 – Соединение двух пространственных ферм

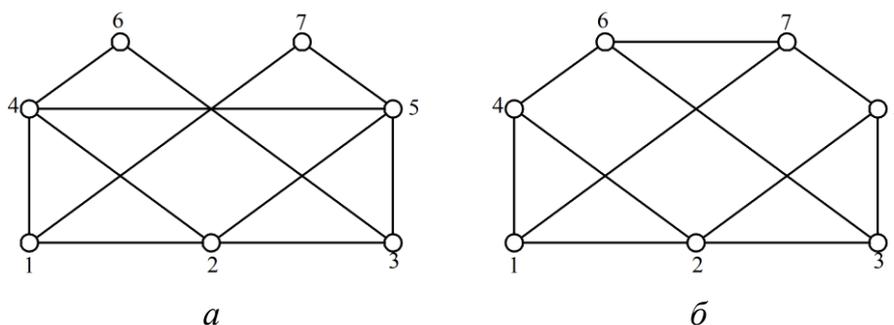


Рисунок 1.11 – Образование фермы способом замены стержней

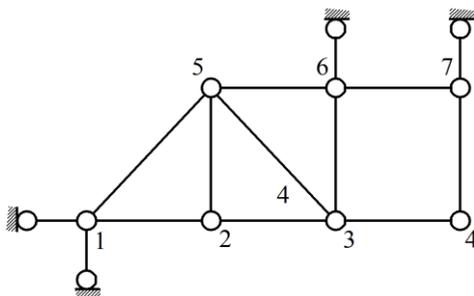
#### 1.4 Методы исследования геометрической неизменяемости стержневых систем

Анализ геометрической неизменяемости стержневой системы должен всегда начинаться с проверки выполнения необходимого условия в соответствии с одним из равенств (1.1)...(1.4). Система, однако, может оказаться геометрически изменяемой и в случае выполнения этого условия, если какие-либо стержни поставлены неправильно. Далее рассмотрено несколько методов, позволяющих убедиться в том, что система действительно геометрически неизменяема.

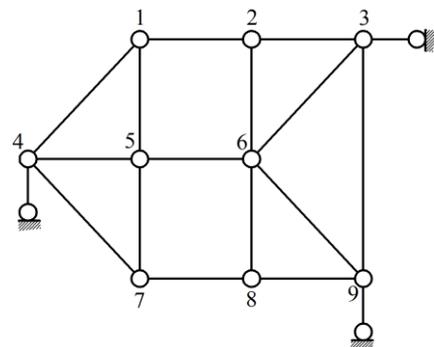
**Метод построения.** Этот метод, пригодный для простых систем, заключается в воспроизведении процесса образования системы. Если при этом не будет обнаружено неправильно присоединённых узлов или частей, то система геометрически неизменяема.

**Метод разрушения.** Данный метод по существу эквивалентен методу построения, но здесь анализ геометрической неизменяемости выполняется в обратном порядке. Последовательно отбрасываются узлы или части стержневой системы, прикрепленные к остающейся структуре посредством минимально необходимого числа связей. Если удастся разрушить таким образом всю систему, не встретив при этом неправильно установленных связей, то система геометрически неизменяема. В процессе «разрушения» можно снимать систему с опор, если число опорных связей минимально необходимо и они правильно ориентированы. В практическом применении метод разрушения обычно более удобен, чем метод построения.

Проиллюстрируем метод разрушения двумя примерами. Стержневая система, показанная на рисунке 1.12, имеет 7 узлов, 10 стержней и 4 опорных стержня; необходимое условие  $C + C_0 = 2U$  выполняется. Убедимся, что все связи расположены должным образом. Отбросим вначале узел 4, который присоединён двумя стержнями, не лежащими на одной прямой. Далее можно отбросить узел 7, после чего получим систему, закреплённую посредством трёх опорных стержней, не пересекающихся в одной точке и не параллельных друг другу. Снимем систему с опор, а затем продолжим отбрасывание узлов, пока геометрическая неизменяемость оставшегося фрагмента не станет очевидной.



**Рисунок 1.12 – Геометрически неизменяемая система**



**Рисунок 1.13 – Геометрически изменяемая система**

Для системы, изображённой на рисунке 1.13, имеем  $U = 9$ ,  $C = 15$ ,  $C_0 = 3$ , и необходимое условие геометрической неизменяемости также выполняется. Освобождаем систему от опорных связей, учитывая, что число этих связей минимально и что поставлены они правильно. Следующим шагом является попытка разделения двух частей системы, соединённых между собой тремя стержнями 1-2, 5-6 и 7-8. Поскольку эти стержни параллельны друг другу, заключаем, что соединение двух частей осуществлено непра-

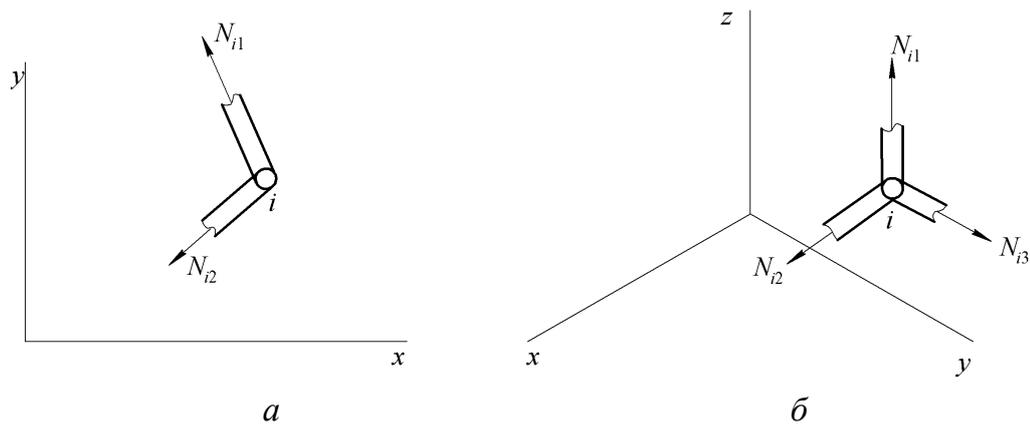
вильно. Это означает, что данная стержневая система геометрически изменяема.

**Метод нулевых нагрузок.** Метод основан на анализе статической определимости системы. Если система статически определима, то она геометрически неизменяема. Исследование статической определимости выполняется исходя из следующих соображений. В статически определимой системе осевые силы в стержнях однозначно определяются при любых внешних нагрузках из уравнений равновесия. В частности, при отсутствии внешней нагрузки все осевые силы должны быть нулевыми. Если удастся доказать, пользуясь при этом одними только уравнениями равновесия, что осевые силы во всех стержнях ненагруженной системы равны нулю, то это будет означать, что система статически определима и, следовательно, геометрически неизменяема.

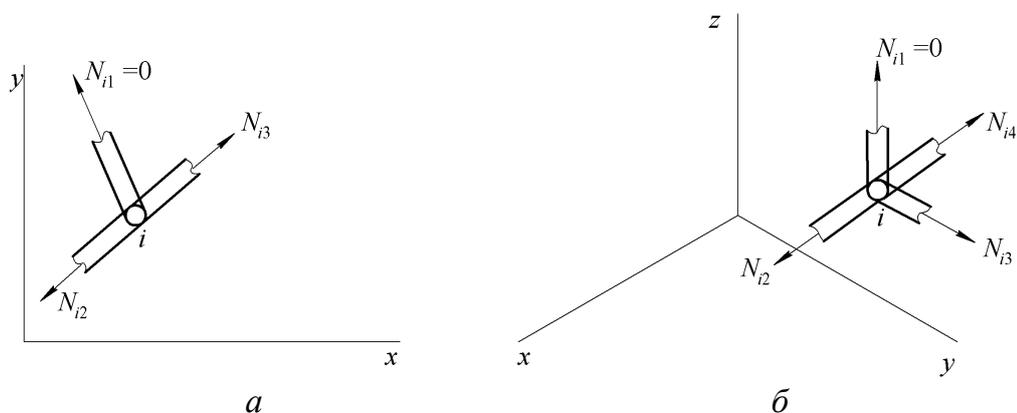
При практическом применении метода нулевых нагрузок могут быть использованы любые уравнения равновесия как для отдельных узлов, так и для тех или иных частей или для всей системы в целом. Хорошим подспорьем могут здесь оказаться следующие две леммы.

*Лемма 1.* Если к плоскому узлу, содержащему два стержня, которые не лежат на одной прямой (рисунок 1.14,а), или к пространственному узлу, содержащему три стержня, которые не лежат в одной плоскости (рисунок 1.14,б), не приложено внешней нагрузки, то усилия в стержнях равны нулю. Справедливость данного утверждения очевидна, поскольку для определения усилий мы располагаем необходимым числом независимых уравнений равновесия. Если условие леммы относительно расположения стержней не выполняется, то одно из уравнений равновесия (равенство нулю суммы сил в проекции на ось, перпендикулярную направлению стержней, – в случае плоской системы – или на ось, перпендикулярную плоскости стержней, – в случае пространственной системы) удовлетворяется тождественно независимо от значений сил в стержнях. В этом случае, конечно, нельзя утверждать, что силы будут равны нулю.

*Лемма 2.* Если к плоскому узлу, содержащему три стержня, из которых два лежат на одной прямой (рисунок 1.15,а), или к пространственному узлу, содержащему  $n$  стержней, из которых  $n - 1$  лежат в одной плоскости (рисунок 1.15,б), не приложено внешней нагрузки, то усилие в отдельно стоящем стержне равно нулю.



**Рисунок 1.14 – К расчёту усилий в стержнях ненагруженной системы**



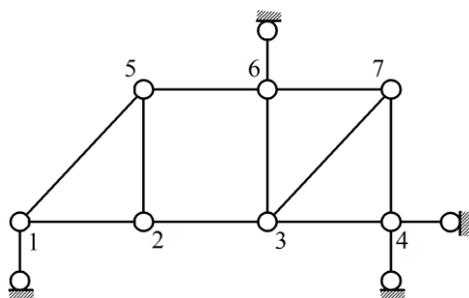
**Рисунок 1.15 – Усилия в отдельно стоящих стержнях**

Чтобы доказать лемму, достаточно воспользоваться условием равновесия узла в проекции на ось, перпендикулярную к тем стержням, которые лежат на одной прямой, – в случае плоской системы, – или располагаются в одной плоскости – в случае пространственной системы. Заметим попутно, что это же уравнение равновесия позволяет найти усилие в отдельно стоящем стержне в том случае, когда на узел действует внешняя нагрузка.

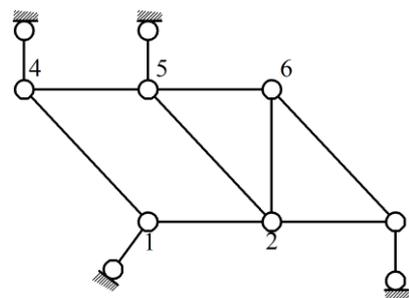
В качестве примера рассмотрим стержневую систему, показанную на рисунке 1.16. Для неё  $C = 10$ ,  $C_0 = 4$ ,  $U = 7$ , так что необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Убедиться в геометрической неизменяемости системы методом разрушения нельзя. Обратимся к методу нулевых нагрузок.

В узле 2 сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, а третий – стержень 2-5 – отдельно стоящий. Согласно лемме 2 усилие в нём равно нулю. Переходим далее к узлу 5. Учитывая, что в стержне 5-2 усилие отсутствует, для узла 5 можно воспользоваться леммой 1, на основании которой усилия в стержнях 5-1 и 5-6 равны нулю. Рассматривая далее равновесие узла 1, а затем 2, устанавливаем с помощью леммы 1, что усилия в стержнях

1-2, 2-3, а также в опорном стержне 1-0 – нулевые. Следующий шаг заключается в рассмотрении равновесия всей системы в целом под действием реакций опор. Из условия равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки 4 вытекает, что реакция опоры в узле 6 равна нулю. Завершается исследование последовательным рассмотрением равновесия узлов 6, 7, 3 и 4 с применением леммы 1. Это приводит к заключению, что все стержни имеют нулевые усилия. Следовательно, данная система геометрически неизменяема.



**Рисунок 1.16 – К методу нулевых нагрузок**



**Рисунок 1.17 – Другой пример использования метода нулевых нагрузок**

Подчеркнём, что в методе нулевых нагрузок мы оперируем только с условиями равновесия узлов, частей или всей системы в целом. Никакие отбрасывания узлов, стержней или иных фрагментов системы в духе метода разрушения здесь недопустимы. Смешение двух методов является распространённой ошибкой при исследовании геометрической неизменяемости.

Другой пример представлен на рисунке 1.17. Для данной системы  $C = 8$ ,  $C_0 = 4$ ,  $U = 6$ , то есть необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Переходя к исследованию геометрической неизменяемости, заметим, что из четырёх опорных стержней три ориентированы параллельно друг другу. Четвёртый (опорный стержень 1-0) можно назвать отдельно стоящим опорным стержнем. Условие равновесия всей системы в целом под действием опорных реакций в проекции на горизонтальную ось показывает, что усилие в отдельно стоящей опоре равно нулю. Последовательно переходя далее к узлам 1 и 4 и применяя лемму 1, устанавливаем, что усилия в стержнях 1-2, 1-4 и 1-5, а также в опорном стержне 4-0, равны нулю. Затем следует вернуться к рассмотрению всей системы в целом и составить, скажем, условие равновесия моментов относительно точки 3. Отсюда получим, что сила в опорном стержне 5-0 равна нулю. Наконец, последовательное приложение леммы 1 к узлам 5, 6, 2 и 3 показывает, что и в остальных стержнях усилия равны нулю. Система геометрически неизменяема.

Если не удастся доказать, что при отсутствии внешних нагрузок усилия во всех стержнях равны нулю, то вопрос о геометрической неизменяемости системы остаётся открытым. Наиболее универсальным средством исследования геометрической неизменяемости является метод замены связей, который будет рассмотрен позже.

## 1.5 Методы определения усилий в стержнях ферм

**Метод вырезания узлов.** Если вырезать мысленно каждый из узлов статически определимой фермы и составить для них уравнения равновесия под действием внешних нагрузок и осевых сил в стержнях, то получится система уравнений, из которой можно всегда найти искомые силы. Однако порядок системы уравнений может оказаться слишком высоким. Целесообразно составлять уравнения равновесия таким образом, чтобы можно было находить осевые силы поочерёдно, шаг за шагом. Такая последовательность расчёта возможна для ферм, геометрическая неизменяемость которых может быть установлена методом разрушения или методом нулевых нагрузок. Собственно говоря, в методе нулевых нагрузок как раз и осуществляется определение усилий в стержнях, но только для ненагруженной системы. Сохраняя тот же порядок расчёта, что и при исследовании геометрической неизменяемости, можно найти усилия во всех стержнях. При этом термин «вырезание узлов» должен трактоваться расширительно, поскольку помимо собственно узлов в рассмотрение могут попасть части фермы или вся ферма целиком.

На рисунке 1.18 показана ферма ( $C = 9$ ,  $C_0 = 3$ ,  $U = 6$ ), в геометрической неизменяемости которой можно убедиться в соответствии с методом разрушения, последовательно отбрасывая узлы 1-2-3-4-5-6. В таком же порядке выполним расчёт усилий в стержнях. Результаты вычислений представлены на рисунке 1.18. Стрелками указано действие стержней на узлы: для растянутых стержней стрелки направлены от узла, для сжатых – к узлу.

Другой пример расчёта относится к показанной на рисунке 1.19 ферме, геометрическая неизменяемость которой доказывается методом нулевых нагрузок (см. выше, рисунок 1.17).

Расчёт начинаем с определения реакции «отдельно стоящей» опоры 1-0. Из условия равновесия всей фермы в горизонтальном направлении находим её значение  $N_{1-0} = -P\sqrt{2}$ . Далее вычисляем силы в стержнях 1-4 и 1-2 из условий равновесия узла 1, а затем – в стержнях 4-5 и 4-0. После этого находим реакцию опорного стержня 5-0 из условия равенства нулю моментов всех сил, действующих на фрагмент системы с узлами 2-5-6-3, относительно

точки 3, что даёт  $N_{5-0} = P$ . Остаётся рассмотреть равновесие узлов 5-2-6-3 – чем завершается решение. Результаты вычислений представлены на рисунке 1.19.

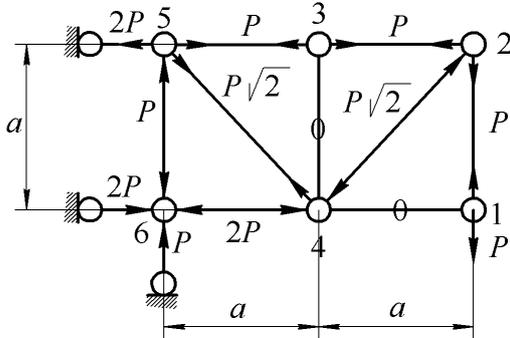


Рисунок 1.18 – Метод вырезания узлов

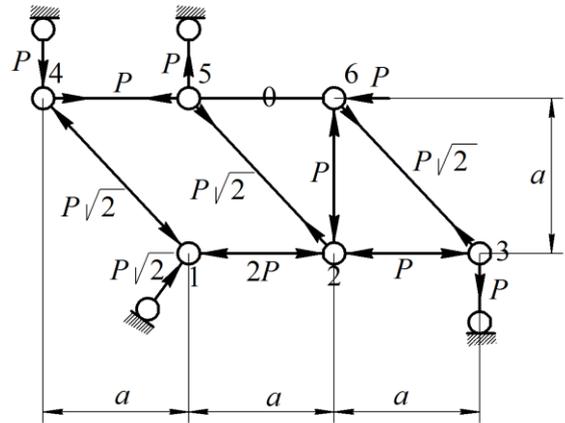


Рисунок 1.19 – Другой пример метода вырезания узлов

**Метод замены связей.** Метод состоит в следующем. В исходной стержневой системе удалим один из стержней – скажем, соединяющий узлы  $a$  и  $b$ , приложив вместо него к узлам  $a$  и  $b$  неизвестные пока силы  $N_{ab}$ . Местоположение удаляемого стержня выбирается таким образом, чтобы остающаяся система поддавалась разборке в духе метода разрушения. Поскольку была удалена связь, в процессе разрушения будет обнаружена нехватка стержня. Поставив в этом месте заменяющий стержень  $mn$ , получим взамен исходной новую систему, которая заведомо геометрически неизменяема и имеет простую структуру. Усилия в стержнях двух систем будут совпадать, если осевая сила в заменяющем стержне, которую мы обозначим через  $T_{mn}$ , будет отсутствовать:

$$T_{mn} = T_{mn}^0 + \bar{T}_{mn} N_{ab} = 0. \quad (1.9)$$

Здесь  $T_{mn}^0$  – усилие в заменяющем стержне от действия внешних нагрузок;  $\bar{T}_{mn}$  – усилие в нём от действия единичных сил, приложенных к узлам  $a$  и  $b$  вместо удалённого стержня. Величина  $N_{ab}$  выступает в равенстве (1.9) как множитель, который показывает, во сколько раз усилие в заменённом стержне больше единицы. На основании равенства (1.9) получаем

$$N_{ab} = -\frac{T_{mn}^0}{\bar{T}_{mn}}. \quad (1.10)$$

Как следует из этого выражения, для вычисления  $N_{ab}$  необходимо произвести два расчёта новой системы – от действия внешних сил и от действия единичных сил, приложенных к узлам  $a$  и  $b$ . Целью этих расчётов является определение силы в заменяющем стержне – в первом случае  $T_{mn}^0$ , а во втором –  $\bar{T}_{mn}$ . Далее по формуле (1.10) находим искомую величину.

Для вычисления осевых усилий в других стержнях можно использовать результаты, полученные в ходе отыскания  $T_{mn}^0$  и  $\bar{T}_{mn}$ . Усилие в стержне, соединяющем какие-либо два узла  $r$  и  $s$ , определится по формуле

$$N_{rs} = N_{rs}^0 + \bar{N}_{rs} N_{ab}, \quad (1.11)$$

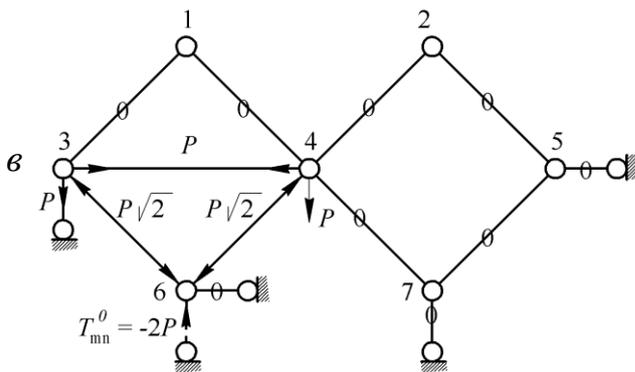
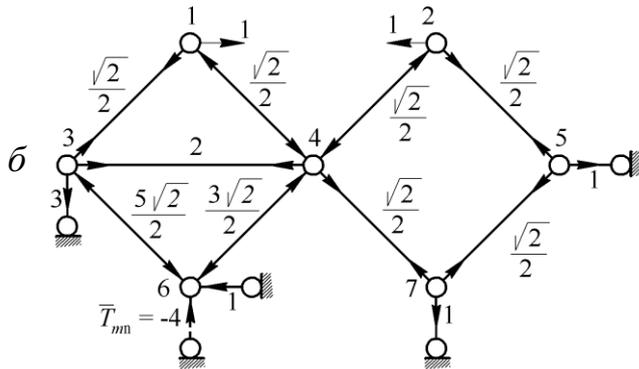
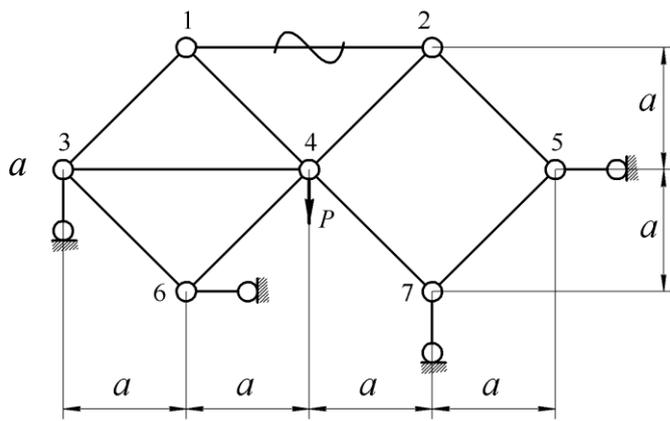
где  $N_{rs}^0$  и  $\bar{N}_{rs}$  – значения осевой силы в стержне  $rs$ , найденные в заменяющей системе от действия внешней нагрузки и от действия единичных сил соответственно.

Пусть, например, требуется найти усилия в стержнях 1-2 и 3-4 системы, показанной на рисунке 1.20,а, для которой  $C = 10$ ,  $C_0 = 4$ ,  $U = 7$ . Решить задачу с помощью метода вырезания узлов здесь не удаётся, поэтому воспользуемся методом замены связей. В качестве заменяемого желательно брать стержень, в котором требуется определить усилие, ибо его значение даётся непосредственно формулой (1.10). Из двух интересующих нас стержней подходящим является стержень 1-2, поскольку после его удаления можно осуществить разрушение системы путём последовательного снятия узлов 1-2-5-7-4-3. После этих отбрасываний остаётся узел 6 с одним опорным стержнем 6-0. Для получения геометрически неизменяемой системы установим заменяющий стержень в виде вертикального опорного стержня в узле 6; на рисунках 1.20,б и в он показан штриховой линией.

На рисунке 1.20,б представлены результаты расчёта силы  $\bar{T}_{mn}$  в единичной системе, в которой в узлах 1 и 2 приложены противоположно направленные силы, равные единице. Расчёт производится рассмотрением равновесия узлов в том порядке, в котором до этого производилось разрушение системы.

Расчёт силы  $T_{mn}^0$  отображён на рисунке 1.20,в. В соответствии с формулой (1.10) устанавливаем теперь значение силы в заменённом стержне:

$$N_{1-2} = -\frac{T_{mn}^0}{\bar{T}_{mn}} = -\frac{(-2P)}{(-4)} = -\frac{P}{2}.$$



**Рисунок 1.20 – Расчёт сил методом замены связей**

стержне в единичной системе

$$\bar{T}_{mn} \neq 0. \quad (1.12)$$

В противном случае величина  $N_{ab}$  будет либо бесконечно большой (когда  $T_{mn}^0 \neq 0$ ), либо неопределённой (если  $T_{mn}^0 = 0$ ). И тот, и другой варианты соответствуют статически неопределимой и, следовательно, геометрически изменяемой системе.

Отсюда вытекает способ исследования геометрической неизменяемости по методу замены связей. В соответствии с ним следует преобразовать исходную стержневую систему в геометрически неизменяемую с простой

Усилие в стержне 3-4 согласно (1.11) имеет в исходной системе значение

$$\begin{aligned} N_{3-4} &= N_{3-4}^0 + \bar{N}_{3-4} N_{1-2} = \\ &= P + 2 \left( -\frac{P}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

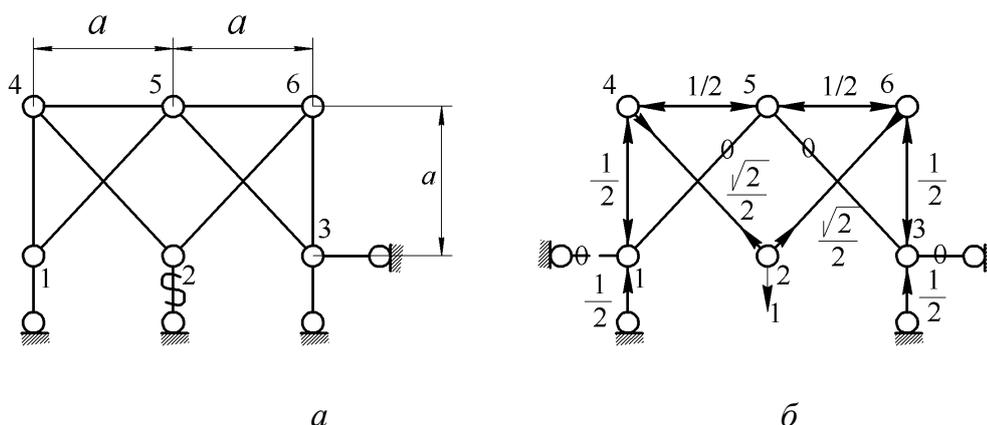
Приступая к данному расчёту, мы оставили в стороне вопрос о статической определимости или геометрической неизменяемости системы, негласно подразумевая, что система обладает этими свойствами. На самом же деле выполняется лишь необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости

$$C + C_0 = 2U.$$

Однако решение по методу замены связей даёт попутно ответ и на этот вопрос. Действительно, в статически определимой системе усилие в каждом стержне должно иметь при любой внешней нагрузке вполне определённое конечное значение. Как видно из формулы (1.10), это требование выполняется, если усилие в заменяющем

структурой путём подходящей замены одного из стержней. Взамен уstra-  
нённого стержня прикладываются единичные силы и вычисляется сила в за-  
меняющем стержне. Если окажется, что эта сила отлична от нуля, исходная  
система статически определима и геометрически неизменяема. В противном  
случае она геометрически изменяема.

Рассмотрим например, стержневую систему, для которой  $C = 8$ ,  $C_0 = 4$ ,  
 $U = 6$  (рисунок 1.21,а). Её геометрическую неизменяемость нельзя исследо-  
вать ни методом разрушения, ни методом нулевых нагрузок. Обратимся по-  
этому к методу замены связей, устранив опорный стержень в узле 2 (он по-  
мечен волнистой линией). Последовательно снимая узлы 2-4-6-5, обнаружи-  
ваем отсутствие необходимой связи в узле 1, где и устанавливаем заменяю-  
щий опорный стержень (показан на рисунке 1.21,б штриховой линией). Далее  
прикладываем единичную силу в узле 2 в направлении уstra-  
нённого стержня и выполняем расчёт (рисунок 1.21,б), из которого следует, что усилие в заме-  
няющем стержне равно нулю. Вывод: предложенная к анализу стержневая  
система геометрически изменяема.



**Рисунок 1.21 – Исследование геометрической неизменяемости  
методом замены связей**

В некоторых случаях может оказаться недостаточно одной замены для  
получения преобразованной геометрически неизменяемой системы простой  
структуры. Тогда можно осуществить замену двух стержней. Предположим,  
что удалены стержни  $ab$  и  $cd$ , а вместо них установлены заменяющие  
стержни  $mn$  и  $kl$ . Обозначим через  $T_{mn}^0$  и  $T_{kl}^0$  усилия в заменяющих стержнях  
от внешней нагрузки, через  $\bar{T}_{mn}^{ab}$  и  $\bar{T}_{kl}^{ab}$  – усилия в них от единичных сил, при-  
ложенных в преобразованной системе к узлам  $a$  и  $b$ , а через  $\bar{T}_{mn}^{cd}$  и  $\bar{T}_{kl}^{cd}$  – от  
единичных сил, приложенных к узлам  $c$  и  $d$ . Приравнявая нулю суммарные

силы в заменяющих стержнях, приходим к системе уравнений относительно  $N_{ab}$  и  $N_{cd}$ :

$$T_{mn}^0 + \bar{T}_{mn}^{ab} N_{ab} + \bar{T}_{mn}^{cd} N_{cd} = 0;$$

$$T_{kl}^0 + \bar{T}_{kl}^{ab} N_{ab} + \bar{T}_{kl}^{cd} N_{cd} = 0.$$

Полученная система имеет единственное решение, если её определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{T}_{mn}^{ab} & \bar{T}_{mn}^{cd} \\ \bar{T}_{kl}^{ab} & \bar{T}_{kl}^{cd} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Отсюда следует, что выполнение условия

$$\Delta \neq 0$$

означает, что система статически определима и геометрически неизменяема.

Если же

$$\Delta = 0,$$

то система статически неопределима и, следовательно, геометрически изменяема.

## 2 МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 2.1 Понятие о матрице жёсткости

Рассмотрим консольную балку, нагруженную силой на свободном конце (рисунок 2.1). Вертикальное перемещение точки приложения силы, как известно, равно

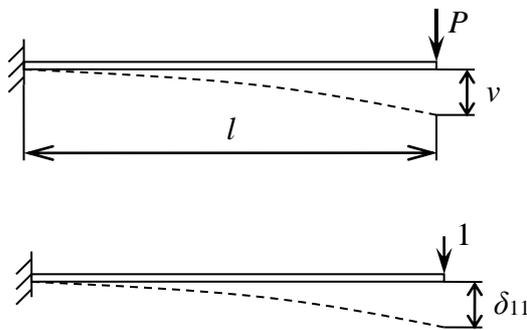


Рисунок 2.1 – Консольная балка с силой на конце

$$v = \delta_{11}P,$$

где  $\delta_{11} = l^3 / (3EI)$  – коэффициент податливости (численно равный перемещению от единичной силы);  $E$  – модуль упругости;  $I$  – момент инерции поперечного сечения балки.

Если перемещение  $v$  задано, то из этой формулы можно найти

силу, необходимую для создания такого перемещения:

$$P = \frac{1}{\delta_{11}} v = k v,$$

где

$$k = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{3EI}{l^3}.$$

Величина  $k$  называется *коэффициентом жёсткости консольной балки*. Если положить  $v = 1$ , то сила  $P$  будет равна  $k$ . Отсюда вытекает физический смысл коэффициента жёсткости:  $k$  есть сила, которую необходимо приложить на конце балки, чтобы её прогиб равнялся единице.

Пусть, далее, к балке приложены две силы, как показано на рисунке 2.2. Используя известные методы сопротивления материалов, можно найти перемещения  $v_1$  и  $v_2$  в направлении этих сил:

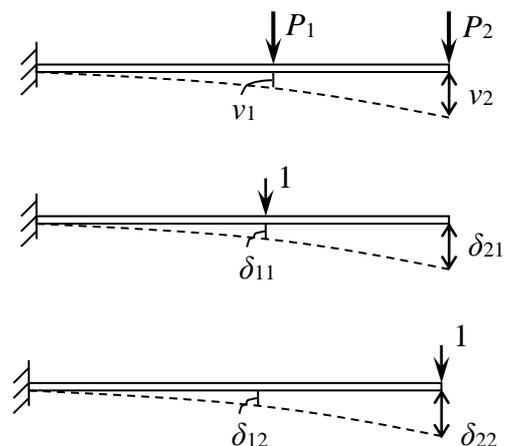


Рисунок 2.2 – Консольная балка под действием двух сил

$$v_1 = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2;$$

$$v_2 = \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2,$$

где коэффициенты  $\delta_{ij}$ , называемые коэффициентами влияния, зависят от геометрических размеров балки и модуля упругости  $E$ . Запишем эти соотношения в матричной форме:

$$[v] = [\Delta][P],$$

где

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \quad [P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}; \quad [\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[\Delta]$  называется *матрицей податливости*.

Если принять, что перемещения  $[v]$  заданы, то из этого выражения можно найти силы  $[P]$ , вызывающие данные перемещения:

$$[P] = [\Delta]^{-1}[v] = [K][v].$$

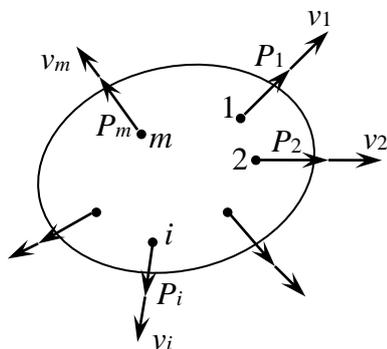
Матрица  $[K] = [\Delta]^{-1}$  имеет следующую структуру:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

и называется *матрицей жёсткости рассматриваемой системы*.

Согласно теореме Максвелла о взаимности перемещений имеем  $\delta_{12} = \delta_{21}$ , то есть матрица  $[\Delta]$  является симметричной. Обратная к ней матрица  $[K]$  будет также симметричной (то есть  $K_{12} = K_{21}$ ).

Теперь рассмотрим общий случай, когда на произвольное упругое тело действует система  $m$  сил (рисунок 2.3), которую представим матрицей



$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}.$$

**Рисунок 2.3 – Произвольная система сосредоточенных сил**

Пусть перемещения точек приложения сил  $[P]$  (в дальнейшем эти точки будем называть узлами) в направлении этих сил образуют матрицу

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Предположим, что перемещения  $[v]$  задаются, а силы, необходимые для создания этих перемещений, определяются соотношением:

$$[P] = [K][v]. \quad (2.1)$$

Матрица  $[K]$ , связывающая силы  $[P]$  с соответствующими им перемещениями  $[v]$ , называется *матрицей жёсткости рассматриваемого тела*.

Представим это соотношение в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Если положить перемещение  $v_j = 1$ , а все остальные перемещения равными нулю, то силы окажутся равными

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1j} \\ K_{2j} \\ \vdots \\ K_{mj} \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекает физический смысл коэффициентов жёсткости  $K_{ij}$ . Эти коэффициенты представляют собой *силы, которые должны быть приложены в узлах, чтобы в узле  $j$  перемещение равнялось единице, а все остальные перемещения равнялись нулю*. Иначе говоря, если закрепить тело во всех узлах, кроме узла  $j$ , и приложить в узле  $j$  такую силу, чтобы  $v_j = 1$ , то силы  $P_i$  в остальных узлах (то есть реакции на тело со стороны наложенных связей) будут равны  $K_{ij}$ , сама же приложенная сила  $P_j$  будет численно равна  $K_{jj}$ .

Применяя теорему Бетти о взаимности работ, можно показать, что матрица жёсткости всегда симметрична.

Если силы  $P_i$  имеют произвольные направления, то удобно разложить их по координатным осям  $x, y, z$  и ввести для каждого узла  $i$  матрицу сил

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \end{bmatrix}.$$

Тогда  $[v_i]$  будет также матрицей-столбцом, элементы которой суть перемещения узла  $i$  по координатным осям:

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix}.$$

В этом случае связь между силами и перемещениями можно по-прежнему определить соотношением (2.1), только элементами  $[K_{ij}]$  матрицы  $[K]$ , представляющей уже блочную матрицу, будут квадратные подматрицы размера  $3 \times 3$ .

Для практических вычислений удобнее иногда пользоваться сквозной нумерацией компонент узловых сил и перемещений. В этом случае силы  $P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}$ , действующие в узле 1, обозначаются соответственно через  $P_1, P_2$  и  $P_3$ ; силы  $P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}$ , действующие в узле 2, – через  $P_4, P_5, P_6$  и т.д. При такой индексации элементы матрицы сил для узла  $i$  будут иметь номера  $3i - 2, 3i - 1$  и  $3i$ , то есть

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{3i-2} \\ P_{3i-1} \\ P_{3i} \end{bmatrix}.$$

Аналогично для перемещений будем иметь

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{3i-2} \\ v_{3i-1} \\ v_{3i} \end{bmatrix}.$$

Наконец, в самом общем случае в каждом узле могут помимо сил действовать моменты относительно координатных осей. Тогда подматрицы  $[P_i]$  и  $[v_i]$  будут состоять из шести компонент, которые мы условимся перечислять в следующем порядке:

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix}; \quad [v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix},$$

где  $M_{iq}$  и  $\theta_{iq}$  – моменты и углы поворота относительно оси  $q$ . Если использовать сквозную нумерацию сил и перемещений, то будем иметь

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{6i-5} \\ P_{6i-4} \\ P_{6i-3} \\ P_{6i-2} \\ P_{6i-1} \\ P_{6i} \end{bmatrix}; \quad [v_i] = \begin{bmatrix} v_{6i-5} \\ v_{6i-4} \\ v_{6i-3} \\ v_{6i-2} \\ v_{6i-1} \\ v_{6i} \end{bmatrix}.$$

Подматрицы  $[K_{ij}]$  будут иметь размер  $6 \times 6$ .

Если известна матрица жёсткости, то при заданных узловых силах соотношение (2.1) можно использовать для определения узловых перемещений. В случае стержневой системы знания перемещений узлов достаточно для вычисления внутренних сил и напряжений в стержнях. На этом основан матричный метод перемещений для стержневых систем.

## 2.2 Местная и общая системы координат

Компонентами матриц  $[P_i]$ ,  $[v_i]$  являются проекции сил и перемещений на координатные оси, поэтому они зависят от принятой системы координат. Выбор этой системы произволен. Для расчёта конструкции обычно применяют общую координатную систему, используемую в чертежах. Однако для вычисления матриц жёсткости отдельных конструктивных элементов может оказаться выгоднее воспользоваться местной системой координат. Для каждого конструктивного элемента местная система координат выбирается так, чтобы свести к минимуму вычислительную работу. В таких случаях после отыскания матрицы жёсткости в местных координатах необходимо выполнить переход к общей системе координат.

Пусть  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  и  $x, y, z$  – соответственно местная и общая системы координатных осей. Перемещения в этих системах координат будем обозначать

через  $[\bar{v}]$  и  $[v]$ , а силы – через  $[\bar{P}]$  и  $[P]$ .

Если перемещения (линейные и угловые) произвольного узла  $i$  в общей системе координат спроектировать на местные координатные оси, то получим связь между  $[\bar{v}_i]$  и  $[v_i]$  вида

$$[\bar{v}_i] = [\lambda_0][v_i], \quad (2.2)$$

где  $[\lambda_0]$  – матрица, составленная из косинусов углов между осями  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  и  $x, y, z$ .

Подобные соотношения могут быть записаны для всех узлов рассматриваемого тела. Сведём их в одно матричное равенство:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее разделительные линии означают, что матрица является блочной, и её элементы суть подматрицы.

Введя обозначение

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

представим последнее соотношение в форме

$$[\bar{v}] = [\lambda][v]. \quad (2.3)$$

Матрица  $[\lambda]$  представляет собой *матрицу преобразования координат*.

Придадим точкам тела дополнительные бесконечно малые перемещения и обозначим через  $[\delta\bar{v}]$  матрицу этих перемещений в узловых точках в местной системе координат, а через  $[\delta v]$  – в общей. На основании вышеизложенного

$$[\delta\bar{v}] = [\lambda][\delta v]. \quad (2.4)$$

Если узловые силы отнесены к местной системе координат, то на перемещениях  $[\delta\bar{v}]$  они произведут работу, равную

$$[\delta\bar{v}_1]^T [\bar{P}_1] + [\delta\bar{v}_2]^T [\bar{P}_2] + \dots + [\delta v_m]^T [\bar{P}_m] = [\delta\bar{v}]^T [\bar{P}],$$

если же они отнесены к общей системе координат, то работа будет равна

$$[\delta v]^T [P].$$

Поскольку работа не зависит от того, в какой системе координат производятся вычисления, можно записать

$$[\delta v]^T [P] = [\delta \bar{v}]^T [\bar{P}]$$

или, с учётом (2.4),

$$[\delta v]^T [P] = [\delta v]^T [\lambda]^T [\bar{P}],$$

откуда в силу произвольности элементов матрицы  $[\delta v]$  находим

$$[P] = [\lambda]^T [\bar{P}]. \quad (2.5)$$

Выразим теперь силы  $[\bar{P}]$  через перемещения:

$$[\bar{P}] = [\bar{K}] [\bar{v}] = [\bar{K}] [\lambda] [v],$$

где  $[\bar{K}]$  – матрица жёсткости в местных координатах. Тогда из равенства (2.5) получим

$$[P] = [\lambda]^T [\bar{K}] [\lambda] [v].$$

Это соотношение связывает силы и перемещения в общей системе координат в стандартной форме

$$[P] = [K] [v],$$

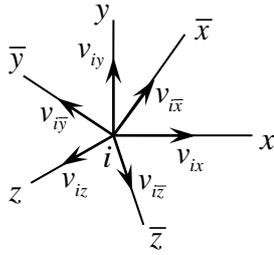
где матрица

$$[K] = [\lambda]^T [\bar{K}] [\lambda] \quad (2.6)$$

представляет собой матрицу жёсткости в общей системе координат.

Таким образом, если матрица жёсткости  $[\bar{K}]$  в местной системе координат известна, то для вычисления матрицы жёсткости в общей системе координат достаточно построить матрицу  $[\lambda]$  и воспользоваться формулой (2.6). Следовательно, всё сводится к составлению матрицы  $[\lambda_0]$ , фигурирующей в соотношении (2.2).

В качестве примера рассмотрим формирование матрицы  $[\lambda_0]$  для случая, когда в каждом узле имеется по три линейных перемещения в направлении координатных осей. На рисунке 2.4 показаны проекции перемещения узла  $i$  на координатные оси двух систем – местной и общей. Обе матрицы  $[v_i]$  и  $[\bar{v}_i]$  будут состоять здесь из трёх элементов:



**Рисунок 2.4 – Местная и общая системы координат**

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_i] = \begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{i\bar{y}} \\ v_{i\bar{z}} \end{bmatrix}.$$

Обозначим косинус угла между осью  $\bar{p}$  ( $\bar{p} = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ) местной системы координат и осью  $q$  ( $q = x, y, z$ ) общей системы координат через  $\lambda_{\bar{p}q}$ . Тогда, проецируя перемещения  $v_{ix}$ ,

$v_{iy}$ ,  $v_{iz}$  на ось  $\bar{x}$ , получим

$$v_{i\bar{x}} = v_{ix}\lambda_{x\bar{x}} + v_{iy}\lambda_{y\bar{x}} + v_{iz}\lambda_{z\bar{x}} = [\lambda_{0\bar{x}}][v_i],$$

где

$$[\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{x\bar{x}} \lambda_{y\bar{x}} \lambda_{z\bar{x}}].$$

Аналогично выразим  $v_{i\bar{y}}$  и  $v_{i\bar{z}}$  через  $[v_i]$ :

$$v_{i\bar{y}} = [\lambda_{0\bar{y}}][v_i]; \quad v_{i\bar{z}} = [\lambda_{0\bar{z}}][v_i].$$

Здесь

$$[\lambda_{0\bar{y}}] = [\lambda_{yx} \lambda_{yy} \lambda_{yz}]; \quad [\lambda_{0\bar{z}}] = [\lambda_{zx} \lambda_{zy} \lambda_{zz}].$$

Отсюда находим

$$[\bar{v}_i] = \begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{i\bar{y}} \\ v_{i\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} \\ \lambda_{0\bar{y}} \\ \lambda_{0\bar{z}} \end{bmatrix} [v_i].$$

Сопоставляя эту запись с определением  $[\lambda_0]$ , получим

$$[\lambda_0] = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} \\ \lambda_{0\bar{y}} \\ \lambda_{0\bar{z}} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что матрица  $[\lambda]$  имеет блочно-диагональный вид лишь в том случае, когда в матрицах  $[\bar{v}]$  и  $[v]$  узловые перемещения перечисляются в одном и том же порядке:

$$[\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_m \end{bmatrix}; \quad [v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

### 2.3 Матрица жёсткости ферменного элемента

Ферменным элементом будем называть прямолинейный стержень, который присоединяется к другим конструктивным элементам посредством идеальных шарниров. Если к нему не приложены поперечные силы, то он будет испытывать лишь растяжение или сжатие. Выведем матрицу жёсткости такого элемента, выбрав местные координаты таким образом, чтобы ось  $\bar{x}$  совпадала с продольной осью стержня (рисунок 2.5). Узлами являются концы стержня  $i$  и  $j$ , в которых действуют силы  $\bar{P}_i$  и  $\bar{P}_j$ , направленные вдоль оси  $\bar{x}$ .

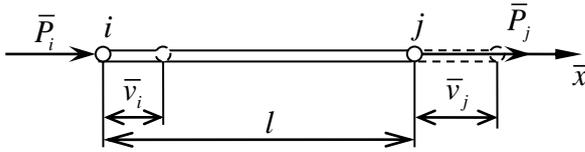


Рисунок 2.5 – Ферменный элемент в местной системе координат

Перемещения этих узлов вдоль оси стержня обозначим через  $\bar{v}_i$  и  $\bar{v}_j$ . Узловые силы и перемещения в местной системе координат образуют матрицы

$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix},$$

которые связаны зависимостью  $[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}]$  или

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{ii} & \bar{K}_{ij} \\ \bar{K}_{ji} & \bar{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$

Для вычисления коэффициентов матрицы жёсткости воспользуемся известной формулой сопротивления материалов для удлинения стержня

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF},$$

где  $N$  – осевая сила в сечении стержня;  $l$ ,  $F$  – длина и площадь сечения;  $E$  – модуль упругости материала. Полагая, что осевая сила положительна и равна  $\bar{P}_j$ , удлинение  $\Delta l$  следует взять равным  $\bar{v}_j - \bar{v}_i$ . Отсюда устанавливаем связь узловой силы  $\bar{P}_j$  с узловыми перемещениями:

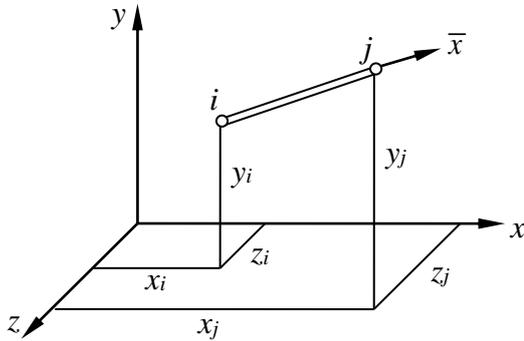
$$\bar{P}_j = \frac{EF}{l}(\bar{v}_j - \bar{v}_i) = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$

Исходя из условия равновесия стержня, получим и аналогичное выражение для  $\bar{P}_i$ :

$$\bar{P}_i = -\bar{P}_j = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$

Объединяя эти два равенства, приходим к соотношению

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$



**Рисунок 2.6 – Ферменный элемент в общей системе координат**

Отсюда вытекает следующее выражение для искомой матрицы жёсткости:

$$[\bar{K}] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Отнесем теперь ферменный элемент  $i$ - $j$  к общей системе координат (рисунок 2.6). Пусть ось стержня составляет с осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  углы, косинусы которых равны

$$\lambda_{\bar{x}x} = \frac{l_x}{l}; \quad \lambda_{\bar{x}y} = \frac{l_y}{l}; \quad \lambda_{\bar{x}z} = \frac{l_z}{l},$$

где

$$l_x = x_j - x_i; \quad l_y = y_j - y_i; \quad l_z = z_j - z_i$$

– проекции стержня на координатные оси;

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}.$$

Перемещение каждого узла имеет составляющие по всем трём осям общей системы координат, так что в этой системе матрица перемещений узла  $i$  будет иметь три элемента:

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix}.$$

Силы, действующие в узле  $i$ , образуют матрицу

$$[P_i^e] = \begin{bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \\ P_{iz}^e \end{bmatrix}.$$

Индексом « $e$ » будем отмечать в общей системе координат те величины, которые относятся к отдельному стержневому элементу. Так,  $[P_i^e]$  будет означать подматрицу сил, действующих в узле  $i$  на элемент  $e$ , в отличие от

подматрицы  $[P_i]$  внешних сил, приложенных к узлу  $i$  конструкции. Ясно, что  $[v_i^e] = [v_i]$ .

Проектируя перемещения узла  $i$  в общей системе координат на направление местной оси  $\bar{x}$ , запишем

$$\bar{v}_i = v_{ix} \lambda_{\bar{x}x} + v_{iy} \lambda_{\bar{x}y} + v_{iz} \lambda_{\bar{x}z}.$$

Если ввести обозначение

$$[\lambda_0] = [\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{\bar{x}x} \ \lambda_{\bar{x}y} \ \lambda_{\bar{x}z}],$$

то можно представить это соотношение в виде

$$\bar{v}_i = [\lambda_0][v_i].$$

Для стержня в целом получим

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}$$

или

$$[\bar{v}] = [\lambda][v^e],$$

где

$$[\lambda]_{(2 \times 6)} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}.$$

Выражение для матрицы жёсткости в общей системе координат будет

$$[K^e] = [\lambda]^T [\bar{K}] [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_0^T & 0 \\ 0 & \lambda_0^T \end{bmatrix} \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} g & -g \\ -g & g \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

где  $[g] = [\lambda_0]^T [\lambda_0]$  – подматрица размером  $3 \times 3$ .

Используя блочное представление для матриц сил и перемещения вида

$$[P^e] = \begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix}; \quad [v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix},$$

можно записать и матрицу жёсткости в блочной форме:

$$\begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

где

$$[K_{ii}^e] = [K_{jj}^e] = -[K_{ij}^e] = -[K_{ji}^e] = \frac{EF}{l} [\lambda_0]^T [\lambda_0].$$

Если рассматриваемый стержень  $i-j$  является элементом плоской фермы, то в общей системе координат каждый узел имеет перемещения лишь в направлении двух осей (например,  $x$  и  $y$ ):

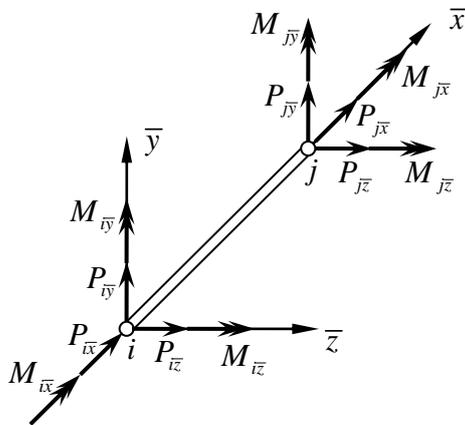
$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}; \quad [P_i^e] = \begin{bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \end{bmatrix},$$

а матрица  $[\lambda_0] = [\lambda_{xx} \ \lambda_{xy}]$ .

Подматрица  $[g]$  будет иметь размер  $2 \times 2$ .

## 2.4 Матрица жёсткости балочного элемента в местной системе координат

*Балочным элементом* будем называть прямолинейный брус, способный воспринимать в общем случае все виды нагрузок (растяжение-сжатие, изгиб в двух плоскостях и кручение). В качестве узлов  $i, j$  элемента возьмем его концы. Местные оси координат выберем так, чтобы ось  $\bar{x}$  совпадала с продольной осью стержня, а оси  $\bar{y}$  и  $\bar{z}$  совпадали с главными центральными осями его поперечного сечения. В каждом узле будем рассматривать шесть перемещений (три линейных и три угловых) и соответствующие им силовые факторы, как показано на рисунке 2.7.



**Рисунок 2.7 – Балочный элемент в местной системе координат**

Матрицы сил и перемещений для всего стержня можно составить, как и ранее, перечисляя сначала силы (перемещения) узла  $i$ , а затем  $j$ , то есть

$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$

Однако здесь удобнее расположить перемещения и силы в ином порядке. При выбранной системе местных осей узловые силы распадаются на четыре группы, которые можно рассматривать независимо друг от друга. Так, силы  $P_{i\bar{x}}$  и  $P_{j\bar{x}}$  вызывают только осевую деформацию бруса и определяются перемещениями  $v_{i\bar{x}}$  и  $v_{j\bar{x}}$ . образуем из них соответствующие подматрицы, которые обозначим через  $[\bar{P}_a]$  и  $[\bar{v}_a]$ :

$$[\bar{P}_a] = \begin{bmatrix} P_{i\bar{x}} \\ P_{j\bar{x}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_a] = \begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{j\bar{x}} \end{bmatrix}.$$

Эти подматрицы связаны равенством

$$[\bar{P}_a] = [\bar{K}_a][\bar{v}_a],$$

где  $[\bar{K}_a]$  – некоторая квадратная матрица размером  $2 \times 2$ .

Далее силы  $P_{i\bar{y}}, P_{j\bar{y}}$ , а также моменты  $M_{i\bar{z}}, M_{j\bar{z}}$  вызывают изгиб бруса только в плоскости  $\bar{x}\bar{y}$  и определяются перемещениями  $v_{i\bar{y}}, v_{j\bar{y}}$  и углами поворота  $\theta_{i\bar{z}}, \theta_{j\bar{z}}$ . Из этих компонент составим подматрицы

$$[\bar{P}_b] = \begin{bmatrix} P_{i\bar{y}} \\ M_{i\bar{z}} \\ P_{j\bar{y}} \\ M_{j\bar{z}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_b] = \begin{bmatrix} v_{i\bar{y}} \\ \theta_{i\bar{z}} \\ v_{j\bar{y}} \\ \theta_{j\bar{z}} \end{bmatrix},$$

тогда

$$[\bar{P}_b] = [\bar{K}_b][\bar{v}_b].$$

Аналогично образуем подматрицы сил и перемещений

$$[\bar{P}_c] = \begin{bmatrix} P_{i\bar{z}} \\ M_{i\bar{y}} \\ P_{j\bar{z}} \\ M_{j\bar{y}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_c] = \begin{bmatrix} v_{i\bar{z}} \\ \theta_{i\bar{y}} \\ v_{j\bar{z}} \\ \theta_{j\bar{y}} \end{bmatrix},$$

определяющих изгиб бруса в плоскости  $\bar{x}\bar{z}$ ; при этом

$$[\bar{P}_c] = [\bar{K}_c][\bar{v}_c].$$

Наконец, кручение стержня вокруг оси  $\bar{x}$  характеризуют подматрицы

$$[\bar{P}_d] = \begin{bmatrix} M_{i\bar{x}} \\ M_{j\bar{x}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_d] = \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix},$$

причём

$$[\bar{P}_d] = [\bar{K}_d][\bar{v}_d].$$

Образуем теперь матрицы  $[\bar{P}]$  и  $[\bar{v}]$  в следующем виде:

$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} \bar{P}_a \\ \bar{P}_b \\ \bar{P}_c \\ \bar{P}_d \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \end{bmatrix}.$$

Тогда соотношение

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}]$$

в развернутом виде запишется как

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_a \\ \bar{P}_b \\ \bar{P}_c \\ \bar{P}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{K}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \end{bmatrix}.$$

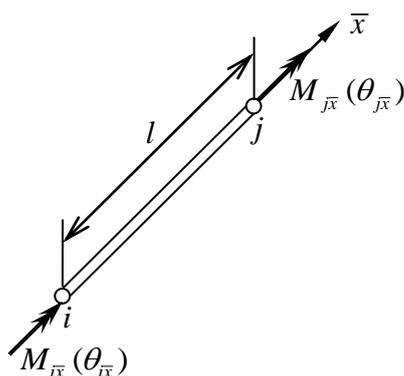
Таким образом, при выбранном расположении компонент  $[\bar{P}]$  и  $[\bar{v}]$  матрица жёсткости  $[\bar{K}]$  оказывается блочно-диагональной:

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{K}_d \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Подматрицы  $[\bar{K}_a]$  и  $[\bar{K}_d]$  имеют размер 2x2, а подматрицы  $[\bar{K}_b]$  и  $[\bar{K}_c]$  – размер 4x4.

Переходя к вычислению отдельных блоков матрицы жёсткости, начнем с подматрицы  $[\bar{K}_a]$ . Эта матрица, очевидно, совпадает с матрицей жёсткости ферменного элемента в местной системе координат:

$$[\bar{K}_a] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$



**Рисунок 2.8 – Кручение балочного элемента**

Рассмотрим кручение балочного элемента. Сечение  $j$  относительно сечения  $i$  закручивается на угол  $\theta_{j\bar{x}} - \theta_{i\bar{x}}$  (рисунок 2.8).

Из курса сопротивления материалов известно, что крутящий момент в сечении бруса  $M_{j\bar{x}}$ , необходимый для создания такого угла закручивания, равен

$$M_{j\bar{x}} = \frac{GI_{кр}}{l} (\theta_{j\bar{x}} - \theta_{i\bar{x}}) = \frac{GI_{кр}}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix},$$

где  $GI_{кр}$  – жёсткость стержня на кручение.

Из уравнения равновесия имеем также

$$M_{i\bar{x}} = -M_{j\bar{x}} = \frac{GI_{\text{кр}}}{l} [1 \quad -1] \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix}.$$

Объединяя эти равенства, получим

$$\begin{bmatrix} M_{i\bar{x}} \\ M_{j\bar{x}} \end{bmatrix} = \frac{GI_{\text{кр}}}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$[\bar{K}_d] = \frac{GI_{\text{кр}}}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

## 2.5 Матрица жёсткости балочного элемента при изгибе его в одной плоскости

Особо рассмотрим изгиб балочного элемента в плоскости  $\bar{x}\bar{y}$ . Пусть  $u_{\bar{y}}$  – его прогиб на расстоянии  $\bar{x}$  от левого конца (рисунок 2.9).

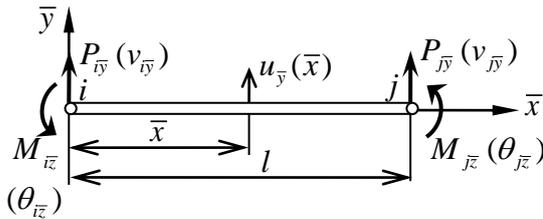


Рисунок 2.9 – Изгиб балочного элемента в плоскости  $\bar{x}\bar{y}$

Согласно технической теории изгиба бруса прогиб  $u_{\bar{y}}$  однозначно определяется узловыми перемещениями  $[\bar{v}_b]$ . В матричных обозначениях это означает существование равенства

$$u_{\bar{y}}(\bar{x}) = [\alpha(\bar{x})][\bar{v}_b], \quad (2.13)$$

где  $[\alpha(\bar{x})]$  – матрица-строка, четыре элемента которой являются функциями координаты  $\bar{x}$ . Эта матрица будет получена позже, а сейчас перейдём к вычислению подматрицы  $[\bar{K}_b]$ , считая, что матрица  $[\alpha(\bar{x})]$  известна.

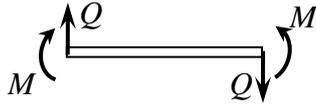
Зная прогиб  $u_{\bar{y}}$ , можно найти изгибающие моменты и перерезывающие силы по формулам сопротивления материалов

$$M = EI_{\bar{z}} \frac{d^2 u_{\bar{y}}}{d\bar{x}^2}; \quad Q = EI_{\bar{z}} \frac{d^3 u_{\bar{y}}}{d\bar{x}^3}$$

или, с учётом (2.13),

$$M = EI_{\bar{z}} [\alpha''(\bar{x})][\bar{v}_b]; \quad Q = EI_{\bar{z}} [\alpha'''(\bar{x})][\bar{v}_b]. \quad (2.14)$$

Положительные направления изгибающих моментов и перерезывающих сил приведены на рисунке 2.10. В узлах  $i$  и  $j$  должны выполняться следующие условия:



**Рисунок 2.10 – Положительные внутренние силы и моменты**

$$\begin{aligned}
 P_{i\bar{y}} &= Q(0) = EI_{\bar{z}}[\alpha'''(0)][\bar{v}_b]; \\
 M_{i\bar{z}} &= -M(0) = -EI_{\bar{z}}[\alpha''(0)][\bar{v}_b]; \\
 P_{j\bar{y}} &= -Q(l) = -EI_{\bar{z}}[\alpha'''(l)][\bar{v}_b]; \\
 M_{j\bar{z}} &= M(l) = EI_{\bar{z}}[\alpha''(l)][\bar{v}_b]
 \end{aligned}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{bmatrix} P_{i\bar{y}} \\ M_{i\bar{z}} \\ P_{j\bar{y}} \\ M_{j\bar{z}} \end{bmatrix} = EI_{\bar{z}} \begin{bmatrix} \alpha'''(0) \\ -\alpha''(0) \\ -\alpha'''(l) \\ \alpha''(l) \end{bmatrix} [\bar{v}_b].$$

Таким образом,

$$[\bar{K}_b] = EI_{\bar{z}} \begin{bmatrix} \alpha'''(0) \\ -\alpha''(0) \\ -\alpha'''(l) \\ \alpha''(l) \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Приступим к отысканию матрицы  $[\alpha]$ . Дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса имеет вид

$$EI_{\bar{z}} \frac{d^4 u_{\bar{y}}}{d\bar{x}^4} = q_{\bar{y}},$$

где  $I_{\bar{z}}$  – момент инерции поперечного сечения относительно оси  $\bar{z}$ ;  $q_{\bar{y}}$  – погонная поперечная нагрузка.

В рассматриваемом случае распределенная поперечная нагрузка  $q_{\bar{y}}$  отсутствует, поэтому дифференциальное уравнение изгиба бруса сведётся к равенству

$$\frac{d^4 u_{\bar{y}}}{d\bar{x}^4} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u_{\bar{y}} = C_1 + C_2 \bar{x} + C_3 \bar{x}^2 + C_4 \bar{x}^3, \quad (2.16)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_4$  – произвольные постоянные, подлежащие определению из граничных условий:

$$\begin{aligned}
 \text{при } \bar{x} = l & \quad 1) u_{\bar{y}} = v_{i\bar{y}}; & \quad 2) u'_{\bar{y}} = \theta_{i\bar{z}}; \\
 \text{при } \bar{x} = 0 & \quad 3) u_{\bar{y}} = v_{j\bar{y}}; & \quad 4) u'_{\bar{y}} = \theta_{j\bar{z}}.
 \end{aligned}$$

Дифференцируя перемещение по  $\bar{x}$ , будем иметь

$$\frac{du_{\bar{y}}}{d\bar{x}} = C_2 + 2C_3\bar{x} + 3C_4\bar{x}^2.$$

Из граничных условий 1) и 2) находим

$$C_1 = v_{i\bar{y}}; \quad C_2 = \theta_{i\bar{z}},$$

а граничные условия 3) и 4) приводят к равенствам

$$C_3l^2 + C_4l^3 = v_{j\bar{y}} - v_{i\bar{y}} - \theta_{i\bar{z}}l;$$

$$2C_3l + 3C_4l^2 = \theta_{j\bar{z}} - \theta_{i\bar{z}}.$$

Решение этой системы даёт

$$C_3 = \frac{3}{l^2}(v_{j\bar{y}} - v_{i\bar{y}}) - \frac{1}{l}(\theta_{j\bar{z}} + 2\theta_{i\bar{z}});$$

$$C_4 = -\frac{2}{l^3}(v_{j\bar{y}} - v_{i\bar{y}}) + \frac{1}{l^2}(\theta_{j\bar{z}} + \theta_{i\bar{z}}).$$

Если подставить найденные значения постоянных в уравнение изогнутой оси (2.16), то можно получить следующее выражение:

$$u_{\bar{y}} = \left(1 - 3\frac{\bar{x}^2}{l^2} + 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)v_{i\bar{y}} + \left(\frac{\bar{x}}{l} - 2\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l\theta_{i\bar{z}} + \left(3\frac{\bar{x}^2}{l^2} - 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)v_{j\bar{y}} + \left(-\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l\theta_{j\bar{z}}.$$

Таким образом,

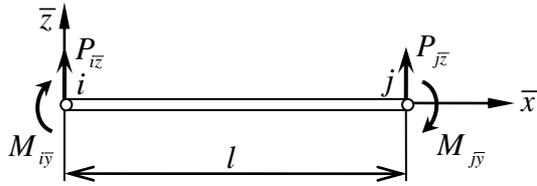
$$[\alpha(\bar{x})] = \left[ \left(1 - 3\frac{\bar{x}^2}{l^2} + 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right) \left(\frac{\bar{x}}{l} - 2\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l \quad \left(3\frac{\bar{x}^2}{l^2} - 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right) \left(-\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l \right];$$

$$[\alpha''(\bar{x})] = \frac{1}{l^2} \left[ \left(-6 + 12\frac{\bar{x}}{l}\right) \left(-4 + 6\frac{\bar{x}}{l}\right)l \quad \left(6 - 12\frac{\bar{x}}{l}\right) \left(-2 + 6\frac{\bar{x}}{l}\right)l \right];$$

$$[\alpha'''(\bar{x})] = \frac{1}{l^3} [12 \quad 6l \quad -12 \quad 6l].$$

Подставив, наконец, значения производных в формулу (2.15), окончательно устанавливаем

$$[\bar{K}_b] = \frac{EI_{\bar{z}}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$



**Рисунок 2.11 – Изгиб балочного элемента в плоскости  $\bar{x}\bar{z}$**

Рассмотрим теперь изгиб бруса в плоскости  $\bar{x}\bar{z}$  (рисунок 2.11). В этой плоскости положительные узловые моменты (а также углы поворота) направлены по сравнению с предыдущим случаем в противоположную сторону. В остальном же оба случая идентичны. Следовательно, подматрицу  $[\bar{K}_c]$  можно получить из  $[\bar{K}_b]$ , меняя знаки во втором и четвертом столбцах и одновременно во второй и четвертой строках, соответствующих моментам и углам поворота. Кроме того, вместо  $I_{\bar{z}}$  следует писать  $I_{\bar{y}}$ . В итоге получим

$$[\bar{K}_c] = \frac{EI_{\bar{y}}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Формулы для  $[\bar{K}_a]$ ,  $[\bar{K}_b]$ ,  $[\bar{K}_c]$  и  $[\bar{K}_d]$  определяют матрицу жёсткости блочного элемента в местной системе координат.

## 2.6 Матрица жёсткости балочного элемента в общих координатах

Принятый при выводе матрицы  $[\bar{K}]$  порядок расположения элементов матриц сил и перемещений для дальнейших рассуждений оказывается неудобным. Поэтому в общей системе координат матрицу  $[v^e]$  для балочного элемента  $i$ - $j$  образуем привычным образом:

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Здесь, например,

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix}.$$

Если ввести обозначения

$$[\tilde{v}_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix}; \quad [\theta_i] = \begin{bmatrix} \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix},$$

то будем иметь следующее представление матрицы перемещений узла  $i$ :

$$[v_i] = \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_i \end{bmatrix};$$

аналогично представляются перемещения узла  $j$ :

$$[v_j] = \begin{bmatrix} \tilde{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix}.$$

Матрица соответствующих узловых сил имеет вид

$$[P^e] = \begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix},$$

где, например,

$$[P_i^e] = \begin{bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \\ P_{iz}^e \\ M_{ix}^e \\ M_{iy}^e \\ M_{iz}^e \end{bmatrix}.$$

Выразим перемещения  $[\bar{v}]$  в местной системе координат через перемещения  $[v^e]$  в общей системе координат, то есть построим матрицу  $[\lambda]$  в соответствии с равенством

$$[\bar{v}] = [\lambda][v^e].$$

В местной системе координат мы имеем

$$[\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \end{bmatrix}.$$

Проектируя линейные перемещения узла  $i$  в общей системе координат на ось  $\bar{x}$ , получим

$$v_{i\bar{x}} = [\lambda_{0\bar{x}}][\tilde{v}_i], \quad \text{где } [\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{\bar{x}x} \ \lambda_{\bar{x}y} \ \lambda_{\bar{x}z}].$$

Точно так же будем иметь

$$v_{i\bar{y}} = [\lambda_{0\bar{y}}][\tilde{v}_i]; \quad v_{i\bar{z}} = [\lambda_{0\bar{z}}][\tilde{v}_i],$$

где

$$[\lambda_{0\bar{y}}] = [\lambda_{\bar{y}x} \ \lambda_{\bar{y}y} \ \lambda_{\bar{y}z}]; \quad [\lambda_{0\bar{z}}] = [\lambda_{\bar{z}x} \ \lambda_{\bar{z}y} \ \lambda_{\bar{z}z}].$$

Для углов поворота получаются аналогичные выражения:

$$\theta_{i\bar{x}} = [\lambda_{0\bar{x}}][\theta_i]; \quad \theta_{i\bar{y}} = [\lambda_{0\bar{y}}][\theta_i]; \quad \theta_{i\bar{z}} = [\lambda_{0\bar{z}}][\theta_i].$$

Построим в итоге связь между матрицами  $[\bar{v}]$  и  $[v^e]$  в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{j\bar{x}} \\ v_{i\bar{y}} \\ \theta_{i\bar{z}} \\ v_{j\bar{y}} \\ \theta_{j\bar{z}} \\ v_{i\bar{z}} \\ \theta_{i\bar{y}} \\ v_{j\bar{z}} \\ \theta_{j\bar{y}} \\ \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 \\ \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{0\bar{z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0\bar{z}} \\ \lambda_{0\bar{z}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{z}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} \\ 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_i \\ \tilde{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix}.$$

Фигурирующая в этом равенстве квадратная матрица размером  $12 \times 12$  есть искомая матрица  $[\lambda]$ .

Зная матрицу преобразования координат  $[\lambda]$ , можно вычислить матрицу жёсткости в общей системе координат. Для этого следует воспользоваться формулой (2.6):

$$[K^e] = [\lambda]^T [\bar{K}] [\lambda].$$

Если общая система координат совпадает с местной, то

$$[\lambda_{0\bar{x}}] = [1 \ 0 \ 0]; \quad [\lambda_{0\bar{y}}] = [0 \ 1 \ 0]; \quad [\lambda_{0\bar{z}}] = [0 \ 0 \ 1].$$

В этом случае данное преобразование будет заключаться в простой перестановке расположения элементов матрицы жёсткости.

Рассмотрим особо частный случай, когда балочный элемент является стержнем плоской рамы. При этом каждый узел получает поступательные перемещения в направлении двух координатных осей и угловое перемещение в плоскости этих осей (рисунок 2.12).

Матрица перемещений в местной системе координат имеет вид

$$[\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \end{bmatrix}.$$

В общей системе координат имеем

$$[v^e] = \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_i \\ \tilde{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix},$$

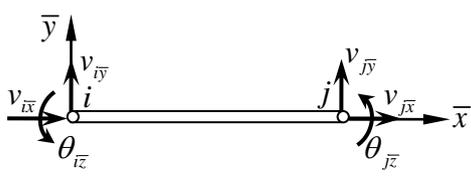
где, например,

$$[\tilde{v}_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}; \quad \theta_i = \theta_{iz} = \theta_{i\bar{z}}.$$

Вводя теперь новые обозначения

$$[\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{\bar{x}\bar{x}} \quad \lambda_{\bar{x}\bar{y}}]; \quad [\lambda_{0\bar{y}}] = [\lambda_{\bar{y}\bar{x}} \quad \lambda_{\bar{y}\bar{y}}]$$

и проектируя компоненты матрицы  $[v^e]$  на направления местных осей, получим



$$\begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{j\bar{x}} \\ v_{i\bar{y}} \\ \theta_{i\bar{z}} \\ v_{j\bar{y}} \\ \theta_{j\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 \\ \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_i \\ \tilde{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix}.$$

Рисунок 2.12 – Элемент плоской рамы

Отсюда для случая плоской рамы находим

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 \\ \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как можно видеть, для любого стержневого элемента (ферменного или балочного) мы имеем в общей системе координат одинаковую запись в блочном виде соотношения, связывающего узловые силы и узловые перемещения:

$$\begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

## 2.7 Учёт внеузловой нагрузки

До сих пор мы предполагали, что внешняя нагрузка действует на конструкцию только в узлах. Обратимся к случаю, когда на элемент бруса действуют и внеузловые нагрузки. Рассмотрим типовой элемент  $i$ - $j$  в местных координатах.

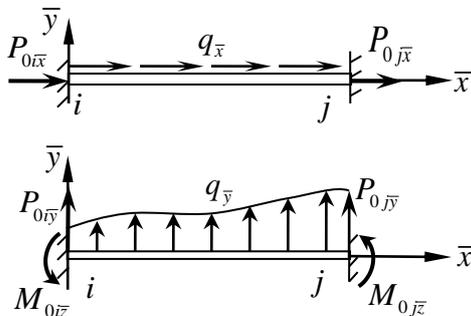


Рисунок 2.13 – Действие внеузловой нагрузки

Если узловые перемещения элемента равны нулю, то внешняя нагрузка вызовет появление реакций в виде сил и моментов (рисунок 2.13).

Образуем из них подматрицы  $[\bar{P}_{0a}]$ ,  $[\bar{P}_{0b}]$ ,  $[\bar{P}_{0c}]$  и  $[\bar{P}_{0d}]$ , соблюдая тот же порядок перечисления сил, что и в матрицах  $[\bar{P}_a]$ ,  $[\bar{P}_b]$ ,  $[\bar{P}_c]$  и  $[\bar{P}_d]$ :

$$[\bar{P}_{0a}] = \begin{bmatrix} P_{0i\bar{x}} \\ P_{0j\bar{x}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{P}_{0b}] = \begin{bmatrix} P_{0i\bar{y}} \\ M_{0i\bar{z}} \\ P_{0j\bar{y}} \\ M_{0j\bar{z}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{P}_{0c}] = \begin{bmatrix} P_{0i\bar{z}} \\ M_{0i\bar{y}} \\ P_{0j\bar{z}} \\ M_{0j\bar{y}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{P}_{0d}] = \begin{bmatrix} M_{0i\bar{x}} \\ M_{0j\bar{x}} \end{bmatrix}.$$

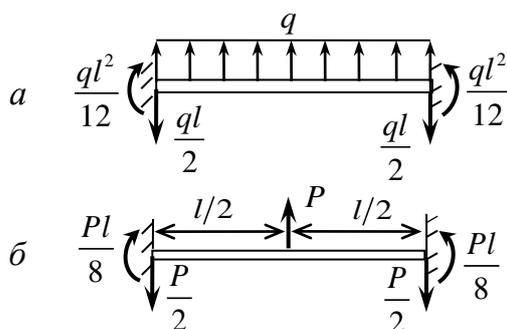


Рисунок 2.14 – Примеры внеузловых нагрузок

Значения реакций для многих встречающихся на практике видов нагружения имеются в справочной литературе.

В частном случае действия постоянной распределенной нагрузки (рисунок 2.14,а) будем иметь

$$[\bar{P}_{0b}] = \begin{bmatrix} -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \end{bmatrix},$$

а при действии сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в среднем сечении (рисунок 2.14,б),

$$[\bar{P}_{0b}] = \begin{bmatrix} -\frac{P}{2} \\ \frac{Pl}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{Pl}{8} \end{bmatrix}.$$

Объединяя все подматрицы, можно записать

$$[\bar{P}_0] = \begin{bmatrix} \bar{P}_{0a} \\ \bar{P}_{0b} \\ \bar{P}_{0c} \\ \bar{P}_{0d} \end{bmatrix}.$$

При вычислении  $[\bar{P}_0]$  предполагалось, что узловые перемещения отсутствуют. Если же узлы элемента получают перемещения, определяемые матрицей  $[\bar{v}]$ , то дополнительные узловые силы, необходимые для их создания, находятся, как и ранее, произведением  $[\bar{K}][\bar{v}]$ . Таким образом, при наличии внеузловой нагрузки матрицу узловых сил можно найти по формуле

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}] + [\bar{P}_0]. \quad (2.20)$$

Перейдём в этом соотношении к общей системе координат

$$[P^e] = [\lambda]^T [\bar{P}] = [\lambda]^T [\bar{K}][\bar{v}] + [\lambda]^T [\bar{P}_0].$$

Используя связь  $[\bar{v}] = [\lambda][v^e]$ , получим далее

$$[P^e] = [\lambda]^T [\bar{P}] = [\lambda]^T [\bar{K}][\lambda][v^e] + [\lambda]^T [\bar{P}_0].$$

Это равенство можно записать в виде

$$[P^e] = [K^e][v^e] + [P_0^e], \quad (2.21)$$

где

$$[P_0^e] = [\lambda]^T [\bar{P}_0].$$

Равенству (2.21) можно придать блочную форму

$$\begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{0i}^e \\ P_{0j}^e \end{bmatrix}.$$

## 2.8 Объединение элементов в стержневую систему и построение её матрицы жёсткости

Будем исходить из того, что для любого стержневого элемента мы имеем матрицу жёсткости в общей системе координат, записанную в блочном виде. Обозначим через  $[v_i]$  матрицу перемещений типового узла  $i$ . Общее число узлов в системе обозначим через  $m$ . Матрицу внешних сил, действующих в направлении перемещений  $[v_i]$ , обозначим через  $[P_i]$ . Матрицы узловых сил и перемещений для всей конструкции составим следующим образом:

$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}; \quad [v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Для каждого из узлов в самом общем случае имеем

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix}; \quad [v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix}.$$

При отсутствии внеузловой нагрузки связь между матрицами  $[P]$  и  $[v]$  может быть представлена в виде

$$[P] = [K][v], \quad (2.22)$$

где  $[K]$  – матрица жёсткости системы.

Если же помимо узловых сил действуют внеузловые нагрузки, то можно рассуждать так же, как и в случае отдельного стержня. Предположим, что все узлы защемлены. Тогда в результате действия внеузловой нагрузки со

стороны наложенных связей возникнут силы реакций. Перечисляя реакции, действующие в узле  $i$ , в том же порядке, что и для  $[P_i]$ , образуем подматрицу  $[P_{0i}]$ .

Для всей конструкции можно составить матрицу

$$[P_0] = \begin{bmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0m} \end{bmatrix}.$$

Если, далее, узлы имеют некоторые смещения  $[v]$ , то для их создания необходимо дополнительно приложить силы, величина которых зависит от жесткостных характеристик системы. Таким образом, будем иметь

$$[P] = [K][v] + [P_0], \quad (2.23)$$

Выясним, каким образом можно найти матрицы  $[K]$  и  $[P_0]$ , зная матрицы  $[K^e]$  и  $[P_0^e]$  для всех элементов, образующих систему.

Запишем уравнение (2.23) в блочной форме

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1i} & K_{1j} & \dots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2i} & K_{2j} & \dots & K_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & K_{i2} & \dots & K_{ii} & K_{ij} & \dots & K_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mi} & K_{mj} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ v_j \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ \vdots \\ P_{0i} \\ \vdots \\ P_{0m} \end{bmatrix},$$

где подматрицы  $[K_{ij}]$  в самом общем случае имеют размер  $b \times b$ .

Выпишем  $i$ -ю строку этого равенства:

$$[P_i] = [K_{i1}][v_1] + [K_{i2}][v_2] + \dots + [K_{ii}][v_i] + [K_{ij}][v_j] + \dots + [K_{im}][v_m] + [P_{0i}]. \quad (2.24)$$

Для вычисления подматриц  $[K_{ij}]$  и  $[P_{0i}]$  рассмотрим равновесие узла  $i$  (рисунок 2.15). В этом узле может соединяться несколько стержней. В узле приложена внешняя нагрузка, образующая матрицу  $[P_i]$ .

Мысленно разомкнем стержни. В узле  $i$  каждого из стержневых элементов возникают узловые силы, определяемые перемещениями  $[v^e]$  и внеузловыми нагрузками. Так, например, для стержня  $a$  можно записать

$$[P^a] = [K^a][v^a] + [P_0^a]$$

или, в блочном виде,

$$\begin{bmatrix} P_i^a \\ P_r^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^a & K_{ir}^a \\ K_{ri}^a & K_{rr}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{0i}^a \\ P_{0r}^a \end{bmatrix}.$$

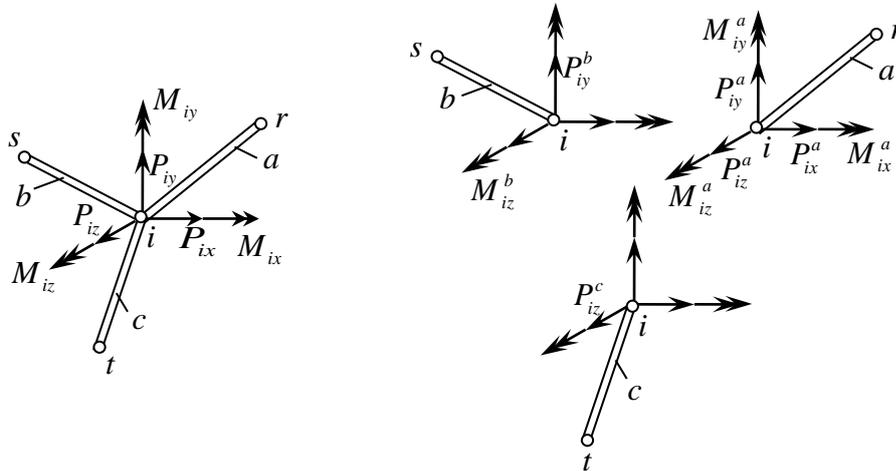


Рисунок 2.15 – Схема действия сил и моментов в узле  $i$

Отсюда получим выражение для матрицы сил, действующих в узле  $i$  на рассматриваемый элемент  $a$ :

$$[P_i^a] = [K_{ii}^a][v_i] + [K_{ir}^a][v_r] + [P_{0i}^a]. \quad (2.25)$$

Аналогично, для двух других стержней  $b$  и  $c$ :

$$\begin{aligned} [P_i^b] &= [K_{ii}^b][v_i] + [K_{is}^b][v_s] + [P_{0i}^b]; \\ [P_i^c] &= [K_{ii}^c][v_i] + [K_{it}^c][v_t] + [P_{0i}^c]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Соединив теперь стержни в узле  $i$ , будем иметь, очевидно,

$$\begin{aligned} P_{ix} &= P_{ix}^a + P_{ix}^b + P_{ix}^c; \\ \dots & \\ M_{ix} &= M_{ix}^a + M_{ix}^b + M_{ix}^c, \\ \dots & \end{aligned}$$

или, в матричной форме,

$$[P_i] = [P_i^a] + [P_i^b] + [P_i^c].$$

Подставляя сюда выражения (2.25) и (2.26), получим

$$[P_i] = ([K_{ii}^a] + [K_{ii}^b] + [K_{ii}^c])[v_i] + [K_{ir}^a][v_r] + [K_{is}^b][v_s] + [K_{it}^c][v_t] + ([P_{0i}^a] + [P_{0i}^b] + [P_{0i}^c]).$$

Сопоставим данный результат с общим выражением (2.24). Прежде всего замечаем, что в полученном выражении отсутствуют члены, содержащие перемещения тех узлов  $j$ , которые не связаны с узлом  $i$  непосредственно с помощью стержня. Это означает, что соответствующие подматрицы  $[K_{ij}]$  являются нулевыми. Если же узлы  $i$  и  $j$  связаны стержнем  $e$ , то множителем при  $[v_j]$  является подматрица жёсткости  $[K_{ij}^e]$  этого стержня в общей системе координат. Наконец, множитель при  $[v_i]$ , являющийся диагональным элементом матрицы  $[K]$ , равен сумме

$$[K_{ii}] = \sum_e [K_{ii}^e],$$

где суммирование производится по всем стержням, сходящимся в узле  $i$ .

Аналогичное правило суммирования получается и для вычисления матрицы  $[P_{0i}]$ , которая находится по формуле

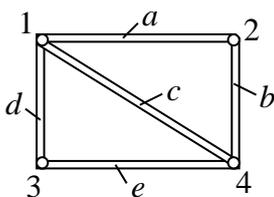
$$[P_{0i}] = \sum_e [P_{0i}^e].$$

Таким образом, матрицу жёсткости стержневой системы можно образовать из матриц жёсткости разрозненных элементов по следующему правилу:

- 1)  $[K_{ij}] = [0]$ , если узлы  $i$  и  $j$  не принадлежат одновременно к одному из стержней;
- 2)  $[K_{ij}] = [K_{ij}^e]$ , если узлы  $i$  и  $j$  связаны стержнем  $e$ ;
- 3)  $[K_{ii}] = \sum_e [K_{ii}^e]$ , где суммирование производится по всем стержням, сходящимся в узле  $i$ .

Матрица реакций на внеузловую нагрузку формируется по правилу

$$[P_{0i}] = \sum_e [P_{0i}^e].$$



**Рисунок 2.16 – Пример стержневой системы**

В случае ферменной конструкции все рассуждения остаются в силе, только размер подматриц  $[K_{ij}]$  будет  $3 \times 3$ .

В качестве примера покажем схему формирования матрицы жёсткости стержневой системы, изображённой на рисунке 2.16:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^a + K_{11}^c + K_{11}^d & K_{12}^a & K_{13}^d & K_{14}^c \\ K_{21}^a & K_{22}^a + K_{22}^b & 0 & K_{24}^b \\ K_{31}^d & 0 & K_{33}^d + K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^c & K_{42}^b & K_{43}^e & K_{44}^b + K_{44}^c + K_{44}^e \end{bmatrix}.$$

## 2.9 Сокращение матрицы жёсткости стержневой системы и определение узловых перемещений

До сих пор мы предполагали, что зависимость

$$[P] = [K][v] + [P_0] \quad (2.27)$$

служит для определения сил  $[P]$ , необходимых для создания заданных перемещений. Если же, наоборот, заданы силы, действующие в узлах стержневой системы, то равенство (2.27) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно перемещений  $[v]$ :

$$[K][v] = [P] - [P_0]. \quad (2.28)$$

Если конструкция закреплена, то перемещения соответствующих узлов в направлении опорных связей равны нулю, остальные же перемещения подлежат определению.

Рассмотрим пример фермы (рисунок 2.17). Все компоненты перемещений можно расположить таким образом, чтобы в матрице  $[v]$  сначала перечислялись все неизвестные, а затем известные (нулевые) перемещения. Матрицу неизвестных перемещений будем обозначать  $[v_\alpha]$ . Для нашего случая она равна

$$[v_\alpha] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_9 \\ v_{12} \end{bmatrix}.$$

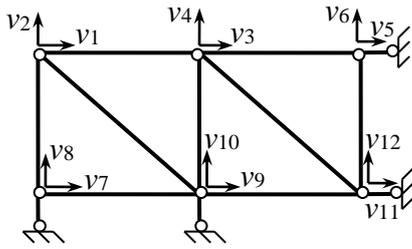


Рисунок 2.17 – Закреплённая стержневая система

Матрицу известных (нулевых) перемещений будем обозначать через  $[v_\beta]$ :

$$[v_\beta] = \begin{bmatrix} v_5 \\ v_8 \\ v_{10} \\ v_{11} \end{bmatrix} = [0].$$

Тогда будем иметь

$$[v] = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ \dots \\ v_\beta \end{bmatrix}.$$

Поскольку порядок перечисления сил в матрицах  $[P]$  и  $[P_0]$  всегда должен строго соответствовать порядку следования перемещений в матрице  $[v]$ , то необходимо записать

$$[P] = \begin{bmatrix} P_\alpha \\ \dots \\ P_\beta \end{bmatrix}; \quad [P_0] = \begin{bmatrix} P_{0\alpha} \\ \dots \\ P_{0\beta} \end{bmatrix}.$$

В матрицу  $[P_\alpha]$  входят известные внешние силы, действующие в направлении неизвестных перемещений  $[v_\alpha]$ . Подматрица  $[P_\beta]$  содержит известные силы, действующие по направлению наложенных связей и представляющие собой реакции опор. Матрицу жёсткости конструкции также представим в блочной форме, придав равенству (2.27) следующий вид:

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{0\alpha} \\ P_{0\beta} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Отсюда следуют два матричных равенства

$$[K_{\alpha\alpha}][v_\alpha] + [K_{\alpha\beta}][v_\beta] = [P_\alpha] - [P_{0\alpha}];$$

$$[K_{\beta\alpha}][v_\alpha] + [K_{\beta\beta}][v_\beta] = [P_\beta] - [P_{0\beta}].$$

Учитывая, что  $[v_\beta] = [0]$ , их можно переписать так:

$$[K_{\alpha\alpha}][v_\alpha] = [P_\alpha] - [P_{0\alpha}]; \quad (2.30)$$

$$[K_{\beta\alpha}][v_\alpha] = [P_\beta] - [P_{0\beta}]. \quad (2.31)$$

Равенство (2.30) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных перемещений  $[v_\alpha]$ . Решая данную систему, находим  $[v_\alpha]$ . Соотношение же (2.31) может быть использовано для определения неизвестных реакций:

$$[P_\beta] = [K_{\beta\alpha}][v_\alpha] + [P_{0\beta}].$$

На практике обычно достаточно найти перемещения  $[v_\alpha]$  из решения системы (2.30). Матрица коэффициентов системы  $[K_{\alpha\alpha}]$  есть так называемая сокращённая матрица жёсткости, которая получается из полной путём вычёркивания строк и столбцов, имеющих номера известных перемещений  $[v_\beta]$ .

Если перемещения узлов конструкции найдены, то для любого элемента  $e$  (с узлами  $i$  и  $j$ ) будет известна матрица перемещений узлов в общей системе координат:

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \dots \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Используя формулу преобразования координат, можно найти матрицу перемещений в местных координатах

$$[\bar{v}] = [\lambda][v^e]$$

и далее по формуле

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}] + [\bar{P}_0]$$

определить узловые силы в местной системе координат. Зная силы, действующие на концах стержня, можно найти осевое усилие в ферменном элементе или построить эпюры перерезывающих сил, изгибающих и крутящих моментов для балочного элемента. Подобные вычисления могут быть выполнены для всех стержней.

Если конструкция не закреплена, то непосредственно из уравнения (2.28) перемещения найти нельзя, так как *полная матрица жёсткости*  $[K]$  для всей конструкции является вырожденной. Действительно, силы, действующие на свободную конструкцию, не могут быть произвольными; они должны удовлетворять уравнениям равновесия. Таких уравнений будет шесть для пространственной системы и три – для плоской. Таким образом, в случае пространственной конструкции шесть элементов матрицы  $[P] - [P_0]$  в уравнении (2.28) определяются через остальные, являясь некоторыми линейными комбинациями последних. Но тогда и соответствующие шесть элементов матрицы-столбца  $[K][v]$  будут также линейными комбинациями остальных. Это говорит о том, что строки матрицы жёсткости связаны между собой линейными зависимостями. Определитель подобной матрицы равен нулю, то есть матрица жёсткости для свободного тела является вырожденной.

Физический смысл этого состоит в том, что перемещения свободного тела не определяются однозначно действующими на него силами, поскольку оно может получить произвольное перемещение в пространстве как жёсткое целое.

Поэтому для расчёта свободной стержневой системы её нужно предварительно закрепить с помощью минимально необходимого числа правильно ориентированных связей так, чтобы устранить возможность её перемещения как жёсткого целого.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (2.30) используются различные методы – как точные (прямые), так и приближенные (итерационные). Чаще всего применяется одна из разновидностей прямого метода исключения по Гауссу. При этом учитываются такие специфические свойства матрицы жёсткости как симметрия, положительная определенность и разреженная структура.

Данный метод расчёта стержневых систем называется матричным методом перемещений, так как в качестве основных неизвестных принимаются перемещения узлов. Он позволяет решать как статически определимые, так и неопределимые конструкции. Причём чем больше внешних связей, тем ниже порядок разрешающей системы уравнений (2.30). Этим данный метод выгодно отличается от метода сил, который используется в сопротивлении материалов для раскрытия статической неопределимости. Но главное его достоинство заключается в возможности полной автоматизации вычислений, которые могут быть выполнены с помощью ЭВМ.

## 3 ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 3.1 Предмет и гипотезы теории упругости

Задача теории упругости состоит в изучении напряжённо-деформированного состояния упругих тел. В сопротивлении материалов и строительной механике подобная задача решается для тел относительно простой геометрии (стержней, пластин, оболочек) с использованием тех или иных гипотез, пригодных именно для таких тел. В теории упругости целью является получение наиболее общих соотношений, справедливых для произвольных тел при произвольном нагружении. Эти соотношения используются затем для решения частных задач. Получаемые в теории упругости решения могут иметь самостоятельную ценность, поскольку их в принципе нельзя найти методами сопротивления материалов или строительной механики (как например, в задаче о концентрации напряжений возле отверстия). В других случаях они позволяют оценить применимость приближённых методов расчёта, основанных, скажем, на гипотезе плоских сечений в технической теории изгиба бруса, или прикладных методов расчёта пластин и оболочек.

Хотя теория упругости стремится установить общие соотношения, свободные от излишних допущений, обойтись совсем без каких-бы то ни было гипотез невозможно. В основе теории упругости лежат следующие фундаментальные гипотезы.

1. Гипотеза сплошности, в соответствии с которой тело рассматривается как непрерывная среда, сплошным образом заполняющая отведённый ей объём. Благодаря этому становится возможным воспользоваться аппаратом дифференциального и интегрального исчисления.

2. Тело наделяется свойством идеальной упругости. После снятия нагрузок все точки тела возвращаются в своё первоначальное положение. Никаких остаточных деформаций не возникает.

3. Гипотеза о естественном ненапряжённом состоянии тела. При отсутствии внешних нагрузок напряжения в теле полагаются равными нулю.

4. Перемещения точек тела считаются весьма малыми по сравнению с линейными размерами тела.

Кроме того, мы будем рассматривать классический вариант линейной теории упругости, предполагая линейную зависимость между напряжениями и деформациями (закон Гука) и считая малыми деформации и углы поворота отрезков, выделенных в любой точке тела и в любом направлении.

### 3.2 Тензор напряжений

Рассмотрим некоторое тело (рисунок 3.1), отнесённое к декартовой системе координат  $x, y, z$ . Будем считать, что тело нагружено произвольным образом. В качестве нагрузок могут выступать силы поверхностные и объёмные. Первые распределены по поверхности тела; они рассчитываются на единицу площади поверхности и имеют размерность  $\text{Н/м}^2$ . Вектор поверхностных сил в некоторой точке поверхности обозначим через  $\vec{p}$ , а его проекции на координатные оси – через  $p_x, p_y, p_z$ . Примерами могут служить нормальное давление, силы трения и т.п.

Объёмные силы распределены по объёму тела. Они рассчитываются на единицу объёма и имеют размерность  $\text{Н/м}^3$ . Примером служит сила тяжести. Вектор объёмных сил обозначим через  $\vec{R}$ , а его компоненты – через  $R_x, R_y, R_z$ .

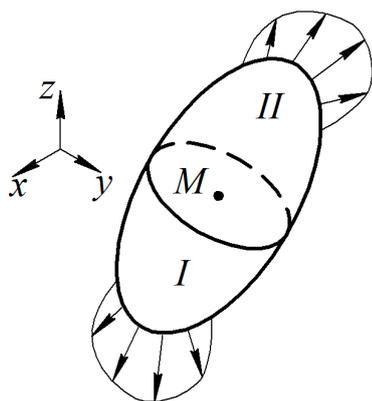


Рисунок 3.1 – Нагруженное тело

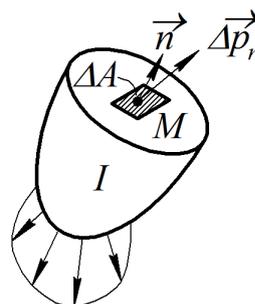


Рисунок 3.2 – Действие отброшенной части на оставшуюся

Возьмём далее произвольную точку  $M$  тела и проведём через неё поверхность, которая делит тело на две части. Отбросив мысленно часть  $II$ , рассмотрим её действие на оставшуюся часть  $I$  (рисунок 3.2).

Выделим в окрестности точки  $M$  малую площадку  $\Delta A$ , принадлежащую секущей поверхности. Через  $\vec{n}$  обозначим вектор единичной нормали к секущей поверхности в точке  $M$ , который определяет, таким образом, ориентацию площадки  $\Delta A$ . Вектор силы, действующей на площадку со стороны отброшенной части тела, обозначим через  $\Delta \vec{p}_n$ . Нижний индекс « $n$ » подчёркивает, что сила зависит от ориентации площадки, выделенной в данной точке. Отношение  $\Delta \vec{p}_n / \Delta A$  называется средним напряжением в данной площадке.

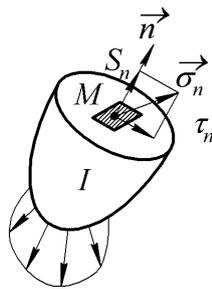
ке, а предел отношения – вектором напряжения  $\vec{\sigma}_n$  в точке  $M$  в площадке с нормалью  $\vec{n}$ :

$$\vec{\sigma}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}_n}{\Delta A}.$$

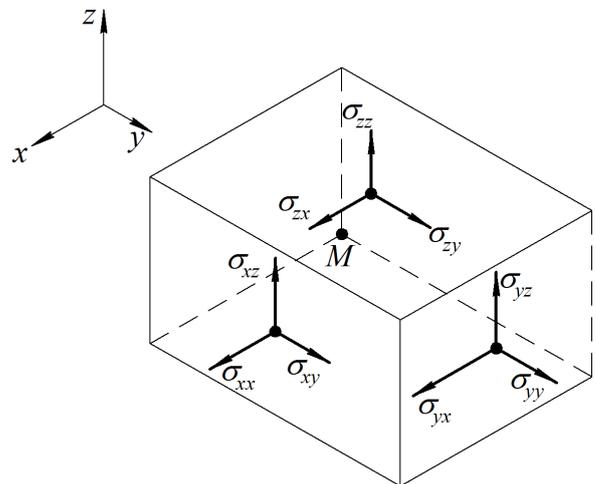
В той же точке  $M$ , но на отброшенной части  $\Pi$  тела, в соответствии с принципом равенства действия и противодействия будет действовать вектор напряжения, равный  $-\vec{\sigma}_n$ . Если под  $\vec{n}$  всегда понимать вектор внешней нормали (то есть единичной нормали, выходящей из тела), то можно записать равенство

$$\vec{\sigma}_{-n} = -\vec{\sigma}_n. \quad (3.1)$$

Вектор  $\vec{\sigma}_n$  принято разлагать на две составляющие, одна из которых есть его проекция на нормаль к площадке (нормальное напряжение  $S_n$ ), а другая – проекция на плоскость площадки (касательное напряжение  $\tau_n$ ) (рисунок 3.3). Если площадка параллельна одной из координатных плоскостей, то касательное напряжение в ней можно, в свою очередь, разложить на составляющие по осям, образующим эту плоскость. В трёх взаимно перпендикулярных площадках, выделенных в окрестности данной точки  $M$  и параллельных координатным плоскостям, будем иметь девять компонент векторов напряжений, как показано на рисунке 3.4.



**Рисунок 3.3 – Напряжения в точке  $M$  секущей поверхности**



**Рисунок 3.4 – Напряжения в декартовых площадках**

В обозначениях компонент  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y$  или  $z$ ) первый индекс указывает ориентацию площадки (то есть координатную ось, которой параллельна нормаль к площадке), а второй индекс обозначает ось, на которую проектируется вектор напряжений в этой площадке. Показанные на рисунке 3.4

направления напряжений будем считать положительными. При этом в противоположных гранях прямоугольного параллелепипеда, выделенного в точке  $M$ , положительные напряжения имеют противоположные направления, как это вытекает из равенства (3.1). Таким образом, будем руководствоваться следующим правилом знаков. *Если внешняя нормаль к площадке направлена в положительную сторону координатной оси, то положительные напряжения в этой площадке действуют также в положительных направлениях соответствующих осей.* Если же направление внешней нормали к площадке противоположно положительному направлению координатной оси, то положительные напряжения в такой площадке направлены против положительных направлений соответствующих осей. В соответствии с этим правилом, в частности, положительным считается растягивающее нормальное напряжение.

Девять компонент напряжений  $\sigma_{ij}$  в совокупности составляют физическую величину, характеризующую напряжённое состояние в данной точке тела и называемую *тензором напряжений*  $T_\sigma$ . Удобно представлять его в виде следующей таблички:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Величины  $\sigma_{ij}$  называются при этом компонентами тензора напряжений. Как известно из курса сопротивления материалов, касательные напряжения обладают свойством парности: для  $j \neq i$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (3.2)$$

Вследствие этого тензор напряжений является симметричным; независимыми оказываются фактически не девять, а только шесть его компонент.

Тензор является более сложным физическим объектом в ряду других физических величин – скаляра и вектора.

### **3.3 Напряжения на наклонной площадке. Статические условия на поверхности тела**

Как уже сказано, тензор напряжений характеризует напряжённое состояние в данной точке тела. Это означает, что если известны его компоненты  $\sigma_{ij}$ , то могут быть найдены напряжения в данной точке тела в площадке с произвольной ориентацией. Для доказательства представим себе наклонную

площадку  $ABC$ , расположенную на бесконечно близком расстоянии  $dh$  от точки  $M$  (рисунок 3.5). Ориентация площадки характеризуется нормальным к ней вектором  $\vec{n}$  единичной длины с компонентами  $n_x, n_y, n_z$ , которые представляют собой косинусы углов между вектором нормали и положительными направлениями координатных осей:

$$n_x = \cos(\vec{n}, x); \quad n_y = \cos(\vec{n}, y); \quad n_z = \cos(\vec{n}, z).$$

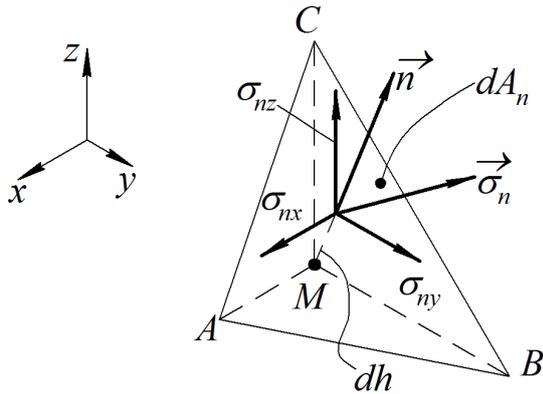


Рисунок 3.5 – Вектор напряжения в наклонной площадке

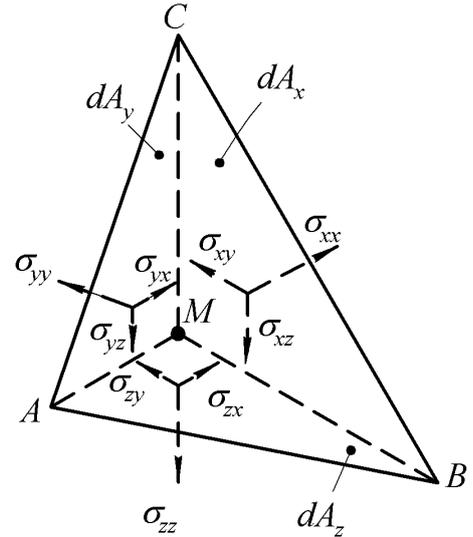


Рисунок 3.6 – Напряжения в ортогональных гранях тетраэдра

В площадке действует вектор напряжения  $\vec{\sigma}_n$  с компонентами  $\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}$ .

Точки  $A, B$  и  $C$  вместе с точкой  $M$  являются вершинами бесконечно малого тетраэдра, три грани которого параллельны координатным плоскостям. Напряжения в этих гранях, показанные на рисунке 3.6, считаем известными. Для вычисления  $\sigma_{nx}, \sigma_{ny}$  и  $\sigma_{nz}$  воспользуемся условиями равновесия тетраэдра.

Пусть площадь наклонной грани равна  $dA_n$ . Тогда площади граней с нормальными, параллельными осям  $x, y$  и  $z$ , будут равны соответственно

$$dA_x = n_x dA_n; \quad dA_y = n_y dA_n; \quad dA_z = n_z dA_n. \quad (3.3)$$

Если помимо указанных напряжений действует также объёмная сила с компонентами  $R_x, R_y, R_z$ , то условие равновесия тетраэдра в направлении оси  $x$  запишется так:

$$\sigma_{nx} dA_n - \sigma_{xx} dA_x - \sigma_{yx} dA_y - \sigma_{zx} dA_z + R_x d\tau = 0,$$

где

$$d\tau = \frac{1}{3} dA_n dh$$

– объём тетраэдра.

В записанном равенстве четыре первых слагаемых содержат множителями площади соответствующих граней и имеют второй порядок малости. Последнее же слагаемое является бесконечно малой величиной третьего порядка и его следует отбросить. Учитывая соотношения (3.3), после деления на  $dA_n$  приходим к выражению  $\sigma_{nx}$  через компоненты тензора напряжений. Добавляя аналогичные выражения для  $\sigma_{ny}$  и  $\sigma_{nz}$ , будем иметь три равенства:

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z; \\ \sigma_{ny} &= \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{zy}n_z; \\ \sigma_{nz} &= \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Зная компоненты  $\sigma_{nx}$ ,  $\sigma_{ny}$ ,  $\sigma_{nz}$ , можно найти и величину полного напряжения в наклонной площадке:

$$\sigma_n = |\vec{\sigma}_n| = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2}.\tag{3.5}$$

Нормальное напряжение  $S_n$  в наклонной площадке можно получить, если спроектировать компоненты вектора  $\vec{\sigma}_n$  на направление нормали, умножив их на  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ :

$$S_n = \sigma_{nx}n_x + \sigma_{ny}n_y + \sigma_{nz}n_z.$$

Подставляя сюда равенства (3.4), получим

$$\begin{aligned}S_n &= (\sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z)n_x + \\ &+ (\sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{zy}n_z)n_y + \\ &+ (\sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z)n_z.\end{aligned}$$

С учётом свойства парности касательных напряжений (3.2) приходим к соотношению

$$S_n = \sigma_{xx}n_x^2 + \sigma_{yy}n_y^2 + \sigma_{zz}n_z^2 + 2(\sigma_{xy}n_xn_y + \sigma_{yz}n_yn_z + \sigma_{zx}n_zn_x).\tag{3.6}$$

Наконец, касательное напряжение  $\tau_n$  в наклонной площадке может быть найдено по формуле

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_n^2 - S_n^2}.\tag{3.7}$$

Соотношения (3.4) можно приложить к случаю, когда точка  $M$  находится у поверхности  $\omega$ , ограничивающей тело, а наклонная площадка принадлежит этой поверхности. Тогда в формулах (3.4) следует заменить  $\sigma_{nx}$ ,

$\sigma_{ny}$  и  $\sigma_{nz}$  компонентами  $p_x, p_y, p_z$  поверхностной нагрузки. Таким образом, приходим к равенствам, которые должны выполняться в точках поверхности  $\omega$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z &= p_x; \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{zy}n_z &= p_y; \\ \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z &= p_z.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Подчеркнём, что  $n_x, n_y$  и  $n_z$  в последних равенствах – это направляющие косинусы нормали к поверхности  $\omega$  в рассматриваемой точке.

Равенства (3.8) устанавливают связь между напряжениями и поверхностными силами и называются *статическими условиями на поверхности тела*.

С использованием матричных обозначений

$$[\sigma_x] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}; \quad [\sigma_y] = \begin{bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}; \quad [\sigma_z] = \begin{bmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}; \quad [p] = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}\tag{3.9}$$

соотношения (3.8) можно записать в виде одного равенства

$$[\sigma_x]n_x + [\sigma_y]n_y + [\sigma_z]n_z = [p].\tag{3.10}$$

### 3.4 Главные напряжения

Как следует из предыдущих рассуждений, в произвольно ориентированной площадке могут действовать как нормальное, так и касательное напряжения. При изменении ориентации площадки будет изменяться и соотношение между ними. В каждой точке тела существуют такие *площадки*, в которых *касательное напряжение отсутствует*, то есть вектор полного напряжения направлен по нормали к площадке. Такие площадки называются *главными*, а действующие в них напряжения – *главными напряжениями*.

Пусть в точке  $M$  известны напряжения  $\sigma_{ij}$  в площадках, параллельных координатным плоскостям, и пусть площадка с направляющими косинусами нормали  $n_x, n_y, n_z$  является главной. В площадке действует только нормальное напряжение, которое обозначим через  $\sigma$ . Его проекции на координатные оси равны  $\sigma n_x, \sigma n_y$  и  $\sigma n_z$ . Подставив эти значения вместо  $\sigma_{nx}, \sigma_{ny}$  и  $\sigma_{nz}$  в равенства (3.4), придём к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно  $n_x, n_y, n_z$ :

$$(\sigma_{xx} - \sigma)n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z = 0;$$

$$\sigma_{xy}n_x + (\sigma_{yy} - \sigma)n_y + \sigma_{zy}n_z = 0; \quad (3.11)$$

$$\sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + (\sigma_{zz} - \sigma)n_z = 0.$$

Эта однородная система имеет тривиальное решение  $n_x = n_y = n_z = 0$ , которое, однако, лишено смысла, поскольку должно выполняться очевидное равенство

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (3.12)$$

Как известно из курса линейной алгебры, однородная система имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение относительно  $\sigma$ , которое мы запишем в виде

$$\sigma^3 - I_1(\sigma)\sigma^2 + I_2(\sigma)\sigma - I_3(\sigma) = 0. \quad (3.13)$$

Коэффициенты уравнения имеют следующие выражения:

$$I_1(\sigma) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}; \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} I_2(\sigma) &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \\ &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2); \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$I_3(\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}. \quad (3.16)$$

Величина главного напряжения  $\sigma$  не зависит от выбора исходной системы координат. Следовательно, коэффициенты уравнения (3.13) должны быть одинаковыми в любой системе координат, то есть должны быть инвариантны по отношению к системе координат. Величины  $I_1(\sigma)$ ,  $I_2(\sigma)$  и  $I_3(\sigma)$  называют соответственно *первым, вторым и третьим инвариантами тензора напряжений*.

Кубическое уравнение имеет три корня, из которых один всегда вещественный, а два других могут быть либо также вещественными, либо комплексно сопряжёнными. Можно показать, что благодаря симметрии тензора напряжений все три корня уравнения (3.13) будут всегда вещественными. Решив уравнение (3.13), найдём три главных напряжения  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Ориентация площадки, в которой действует главное напряжение  $\sigma_k$  ( $k=1,2$  или  $3$ ), определяется направляющими косинусами нормали, которые обозначим через  $n_x^{(k)}$ ,  $n_y^{(k)}$  и  $n_z^{(k)}$ . Для их вычисления подставим  $\sigma_k$  в равенства (3.11). Получаемая при этом система уравнений является линейно зависимой, поскольку её определитель равен нулю. Отбросив одно из уравнений (например, третье), будем иметь два равенства:

$$\begin{aligned}(\sigma_{xx} - \sigma_k)n_x^{(k)} + \sigma_{yx}n_y^{(k)} + \sigma_{zx}n_z^{(k)} &= 0; \\ \sigma_{xy}n_x^{(k)} + (\sigma_{yy} - \sigma_k)n_y^{(k)} + \sigma_{zy}n_z^{(k)} &= 0.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Добавляя к ним соотношение

$$n_x^{(k)2} + n_y^{(k)2} + n_z^{(k)2} = 1, \quad (3.18)$$

получаем три уравнения относительно искомых величин. Их решение можно выполнить следующим образом: разделим уравнения (3.17) на  $n_z^{(k)}$ , а (3.18) – на  $n_z^{(k)2}$ . Вводя обозначения

$$a_x = \frac{n_x^{(k)}}{n_z^{(k)}}; \quad a_y = \frac{n_y^{(k)}}{n_z^{(k)}}, \quad (3.19)$$

приведём эти уравнения к виду

$$\begin{aligned}(\sigma_{xx} - \sigma_k)a_x + \sigma_{yx}a_y &= -\sigma_{zx}; \\ \sigma_{xy}a_x + (\sigma_{yy} - \sigma_k)a_y &= -\sigma_{zy};\end{aligned}\quad (3.20)$$

$$a_x^2 + a_y^2 + 1 = \frac{1}{n_z^{(k)2}}. \quad (3.21)$$

Решение системы уравнений (3.20) даёт значения  $a_x$  и  $a_y$ . Из равенства (3.21) получим затем

$$n_z^{(k)} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a_x^2 + a_y^2}}, \quad (3.22)$$

а на основании (3.19) будем иметь также

$$n_x^{(k)} = a_x n_z^{(k)}; \quad n_y^{(k)} = a_y n_z^{(k)}.$$

Выбор знака в соотношении (3.22) безразличен, так как его изменение означает лишь смену направления вектора нормали на противоположное.

Можно показать, что если все три главных напряжения различны, то будем иметь три взаимно ортогональные главные площадки. Если же два главных напряжения равны между собой (скажем,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ), а третье отлично от них, то будем иметь бесконечное множество площадок, в которых дей-

ствуется напряжение  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Все они перпендикулярны к площадке с напряжением  $\sigma_1$  и все являются главными. В случае, когда  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ , любая площадка в данной точке тела является главной. Этот случай соответствует всестороннему растяжению или сжатию с напряжением  $\sigma$ .

Если совместить координатные оси с направлениями главных площадок, то выражения для инвариантов тензора напряжений примут вид

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2(\sigma) &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ I_3(\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned}$$

Отметим, что *главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  являются наибольшим и наименьшим для всех нормальных напряжений в наклонных площадках в данной точке тела, то есть*

$$\sigma_1 \geq \sigma_n \geq \sigma_3.$$

Более того, абсолютная величина полного напряжения в наклонной площадке не может превосходить абсолютной величины наибольшего по модулю главного напряжения.

Заметим, наконец, что наибольшее касательное напряжение в данной точке тела равно

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.23)$$

и возникает в площадке, наклонённой под углом  $45^\circ$  к главным площадкам с напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Нормальное напряжение в этой площадке

$$\sigma_{45} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

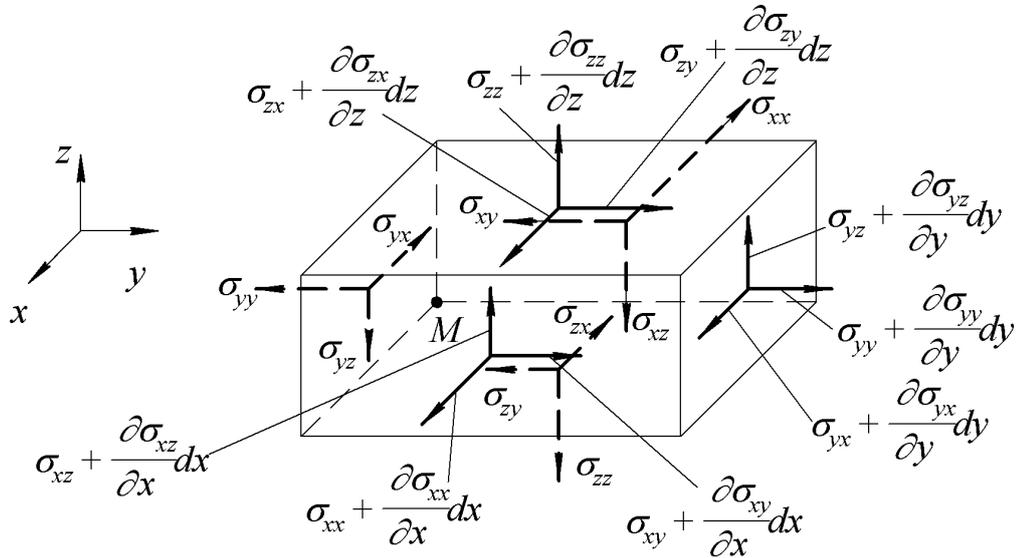
### 3.5 Дифференциальные уравнения равновесия

В окрестности некоторой точки  $M$  тела выделим бесконечно малый прямоугольный параллелепипед со сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рисунок 3.7). На гранях элемента действуют напряжения, положительные направления и величина которых указаны на рисунке. В гранях, отстоящих от точки  $M$  на расстояния  $dx$ ,  $dy$  или  $dz$ , значения напряжений отличаются от соответствующих величин в противоположных гранях на бесконечно малые приращения. При их записи следует руководствоваться формулой Тейлора

$$f(x + dx, y + dy, z + dz) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots, \quad (3.24)$$

где многоточие означает бесконечно малые величины более высоких порядков. В качестве  $f(x, y, z)$  может выступать любая из функций  $\sigma_{ij}$ .

Запишем условия равновесия выделенного элемента в проекции на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ , учитывая при этом и действие объёмных сил  $R_x, R_y, R_z$ .



**Рисунок 3.7 – Напряжения в гранях элементарного прямоугольного параллелепипеда**

Суммируя силы, действующие параллельно оси  $x$ , запишем

$$\left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \left( \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \sigma_{yx} dx dz + \left( \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_{zx} dx dy + R_x dx dy dz = 0.$$

После приведения подобных членов и сокращения на  $dx dy dz$ , получим первое из уравнений равновесия. Аналогично получают и два других, так что в итоге приходим к трём равенствам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + R_x &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + R_y &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + R_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Условия равенства нулю моментов относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  приводят к известным соотношениям парности касательных напряжений:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}; \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz},$$

которые уже использовались ранее.

Уравнения (3.25) устанавливают дифференциальную связь между компонентами тензора напряжений и называются *дифференциальными уравнениями равновесия*. Если снова воспользоваться матричными обозначениями

$$[\sigma_x] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}; \quad [\sigma_y] = \begin{bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}; \quad [\sigma_z] = \begin{bmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}; \quad [R] = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix},$$

то уравнения (3.25) могут быть представлены в форме одного равенства

$$\frac{\partial[\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial[\sigma_z]}{\partial z} + [R] = [0]. \quad (3.26)$$

Совокупность дифференциальных уравнений равновесия и статических условий на поверхности называют *статическими соотношениями теории упругости*.

### 3.6 Формулы Коши. Тензор деформации

В результате деформирования точки тела перемещаются в новые положения. Штриховой линией на рисунке 3.8 показана деформированная форма тела, а через  $M'$  – положение некоторой точки  $M$  тела, занимаемое последней в деформированном состоянии. Вектор  $\vec{u} = \overline{MM'}$  назовём *вектором перемещения* точки  $M$ . Его компоненты  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ , представляющие собой проекции вектора  $\vec{u}$  на координатные оси, будем называть перемещениями точки  $M$  в направлении соответствующих координатных осей. Подчеркнём, что перемещения считаются весьма малыми по сравнению с линейными размерами тела, так что деформирование тела на рисунке 3.8 изображено в сильно преувеличенном масштабе.

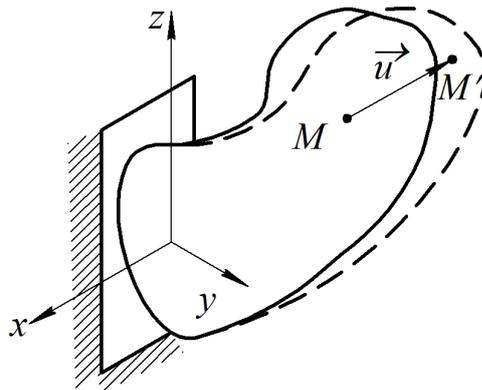


Рисунок 3.8 – Исходная и деформированная форма тела

Зная перемещения во всех точках тела, можно найти относительные деформации, возникающие в каждой точке. На рисунке 3.9 показаны два отрезка  $MA$  и  $MB$  в произвольной точке  $M$  тела. Отрезки ориентированы до деформации параллельно координатным осям  $x$ ,  $y$  и имеют размеры  $dx$ ,  $dy$ . При деформировании тела точки  $M$ ,  $A$  и  $B$  попадают в положения, которые в проекции на плоскость  $xu$  отмечены буквами  $M'$ ,  $A'$  и  $B'$ . В результате этого изменяются длины отрезков, а также угол между ними. Будем считать, что относительные деформации отрезков весьма малы. Углы, на которые они поворачиваются, также будем считать малыми, отождествляя синусы или тангенсы этих углов с самими углами, а косинусы полагая равными единице.

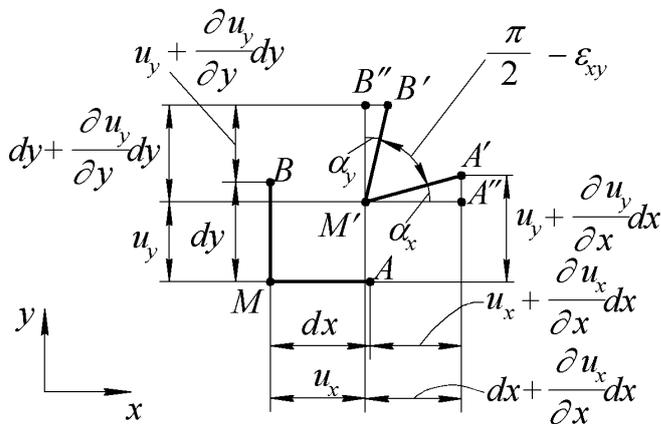


Рисунок 3.9 – Перемещения в окрестности точки  $M$

тангенсы этих углов с самими углами, а косинусы полагая равными единице.

Если точка  $M$  имеет в плоскости  $x, y$  перемещения  $u_x$  и  $u_y$ , то перемещения точки  $A$ , отстоящей от неё на расстоянии  $dx$ , с точностью до малых высших порядков будут  $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$  и

$u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx$ , как это вытекает из

формулы Тейлора (3.24). Обозначим через  $\epsilon_{xx}$  относительное удлинение отрезка  $MA$ , первоначально параллельного оси  $x$ :

$$\epsilon_{xx} = \frac{M'A' - MA}{MA}.$$

Здесь  $MA = dx$ . Длину отрезка  $M'A'$  можно определить так:

$$M'A' = \frac{M'A''}{\cos \alpha_x},$$

где  $\cos \alpha_x \approx 1$  в силу малости угла поворота  $\alpha_x$  отрезка  $MA$  при деформации.

Но

$$M'A'' = dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx,$$

так что

$$\epsilon_{xx} = \frac{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Следует отметить, что вследствие перемещения  $u_z$  отрезок  $MA$  после деформации будет в общем случае составлять некоторый угол с плоскостью  $xu$ . Но косинус этого угла в силу его малости можно отождествить с единицей, что позволяет не делать различия между длиной деформированного отрезка и его проекцией  $M'A'$  на плоскость  $xu$ .

Подобным же образом можно выразить через перемещения относительные удлинения отрезков, параллельных осям  $y$  и  $z$ . В результате приходим к соотношениям

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (3.27)$$

Обозначим далее через  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  и  $\varepsilon_{zx}$  деформации сдвига в плоскостях  $xu$ ,  $yz$  и  $zx$  соответственно. Они представляют собой изменение прямых углов между взятыми в точке  $M$  отрезками, первоначально параллельными осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Деформацию сдвига будем считать положительной, если происходит уменьшение прямого угла, как показано для  $\varepsilon_{xy}$  на рисунке 3.9. Как видно из рисунка,

$$\varepsilon_{xy} = \alpha_x + \alpha_y.$$

Угол  $\alpha_x$  равен

$$\alpha_x \approx \sin \alpha_x = \frac{A'A''}{M'A'}.$$

Но  $A'A'' = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx$ , а  $M'A' = dx(1 + \varepsilon_{xx})$ . Таким образом,

$$\alpha_x = \frac{1}{1 + \varepsilon_{xx}} \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Поскольку  $\varepsilon_{xx} \ll 1$ , можно принять

$$\alpha_x = \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Аналогично находим

$$\alpha_y = \frac{\partial u_x}{\partial y},$$

так что для  $\varepsilon_{xy}$  получается выражение

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Подобным же образом выводятся формулы для  $\varepsilon_{yz}$  и  $\varepsilon_{zx}$ . В дополнение к соотношениям (3.27) устанавливаем, таким образом, ещё три равенства:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (3.28)$$

Шесть равенств (3.27) и (3.28) позволяют определить деформации в каждой точке тела и называются *геометрическими соотношениями теории упругости, или формулами Коши*.

Итак, деформация в каждой точке тела характеризуется шестью величинами – тремя относительными удлинениями и тремя деформациями сдвига. В совокупности эти величины определяют физическую величину, называемую тензором деформаций  $T_\varepsilon$ . Его можно представить следующей таблицей:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Величины  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\frac{1}{2}\varepsilon_{xy}$ ,  $\frac{1}{2}\varepsilon_{yz}$ ,  $\frac{1}{2}\varepsilon_{xz}$  называются компонентами тензора деформаций.

### 3.7 Главные деформации

Компоненты тензора деформаций зависят от выбора координатной системы. Если поворачивать координатные оси, то будут изменяться и значения компонент. Можно показать, что для каждой точки тела существуют такие три взаимно перпендикулярных направления, для которых *деформации сдвига равны нулю*. Эти направления называются *главными направлениями тензора деформаций*. Относительные удлинения в главных направлениях называются *главными деформациями* и обозначаются через  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ .

Главные деформации являются корнями кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - I_1(\varepsilon)\varepsilon^2 + I_2(\varepsilon)\varepsilon - I_3(\varepsilon) = 0,$$

коэффициентами которого являются *инварианты тензора деформаций*:

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz};$$

$$I_2(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix};$$

$$I_3(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}.$$

### 3.8 Объёмная деформация

Найдём относительное изменение объёма в окрестности некоторой точки тела. Выделим возле точки бесконечно малый прямоугольный параллелепипед с размерами рёбер  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ , имеющий до деформации объём  $d\tau = dx dy dz$ . Деформированный параллелепипед будет иметь размеры рёбер  $(1 + \varepsilon_{xx})dx$ ,  $(1 + \varepsilon_{yy})dy$  и  $(1 + \varepsilon_{zz})dz$ , а его объём с точностью до малых величин более высоких порядков станет равным

$$\begin{aligned} d\tau' &= (1 + \varepsilon_{xx})dx(1 + \varepsilon_{yy})dy(1 + \varepsilon_{zz})dz = \\ &= (1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz})dx dy dz \approx \\ &\approx (1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})dx dy dz. \end{aligned}$$

Изменение объёма  $d\tau' - d\tau$ , отнесённое к первоначальному объёму  $d\tau$ , называется *объёмной деформацией*. Обозначая эту величину буквой  $\theta$ , запишем

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

Как видим, формула для  $\theta$  совпадает с выражением для первого инварианта тензора деформаций.

### 3.9 Уравнения совместности деформаций Сен-Венана

Формулы Коши (3.27) и (3.28) позволяют вычислить деформации по известным перемещениям. В том случае, если, наоборот, деформации заданы как функции координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , эти соотношения можно использовать как дифференциальные уравнения для определения перемещений. Но тогда для нахождения трёх функций  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  будем иметь шесть соотношений Ко-

ши, и система уравнений может в общем случае оказаться несовместной. Она будет непротиворечивой (то есть совместной) лишь тогда, когда деформации связаны между собой определёнными зависимостями. Чтобы установить эти зависимости, следует исключить перемещения из соотношений Коши.

Продифференцируем выражение для  $\varepsilon_{xx}$  дважды по  $y$ , а  $\varepsilon_{yy}$  – дважды по  $x$  и сложим результаты:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).$$

Замечая, что в соответствии с первым равенством (3.28)

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \varepsilon_{xy},$$

приходим к одному из искомым соотношений:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Аналогично получаются ещё два подобных равенства; их можно вывести с помощью круговой замены индексов в последнем выражении.

Ещё три равенства установим, если, наоборот, исключим перемещения из соотношений (3.28) с помощью формул (3.27). Продифференцируем  $\varepsilon_{xy}$  по  $z$ ,  $\varepsilon_{yz}$  по  $x$ , а  $\varepsilon_{zx}$  по  $y$ , после чего два из полученных результатов сложим, а третий вычтем. Например,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} = \\ & = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

После приведения подобных членов (подчёркнутые слагаемые) в правой части остаётся удвоенная производная от  $u_x$  по координатам  $y$  и  $z$ . Если продифференцировать равенство по координате  $x$  и воспользоваться выражением для  $\varepsilon_{xx}$ , то придём к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}.$$

С помощью круговой замены индексов запишем ещё два подобных равенства.

Таким образом, мы получаем шесть уравнений, которые связывают между собой деформации и называются *уравнениями совместности деформаций Сен-Венана*:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}; \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}; \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x}; \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}; \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z}; \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Соотношения (3.29) являются следствием формул Коши. Подстановка последних в равенства (3.29) приводит к тождествам. Например, первое из уравнений (3.29) при подстановке в него формул Коши превращается в тождество вида

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Следовательно, при использовании формул Коши равенства (3.29) можно не принимать во внимание, поскольку они удовлетворяются в этом случае автоматически. Но если при решении какой-либо задачи вначале отыскиваются деформации, а по ним – перемещения, то искомые деформации должны быть подчинены условиям (3.29), иначе определение перемещений станет невозможным.

Соотношениям (3.29) можно придать простой механический смысл. Предположим, что тело до деформации разбито на элементарные объёмы. Если задать шесть независимых функций координат  $\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{zx}$  и деформировать каждый из элементарных объёмов в соответствии с этими функциями, то из деформированных элементов невозможно будет, вообще говоря, составить сплошное непрерывное тело: элементы будут перекрывать друг друга, между ними образуются разрывы и т.д. И лишь в том случае, когда деформации удовлетворяют соотношениям (3.29), деформированные элементы, плот-

но прилегая друг к другу, составят сплошное деформированное тело. По этой причине равенства (3.29) называют также уравнениями неразрывности.

### 3.10 Закон Гука для изотропного тела

Изотропным называется тело, упругие свойства которого одинаковы во всех направлениях. Закон Гука, устанавливающий линейную связь деформаций с напряжениями, для изотропного тела выражается соотношениями, известными из сопротивления материалов:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} - \mu\sigma_{zz}); \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \mu\sigma_{xx} - \mu\sigma_{zz}); \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \mu\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy});\end{aligned}\tag{3.30}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{G}\sigma_{yz}; \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{G}\sigma_{zx}.\tag{3.31}$$

В этих формулах  $E$ ,  $G$  – нормальный модуль упругости и модуль сдвига материала;  $\mu$  – коэффициент поперечного сужения или коэффициент Пуассона. Две из этих трёх упругих постоянных являются независимыми, третья же связана с ними равенством

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.\tag{3.32}$$

Введём матрицы-столбцы напряжений  $[\sigma]$  и деформаций  $[\varepsilon]$ :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}; \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix}.$$

Тогда соотношения (3.30) и (3.31) могут быть записаны кратко в виде

$$[\varepsilon] = [\Phi][\sigma],\tag{3.33}$$

где

$$[\Phi] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Представим далее соотношения закона Гука в обратной форме. Сложим сначала равенства (3.30):

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} - 2\mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right].$$

Обозначив через

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (3.35)$$

среднее напряжение и учитывая, что сумма

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

есть объёмная деформация, приходим к равенству

$$\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma_0. \quad (3.36)$$

Записанное в виде

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (3.37)$$

оно носит название *закона упругого изменения объёма*. Здесь упругая постоянная

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (3.38)$$

называется объёмным модулем упругости.

Из равенства (3.36) вытекает соотношение

$$\sigma_0 = \frac{E}{3(1-2\mu)} \theta,$$

с помощью которого преобразуем первую из формул (3.30) следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx} + \mu\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] = \\ &= \frac{(1+\mu)}{E} \sigma_{xx} - \frac{3\mu}{E} \sigma_0 = \frac{1}{2G} \sigma_{xx} - \frac{3\mu}{E} \frac{E}{3(1-2\mu)} \theta = \frac{\sigma_{xx}}{2G} - \frac{\mu}{1-2\mu} \theta. \end{aligned}$$

Отсюда выводим выражение  $\sigma_{xx}$  через деформации:

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\theta,$$

где  $\lambda$  – ещё одна упругая постоянная:

$$\lambda = \frac{2G\mu}{1-2\mu} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \quad (3.39)$$

Таким образом, соотношения (3.30) и (3.31) в обратной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\theta; \\ \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda\theta; \\ \sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\theta; \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy}; \quad \sigma_{yz} = G\varepsilon_{yz}; \quad \sigma_{zx} = G\varepsilon_{zx}. \quad (3.41)$$

Соотношения (3.40) и (3.41) называются *законом Гука в форме Ламе*; а постоянные  $G$  и  $\lambda$  – упругими постоянными Ламе.

С использованием матричных обозначений придадим этим формулам вид

$$[\sigma] = [k][\varepsilon], \quad (3.42)$$

где

$$[k] = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Ясно, что

$$[k] = [\Phi]^{-1}.$$

### 3.11 Постановка задачи теории упругости

В общем случае для решения задачи теории упругости необходимо найти шесть компонент напряжений, шесть компонент деформаций и три компоненты перемещений – всего 15 неизвестных функций координат. Для их отыскания мы располагаем тремя дифференциальными уравнениями равновесия, в матричной форме записываемых в виде равенства

$$\frac{\partial[\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial[\sigma_z]}{\partial z} + [R] = [0],$$

шестью геометрическими соотношениями Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}; & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}; & \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned}$$

и шестью формулами закона Гука в виде матричного равенства

$$[\varepsilon] = [\Phi][\sigma]$$

или

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon].$$

Итого мы имеем 15 уравнений, так что система уравнений получается замкнутой.

Особняком стоят уравнения совместности деформаций. При использовании формул Коши они, как уже говорилось, удовлетворяются автоматически. Их назначение при решении задач теории упругости будет рассмотрено ниже.

Искомые функции должны быть подчинены граничным условиям, то есть условиям закрепления и нагружения тела на поверхности, ограничивающей тело. В общем случае поверхность  $\omega$  тела может быть представлена в виде суммы двух составляющих:

$$\omega = \omega_u + \omega_p.$$

Здесь  $\omega_u$  – та часть поверхности, где тело закреплено, или, в более общем случае, где заданы перемещения точек поверхности. Через  $\omega_p$  обозначена остальная часть поверхности, которая свободна от закреплений и на которой, следовательно, заданы поверхностные нагрузки.

Таким образом, на  $\omega_u$  должны быть удовлетворены геометрические (или кинематические) граничные условия

$$u_x = u_x^*, \quad u_y = u_y^*, \quad u_z = u_z^*,$$

где  $u_x^*$ ,  $u_y^*$ ,  $u_z^*$  – заданные перемещения. На  $\omega_p$  должны удовлетворяться статические граничные условия

$$[\sigma_x]n_x + [\sigma_y]n_y + [\sigma_z]n_z = [p].$$

Возможны два основных пути решения задачи теории упругости – «в перемещениях» либо «в напряжениях».

В первом случае в качестве основных неизвестных функций принимаются перемещения  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$  и  $u_z(x, y, z)$ . Зная их, можно найти

деформации по формулам Коши, а затем по закону Гука – напряжения. Для определения этих трёх функций мы располагаем тремя уравнениями равновесия, которые следует представить как уравнения относительно перемещений.

В другом варианте за основные неизвестные принимаются напряжения. Для их определения нужно воспользоваться, прежде всего, уравнениями равновесия. Кроме того, необходимо дополнительно привлечь уравнения совместности деформаций, записанные через напряжения. Отыскание перемещений требует в этом случае интегрирования соотношений Коши, что может быть осуществлено благодаря выполнению уравнений совместности.

В некоторых случаях для решения задачи можно воспользоваться так называемым *полуобратным методом Сен-Венана*. В соответствии с ним частью неизвестных из тех или иных соображений задаются, а остальные определяют таким образом, чтобы удовлетворить всем соотношениям теории упругости.

Может быть доказана следующая *теорема единственности*. Если получено решение задачи, удовлетворяющее всем уравнениям теории упругости, то оно единственно. Следовательно, безразлично, каким путём найдено или, может быть, угадано решение той или иной задачи. Важно лишь, чтобы не были нарушены никакие соотношения теории упругости.

Остановимся далее подробнее на упомянутых двух основных путях решения задачи теории упругости.

### 3.12 Решение задачи теории упругости в перемещениях

Как уже сказано, разрешающие уравнения относительно перемещений выводятся из дифференциальных уравнений равновесия. Запишем первое из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + R_x = 0 \quad (3.44)$$

и выразим здесь напряжения через перемещения.

Согласно закону Гука имеем

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\theta; \quad \sigma_{yx} = G\varepsilon_{yx}; \quad \sigma_{zx} = G\varepsilon_{zx},$$

где  $\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ ;  $G$  и  $\lambda$  – постоянные Ламе. С учётом формул Коши представим эти выражения в виде

$$\sigma_{xx} = 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\theta; \quad \sigma_{yx} = G \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right); \quad \sigma_{zx} = G \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right),$$

где

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (3.45)$$

Подстановка этих выражений в равенство (3.44) даёт

$$2G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + R_x = 0.$$

Сгруппируем далее слагаемые в левой части следующим образом:

$$G \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + G \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + R_x = 0.$$

Первое выражение в круглых скобках есть оператор Лапласа от функции  $u_x$ :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \nabla^2 u_x,$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Учитывая также равенство (3.45), приходим к уравнению вида

$$G \nabla^2 u_x + G \frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + R_x = 0.$$

Подобным же образом выводим ещё два уравнения. В итоге получаем следующую систему уравнений равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} G \nabla^2 u_x + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x} + R_x &= 0; \\ G \nabla^2 u_y + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial y} + R_y &= 0; \\ G \nabla^2 u_z + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial z} + R_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Уравнения (3.46) называются *уравнениями Ламе*.

### 3.13 Решение задачи теории упругости в напряжениях

Трёх уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + R_x &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + R_y &= 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + R_z = 0$$

недостаточно для определения шести функций  $\sigma_{ij}(x, y, z)$ . Как уже говорилось, дополнительные уравнения можно получить из условий совместности деформаций, выразив в них деформации по закону Гука через напряжения. Если, кроме того, воспользоваться уравнениями равновесия, то можно привести уравнения совместности к следующему виду:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} &= -\frac{\mu}{1-\mu} \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial R_x}{\partial x}; \\ \nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y^2} &= -\frac{\mu}{1-\mu} \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial R_y}{\partial y}; \\ \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z^2} &= -\frac{\mu}{1-\mu} \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial R_z}{\partial z}; \\ \nabla^2 \sigma_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial y} &= -\left( \frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial x} \right); \\ \nabla^2 \sigma_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y \partial z} &= -\left( \frac{\partial R_y}{\partial z} + \frac{\partial R_z}{\partial y} \right); \\ \nabla^2 \sigma_{zx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial z} &= -\left( \frac{\partial R_x}{\partial z} + \frac{\partial R_z}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

где

$$\Sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}. \quad (3.48)$$

Соотношения (3.47) носят название *уравнений Бельтрами–Мичела*.

## 4 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

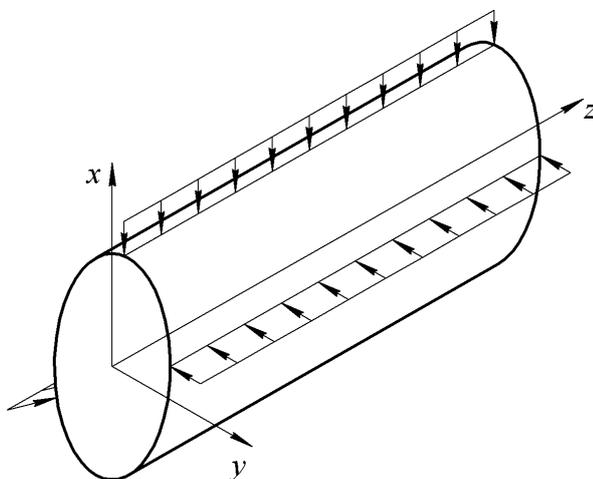
### 4.1 Плоская деформация и обобщённое плоское напряжённое состояние

Понятие «плоская задача теории упругости» охватывает широкий круг проблем, имеющих общее математическое описание и включающих два различных по физическому содержанию класса задач – плоскую деформацию и обобщённое плоское напряжённое состояние. Их отличительной особенностью является то, что все величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние, зависят лишь от двух координат – скажем,  $x$  и  $y$ . Благодаря этому общие соотношения теории упругости существенно упрощаются, что позволяет построить решения многих задач, в том числе имеющих практическое значение.

*Плоская деформация* – это такое деформирование тела, при котором перемещения всех его точек происходят параллельно плоскости  $xy$  и не зависят от координаты  $z$ , то есть

$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = 0. \quad (4.1)$$

В подобных условиях оказывается, например, цилиндрическое тело с образующей, параллельной оси  $z$ , торцевые плоскости которого закреплены от перемещений по оси  $z$ , перемещения же в направлении осей  $x$  и  $y$  не стеснены. Если к боковой поверхности тела приложены нагрузки, действующие параллельно плоскости  $xy$  и постоянные вдоль оси  $z$  (рисунок 4.1), то все сечения будут находиться в равных условиях и перемещения будут подчиняться соотношениям (4.1). Приблизительно так работают прямолинейная плотина, туннель метрополитена и тому подобные сооружения.



**Рисунок 4.1 – Цилиндрическое тело в условиях плоской деформации**

Воспользовавшись формулами Коши, устанавливаем, что

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx}(x, y); \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy}(x, y); \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = \varepsilon_{xy}(x, y), \quad (4.2)$$

а также

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0. \quad (4.3)$$

Из закона Гука следует, что компоненты тензора напряжений также являются функциями координат  $x, y$ , причём,  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$  в силу последних двух равенств (4.3). Заметим, что из условия  $\varepsilon_{zz} = 0$  вытекает, что напряжение  $\sigma_{zz} \neq 0$ . В самом деле, так как

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0,$$

то

$$\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (4.4)$$

Как видим, величина  $\sigma_{zz}$  выражается через  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ , то есть не имеет самостоятельного значения.

Другой вариант плоской задачи относится к случаю, когда напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  являются функциями координат  $x, y$ , а остальные компоненты тензора напряжений отсутствуют:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y); \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y); \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y); \quad (4.5)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0. \quad (4.6)$$

Такое напряжённое состояние называется *плоским*. Близкое к нему напряжённое состояние возникает в тонкой пластинке, нагруженной по боковой поверхности постоянными по её толщине силами, которые действуют параллельно основаниям (рисунок 4.2). Характер распределения напряжений по толщине пластинки показан на рисунке 4.3.

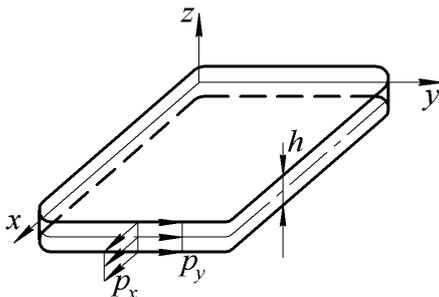


Рисунок 4.2 – Тонкая пластинка, нагруженная в своей плоскости

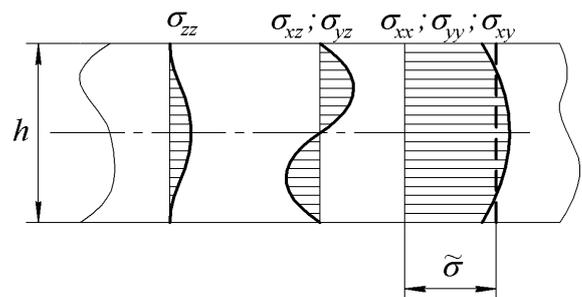


Рисунок 4.3 – Распределение напряжений по толщине пластины

Напряжения  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$  обращаются в нуль на основаниях пластины, поскольку основания свободны от внешних нагрузок. Более того, производная  $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$  также обращается на основаниях в нуль, что можно показать, воспользовавшись третьим уравнением равновесия. Поэтому напряжение  $\sigma_{zz}$  остаётся малой величиной по всей толщине пластины и можно без большой погрешности принять его равным нулю. Остальные напряжения хоть и меняются по толщине, но для тонкой пластины их зависимость от координаты  $z$  не слишком значительна и от неё можно избавиться, перейдя к средним по толщине значениям. Отмечая средние напряжения знаком «тильда», как показано на рисунке 4.3, запишем

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz; & \tilde{\sigma}_{yy} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz; & \tilde{\sigma}_{xy} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz; \\ \tilde{\sigma}_{xz} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz; & \tilde{\sigma}_{yz} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz.\end{aligned}$$

Здесь  $h$  – толщина пластины; предполагается, что плоскость  $xu$  совмещена со срединной плоскостью, которая делит толщину пластины пополам.

Касательные напряжения  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$  должны по соображениям симметрии иметь распределение по толщине, обратно-симметричное по отношению к срединной плоскости, как показано на рисунке 4.3. Поэтому их средние по толщине значения равняются нулю, то есть

$$\tilde{\sigma}_{xz} = \tilde{\sigma}_{yz} = 0.$$

Таким образом, средние напряжения при условии пренебрежения компонентой  $\sigma_{zz}$  удовлетворяют соотношениям (4.5) и (4.6). Такое напряжённое состояние называется *обобщённым плоским*. Применительно к этому случаю будем оперировать в дальнейшем средними напряжениями, а также средними деформациями и перемещениями, но знак осреднения будем для простоты опускать. Заметим, что в обобщённом плоском напряжённом состоянии деформация  $\varepsilon_{zz} \neq 0$ . Действительно, в соответствии с законом Гука (3.40) имеем

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\theta = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = 0.$$

Учитывая, что

$$\lambda = \frac{2G\mu}{1-2\mu},$$

находим отсюда

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2G + \lambda}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}). \quad (4.7)$$

Таким образом, эта деформация выражается через  $\varepsilon_{xx}$  и  $\varepsilon_{yy}$  и не имеет самостоятельного значения.

## 4.2 Основные соотношения плоской задачи теории упругости

Как плоская деформация, так и обобщённое плоское напряжённое состояние характеризуются напряжениями  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ , деформациями  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{xy}$  и перемещениями  $u_x$ ,  $u_y$ , являющимися функциями координат  $x$ ,  $y$ . При записи соотношений, описывающих эти величины, будем предполагать для общности, что помимо поверхностных нагрузок  $p_x$ ,  $p_y$  на тело действуют объёмные силы  $R_x(x, y)$  и  $R_y(x, y)$ , не зависящие от координаты  $z$ ; при этом  $R_z = 0$ .

Из трёх дифференциальных уравнений равновесия (3.25) одно превращается в нулевое тождество и остаются два равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + R_x &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + R_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Статические условия на поверхности тела (3.8) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y &= p_x; \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y &= p_y; \\ \sigma_{zz}n_z &= p_z. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Поверхность тела состоит из боковой поверхности, где  $n_z = 0$ , и двух оснований, на которых  $n_x = n_y = 0$ , а  $n_z = \pm 1$ . На боковой поверхности соотношения (4.9) сводятся к двум равенствам

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y &= p_x; \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y &= p_y, \end{aligned} \quad (4.10)$$

которые должны выполняться на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем поперечное сечение тела;  $n_x$  и  $n_y$  в этих равенствах есть направляющие косинусы нормали к контуру  $\Gamma$ .

На основаниях, где  $n_x = n_y = 0$ , первые два соотношения (4.9) приводят к условиям

$$p_x = 0, \quad p_y = 0,$$

которые свидетельствуют об отсутствии касательных нагрузок в торцевых плоскостях в условиях плоской задачи.

Последнее из уравнений (4.9) даёт при  $n_z = \pm 1$  равенство

$$\sigma_{zz} = \pm p_z.$$

В случае обобщённого плоского напряжённого состояния, когда  $\sigma_{zz} = 0$  и  $p_z = 0$ , это равенство сводится к нулевому тождеству. В случае же плоской деформации оно устанавливает, что на торцевых площадках будет действовать нагрузка  $p_z$ , равная по абсолютной величине напряжению  $\sigma_{zz}$ . Эта нагрузка является реакцией со стороны связей, запрещающих перемещение  $u_z$ . Знаки плюс или минус относятся к торцевым плоскостям, нормали к которым направлены соответственно в положительную или отрицательную стороны оси  $z$ .

Таким образом, статические условия на поверхности в плоской задаче должны записываться в виде равенств (4.10).

Обратимся далее к геометрическим соотношениям. Деформации выражаются через перемещения формулами Коши, которых остаётся только три:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (4.11)$$

При этом из шести уравнений совместности деформаций Сен-Венана (3.29) остаётся всего одно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.12)$$

Остальные уравнения в случае плоской деформации обращаются в тождества, а в случае обобщённого плоского напряжённого состояния они удовлетворяются лишь приближённо.

Закон Гука для обобщённого плоского напряжённого состояния выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}); \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \mu\sigma_{xx}); \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G}\sigma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_{xy}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Чтобы обратить эти соотношения, сложим  $\varepsilon_{xx}$  с произведением  $\mu\varepsilon_{yy}$ :

$$\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} + \mu\sigma_{yy} - \mu^2\sigma_{xx}) = \frac{1-\mu^2}{E}\sigma_{xx}.$$

С учётом полученного равенства закон Гука в обратной форме запишем так:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}); \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}); \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\varepsilon_{xy}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

В случае плоской деформации для  $\varepsilon_{xx}$  имеем выражение

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} - \mu\sigma_{zz}).$$

Учитывая, что согласно (4.4)

$$\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

получаем

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} - \mu^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = \frac{1}{E}[(1-\mu^2)\sigma_{xx} - \mu(1+\mu)\sigma_{yy}].$$

Этому равенству можно придать вид первой из формул (4.13):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E'}(\sigma_{xx} - \mu'\sigma_{yy}),$$

где обозначено

$$E' = \frac{E}{1-\mu^2}; \quad \mu' = \frac{\mu}{1-\mu}.\quad (4.15)$$

Подобным же образом можно представить и выражение для  $\varepsilon_{yy}$ .

Заметим также, что имеет место равенство

$$\frac{1 + \mu'}{E'} = \frac{\left(1 + \frac{\mu}{1 - \mu}\right)(1 - \mu^2)}{E} = \frac{1 + \mu}{E},$$

благодаря которому можно записать

$$\varepsilon_{xy} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \sigma_{xy} = \frac{2(1 + \mu')}{E'} \sigma_{xy}.$$

Из сказанного следует, что соотношения закона Гука можно в случае плоской деформации представлять в той же форме (4.13) или (4.14), что и для обобщённого плоского напряжённого состояния, заменив только упругие постоянные  $E$  и  $\mu$  на величины  $E'$  и  $\mu'$ , определяемые согласно (4.15).

### 4.3 Функция напряжений Эри

Решение плоской задачи теории упругости удобно искать в напряжениях, приняв за неизвестные  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$ . Для их нахождения мы располагаем двумя уравнениями равновесия (4.8) и уравнением совместности деформаций (4.12). Выразим последнее через напряжения, воспользовавшись законом Гука. Будем исходить из соотношений (4.13) для обобщённого плоского напряжённого состояния:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}); \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \mu\sigma_{xx}); \quad \varepsilon_{xy} = \frac{2(1 + \mu)}{E}\sigma_{xy}.$$

Внеся эти выражения в уравнение совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

получим

$$\frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} \right) = \frac{2(1 + \mu)}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Умножим это равенство на  $E$  и добавим в его левую и правую части слагаемое

$$(1 + \mu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right).$$

После приведения подобных членов будем иметь

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = (1 + \mu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \right).$$

В левой части последнего равенства содержится величина

$$\nabla^2 \sigma_{xx} + \nabla^2 \sigma_{yy} = \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

– двумерный оператор Лапласа.

В правой части напряжения можно исключить с помощью уравнений равновесия. Если продифференцировать первое из них по  $x$ , а второе – по  $y$  и результаты сложить, то получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} = 0.$$

На основании этого равенства уравнению совместности можно придать вид

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1 + \mu) \left( \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right). \quad (4.16)$$

Вместе с уравнениями равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + R_x &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + R_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

получаем замкнутую систему трёх уравнений относительно искоемых функций. Для плоской деформации в уравнении (4.16) следует заменить  $\mu$  на  $\mu' = \frac{\mu}{1 - \mu}$ . В частном случае, когда объёмные силы постоянны или отсутствуют, уравнение (4.16) становится однородным:

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (4.18)$$

При этом система уравнений не содержит упругих постоянных.

Полученную систему в случае постоянства объёмных сил можно свести к одному дифференциальному уравнению путём введения так называемой *функции напряжений Эри*  $\varphi(x, y)$ . Напряжения выражаются через неё посредством формул

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - yR_x - xR_y. \quad (4.19)$$

Соотношения (4.19) взяты с таким расчётом, чтобы удовлетворить уравнениям равновесия, в чём легко убедиться, подставив эти соотношения в

равенства (4.17). Таким образом, использование формул (4.19) означает *автоматическое удовлетворение уравнений равновесия*, и остаётся обеспечить лишь выполнение условия совместности деформаций (4.18). Подстановка в него соотношений (4.19) приводит к бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (4.20)$$

которому и должна удовлетворять функция  $\varphi$ . В развёрнутом виде это уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (4.21)$$

К уравнению (4.21) необходимо присоединить граничные условия на боковой поверхности или, что то же самое, условия на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем поперечное сечение рассматриваемого цилиндрического тела или пластины.

#### 4.4 Решение плоской задачи теории упругости в полиномах

Для пластины прямоугольной формы, нагруженной в своей плоскости распределёнными по сторонам силами, решение многих задач можно искать в виде комбинации полиномиальных функций от координат  $x$ ,  $y$ . По существу здесь используется обратный путь решения задачи. Задаваясь теми или иными функциями, удовлетворяющими уравнению (4.21), выясняют, каким условиям нагружения они соответствуют. Затем с помощью комбинации таких функций пытаются построить решение для заданной схемы нагружения.

Будем предполагать, что объёмные силы отсутствуют; тогда формулы (4.19) имеют вид

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (4.22)$$

Решения дифференциального уравнения (4.21) будем искать в виде полиномов от  $x$ ,  $y$  различных степеней:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \dots,$$

$$\varphi_0 = A_0;$$

$$\varphi_1 = A_1 x + B_1 y;$$

$$\varphi_2 = A_2 x^2 + B_2 xy + C_2 y^2;$$

$$\varphi_3 = A_3 x^3 + B_3 x^2 y + C_3 xy^2 + D_3 y^3;$$

$$\varphi_4 = A_4 x^4 + B_4 x^3 y + C_4 x^2 y^2 + D_4 xy^3 + E_4 y^4$$

и т.д. Здесь  $A_i$ ,  $B_i$ , ... – некоторые коэффициенты.

Полиномы  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  не представляют интереса, так как согласно формулам (4.22) соответствующие им напряжения оказываются нулевыми. Полиномы  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  удовлетворяют уравнению (4.21) при любых значениях коэффициентов, но полиномы более высоких степеней являются его решениями лишь при определённых ограничениях на коэффициенты. Так, для полинома четвёртой степени имеем

$$\frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^4} = 24A_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial y^4} = 24E_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y^2} = 4C_4,$$

и равенство (4.21) приводит к соотношению

$$24A_4 + 8C_4 + 24E_4 = 0.$$

Следовательно, между коэффициентами полинома четвёртой степени должна соблюдаться зависимость

$$C_4 = -3(A_4 + E_4).$$

Подобным же образом устанавливаются зависимости между коэффициентами полиномов более высоких степеней.

Рассмотрим теперь некоторые из полиномиальных функций подробнее. Примем, в частности, в качестве функции напряжений выражение

$$\varphi = A_2 x^2.$$

По формулам (4.22) имеем

$$\sigma_{yy} = 2A_2; \quad \sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0.$$

Такое напряжённое состояние соответствует равномерному одноосному растяжению пластины в направлении оси  $y$  нагрузкой, численно равной  $2A_2$  (рисунок 4.4,а). Аналогично устанавливаем, что функция напряжений вида

$$\varphi = C_2 y^2$$

описывает равномерное растяжение пластины вдоль оси  $x$  (рисунок 4.4,б). Наконец, для функции

$$\varphi = B_2 xy$$

находим, что

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0; \quad \sigma_{xy} = -B_2.$$

Это соответствует чистому сдвигу пластины усилиями интенсивности  $-B_2$  (рисунок 4.4,в).

Таким образом, полином второй степени описывает равномерное растяжение в двух направлениях и чистый сдвиг.

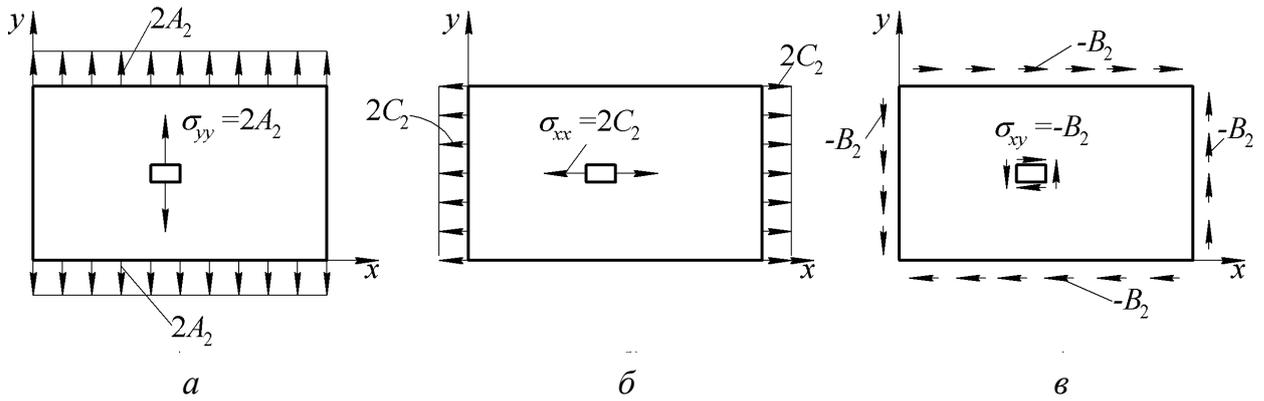


Рисунок 4.4 – Простейшие напряжённые состояния

Пусть, далее,

$$\varphi = A_3 x^3.$$

По формулам (4.22) находим

$$\sigma_{xx} = 0; \quad \sigma_{xy} = 0; \quad \sigma_{yy} = 6A_3 x.$$

Если поместить начало координат в центр прямоугольника, то такое напряжённое состояние будет представлять чистый изгиб в направлении оси  $y$  (рисунок 4.5,а). Аналогично, функция  $\varphi = D_3 y^3$  соответствует чистому изгибу в направлении оси  $x$  (рисунок 4.5,б).

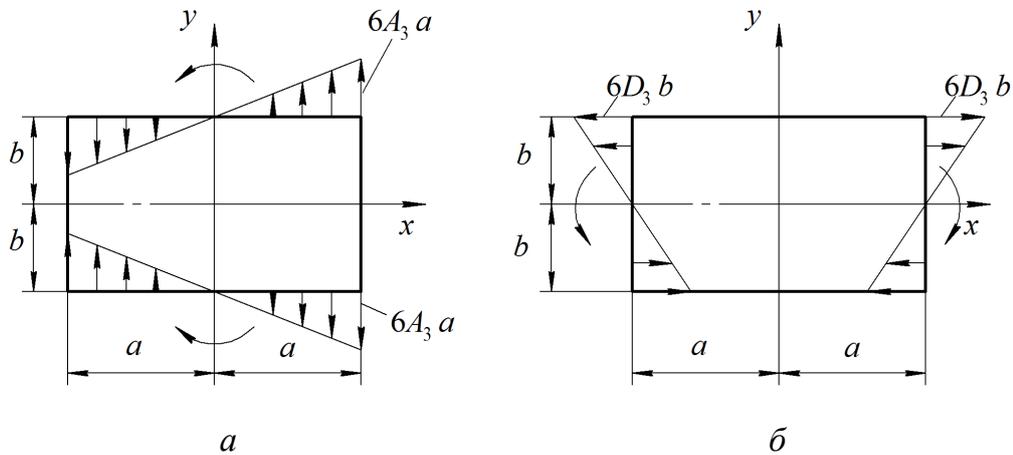


Рисунок 4.5 – Изгиб пластины в двух направлениях

Подобным образом можно проанализировать и другие полиномиальные функции. Ниже будет продемонстрировано решение в полиномах на примере задачи об изгибе консольной балки.

#### 4.5 Изгиб консольной балки силой на конце

Пусть удлинённая прямоугольная пластина единичной толщины со сторонами  $l$  и  $h$  отнесена к системе координат  $x, y$ , причём ось  $x$  делит

высоту  $h$  прямоугольника пополам (рисунок 4.6). Пластина имеет закрепление на стороне  $x=l$ ; сторона  $x=0$  нагружена касательными усилиями, результирующая которых равна  $P$ . В сопротивлении материалов такая система трактуется как консольная балка прямоугольного поперечного сечения, нагруженная силой  $P$  на конце. Мы же рассмотрим её с позиций плоской задачи теории упругости.

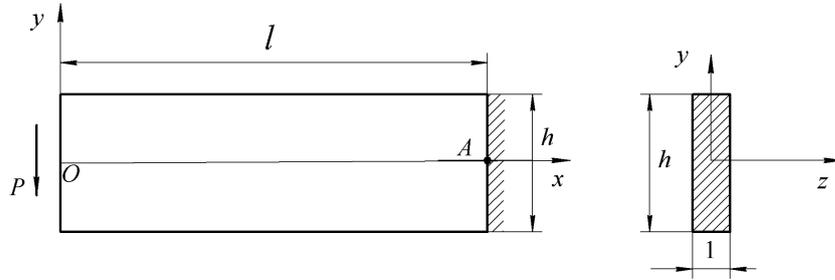


Рисунок 4.6 – Изгиб консольной балки силой на конце

Функцию напряжений будем искать в виде

$$\varphi = B_2xy + D_4xy^3.$$

Этой функции соответствуют напряжения

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6D_4xy; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -B_2 - 3D_4y^2. \quad (4.23)$$

Постоянные  $B_2$  и  $D_4$  должны быть найдены из граничных условий. На сторонах пластины  $y = \pm \frac{h}{2}$  должны выполняться условия

$$\sigma_{yy} = 0; \quad \sigma_{xy} = 0.$$

Первое из них выполняется автоматически, так как  $\sigma_{yy} = 0$  всюду. Второе условие приводит к равенству

$$-B_2 - 3D_4\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 0,$$

из которого вытекает следующая связь между постоянными:

$$B_2 = -\frac{3}{4}D_4h^2. \quad (4.24)$$

Остаётся удовлетворить граничным условиям на стороне пластины  $x=0$ . Одно из них заключается в требовании, чтобы напряжение  $\sigma_{xx}$  обращалось здесь в ноль. Это условие выполняется, как это видно из выражения (4.23) для  $\sigma_{xx}$ . Другое условие касается напряжения  $\sigma_{xy}$ , которое должно принимать заданное на стороне  $x=0$  значение. Однако детальное распре-

ление касательных усилий, создающих силу  $P$ , неизвестно. Мы располагаем только их равнодействующей. Удовлетворить данному условию можно в смягченном виде, требуя лишь выполнения интегрального равенства

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} \cdot 1 \cdot dy = P.$$

Подставим сюда выражение для  $\sigma_{xy}$ :

$$-\int_{-h/2}^{h/2} (B_2 + 3D_4 y^2) dy = P.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$-\left( B_2 h + D_4 \frac{h^3}{4} \right) = P.$$

Если подставить сюда соотношение (4.24), то найдём значение постоянной  $D_4$ :

$$D_4 = \frac{2P}{h^3}.$$

Постоянная  $B_2$  оказывается при этом равной

$$B_2 = -\frac{3P}{2h}.$$

Теперь в соответствии с формулами (4.23) получаем следующее распределение напряжений в пластине:

$$\sigma_{xx} = \frac{12P}{h^3} xy; \quad \sigma_{xy} = \frac{3P}{2h} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right); \quad \sigma_{yy} = 0. \quad (4.25)$$

Сопоставим эти результаты с теми, которые получаются по формулам сопротивления материалов. Формула для нормального напряжения в сечении балки при изгибе имеет вид

$$\sigma = \frac{M}{I} y, \quad (4.26)$$

где  $M$  – изгибающий момент в сечении;  $I$  – момент инерции сечения относительно оси  $z$ . Так как на расстоянии  $x$  от свободного конца балки  $M = Px$ , а момент инерции сечения (см. рисунок 4.6)

$$I = \frac{1 \cdot h^3}{12},$$

после подстановки этих значений в формулу (4.26) приходим к выражению

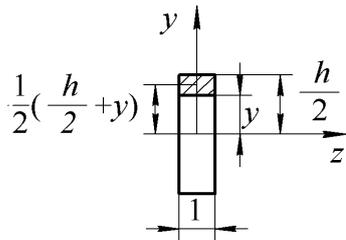
$$\sigma = \frac{12P}{h^3} xy,$$

которое совпадает с найденным выше выражением для  $\sigma_{xx}$ .

Далее касательное напряжение  $\tau$  в сечении балки вычисляется по известной формуле Журавского

$$\tau = \frac{QS}{Ib}, \quad (4.27)$$

где  $Q = P$  – поперечная сила в сечении балки;  $b = 1$  – ширина сечения;  $S$  – статический момент отсечённой части сечения относительно оси  $z$ . На рисунке 4.7 отсечённая часть сечения заштрихована; её статический момент



$$S = 1 \cdot \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

По формуле (4.27) находим

$$\tau = \frac{3P}{2h} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right),$$

**Рисунок 4.7 – Отсечённая часть сечения**

что также совпадает с выражением (4.25) для  $\sigma_{xy}$ . Заметим, наконец, что в теории изгиба балки принимается гипотеза об отсутствии надавливания волокон друг на друга, что согласуется с полученным выше результатом  $\sigma_{yy} = 0$ .

Таким образом, можно заключить, что в данной задаче решение для напряжений, полученное в сопротивлении материалов исходя из гипотезы плоских сечений, полностью совпадает с результатами вычислений на основе соотношений теории упругости.

Данный вывод не означает, однако, что сечения действительно остаются плоскими. Перемещения можно получить, интегрируя соотношения Коши. Не вдаваясь в подробности вычислений, отметим следующие особенности получаемых результатов. Во-первых, в каждом сечении перемещение  $u_x$  изменяется вдоль координаты  $y$  по кубическому закону (а не по линейному, как было бы в случае справедливости гипотезы плоских сечений). Во-вторых, перемещение  $u_y$  не постоянно по сечению, а изменяется по квадратичному закону, то есть поперечное сечение не сохраняет свою первоначальную форму, как это постулируется в технической теории изгиба балки.

Далее при интегрировании соотношений Коши появляются три постоянных интегрирования, которые должны быть подчинены условиям закрепления пластины при  $x = l$ . Располагая тремя произвольными постоянными, можно потребовать, чтобы равнялись нулю перемещения и угол поворота в

точке  $A$ , лежащей на оси бруса (см. рисунок 4.6), но не перемещения по всей стороне  $x = l$ . Условия равенства нулю перемещений в точке  $A$  записываются очевидным образом:

$$u_x \Big|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0; \quad u_y \Big|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0.$$

Что же касается угла поворота, то здесь возможны два различных варианта формулировки условия заделки:

вариант 1 – 
$$\frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0;$$

вариант 2 – 
$$\frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0.$$

Первый вариант соответствует требованию, чтобы наклон деформированной оси в точке  $A$  равнялся нулю (рисунок 4.8,*a*), второй же – требованию, чтобы отсутствовал поворот сечения в точке  $A$  (рисунок 4.8,*б*). В теории изгиба балки оба эти варианта идентичны, поскольку сечение остаётся нормальным к оси балки. Для получаемого здесь решения указанные варианты граничных условий приводят к различающимся результатам.

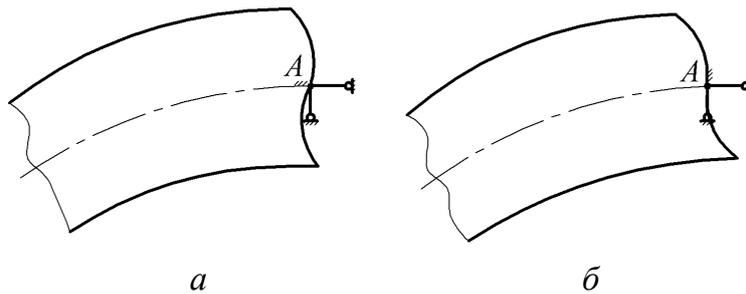


Рисунок 4.8 – Два варианта заделки

В частности, перемещение  $u_y$  в начале координат для первого варианта оказывается равным

$$u_y \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{Pl^3}{3EI},$$

что совпадает с известным выражением для максимального прогиба консольной балки, нагруженной силой на конце.

Во втором варианте получаем

$$u_y \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{Pl^3}{3EI} \left[ 1 + \frac{3(1+\mu)h^2}{4l^2} \right].$$

Второе слагаемое в скобках обусловлено влиянием деформаций поперечного сдвига  $\varepsilon_{xy}$ , которые игнорируются в технической теории бруса вследствие использования гипотезы плоских сечений. Для достаточно длинной пластины с большим отношением  $l/h$  различие между этими двумя ва-

риантами невелико. Например, при отношении  $l/h = 5$  поправка на сдвиг составляет менее 4%.

#### 4.6 Основные соотношения плоской задачи теории упругости в полярных координатах

В некоторых случаях решение плоской задачи оказывается значительно проще, если выполнять его в полярных координатах. Выведем необходимые соотношения, полагая, что все величины представляют собой функции координат  $r$  и  $\theta$ , где  $r$  – полярный радиус, а  $\theta$  – полярный угол (рисунок 4.9).

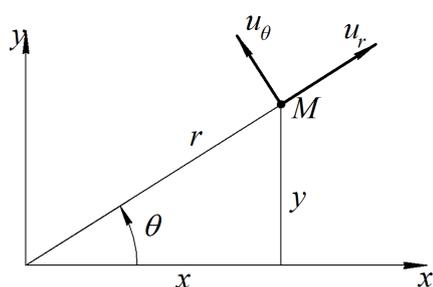


Рисунок 4.9 – Полярные координаты

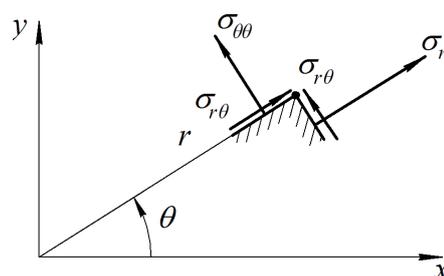


Рисунок 4.10 – Напряжения в полярных координатах

В качестве компонент вектора перемещений произвольной точки  $M$  будем теперь рассматривать радиальное  $u_r$  и окружное  $u_\theta$  перемещения, как показано на рисунке 4.9. Компоненты тензора напряжений также отнесём к полярным площадкам (рисунок 4.10). Величина  $\sigma_{rr}$  называется радиальным,  $\sigma_{\theta\theta}$  – окружным, а  $\sigma_{r\theta}$  – касательным напряжениями в полярных координатах.

##### 4.6.1 Дифференциальные уравнения равновесия в полярных координатах

На рисунке 4.11 показан бесконечно малый элемент слоя цилиндрического тела, выделенного двумя бесконечно близкими сечениями  $r = \text{const}$  и двумя сечениями  $\theta = \text{const}$ , также бесконечно близкими. Толщину слоя, перпендикулярного оси  $z$ , примем равной 1. Помимо сил, действующих в гранях элемента и показанных на рисунке 4.11, на элемент в общем случае может действовать объёмная сила с компонентами  $R_r$  и  $R_\theta$ , ориентированными соответственно в радиальном и окружном направлениях.

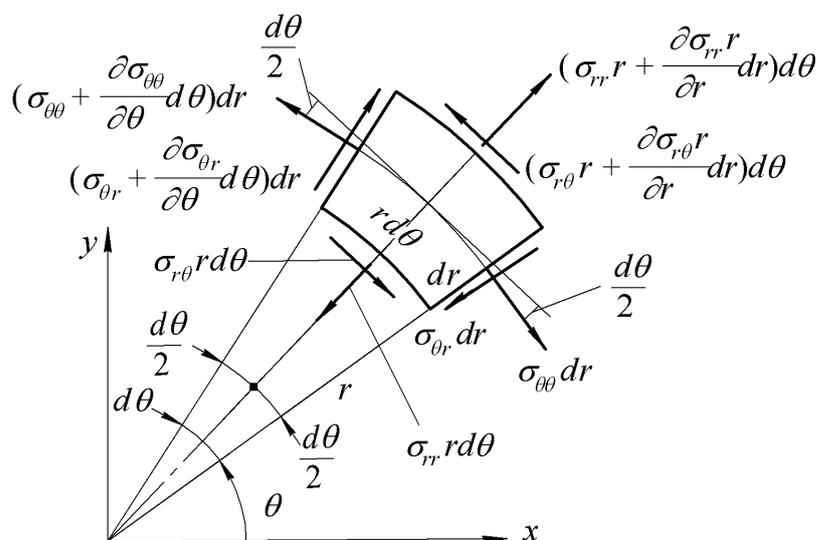


Рисунок 4.11 – Бесконечно малый элемент в полярных координатах

Спроектируем все силы на радиальное направление, характеризуемое полярным углом  $\theta + \frac{d\theta}{2}$ , и на направление хорды криволинейной стороны. Прямолинейные площадки составляют с указанным радиальным направлением угол  $\frac{d\theta}{2}$ . Полагая

$$\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1; \quad \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2},$$

условие равновесия элемента на радиальное направление запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{rr} r + \frac{\partial \sigma_{rr} r}{\partial r} dr \right) d\theta - \sigma_{rr} r d\theta + \left( \sigma_{\theta r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \sigma_{\theta r} dr - \\ & - \left( \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} - \sigma_{\theta\theta} dr \frac{d\theta}{2} + R_r r d\theta dr = 0. \end{aligned}$$

Отбросив бесконечно малую третьего порядка, которая отмечена подчёркиванием, после приведения подобных членов и деления на площадь элемента  $r dr d\theta$  приходим к следующему уравнению:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr} r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta} + R_r = 0.$$

Используя далее формулу дифференцирования произведения

$$\frac{\partial \sigma_{rr} r}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} r + \sigma_{rr},$$

получим окончательно первое уравнение равновесия в форме

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + R_r = 0. \quad (4.28)$$

Подобным же образом составим условие равновесия в проекции на хорду:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \sigma_{\theta\theta} dr + \left( \sigma_{r\theta} r + \frac{\partial \sigma_{r\theta} r}{\partial r} dr \right) d\theta - \sigma_{r\theta} r d\theta + \\ & + \left( \sigma_{\theta r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} + \sigma_{\theta r} dr \frac{d\theta}{2} + R_\theta r d\theta dr = 0. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов, отбрасывания бесконечно малой третьего порядка и деления на  $r dr d\theta$  получим равенство

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta} r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta r} + R_\theta = 0.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta} r}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} r + \sigma_{r\theta},$$

выводим окончательно второе уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + R_\theta = 0. \quad (4.29)$$

#### 4.6.2 Геометрические соотношения в полярных координатах

Обозначим через  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  и  $\varepsilon_{r\theta}$  относительные удлинения в радиальном и окружном направлениях и деформацию сдвига в полярных координатах. Для установления связи между ними и перемещениями представим каждую из этих величин в виде суммы двух составляющих:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij} \quad (i, j = r, \theta),$$

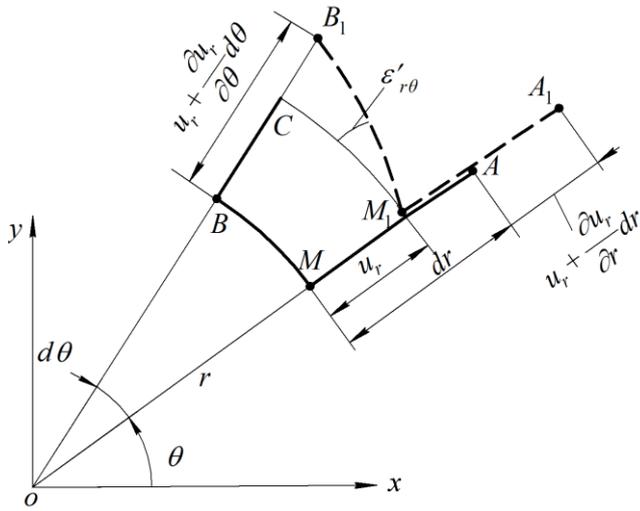
где  $\varepsilon'_{ij}$  обусловлено радиальными, а  $\varepsilon''_{ij}$  – окружными перемещениями.

Предположим вначале, что все точки получают только радиальные перемещения. Некоторая точка  $M$  с координатами  $r$ ,  $\theta$  и соседние с ней точки  $A$  и  $B$  (рисунок 4.12) переходят в положения  $M_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ . Деформированные отрезки  $M_1A_1$  и  $M_1B_1$  показаны на рисунке штриховыми линиями.

Относительное удлинение  $\varepsilon'_{rr}$  отрезка  $MA$  определяется как

$$\varepsilon'_{rr} = \frac{M_1A_1 - MA}{MA}.$$

Подставив сюда значения



**Рисунок 4.12 – Радиальные перемещения в окрестности точки  $M$**

$$MA = dr; \quad M_1A_1 = dr + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr,$$

находим

$$\varepsilon'_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}.$$

Окружную деформацию  $\varepsilon'_{\theta\theta}$  вычисляем по формуле

$$\varepsilon'_{\theta\theta} = \frac{M_1B_1 - MB}{MB},$$

где  $MB = rd\theta$ . Полагая косинус малого угла  $\varepsilon'_{r\theta}$  равным единице, можно отождествить длину

отрезка  $M_1B_1$  с длиной дуги окружности  $M_1C = (r + u_r)d\theta$ . Тогда имеем

$$\varepsilon'_{\theta\theta} = \frac{(r + u_r)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u_r}{r}.$$

Наконец, найдём деформацию сдвига  $\varepsilon'_{r\theta}$ . Не делая различия между тангенсом малого угла и самим углом и заменяя криволинейные отрезки их хордами, можно написать

$$\varepsilon'_{r\theta} = \frac{B_1C}{M_1C}.$$

Поскольку  $B_1C = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta$ , получаем

$$\varepsilon'_{r\theta} = \frac{\frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta}{(r + u_r)d\theta} = \frac{1}{r + u_r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}.$$

Учитывая, что перемещение  $u_r$  весьма мало по сравнению с  $r$ , окончательно запишем

$$\varepsilon'_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}.$$

Далее предположим, что точки  $M$ ,  $A$  и  $B$  получают только окружные перемещения, как показано на рисунке 4.13.

Снова полагая косинус малого угла  $\varepsilon''_{r\theta}$  равным единице, находим

$$\varepsilon''_{rr} = \frac{M_1A_1 - MA}{MA} \approx \frac{M_1D - MA}{MA} = 0,$$

поскольку  $M_1D = MA = dr$ .

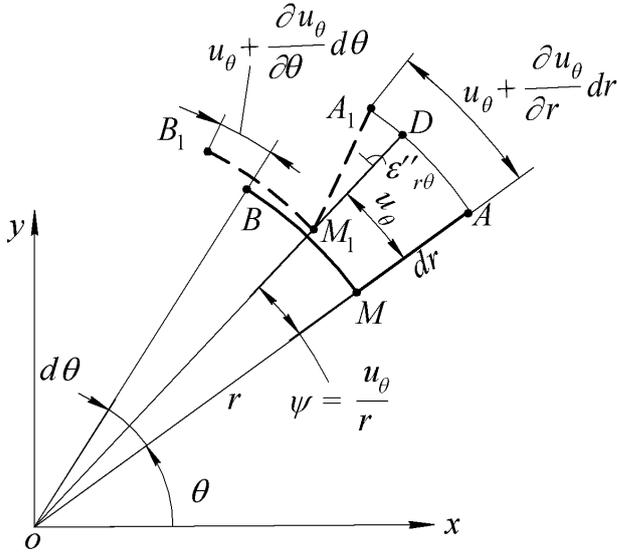


Рисунок 4.13 – Окружные перемещения в окрестности точки  $M$

Так как

$$MB = r d\theta; \quad M_1 B_1 = r d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr,$$

устанавливаем также

$$\varepsilon''_{\theta\theta} = \frac{M_1 B_1 - MB}{MB} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}.$$

Наконец находим угловую деформацию  $\varepsilon''_{r\theta}$  как отношение

$$\varepsilon''_{r\theta} = \frac{A_1 D}{M_1 D}.$$

Но

$$\begin{aligned} A_1 D &= A_1 A - AD = \left( u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr \right) - \psi (r + dr) = \\ &= u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr - \frac{u_\theta}{r} (r + dr) = \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta \right) dr. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\varepsilon''_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta.$$

Суммируя теперь отдельные составляющие, приходим к искомым геометрическим соотношениям

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta. \quad (4.30)$$

#### 4.6.3 Закон Гука в полярных координатах

Формулы закона Гука в полярных координатах выглядят так же, как и в декартовых. Для обобщённого плоского напряжённого состояния они имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \mu \sigma_{\theta\theta}); & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \mu \sigma_{rr}); \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma_{r\theta} \end{aligned} \quad (4.31)$$

или, в обратной форме,

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{rr} + \mu \varepsilon_{\theta\theta}); \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \mu \varepsilon_{rr});$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{r\theta}. \quad (4.32)$$

В случае плоской деформации следует заменить в этих формулах  $E$  на  $E'$ , а  $\mu$  на  $\mu'$ , где

$$E' = \frac{E}{1-\mu^2}; \quad \mu' = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

#### 4.6.4 Уравнение совместности деформаций в полярных координатах

При отсутствии объёмных сил уравнение совместности деформаций, выраженное через напряжения, было получено в декартовых координатах в виде

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0.$$

Переход в этом уравнении к полярным координатам можно выполнить следующим образом. Во-первых, для оператора Лапласа необходимо взять его выражение в полярных координатах:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (4.33)$$

Во-вторых, следует учесть, что сумма напряжений  $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$  есть инвариантная величина. В самом деле, первый инвариант тензора напряжений имеет выражение

$$I_1(\sigma) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}.$$

В случае обобщённого плоского напряжённого состояния, когда  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $I_1(\sigma)$  как раз и равняется этой сумме. В случае плоской деформации  $\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ , так что  $I_1(\sigma) = (1+\mu)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ . В любом случае, как видим, сумма  $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$  является инвариантом, то есть её можно заменить суммой  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$ . В итоге приходим к уравнению совместности деформаций в полярных координатах

$$\nabla^2 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad (4.34)$$

где оператор Лапласа имеет выражение (4.33).

#### 4.6.5 Функция напряжений в полярных координатах

В полярных координатах при отсутствии объёмных сил функция напряжений  $\varphi(r, \theta)$  вводится по формулам

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (4.35)$$

При этом уравнения равновесия (4.28) и (4.29), в которых нужно положить  $R_r = R_\theta = 0$ , удовлетворяются тождественно, в чём нетрудно убедиться подстановкой в них соотношений (4.35). Подстановка же последних в уравнение (4.34) приводит к разрешающему уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (4.36)$$

#### 4.7 Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах в тригонометрических рядах

Решение уравнения (4.36) можно искать в виде разложения в тригонометрический ряд по координате  $\theta$ :

$$\varphi(r, \theta) = R_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} R_m(r) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{R}_m(r) \sin m\theta. \quad (4.37)$$

Здесь  $R_m(r)$ ,  $\bar{R}_m(r)$  – коэффициенты разложения, являющиеся функциями полярного радиуса. Для определения вида этих функций рассмотрим одно из частных решений, содержащихся в выражении (4.37):

$$\varphi_m(r, \theta) = R_m(r) \cos m\theta.$$

Подставим данное выражение в уравнение (4.36). Выполняя операцию  $\nabla^2 \varphi_m$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_m &= \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \theta^2} = \\ &= \left( \frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R_m \right) \cos m\theta = l_m R_m \cos m\theta. \end{aligned}$$

Здесь

$$l_m = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \quad (4.38)$$

– обыкновенный дифференциальный оператор. Повторное выполнение операции  $\nabla^2$  приводит на основании (4.36) к равенству

$$l_m l_m R_m \cos m\theta = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться для любых значений угла  $\theta$ , отсюда вытекает обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $R_m(r)$ :

$$l_m l_m R_m = 0. \quad (4.39)$$

Уравнение (4.39) есть уравнение типа Эйлера. Его можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены переменной  $r = e^t$ . Но можно искать частное решение уравнения (4.39) непосредственно в виде

$$R_m(r) = r^\alpha.$$

Подставим это выражение в уравнение (4.39). Имеем

$$\begin{aligned} l_m r^\alpha &= \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) r^\alpha = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + \frac{1}{r} \cdot \alpha r^{\alpha-1} - \frac{m^2}{r^2} r^\alpha = \\ &= [\alpha(\alpha-1) + \alpha - m^2] r^{\alpha-2} = (\alpha^2 - m^2) r^{\alpha-2}; \\ l_m l_m r^\alpha &= (\alpha^2 - m^2) l_m r^{\alpha-2} = (\alpha^2 - m^2) [(\alpha-2)^2 - m^2] r^{\alpha-4} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает характеристическое уравнение

$$(\alpha^2 - m^2) [(\alpha-2)^2 - m^2] = 0,$$

корни которого

$$\alpha_{1,2} = \pm m; \quad \alpha_{3,4} = \pm m + 2.$$

В случае  $m \geq 2$  все корни будут различны и общее решение уравнения (4.39) может быть записано в виде

$$R_m(r) = A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}, \quad (4.40)$$

где  $A_m, B_m, C_m$  и  $D_m$  – произвольные постоянные.

Для  $m=0$  и  $m=1$  имеются кратные корни. Если  $m=0$ , то  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ;  $\alpha_3 = \alpha_4 = 2$ . Если же  $m=1$ , то  $\alpha_1 = 1$ ;  $\alpha_2 = -1$ ;  $\alpha_3 = 3$ ;  $\alpha_4 = 1$ . Когда два корня характеристического уравнения равны между собой, скажем  $\alpha_2 = \alpha_1$ , то одно из частных решений уравнения (4.39), соответствующее кратному корню, должно быть взято в виде  $r^{\alpha_1}$ , а другое – в виде  $r^{\alpha_1} \ln r$ . Таким образом, для  $m=0$  и  $m=1$  получаем решения вида

$$R_0(r) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r; \quad (4.41)$$

$$R_1(r) = A_1 r + B_1 r^{-1} + C_1 r^3 + D_1 r \ln r. \quad (4.42)$$

Аналогично выглядят функции  $\bar{R}_m(r)$  – от (4.40) и (4.42) они отличаются только тем, что вместо  $A_m, B_m, C_m, D_m$  будут фигурировать другие постоянные  $\bar{A}_m, \bar{B}_m, \bar{C}_m, \bar{D}_m$ .

## 4.8 Осесимметричное напряжённое состояние. Задача Ламе

Рассмотрим случай, когда круглая пластина или круговой цилиндр испытывает действие осесимметричной нагрузки. В этом случае напряжённое состояние тела окажется также осесимметричным. Функция напряжений  $\varphi$  будет зависеть только от полярного радиуса  $r$ , то есть

$$\varphi(r) = R_0(r) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r. \quad (4.43)$$

Напряжения связаны с функцией  $\varphi$  соотношениями, вытекающими из формул (4.35):

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}; \quad \sigma_{r\theta} = 0. \quad (4.44)$$

Вычислив производную

$$\frac{d\varphi}{dr} = 2B_0 r + \frac{C_0}{r} + D_0(2r \ln r + r),$$

в соответствии с равенствами (4.44) получаем

$$\sigma_{rr} = 2B_0 + \frac{C_0}{r^2} + D_0(2 \ln r + 1);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2B_0 - \frac{C_0}{r^2} + D_0(2 \ln r + 3).$$

Применительно к случаю обобщённого плоского напряжённого состояния найдём выражения для деформаций:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \mu\sigma_{\theta\theta}) = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 + \frac{1+\mu}{r^2}C_0 + 2(1-\mu)D_0 \ln r + (1-3\mu)D_0 \right];$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \mu\sigma_{rr}) = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 - \frac{1+\mu}{r^2}C_0 + 2(1-\mu)D_0 \ln r + (3-\mu)D_0 \right].$$

В силу осевой симметрии все точки будут перемещаться только в радиальном направлении:  $u_r = u_r(r)$ ;  $u_\theta = 0$ . Перемещение  $u_r(r)$  связано с деформациями геометрическими соотношениями (4.30), которые в случае осевой симметрии сводятся к двум равенствам:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}. \quad (4.45)$$

Второе из этих равенств приводит к выражению для  $u_r$ :

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 r - \frac{1+\mu}{r}C_0 + 2(1-\mu)D_0 r \ln r + (3-\mu)D_0 r \right].$$

Производная от  $u_r$ , равная

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 + \frac{1+\mu}{r^2}C_0 + 2(1-\mu)D_0 \ln r + (5-3\mu)D_0 \right],$$

должна, в силу первого равенства (4.45), совпадать с  $\varepsilon_{rr}$ . Как видим, совпадение возможно лишь при  $D_0 = 0$ . Опуская слагаемые, содержащие  $D_0$ , запишем окончательно расчётные соотношения

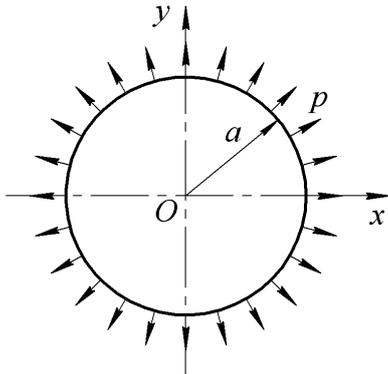
$$\sigma_{rr} = 2B_0 + \frac{C_0}{r^2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = 2B_0 - \frac{C_0}{r^2}; \quad (4.46)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 + \frac{1+\mu}{r^2}C_0 \right]; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 - \frac{1+\mu}{r^2}C_0 \right]; \quad (4.47)$$

$$u_r = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 r - \frac{1+\mu}{r}C_0 \right]. \quad (4.48)$$

Входящие сюда постоянные  $B_0$  и  $C_0$  должны быть найдены из граничных условий.

В качестве простейшего примера рассмотрим круглую пластину радиуса  $a$ , нагруженную по контуру равномерной радиальной нагрузкой  $p$  (рисунок 4.14).



**Рисунок 4.14 – Круглая пластина под действием равномерной радиальной нагрузки**

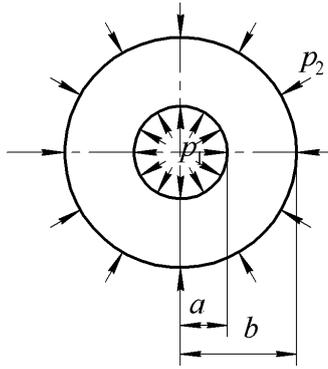
Напряжения (4.46) должны иметь конечные значения в центральной точке, где  $r = 0$ . Из этого условия вытекает, что постоянная  $C_0$  должна равняться нулю. Второе условие заключается в требовании, чтобы на окружности радиуса  $a$  выполнялось равенство  $\sigma_{rr} = p$ . Отсюда находим  $2B_0 = p$ . Следовательно, решение задачи запишется так:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = p.$$

Как видим, в данном случае в пластине возникает *однородное напряжённое состояние в виде равномерного двустороннего растяжения* в плоскости  $xu$ . Радиальное перемещение определится при этом формулой

$$u_r = \frac{(1-\mu)pr}{E}.$$

Другим примером использования полученных соотношений является задача Ламе о расчёте напряжений в полом толстостенном цилиндре, нагруженном давлением  $p_1$  – по внутренней и давлением  $p_2$  – по наружной боковым поверхностям (рисунок 4.15); торцевые поверхности свободны от нагрузок.



**Рисунок 4.15 – Толстостенный цилиндр при осесимметричном нагружении**

Полученные выше соотношения относятся к обобщённому плоскому напряжённому состоянию, то есть они применимы к тонкой пластине. Но поперечная деформация  $\varepsilon_{zz}$ , которая согласно (4.7) определяется формулой

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}),$$

в соответствии с выражениями (4.49) будет равна

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{4\mu B_0}{E}.$$

Она оказывается одинаковой во всех точках пластины, а это означает, что основания пластины при осесимметричном деформировании остаются плоскими. Цилиндр можно представить себе как совокупность отдельных дисков, которые при деформации не будут взаимодействовать друг с другом, так что соотношения (4.46)...(4.48) могут быть применены и к расчёту цилиндра.

Для определения произвольных постоянных мы имеем два граничных условия:

$$\sigma_{rr} = -p_1 \quad \text{при } r = a \quad \text{и} \quad \sigma_{rr} = -p_2 \quad \text{при } r = b,$$

где  $a$  и  $b$  – радиусы внутренней и внешней окружностей в сечении цилиндра. Эти условия дают два уравнения:

$$2B_0 + \frac{C_0}{a^2} = -p_1;$$

$$2B_0 + \frac{C_0}{b^2} = -p_2,$$

из которых находим:

$$2B_0 = \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2}; \quad C_0 = -(p_1 - p_2) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

Подстановка постоянных в формулы (4.46) приводит к искомым зависимостям напряжений от радиуса:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_1 - p_2}{r^2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_1 - p_2}{r^2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

В частном случае, когда действует только внутреннее давление, то есть когда

$$p_1 = p; \quad p_2 = 0,$$

будем иметь

$$\sigma_{rr} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} - \frac{p}{r^2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} + \frac{p}{r^2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

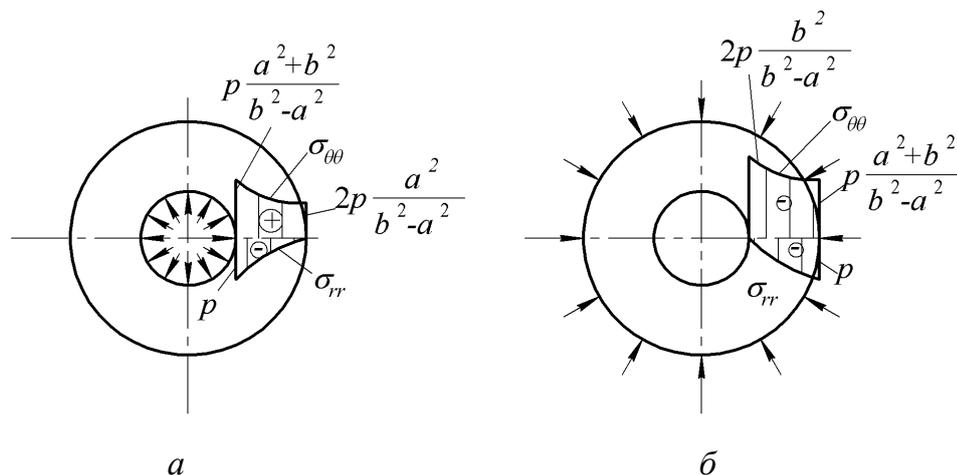
Эпюры напряжений представлены на рисунке 4.16,а. Наиболее напряжёнными оказываются точки на внутренней поверхности, где

$$\sigma_{rr} = -p; \quad \sigma_{\theta\theta} = p \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2}.$$

Пусть, например, цилиндр имеет размеры  $a = 100$  мм,  $b = 200$  мм. Тогда  $\sigma_{\theta\theta}|_{r=a} = 1,67p$ . Если воспользоваться третьей теорией прочности, то максимальное эквивалентное напряжение составит

$$\sigma_{\text{экр макс}} = |\sigma_1 - \sigma_3|_{r=a} = |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}|_{r=a} = 1,67p + p = 2,67p.$$

Отметим, что увеличение внешнего диаметра цилиндра не приводит к радикальному снижению напряжений. Даже при  $b \rightarrow \infty$  будем иметь  $\sigma_{\theta\theta}|_{r=a} = p$ , а  $\sigma_{\text{экр макс}} = 2p$ .



**Рисунок 4.16 – Напряжения в толстостенном цилиндре при нагружении внутренним (а) и наружным (б) давлением**

В другом частном случае, когда  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = p$ , закон распределения напряжений даётся формулами

$$\sigma_{rr} = -p \frac{b^2}{b^2 - a^2} + \frac{p}{r^2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p \frac{b^2}{b^2 - a^2} - \frac{p}{r^2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

Оба напряжения оказываются сжимающими; соответствующие эпюры показаны на рисунке 4.16,б. Наиболее нагруженными и здесь оказываются точки на внутренней поверхности, где

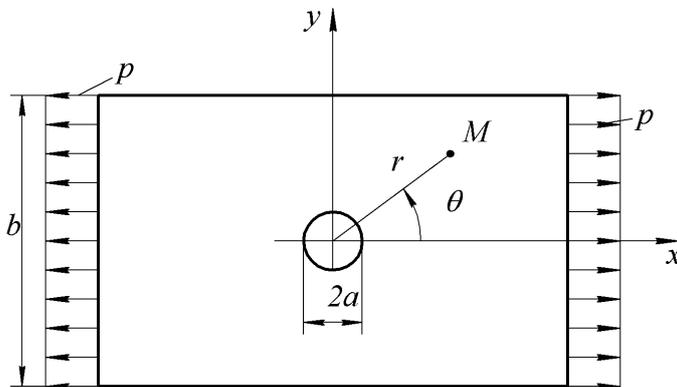
$$\sigma_{\theta\theta} = -2p \frac{b^2}{b^2 - a^2}.$$

Заметим, что если  $a \ll b$ , то величина  $|\sigma_{\theta\theta}|_{\max}$  будет равна  $2p$ . Как было показано выше, при отсутствии отверстия всюду  $|\sigma_{rr}| = |\sigma_{\theta\theta}| = p$ . Следовательно, можно говорить о концентрации напряжений около малого отверстия в пластине в условиях её всестороннего растяжения или сжатия; коэффициент концентрации оказывается равным 2.

Отметим в заключение, что формулы Ламе (4.49) используются, в частности, при расчёте орудийных стволов, корпусов пирозамков и т.п. конструкций.

#### 4.9 Концентрация напряжений около круглого отверстия в пластине (задача Кирша)

Пусть пластина, ослабленная малым круглым отверстием, испытывает равномерное растяжение вдоль оси  $x$  (рисунок 4.17). Предполагается, что



$a \ll b$ , где  $b$  – ширина пластины.

При отсутствии отверстия напряжённое состояние в пластине, как было установлено ранее, описывается полиномиальной функцией

$$\varphi^0 = C_2 y^2.$$

Напряжения в неослабленной пластине

Рисунок 4.17 – Пластина с малым отверстием при равномерном растяжении

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial y^2} = 2C_2; \quad \sigma_{yy}^0 = \sigma_{xy}^0 = 0.$$

Из равенства  $\sigma_{xx}^0 = p$ , где  $p$  – значение внешней нагрузки, находим  $C_2 = p/2$ , так что можно написать

$$\varphi^0 = \frac{p}{2} y^2.$$

Перейдя к полярным координатам  $r$ ,  $\theta$ , положим здесь  $y = r \sin \theta$ :

$$\varphi^0 = \frac{pr^2}{2} \sin^2 \theta.$$

Воспользовавшись формулой  $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ , придадим выражению для  $\varphi^0$  окончательный вид:

$$\varphi^0 = \frac{pr^2}{4} (1 - \cos 2\theta). \quad (4.50)$$

Отверстие вносит возмущение в это напряжённое состояние вследствие появления дополнительной границы. Это возмущение из-за малости отверстия должно локализоваться вблизи него, в то время как вдали от отверстия напряжённое состояние должно оставаться таким же, как и в неослабленной пластине. Судя по выражению (4.50), вдали от отверстия функция напряжений должна быть представлена разложением в ряд по  $\cos m\theta$ , в котором содержится всего два члена, соответствующие  $m=0$  и  $m=2$ . Исходя из этого, решение поставленной задачи для пластины с отверстием будем искать в форме

$$\varphi(r, \theta) = R_0(r) + R_2(r) \cos 2\theta,$$

где  $R_0(r)$  и  $R_2(r)$  даются соотношениями (4.41) и (4.40). Тогда

$$\varphi(r, \theta) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r + \left( A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^2} + C_2 r^4 + D_2 \right) \cos 2\theta. \quad (4.51)$$

Потребуем, прежде всего, чтобы вдали от отверстия выражение (4.51) совпадало с формулой (4.50). Преобразуем для этого (4.51), вынеся за скобки множитель  $r^2$ :

$$\varphi(r, \theta) = r^2 \left[ \frac{A_0}{r^2} + B_0 + C_0 \frac{\ln r}{r^2} + D_0 \ln r + \left( A_2 + \frac{B_2}{r^4} + C_2 r^2 + \frac{D_2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right].$$

При удалении от отверстия, то есть при  $r \rightarrow \infty$ , выражение в квадратных скобках должно, согласно (4.50), стремиться к величине

$$\frac{p}{4} (1 - \cos 2\theta).$$

Это возможно при условии

$$D_0 = 0; \quad C_2 = 0,$$

поскольку функции с этими постоянными неограниченно возрастают с ростом  $r$ . Заметим, что функция  $\ln r/r^2$  при  $r \rightarrow \infty$  стремится к нулю, в чём нетрудно убедиться, раскрыв неопределённость по правилу Лопиталья.

Кроме того, необходимо принять

$$B_0 = \frac{P}{4}; \quad A_2 = -\frac{P}{4}.$$

С учётом сказанного приходим к функции напряжений

$$\varphi(r, \theta) = A_0 + \frac{pr^2}{4} + C_0 \ln r + \left( -\frac{pr^2}{4} + \frac{B_2}{r^2} + D_2 \right) \cos 2\theta.$$

Оставшиеся произвольные постоянные должны быть найдены из статических условий на контуре отверстия. Вычисляя производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{pr}{2} + \frac{C_0}{r} + \left( -\frac{pr}{2} - \frac{2B_2}{r^3} \right) \cos 2\theta;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \left( -\frac{pr^2}{2} + \frac{2B_2}{r^2} + 2D_2 \right) \sin 2\theta;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = - \left( -pr^2 + \frac{4B_2}{r^2} + 4D_2 \right) \cos 2\theta,$$

составим выражения для напряжений:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{p}{2} + \frac{C_0}{r^2} + \left( \frac{p}{2} - \frac{6B_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2} \right) \cos 2\theta;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{p}{2} - \frac{C_0}{r^2} + \left( -\frac{p}{2} + \frac{6B_2}{r^4} \right) \cos 2\theta;$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \left( -\frac{p}{2} - \frac{6B_2}{r^4} - \frac{2D_2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \quad (4.52)$$

Отметим, что постоянная  $A_0$  в эти формулы не входит, так что её значение безразлично.

На контуре отверстия, то есть при  $r = a$ , должны выполняться условия

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = 0; \quad \sigma_{r\theta}|_{r=a} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{p}{2} + \frac{C_0}{a^2} + \left( \frac{p}{2} - \frac{6B_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} \right) \cos 2\theta = 0;$$

$$\left( -\frac{p}{2} - \frac{6B_2}{a^4} - \frac{2D_2}{a^2} \right) \sin 2\theta = 0.$$

Данные равенства должны быть справедливы в каждой точке контура, то есть при любых значениях угла  $\theta$ . Следовательно, должны удовлетворяться соотношения

$$\frac{p}{2} + \frac{C_0}{a^2} = 0;$$

$$\frac{p}{2} - \frac{6B_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} = 0;$$

$$-\frac{p}{2} - \frac{6B_2}{a^4} - \frac{2D_2}{a^2} = 0.$$

Первое из этих равенств приводит к значению

$$C_0 = -\frac{pa^2}{2}.$$

Два других образуют систему уравнений, решая которую, находим

$$6B_2 = -\frac{3pa^4}{2}; \quad 2D_2 = pa^2.$$

По формулам (4.52) приходим теперь к следующим выражениям для напряжений:

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2} \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right];$$

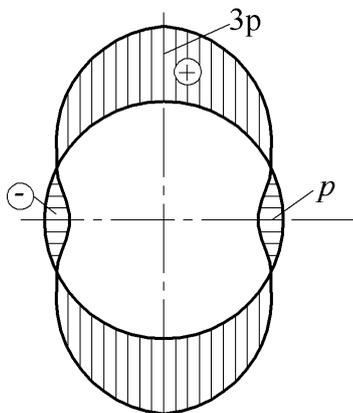
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{2} \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right];$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{p}{2} \left( 1 - 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \quad (4.53)$$

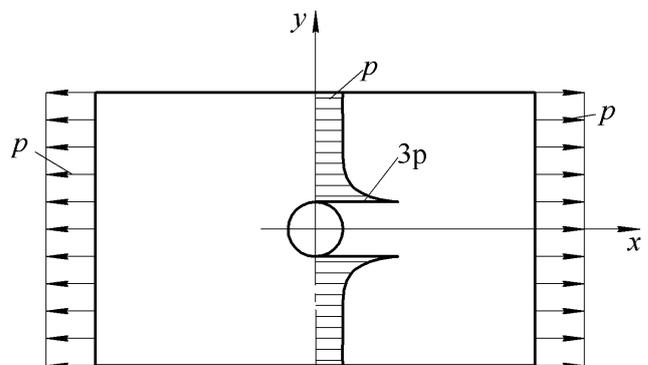
На контуре отверстия отличным от нуля является только напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$ , которое изменяется здесь по закону

$$\sigma_{\theta\theta}|_{r=a} = p(1 - 2\cos 2\theta).$$

Эта зависимость показана на рисунке 4.18. Максимальное значение  $\sigma_{\theta\theta}$ , равное  $3p$ , получается при  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ .



**Рисунок 4.18 – Распределение окружных напряжений по контуру отверстия**



**Рисунок 4.19 – Распределение напряжений в ослабленном сечении пластины**

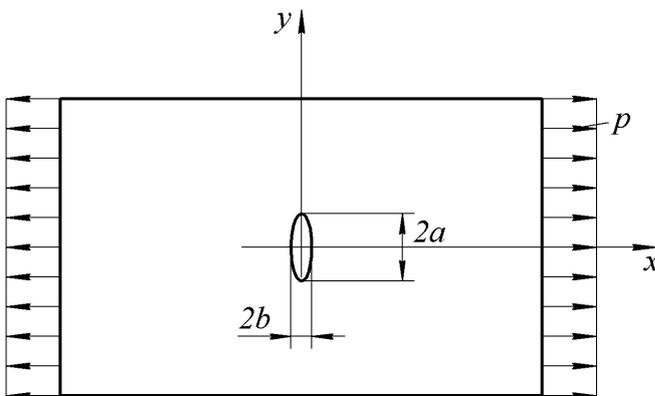
Найдём далее распределение напряжения  $\sigma_{xx}$  в ослабленном сечении пластины, проходящем через центр отверстия. В этом сечении  $\sigma_{xx}$  совпадает с окружным напряжением  $\sigma_{\theta\theta}$  при  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ . В соответствии со второй из формул (4.53) получаем

$$\sigma_{xx}|_{x=0} = \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = \frac{p}{2} \left( 2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right).$$

Эта зависимость показана на рисунке 4.19. Напряжение  $\sigma_{xx}$  имеет максимальное значение  $3p$  на контуре отверстия и быстро убывает до номинального значения  $p$  по мере удаления от отверстия. Таким образом, *возле отверстия возникает концентрация напряжений*. Коэффициент концентрации  $K$ , равный отношению максимального напряжения к номинальному, имеет в данном случае значение  $K = 3$ .

Получены решения и более сложных задач о концентрации напряжений. Например, для эллиптического отверстия с полуосями  $a$  и  $b$  (рисунок 4.20) при равномерном одноосном растяжении коэффициент концентрации оказывается равным

$$K = 1 + 2 \frac{a}{b}.$$



**Рисунок 4.20 – Растяжение пластины с эллиптическим отверстием**

При  $b \rightarrow 0$  величина  $K$  стремится к бесконечности. В действительности вследствие образования пластической зоны напряжения останутся конечными. Ясно, что в этой зоне соотношения теории упругости теряют силу.

## 5 ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 5.1 Работа и потенциал внешних сил

Рассмотрим процесс статического нагружения консольной балки (рисунок 5.1). С ростом силы возрастает прогиб  $v$  в точке её приложения. В случае линейно-деформируемой системы связь между ними линейная (рисунок 5.2), но мы для удобства рассуждений будем рассматривать более общий случай нелинейной зависимости (рисунок 5.3).

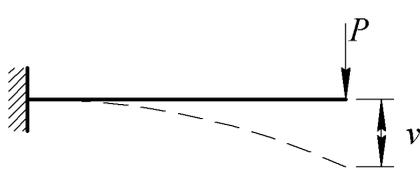


Рисунок 5.1 – Консольная балка

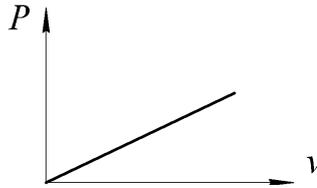


Рисунок 5.2 – Линейная зависимость  $P-v$

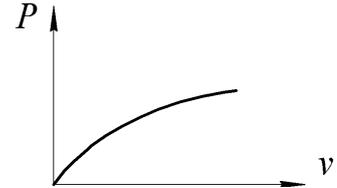


Рисунок 5.3 – Нелинейная зависимость  $P-v$

Процесс нагружения можно трактовать следующим образом. Балка, деформируясь, оказывает сопротивление внешнему воздействию. Чем больше перемещение  $v$ , тем больше сила  $P$ , необходимая для удержания балки в статическом равновесии. Следовательно, связь между  $P$  и  $v$  можно представлять не только как зависимость перемещения от приложенной силы вида  $v = v(P)$ , но и как зависимость  $P$  от  $v$  вида  $P = P(v)$ . Именно поэтому на рисунках 5.2 и 5.3 перемещение отложено по оси абсцисс, а сила  $P$  – по оси ординат.

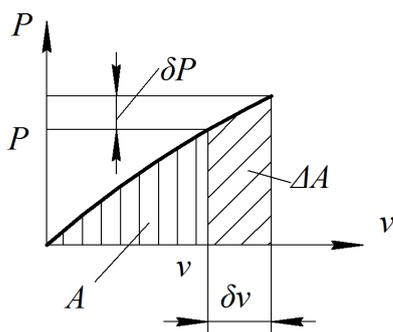


Рисунок 5.4 – Работа силы  $P$

Площадь под кривой  $P(v)$ , заштрихованная на рисунке 5.4 вертикально, представляет собой работу, производимую силой  $P$ , то есть работу  $A$ , затраченную на деформирование тела:

$$A(v) = \int_0^v P(v) dv. \quad (5.1)$$

В случае линейно-деформируемой системы

$$A = \frac{1}{2} P v. \quad (5.2)$$

Последнее равенство выражает *теорему Клапейрона*, согласно которой *работа, затраченная на деформирование тела, равна в случае линейно-*

деформируемой системы половине произведения окончательного значения силы на окончательное значение перемещения.

Величина

$$\Pi(v) = -Pv. \quad (5.3)$$

называется *потенциалом* силы  $P$ . Она представляет собой ту работу, которую нужно совершить для перемещения точки приложения силы в исходное положение, которое она занимала до деформации; величина силы остаётся при этом неизменной и равной своему окончательному значению.

При возрастании силы на бесконечно малую величину  $\delta P$  перемещение также получит бесконечно малое приращение  $\delta v$ . Приращение  $\Delta A$  работы будет численно равно площади, заштрихованной на рисунке 5.4 наклонными линиями, и определится выражением

$$\Delta A = P \cdot \delta v + \frac{1}{2} \delta P \cdot \delta v + \dots, \quad (5.4)$$

где многоточие означает слагаемые более высоких порядков малости. Первое слагаемое в (5.4), будучи величиной первого порядка малости, представляет главную часть приращения, называемую *вариацией работы*. Обозначая её через  $\delta A$ , запишем

$$\delta A = P \cdot \delta v. \quad (5.5)$$

Как следует из равенства (5.5), выражение для  $\delta A$  можно понимать как работу силы  $P$  на перемещении  $\delta v$ , которое выступает в этом случае как произвольное бесконечно малое перемещение (возможное перемещение) точки приложения силы  $P$ . Поэтому величину  $\delta A$  называют также *возможной (или виртуальной) работой* силы  $P$ .

Приращение потенциала  $\Pi$  при возрастании перемещения от  $v$  до  $v + \delta v$  согласно (5.3) будет равно

$$\Delta \Pi = \Pi(v + \delta v) - \Pi(v) = -P \cdot (v + \delta v) + P \cdot v = -P \cdot \delta v,$$

то есть  $\Delta \Pi = \delta \Pi$ , где

$$\delta \Pi = -P \cdot \delta v. \quad (5.6)$$

Вариация работы (5.5) и вариация (5.6) потенциала силы  $P$  различаются формально лишь знаком, хотя относятся к разным по определению величинам. Равенство

$$\delta \Pi = -\delta A \quad (5.7)$$

можно взять за основу для определения потенциала внешних сил в общем случае нагружения тела системой распределенных и сосредоточенных сил. Согласно этому определению под *потенциалом  $\Pi$  внешних сил* понимается такая функция (точнее, функционал) перемещений точек тела, вариация

которой равна вариации работы, взятой с обратным знаком; сами силы считаются при этом заданными и не зависящими от перемещений.

Предположим теперь, что тело нагружено объёмными силами с компонентами  $R_x, R_y, R_z$  и поверхностными силами с компонентами  $p_x, p_y, p_z$ . Для упругого тела процесс деформирования при малых перемещениях является обратимым и работа, совершаемая силами, не зависит от порядка их приложения, а зависит лишь от окончательных значений сил. При вычислении работы можно принять, что все силы возрастают одновременно от нуля до своих конечных значений, причем в процессе нагружения между ними сохраняется постоянное соотношение.

На элемент объема  $d\tau$ , выделенный в окрестности некоторой точки, будут действовать в направлении координатных осей силы  $R_x d\tau, R_y d\tau$  и  $R_z d\tau$ . Нарастая от нуля до своих конечных значений, они производят работу, которая в случае линейно-деформируемого тела равна

$$\frac{1}{2}(R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z) d\tau.$$

Интегрирование по объёму тела позволяет найти суммарную работу объёмных сил. Подобным же образом можно вычислить работу, совершаемую поверхностными силами. В общем случае нагружения линейно-упругого тела будем иметь

$$A = \frac{1}{2} \left[ \int_{\tau} (R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z) d\tau + \int_{\omega} (p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) d\omega \right].$$

Введя матрицы-столбцы

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}; \quad [R] = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}; \quad [p] = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix},$$

придадим последнему выражению более компактную форму:

$$A = \frac{1}{2} \left( \int_{\tau} [u]^T [R] d\tau + \int_{\omega} [u]^T [p] d\omega \right). \quad (5.8)$$

Если внешние нагрузки получают произвольные бесконечно малые приращения, то перемещения точек тела также получают бесконечно малые приращения  $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$ . Вариация работы определится выражением

$$\delta A = \int_{\tau} (R_x \delta u_x + R_y \delta u_y + R_z \delta u_z) d\tau + \int_{\omega} (p_x \delta u_x + p_y \delta u_y + p_z \delta u_z) d\omega$$

или, в матричной записи,

$$\delta A = \int_{\tau} [\delta u]^T [R] d\tau + \int_{\omega} [\delta u]^T [p] d\omega, \quad (5.9)$$

где

$$[\delta u] = \begin{bmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \\ \delta u_z \end{bmatrix}.$$

Хотя мы предположили, что нагрузки получили приращения, сами эти приращения в выражение (5.9) не вошли. Это позволяет трактовать  $\delta u_x$ ,  $\delta u_y$ ,  $\delta u_z$  как возможные перемещения. *Под возможными (или виртуальными) понимаются произвольные бесконечно малые перемещения, непрерывные внутри тела и допускаемые условиями закрепления тела.* Любые возможные перемещения можно создать, прикладывая к телу, закрепленному заданным образом, некоторую систему бесконечно малых нагрузок, но нет необходимости связывать их с действительными приращениями внешних сил.

Если тело закреплено, то его поверхность может быть представлена как сумма двух составляющих:

$$\omega = \omega_p + \omega_u.$$

Здесь  $\omega_p$  – часть поверхности, свободная от закреплений; на этой части, следовательно, заданы поверхностные силы  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ . Слагаемое  $\omega_u$  есть та часть поверхности, на которой осуществляется закрепление тела или, в более общем случае, на которой заданы перемещения  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ . Поверхностные силы  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  на  $\omega_u$  представляют собой реакции на тело со стороны наложенных на него связей. Возможные перемещения должны на  $\omega_u$  равняться нулю, т.к. перемещения здесь заданы и не изменяются в результате приложения к телу каких бы то ни было нагрузок.

Перепишав равенство (5.9) в виде

$$\delta A = \int_{\tau} [\delta u]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p} [\delta u]^T [p] d\omega + \int_{\omega_u} [\delta u]^T [p] d\omega,$$

и опустив последнее слагаемое в правой части, получим

$$\delta A = \int_{\tau} [\delta u]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p} [\delta u]^T [p] d\omega. \quad (5.10)$$

На основании равенства  $\delta \Pi = -\delta A$  для вариации потенциала внешних сил будем иметь выражение

$$\delta\Pi = -\left( \int_{\tau} [\delta u]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p} [\delta u]^T [p] d\omega \right), \quad (5.11)$$

откуда по определению вытекает следующее выражение для  $\Pi$ :

$$\Pi = -\left( \int_{\tau} [u]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p} [u]^T [p] d\omega \right). \quad (5.12)$$

## 5.2 Потенциальная энергия деформации

При деформировании тела изменяется потенциальная энергия взаимного положения частиц тела. Это изменение численно равно работе внутренних сил, возникающих при деформации. В результате деформируемое тело накапливает потенциальную энергию деформации.

Для вычисления потенциальной энергии деформации выделим элементарный объём в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и найдём работу сил, действующих по граням этого элемента. Начнём с нормального напряжения  $\sigma_{xx}$  (рисунок 5.5). Поскольку длина элемента в направлении оси  $x$  возрастает при деформировании на  $\varepsilon_{xx} dx$ , силы  $\sigma_{xx} dy dz$  в соответствии с теоремой Клапейрона произведут работу, равную

$$\frac{1}{2} \sigma_{xx} dy dz \varepsilon_{xx} dx = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} d\tau.$$

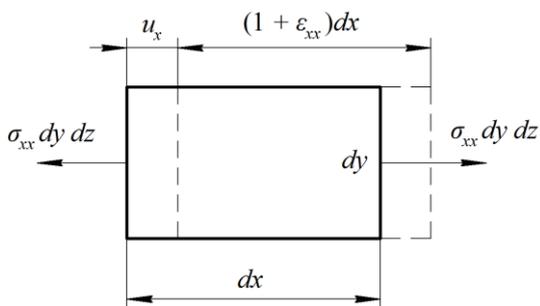


Рисунок 5.5 – Работа напряжения  $\sigma_{xx}$

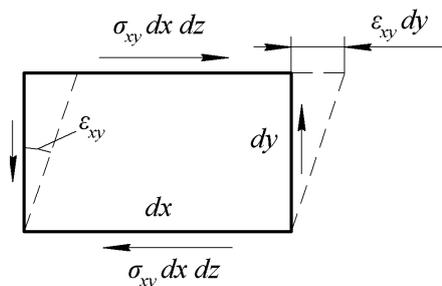


Рисунок 5.6 – Работа напряжения  $\sigma_{xy}$

Рассмотрим далее действие касательного напряжения  $\sigma_{xy}$  (рисунок 5.6). Сила  $\sigma_{xy} dx dz$ , нарастая от нуля до конечного значения, перемещается на величину  $\varepsilon_{xy} dy$  и производит работу, равную

$$\frac{1}{2} \sigma_{xy} dx dz \varepsilon_{xy} dy = \frac{1}{2} \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} d\tau.$$

Суммируя вклады всех компонент напряжённого состояния, найдём накопленную в объёме  $d\tau$  энергию, равную работе внутренних сил:

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) d\tau.$$

Величина

$$W = \frac{dU}{d\tau} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) \quad (5.13)$$

представляет собой энергию деформации единицы объёма упругого тела и называется *удельной потенциальной энергией деформации*. Введя матрицы напряжений и деформаций

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}; \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix},$$

перепишем выражение (5.13) в кратком виде:

$$W = \frac{1}{2} [\sigma]^T [\varepsilon] = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [\sigma]. \quad (5.14)$$

Потенциальная энергия деформации, накопленная всем телом,

$$U = \int_{\tau} dW d\tau.$$

Пользуясь законом Гука в форме  $[\sigma] = [\kappa][\varepsilon]$  или в форме  $[\varepsilon] = [\Phi][\sigma]$ , можно выразить величину  $W$  только через деформации:

$$W = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [\kappa][\varepsilon] \quad (5.15)$$

или только через напряжения:

$$W = \frac{1}{2} [\sigma]^T [\Phi][\sigma]. \quad (5.16)$$

Зависимость (5.15) можно получить в явном виде, подставив в выражение (5.13) соотношения закона Гука в форме Ламе:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\theta; & \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda\theta; & \sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\theta; \\ \sigma_{xy} &= G\varepsilon_{xy}; & \sigma_{yz} &= G\varepsilon_{yz}; & \sigma_{zx} &= G\varepsilon_{zx}, \end{aligned}$$

где  $G$  и  $\lambda$  – упругие постоянные Ламе;

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

В итоге придём к выражению

$$W = \frac{G}{2} \left[ 2(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \theta^2. \quad (5.17)$$

Из этой записи видно, что  $W$  есть величина существенно положительная: при любых ненулевых деформациях будет

$$W > 0. \quad (5.18)$$

Точно так же подстановка формул

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} - \mu\sigma_{zz}); & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \mu\sigma_{xx} - \mu\sigma_{zz}); \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \mu\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}); & \varepsilon_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_{xy}; \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_{yz}; & \varepsilon_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_{zx} \end{aligned}$$

в (5.13) позволяет прийти к выражению  $W$  через компоненты напряжений:

$$W = \frac{1+\mu}{2E}[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)] - \frac{\mu}{2E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2. \quad (5.19)$$

Предположим теперь, что напряжения и перемещения получили бесконечно малые приращения  $\delta\sigma_{xx}, \delta\sigma_{yy}, \dots, \delta\sigma_{zx}$  и  $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$ . Деформации также получают приращения  $\delta\varepsilon_{xx}, \delta\varepsilon_{yy}, \dots, \delta\varepsilon_{zx}$ , связанные с приращениями перемещений формулами Коши. Удельная потенциальная энергия деформации получит приращение, главная часть которого (вариация удельной потенциальной энергии) по аналогии с вариацией работы запишется в виде

$$\delta W = [\delta\varepsilon]^T [\sigma], \quad (5.20)$$

где

$$[\delta\varepsilon] = [\delta\varepsilon_{xx} \quad \delta\varepsilon_{yy} \quad \delta\varepsilon_{zz} \quad \delta\varepsilon_{xy} \quad \delta\varepsilon_{yz} \quad \delta\varepsilon_{zx}]^T.$$

Если под  $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$  понимать возможные перемещения, то матрица  $[\delta\varepsilon]$  будет определять возможные деформации. Тогда  $\delta W$  следует трактовать как удельную работу напряжений на возможных перемещениях.

Интегрируя  $\delta W$  по объёму тела, найдём вариацию потенциальной энергии деформации:

$$\delta U = \int_{\tau} \delta W d\tau = \int_{\tau} [\delta\varepsilon]^T [\sigma] d\tau. \quad (5.21)$$

### 5.3 Вариационное уравнение Лагранжа

Рассмотрим тело, нагруженное объёмными  $[R]$  и поверхностными  $[p]$  силами. Пусть  $[u] = [u_x \ u_y \ u_z]^T$  – матрица перемещений точек тела. Её компоненты  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$  и  $u_z(x, y, z)$  – непрерывные функции координат,

принимающие заданные значения на  $\omega_u$ , то есть согласующиеся с наложенными на тело связями. Будем называть любые такие перемещения кинематически допустимыми. Перемещениям  $[u]$  соответствуют деформации  $[\varepsilon]$ , связанные с ними соотношениями Коши, и напряжения  $[\sigma]$ , выражающиеся через деформации по формулам закона Гука. Действительные перемещения отличаются от всех других, также кинематически допустимых, тем, что они удовлетворяют соотношениям статики – дифференциальным уравнениям равновесия и статическим условиям на  $\omega_p$ . Выясним, в чём состоит отличие действительных перемещений от любых других кинематически допустимых с энергетической точки зрения.

Придадим точкам тела дополнительные возможные перемещения  $[\delta u]$ . Им соответствуют возможные деформации  $[\delta \varepsilon]$ . Внешние силы на перемещениях  $[\delta u]$  произведут работу

$$\delta A = \int_{\tau} [\delta u]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p} [\delta u]^T [p] d\omega, \quad (5.22)$$

а вариация потенциальной энергии деформации будет

$$\delta U = \int_{\tau} [\delta \varepsilon]^T [\sigma] d\tau = \int_{\tau} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \dots + \sigma_{zx} \delta \varepsilon_{zx}) d\tau.$$

Преобразуем последнее выражение. Для этого воспользуемся сначала формулами Коши и запишем

$$\delta \varepsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_x); \dots; \delta \varepsilon_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} (\delta u_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_z).$$

Сгруппировав члены, представим подынтегральное выражение в виде

$$\begin{aligned} \delta U = \int_{\tau} \left\{ \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_x) + \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_y) + \sigma_{xz} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_z) + \right. \\ \left. + \sigma_{yx} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_x) + \sigma_{yy} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_y) + \sigma_{yz} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_z) + \right. \\ \left. + \sigma_{zx} \frac{\partial}{\partial z} (\delta u_x) + \sigma_{zy} \frac{\partial}{\partial z} (\delta u_y) + \sigma_{zz} \frac{\partial}{\partial z} (\delta u_z) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Вводя матрицы

$$[\sigma_x] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}; \quad [\sigma_y] = \begin{bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}; \quad [\sigma_z] = \begin{bmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

перепишем выражение для  $\delta U$  в краткой форме:

$$\delta U = \int_{\tau} \left( \frac{\partial [\delta u]^T}{\partial x} [\sigma_x] + \frac{\partial [\delta u]^T}{\partial y} [\sigma_y] + \frac{\partial [\delta u]^T}{\partial z} [\sigma_z] \right) d\tau.$$

Если воспользоваться очевидным преобразованием типа

$$\frac{\partial f}{\partial t} \varphi = \frac{\partial (f \cdot \varphi)}{\partial t} - f \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

то получим

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{\tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} ([\delta u]^T [\sigma_x]) + \frac{\partial}{\partial y} ([\delta u]^T [\sigma_y]) + \frac{\partial}{\partial z} ([\delta u]^T [\sigma_z]) \right\} d\tau - \\ & - \int_{\tau} [\delta u]^T \left( \frac{\partial [\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial [\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial [\sigma_z]}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Первый интеграл заменим теперь поверхностным, применяя формулу Остроградского–Гаусса

$$\int_{\tau} \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) d\tau = \int_{\omega} (Q_x n_x + Q_y n_y + Q_z n_z) d\omega,$$

где  $n_x, n_y, n_z$  – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности  $\omega$ , ограничивающей область  $\tau$ , в которой заданы произвольные дифференцируемые функции  $Q_x, Q_y, Q_z$ .

Учитывая, что  $[\delta u] = [0]$  на  $\omega_u$ , получим в результате

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{\omega_p} [\delta u]^T ([\sigma_x] n_x + [\sigma_y] n_y + [\sigma_z] n_z) d\omega - \\ & - \int_{\tau} [\delta u]^T \left( \frac{\partial [\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial [\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial [\sigma_z]}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (5.23)$$

До сих пор мы не требовали, чтобы напряжения удовлетворяли соотношениям статики. Если же удовлетворяются дифференциальные уравнения равновесия и статические условия на поверхности тела, то справедливы равенства

$$\frac{\partial [\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial [\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial [\sigma_z]}{\partial z} = -[R] \quad \text{в } \tau; \quad (5.24)$$

$$[\sigma_x] n_x + [\sigma_y] n_y + [\sigma_z] n_z = [p] \quad \text{на } \omega_p. \quad (5.25)$$

В этом случае имеем

$$\delta U = \int_{\omega_p} [\delta u]^T [p] d\omega + \int_{\tau} [\delta u]^T [R] d\tau.$$

В правой части полученного соотношения находится вариация работы внешних сил  $\delta A$ , и мы приходим к равенству

$$\delta U = \delta A. \quad (5.26)$$

Это уравнение выражает *принцип возможных перемещений* (или *принцип виртуальных работ*) применительно к упругому телу, согласно которому *для тела, находящегося в равновесии, работа внешних сил на любых возможных перемещениях равна вариации потенциальной энергии деформации.*

Равенство (5.26) получено как *необходимое* условие равновесия тела. Оно же является и *достаточным* условием равновесия. Если оно выполняется для любых возможных перемещений, то в силу соотношений (5.22) и (5.23) будут выполняться дифференциальные уравнения равновесия (5.24) и статические граничные условия (5.25).

Полагая в соответствии с (5.7)  $\delta A = -\delta\Pi$ , приведём равенство (5.23) к виду

$$\delta(U + \Pi) = 0.$$

Величина

$$V = U + \Pi \quad (5.27)$$

называется *полной потенциальной энергией системы*, а равенство

$$\delta V = 0 \quad (5.28)$$

называется *вариационным уравнением Лагранжа*.

Как следует из (5.28), для тела, находящегося в равновесии, вариация полной потенциальной энергии системы на любых возможных перемещениях равна нулю. Это означает, что в равновесном состоянии величина  $V$  имеет стационарное значение. До сих пор мы нигде не привлекали закон Гука. Если же воспользоваться соотношениями закона Гука, то можно показать, что для линейно-деформируемого тела стационарное значение функционала  $V$  есть минимум.

Исходя из сказанного, можно сформулировать следующий *вариационный принцип Лагранжа для линейно-упругого тела*. *Среди всех перемещений, допускаемых наложенными на тело связями, в действительности имеют место такие, для которых полная потенциальная энергия системы минимальна.*

Соотношения статики являются следствием условия  $V = \min$ . Если найдены такие функции  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$ ,  $u_z(x, y, z)$ , которые минимизируют функционал  $V$ , то уравнения статики (5.24) и (5.25) будут автоматически удовлетворены.

## 5.4 Метод Ритца

Метод Ритца (или Ритца-Тимошенко) – это приближённый метод решения задач теории упругости, заключающийся в прямой минимизации полной энергии системы  $V$ . Согласно этому методу перемещения будем приближённо искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x(x, y, z) &= u_{x0}(x, y, z) + \sum_{k=1}^m a_k f_{1k}(x, y, z); \\ \tilde{u}_y(x, y, z) &= u_{y0}(x, y, z) + \sum_{k=1}^m b_k f_{2k}(x, y, z); \\ \tilde{u}_z(x, y, z) &= u_{z0}(x, y, z) + \sum_{k=1}^m c_k f_{3k}(x, y, z).\end{aligned}\quad (5.29)$$

Здесь  $a_k, b_k, c_k$  – некоторые постоянные, подлежащие отысканию; остальные величины представляют собой выбранные заранее подходящие функции координат. На выбираемые функции накладываются следующие ограничения. Решение должно удовлетворять геометрическим граничным условиям при любых значениях параметров  $a_k, b_k, c_k$ . Это будет обеспечено, если на части  $\omega_u$  поверхности тела функции  $u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}$  будут принимать заданные здесь значения перемещений, а функции  $f_{1k}, f_{2k}, f_{3k}$  (базисные функции метода Ритца) – обращаться в нуль. В случае простого закрепления тела (когда заданные на  $\omega_u$  перемещения равны нулю) слагаемые  $u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}$  в выражениях (5.29) должны быть опущены. Постоянные подбираются таким образом, чтобы при выбранных функциях полная потенциальная энергия системы была минимальна.

Потенциальная энергия деформации с учётом формулы (5.17) может быть представлена в виде

$$U = \int_{\tau} W d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \left\{ G \left[ 2(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 \right] + \lambda \theta^2 \right\} d\tau.$$

Выразим здесь деформации через перемещения по формулам Коши и после подстановки выражений (5.29) выполним интегрирование по объёму тела. В результате потенциальная энергия деформации будет представлена как квадратичная функция постоянных:

$$U = U(a_k, b_k, c_k).$$

Далее внесём (5.29) в выражение для потенциала внешних сил:

$$\begin{aligned} \Pi &= - \left( \int_{\tau} [\tilde{u}]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p} [\tilde{u}]^T [p] d\omega \right) = \\ &= - \int_{\tau} (\tilde{u}_x R_x + \tilde{u}_y R_y + \tilde{u}_z R_z) d\tau - \int_{\omega_p} (\tilde{u}_x p_x + \tilde{u}_y p_y + \tilde{u}_z p_z) d\omega. \end{aligned}$$

Выполнив затем интегрирование, представим  $\Pi$  как линейную функцию постоянных:

$$\Pi = \Pi(a_k, b_k, c_k).$$

Таким образом, полная потенциальная энергия системы будет выражена в виде некоторой зависимости от искоемых коэффициентов:

$$V = U + \Pi = V(a_k, b_k, c_k).$$

Необходимое условие минимума функции нескольких переменных заключается в требовании равенства нулю производных по каждой из переменных:

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial b_i} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Эти условия приводят к системе  $3m$  линейных алгебраических уравнений относительно  $3m$  искоемых коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} &= 0 \quad (i = 1, \dots, m); \\ \frac{\partial U}{\partial b_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} &= 0 \quad (i = 1, \dots, m); \\ \frac{\partial U}{\partial c_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} &= 0 \quad (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Решив эту систему, по формулам (5.29) будем иметь приближённое решение задачи. По формулам Коши можно найти деформации, а затем по закону Гука – и напряжения.

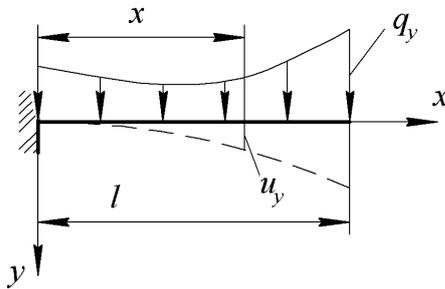
## 5.5 Расчёт балки на изгиб методом Ритца

Для иллюстрации процедуры метода Ритца рассмотрим с его помощью задачу об изгибе балки, имеющую простое аналитическое решение. Выведем сначала необходимые соотношения, вытекающие из технической теории изгиба бруса.

Пусть балка длиной  $l$  испытывает изгиб в плоскости  $xu$  под действием поперечной нагрузки  $q_y$  (рисунок 5.7). Примем, что ось  $y$  совпадает с одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения. Прогиб балки

на расстоянии  $x$  от начала координат обозначим через  $u_y(x)$ . Изгибающий момент в сечении балки связан с  $u_y$  известным соотношением

$$M = EI u_y'', \quad (5.30)$$



**Рисунок 5.7 – Балка под действием поперечной нагрузки**

где  $E$  – модуль упругости материала;  $I$  – момент инерции поперечного сечения относительно оси  $z$ ; штрих сверху означает дифференцирование по координате  $x$ .

Потенциальная энергия изгиба балки, как известно, определяется по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx.$$

С помощью соотношения (5.30) представим  $U$  как функционал, зависящий от искомого перемещения  $u_y$ :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI u_y''^2 dx.$$

Потенциал внешних сил применительно к рассматриваемому случаю запишется так:

$$\Pi = - \int_0^l q_y u_y dx.$$

В соответствии с методом Ритца перемещение  $u_y$  будем искать в виде

$$\tilde{u}_y(x) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(x), \quad (5.31)$$

где базисные функции  $f_k(x)$  должны удовлетворять условиям закрепления балки, а коэффициенты  $c_k$  отыскиваются из условия минимума полной потенциальной энергии. Выведем уравнения для нахождения  $c_k$ .

Подставив  $\tilde{u}_y$  в форму (5.31) в выражение для полной потенциальной энергии системы, будем иметь

$$V = U + \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \sum_{k=1}^m c_k f_k'' \right)^2 dx - \int_0^l q_y \sum_{k=1}^m c_k f_k dx.$$

Необходимое условие минимума

$$\frac{\partial V}{\partial c_i} = 0$$

приводит к равенству

$$\frac{\partial V}{\partial c_i} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \cdot 2 \sum_{k=1}^m c_k f_k'' f_i'' dx - \int_0^l q_y f_i dx = 0.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, представим этот результат в виде

$$\sum_{k=1}^m A_{ki} c_k - b_i = 0,$$

где

$$A_{ki} = \int_0^l EI f_k'' f_i'' dx; \quad b_i = \int_0^l q_y f_i dx. \quad (5.32)$$

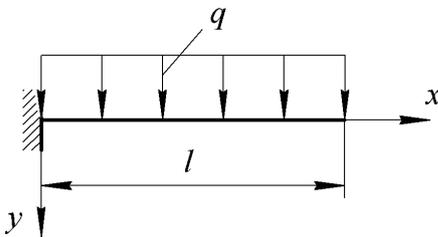
Записанные для  $i=1, \dots, m$  полученные равенства образуют систему уравнений относительно коэффициентов  $c_k$  вида

$$[A][c] = [b]. \quad (5.33)$$

Здесь

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}; \quad [b] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad [c] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}.$$

Применим эти результаты к расчёту консольной балки постоянной жёсткости, на которую действует постоянная нагрузка  $q_y = q$  (рисунок 5.8). На левом конце балки имеем кинематические граничные условия



**Рисунок 5.8 – Консольная балка под действием постоянной нагрузки**

$$u_y|_{x=0} = 0; \quad u_y'|_{x=0} = 0,$$

а на правом – статические условия

$$M|_{x=l} = 0; \quad Q|_{x=l} = 0.$$

Выберем теперь базисные функции  $f_k(x)$  в выражении (5.31). Каждая из них должна удовлетворять кинематическим условиям, то есть условиям

$$f_k(0) = 0; \quad f_k'(0) = 0.$$

Простейший выбор заключается в использовании степенных функций

$$f_k(x) = x^{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

удовлетворяющих этим требованиям. Заметим, что статические условия при  $x = l$  будут удовлетворяться автоматически (строго или приближённо) благодаря минимизации полной потенциальной энергии.

Так как в данном примере  $EI = \text{const}$  и  $q_y = q = \text{const}$ , формулы (5.32) примут вид

$$A_{ki} = EI \int_0^l f_k'' f_i'' dx; \quad b_i = q \int_0^l f_i dx. \quad (5.34)$$

Ограничимся вначале одночленным приближением, полагая в (5.31)  $m = 1$ :

$$\tilde{u}_y(x) = c_1 f_1(x); \quad f_1(x) = x^2.$$

Так как  $f_1'' = 2$ , по формулам (5.34) получаем

$$A_{11} = EI \int_0^l f_1''^2 dx = EI \int_0^l 2^2 dx = 4lEI,$$

$$b_1 = q \int_0^l x^2 dx = \frac{ql^3}{3}.$$

Система уравнений (5.33) вырождается в единственное уравнение

$$A_{11}c_1 = b_1,$$

из которого находим

$$c_1 = \frac{b_1}{A_{11}} = \frac{ql^2}{12EI}.$$

Таким образом, мы получаем приближённое решение

$$\tilde{u}_y = \frac{ql^2}{12EI} x^2.$$

На свободном конце балки (при  $x = l$ ) прогиб оказывается в этом решении равным

$$\tilde{u}_y|_{x=l} = \frac{ql^4}{12EI}.$$

Данный результат значительно отличается от точного значения

$$u_y|_{x=l} = \frac{ql^4}{8EI}.$$

Для улучшения результата рассмотрим двучленное приближение, полагая  $m = 2$ :

$$\tilde{u}_y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x); \quad f_1(x) = x^2; \quad f_2(x) = x^3.$$

Имеем в этом случае  $f_1'' = 2$ ;  $f_2'' = 6x$ , так что

$$A_{11} = EI \int_0^l f_1''^2 dx = EI \int_0^l 4 dx = 4lEI;$$

$$A_{12} = A_{21} = EI \int_0^l f_1'' f_2'' dx = EI \int_0^l 12x dx = 6l^2 EI ;$$

$$A_{22} = EI \int_0^l f_2''^2 dx = EI \int_0^l 36x^2 dx = 12l^3 EI ;$$

$$b_1 = q \int_0^l f_1 dx = q \int_0^l x^2 dx = \frac{ql^3}{3} ;$$

$$b_2 = q \int_0^l f_2 dx = q \int_0^l x^3 dx = \frac{ql^4}{4} .$$

Относительно  $c_1$  и  $c_2$  получается система уравнений

$$4lEIc_1 + 6l^2 EIc_2 = \frac{ql^3}{3} ;$$

$$6l^2 EIc_1 + 12l^3 EIc_2 = \frac{ql^4}{4} ,$$

решение которой даёт

$$c_1 = \frac{5ql^2}{24EI} ; \quad c_2 = -\frac{ql}{12EI} .$$

Приближённое выражение для  $u_y$  имеет теперь вид

$$\tilde{u}_y(x) = \frac{ql^4}{24EI} \left( 5 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} \right) .$$

При  $x = l$  получаем отсюда  $\tilde{u}_y|_{x=l} = \frac{ql^4}{8EI}$ , что совпадает с точным значением. Однако изгибающие моменты в найденном решении

$$\tilde{M} = EI\tilde{u}_y'' = \frac{ql^2}{12} \left( 5 - 6 \frac{x}{l} \right)$$

заметно отличаются от точных результатов. Например, при  $x=0$  имеем  $\tilde{M} = 5ql^2/12$ , тогда как в действительности изгибающий момент в заделке равен  $ql^2/2$ .

Если выражение для  $\tilde{u}_y(x)$  взять в виде

$$\tilde{u}_y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x); \quad f_1(x) = x^2; \quad f_2(x) = x^3; \quad f_3(x) = x^4 ,$$

то вычисления приводят к следующим значениям постоянных:

$$c_1 = \frac{ql^2}{4EI}; \quad c_2 = -\frac{ql}{6EI}; \quad c_3 = \frac{q}{24EI} .$$

Приближённое решение

$$\tilde{u}_y(x) = \frac{ql^4}{24EI} \left( 6 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$$

совпадёт в этом случае с точным уравнением изогнутой оси балки. Если в число базисных входят функции, из которых может быть составлено точное решение, то метод Ритца всегда приводит именно к точному решению задачи. Попытка добавления новых функций типа  $x^5$ ,  $x^6, \dots$  не изменяет решения: множители  $c_k$  при этих функциях оказываются нулевыми. Отметим также, что погрешность определения напряжений в приближённом решении по методу Ритца выше, чем для перемещений. Это связано с тем, что вычисление напряжений требует дифференцирования базисных функций. Даже если сами функции удовлетворительно представляют искомые перемещения, производные от них могут значительно отличаться от точных зависимостей. В рассмотренном примере это видно из сравнения изгибающих моментов  $\tilde{M}$  в двучленном приближении с их точным распределением по длине балки.

## 5.6 Метод Бубнова-Галёркина

Условие минимума функционала  $V$  возьмём в виде

$$\delta V = \delta U + \delta \Pi = 0.$$

Используя для  $\delta U$  и  $\delta \Pi$  выражения

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\omega_p} [\delta u]^T \left( [\sigma_x] n_x + [\sigma_y] n_y + [\sigma_z] n_z \right) d\omega - \\ &\quad - \int_{\tau} [\delta u]^T \left( \frac{\partial [\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial [\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial [\sigma_z]}{\partial z} \right) d\tau; \\ \delta \Pi &= - \int_{\tau} [\delta u]^T [R] d\tau - \int_{\omega_p} [\delta u]^T [p] d\omega, \end{aligned}$$

представим условие минимума в форме равенства:

$$\begin{aligned} &\int_{\omega_p} [\delta u]^T \left( [\sigma_x] n_x + [\sigma_y] n_y + [\sigma_z] n_z - [p] \right) d\omega - \\ &\quad - \int_{\tau} [\delta u]^T \left( \frac{\partial [\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial [\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial [\sigma_z]}{\partial z} + [R] \right) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Это равенство лежит в основе метода Бубнова-Галёркина. Как и в методе Ритца, приближённое решение отыскивается в виде

$$\tilde{u}_x(x, y, z) = u_{x0}(x, y, z) + \sum_{k=1}^m a_k f_{1k}(x, y, z);$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_y(x, y, z) &= u_{y_0}(x, y, z) + \sum_{k=1}^m b_k f_{2k}(x, y, z); \\ \tilde{u}_z(x, y, z) &= u_{z_0}(x, y, z) + \sum_{k=1}^m c_k f_{3k}(x, y, z).\end{aligned}\quad (5.36)$$

Но теперь к функциям  $u_{x_0}$ ,  $u_{y_0}$ ,  $u_{z_0}$ , а также к функциям  $f_{1k}$ ,  $f_{2k}$ ,  $f_{3k}$  предъявляются более жёсткие требования. Они должны удовлетворять не только геометрическим (как в методе Ритца), но также и статическим граничным условиям. Это означает, что напряжения  $\tilde{\sigma}_{ij}$ , которые вытекают из представления (5.36) согласно формулам Коши и закону Гука, должны удовлетворять статическим условиям на  $\omega_p$  независимо от значений  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ . В этом случае будет выполняться равенство

$$[\tilde{\sigma}_x]n_x + [\tilde{\sigma}_y]n_y + [\tilde{\sigma}_z]n_z = [p] \quad \text{на } \omega_p,$$

и поверхностный интеграл в левой части равенства (5.35) исчезает. Тогда искомые постоянные должны быть подчинены условию

$$\int_{\tau} [\delta u]^T \left( \frac{\partial [\tilde{\sigma}_x]}{\partial x} + \frac{\partial [\tilde{\sigma}_y]}{\partial y} + \frac{\partial [\tilde{\sigma}_z]}{\partial z} + [R] \right) d\tau = 0. \quad (5.37)$$

Перепишем (5.37) в скалярной форме:

$$\begin{aligned}& \int_{\tau} \left\{ \delta u_x \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zx}}{\partial z} + R_x \right) + \right. \\ & + \delta u_y \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zy}}{\partial z} + R_y \right) + \\ & \left. + \delta u_z \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zz}}{\partial z} + R_z \right) \right\} d\tau = 0.\end{aligned}\quad (5.38)$$

Фигурирующие здесь вариации перемещений задаются в методе Бубнова-Галёркина путём варьирования выражений (5.36). Учитывая, что варьированию подлежат только искомые постоянные  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ , будем иметь:

$$\begin{aligned}\delta u_x &= \delta \tilde{u}_x = \sum_{k=1}^m \delta a_k f_{1k}(x, y, z); \\ \delta u_y &= \delta \tilde{u}_y = \sum_{k=1}^m \delta b_k f_{2k}(x, y, z); \\ \delta u_z &= \delta \tilde{u}_z = \sum_{k=1}^m \delta c_k f_{3k}(x, y, z).\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (5.38) и учтём, что равенство нулю должно выполняться при любых вариациях  $\delta a_k$ ,  $\delta b_k$ ,  $\delta c_k$ , которые не связаны друг с другом. Тогда придём к совокупности  $3m$  равенств вида ( $k = 1, \dots, m$ ):

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zx}}{\partial z} + R_x \right) f_{1k} d\tau &= 0; \\ \int_{\tau} \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zy}}{\partial z} + R_y \right) f_{2k} d\tau &= 0; \\ \int_{\tau} \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zz}}{\partial z} + R_z \right) f_{3k} d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Компоненты  $\tilde{\sigma}_{ij}$ , входящие в подынтегральные выражения, получаются из формул (5.36) путём использования формул Коши и соотношений закона Гука. Они содержат коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ , так что равенства (5.39), записанные для  $k = 1, 2, \dots, m$ , представляют собой замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов. Решив систему, будем иметь в соответствии с (5.36) приближённое решение задачи.

Выражения в скобках в (5.39) есть левые части дифференциальных уравнений равновесия. Подстановка в них искомых функций (5.36) даёт некоторые, вообще говоря, отличные от нуля функции координат (так называемые невязки уравнений), содержащие постоянные  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ . Процедура Бубнова-Галёркина заключается в последовательном умножении невязок на соответствующие базисные функции и интегрировании получаемых выражений по объёму тела с последующим приравниванием результатов нулю. Эта процедура используется и как общий приём приближённого решения уравнений математической физики вне связи с какими-либо вариационными принципами.

## 5.7 Расчёт балки на изгиб методом Бубнова-Галёркина

Для иллюстрации метода Бубнова-Галёркина снова обратимся к изгибу консольной балки, нагруженной так, как показано на рисунке 5.9.

На рисунке 5.10 показаны силы, действующие на бесконечно малый элемент балки. Условия равновесия сил и равновесия моментов приводят к равенствам

$$Q' = q_y; \quad Q = M'.$$

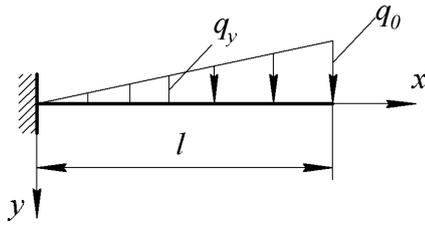


Рисунок 5.9 – Консольная балка под действием переменной нагрузки

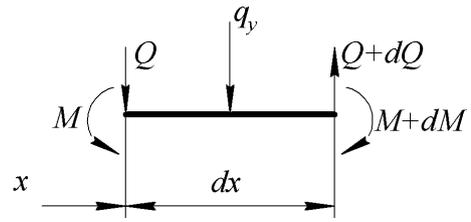


Рисунок 5.10 – Положительные направления внутренних сил и моментов

Подстановка второго из них в первое приводит к уравнению

$$M'' = q_y. \quad (5.40)$$

Если воспользоваться соотношением  $M = EIu_y''$ , то можно прийти отсюда к уравнению равновесия в перемещениях. В случае  $EI = \text{const}$  получаем

$$EIu_y^{IV} = q_y. \quad (5.41)$$

Уравнение (5.41) можно без труда проинтегрировать, но мы будем искать его решение приближённо по методу Бубнова-Галёркина, задаваясь выражением для  $u_y$  в виде

$$\tilde{u}_y(x) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(x).$$

Здесь  $f_k$  – базисные функции, а  $c_k$  – неизвестные коэффициенты. Для нахождения последних перенесём все члены уравнения (5.41) в левую часть и применим далее процедуру Бубнова-Галёркина. В рассматриваемом случае одномерной задачи интегрирование по объёму заменяется интегрированием по длине  $l$ , так что мы получим совокупность равенств вида

$$\int_0^l \left( EI \sum_{k=1}^m c_k f_k^{IV} - q_y \right) f_i dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Эту систему уравнений относительно  $c_k$  снова можно представить в матричной форме

$$[A][c] = [b],$$

где элементы матрицы коэффициентов и матрицы правых частей вычисляются по формулам

$$A_{ki} = EI \int_0^l f_k^{IV} f_i dx; \quad b_i = \int_0^l q_y f_i dx.$$

Базисные функции должны, как и в методе Ритца, удовлетворять условиям

$$f_k(0) = 0; \quad f_k'(0) = 0.$$

Но, кроме того, они должны удовлетворять требованиям

$$f_k''(l) = 0; \quad f_k'''(l) = 0,$$

вытекающим из статических условий  $M = 0$ ,  $Q = 0$  при  $x = l$ .

Ограничимся одночленным приближением, полагая

$$\tilde{u}_y(x) = c_1 f_1(x).$$

Для функции  $f_1(x)$  можно принять следующее выражение:

$$f_1(x) = x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4,$$

где коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  подберём так, чтобы удовлетворить требованиям при  $x = l$ . Так как

$$f_1''(x) = 2 + 6a_1 x + 12a_2 x^2;$$

$$f_1'''(x) = 6a_1 + 24a_2 x,$$

то для отыскания  $a_1$  и  $a_2$  имеем равенства

$$f_1''(l) = 2 + 6a_1 l + 12a_2 l^2 = 0;$$

$$f_1'''(l) = 6a_1 + 24a_2 l = 0,$$

решение которых даёт

$$a_1 = -\frac{2}{3l}; \quad a_2 = \frac{1}{6l^2}.$$

Таким образом, в качестве базисной может быть взята функция

$$f_1(x) = x^2 - \frac{2}{3l} x^3 + \frac{1}{6l^2} x^4.$$

Для неё

$$f_1^{IV}(x) = \frac{4}{l^2},$$

так что коэффициент  $A_{11}$  получается равным

$$A_{11} = EI \int_0^l f_1^{IV} f_1 dx = EI \int_0^l \frac{4}{l^2} \left( x^2 - \frac{2}{3l} x^3 + \frac{1}{6l^2} x^4 \right) dx = \frac{4lEI}{5}.$$

Полагая

$$q_y(x) = q_0 \frac{x}{l},$$

находим также

$$b_1 = \int_0^l q_y f_1 dx = \frac{q_0}{l} \int_0^l x \left( x^2 - \frac{2}{3l} x^3 + \frac{1}{6l^2} x^4 \right) dx = \frac{13}{90} q_0 l^3.$$

Таким образом, постоянная  $c_1$  оказывается равной:

$$c_1 = \frac{b_1}{A_{11}} = \frac{13}{72} \frac{q_0 l^2}{EI}.$$

Приближённое выражение для  $u_y$ , следовательно, будет

$$\tilde{u}_y(x) = \frac{13}{72} \frac{q_0 l^4}{EI} \left( \frac{x^2}{l^2} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{l^3} + \frac{1}{6} \frac{x^4}{l^4} \right).$$

Прогиб на свободном конце балки в этом приближённом решении

$$\tilde{u}_y|_{x=l} = \frac{13}{144} \frac{q_0 l^4}{EI} = 0,0903 \frac{q_0 l^4}{EI}.$$

В точном решении прогиб на конце балки имеет значение

$$u_y|_{x=l} = \frac{11}{120} \frac{q_0 l^4}{EI} = 0,0917 \frac{q_0 l^4}{EI}.$$

Погрешность приближённого решения составляет 1,5%.

Изгибающий момент в приближённом решении

$$\tilde{M}(x) = EI \tilde{u}_y'' = \frac{13}{36} q_0 l^2 \left( 1 - 2 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right).$$

В заделке, то есть при  $x=0$ , получаем

$$\tilde{M}(0) = \frac{13}{36} q_0 l^2 = 0,361 q_0 l^2.$$

Это значение на 8% превышает точное значение

$$M(0) = \frac{1}{3} q_0 l^2 = 0,333 q_0 l^2.$$

## 5.8 Дополнительная работа и дополнительная энергия деформации

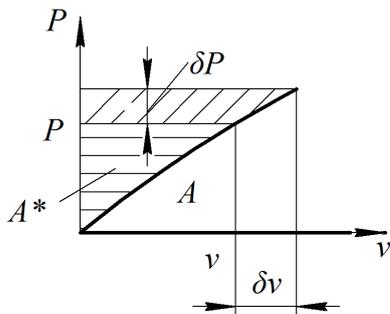


Рисунок 5.11 – К понятию дополнительной работы

Вернёмся к консольной балке, нагруженной сосредоточенной силой на конце (см. рисунок 5.1). Площадь на диаграмме  $P-v$ , заштрихованная на рисунке 5.11 горизонтально и равная

$$A^* = v \cdot P - A, \quad (5.42)$$

где  $A$  – работа силы, называется *дополнительной работой* силы  $P$ . Площадь  $A^*$  дополняет  $A$

до прямоугольника, откуда и проистекает её название. Эта величина не имеет физического смысла, но она оказывается полезной для формулировки вариационного принципа, альтернативного принципу Лагранжа.

Вариацию  $A^*$  при бесконечно малом возрастании силы можно найти из выражения (5.42) формальным путём:

$$\delta A^* = \delta(v \cdot P) - \delta A = \delta v \cdot P + v \cdot \delta P - \delta A.$$

Но так как  $\delta A = \delta v \cdot P$ , отсюда вытекает равенство

$$\delta A^* = v \cdot \delta P. \quad (5.43)$$

В случае линейно-деформируемого тела, когда  $P$  и  $v$  связаны линейной зависимостью,  $A^*$  численно совпадает с  $A$ . Но эти две величины определяются различным образом, что отражается, в частности, в записи формул для  $\delta A^*$  и  $\delta A$ . По существу, дополнительная работа  $A^*$  выступает как функция нагрузки  $P$ , в то время как работа  $A$  рассматривается как функция перемещения  $v$ .

*Дополнительным потенциалом* силы  $P$  называется величина

$$\Pi^* = -vP, \quad (5.44)$$

которая также рассматривается как функция  $P$ ; при этом перемещение  $v$  считается заданным и неизменным. Отсюда вытекает, что вариация  $\Pi^*$  равна

$$\delta \Pi^* = -v \cdot \delta P,$$

то есть

$$\delta \Pi^* = -\delta A^*. \quad (5.45)$$

Таким образом,  $\delta \Pi^*$  формально отличается от  $\delta A^*$  лишь знаком, и условие (5.45) можно взять за основу определения  $\Pi^*$  в более общем случае произвольного нагружения тела. При этом необходимо помнить, что при вычислении  $\delta \Pi^*$  перемещения должны рассматриваться как заданные и неизменные величины, не подлежащие варьированию.

Обобщая сказанное на случай действия объёмных и поверхностных сил, будем иметь

$$\delta A^* = -\delta \Pi^* = \int_{\tau} [u]^T [\delta R] d\tau + \int_{\omega} [u]^T [\delta p] d\omega. \quad (5.46)$$

Подобным же образом вводится понятие *дополнительной энергии деформации*:

$$U^* = \int_{\tau} W^* d\tau, \quad (5.47)$$

где *удельная дополнительная энергия деформации*  $W^*$  определяется равенством

$$W^* = [\varepsilon]^T [\sigma] - W. \quad (5.48)$$

Вариация  $W^*$  имеет выражение

$$\delta W^* = [\varepsilon]^T [\delta\sigma]. \quad (5.49)$$

Заметим, что для линейно-деформируемого тела

$$U^* = U.$$

## 5.9 Принцип дополнительных виртуальных работ. Вариационный принцип Кастильяно

Пусть под действием внешних нагрузок тело находится в равновесии, то есть удовлетворяются уравнения статики

$$\frac{\partial[\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial[\sigma_z]}{\partial z} + [R] = [0] \quad \text{в } \tau; \quad (5.50)$$

$$[\sigma_x]n_x + [\sigma_y]n_y + [\sigma_z]n_z = [p] \quad \text{на } \omega. \quad (5.51)$$

Равенство (5.51) на части  $\omega_p$  поверхности  $\omega$  выражает статические граничные условия, а на  $\omega_u$  оно устанавливает связь между напряжениями и реакциями на тело со стороны наложенных связей.

Напряжения, удовлетворяющие равенствам (5.50) и (5.51), будем называть *статически допустимыми*. Действительные напряжения отличаются от всех других статически допустимых тем, что они удовлетворяют ещё и уравнениям совместности деформаций. Выясним, чем действительное напряжённое состояние отличается от любых других статически допустимых с энергетической точки зрения.

Предположим, что напряжения получили бесконечно малые приращения такие, что новое напряжённое состояние также является равновесным. Изменение напряжений может сопровождаться соответствующим приращением внешних нагрузок либо оно может предполагаться происходящим при неизменных внешних нагрузках. Не уменьшая общности, будем считать, что объёмные силы  $[R]$  при варьировании напряжений остаются неизменными, поверхностные же силы  $[p]$  получают в общем случае приращения  $[\delta p]$ . Тогда условия равновесия в возмущённом состоянии запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}([\sigma_x] + [\delta\sigma_x]) + \frac{\partial}{\partial y}([\sigma_y] + [\delta\sigma_y]) + \frac{\partial}{\partial z}([\sigma_z] + [\delta\sigma_z]) + [R] = [0] \quad \text{в } \tau;$$

$$([\sigma_x] + [\delta\sigma_x])n_x + ([\sigma_y] + [\delta\sigma_y])n_y + ([\sigma_z] + [\delta\sigma_z])n_z = [p] + [\delta p] \quad \text{на } \omega.$$

Вычитая из этих равенств равенства (5.50) и (5.51), получим уравнения, которым должны удовлетворять вариации напряжений:

$$\frac{\partial[\delta\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\delta\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial[\delta\sigma_z]}{\partial z} = [0] \quad \text{в } \tau; \quad (5.52)$$

$$[\delta\sigma_x]n_x + [\delta\sigma_y]n_y + [\delta\sigma_z]n_z = [\delta p] \quad \text{на } \omega. \quad (5.53)$$

В случае изменения поверхностных сил дополнительная работа получит приращение. Её вариация будет

$$\delta A^* = \int_{\omega} [u]^T [\delta p] d\omega. \quad (5.54)$$

Вариация же дополнительной энергии деформации определится выражением

$$\delta U^* = \int_{\tau} [\varepsilon]^T [\delta\sigma] d\tau = \int_{\tau} (\varepsilon_{xx}\delta\sigma_{xx} + \varepsilon_{yy}\delta\sigma_{yy} + \varepsilon_{zz}\delta\sigma_{zz} + \varepsilon_{xy}\delta\sigma_{xy} + \varepsilon_{yz}\delta\sigma_{yz} + \varepsilon_{zx}\delta\sigma_{zx}) d\tau.$$

Предположим далее, что в исходном состоянии выполняются не только условия равновесия, но и геометрические соотношения Коши. Так как следствием формул Коши являются уравнения совместности деформаций, то это означает, что рассматриваемое напряжённое состояние считается теперь не только равновесным, но и совместным. В этом случае выражение для  $\delta U^*$  может быть преобразовано аналогично тому, как это делалось для  $\delta U$  при выводе вариационного уравнения Лагранжа. Подставляя в формулу для  $\delta U^*$  соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}; & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}; & \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned}$$

и повторяя затем ту же цепочку преобразований, которая ранее применялась для  $\delta U$ , можно прийти к равенству, аналогичному (5.23):

$$\begin{aligned} \delta U^* &= \int_{\omega} [u]^T ([\delta\sigma_x]n_x + [\delta\sigma_y]n_y + [\delta\sigma_z]n_z) d\omega - \\ &- \int_{\tau} [u]^T \left( \frac{\partial[\delta\sigma_x]}{\partial x} + \frac{\partial[\delta\sigma_y]}{\partial y} + \frac{\partial[\delta\sigma_z]}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned}$$

В силу условия (5.52) второй интеграл здесь равен нулю. Учитывая также (5.53), будем иметь

$$\delta U^* = \int_{\omega} [u]^T [\delta p] d\omega. \quad (5.55)$$

Выражение в правой части есть  $\delta A^*$ , и мы приходим к равенству

$$\delta U^* = \delta A^*. \quad (5.56)$$

Оно выражает так называемый *принцип дополнительных виртуальных работ*, согласно которому в действительном (то есть совместном) напряжённом состоянии вариация дополнительной энергии деформации равна вариации дополнительной работы внешних сил.

Уравнение (5.56) получено как необходимое условие совместности напряжённого состояния. Можно показать, что оно является и достаточным условием совместности. При выполнении равенства (5.56) как следствие будут выполняться соотношения Коши, то есть будут удовлетворяться уравнения совместности деформаций.

Заменяя  $\delta A^*$  на  $-\delta \Pi^*$ , придадим равенству (5.56) вид

$$\delta(U^* + \Pi^*) = 0,$$

где

$$\Pi^* = - \int_{\omega} [u]^T [p] d\omega. \quad (5.57)$$

Величина

$$V^* = U^* + \Pi^* \quad (5.58)$$

называется *полной дополнительной энергией системы*. Уравнение

$$\delta V^* = 0, \quad (5.59)$$

называемое *вариационным уравнением Кастильяно*, устанавливает, что в действительном напряжённом состоянии полная дополнительная энергия системы имеет стационарное значение. Можно показать, что в случае справедливости закона Гука это стационарное значение есть минимум.

Из сказанного вытекает следующий *вариационный принцип Кастильяно для линейно-упругого тела*. Из всех статически допустимых напряжённых состояний в действительности имеет место такое, для которого полная дополнительная энергия системы минимальна.

При практическом использовании вариационного уравнения Кастильяно во многих случаях оказывается возможным варьировать напряжённое состояние таким образом, чтобы поверхностные нагрузки на  $\omega_p$  оставались неизменными. В этом случае

$$\delta A^* = \int_{\omega_u} [u]^T [\delta p] d\omega.$$

Если при этом заданные на  $\omega_u$  перемещения равны нулю или тело вообще не закреплено ( $\omega_u = 0$ ), то  $\delta A^* = 0$  и мы приходим согласно (5.56) к уравнению

$$\delta U^* = 0.$$

Для линейно-упругого тела, для которого  $U^* = U$ , получаем известное начало наименьшей работы, или начало Кастильяно

$$\delta U = 0. \quad (5.60)$$

Таким образом, в этом частном случае из всех статически допустимых напряжённых состояний в действительности имеет место такое, для которого потенциальная энергия деформации минимальна:

$$U = \min.$$

Исходя из принципа дополнительных виртуальных работ (5.56), можно вывести важную для практических приложений теорему. Пусть на тело действуют сосредоточенные силы  $P_1, P_2, \dots, P_n$  и пусть этим силам соответствуют перемещения  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Если силы получают приращения  $\delta P_1, \delta P_2, \dots, \delta P_n$ , то вариация дополнительной работы будет

$$\delta A^* = v_1 \delta P_1 + v_2 \delta P_2 + \dots + v_n \delta P_n. \quad (5.61)$$

Вызванные этими силами напряжения и, следовательно, дополнительная энергия деформации  $U^*$  представляют собой некоторые функции заданных сил. Тогда можно записать

$$\delta U^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_1} \delta P_1 + \frac{\partial U^*}{\partial P_2} \delta P_2 + \dots + \frac{\partial U^*}{\partial P_n} \delta P_n. \quad (5.62)$$

Поскольку согласно (5.56) должно быть

$$\delta U^* = \delta A^*,$$

из сопоставления выражений (5.61) и (5.62) приходим к равенствам вида

$$v_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Для линейно-упругого тела, когда  $U^* = U$ , будем иметь

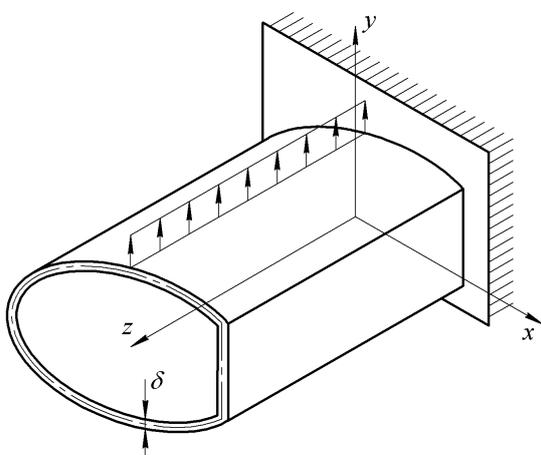
$$v_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}. \quad (5.63)$$

Соотношение (5.63) выражает так называемую теорему Кастильяно, согласно которой перемещение точки приложения некоторой силы  $P_i$  в направлении этой силы равно для линейно-упругого тела частной производной от потенциальной энергии деформации по этой силе.

## 6 БАЛОЧНАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЁТА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

### 6.1 Основные допущения

В данном разделе рассматриваются тонкостенные конструкции типа крыла самолёта, фюзеляжа или корпуса ракеты, имеющие форму цилиндрической оболочки (рисунок 6.1). Поверхность, которая делит толщину пополам, будем называть срединной. Линия в пересечении срединной поверхности с плоскостью поперечного сечения называется средней линией или контуром сечения. Оболочку отнесём к правой декартовой системе координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , направив ось  $z$  параллельно образующей.



**Рисунок 6.1 – Тонкостенная цилиндрическая конструкция**

В качестве нагрузок могут выступать распределённые и сосредоточенные силы и моменты, под действием которых конструкция работает как стержень (или балка), испытывая в общем случае растяжение (или сжатие), изгиб и кручение. Теория расчёта подобных конструкций является обобщением технической теории растяжения, изгиба и кручения бруса, рассматриваемой в сопротивлении материалов, и использует следующие допущения.

1. Толщина оболочки  $\delta$  может произвольно меняться в поперечном сечении, но остаётся неизменной вдоль каждой образующей. Кроме того, толщина весьма мала по сравнению с размерами поперечного сечения, благодаря чему напряжения можно считать постоянными по толщине.

2. Оболочка может иметь продольные подкрепления (пояса) в виде рёбер, размеры сечений которых постоянны в продольном направлении и малы в сравнении с размерами сечения оболочки. Поэтому изменением напряжений по сечению пояса можно также пренебречь.

3. Конструкция имеет достаточное число поперечных диафрагм (нервюр или шпангоутов), весьма жёстких в своей плоскости. Благодаря этому форма поперечных сечений оболочки при деформировании сохраняется неизменной. В то же время эти диафрагмы имеют незначительную жёсткость из плоскости и не препятствуют свободным перемещениям точек поперечных сечений в осевом направлении.

4. Конструкция может быть изготовлена из различных материалов, но вдоль каждой образующей материал остаётся неизменным. Все материалы подчиняются закону Гука.

5. Так же, как и в технической теории изгиба бруса, будем пренебрегать нормальными напряжениями, возникающими от надавливания продольных волокон друг на друга.

6. Примем, наконец, гипотезу Беляева о плоском законе изменения деформаций продольных волокон в поперечном сечении оболочки:

$$\varepsilon = ax + by + c, \quad (6.1)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – некоторые коэффициенты, являющиеся функциями координаты  $z$ .

Эта гипотеза является более общей, чем гипотеза плоских сечений, используемая в технической теории изгиба бруса. Именно она составляет основу рассматриваемой теории.

## 6.2 Определение нормальных напряжений в тонкостенной конструкции

Для определения нормальных напряжений в некотором сечении  $z = \text{const}$  разделим мысленно оболочку по этому сечению на две части (рисунок 6.2,а), одну из которых отбросим.

Силы, с которыми отброшенная часть действует на оставшуюся, можно свести к осевой силе  $N_z$ , перерезывающим силам  $Q_x$  и  $Q_y$ , а также моментам  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  (рисунок 6.2,б). Эти силовые факторы могут быть найдены из условий равновесия отброшенной части. Будем считать положительными растягивающую осевую силу и такие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , при действии которых растяжение испытывают волокна с положительными значениями координат  $y$  и  $x$  соответственно. Положительные силы  $Q_x$ ,  $Q_y$  в сечении, нормаль к которому сонаправлена оси  $z$ , действуют в положительных направлениях осей  $x$ ,  $y$ ; вектор положительного момента  $M_z$  (определяемый по правилу правого винта) в том же сечении направлен в положительную сторону оси  $z$ .

Нормальное напряжение  $\sigma$  в сечении связано с деформацией зависимостью

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (6.2)$$

где  $E$  – модуль упругости материала.

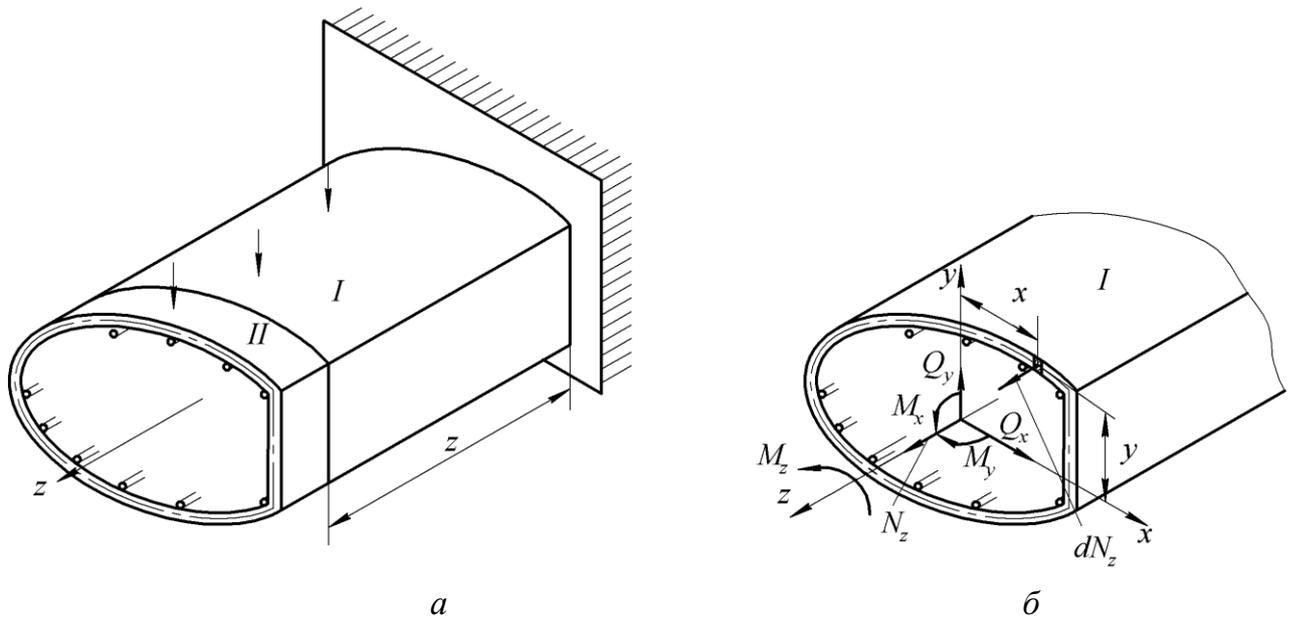


Рисунок 6.2 – Силы и моменты в сечениях тонкостенной балки

В окрестности некоторой точки контура с координатами  $x$  и  $y$  выделим бесконечно малый элемент поперечного сечения, имеющий вдоль средней линии размер  $ds$ . Полагая, что нормальное напряжение постоянно по толщине, запишем выражение для элементарной продольной силы, воспринимаемой этим элементом:

$$dN_z = \sigma \delta ds.$$

Осевые силы возникают также в поясах. Для пояса номер  $i$

$$N_{zi} = \sigma_i F_i,$$

где  $\sigma_i$  – значение напряжения (которое мы считаем постоянным) в сечении  $i$ -го подкрепляющего элемента;  $F_i$  – площадь сечения  $i$ -го пояса.

Равнодействующая нормальных напряжений будет, очевидно,

$$N_z = \int_l \sigma \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i F_i, \quad (6.3)$$

где  $l$  – длина средней линии сечения;  $n$  – число поясов.

Элементарная сила  $dN_z$  создаёт относительно осей  $x$ ,  $y$  моменты

$$dM_x = y dN_z = \sigma y \delta ds;$$

$$dM_y = x dN_z = \sigma x \delta ds.$$

Моменты от силы в  $i$ -м поясе

$$M_{xi} = y_i N_{zi} = \sigma_i y_i F_i;$$

$$M_{yi} = x_i N_{zi} = \sigma_i x_i F_i,$$

где  $x_i$ ,  $y_i$  – координаты центра тяжести сечения  $i$ -го пояса.

Результирующие моменты будут

$$M_x = \int_l \sigma y \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i y_i F_i ;$$

$$M_y = \int_l \sigma x \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i x_i F_i . \quad (6.4)$$

Равенства (6.3) и (6.4) используем для определения трёх постоянных  $a$ ,  $b$  и  $c$  в формуле (6.1).

Для получения удобных расчётных соотношений в случае, когда конструкция изготовлена из различных материалов, преобразуем запись закона Гука. Приведём все элементы сечения к одному из материалов, модуль упругости которого обозначим  $E_0$ . Для произвольного материала с модулем упругости  $E$  перепишем равенство (6.2) следующим образом:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{E_0} E_0 \varepsilon .$$

Отношение

$$\varphi = \frac{E}{E_0}$$

называется *коэффициентом приведения* или *редукционным коэффициентом*.

С учётом этого обозначения будем иметь закон Гука в форме зависимости

$$\sigma = \varphi E_0 \varepsilon .$$

Подстановка сюда равенства (6.1) даёт распределение напряжений по сечению вида

$$\sigma = \varphi E_0 (ax + by + c) = \varphi (Ax + By + C), \quad (6.5)$$

где обозначено  $A = E_0 a$ ,  $B = E_0 b$ ,  $C = E_0 c$ . Заметим, что величина

$$\sigma_r = E_0 \varepsilon = E_0 (ax + by + c) = Ax + By + C$$

есть, очевидно, то напряжение, которое возникло бы в продольном волокне при создании в нём деформации  $\varepsilon$ , если бы оно было изготовлено из материала с модулем упругости  $E_0$ . Здесь и далее нижний индекс  $r$  в обозначении какой-либо величины указывает, что она относится к приведённой системе (от англ. *reduced*). Из (6.5) следует, что

$$\sigma = \varphi \sigma_r .$$

Величина  $\sigma_r$ , так же как и  $\varepsilon$ , изменяется по сечению по закону плоскости, но действительное напряжение  $\sigma$  в общем случае уже не подчиняется этому закону.

Аналогично выражаются напряжения в поясах. Для  $i$ -го пояса можно записать

$$\sigma_i = \varphi_i (Ax_i + By_i + C), \quad (6.6)$$

где  $\varphi_i = E_i/E_0$  ( $E_i$  – модуль упругости материала  $i$ -го пояса).

Подставив теперь соотношения (6.5) и (6.6) в равенства (6.3) и (6.4), получим систему уравнений относительно  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$\begin{aligned} N_z &= A \left( \int_l \varphi x \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i F_i \right) + B \left( \int_l \varphi y \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i F_i \right) + C \left( \int_l \varphi \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i F_i \right); \\ M_x &= A \left( \int_l \varphi xy \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i y_i F_i \right) + B \left( \int_l \varphi y^2 \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i^2 F_i \right) + \\ &\quad + C \left( \int_l \varphi y \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i F_i \right); \\ M_y &= A \left( \int_l \varphi x^2 \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i^2 F_i \right) + B \left( \int_l \varphi xy \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i y_i F_i \right) + \\ &\quad + C \left( \int_l \varphi x \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i F_i \right). \end{aligned}$$

Коэффициентами при неизвестных являются геометрические характеристики приведённого сечения. От обычных геометрических характеристик они отличаются тем, что вместо действительной толщины и действительных площадей сечения поясов в них фигурируют приведённые величины, которые получаются умножением истинных значений на соответствующие редуцированные коэффициенты. Тем самым учитывается влияние разнородности материалов.

Величина

$$F_r = \int_l \varphi \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i F_i \quad (6.7)$$

есть площадь приведённого сечения. Координаты  $x_c$ ,  $y_c$  его центра тяжести равны по определению отношениям статических моментов приведённого сечения относительно осей  $y$  и  $x$  соответственно к его площади:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{F_r} \left( \int_l \varphi x \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i F_i \right); \\ y_c &= \frac{1}{F_r} \left( \int_l \varphi y \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i F_i \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Благодаря этим равенствам формулы для статических моментов могут быть представлены в виде

$$\int_l \varphi x \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i F_i = x_c F_r ;$$

$$\int_l \varphi y \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i F_i = y_c F_r . \quad (6.9)$$

Выражения

$$I_{rx} = \int_l \varphi y^2 \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i^2 F_i ;$$

$$I_{ry} = \int_l \varphi x^2 \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i^2 F_i ;$$

$$I_{rxy} = \int_l \varphi xy \delta ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i y_i F_i \quad (6.10)$$

представляют собой осевые и центробежный моменты инерции приведённого сечения.

С учётом обозначений (6.7)...(6.10) систему уравнений относительно  $A$ ,  $B$  и  $C$  представим в виде

$$Ax_c F_r + By_c F_r + CF_r = N_z ;$$

$$AI_{rxy} + BI_{rx} + Cy_c F_r = M_x ;$$

$$AI_{ry} + BI_{rxy} + Cx_c F_r = M_y . \quad (6.11)$$

Проще всего её решение выполняется в том случае, когда  $x$  и  $y$  – главные центральные оси инерции приведённого сечения, то есть когда

$$x_c = 0 ; \quad y_c = 0 ; \quad I_{rxy} = 0 .$$

Тогда

$$A = \frac{M_y}{I_{ry}} ; \quad B = \frac{M_x}{I_{rx}} ; \quad C = \frac{N_z}{F_r} ,$$

и для нормальных напряжений получаем формулу

$$\sigma = \varphi \left( \frac{M_y}{I_{ry}} x + \frac{M_x}{I_{rx}} y + \frac{N_z}{F_r} \right) . \quad (6.12)$$

В частном случае нагружения, когда происходит изгиб в плоскости  $yz$  ( $M_y = 0$ ,  $N_z = 0$ ), будем иметь

$$\sigma = \varphi \frac{M_x}{I_{rx}} y . \quad (6.13)$$

На практике главными осями удобно пользоваться лишь в том случае, когда сечение имеет хотя бы одну ось симметрии. Такая ось всегда является центральной и главной. В других случаях лучше использовать такие оси, которые наиболее удобны для описания геометрии.

Предположим, что оси  $x$ ,  $y$  являются центральными ( $x_c = 0$ ;  $y_c = 0$ ), но не главными ( $I_{xy} \neq 0$ ). Из первого уравнения системы (6.11) имеем в этом случае

$$C = \frac{N_z}{F_r},$$

а два других принимают вид

$$AI_{xy} + BI_{rx} = M_x;$$

$$AI_{ry} + BI_{rxy} = M_y.$$

Запишем решение этой системы по правилу Крамера:

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta}; \quad B = \frac{\Delta_B}{\Delta}.$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} I_{rxy} & I_{rx} \\ I_{ry} & I_{rxy} \end{vmatrix} = I_{rxy}^2 - I_{rx}I_{ry} = -I_{rx}I_{ry}(1 - K_xK_y);$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} M_x & I_{rx} \\ M_y & I_{rxy} \end{vmatrix} = I_{rxy}M_x - I_{rx}M_y = -I_{rx}(M_y - K_xM_x);$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} I_{rxy} & M_x \\ I_{ry} & M_y \end{vmatrix} = I_{rxy}M_y - I_{ry}M_x = -I_{ry}(M_x - K_yM_y),$$

где

$$K_x = \frac{I_{rxy}}{I_{rx}}; \quad K_y = \frac{I_{rxy}}{I_{ry}}. \quad (6.14)$$

Таким образом, находим

$$A = \frac{M_y - K_xM_x}{I_{ry}(1 - K_xK_y)}; \quad B = \frac{M_x - K_yM_y}{I_{rx}(1 - K_xK_y)}.$$

Расчётную формулу для  $\sigma$  можно теперь представить в виде, подобном (6.12):

$$\sigma = \varphi \left( \frac{\tilde{M}_y}{\tilde{I}_{ry}} x + \frac{\tilde{M}_x}{\tilde{I}_{rx}} y + \frac{N_z}{F_r} \right), \quad (6.15)$$

где

$$\tilde{M}_x = M_x - K_y M_y; \quad \tilde{M}_y = M_y - K_x M_x; \quad (6.16)$$

$$\tilde{I}_{rx} = I_{rx} (1 - K_x K_y); \quad \tilde{I}_{ry} = I_{ry} (1 - K_x K_y). \quad (6.17)$$

Пусть, в частности, в сечении действует только изгибающий момент  $M_x$ , а  $M_y = 0, N_z = 0$ . В этом случае  $\tilde{M}_x = M_x, \tilde{M}_y = -K_x M_x$ , так что из (6.15) получаем

$$\sigma = \varphi \left( \frac{M_x}{\tilde{I}_{rx}} y - K_x \frac{M_x}{\tilde{I}_{ry}} x \right) = \varphi \frac{M_x}{\tilde{I}_{rx}} \left( y - K_x \frac{\tilde{I}_{rx}}{\tilde{I}_{ry}} x \right).$$

Но, в соответствии с (6.14) и (6.17),

$$K_x \frac{\tilde{I}_{rx}}{\tilde{I}_{ry}} = \frac{I_{rxy}}{I_{rx}} \frac{I_{rx} (1 - K_x K_y)}{I_{ry} (1 - K_x K_y)} = \frac{I_{rxy}}{I_{ry}} = K_y,$$

и расчётная формула для нормальных напряжений принимает в этом случае вид

$$\sigma = \varphi \frac{M_x}{\tilde{I}_{rx}} (y - K_y x). \quad (6.18)$$

Обозначив

$$\tilde{y} = y - K_y x,$$

можно полученную формулу записать также в форме

$$\sigma = \varphi \frac{M_x}{\tilde{I}_{rx}} \tilde{y}.$$

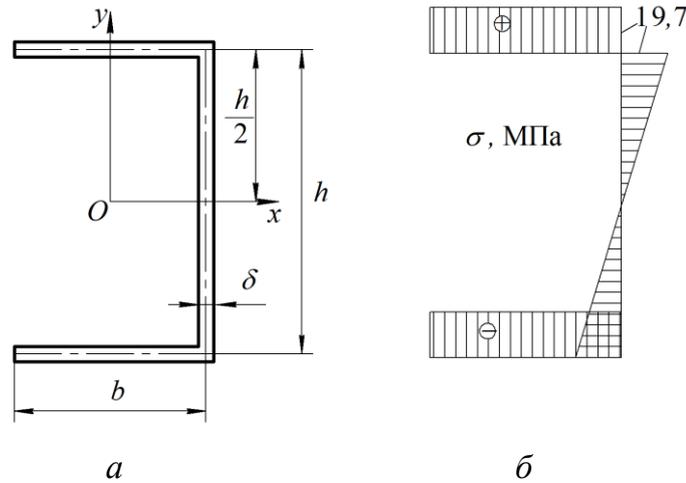
Сравнивая данный результат с выражением (6.13), заключаем, что расчёт напряжений при косом изгибе выполняется так же, как и при плоском изгибе, но с заменой  $I_{rx}$  и  $y$  на  $\tilde{I}_{rx}$  и  $\tilde{y}$ .

### 6.3 Примеры расчёта нормальных напряжений

**Пример 1.** Требуется найти нормальные напряжения в сечении швеллера с размерами  $b = 50$  мм,  $h = 80$  мм,  $\delta = 1$  мм (рисунок 6.3,а). В сечении действует изгибающий момент  $M_x = 0,1$  кН·м.

Данное сечение симметрично относительно оси  $x$ , которая является, следовательно, главной центральной осью. Поскольку балка изготовлена из одного материала, никакого приведения здесь не требуется. Принимая  $\varphi = 1$ , будем иметь  $I_{rx} \equiv I_x$ , а формула (6.13) для нормальных напряжений примет вид

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y.$$



**Рисунок 6.3 – Нормальные напряжения в сечении швеллера**

Момент инерции сечения

$$I_x = 2b\delta \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{\delta h^3}{12} = \frac{b\delta h^2}{2} \left(1 + \frac{h}{6b}\right) = 2,027 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

Отметим, что при вычислении  $I_x$  мы пренебрегли собственными моментами инерции полок относительно осей, параллельных оси  $x$ . Это соответствует формулам (6.10), выведенным в предположении о тонкостенности оболочки.

При  $y = \pm \frac{h}{2}$  абсолютная величина  $\sigma$  составляет

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \frac{h}{2} = \frac{0,1 \cdot 10^6}{2,027 \cdot 10^5} \cdot \frac{80}{2} = 19,7 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений вдоль средней линии дана на рисунке 6.3,б. Заметим, что при вычислении максимального напряжения следовало бы, в строгом соответствии с формулой (6.13), брать точку, в которой  $y = y_{\max} = \frac{h}{2} + \frac{\delta}{2}$ , а не точку на средней линии с координатой  $y = \frac{h}{2}$ . Обычно различие невелико. Так, в данном примере будет  $\sigma_{\max} = 20,0 \text{ МПа}$ , что всего на 1,5% отличается от найденного выше значения 19,7 МПа.

**Пример 2.** Найти нормальные напряжения в  $z$ -образном сечении (рисунок 6.4,а). Геометрические параметры  $b$ ,  $h$ ,  $\delta$  и нагрузка  $M_x$  – те же, что и в примере 1.

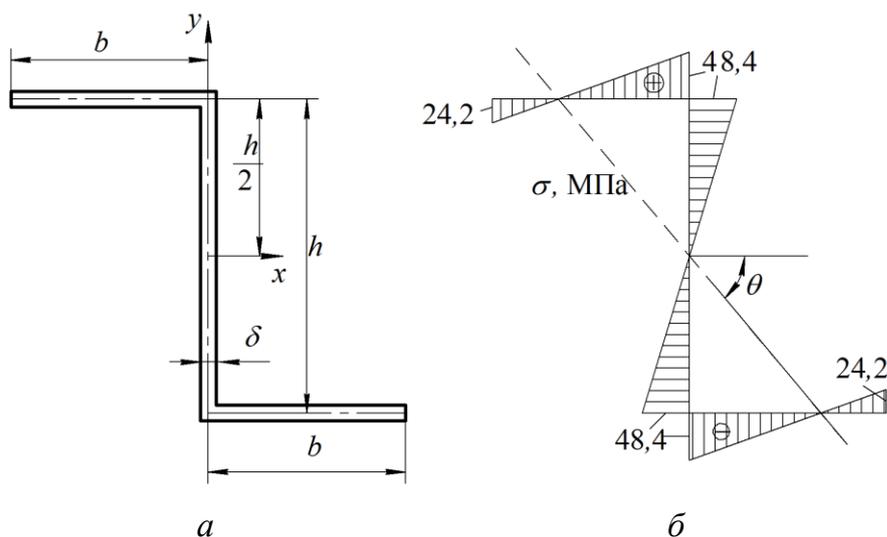


Рисунок 6.4 – Нормальные напряжения в z-образном сечении

В отличие от предыдущего случая оси  $x$ ,  $y$  не являются главными осями инерции, поэтому расчёт нормальных напряжений должен выполняться по формуле (6.18). Полагая  $\varphi = 1$ , находим моменты инерции сечения

$$I_x = \frac{b\delta h^2}{2} \left( 1 + \frac{h}{6b} \right) = 2,027 \cdot 10^5 \text{ мм}^4;$$

$$I_y = 2 \left[ \frac{b^3 \delta}{12} + b\delta \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right] = \frac{2}{3} b^3 \delta = 0,833 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

$$I_{xy} = \int_l xy \delta ds = \frac{h}{2} \delta \int_{-b}^0 x dx + \left( -\frac{h}{2} \right) \delta \int_0^b x dx = -\frac{b^2 \delta h}{2} = -1,000 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

В соответствии с формулами (6.14) имеем

$$K_x = \frac{I_{xy}}{I_x} = -\frac{1,000 \cdot 10^5}{2,027 \cdot 10^5} = -0,4933;$$

$$K_y = \frac{I_{xy}}{I_y} = -\frac{1,000 \cdot 10^5}{0,833 \cdot 10^5} = -1,200,$$

а величина  $\tilde{I}_x$  получается согласно (6.17) равной

$$\tilde{I}_x = I_x (1 - K_x K_y) = 0,828 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

По формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{\tilde{I}_x} (y - K_y x) = \frac{0,1 \cdot 10^6}{0,828 \cdot 10^5} [y - (-1,2)x] = 1,21(y + 1,2x)$$

рассчитываем далее нормальные напряжения. Эпюра напряжений вдоль средней линии представлена на рисунке 6.4,б.

Заметим, что при  $I_{xy} \neq 0$  происходит, как известно, кривой изгиб. Нейтральная линия в сечении отмечена на рисунке 6.4,б штриховой линией; её уравнение

$$y - K_y x = 0,$$

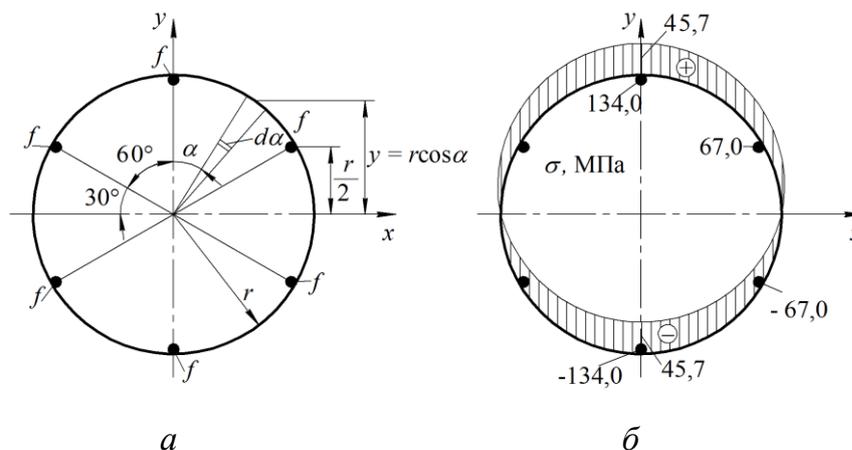
то есть (при  $K_y = -1,2$ )

$$y = -1,2x.$$

Изгиб оси балки будет происходить в плоскости, перпендикулярной к этой линии, то есть в плоскости, составляющей с плоскостью  $yz$  угол

$$\theta = \arctg 1,2 = 50,2^\circ.$$

**Пример 3.** Вычислить нормальные напряжения в сечении цилиндрической оболочки толщиной  $\delta = 2$  мм и радиуса  $r = 300$  мм, подкреплённой шестью равноотстоящими поясами с площадью сечения  $f = 200$  мм<sup>2</sup> каждый (рисунок 6.5,а). Материал оболочки – алюминиевый сплав с модулем упругости  $E_1 = 7 \cdot 10^4$  МПа; материал поясов – сталь с модулем упругости  $E_2 = 2,05 \cdot 10^5$  МПа. В сечении действует изгибающий момент  $M_x = 50$  кН·м.



**Рисунок 6.5 – Нормальные напряжения в подкреплённой оболочке**

Приведём сечение к материалу оболочки, приняв

$$E_0 = E_1 = 7 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Тогда для оболочки будет  $\varphi_0 = 1$ , а для поясов

$$\varphi_{\Pi} = \frac{E_2}{E_0} = \frac{2,05 \cdot 10^5}{7 \cdot 10^4} = 2,93.$$

Очевидно, что оси  $x$ ,  $y$ , будучи осями симметрии, являются главными центральными осями инерции.

Выделим бесконечно малый элемент контура длиной  $ds = r d\alpha$ , положение которого определяется углом  $\alpha$ , как показано на рисунке 6.5,а. Учитывая, что расстояние этого элемента от оси  $x$  составляет  $y = r \cos \alpha$ , в соответствии с (6.10) вычисляем момент инерции  $I_{rx}$  приведённого сечения:

$$I_{rx} = \int_l \varphi_0 y^2 \delta ds + \sum_{i=1}^6 \varphi_i y_i^2 F_i = \int_l 1 \cdot (r \cos \alpha)^2 \delta r d\alpha + \varphi_n \left[ 2r^2 f + 4 \left( \frac{r}{2} \right)^2 f \right] =$$

$$= \delta r^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha + 3\varphi_n r^2 f = \pi \delta r^3 + 3\varphi_n r^2 f.$$

Подставляя исходные данные, получим

$$I_{rx} = \pi \cdot 2 \cdot 300^2 + 3 \cdot 2,93 \cdot 300^2 \cdot 200 = 3,279 \cdot 10^8 \text{ мм}^4.$$

Значения нормальных напряжений, найденные по формуле (6.13), даны на рисунке 6.5,б.

#### 6.4 Касательные напряжения в тонкостенной конструкции с открытым сечением

Касательные напряжения  $\tau$ , так же как и нормальные, будем считать постоянными по толщине. Принимая, что поверхностные нагрузки, действующие параллельно образующим, отсутствуют, заключаем, что касательные напряжения в сечении направлены по касательной к контуру. В самом деле, если предположить, что вектор  $\tau$  имеет произвольное направление, как показано на рисунке 6.6,а, то можно разложить его на составляющие  $\tau'$  и  $\tau''$ , первая из которых направлена по касательной к поверхности оболочки, а вторая – по нормали к ней. Но тогда в силу закона парности должна присутствовать поверхностная нагрузка величиной  $\tau''$ , что противоречит принятому допущению. Следовательно, касательные напряжения в сечении оболочки должны действовать так, как показано на рисунке 6.6,б.

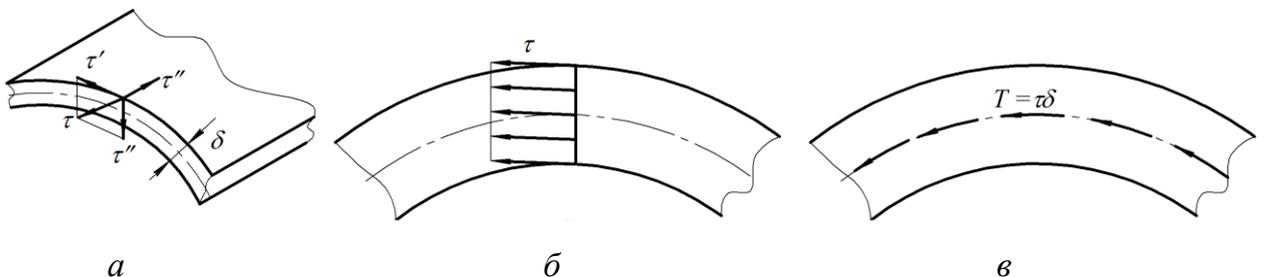


Рисунок 6.6 – Касательные напряжения в тонкостенном сечении

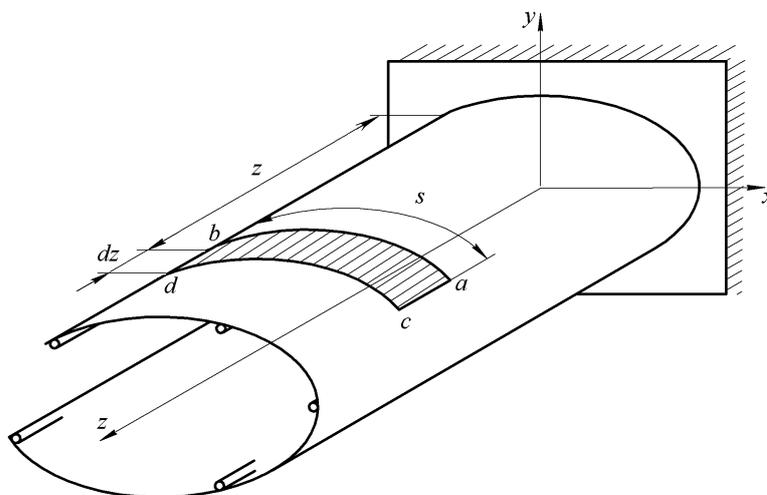
Если умножить касательное напряжение на элементарную площадь  $\delta ds$ , где  $ds$  – длина элемента дуги средней линии, то получим элементарную

силу  $\tau\delta ds$ , действующую в пределах этой площадки. Разделив силу на  $ds$ , получим величину

$$T = \tau\delta,$$

которая представляет собой погонную касательную силу, то есть силу, действующую по касательной к средней линии и рассчитанную на единицу её длины (рисунок 6.6,в). В расчётах удобнее оперировать именно величиной  $T$  вместо  $\tau$ . Если погонная сила  $T$  найдена, то напряжение можно вычислить по формуле

$$\tau = \frac{T}{\delta}.$$

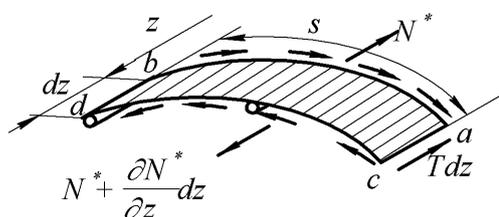


**Рисунок 6.7 – Тонкостенная конструкция с открытым сечением**

В отличие от нормальных расчёт касательных напряжений зависит от того, является ли контур поперечного сечения открытым, замкнутым или многозамкнутым. Начнём со случая конструкции с открытым контуром (рисунок 6.7).

Пусть необходимо найти касательные силы в сечении, расположенном

на расстоянии  $z$  от начала координат. Возьмём в сечении произвольную точку  $a$ , положение которой характеризуется дуговой координатой  $s$ , отсчитываемой от свободного края (от точки  $b$ ). Выделим элемент конструкции  $abcd$ , имеющий размер  $dz$  в продольном направлении (рисунок 6.8).



**Рисунок 6.8 – К расчёту погонной касательной силы**

Нормальные напряжения в площадке  $ab$  имеют результирующую, которую обозначим через  $N^*$ . В площадке  $cd$  результирующая нормальных напряжений будет  $N^* + \frac{\partial N^*}{\partial z} dz$ . Помимо

нормальных напряжений на элемент

действуют касательные силы в оболочке. Если  $T$  – значение погонной касательной силы в точке  $a$  поперечного сечения, то такая же сила в соответствии с законом парности касательных напряжений действует в точке  $a$  и в

продольном сечении. Результирующая касательных напряжений в площадке  $ac$  будет равна  $Tdz$ . Величину  $T$  можно найти из условия равновесия выделенного элемента в проекции на ось  $z$ :

$$N^* + \frac{\partial N^*}{\partial z} dz - N^* - Tdz = 0,$$

откуда следует равенство

$$T = \frac{\partial N^*}{\partial z}. \quad (6.19)$$

Величина  $N^*$  определяется выражением

$$N^* = \int_0^s \sigma \delta ds + \sum \sigma_i F_i, \quad (6.20)$$

где суммирование ведётся по тем поясам, которые попали в отсечённую часть сечения от точки  $b$  до точки  $a$ .

Предположим сначала, что  $x, y$  – главные центральные оси приведённого сечения и что конструкция испытывает простой изгиб в плоскости  $yz$ . В этом случае нормальные напряжения даются формулой

$$\sigma = \varphi \frac{M_x}{I_{rx}} y.$$

Подстановка этого выражения в (6.20) даёт

$$N^* = \frac{M_x}{I_{rx}} \left( \int_0^s \varphi y \delta ds + \sum \varphi_i y_i F_i \right).$$

Величина

$$S_{rx} = \int_0^s \varphi y \delta ds + \sum \varphi_i y_i F_i \quad (6.21)$$

представляет собой статический момент отсечённой части приведённого сечения относительно оси  $x$ . Он зависит от положения точки  $a$  в сечении, то есть является функцией дуговой координаты  $s$ . С учётом этого обозначения запишем

$$N^* = \frac{M_x}{I_{rx}} S_{rx}.$$

Теперь согласно (6.19) находим

$$T = \frac{dM_x}{dz} \frac{S_{rx}}{I_{rx}}.$$

Воспользуемся далее известным из курса сопротивления материалов соотношением

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz},$$

где  $Q_y$  – перерезывающая сила в рассматриваемом сечении. В итоге приходим к расчётной формуле

$$T = \frac{Q_y S_{rx}}{I_{rx}}. \quad (6.22)$$

Для касательных напряжений будем иметь

$$\tau = \frac{Q_y S_{rx}}{I_{rx} \delta}.$$

Таким образом, в этом случае касательные силы изменяются вдоль оси  $z$  пропорционально  $Q_y$ , а в поперечном сечении – по закону изменения статического момента отсечённой части сечения относительно оси  $x$ . Если найденная по формуле (6.22) касательная сила окажется *положительной*, то она имеет направление, *противоположное направлению возрастания дуговой координаты  $s$* , а отрицательная сила направлена в сторону возрастания  $s$ . Это правило справедливо для сечения, нормаль к которому направлена в сторону оси  $z$ , причём при любом выборе начала отсчёта дуговой координаты, то есть при любом выборе точки  $b$ , которая, конечно, должна находиться на одном из свободных краёв. При этом результирующая касательных сил будет совпадать по величине и направлению с перерезывающей силой  $Q_y$ .

Рассмотрим далее случай, когда сечение отнесено к системе центральных, но не главных осей  $x$ ,  $y$ . Пусть в сечении действуют только изгибающий момент  $M_x$  и перерезывающая сила  $Q_y$ , так что нормальные напряжения определяются согласно (6.18). Подстановка этого соотношения в формулу (6.20) для  $N^*$  позволяет прийти к следующему выражению для погонной касательной силы:

$$T = \frac{Q_y}{\tilde{I}_{rx}} (S_{rx} - K_y S_{ry}),$$

где  $S_{rx}$  и  $S_{ry}$  – статические моменты отсечённой части сечения относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно. Первый из них определяется соотношением (6.21), а второй выражается по аналогичной формуле

$$S_{ry} = \int_0^s \varphi x \delta ds + \sum \varphi_i x_i F_i.$$

Если обозначить

$$\tilde{S}_{rx} = S_{rx} - K_y S_{ry}, \quad (6.23)$$

то выражение для касательной силы будет иметь такой же вид, как и формула (6.22):

$$T = \frac{Q_y \tilde{S}_{rx}}{\tilde{I}_{rx}}. \quad (6.24)$$

Отличие заключается лишь в том, что вместо  $S_{rx}$  и  $I_{rx}$  здесь фигурируют  $\tilde{S}_{rx}$  и  $\tilde{I}_{rx}$ .

Аналогично, при действии силы  $Q_x$  будем иметь

$$T = \frac{Q_x \tilde{S}_{ry}}{\tilde{I}_{ry}},$$

где

$$\tilde{S}_{ry} = S_{ry} - K_x S_{rx}.$$

Как видим, если  $I_{rx} \neq 0$ , то касательные силы представляют комбинацию двух потоков, один из которых изменяется по закону  $S_{rx}$ , а другой – по закону  $S_{ry}$ . Сформулированное выше правило определения направления (положительный поток касательных сил направлен против возрастания дуговой координаты) остаётся справедливым как для силы  $T$ , так и для каждой из её составляющих.

## 6.5 Примеры расчёта касательных напряжений в сечениях с открытым контуром

Пример 1. Найти касательные напряжения в сечении, показанном на рисунке 6.9,а, если  $b = 50$  мм;  $h = 80$  мм;  $\delta = 1$  мм. В сечении действует перерезывающая сила  $Q_y = 1000$  Н.

Принимая  $\varphi = 1$ , формулу (6.22) перепишем в виде

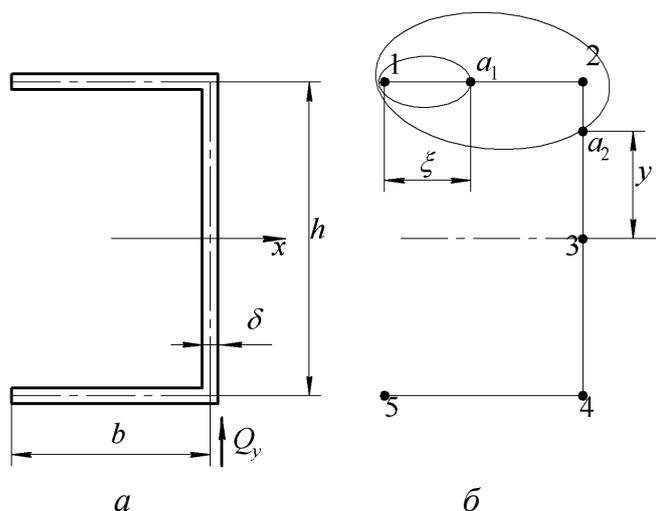
$$T = \frac{Q_y}{I_x} S_x.$$

Момент инерции данного сечения найден ранее:

$$I_x = \frac{b\delta h^2}{2} \left( 1 + \frac{h}{6b} \right) = 2,027 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

Перейдём к вычислению  $S_x$ . Для точки  $a_1$  (рисунок 6.9,б), находящейся на участке 1-2 на расстоянии  $\xi$  от точки 1, отсечённая часть сечения показана на рисунке 6.10,а. Статический момент этого участка

$$S_x^{(a_1)} = \xi \delta \frac{h}{2}.$$



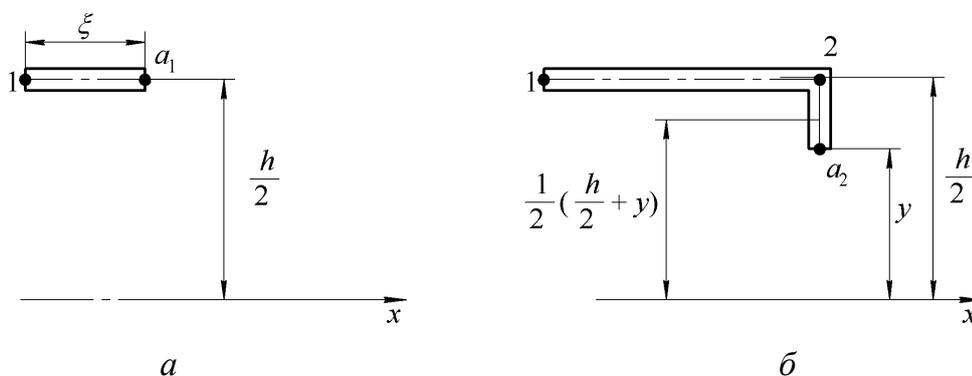
**Рисунок 6.9 – К расчёту статических моментов для сечения швеллера**

Таким образом, на участке 1-2 статический момент изменяется по линейному закону. В точке 2 при  $\xi = b$  имеем

$$S_x^{(2)} = \frac{b\delta h}{2} = 2000 \text{ мм}^3.$$

Возьмём далее произвольную точку  $a_2$  на вертикальной стенке. Её положение определим расстоянием  $y$  от оси  $x$ . Отсечённая часть сечения, показанная на рисунке 6.10,б, имеет статический момент

$$S_x^{(a_2)} = S_x^{(2)} + \delta \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right) = S_x^{(2)} + \frac{\delta}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

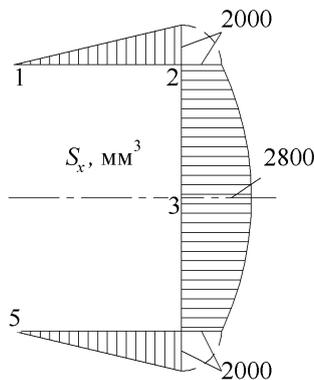


**Рисунок 6.10 – Отсечённые участки сечения**

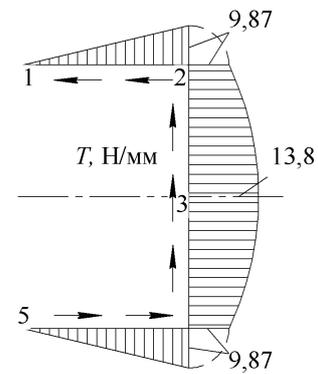
Как видим, на вертикальной стенке величина  $S_x$  изменяется по квадратичному закону. В точке 3  $S_x$  имеет максимальное значение:

$$S_x^{(3)} = S_x^{(2)} + \frac{\delta h^2}{8} = \frac{b\delta h}{2} + \frac{\delta h^2}{8} = \frac{b\delta h}{2} \left(1 + \frac{h}{4b}\right) = 2800 \text{ мм}^3.$$

Результаты расчёта  $S_x$  представим в виде эпюры (рисунок 6.11). Заметим, что величина  $S_x$  определяется с точностью до знака. Знак  $S_x$  зависит от выбора начала отсчёта дуг. Если бы координата  $s$  отсчитывалась от точки 5, то значения  $S_x$  оказались бы отрицательными. Поэтому при построении эпюры мы не будем указывать знак  $S_x$ , а вместо этого будем придерживаться следующего правила: *положительные значения  $S_{rx}$  откладываются слева от контура при движении в сторону возрастания дуговой координаты  $s$  (при удалении от выбранного начала отсчёта дуг), отрицательные значения – справа.* Это правило приводит к одинаковому результату при любом выборе точки отсчёта.



**Рисунок 6.11 – Эпюра  $S_x$  для сечения швеллера**



**Рисунок 6.12 – Касательные силы в сечении швеллера**

Значения касательной силы вычисляются по формуле

$$T = \frac{Q_y S_x}{I_x}.$$

Эпюра  $T$  дана на рисунке 6.12, где стрелками указано направление касательных сил.

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  возникает в середине стенки; его значение

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{\delta} = \frac{13,8}{1} = 13,8 \text{ МПа}.$$

Правильность решения можно проверить по выполнению условия

$$\int_l T_y ds = Q_y,$$

где  $T_y$  есть проекция касательной силы на ось  $y$ , а интеграл в левой части представляет собой равнодействующую касательных сил. Интегрирование удобно выполнять по отдельным участкам, используя правило Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f_1 + 4f_2 + f_3),$$

где  $f(x)$  – некоторая функция координаты  $x$ ;  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  – её значения в начале, середине и конце интервала  $(a, b)$ .

В данном примере сила  $T$  даёт проекцию на ось  $y$  только на вертикальном участке длиной  $h$ , так что

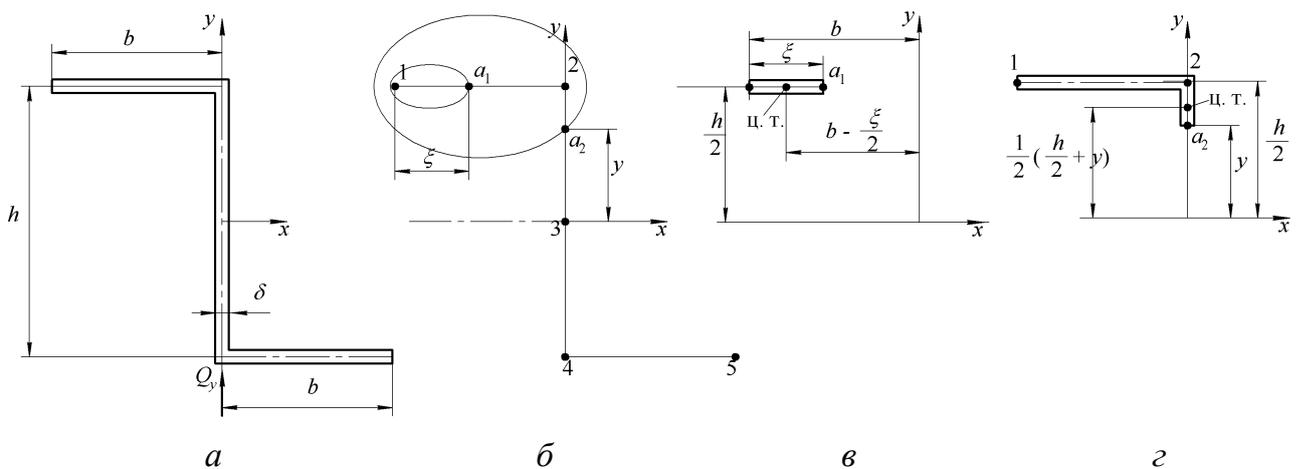
$$\int_l T_y ds = \frac{h}{6}(T_2 + 4T_3 + T_4) = \frac{80}{6}(9,87 + 4 \cdot 13,8 + 9,87) = 999 \text{ Н}.$$

Отличие от силы  $Q_y = 1000 \text{ Н}$  составляет, как видим, величину порядка 0,1%, что связано с погрешностью округления.

Пример 2. Найти касательные усилия в z-образном сечении (рисунок 6.13,а) балки, испытывающей действие нагрузок в плоскости стенки. Геометрические параметры и значение  $Q_y$  – те же, что и в предыдущем примере.

Касательные силы для данного сечения должны вычисляться по формуле (6.24). При  $\varphi = 1$  будем иметь

$$T = \frac{Q_y}{\tilde{I}_x} \tilde{S}_x.$$



**Рисунок 6.13 – К расчёту статических моментов для z-образного сечения**

Значения  $\tilde{I}_x$  и  $K_y$  найдены ранее (см. пример 2 в подразделе 6.3):

$$\tilde{I}_x = 0,828 \cdot 10^5 \text{ мм}^4; \quad K_y = -1,2.$$

Для нахождения статических моментов снова рассмотрим отсечённые части сечения, соответствующие точкам  $a_1$  и  $a_2$  (рисунок 6.13,б). Эти участки отдельно показаны на рисунках 6.13,в и г. Значения  $S_x$  в точках  $a_1$  и  $a_2$  выражаются теми же соотношениями, что и в предыдущем примере; эпюра  $S_x$  представлена на рисунке 6.14,а.

Величина  $S_y$  для точки  $a_1$  будет

$$S_y^{(a_1)} = -\delta \xi \left( b - \frac{\xi}{2} \right),$$

то есть она является квадратичной функцией координаты  $\xi$ . В угловой точке 2, где  $\xi = b$ , имеем

$$S_y^{(2)} = -\frac{b^2 \delta}{2} = -1250 \text{ мм}^3.$$

На вертикальном участке величина  $S_y$  остаётся постоянной:

$$S_y^{(a_2)} = S_y^{(2)} = -1250 \text{ мм}^3.$$

Эпюра  $S_y$  показана на рисунке 6.14,б.

Комбинация (6.23) статических моментов

$$\tilde{S}_x = S_x - K_y S_y = S_x + 1,2 S_y$$

представлена на рисунке 6.15,а, а эпюра  $T$  – на рисунке 6.15,б.

Пользуясь правилом Симпсона, находим равнодействующую касательных сил:

$$\int_l T_y ds = \frac{80}{6} (6,04 + 4 \cdot 15,7 + 6,04) = 998 \text{ Н}.$$

Погрешность вычислений составляет около 0,2%.

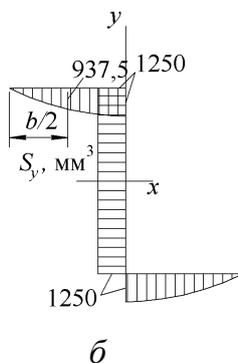
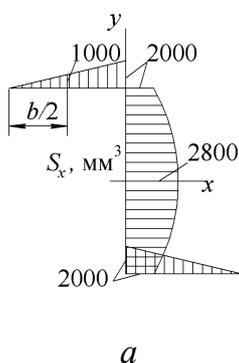


Рисунок 6.14 – Эпюры  $S_x$  и  $S_y$  для z-образного сечения

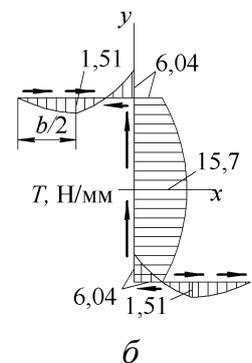
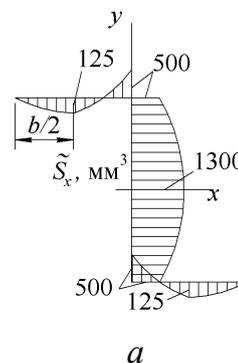


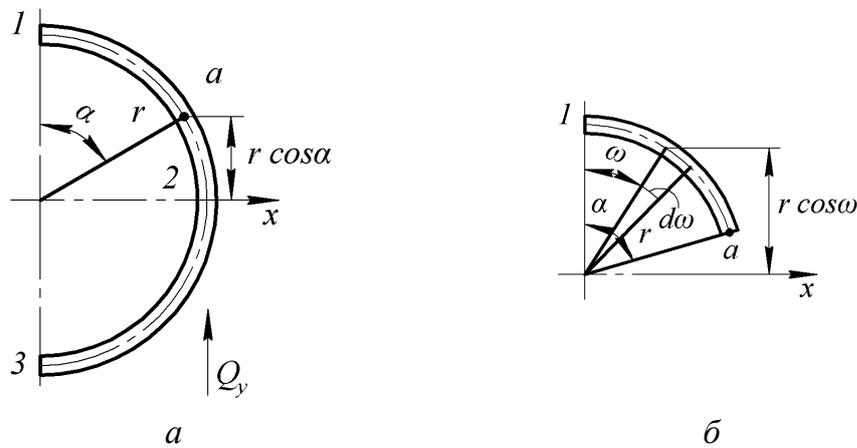
Рисунок 6.15 – Эпюры  $\tilde{S}_x$  и  $T$  для z-образного сечения

С помощью правила Симпсона можно также убедиться в равенстве нулю суммарной силы, действующей в горизонтальных полках в направлении оси  $x$ :

$$\int_l T_x ds = 2 \cdot \frac{50}{6} (0 - 4 \cdot 1,51 + 6,04) = 0$$

с точностью до погрешностей округления.

**Пример 3.** Найти закон изменения касательных сил в полукруглом сечении радиуса  $r$  с толщиной оболочки  $\delta$  при изгибе в плоскости  $yz$  (рисунок 6.16,а)



**Рисунок 6.16 – Полукруглое сечение**

Расчет начинаем с вычисления момента инерции сечения  $I_x$ . Бесконечно малый элемент дуги  $ds = r d\alpha$ , взятый в точке контура с углом  $\alpha$ , имеет ординату  $y = r \cos \alpha$ , так что

$$I_x = \int_l y^2 \delta ds = \int_0^\pi (r \cos \alpha)^2 \delta r d\alpha = \frac{\pi \delta r^3}{2}.$$

Для нахождения статического момента  $S_x$  выделим отсечённую часть сечения для точки  $a$  (рисунок 6.16,б). Произвольный элемент площади  $\delta r d\omega$  имеет статический момент относительно оси  $x$ :

$$dS_x = \delta r d\omega \cdot r \cos \omega.$$

Интегрируя это выражение по углу  $\omega$  в пределах отсечённой части, то есть от 0 до  $\alpha$ , получим

$$S_x = \delta r^2 \int_0^\alpha \cos \omega d\omega = \delta r^2 \sin \alpha.$$

По такому закону изменяется и погонная касательная сила:

$$T = \frac{Q_y}{I_x} S_x = \frac{2Q_y}{\pi \delta r^3} \delta r^2 \sin \alpha = \frac{2Q_y}{\pi r} \sin \alpha.$$

Эпюры  $S_x$  и  $T$  показаны на рисунках 6.17, а и б.

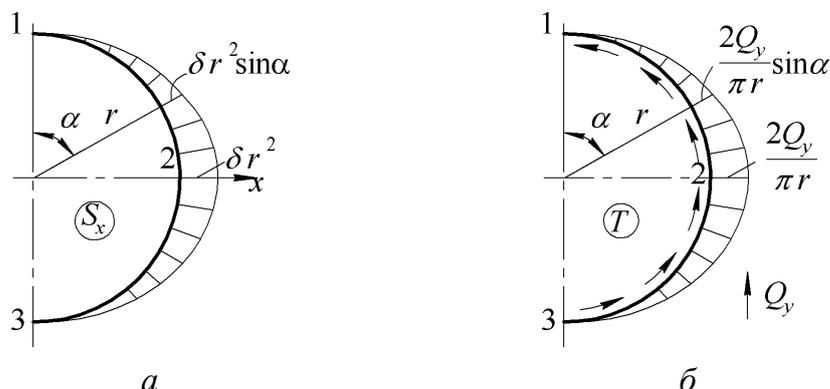


Рисунок 6.17 – Эпюры  $S_x$  и  $T$  для полукруглого сечения

Равнодействующая касательных сил оказывается равной

$$\int_l T_y ds = \int_0^\pi T \sin \alpha r d\alpha = \int_0^\pi \frac{2Q_y}{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = Q_y,$$

что свидетельствует о правильности расчёта  $T$ .

**Пример 4.** Выполнить приближённый расчёт касательных сил в подкреплённой тонкостенной конструкции с сечением, показанным на рисунке 6.18. Обшивка тонкая и изготовлена из алюминиевого сплава, а пояса стальные и имеют достаточно большую площадь сечения  $f$ .

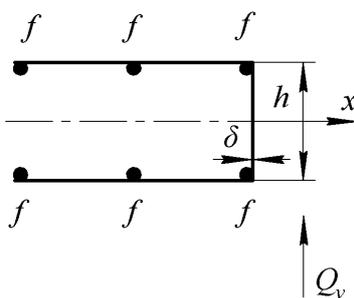


Рисунок 6.18 – Сечение подкреплённой конструкции

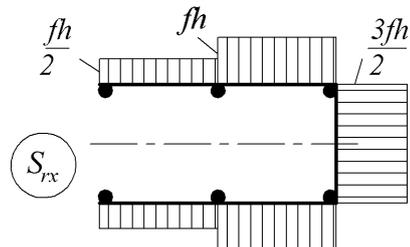


Рисунок 6.19 – Упрощённая эпюра  $S_{rx}$

Указанные в условии задачи оговорки позволяют существенно упростить расчёт, поскольку в этом случае можно пренебречь интегральными слагаемыми в формулах (6.7), (6.8) и (6.10) для геометрических характеристик приведённого сечения. Это соответствует допущению, что нормальные силы и моменты в сечениях конструкции воспринимаются в основном поя-

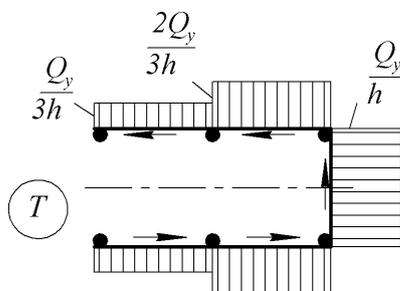
сами, а вкладом обшивки в формулах (6.3) и (6.4) можно пренебречь. Соответственно должен быть опущен вклад обшивки и в выражении (6.20) для  $N^*$ , что приводит к необходимости пренебрежения интегральными слагаемыми в выражении (6.21) для  $S_{rx}$  и подобном выражении для  $S_{ry}$ . Обшивка в этом случае считается работающей только на сдвиг.

Таким образом, в упрощённом расчёте при вычислении всех геометрических характеристик сечения (площади, координат центра тяжести, моментов инерции, статических моментов) следует учитывать вклады только поясов; интегральные же слагаемые, характеризующие вклад обшивки, должны быть во всех формулах отброшены. Заметим, что в этом случае нет необходимости в ведении редуцированных коэффициентов, если все пояса изготовлены из одного материала. По существу, здесь осуществляется приведение сечения к материалу поясов.

В рассматриваемом примере момент инерции сечения должен вычисляться так:

$$I_{rx} = 6f \left( \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} f h^2.$$

Эпюра статических моментов будет иметь вид, показанный на рисунке 6.19. На участке между двумя соседними поясами величина  $S_{rx}$  остаётся



**Рисунок 6.20 – Эпюра касательных сил в случае, когда обшивка работает только на сдвиг**

постоянной, а при переходе через пояс она скачком изменяется на  $f h/2$ .

Эпюра касательных сил, которые рассчитываются по формуле

$$T = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx},$$

представлена на рисунке 6.20.

Заметим, что усилие на вертикальной стенке, будучи постоянным, может быть сразу найдено из соображений статики – делением  $Q_y$  на высоту стенки  $h$ .

## 6.6 Центр изгиба открытого сечения

Пусть тонкостенная конструкция с открытым сечением испытывает нагрузку в плоскости  $yz$ . Если  $x, y$  – главные центральные оси сечения, то погонные касательные силы определяются формулой (6.22):

$$T = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx}.$$

Равнодействующая касательных сил равна  $Q_y$ ; найдем положение точки  $C$ , через которую проходит равнодействующая (рисунок 6.21). Выберем для этого в сечении произвольную точку (полнос)  $p$  и предположим, что искомая точка  $C$  отстоит от неё на расстоянии  $\bar{x}$  вдоль оси  $x$ . Согласно теореме Вариньона момент равнодействующей относительно какой-либо точки равен сумме моментов составляющих относительно той же точки. Отсюда имеем равенство

$$Q_y \bar{x} = \int_l T \rho ds, \quad (6.25)$$

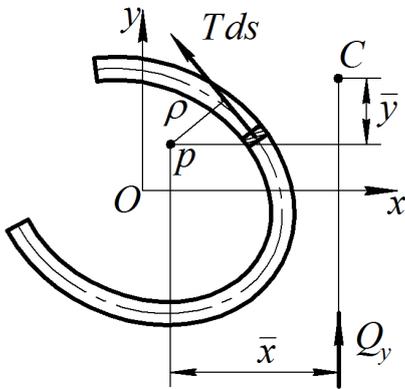


Рисунок 6.21 – К определению центра изгиба открытого сечения

где  $\rho$  – плечо элементарной силы  $T ds$  относительно полюса, то есть расстояние от точки  $p$  до касательной к контуру, проведённой в точке действия элементарной силы. Таким образом, искомое расстояние

$$\bar{x} = \frac{1}{Q_y} \int_l T \rho ds. \quad (6.26)$$

Подстановка сюда выражения для  $T$  позволяет привести формулу к виду

$$\bar{x} = \frac{1}{I_{rx}} \int_l S_{rx} \rho ds. \quad (6.27)$$

Рассматривая действие силы  $Q_x$ , найдём аналогично расстояние  $\bar{y}$  от выбранного полюса до точки  $C$ :

$$\bar{y} = \frac{1}{Q_x} \int_l T \rho ds. \quad (6.28)$$

Поскольку в этом случае

$$T = \frac{Q_x}{I_{ry}} S_{ry},$$

то можно также записать

$$\bar{y} = \frac{1}{I_{ry}} \int_l S_{ry} \rho ds. \quad (6.29)$$

Формулы (6.27) и (6.29) не содержат внешней нагрузки. Это означает, что координаты  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  зависят только от геометрических параметров приве-

дѣнного сечения и сами являются его геометрическими характеристиками. Точка  $C$ , через которую проходит равнодействующая касательных сил, называется *центром изгиба открытого сечения*. Линия, параллельная оси  $z$  и проходящая через центры изгиба сечений, называется *осью изгиба*.

Таким образом, равнодействующая касательных сил при изгибе тонкостенной конструкции с открытым сечением проходит всегда через определённую точку – центр изгиба. Но тогда и внешние силы также должны проходить через ось изгиба – в противном случае они не могут быть уравновешены касательными силами. При произвольном приложении внешних сил их можно привести к оси изгиба с добавлением соответствующих моментов, так что помимо сил  $Q_x$ ,  $Q_y$  в сечении будет действовать крутящий момент. Как следует из изложенного, крутящий момент не может быть воспринят тонкостенной конструкцией с открытым сечением. Это означает, что такую конструкцию следует трактовать как *геометрически изменяемую систему*. Такой вывод является следствием принятых допущений – в частности, предположения о постоянстве касательных напряжений по толщине стенки. В действительности подобные конструкции могут воспринимать небольшие крутящие моменты. Впрочем, жѣсткость их на кручение невелика, вследствие чего свободное кручение сопровождается возникновением весьма больших углов закручивания.

В случае, когда оси  $x$ ,  $y$  не являются главными осями инерции, формулы для  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{\tilde{I}_{rx}} \int_l \tilde{S}_{rx} \rho ds; \\ \bar{y} &= \frac{1}{\tilde{I}_{ry}} \int_l \tilde{S}_{ry} \rho ds.\end{aligned}\tag{6.30}$$

Заметим, что если сечение имеет ось симметрии, центр изгиба находится на этой оси. В случае, когда сечение имеет две оси симметрии, центр изгиба располагается в точке их пересечения, то есть он совпадает с центром тяжести поперечного сечения.

Практическое вычисление координат центра изгиба иногда удобно выполнять не по формулам (6.27), (6.29) или (6.30), а по формулам (6.26), (6.28). Это связано с простотой установления знаков интегральных выражений на отдельных участках контура, поскольку во втором случае они имеют естественный смысл моментов касательных сил относительно полюса.

## 6.7 Примеры расчёта центра изгиба

Пример 1. Найти положение центра изгиба для сечения в форме швеллера (рисунок 6.22,а) с размерами  $b = 50\text{ мм}$ ,  $h = 80\text{ мм}$ ,  $\delta = 1\text{ мм}$ .

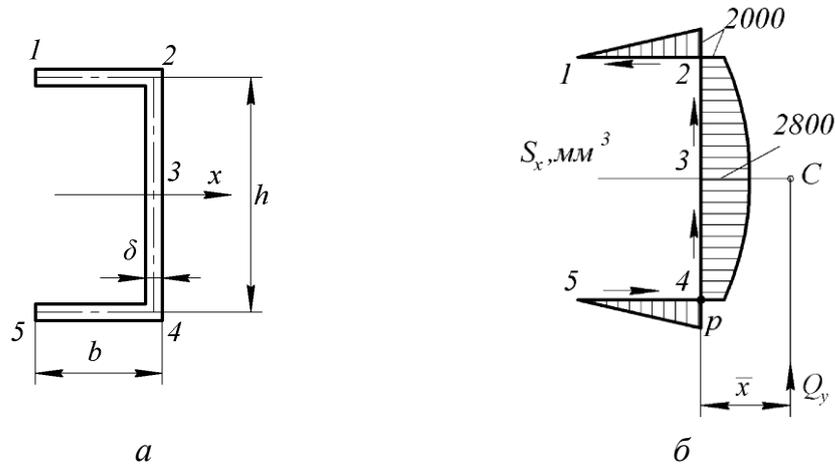


Рисунок 6.22 – Центр изгиба сечения швеллера

Вследствие симметрии сечения центр изгиба находится на оси  $x$ . Для определения его положения воспользуемся формулой (6.27). Расчёт статического момента  $S_x$  для данного сечения был выполнен ранее (см. рисунок 6.11); эпюра  $S_x$  воспроизведена на рисунке 6.22,б. На этом же рисунке для удобства стрелками показано направление касательных сил при действии силы  $Q_y$ . В качестве полюса  $p$ , относительно которого отмеряется плечо  $\rho$  касательных сил, выберем угловую точку 4 с таким расчётом, чтобы касательные силы на участках 2-4 и 4-5 не давали момента относительно полюса (на этих участках  $\rho = 0$ ).

Предположим, что центр изгиба  $C$  находится на расстоянии  $\bar{x}$  от полюса. Поскольку сила  $Q_y$  относительно точки  $p$  даёт момент, направленный против часовой стрелки, моменты касательных сил будем считать положительными, если они действуют также против часовой стрелки. Это требование вытекает из смысла равенства (6.25). Следовательно, величина интеграла  $\int S_x \rho dx$  на участке 1-2 должна быть взята со знаком плюс. Учитывая, что величина  $\rho$  имеет на этом участке постоянное значение, равное  $h = 80\text{ мм}$ , и что  $I_x = 2,027 \cdot 10^5\text{ мм}^4$ , находим

$$\bar{x} = \frac{1}{I_x} \int S_x \rho ds = \frac{1}{2,027 \cdot 10^5} \cdot \frac{2000 \cdot 50}{2} \cdot 80 = 19,7\text{ мм}.$$

Таким образом, в этом случае центр изгиба находится правее вертикальной стенки на расстоянии 19,7 мм от её средней линии. Для приложения внешних нагрузок должны быть установлены специальные конструктивные элементы типа кронштейнов.

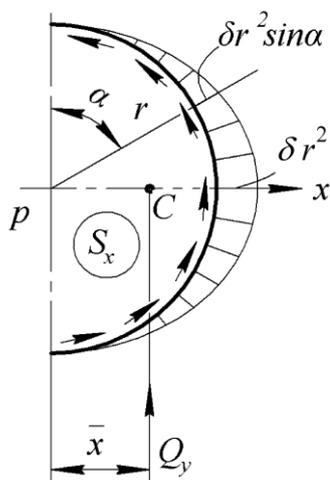


Рисунок 6.23 – К расчёту центра изгиба полукруглого сечения

**Пример 2.** Найти центр изгиба для полукруглого сечения, показанного на рисунке 6.16. Выберем полюс в центре окружности (рисунок 6.23).

Рассуждая так же, как в предыдущем примере, и учитывая, что для всех точек контура  $\rho = r$  и что  $I_x = \pi \delta r^3 / 2$ , находим

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{I_x} \int S_x \rho ds = \frac{2}{\pi \delta r^3} \int_0^\pi \delta r^2 \sin \alpha \cdot r \cdot r d\alpha = \\ &= \frac{2r}{\pi} (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi = \frac{4r}{\pi} \approx 1,273r. \end{aligned}$$

Таким образом, центр изгиба находится на оси  $x$  правее стенки на расстоянии  $0,273r$  от неё.

## 6.8 Касательные напряжения в тонкостенной конструкции с однозамкнутым сечением

Рассмотрим тонкостенную конструкцию с однозамкнутым сечением (рисунок 6.24). Пусть требуется найти касательные усилия в произвольной точке  $a$  в сечении, расположенном на расстоянии  $z$  от начала координат. Положение точки  $a$  будем определять дуговой координатой  $s$ , отсчитываемой от некоторой образующей (вообще говоря, произвольной).

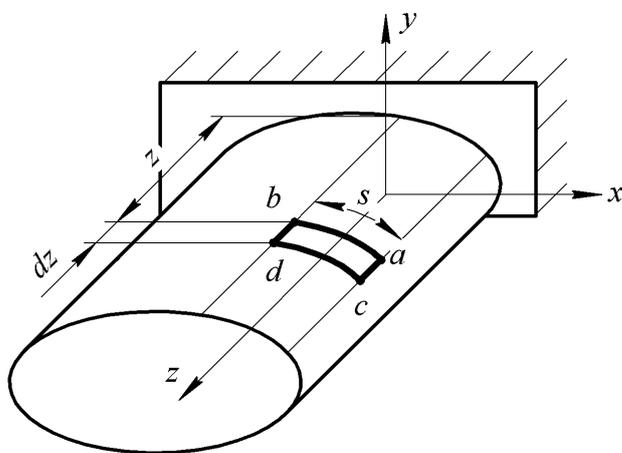


Рисунок 6.24 – Тонкостенная конструкция с однозамкнутым сечением

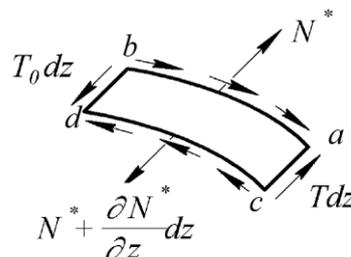


Рисунок 6.25 – Равновесие элемента оболочки

Запишем условие равновесия элемента  $abcd$ , имеющего в продольном направлении размер  $dz$  (рисунок 6.25). В отличие от случая конструкции с открытым сечением касательное усилие в точке  $b$ , вообще говоря, отлично от нуля; обозначим его через  $T_0$ . Через  $N^*$ , как и ранее, обозначена равнодействующая нормальных напряжений, действующих в площадке  $ab$ . Условие равновесия элемента в проекции на ось  $z$ :

$$N^* + \frac{\partial N^*}{\partial z} dz - N^* - T dz + T_0 dz = 0.$$

Отсюда получаем

$$T = \frac{\partial N^*}{\partial z} + T_0.$$

Данное равенство можно представить в виде

$$T = T^* + T_0. \quad (6.31)$$

Здесь слагаемое

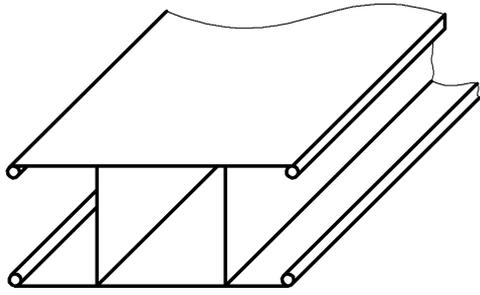
$$T^* = \frac{\partial N^*}{\partial z}$$

есть погонная касательная сила, которая возникла бы в точке  $a$ , если бы конструкция имела разрез по образующей, проходящей через точку  $b$ . Эта величина определяется точно так же, как для конструкции с открытым сечением. Например, в случае, когда  $x$ ,  $y$  – главные центральные оси сечения и нагрузки действуют в плоскости  $yz$ , будем иметь

$$T^* = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx}. \quad (6.32)$$

Второе слагаемое в (6.31) равно значению касательной силы в точке размыкания контура.

Таким образом, касательные силы в однозамкнутом сечении представляют сумму двух потоков. Один из них вычисляется так же, как для конструкции с открытым сечением, полученной путём размыкания замкнутого контура в некоторой точке. Второй поток имеет постоянную величину  $T_0$ , равную значению касательной силы в точке размыкания. Заметим, что если контур сечения помимо замкнутой кривой имеет дополнительные участки (рисунок 6.26), то поток  $T_0$  действует только на замкнутом участке. В других точках  $T_0 = 0$ , так что на этих участках  $T = T^*$ .



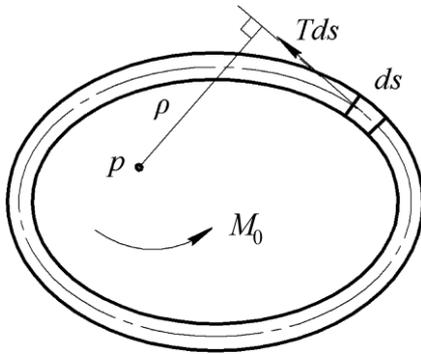
**Рисунок 6.26 – Однозамкнутое сечение с дополнительными участками**

Для вычисления  $T_0$  запишем выражение для момента касательных сил относительно какой-либо точки  $p$  поперечного сечения. Он должен равняться моменту  $M_0$  внешних сил относительно того же полюса (рисунок 6.27):

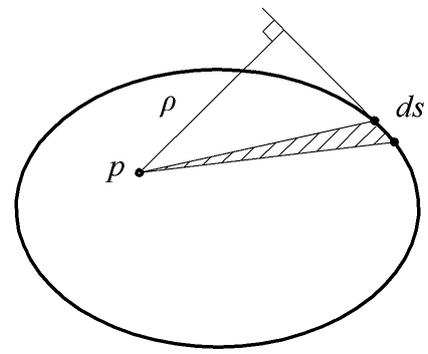
$$\int_l T \rho ds = M_0,$$

где интегрирование выполняется по всему контуру поперечного сечения. Подставив сюда выражение (6.31), получим

$$\int_l (T^* + T_0) \rho ds = \int_l T^* \rho ds + T_0 \oint \rho ds = M_0.$$



**Рисунок 6.27 – Момент касательных сил относительно полюса**



**Рисунок 6.28 – Геометрическая интерпретация произведения  $\rho ds$**

Второй интеграл в правой части последнего равенства берётся по замкнутому контуру, где  $T_0 \neq 0$ . Он имеет простой геометрический смысл. Заштрихованный треугольник на рисунке 6.28 имеет основание  $ds$  и высоту  $\rho$ , так что произведение  $\rho ds$  есть его удвоенная площадь. Величина

$$\Omega = \oint \rho ds \quad (6.33)$$

представляет собой удвоенную площадь фигуры, охватываемой замкнутым контуром.

С учётом обозначения (6.33) получаем равенство

$$\int_l T^* \rho ds + \Omega T_0 = M_0,$$

откуда выводим

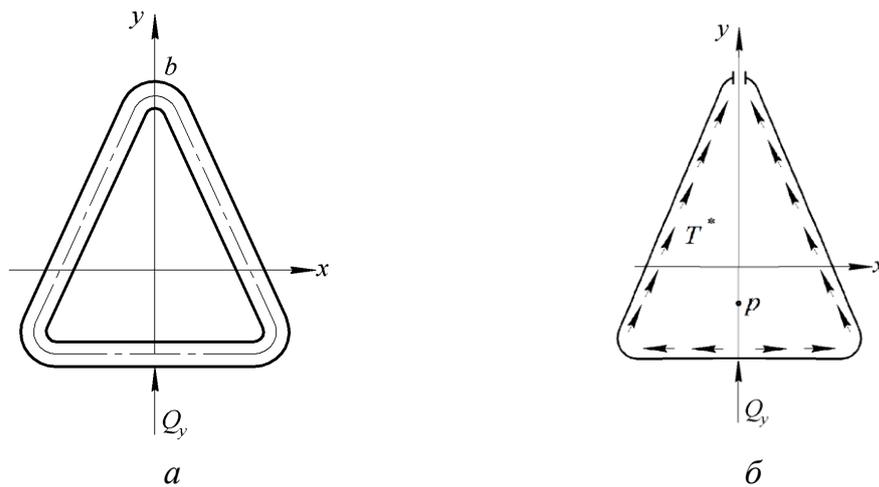
$$T_0 = \frac{M_0 - \int_l T^* \rho ds}{\Omega}. \quad (6.34)$$

Во избежание ошибок при вычислении касательных сил условимся о следующем правиле знаков. Для сечения, нормаль к которому направлена в сторону оси  $z$ , момент внешних сил  $M_0$  и момент сил  $T^*$ , представленный интегралом  $\int_l T^* \rho ds$ , будем считать положительными, если они действуют против часовой стрелки. Если при этом величина  $T_0$  окажется положительной, то момент сил  $T_0$  относительно точки  $p$  также действует против часовой стрелки, в противном случае – по часовой стрелке.

Если внешняя нагрузка сводится только к крутящему моменту  $M_0$  в сечении ( $Q_x = Q_y = 0$ ), то  $T^* = 0$  и мы приходим к известной из курса сопротивления материалов формуле Бредта для кручения тонкостенных труб произвольного сечения:

$$T = \frac{M_0}{\Omega}. \quad (6.35)$$

В общем случае расчёт касательных сил в конструкции с однозамкнутым сечением связан со свободой выбора точки «размыкания» контура и свободой выбора полюса. Распорядиться этой свободой желательно таким образом, чтобы максимально упростить вычисления. Рассмотрим, в частности, случай, когда сечение имеет ось симметрии, совпадающую с плоскостью действия внешней нагрузки (рисунок 6.2,а).



**Рисунок 6.29 – Изгиб однозамкнутой конструкции в плоскости симметрии**

В качестве точки размыкания контура возьмём точку  $b$ , лежащую на оси симметрии. Касательные силы

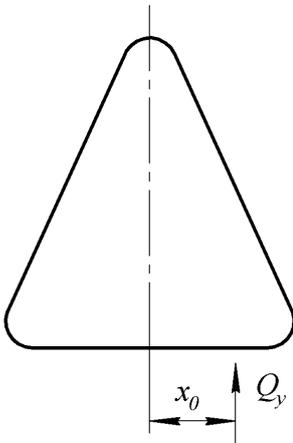
$$T^* = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx}$$

будут в таком случае действовать симметрично относительно оси  $y$  (рисунок 6.29,б). Если точку  $p$  взять также на оси симметрии, будем иметь

$$M_0 = 0; \quad \int_l T^* \rho ds = 0.$$

Таким образом, в этом случае  $T_0 = 0$ , то есть

$$T = T^* = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx}.$$



**Рисунок 6.30 – Случай действия нагрузки параллельно плоскости симметрии**

Если внешняя нагрузка действует параллельно плоскости симметрии, но приложена на расстоянии  $x_0$  от неё (рисунок 6.30), то

$$M_0 = Q_y x_0; \quad \int_l T^* \rho ds = 0.$$

Тогда

$$T_0 = \frac{Q_y x_0}{\Omega}; \quad T = \frac{Q_y}{I_{rx}} S_{rx} + \frac{Q_y x_0}{\Omega}.$$

Как видим, тонкостенные конструкции с однозамкнутым сечением могут воспринимать любые нагрузки, причём касательные силы могут быть найдены из уравнений равновесия. Подобные системы относятся к категории *геометрически неизменяемых и статически определимых*.

## 6.9 Упругие перемещения тонкостенных конструкций

Пусть тонкостенная конструкция с замкнутым поперечным сечением нагружена произвольной системой сил (рисунок 6.31,а). Будем считать, что нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения в конструкции найдены. В результате деформирования некоторая точка  $m$  срединной поверхности переместится в положение  $m'$ ; через  $\Delta_m$  на рисунке 6.31,а обозначен вектор её полного перемещения. Покажем, как можно найти перемещение  $v_{mi}$  точки  $m$  в заданном направлении  $i-i$ , понимая под этим проекцию полного перемещения на направление  $i-i$ .

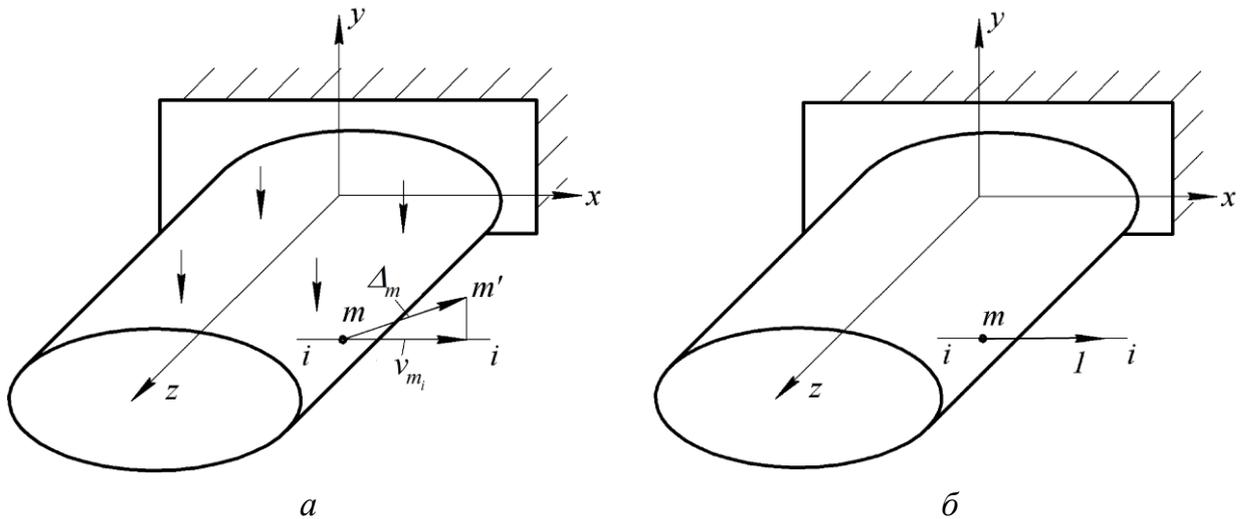


Рисунок 6.31 – К расчёту перемещений тонкостенной конструкции

Наряду с исходной основной системой введём в рассмотрение вспомогательную «единичную» систему, в которой в точке  $m$  приложена в направлении  $i-i$  единичная сила (рисунок 6.31,б). Напряжения, возникающие в этой системе, будем обозначать  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\tau}$ . Применим к этой системе принцип возможных перемещений, в соответствии с которым для тела, находящегося в равновесии,

$$\delta' \bar{A} = \delta' \bar{U} . \quad (6.36)$$

где  $\delta' \bar{A}$  – работа единичной силы на возможных перемещениях;  $\delta' \bar{U}$  – вариация потенциальной энергии деформации в единичной системе. Здесь и далее знак вариации обозначается символом  $\delta'$  во избежание путаницы с обозначением толщины оболочки  $\delta$ .

Как известно, под возможными понимаются бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями. В качестве возможных возьмём действительные перемещения, которые возникают в основной системе под действием заданных сил. Условию, касающемуся бесконечно малости возможных перемещений, можно удовлетворить, умножив формально действительные перемещения на бесконечно малый множитель. Однако в линейно-деформируемых системах делать это необязательно, поскольку упомянутый множитель будет содержаться в обеих частях равенства (6.36) и в итоге сократится; поэтому мы и не будем пользоваться данным приёмом.

Начнём с вычисления  $\delta' \bar{A}$ . Единичная сила произведёт работу на перемещении  $v_{m_i}$ , так что

$$\delta' \bar{A} = 1 \cdot v_{m_i} .$$

Далее вариация удельной энергии деформации определяется в общем случае выражением

$$\delta'W = \sigma_{xx} \delta'\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta'\varepsilon_{yy} + \dots + \sigma_{zx} \delta'\varepsilon_{zx},$$

где  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \sigma_{zx}$  – компоненты тензора напряжений;  $\delta'\varepsilon_{xx}, \delta'\varepsilon_{yy}, \dots, \delta'\varepsilon_{zx}$  – соответствующие возможные деформации. В балочной теории тонкостенных конструкций в выражении для  $\delta'W$  будут фигурировать лишь нормальное  $\sigma$  и касательное  $\tau$  напряжения и соответствующие им возможные деформации растяжения  $\delta'\varepsilon$  и сдвига  $\delta'\gamma$ . Применительно к единичной системе вместо  $\sigma$  и  $\tau$  нужно писать  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\tau}$ , а в качестве возможных должны быть взяты действительные деформации, возникающие в основной системе и выражающиеся через напряжения в этой системе по закону Гука:

$$\delta'\varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \delta'\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

В итоге выражение для  $\delta'W$  для единичной системы запишем так:

$$\delta'W = \frac{\sigma\bar{\sigma}}{E} + \frac{\tau\bar{\tau}}{G}.$$

Величина  $\delta'\bar{U}$  получается интегрированием  $\delta'W$  по объёму, которое сводится к умножению  $\delta'W$  на толщину оболочки и последующему интегрированию по контуру  $l$  поперечного сечения и по длине  $L$  оболочки:

$$\delta'\bar{U} = \int_0^L \iint \left( \frac{\sigma\bar{\sigma}}{E} + \frac{\tau\bar{\tau}}{G} \right) \delta ds dz.$$

Приравнявая  $\delta'\bar{A}$  к этому выражению, приходим к следующей формуле:

$$v_{mi} = \int_0^L \iint \left( \frac{\sigma\bar{\sigma}}{E} + \frac{\tau\bar{\tau}}{G} \right) \delta ds dz.$$

Поскольку в расчётах удобнее пользоваться погонными касательными силами вместо напряжений  $\tau$ , преобразуем данный результат с учётом формул

$$\tau = \frac{T}{\delta}; \quad \bar{\tau} = \frac{\bar{T}}{\delta}.$$

В итоге получаем расчётное соотношение

$$v_{mi} = \int_0^L \iint \left( \frac{\sigma\bar{\sigma}\delta}{E} + \frac{T\bar{T}}{G\delta} \right) ds dz. \quad (6.37)$$

Формула (6.37) выведена для гладкой конструкции. Можно показать, что при наличии поясов будем иметь вместо (6.37) выражение

$$v_{mi} = \int_0^L \int_l \left( \frac{\sigma \bar{\sigma} \delta}{E} + \frac{T \bar{T}}{G \delta} \right) ds dz + \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{E_i} \int_0^L \sigma_i \bar{\sigma}_i dz, \quad (6.38)$$

где  $\sigma_i, \bar{\sigma}_i$  – нормальные напряжения в поясах при действии заданных сил и при действии единичной силы соответственно;  $E_i, F_i$  – модуль упругости и площадь сечения  $i$ -го пояса;  $n$  – общее число поясов.

Применим полученный результат к вычислению угла закручивания сечения однозамкнутой тонкостенной конструкции, расположенного на расстоянии  $z$  от начала координат (рисунок 6.32,а). Для этого в интересующем нас сечении приложим момент относительно оси  $z$ , численно равный единице (рисунок 6.32,б).

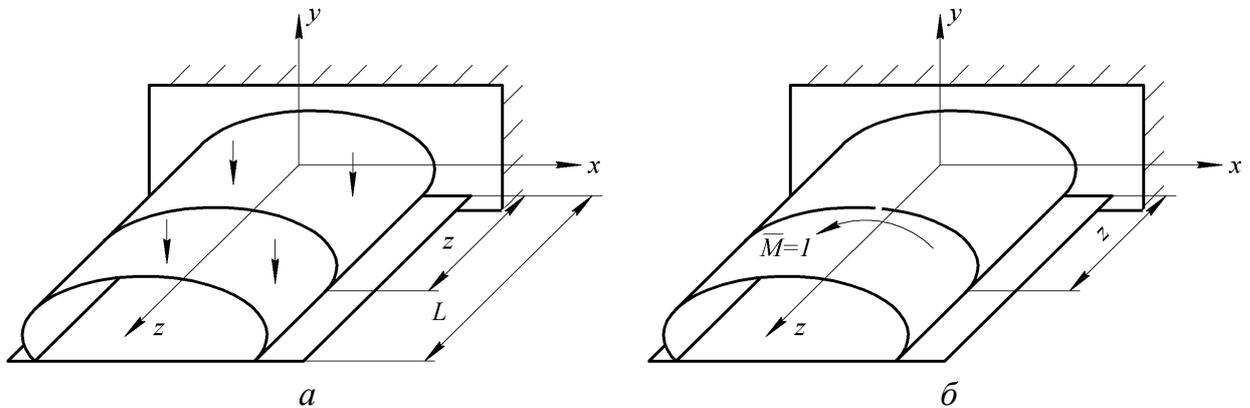


Рисунок 6.32 – К расчёту угла закручивания сечения тонкостенной конструкции

В единичной системе всюду  $\bar{\sigma} = 0$ . На участке длиной  $z$  имеем в точках замкнутого контура

$$\bar{T} = \frac{1}{\Omega},$$

где  $\Omega$  – удвоенная площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром; на остальной длине  $\bar{T} = 0$ .

Перемещение в направлении единичного момента представляет собой угол закручивания рассматриваемого сечения, который обозначим буквой  $\theta$ . Согласно (6.38) эта величина будет равна

$$\theta = \int_0^L \int_l \left( \frac{\sigma \bar{\sigma} \delta}{E} + \frac{T \bar{T}}{G \delta} \right) ds dz + \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{E_i} \int_0^L \sigma_i \bar{\sigma}_i dz = \int_0^L \int_l \frac{T \bar{T}}{G \delta} ds dz = \frac{1}{\Omega} \int_0^L \oint \frac{T ds}{G \delta} dz.$$

Интегрирование по дуговой координате выполняется здесь только в пределах замкнутого контура, где  $\bar{T} \neq 0$ .

Продифференцировав это выражение по  $z$ , найдём относительный или погонный (то есть рассчитанный на единицу длины конструкции) угол закручивания  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{Tds}{G\delta}. \quad (6.39)$$

### 6.10 Центр изгиба однозамкнутого сечения

В случае произвольного нагружения перемещение замкнутого поперечного сечения в своей плоскости может быть представлено в виде поступательного перемещения сечения и его поворота относительно некоторой точки (рисунок 6.33,а). Для любого сечения существует определённая точка  $C$ , проходя через которую нагрузка не вызывает его поворота (рисунок 6.33,б). Поперечное сечение будет при этом совершать только поступательное перемещение, то есть конструкция будет испытывать простой изгиб (изгиб без закручивания). Эта точка называется *центром изгиба конструкции с замкнутым контуром сечения*. Прямая, проходящая через центры изгиба сечений, называется *осью изгиба*.

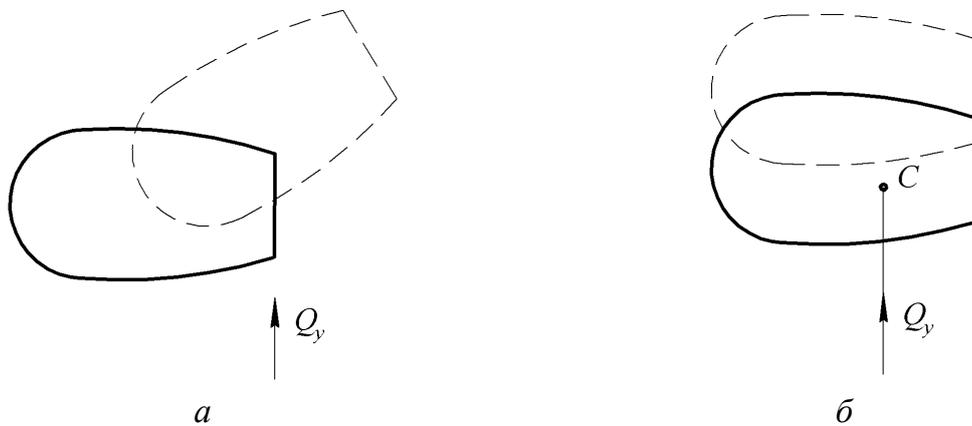


Рисунок 6.33 – Изгиб с кручением (а) и простой изгиб (б)

Выведем формулы для определения координат центра изгиба для сечения с однозамкнутым контуром. Пусть  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  – расстояния центра изгиба от полюса  $p$ . Для определения  $\bar{x}$  предположим, что в сечении действует сила  $Q_y$ , проходящая через центр изгиба. Касательные силы в сечении определяются суммой:

$$T = T^* + T_0.$$

Здесь

$$T_0 = \frac{M_0 - \int_l T^* \rho ds}{\Omega} = \frac{Q_y \bar{x} - \int_l T^* \rho ds}{\Omega},$$

где  $\rho$  – плечо касательной силы  $T^*$  относительно полюса  $p$ , а  $M_0 = Q_y \bar{x}$  – момент силы  $Q_y$  относительно точки  $p$ . Таким образом,

$$T = T^* + \frac{1}{\Omega} \left( Q_y \bar{x} - \int_l T^* \rho ds \right). \quad (6.40)$$

Воспользуемся далее тем, что по определению

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{T ds}{G \delta} = 0.$$

Опуская здесь множитель  $1/\Omega$ , получаем условие

$$\oint \frac{T ds}{G \delta} = 0.$$

Подстановка сюда выражения (6.40) приводит к равенству

$$\oint \frac{T^* ds}{G \delta} + \frac{1}{\Omega} \left( Q_y \bar{x} - \int_l T^* \rho ds \right) \oint \frac{ds}{G \delta} = 0.$$

Отсюда находим

$$\bar{x} = \frac{1}{Q_y} \left[ \int_l T^* \rho ds - \Omega \frac{\oint \frac{T^* ds}{G \delta}}{\oint \frac{ds}{G \delta}} \right]. \quad (6.41)$$

Если  $x, y$  – главные центральные оси, то величина  $T^*$  определяется выражением

$$T^* = \frac{Q_y S_{rx}}{I_{rx}}.$$

В этом случае из формулы (6.41) вытекает соотношение

$$\bar{x} = \frac{1}{I_{rx}} \int_l S_{rx} \rho ds - \frac{\Omega}{I_{rx}} \frac{\oint \frac{S_{rx} ds}{G \delta}}{\oint \frac{ds}{G \delta}}. \quad (6.42)$$

Подобным образом может быть найдена и координата  $\bar{y}$ . В главных осях

$$\bar{y} = \frac{1}{I_{ry}} \int_l S_{ry} \rho ds - \frac{\Omega}{I_{ry}} \frac{\oint \frac{S_{ry} ds}{G\delta}}{\oint \frac{ds}{G\delta}}. \quad (6.43)$$

Формулы (6.42) и (6.43) показывают, что координаты центра изгиба зависят только от геометрических характеристик и материала конструкции, но не зависят от внешней нагрузки.

Отметим различие в определении центра изгиба открытого и закрытого сечений. В первом случае центр изгиба есть точка, через которую должна проходить нагрузка для того, чтобы она могла быть воспринята конструкцией. В случае же замкнутого сечения конструкция способна воспринять любую нагрузку. Прохождение нагрузки через центр изгиба означает здесь лишь работу конструкции в условиях простого изгиба.

### 6.11 Касательные силы в тонкостенной конструкции с многозамкнутым контуром сечения при произвольном нагружении

Расчёт касательных сил в конструкциях с многозамкнутыми сечениями разберём на примере конструкции с тремя замкнутыми контурами в поперечном сечении (рисунок 6.34).

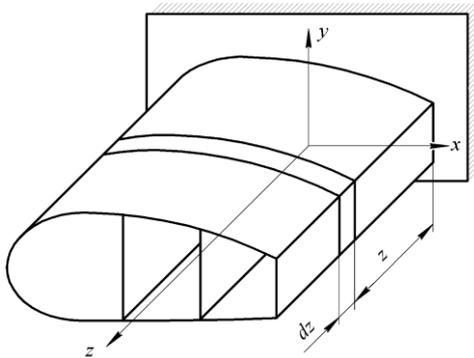


Рисунок 6.34 – Многозамкнутая конструкция

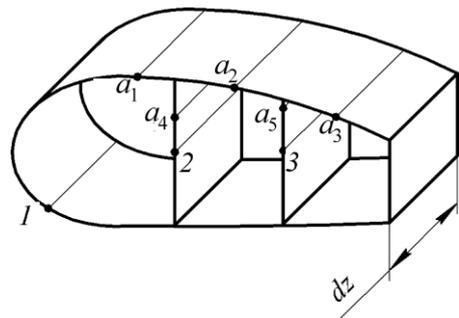
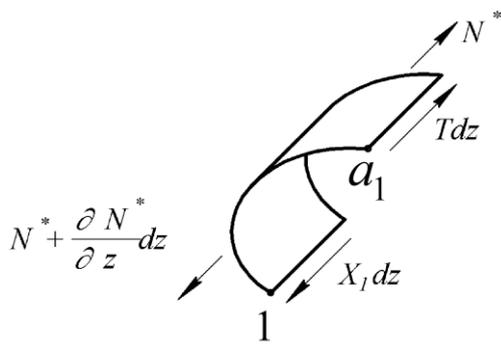


Рисунок 6.35 – Элемент многозамкнутой конструкции

Выделим участок конструкции длиной  $dz$  на расстоянии  $z$  от начала координат (рисунок 6.35). Мысленно разрежем этот участок вдоль образующих, проходящих через точки 1, 2 и 3, которые выбираются таким образом, чтобы сечение оказалось разомкнутым. Значения касательных сил в этих точках обозначим через  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ . Для определения касательной силы в точке  $a_1$  рассмотрим равновесие элемента, показанного на рисунке 6.36.



**Рисунок 6.36 – К расчёту касательных сил в многозамкнутом сечении**

Как и ранее, через  $N^*$  обозначим результирующую нормальных напряжений. Условие равновесия выделенного элемента в направлении оси  $z$  приводит к равенству

$$T_{a_1} = \frac{\partial N^*}{\partial z} + X_1.$$

Обозначая, как всегда,  $T^* = \frac{\partial N^*}{\partial z}$ ,

будем иметь

$$T_{a_1} = T^* + X_1, \quad (6.44)$$

где  $T^*$  – погонная сила, найденная для разомкнутого сечения.

Подобным образом можно получить выражения для касательных сил и в других точках. Проводя разрезы через точки  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  и  $a_5$ , будем выделять соответствующие участки конструкции. Условия их равновесия приводят в дополнение к (6.44) к равенствам

$$T_{a_2} = T^* + X_1 + X_2; \quad (6.45)$$

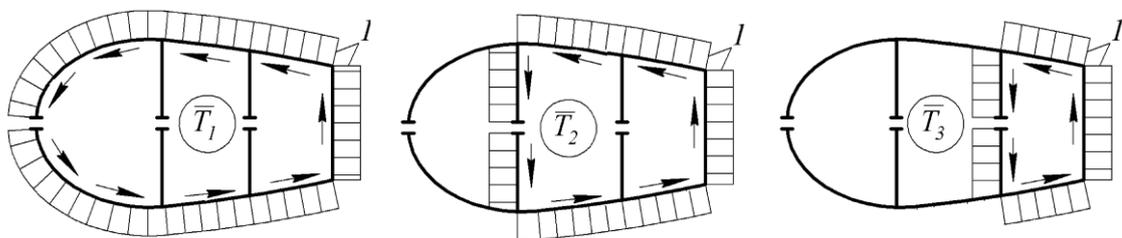
$$T_{a_3} = T^* + X_1 + X_2 + X_3; \quad (6.46)$$

$$T_{a_4} = T^* + X_2; \quad (6.47)$$

$$T_{a_5} = T^* + X_3. \quad (6.48)$$

Равенства (6.44)...(6.48) можно записать в виде одного, если ввести три вспомогательные единичные системы (рисунок 6.37). Тогда все эти равенства будут представлены общей формулой

$$T = T^* + \bar{T}_1 X_1 + \bar{T}_2 X_2 + \bar{T}_3 X_3. \quad (6.49)$$



**Рисунок 6.37 – Единичные системы**

Для определения неизвестных сил  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  следует воспользоваться прежде всего уравнением равновесия моментов относительно какой-либо точки  $p$ :

$$M_0 = \int_l T \rho ds, \quad (6.50)$$

где  $M_0$  – момент внешних сил относительно полюса;  $\rho$  – плечо силы  $T$  относительно точки  $p$ . Подставляя сюда выражение (6.49) и учитывая, что

$$\int_l \bar{T}_i \rho ds = \bar{T}_i \oint_i \rho ds = \Omega_i,$$

будем иметь

$$M_0 = \int_l T^* \rho ds + \sum_{i=1}^3 X_i \Omega_i. \quad (6.51)$$

Если число замкнутых контуров больше одного, задача оказывается статически неопределимой. В этом случае можно дополнительно воспользоваться условием, что всё сечение закручивается при деформации относительно оси  $z$  как жёсткий диск. Это означает, что каждый из однозамкнутых контуров имеет один и тот же погонный угол закручивания.

Ранее для погонного угла закручивания конструкции с однозамкнутым контуром сечения было получено выражение

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{T ds}{G \delta}.$$

Применительно к  $i$ -му контуру можно записать

$$\alpha_i \Omega_i = \oint_i \frac{T ds}{G \delta},$$

где интегрирование ведётся по  $i$ -му контуру. Указание на  $i$ -й контур при интегрировании можно опустить, представив это выражение в виде

$$\alpha_i \Omega_i = \int_l \frac{T \bar{T}_i}{G \delta} ds,$$

где формально интегрирование распространяется на всё сечение.

Учитывая, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ , где  $\alpha$  – погонный угол закручивания конструкции, будем иметь три равенства:

$$\alpha \Omega_i = \int_l \frac{T \bar{T}_i}{G \delta} ds \quad (i = 1, 2, 3).$$

Подставим сюда выражение (6.49) для  $T$ :

$$\alpha \Omega_i = \int_l \frac{T^* \bar{T}_i}{G \delta} ds + X_1 \int_l \frac{\bar{T}_1 \bar{T}_i}{G \delta} ds + X_2 \int_l \frac{\bar{T}_2 \bar{T}_i}{G \delta} ds + X_3 \int_l \frac{\bar{T}_3 \bar{T}_i}{G \delta} ds \quad (i = 1, 2, 3).$$

Вводя далее обозначения

$$\Delta_{i0} = \int_l \frac{T^* \bar{T}_i}{G \delta} ds; \quad \delta_{ki} = \int_l \frac{\bar{T}_k \bar{T}_i}{G \delta} ds, \quad (6.52)$$

приведём данные равенства к виду

$$\alpha \Omega_i = \Delta_{i0} + \sum_{k=1}^3 \delta_{ki} X_k \quad (i=1, 2, 3). \quad (6.53)$$

Вместе с равенством (6.51) получаем систему четырёх уравнений, в которые входят четыре неизвестные величины  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  и  $\alpha$ . Решив систему, найдём неизвестные силы и погонный угол закручивания.

При таком подходе остаётся неизвестным положение центра изгиба сечения, знание которого требуется, в частности, в динамических расчётах. Поэтому на практике удобнее расчёт касательных сил провести в два этапа, выделив простой изгиб и кручение конструкции.

## 6.12 Расчёт касательных сил при простом изгибе и при кручении

Если предположить, что нагрузка проходит через ось изгиба, будем иметь дело с простым изгибом. В этом случае  $\alpha = 0$  и равенства (6.53) приводят к системе трёх уравнений относительно трёх усилий в воображаемых разрезах:

$$\Delta_{i0} + \sum_{k=1}^3 \delta_{ki} X_k = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (6.54)$$

В соответствии с выражением (6.49) получаем касательные силы при простом изгибе, которые обозначим через  $T_{и}$ . Примерный характер распределения  $T_{и}$  при действии нагрузок в плоскости  $yz$  показан на рисунке 6.38.

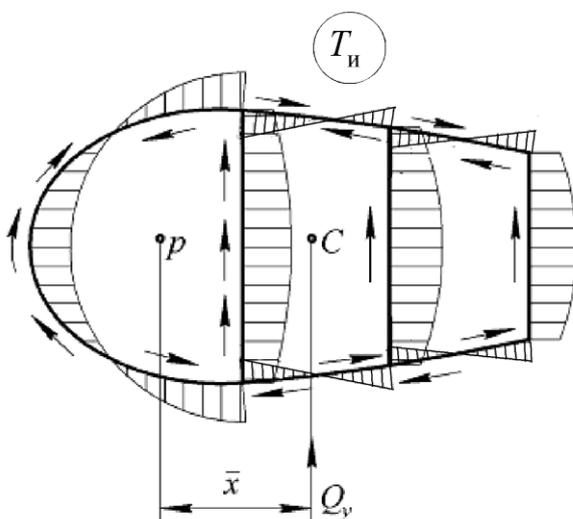


Рисунок 6.38 – Касательные силы при простом изгибе

Результирующая сил  $T_{и}$ , равная  $Q_y$ , имеет точку приложения в центре изгиба, и уравнение (6.50), в котором теперь  $T = T_{и}$ , а  $M_0 = Q_y \bar{x}$ , позволяет определить расстояние  $\bar{x}$  от полюса до центра изгиба:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{Q_y} \int_l T_{и} \rho ds = \\ &= \frac{1}{Q_y} \left( \int_l T^* \rho ds + \sum_{i=1}^3 \Omega_i X_i \right). \quad (6.55) \end{aligned}$$

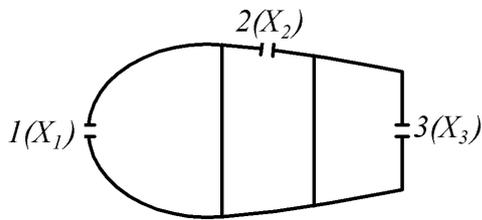
Исходя из действительной схе-

мы приложения сил, можно теперь найти момент внешних сил относительно центра изгиба, то есть крутящий момент  $M_k$ , и выполнить дополнительно расчёт касательных сил при свободном кручении. Поскольку при кручении  $Q_x = Q_y = 0$ , касательная сила  $T^* = 0$ . Тогда  $\Delta_{i0} = 0$  согласно (6.52), и система уравнений (6.51), (6.53) примет вид

$$M_k = \sum_{k=1}^3 \Omega_k X_k ; \quad (6.56)$$

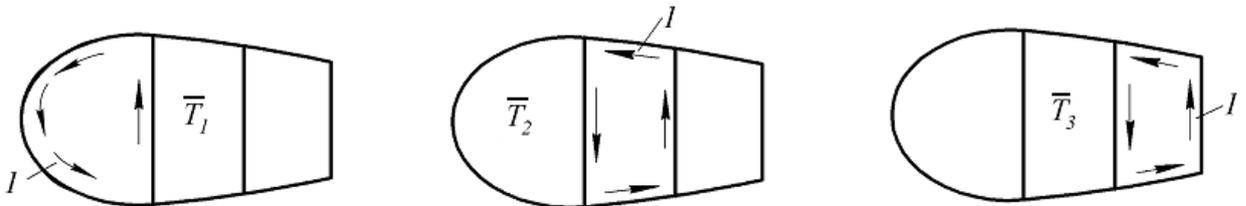
$$\alpha \Omega_i = \sum_{k=1}^3 \delta_{ki} X_k \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.57)$$

Расчёт на кручение оказывается более наглядным, если точки 1, 2, 3 воображаемых разрезов контура выбрать иначе, чем при расчёте на простой изгиб. Если выбор сделать по схеме рисунка 6.39, то единичные системы бу-

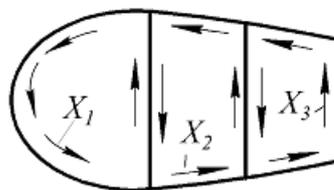


**Рисунок 6.39 – Выбор разрезов при расчёте на кручение**

дут выглядеть так, как показано на рисунке 6.40. При этом из представления (6.49) следует, что касательные силы при свободном кручении будут распределяться в сечении согласно рисунку 6.41. В каждой ячейке контура действует постоянный поток касательных сил определённой интенсивности.



**Рисунок 6.40 – Единичные потоки касательных сил**



**Рисунок 6.41 – Схема действия касательных сил при кручении**

Теперь в соответствии с (6.52) вычисляем коэффициенты  $\delta_{ki}$ :

$$\delta_{11} = \int_l \frac{\bar{T}_1^2}{G\delta} ds = \oint_{(1)} \frac{ds}{G\delta};$$

$$\delta_{22} = \int_l \frac{\bar{T}_2^2}{G\delta} ds = \oint_{(2)} \frac{ds}{G\delta};$$

$$\delta_{33} = \int_l \frac{\bar{T}_3^2}{G\delta} ds = \oint_{(3)} \frac{ds}{G\delta};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_l \frac{\bar{T}_1 \bar{T}_2}{G\delta} ds = - \int_{1-2} \frac{ds}{G\delta};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \int_l \frac{\bar{T}_2 \bar{T}_3}{G\delta} ds = - \int_{2-3} \frac{ds}{G\delta};$$

$$\delta_{31} = \delta_{13} = \int_l \frac{\bar{T}_1 \bar{T}_3}{G\delta} ds = 0.$$

Здесь записи  $\int_{1-2}$  и  $\int_{2-3}$  означают интегрирование по стенкам, разделяющим контуры 1, 2 и 2, 3 соответственно.

В итоге получаем систему уравнений

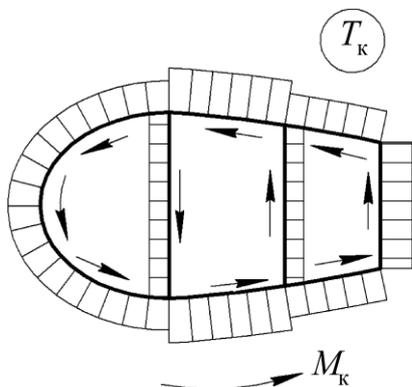
$$\Omega_1 \alpha = X_1 \oint_{(1)} \frac{ds}{G\delta} - X_2 \int_{1-2} \frac{ds}{G\delta};$$

$$\Omega_2 \alpha = -X_1 \int_{1-2} \frac{ds}{G\delta} + X_2 \oint_{(2)} \frac{ds}{G\delta} - X_3 \int_{2-3} \frac{ds}{G\delta};$$

$$\Omega_3 \alpha = -X_2 \int_{2-3} \frac{ds}{G\delta} + X_3 \oint_{(3)} \frac{ds}{G\delta};$$

$$M_k = \Omega_1 X_1 + \Omega_2 X_2 + \Omega_3 X_3,$$

решение которой даёт  $X_i$  и  $\alpha$ .



**Рисунок 6.42 – Эпюры касательных сил при свободном кручении**

Касательные силы при кручении обозначим через  $T_k$  (рисунок 6.42). Как видим, внутренние стенки при кручении нагружаются слабо; основная доля  $M_k$  воспринимается внешним контуром. Заключительным этапом расчёта является суммирование двух составляющих:

$$T = T_n + T_k,$$

которое выполняется с учётом направлений касательных сил.

## 7 БЕЗМОМЕНТАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

### 7.1 Геометрия оболочек вращения

Оболочкой называется тело, заключённое между двумя близкими поверхностями, расстояние между которыми, называемое толщиной оболочки, мало по сравнению с другими характерными размерами (рисунок 7.1). Поверхность, которая делит толщину  $\delta$  пополам, называется срединной.

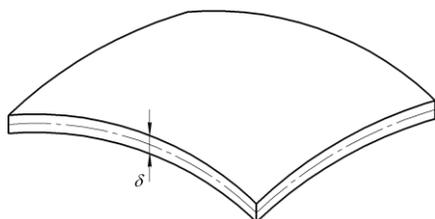


Рисунок 7.1 – Произвольная оболочка

Если срединная поверхность образована вращением плоской кривой (образующей) вокруг оси, лежащей в плоскости кривой, то в этом случае мы имеем дело с оболочкой вращения. Кривые в пересечении срединной поверхности с плоскостями, проходящими через ось вращения, называют меридианами, а окружности, образованные пересечением срединной поверхности с плоскостями, перпендикулярными оси – параллельными или просто параллелями (рисунок 7.2).

Положение меридиана можно задать углом  $\varphi$ , который отсчитывается от некоторого начального меридиана. Положение произвольной точки  $M$  на меридиане можно определить различными способами. Проведём в точке  $M$  касательную  $\vec{t}$  и нормаль  $\vec{n}$  к меридиану (рисунок 7.3). Угол между нормалью и осью вращения обозначим буквой  $\theta$ . Если угол  $\theta$  изменяется от точки к точке, то он и служит обычно координатой точки  $M$ . В случае же конической оболочки (когда  $\theta = \text{const}$ ) в качестве координаты можно взять радиус  $r$  параллельной окружности или расстояние  $s_1$  вдоль образующей, отсчитываемое от какой-либо начальной точки. Последний вариант является единственным возможным для цилиндрической оболочки.

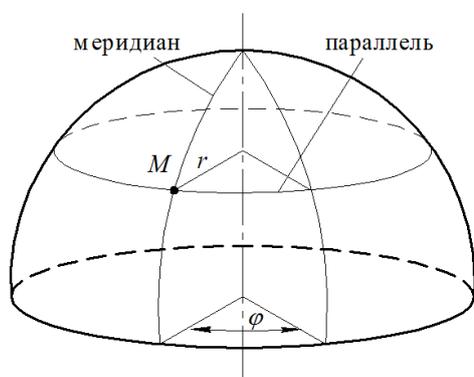


Рисунок 7.2 – Оболочка вращения

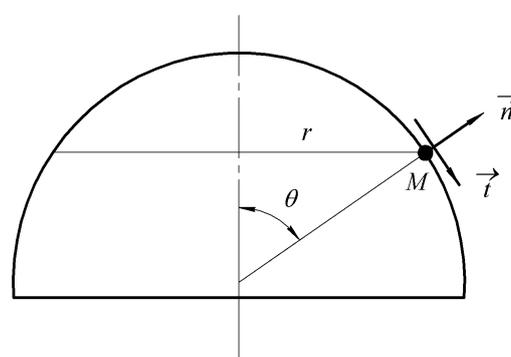
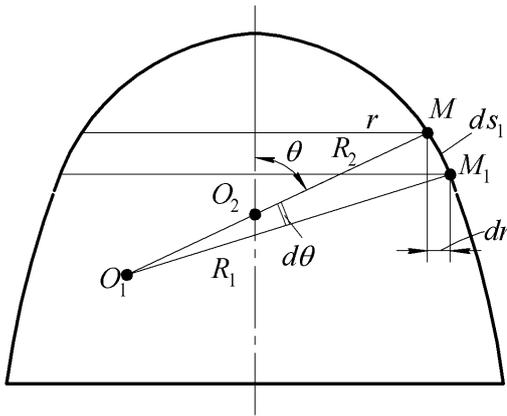


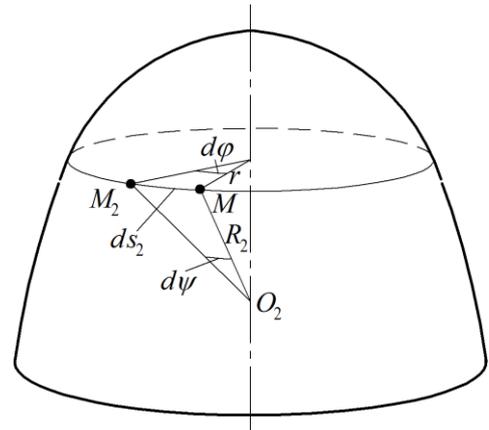
Рисунок 7.3 – Касательная и нормаль к меридиану

Возьмём далее точку  $M_1$ , отстоящую вдоль образующей на расстоянии  $ds_1$  от точки  $M$  (рисунок 7.4). Нормали к меридиану в этих двух точках пересекутся в некоторой точке  $O_1$ , являющейся центром кривизны меридиана в точке  $M$ . Расстояние  $O_1M$ , являющееся радиусом кривизны меридиана в данной точке, называется *первым главным радиусом кривизны срединной поверхности*; будем обозначать его через  $R_1$ .

Рассмотрим ещё точку  $M_2$ , расположенную на той же параллели, что и точка  $M$ , на бесконечно близком расстоянии  $ds_2$  от неё (рисунок 7.5). Нормали к срединной поверхности в этих двух точках пересекутся, очевидно, в точке  $O_2$ , находящейся на оси вращения. Расстояние  $O_2M$  называют *вторым главным радиусом кривизны поверхности вращения*; будем обозначать его через  $R_2$ .



**Рисунок 7.4 – Геометрические параметры оболочки вращения**



**Рисунок 7.5 – Элемент параллельной окружности**

Имеют место следующие очевидные геометрические соотношения:

$$r = R_2 \sin \theta; \quad (7.1)$$

$$ds_1 = R_1 d\theta; \quad (7.2)$$

$$ds_2 = R_2 d\psi, \quad (7.3)$$

а также

$$dr = ds_1 \cos \theta, \quad (7.4)$$

где  $d\theta$  и  $d\psi$  – углы между нормальными в точках  $M, M_1$  и  $M, M_2$  соответственно,  $dr$  – приращение радиуса параллельной окружности, соответствующее приращению  $ds_1$ .

## 7.2 Основные уравнения безмоментной теории оболочек вращения при осесимметричном нагружении

Под действием внешних нагрузок в сечениях оболочки возникают напряжения, в общем случае переменные по толщине (рисунок 7.6,а). Их можно свести к погонным силам и моментам, рассчитанным на единицу длины соответствующего сечения (рисунок 7.6,б). Особое значение в практике расчётов имеет тот случай, когда напряжения постоянны по толщине, так что погонные моменты оказываются равными нулю. При этом расчёт оболочки сводится к определению погонных сил. Соответствующая теория расчёта называется безмоментной теорией. Мы ограничимся наиболее важным для практики случаем осесимметричного нагружения, когда действующие нагрузки, а следовательно и напряжения, не зависят от угла  $\varphi$ . В качестве нагрузок могут выступать распределённые по поверхности нормальные  $p_n$  и тангенциальные  $p_t$  силы, а также силы, равномерно распределённые по некоторым параллельным окружностям.

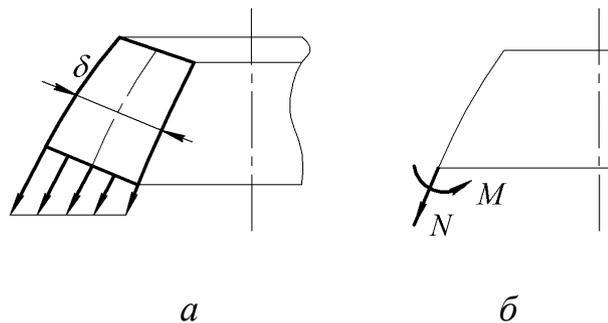


Рисунок 7.6 – Растяжение и изгиб срединной поверхности

Выделим бесконечно малый элемент оболочки, имеющий размеры срединной поверхности  $ds_1$  и  $ds_2$  (рисунок 7.7,а). Боковые площадки  $dA_1 = \delta ds_1$  и  $dA_2 = \delta ds_2$  (рисунок 7.7,б) получаются при движении нормали по образующей и по параллели соответственно. В этих гранях действуют нормальные напряжения – меридиональное  $\sigma_{11}$  и окружное  $\sigma_{22}$ . Касательное напряжение будет отсутствовать в силу осевой симметрии напряжённого состояния.

Элементарная сила в площадке  $dA_2$  будет

$$dP_1 = \sigma_{11} \delta ds_2.$$

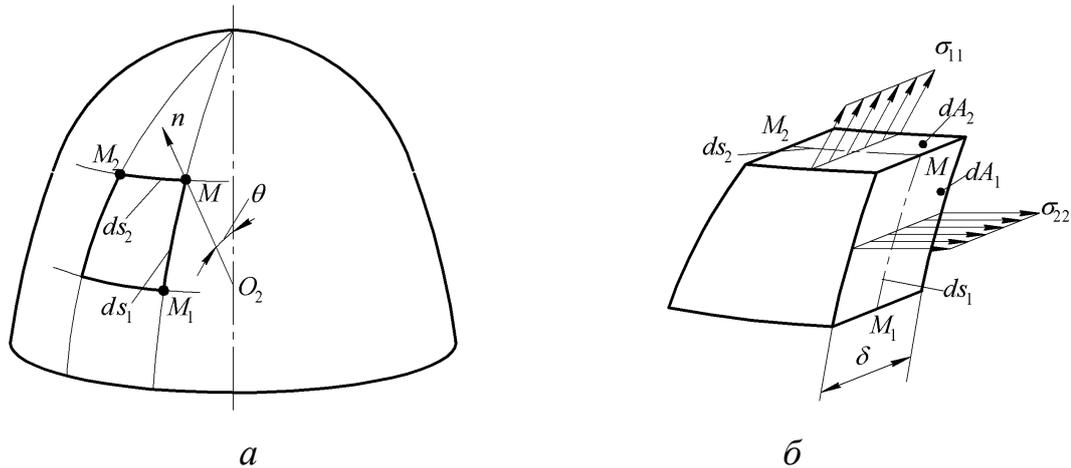
Если разделить её на  $ds_2$ , то получим погонную меридиональную силу

$$N_1 = \frac{dP_1}{ds_2} = \sigma_{11} \delta,$$

представляющую собой силу, приходящуюся на единицу длины параллельной окружности и действующую по касательной к меридиану. Аналогично величина

$$N_2 = \sigma_{22} \delta$$

представляет собой погонную окружную силу, рассчитываемую на единицу длины меридиана.

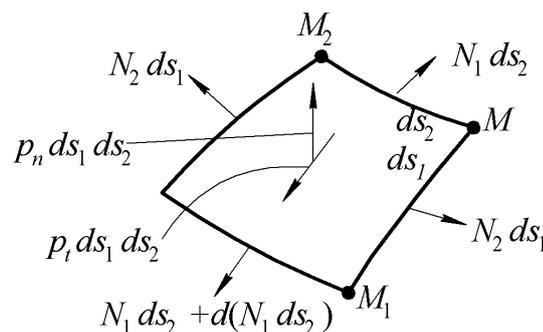


**Рисунок 7.7 – Напряжения в сечениях безмоментной оболочки вращения**

Таким образом, в рассматриваемой теории дело сводится к отысканию двух величин –  $N_1$  и  $N_2$ , которые могут произвольно изменяться вдоль меридиана, но не зависят от угла  $\varphi$ . Если  $N_1$  и  $N_2$  известны, то напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{\delta}; \quad \sigma_{22} = \frac{N_2}{\delta}.$$

Для нахождения этих величин рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента срединной поверхности со сторонами  $ds_1$  и  $ds_2$ . Считая, что внешние нагрузки приложены к срединной поверхности, будем иметь схему действия сил на элемент, показанную на рисунке 7.8.



**Рисунок 7.8 – Бесконечно малый элемент срединной поверхности**

Чтобы правильно сформулировать условия равновесия элемента, на рисунке 7.9 показаны две его проекции – на плоскость меридиана (рисунок 7.9,а) и на плоскость, нормальную к меридиану (рисунок 7.9,б).

Запишем условие равновесия всех сил в проекции на нормаль к оболочке:

$$-N_1 ds_2 \frac{d\theta}{2} - [N_1 ds_2 + d(N_1 ds_2)] \frac{d\theta}{2} - 2N_2 ds_1 \frac{d\psi}{2} + p_n ds_1 ds_2 = 0.$$

Приведя подобные члены и отбросив бесконечно малую величину третьего порядка, получим

$$-N_1 ds_2 d\theta - N_2 ds_1 d\psi + p_n ds_1 ds_2 = 0.$$

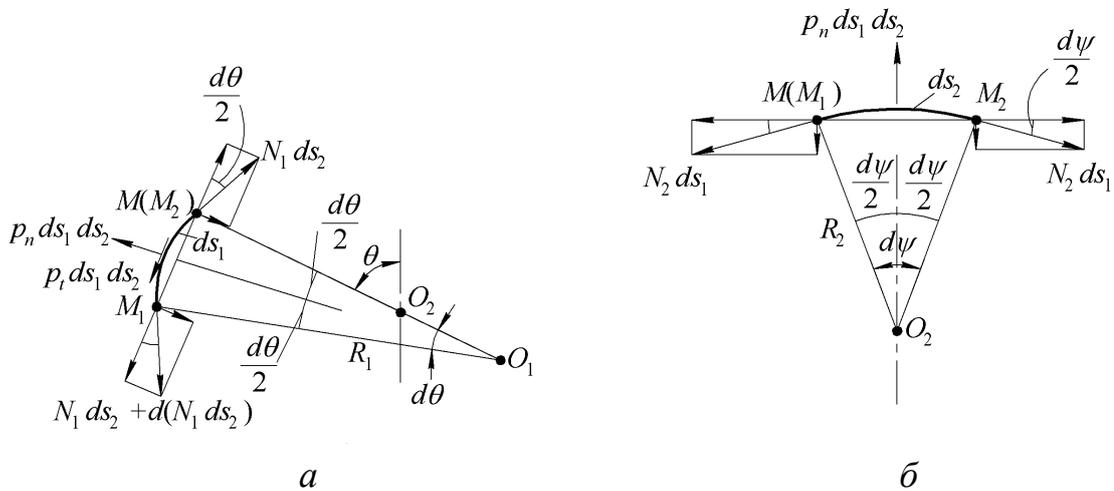


Рисунок 7.9 – К составлению уравнения равновесия

Так как согласно (7.2) и (7.3)

$$d\theta = \frac{ds_1}{R_1}; \quad d\psi = \frac{ds_2}{R_2},$$

это равенство можно записать так:

$$-\frac{N_1}{R_1} ds_1 ds_2 - \frac{N_2}{R_2} ds_1 ds_2 + p_n ds_1 ds_2 = 0.$$

Отсюда следует уравнение

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = p_n, \quad (7.5)$$

называемое *уравнением Лапласа*.

В качестве второго соотношения возьмём условие равновесия не бесконечно малого элемента, а конечной части – зоны оболочки. Проведём через точку  $M$ , в которой отыскиваются усилия, сечение плоскостью, перпендикулярной оси вращения (рисунок 7.10,а). Составим далее условие равновесия

отсечённой части оболочки (рисунок 7.10,б). Если  $\Phi$  – результирующая всех внешних сил, действующих на отсечённую часть, то условие равновесия запишется так:

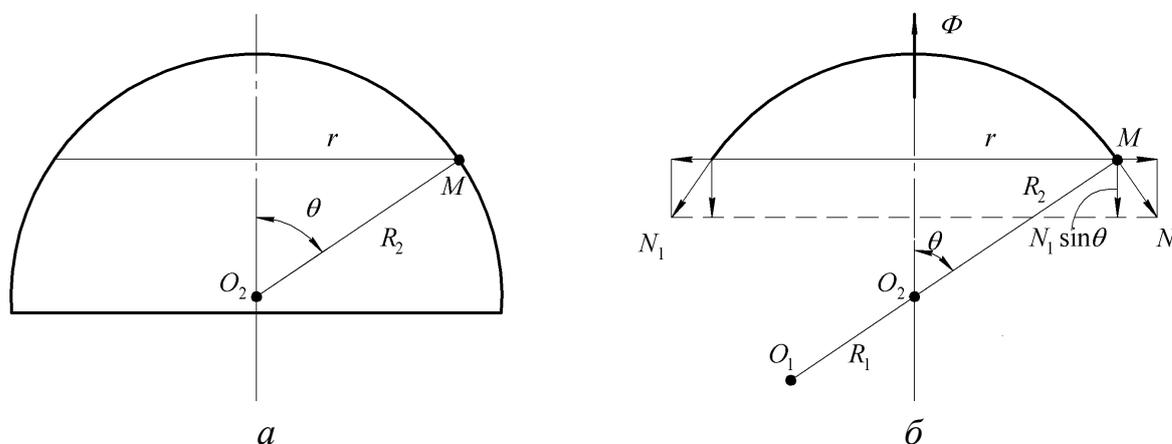
$$N_1 \sin \theta \cdot 2\pi r = \Phi.$$

Отсюда следует равенство

$$N_1 = \frac{\Phi}{2\pi r \sin \theta}.$$

Так как  $r = R_2 \sin \theta$ , приходим окончательно к выражению

$$N_1 = \frac{\Phi}{2\pi R_2 \sin^2 \theta}. \quad (7.6)$$



**Рисунок 7.10 – Равновесие конечной зоны оболочки вращения**

Таким образом, расчёт оболочки вращения при осесимметричном нагружении по безмоментной теории сводится к определению  $N_1$  из уравнения равновесия зоны (7.6) и последующему нахождению  $N_2$  из уравнения Лапласа (7.5).

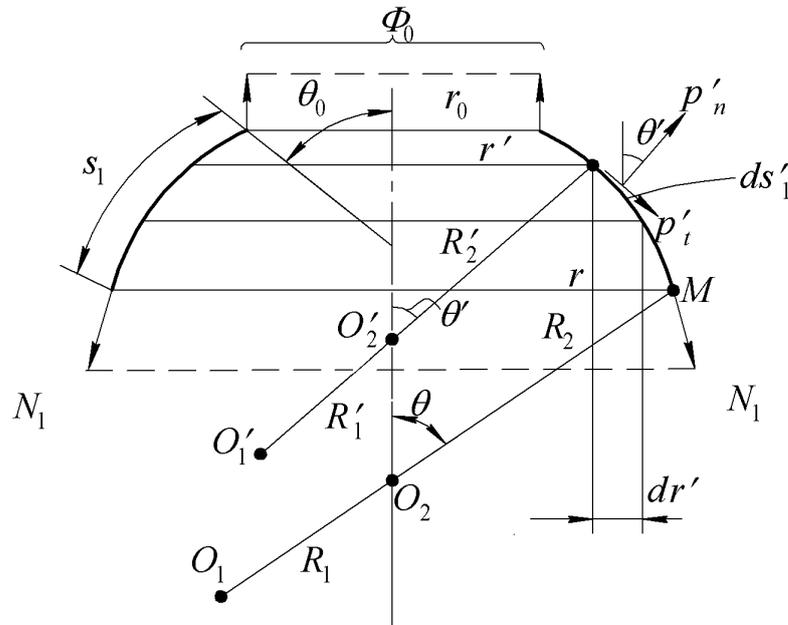
### **7.3 Определение результирующей внешних сил. Оболочка вращения под действием внутреннего давления**

Выведем формулу для вычисления результирующей  $\Phi$  сил, действующих на отсечённую часть оболочки. Рассмотрим общий случай оболочки, не замкнутой в вершине и нагруженной по окружности радиуса  $r_0$  равномерно распределённой нагрузкой с результирующей  $\Phi_0$  (рисунок 7.11).

Выделим в пределах рассматриваемой зоны бесконечно малый пояс с длиной дуги образующей  $ds'_1$ . Все величины, относящиеся к этому поясу, будем помечать штрихом, чтобы отличить их от тех значений, которые они имеют в интересующей нас точке  $M$ . Нормальная  $p'_n$  и касательная  $p'_t$

нагрузки дают на ось проекцию  $p'_n \cos \theta' - p'_t \sin \theta'$ . Умножив её на  $ds'_1$  и на длину окружности  $2\pi r'$ , найдём элементарную силу  $d\Phi$ , создаваемую на выделенном пояске. После интегрирования получим

$$\Phi = \Phi_0 + 2\pi \int_0^{s_1} (p'_n \cos \theta' - p'_t \sin \theta') r' ds'_1. \quad (7.7)$$



**Рисунок 7.11 – К вычислению равнодействующей внешних сил для зоны оболочки**

Учитывая, что, согласно (7.4),

$$ds'_1 = \frac{dr'}{\cos \theta'},$$

перейдём в (7.7) к интегрированию по  $r'$ :

$$\Phi = \Phi_0 + 2\pi \int_{r_0}^r (p'_n - p'_t \operatorname{tg} \theta') r' dr'. \quad (7.8)$$

Если в соотношении (7.7) положить

$$ds'_1 = R'_1 d\theta'; \quad r' = R'_2 \sin \theta',$$

то выражению для  $\Phi$  можно придать и такую форму:

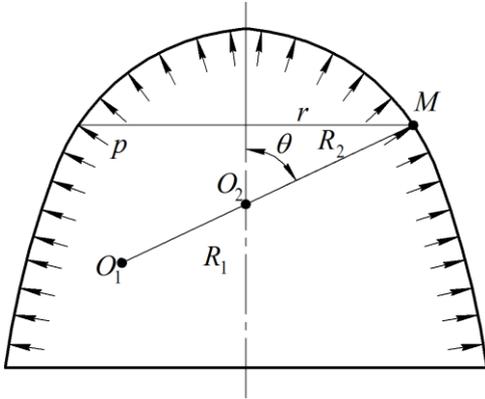
$$\Phi = \Phi_0 + 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta} (p'_n \cos \theta' - p'_t \sin \theta') R'_1 R'_2 \sin \theta' d\theta'. \quad (7.9)$$

Применим полученные результаты к случаю оболочки вращения, замкнутой в вершине и испытывающей действие равномерного внутреннего давления (рисунок 7.12).

В данном случае

$$p_t = 0, \quad p_n = p,$$

а также  $r_0 = 0$  и  $\Phi_0 = 0$ . По формуле (7.8) находим



**Рисунок 7.12 – Оболочка вращения под действием равномерного давления**

$$\Phi = 2\pi \int_0^r pr'dr' = 2\pi p \frac{r'^2}{2} \Big|_0^r = \pi r^2 p.$$

Согласно соотношению (7.6) имеем

$$N_1 = \frac{\Phi}{2\pi R_2 \sin^2 \theta} = \frac{\pi r^2 p}{2\pi R_2 \sin^2 \theta} = \frac{pr^2}{2R_2 \sin^2 \theta}.$$

Но так как  $r = R_2 \sin \theta$ , отсюда следует,

что

$$N_1 = \frac{pR_2^2 \sin^2 \theta}{2R_2 \sin^2 \theta} = \frac{pR_2}{2}. \quad (7.10)$$

Теперь из уравнения (7.5) получаем

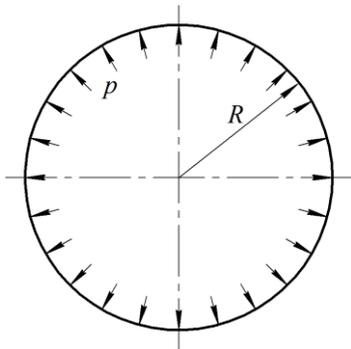
$$N_2 = R_2 \left( p - \frac{N_1}{R_1} \right) = pR_2 - \frac{R_2}{R_1} N_1 = pR_2 - \frac{R_2}{R_1} \frac{pR_2}{2},$$

то есть

$$N_2 = \frac{pR_2}{2} \left( 2 - \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (7.11)$$

Остановимся на некоторых частных случаях.

**Сферическая оболочка** (рисунок 7.13).



**Рисунок 7.13 – Сферическая оболочка под действием внутреннего давления**

Пусть образующей срединной поверхности оболочки является окружность радиуса  $R$ . В этом случае

$$R_1 = R_2 = R,$$

и из формул (7.10) и (7.11) получаем

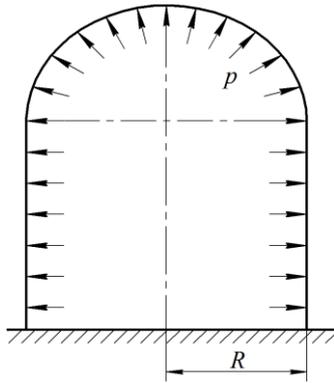
$$N_1 = N_2 = \frac{pR}{2}. \quad (7.12)$$

Напряжения в сферической оболочке

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{pR}{2\delta},$$

где  $\delta$  – её толщина. Можно сказать, что сферический сосуд, нагруженный внутренним давлением, представляет собой равнопрочную конструкцию.

**Цилиндрическая оболочка** (рисунок 7.14).



**Рисунок 7.14 – Цилиндрическая оболочка с днищем под действием внутреннего давления**

Общие соотношения (7.10), (7.11) выведены в предположении, что оболочка замкнута в вершине. Поэтому их можно применить к цилиндрической оболочке в том случае, когда она закрыта каким-либо днищем.

Образующей цилиндра является прямая линия, поэтому

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = R,$$

где  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки. Из соотношений (7.10) и (7.11)

вытекают следующие формулы для погонных усилий:

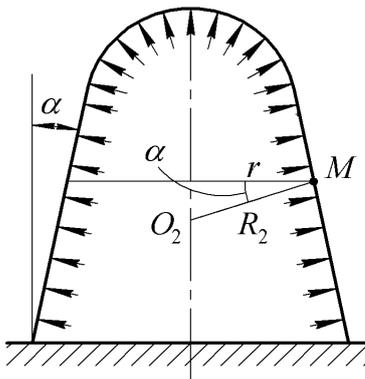
$$N_1 = \frac{pR}{2}; \quad N_2 = pR. \quad (7.13)$$

Напряжения имеют значения

$$\sigma_{11} = \frac{pR}{2\delta}; \quad \sigma_{22} = \frac{pR}{\delta}.$$

Таким образом, в цилиндрическом сосуде, нагруженном равномерным внутренним давлением, окружные напряжения оказываются вдвое больше меридиональных.

**Коническая оболочка** (рисунок 7.15).



**Рисунок 7.15 – Коническая оболочка под внутренним давлением**

Так же как и в случае цилиндрической, для конической оболочки  $R_1 = \infty$ .

Если в качестве координаты текущей точки  $M$  образующей принять радиус  $r$  параллельной окружности, то будем иметь

$$R_2 = \frac{r}{\cos \alpha},$$

где  $\alpha$  – угол полураствора конуса. По формулам (7.10), (7.11) будем иметь

$$N_1 = \frac{pr}{2 \cos \alpha}; \quad N_2 = \frac{pr}{\cos \alpha} \quad (7.14)$$

и, соответственно,

$$\sigma_{11} = \frac{pr}{2\delta \cos \alpha}; \quad \sigma_{22} = \frac{pr}{\delta \cos \alpha}.$$

Окружные напряжения и в этом случае в два раза превышают меридиональные.

## 7.4 Пределы применимости безмоментной теории

Рассмотрим цилиндрический бак с полусферическим днищем под действием внутреннего давления (рисунок 7.16). Толщины цилиндра и днища одинаковы и равны  $\delta$ .

Найдём радиальные перемещения оболочек в месте их стыка, то есть в сечении  $a-a$ . В сферическом днище напряжения

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{pR}{2\delta}.$$

Окружная деформация по закону Гука

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \mu\sigma_{11} - \mu\sigma_{33}) = \frac{pR}{2E\delta}(1 - \mu),$$

поскольку  $\sigma_{33} = 0$ . Здесь  $E$  – модуль упругости материала,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Но из определения деформаций следует, что  $\varepsilon_{22}$  есть изменение длины окружности, отнесённое к её первоначальной длине. Если  $\Delta_1$  есть радиальное перемещение

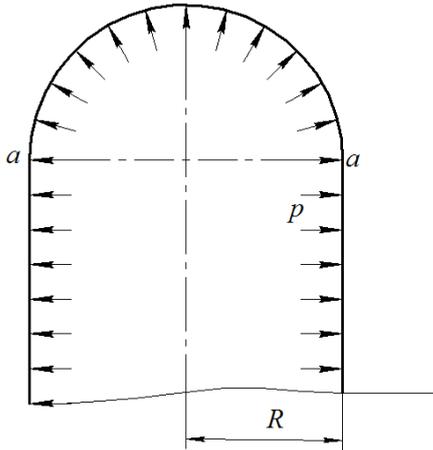


Рисунок 7.16 – Цилиндрический бак с полусферическим днищем под внутренним давлением

сферического днища в месте стыка с оболочкой, то

$$\varepsilon_{22} = \frac{2\pi(R + \Delta_1) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{\Delta_1}{R}.$$

Отсюда находим

$$\Delta_1 = R\varepsilon_{22} = \frac{pR^2}{2E\delta}(1 - \mu).$$

Для цилиндрического участка

$$\sigma_{11} = \frac{pR}{2\delta}; \quad \sigma_{22} = \frac{pR}{\delta},$$

так что

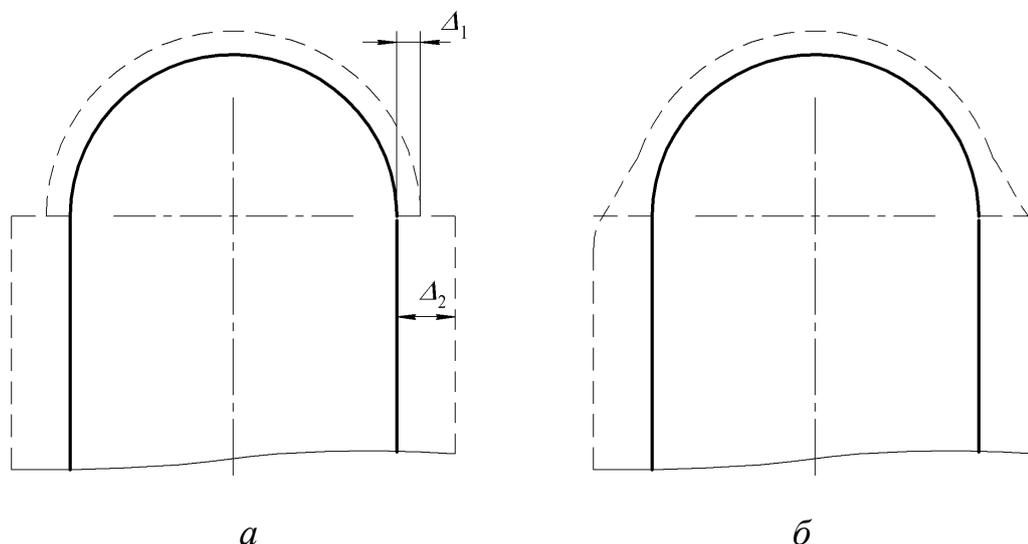
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \mu\sigma_{11}) = \frac{pR}{2E\delta}(2 - \mu).$$

Радиальное перемещение цилиндрической оболочки составит

$$\Delta_2 = \frac{pR^2}{2E\delta}(2 - \mu).$$

Схема перемещений в днище и цилиндре, вытекающая из безмоментной теории, показана на рисунке 7.17,а. Получается, что в месте стыка возникает разрыв. Это невозможно, и отсюда следует, что в окрестности стыка бу-

дет нарушено безмоментное напряжённое состояние. Образующие будут изгибаться, то есть возникнут дополнительные изгибные напряжения. Действительная схема деформирования возле стыка оболочек изображена на рисунке 7.17,б.



**Рисунок 7.17 – Схема деформирования образующей в соединении цилиндрической и сферической оболочек**

Нарушение безмоментного состояния будет происходить в следующих случаях:

- при резких изменениях геометрии (скачкообразном изменении радиуса кривизны образующей или скачкообразном изменении толщины);
- при резком изменении нагрузок, в том числе при действии локальных нагрузок;
- в местах закрепления, где невозможно свободное деформирование оболочки в радиальном направлении.

Как видим, на практике безмоментное состояние в чистом виде по существу никогда не реализуется. Следует иметь в виду, однако, два обстоятельства.

Во-первых, области, в которых происходит нарушение безмоментного состояния, обычно весьма локальны. Основная часть оболочки находится как раз в безмоментном состоянии и именно она определяет основную массу конструкции. Увеличение толщины, которое может потребоваться из-за возрастания напряжений вследствие моментности, носит местный характер и не приводит к существенному утяжелению конструкции.

Во-вторых, если конструкция выполнена из достаточно пластичного материала, напряжения выравниваются по толщине за счёт пластических де-

формаций даже и в тех зонах, где формально безмоментная теория неприменима. В этих случаях отыскание изгибных напряжений (на основе закона Гука) теряет смысл. Формулы безмоментной теории дают надёжную основу для суждения о прочности конструкции. Но если бак изготовлен из хрупкого материала, то в указанных особых зонах расчёт напряжений должен осуществляться с использованием более общей моментной теории.

## 7.5 Примеры расчёта оболочек вращения по безмоментной теории

Пример 1. Найти распределение усилий в сферическом баке радиуса  $R$ , заполненном жидкостью и установленном на подставке (рисунок 7.18).

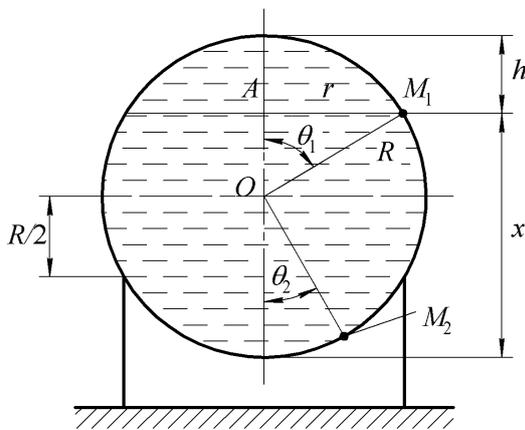


Рисунок 7.18 – Сферический бак с жидкостью

Положение произвольной точки  $M_1$  на верхнем участке бака будем характеризовать её расстоянием  $h$  вдоль оси от верхней точки бака. Радиус  $r$  параллельной окружности выразим через эту величину по теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} r^2 &= OM_1^2 - OA^2 = R^2 - (R - h)^2 = \\ &= 2Rh - h^2 = h(2R - h). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Так как  $\sin \theta_1 = r/R$ , можно записать

также

$$\sin^2 \theta_1 = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h(2R - h)}{R^2}. \quad (7.16)$$

Давление жидкости в точке  $M_1$  определяется по формуле

$$p = \rho gh, \quad (7.17)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение силы тяжести.

Переходя к вычислению усилий, выделим зону оболочки, проведя разрез по окружности, проходящей через точку  $M_1$ . При записи условия равновесия отсечённой части возможны два пути. Можно приложить к стенке давление, создаваемое жидкостью, и для вычисления равнодействующей воспользоваться выведенными выше формулами (7.8) или (7.9). Удобнее, однако, поступить иначе. Будем рассматривать равновесие отсечённой части вместе с содержащейся в ней жидкостью, как показано на рисунке 7.19,а применительно к случаю, когда точка  $M_1$  находится выше опорной окружности.

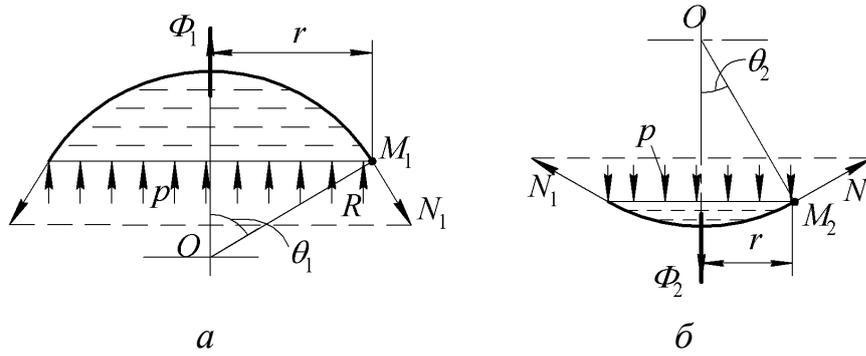


Рисунок 7.19 – К составлению условия равновесия зоны оболочки

В качестве внешних сил выступают теперь сила тяжести жидкости, включённой в выделенную зону, а также давление, действующее на поверхности этой жидкости. Силой тяжести самой оболочки будем пренебрегать.

Учитывая, что положительная сила  $\Phi_1$  должна быть направлена от сечения, можно записать

$$\Phi_1 = \pi r^2 p - \rho g V_1.$$

Здесь

$$V_1 = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) \quad (7.18)$$

– объём сферического сегмента с высотой подъёма  $h$ .

Подставляя в выражения для  $\Phi_1$  формулы (7.15), (7.17) и (7.18), находим

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \pi h(2R - h)\rho gh - \rho g \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) = \\ &= \frac{\pi \rho g h^2}{3} [3(2R - h) - (3R - h)] = \frac{\pi \rho g h^2}{3}(3R - 2h). \end{aligned}$$

Поскольку для сферической оболочки  $R_1 = R_2 = R$ , с учётом (7.16) получаем

$$N_1 = \frac{\Phi_1}{2\pi R_2 \sin^2 \theta_1} = \frac{\pi \rho g h^2}{3}(3R - 2h) \frac{R^2}{2\pi R h(2R - h)},$$

откуда

$$N_1 = \frac{\rho g R}{6} \frac{(3R - 2h)h}{2R - h}.$$

Из уравнения Лапласа, где нужно положить  $p_n = p$ , имеем

$$N_2 = pR - N_1 = \rho g h R - \frac{\rho g R}{6} \frac{(3R - 2h)h}{2R - h} =$$

$$= \frac{\rho g R h}{6} \frac{6(2R - h) - (3R - 2h)}{2R - h}.$$

Отсюда

$$N_2 = \frac{\rho g R}{6} \frac{(9R - 4h)h}{2R - h}.$$

Полученные выражения для  $N_1$  и  $N_2$  справедливы для той части сосуда, которая расположена выше опорной окружности. Для точки  $M_2$ , которая находится ниже неё, при вычислении результирующей сил  $\Phi$  нужно принять во внимание силу реакции со стороны подставки. Но вместо этого удобнее воспользоваться условием равновесия зоны оболочки, показанной на рисунке 7.19,б. Результирующая сил, положительное направление которой указано на рисунке 7.19,б, будет

$$\Phi_2 = \pi r^2 p + \rho g V_2,$$

где  $V_2$  – объём жидкости, попавшей в отсечённую часть. Примем для точки  $M_2$  в качестве независимой переменной её расстояние вдоль оси от нижней точки бака:

$$x = 2R - h. \quad (7.19)$$

Тогда  $V_2$  можно выразить через  $x$  соотношением (7.18), в котором, однако, следует заменить  $h$  на  $x$ :

$$V_2 = \frac{\pi x^2}{3} (3R - x).$$

Такую же замену  $h$  на  $x$  следует сделать в выражениях для  $r^2$  и  $\sin^2 \theta$ :

$$r^2 = x(2R - x); \quad \sin^2 \theta_2 = \frac{x(2R - x)}{R^2}.$$

Наконец, внося в выражение (7.17) соотношение (7.19), запишем

$$p = \rho g (2R - x).$$

Теперь получаем выражения для всех величин, относящихся к точке  $M_2$ , в виде функций аргумента  $x$ . Для  $\Phi_2$  находим

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \pi \cdot x(2R - x) \rho g (2R - x) + \rho g \frac{\pi x^2}{3} (3R - x) = \\ &= \frac{\pi \rho g x}{3} \left[ 3(2R - x)^2 + x(3R - x) \right] = \frac{\pi \rho g x}{3} (12R^2 - 9Rx + 2x^2). \end{aligned}$$

Далее

$$N_1 = \frac{\Phi_2}{2\pi R_2 \sin^2 \theta_2} = \frac{\pi \rho g x}{3} (12R^2 - 9Rx + 2x^2) \frac{R^2}{2\pi R \cdot x(2R - x)},$$

откуда

$$N_1 = \frac{\rho g R}{6} \frac{12R^2 - 9Rx + 2x^2}{2R - x}.$$

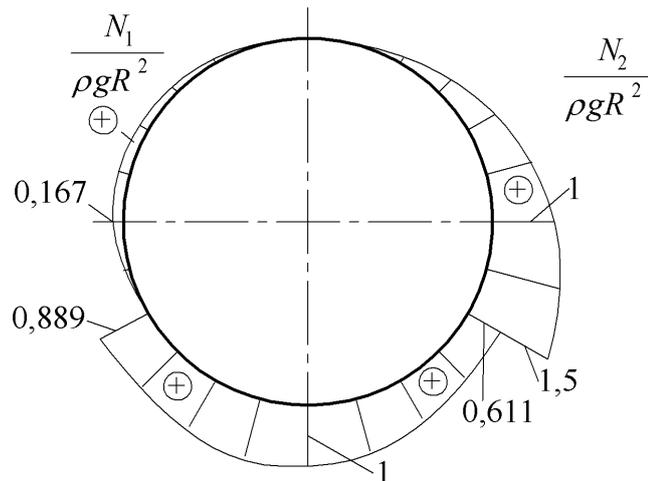
Из уравнения Лапласа имеем, наконец,

$$\begin{aligned} N_2 &= pR - N_1 = \rho g (2R - x)R - \frac{\rho g R}{6} \frac{12R^2 - 9Rx + 2x^2}{2R - x} = \\ &= \frac{\rho g R}{6} \frac{6(2R - x)^2 - (12R^2 - 9Rx + 2x^2)}{2R - x}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим выражение

$$N_2 = \frac{\rho g R}{6} \frac{12R^2 - 15Rx + 4x^2}{2R - x}.$$

Характер изменения  $N_1$  и  $N_2$  вдоль меридиана показан на рисунке 7.20 для случая, когда опорная окружность находится на расстоянии  $R/2$  от нижней точки бака.



**Рисунок 7.20 – Характер изменения погонных сил вдоль меридиана для сферического бака с жидкостью**

Пример 2. Тонкостенный конический сосуд погружён в жидкость так, что его вершина находится на глубине  $H$  от поверхности жидкости (рисунок 7.21). Найти максимальные напряжения, если угол полураствора конуса равен  $\beta$ , а толщина стенки равна  $\delta$ .

Для произвольной точки  $M$  срединной поверхности, отстоящей от вершины на расстоянии  $x$  вдоль оси, радиус параллельной окружности

$$r = x \operatorname{tg} \beta,$$

а второй главный радиус кривизны

$$R_2 = \frac{r}{\cos \beta} = x \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta}.$$

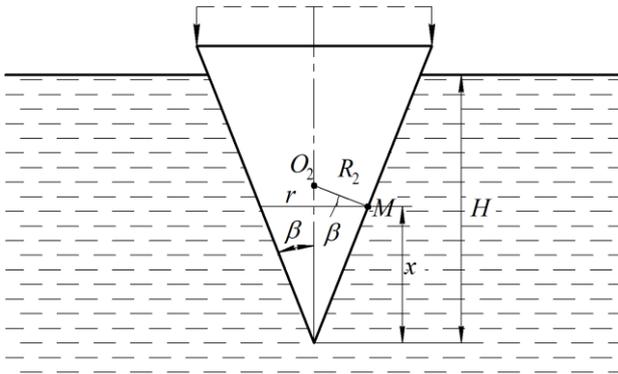


Рисунок 7.21 – Конический сосуд, погружённый в жидкость

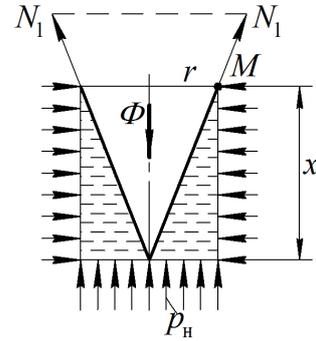


Рисунок 7.22 – Равновесие зоны оболочки

Нормальное давление в точке  $M$  :

$$p_n = -\rho g(H - x),$$

где  $\rho$  – плотность жидкости; знак минус поставлен потому, что давление действует против положительного направления нормали.

Отсечённая часть оболочки вместе с присоединённым к ней объёмом жидкости показана на рисунке 7.22. Давление на боковую поверхность жидкости не даёт проекции на ось оболочки. Пренебрегая силой тяжести самой оболочки, результирующую внешних сил, действующих на отсечённую часть, найдём как разность:

$$\Phi = \rho g V - \pi r^2 p_n.$$

Здесь первое слагаемое есть сила тяжести присоединённой жидкости, а второе – результирующая давления

$$p_n = \rho g H,$$

действующего на нижнюю поверхность этой жидкости.

Объём жидкости  $V$  равен разности объёмов цилиндра и конуса высотой  $x$  и с основанием радиуса  $r$  :

$$V = \pi r^2 x - \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{2}{3} \pi r^2 x = \frac{2}{3} \pi x^3 \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Следовательно

$$\Phi = \rho g \frac{2}{3} \pi x^3 \operatorname{tg}^2 \beta - \pi (x \operatorname{tg} \beta)^2 \rho g H = -\pi \rho g x^2 \left( H - \frac{2}{3} x \right) \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Так как  $\sin \theta = \cos \beta$ , для меридиональной силы получаем

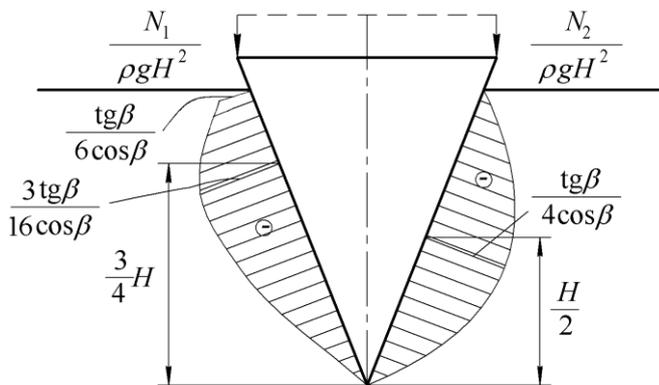
$$N_1 = \frac{\Phi}{2\pi R_2 \sin^2 \theta} = -\pi \rho g x^2 \left( H - \frac{2}{3}x \right) \operatorname{tg}^2 \beta \frac{\cos \beta}{2\pi x \operatorname{tg} \beta \cos^2 \beta} =$$

$$= -\frac{\rho g x}{2} \left( H - \frac{2}{3}x \right) \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta}.$$

Учитывая, что для конической оболочки  $R_1 = \infty$ , из уравнения Лапласа находим

$$N_2 = p_n R_2 = -\rho g (H - x)x \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta}.$$

Знаки минус показывают, что оба усилия будут сжимающими. Их распределение по длине погруженной в воду части образующей дано на рисунке 7.23.



**Рисунок 7.23 – Распределение сил для конической оболочки, погружённой в жидкость**

Максимальные по абсолютной величине меридиональное и окружное напряжения равны

$$|\sigma_{11}|_{\max} = \frac{3\rho g H^2 \operatorname{tg} \beta}{16 \delta \cos \beta};$$

$$|\sigma_{22}|_{\max} = \frac{\rho g H^2 \operatorname{tg} \beta}{4 \delta \cos \beta}.$$

Первое из них возникает на глубине  $H/4$ , а второе – на глубине  $H/2$ .

## 8 ИЗГИБ ПЛАСТИН

### 8.1 Основные определения

Пластиной называется цилиндрическое (или призматическое) тело, высота  $h$  которого, называемая толщиной пластины, мала по сравнению с размерами основания (рисунок 8.1). Плоскость, которая делит толщину пополам, называется срединной. С ней будем совмещать координатную плоскость  $xу$ .

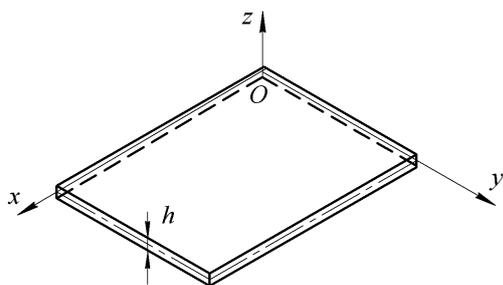


Рисунок 8.1 – Система координат для пластины

Пластина может работать в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния под действием нагрузок, прикладываемых к боковой поверхности параллельно основаниям. Задачи такого рода являются предметом рассмотрения в теории упругости. Здесь речь пойдёт о действии на пластину поперечных нагрузок, вызывающих её изгиб.

Техническая теория изгиба пластин основывается на гипотезах Кирхгофа. Согласно первой из них, называемой гипотезой прямых нормалей, принимается, что нормальные к срединной плоскости отрезки остаются прямолинейными и нормальными к деформированной срединной поверхности и сохраняют свою длину. Эта гипотеза аналогична гипотезе плоских сечений в теории изгиба балок.

Вторая гипотеза постулирует, что слои пластины, параллельные срединной плоскости, не оказывают давления друг на друга. Иначе говоря, нормальное напряжение  $\sigma_{zz}$  считается пренебрежимо малым по сравнению с другими компонентами. Это допущение аналогично гипотезе о ненадавливании волокон при изгибе балок.

Кроме указанных гипотез будем предполагать, что прогибы пластины  $w$  малы по сравнению с её толщиной  $\left( w_{\max} \leq \frac{1}{4}h \right)$ . В этом случае можно пренебречь деформацией срединной плоскости и считать, что её точки перемещаются при изгибе параллельно оси  $z$ . Принимая также, что материал пластины подчиняется закону Гука, можно построить достаточно простую линейную теорию изгиба пластин, используемую в инженерных расчётах.

Рассматриваемая здесь теория пригодна для не слишком толстых пластин, у которых толщина не превосходит  $1/5$  размера в плане. Для более тол-

стых пластин (называемых плитами) гипотезы Кирхгофа неприменимы. Их напряжённое состояние следует рассматривать как трёхмерное. В то же время данная теория неприменима и для слишком тонких (гибких) пластин. В этом случае прогибы могут оказаться соизмеримыми с толщиной, что требует учёта деформаций срединной плоскости. Определяющие зависимости оказываются в таком случае нелинейными, что существенно усложняет расчёт. Специфический подход требуется также при расчёте абсолютно гибких пластин (мембран), у которых прогиб может значительно превосходить толщину. В этом случае поперечная нагрузка уравнивается главным образом за счёт растягивающих напряжений, действующих в срединной плоскости и практически постоянных по толщине.

## 8.2 Перемещения, деформации и напряжения при изгибе пластины

На рисунке 8.2 показана схема деформирования сечения пластины плоскостью  $y = \text{const}$  (в сильно преувеличенном масштабе).

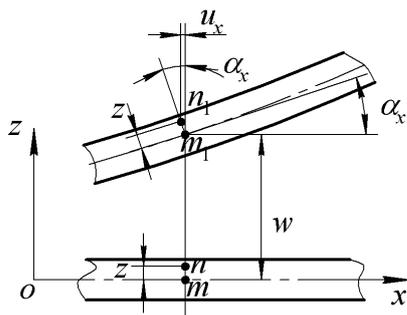


Рисунок 8.2 – Перемещения в сечении  $y = \text{const}$

В соответствии с принятыми допущениями точка  $m$ , лежащая в срединной плоскости, получает перемещение  $w$  в направлении оси  $z$ . Точка  $n$ , находящаяся на расстоянии  $z$  от точки  $m$ , перемещается в положение  $n_1$ , оставаясь на нормали к деформированной срединной поверхности на том же расстоянии  $z$  от неё.

Угол поворота  $\alpha_x$  нормального отрезка в плоскости  $xz$  равен углу поворота касательной

к срединной плоскости в сечении. Очевидно, что

$$\text{tg } \alpha_x = \frac{\partial w}{\partial x},$$

а при малых перемещениях  $w$  можно принять

$$\alpha_x \approx \text{tg } \alpha_x = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Это соотношение позволяет для перемещения  $u_x$  произвольной точки  $n$  получить выражение

$$u_x = -z \sin \alpha_x \approx -z \alpha_x \approx -z \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Знак минус здесь поставлен потому, что при положительной координате  $z$  и при положительной производной  $\frac{\partial w}{\partial x}$  (когда  $w$  возрастает в положительном направлении оси  $x$ ) точка  $n$  перемещается в отрицательном направлении оси  $x$ , как это видно из рисунка 8.2.

Рассмотрев подобным же образом сечение  $x = \text{const}$  и записав аналогичное выражение для  $u_y$ , приходим к соотношениям, выражающим перемещения  $u_x$  и  $u_y$  через функцию  $w(x, y)$ :

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (8.1)$$

Проекция отрезка  $m_1 n_1$  на ось  $z$  равна  $z \cos \alpha_x \approx z$ , так как  $\cos \alpha_x \approx 1$  из-за малости угла  $\alpha_x$ . Следовательно, можно принять

$$u_z = w(x, y), \quad (8.2)$$

то есть перемещение  $u_z$  можно считать постоянным по толщине пластины.

Функцию  $w(x, y)$  будем называть прогибом пластины. К отысканию этой функции сводится расчёт пластины на изгиб. Через неё могут быть выражены основные величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние пластины. Так, воспользовавшись формулами Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}; & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}; & \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \end{aligned}$$

найдем деформации слоёв, параллельных срединной плоскости:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8.3)$$

Остальные деформации оказываются нулевыми:

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0; \quad \varepsilon_{zz} = 0. \quad (8.4)$$

Первые два равенства (8.4) являются следствием предположения о том, что нормальный отрезок остаётся нормальным к деформированной срединной поверхности. Последнее равенство (8.4) есть следствие гипотезы о неизменности длины нормального отрезка. Воспользовавшись далее законом Гука, выразим напряжения через прогиб. Как говорилось ранее, в теории изгиба пластин принимается, что

$$\sigma_{zz} = 0. \quad (8.5)$$

Вследствие этого слои пластины, параллельные срединной плоскости, оказываются в условиях плоского напряжённого состояния и закон Гука для них будет иметь вид

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}); \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx});$$

$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\varepsilon_{xy},$$

где  $E$ ,  $\mu$  – нормальный модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $G$  – модуль сдвига. Подставив в эти соотношения выражения (8.3), получим:

$$\sigma_{xx} = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8.6)$$

Помимо напряжений в слоях в пластине возникают также поперечные касательные напряжения  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$ . Их, однако, нельзя найти с помощью закона Гука, так как согласно соотношениям

$$\sigma_{xz} = G\varepsilon_{xz}; \quad \sigma_{yz} = G\varepsilon_{yz}$$

они формально должны быть нулевыми в силу равенств (8.4). Но равенства  $\varepsilon_{xz} = 0$ ,  $\varepsilon_{yz} = 0$ , вытекающие из гипотезы прямых нормалей, не следует понимать буквально. Они должны трактоваться в том смысле, что деформации поперечного сдвига  $\varepsilon_{xz}$  и  $\varepsilon_{yz}$  малы по сравнению с деформациями слоёв пластины и ими можно пренебречь, отождествляя углы поворота нормального отрезка с углами наклона касательных к деформированной срединной поверхности. Как будет показано ниже, напряжения  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  и их результирующие по толщине пластины могут быть найдены из уравнений равновесия.

### 8.3 Погонные силы и моменты.

#### Дифференциальное уравнение изгиба пластины

Как видно из выражений (8.6), нормальные и касательные напряжения в слоях пластины изменяются по толщине по линейному закону. Перейдём теперь от напряжений к их результирующим по толщине, чем завершим сведение трёхмерной задачи изгиба пластины к двумерной.

В качестве результирующих в теории изгиба пластин выступают погонные силы и моменты, то есть силы и моменты, приходящиеся на единицу длины сечения. Рассмотрим, например, нормальную силу, создаваемую напряжением  $\sigma_{xx}$  в площадке с размерами  $h$  и  $dy$  (рисунок 8.3). Обозначая эту бесконечно малую силу через  $dP_x$ , запишем

$$dP_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dy dz.$$

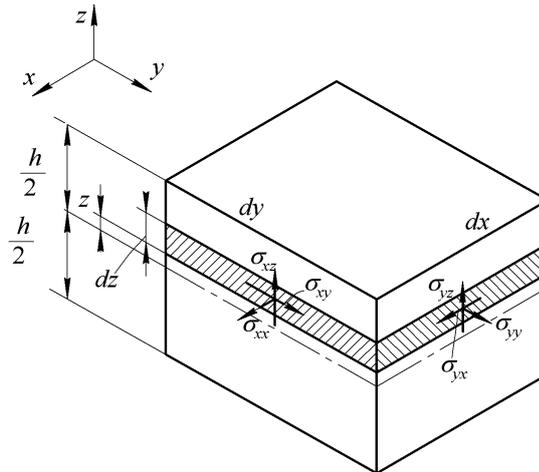


Рисунок 8.3 – Напряжения в сечениях пластины

Разделив  $dP_x$  на  $dy$ , получим погонную нормальную силу  $N_x$ , приходящуюся на единицу длины сечения  $x = \text{const}$ :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz.$$

Таким образом, погонные нормальные и касательные силы в сечениях пластины определим по формулам:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz; \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz; \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz. \quad (8.7)$$

Подобным же образом вводятся погонные изгибающие моменты

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz, \quad (8.8)$$

погонные крутящие моменты

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz, \quad (8.9)$$

а также погонные перерезывающие силы

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz; \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz. \quad (8.10)$$

Выразим далее погонные силы и моменты через прогиб. Подставим первое из соотношений (8.6) в формулу для  $N_x$ :

$$N_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0.$$

Аналогично устанавливаем, что

$$N_y = N_{xy} = 0.$$

Подстановка (8.6) в выражение для  $M_x$  приводит к равенству

$$M_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz.$$

Входящий сюда интеграл имеет значение

$$\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}.$$

Точно так же выразим  $M_y$  и  $M_{xy}$  через  $w$ . В итоге будем иметь соотношения:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Здесь через

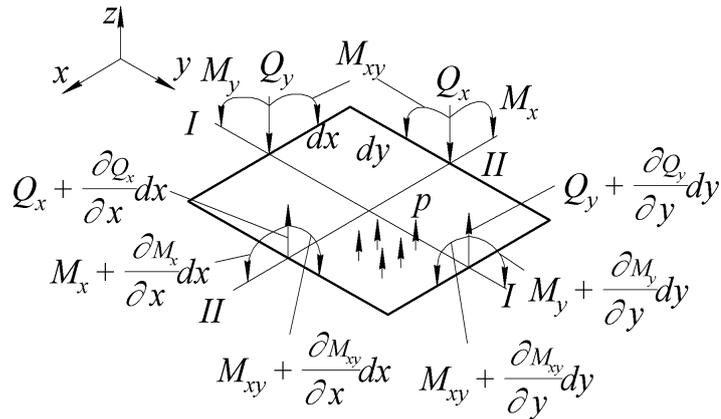
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (8.12)$$

обозначена величина, называемая *изгибной жёсткостью пластины*.

Подобные выражения для  $Q_x$  и  $Q_y$  не могут быть получены из формул (8.10), поскольку не установлена связь  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$  с прогибом. Необходимые соотношения, как уже говорилось, найдём с помощью уравнений равновесия.

На рисунке (8.4) показан элемент срединной плоскости с размерами  $dx$  и  $dy$ , к которому приложены внутренние силы и моменты. Внешнюю поперечную нагрузку  $p(x, y)$  также будем прикладывать к срединной плоскости.

Положительные моменты, показанные на рисунке 8.4, определяются как такие моменты, которые создаются положительными напряжениями, приложенными на положительном расстоянии  $z$  от срединной плоскости (см. рисунок 8.3). Положительные силы  $Q_x$  и  $Q_y$  имеют направления, совпадающие с положительными направлениями напряжений  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$  соответственно.



**Рисунок 8.4 – Схема действия сил на бесконечно малый элемент пластины**

Условие равновесия выделенного элемента в направлении оси  $z$  :

$$\left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx + p dx dy = 0.$$

После приведения подобных членов и сокращения на  $dx dy$  приходим к уравнению

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0. \quad (8.13)$$

Составим далее условие равновесия моментов относительно оси  $I - I$  :

$$\begin{aligned} & \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy + \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} dx - \\ & - \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} - Q_x dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

Приведя подобные члены и отбросив слагаемое  $\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy \frac{dx}{2}$  как бесконечно малую величину третьего порядка, после сокращения на  $dx dy$  придём к соотношению

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (8.14)$$

Аналогичное равенство

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (8.15)$$

вытекает из условия равновесия моментов относительно оси  $II - II$ .

Подставим в выражение для  $Q_x$  формулы (8.11):

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D(1-\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \\ &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение будем иметь и для  $Q_y$ . Таким образом, устанавливаем связь перерезывающих сил с прогибом, которую будем кратко записывать в виде

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \quad (8.16)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

– двумерный оператор Лапласа.

Для получения разрешающего уравнения подставим (8.16) в условие равновесия (8.13):

$$-D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 w - D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 w + p = 0.$$

Отсюда приходим к искомому уравнению изгиба, называемому уравнением Софи Жермен:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p. \quad (8.17)$$

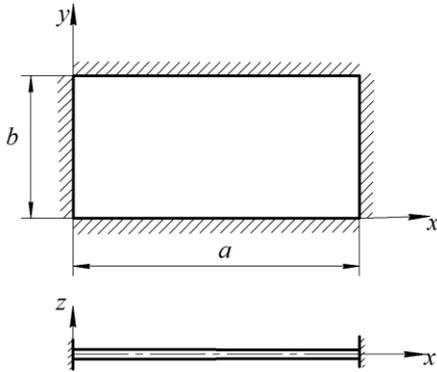
В развёрнутой записи уравнение (8.17) имеет вид

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y). \quad (8.18)$$

Таким образом, расчёт пластины на изгиб сводится к отысканию функции  $w(x, y)$ , которая должна удовлетворять дифференциальному уравнению (8.18).

## 8.4 Граничные условия при изгибе пластин

Решение уравнения (8.18) необходимо подчинить граничным условиям, то есть условиям на контуре пластины, вытекающим из характера её закрепления. Старшие производные по каждой из переменных  $x$ ,  $y$ , содержащиеся в уравнении (8.18), имеют четвёртый порядок. Следовательно, на краях  $x = \text{const}$  или  $y = \text{const}$  необходимо сформулировать четыре граничных условия – по два условия на каждой из сторон. Из всего многообразия способов закрепления сторон остановимся на трёх наиболее простых вариантах.

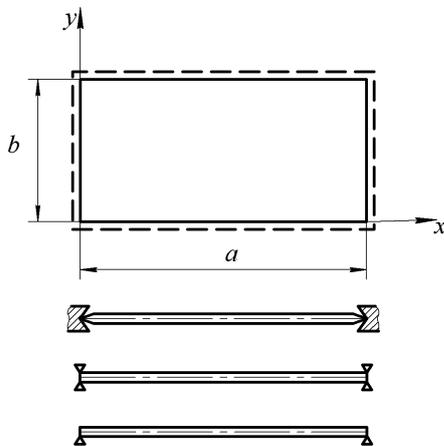


**Рисунок 8.5 – Жёсткая заделка сторон пластины**

Заметим, что на этой стороне  $x = \text{const}$  справедливо и равенство  $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ , но оно вытекает как следствие из первого условия и не может фигурировать в качестве независимого граничного условия.

Если жёстко заделана сторона пластины  $y = \text{const}$  ( $y = 0$  или  $y = b$ ), то на этой стороне должны удовлетворяться условия

$$1) w = 0; \quad 2) \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$



**Рисунок 8.6 – Свободное опирание сторон пластины**

1. Жёсткая заделка (рисунок 8.5). Если сторона  $x = \text{const}$  ( $x = 0$  или  $x = a$ ) жёстко заделана, то на этой стороне должны обращаться в нуль прогиб  $w$  и наклон срединной поверхности в плоскости  $xz$ . Следовательно, для такого края граничные условия сводятся к требованию выполнения равенств

$$1) w = 0; \quad 2) \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

2. Свободное (или шарнирное) опирание. При свободном опирании стороны прогиб в каждой её точке невозможен, но наклон пластины в плоскости, перпендикулярной к этой стороне, ничем не стеснён. На виде пластины в плане будем свободно опёртый край отмечать штриховой линией, как показано на рисунке 8.6. При виде сбоку используются разные варианты изображения свободного опирания; три из них представлены на рисунке 8.6.

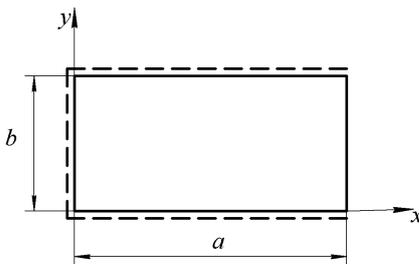
Если сторона  $x = \text{const}$  свободно опёрта, то в каждой её точке  $w = 0$ . Кроме того, на этой стороне должен обращаться в нуль изгибающий момент  $M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ . Но так как  $w = 0$  на всей стороне, это автоматически

влечёт за собой равенство нулю производной  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ . Таким образом, для свободно опёртой стороны граничные условия могут быть сформулированы в виде требований:

$$1) w = 0; \quad 2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Аналогично для свободно опёртой стороны  $y = \text{const}$  должны выполняться условия:

$$1) w = 0; \quad 2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$



**Рисунок 8.7 – Свободная сторона  $x = a$**

**3. Свободный край.** На рисунке 8.7 изображён случай, когда край  $x = a$  свободен от каких-либо закреплений. На таком крае напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{xz}$  равны нулю, и из формул (8.8)...(8.10) следует, что должны обращаться в нуль  $M_x$ ,  $M_{xy}$  и  $Q_x$ . Таким образом, здесь появляются три условия вместо необходимых двух.

Удовлетворить всем трём условиям невозможно, но оказывается, что два из них можно объединить и заменить одним.

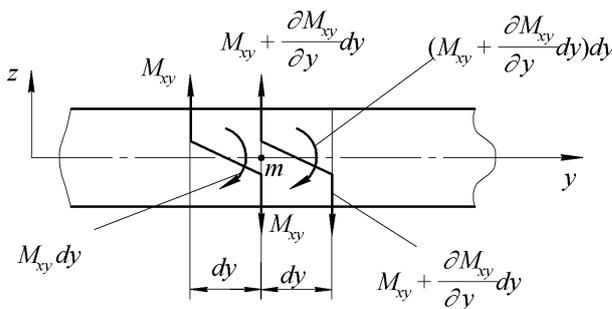
Рассмотрим край  $x = a$  и предположим, что по этому краю действуют перерезывающая сила  $Q_x$  и крутящий момент  $M_{xy}$ . Возьмём участок края размером  $dy$  слева от произвольной точки  $m$  (рисунок 8.8). В пределах выделенной площадки действует крутящий момент  $M_{xy} dy$ . Представим его в виде пары сил, каждая из которых имеет величину  $M_{xy}$ ; плечо пары равно  $dy$ . Подобным же образом представим крутящий момент

$$\left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dy, \text{ действующий в площадке длиной } dy \text{ справа от точки } m.$$

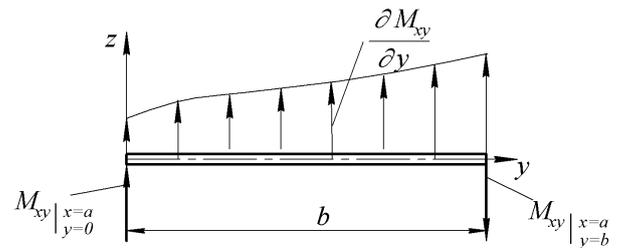
В точке  $m$  будут действовать две противоположно направленные силы; их разность равна  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$ . Разделив её на  $dy$ , получим погонную силу ин-

тенсивности  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$  (рисунок 8.9). Эту нагрузку можно в каждой точке края объединить с погонной перерезывающей силой  $Q_x$ , что даёт приведённую величину

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (8.19)$$



**Рисунок 8.8 – Замена крутящих моментов парама сил**



**Рисунок 8.9 – Поперечная нагрузка, эквивалентная крутящим моментам**

С учётом этого граничные условия для свободного ненагруженного края  $x = \text{const}$  следует записать так:

$$1) M_x = 0; \quad 2) Q_x^* = 0.$$

Заметим, что при замене крутящего момента поперечной нагрузкой в угловых точках появляются ещё и сосредоточенные силы, численно равные значениям крутящего момента в этих угловых точках (см. рисунок 8.9).

Аналогично для свободного края  $y = \text{const}$  необходимо потребовать выполнения условий:

$$1) M_y = 0; \quad 2) Q_y^* = 0,$$

где

$$Q_y^* = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (8.20)$$

Величины  $Q_x^*$  и  $Q_y^*$  называются *обобщёнными перерезывающими силами в смысле Кирхгофа*.

### 8.5 Расчёт напряжений при изгибе пластин

Если найдена функция  $w(x, y)$ , описывающая прогиб пластины, то по формулам (8.11) могут быть вычислены изгибающие и крутящий моменты, а по формулам (8.16) – перерезывающие силы. Напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  определяются соотношениями (8.6). Вместо них можно получить более

удобные расчётные формулы. Из первого соотношения (8.11) следует, например, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_x}{D}.$$

Подставим это выражение в формулу для  $\sigma_{xx}$  и учтём зависимость (8.12). Таким путём приходим к равенствам

$$\sigma_{xx} = \frac{12M_x}{h^3} z; \quad \sigma_{yy} = \frac{12M_y}{h^3} z; \quad \sigma_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z. \quad (8.21)$$

Наибольшие по абсолютной величине значения этих напряжений возникают при  $z = \pm \frac{h}{2}$ . Полагая в (8.21)  $z = \pm \frac{h}{2}$ , получим расчётные формулы для наибольших напряжений:

$$\sigma_{xx} = \pm \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_{yy} = \pm \frac{6M_y}{h^2}; \quad \sigma_{xy} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^2}. \quad (8.22)$$

Остальные компоненты напряжений имеют второстепенное значение и их часто не принимают во внимание. Но в некоторых случаях (например, при расчёте слоистых пластин) их также следует учитывать. Найти их можно с помощью дифференциальных уравнений равновесия теории упругости, которые при отсутствии объёмных сил имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Подстановка в первое из уравнений соотношений (8.21) приводит к равенству

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = -\frac{12z}{h^3} \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right).$$

На основании (8.14) выражение в скобках равно  $Q_x$ . Интегрируя полученное равенство, находим

$$\sigma_{zx} = -\frac{6z^2}{h^3} Q_x + f(x, y),$$

где  $f(x, y)$  – произвольная функция координат  $x, y$ . Для её определения необходимо воспользоваться условием равенства нулю  $\sigma_{xz}$  при  $z = \pm \frac{h}{2}$ . Таким путём приходим к выражениям для  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$ :

$$\sigma_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right); \quad \sigma_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right). \quad (8.24)$$

Наибольшие значения этих напряжений, возникающие при  $z = 0$ , равны:

$$\sigma_{xz} = \frac{3Q_x}{2h}; \quad \sigma_{yz} = \frac{3Q_y}{2h}. \quad (8.25)$$

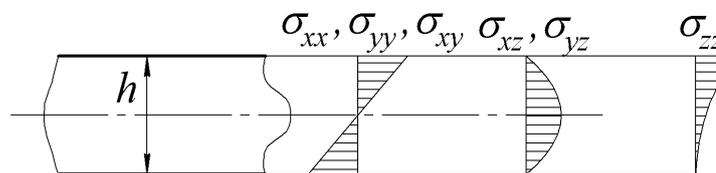
Третье уравнение (8.23) позволяет найти также и нормальное напряжение  $\sigma_{zz}$ . С учётом (8.24) и (8.13) имеем

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{3p}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right).$$

Интегрирование этого выражения с использованием условий на поверхностях  $z = \frac{h}{2}$  или  $z = -\frac{h}{2}$  приводит к искомой зависимости. Если, например, нагрузка  $p$  приложена к поверхности  $z = \frac{h}{2}$ , то эта зависимость имеет вид

$$\sigma_{zz} = \frac{p}{2} \left( 1 + 3\frac{z}{h} - 4\frac{z^3}{h^3} \right). \quad (8.26)$$

Характер изменения напряжений по толщине пластины показан на рисунке (8.10).

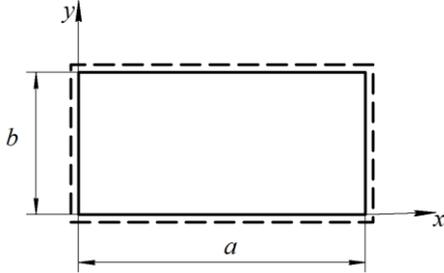


**Рисунок 8.10 – Распределение напряжений по толщине пластины**

## 8.6 Расчёт на изгиб прямоугольной пластины, свободно опёртой по всем сторонам

Рассмотрим изгиб прямоугольной пластины со сторонами  $a$  и  $b$  под действием произвольной поперечной нагрузки  $p(x, y)$ . Сравнительно про-

стое аналитическое решение удаётся получить в том случае, когда пластина имеет свободное опирание по всем четырём сторонам (рисунок 8.11). Искомая функция  $w(x, y)$  должна удовлетворять следующим граничным условиям:



$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и при } x = a;$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и при } y = b.$$

**Рисунок 8.11 – Прямоугольная пластина, свободно опёртая по всем сторонам**

Выражение для  $w(x, y)$  будем искать в виде двойного тригонометрического ряда

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (8.27)$$

где  $A_{mn}$  – подлежащие отысканию коэффициенты.

Каждый член ряда (8.27) удовлетворяет всем граничным условиям. В самом деле, при  $x = a$ , например,

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0;$$

точно так же эта функция равна нулю при  $x = 0$ . После двукратного дифференцирования по  $x$  каждый член ряда снова будет содержать множитель  $\sin \frac{m\pi x}{a}$ , так что и  $\partial^2 w / \partial x^2$  обратится в нуль при  $x = 0$  и при  $x = a$ . То же самое относится и к сторонам пластины  $y = 0$  и  $y = b$ . Следовательно независимо от значений коэффициентов  $A_{mn}$  выражение (8.27) удовлетворяет граничным условиям. Остаётся определить эти коэффициенты таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение изгиба

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y).$$

Если внести в него выражение (8.27) для  $w$ , то получим равенство

$$D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = p(x, y).$$

Представим его в более компактном виде:

$$\frac{\pi^4 D}{a^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (m^2 + \gamma^2 n^2)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = p(x, y). \quad (8.28)$$

Здесь  $\gamma = a/b$  – отношение сторон пластины. Чтобы можно было осуществить равенство (8.28), разложим заданную функцию  $p(x, y)$  также в двойной тригонометрический ряд. Как известно, функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $[0, a]$ , можно представить тригонометрическим рядом

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{a},$$

где коэффициенты  $a_m$  определяются по формуле Фурье

$$a_m = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx.$$

Аналогично для функции  $p(x, y)$  двух переменных, заданной в области  $0 \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq b$ , имеет место представление

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (8.29)$$

где коэффициенты  $B_{mn}$  вычисляются по формуле

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy dx. \quad (8.30)$$

Подставив разложение (8.29) в уравнение (8.28) и приравняв коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, найдём искомые коэффициенты  $A_{mn}$ :

$$A_{mn} = \frac{a^4 B_{mn}}{\pi^4 D (m^2 + \gamma^2 n^2)^2}. \quad (8.31)$$

Остановимся на частном случае, когда действующая на пластину нагрузка постоянна:

$$p(x, y) = \text{const}.$$

Тогда

$$B_{mn} = \frac{4p}{ab} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy.$$

Но

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{m\pi} \left( -\cos \frac{m\pi x}{a} \right) \Big|_0^a = \frac{a}{m\pi} (1 - \cos m\pi) = \begin{cases} \frac{2a}{m\pi} & \text{для } m = 1, 3, \dots \\ 0 & \text{для } m = 2, 4, \dots \end{cases}$$

Аналогично

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi x}{b} dx = \begin{cases} \frac{2b}{n\pi} & \text{для } n = 1, 3, \dots \\ 0 & \text{для } n = 2, 4, \dots \end{cases}.$$

Таким образом, для нечётных  $m$  и  $n$  имеем

$$B_{mn} = \frac{16p}{\pi^2 mn};$$

если же хотя бы один из индексов  $m$  или  $n$  чётный, то  $B_{mn} = 0$ .

Согласно (8.31) имеем теперь для нечётных  $m, n$

$$A_{mn} = \frac{16pa^4}{\pi^6 Dmn(m^2 + \gamma^2 n^2)^2}. \quad (8.32)$$

В соответствии с (8.27) в случае действия постоянной нагрузки получаем выражение для  $w(x, y)$  в виде

$$w(x, y) = \frac{16pa^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn(m^2 + \gamma^2 n^2)^2}. \quad (8.33)$$

Отсюда вытекают следующие соотношения для изгибающих и крутящего моментов:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{16pa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m^2 + \mu\gamma^2 n^2}{mn(m^2 + \gamma^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ M_y &= \frac{16pa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu m^2 + \gamma^2 n^2}{mn(m^2 + \gamma^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ M_{xy} &= -\frac{16(1-\mu)pa^2\gamma}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + \gamma^2 n^2)^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Полученные ряды имеют хорошую сходимость. Найдём, например, максимальный прогиб, который возникает в центре пластины, то есть при  $x = \frac{a}{2}$ ;  $y = \frac{b}{2}$ :

$$w_{\max} = \frac{16pa^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{mn(m^2 + \gamma^2 n^2)^2}.$$

В случае квадратной пластины, когда  $\gamma = 1$ , будем иметь, в частности,

$$w_{\max} = -\frac{16pa^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{mn(m^2 + n^2)^2} =$$

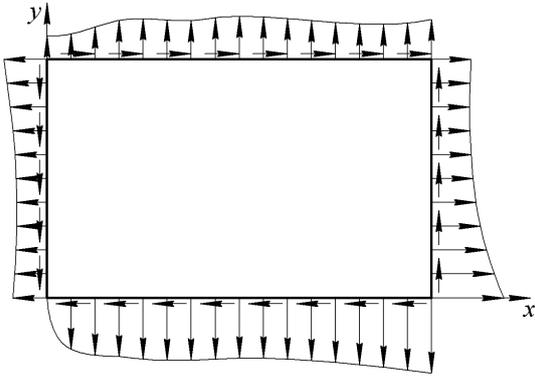
$$\begin{aligned}
&= \frac{16pa^4}{\pi^6 D} \left[ \frac{1}{1 \cdot 1(1^2 + 1^2)^2} - \frac{1}{1 \cdot 3(1^2 + 3^2)^2} - \frac{1}{3 \cdot 1(3^2 + 1^2)^2} + \frac{1}{3 \cdot 3(3^2 + 3^2)^2} + \dots \right] = \\
&= \frac{16pa^4}{\pi^6 D} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{300} - \frac{1}{300} + \frac{1}{2916} + \dots \right) = 0,00406 \frac{pa^4}{D}.
\end{aligned}$$

Даже удержание одного только первого члена бесконечной суммы даёт результат с погрешностью менее 3%. Ряды для моментов сходятся несколько хуже.

## 9 УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН

### 9.1 Дифференциальное уравнение устойчивости пластины

В курсе сопротивления материалов рассматривается задача об устойчивости сжатого стержня. Стержень сохраняет прямолинейную форму лишь до определённого значения осевой сжимающей силы. При достижении силой этого критического значения прямолинейная форма равновесия оказывается неустойчивой. Происходит самопроизвольный переход к изогнутой форме равновесия стержня. Аналогичная ситуация может иметь место и в случае пластины, нагруженной в своей плоскости. При достижении нагрузки критического значения происходит потеря устойчивости (“выпучивание”) пластины и равновесие сохраняется уже в изогнутом состоянии. Выведем дифференциальное уравнение, описывающее равновесие пластины в выпученном состоянии.



**Рисунок 9.1 – Пластина, нагруженная в своей плоскости**

Рассмотрим прямоугольную пластину, закреплённую некоторым образом по контуру и нагруженную в своей плоскости (рисунок 9.1). Пластина находится в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния, которое мы назовём начальным. Возникающие в ней напряжения

$$\sigma_{xx}^0(x, y), \quad \sigma_{yy}^0(x, y), \quad \sigma_{xy}^0(x, y)$$

определяются методами плоской задачи теории упругости и мы будем считать их известными. Вместо напряжений удобнее оперировать погонными силами

$$N_x(x, y) = h\sigma_{xx}^0, \quad N_y(x, y) = h\sigma_{yy}^0, \quad N_{xy}(x, y) = h\sigma_{xy}^0,$$

где  $h$  – толщина пластины.

Погонные силы удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия плоской задачи теории упругости (при нулевых объёмных силах)

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (9.1)$$

Помимо координат они зависят также от внешней нагрузки, имея множителем параметр, определяющий уровень нагружения.

Предположим далее, что наряду с начальным возможно равновесие пластины в изогнутом состоянии, которое характеризуется прогибом  $w(x, y)$ .

Изгиб пластины сопровождается появлением изгибающих и крутящего моментов, связанных с  $w$  соотношениями

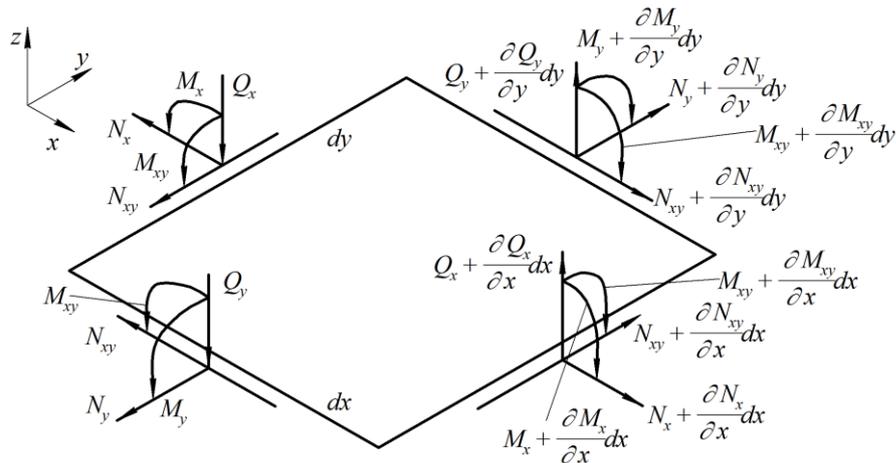
$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\
 M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\
 M_{xy} &= -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},
 \end{aligned}
 \tag{9.2}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}
 \tag{9.3}$$

– изгибная жёсткость пластины;  $E$ ,  $\mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Чтобы получить уравнение относительно  $w$ , воспользуемся условиями равновесия бесконечно малого элемента пластины с размерами  $dx$ ,  $dy$ , показанного на рисунке 9.2. Элемент с действующими на него силами и моментами изображён условно в недеформированном состоянии. Уравнения же равновесия должны быть записаны для деформированного состояния элемента, чтобы учесть проекции на ось  $z$  сил начального состояния. Это является характерной особенностью задач устойчивости.



**Рисунок 9.2 – Силы и моменты в сечениях пластины в изогнутом состоянии**

Как сама функция  $w(x, y)$ , так и её производные  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$  рассматриваются как сколь угодно малые величины. Вследствие этого косинусы углов наклона изогнутой поверхности к плоскости  $xu$  следует считать равными единице, а синусы и тангенсы – равными самим углам. Кроме того, по этой причине силы в срединной плоскости  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  сохраняют при выпучивании те же значения, какие они имеют в начальном состоянии.

Условие равновесия элемента в проекции на ось  $z$  представим в виде

$$Z_Q + Z_{N_x} + Z_{N_y} + Z_{N_{xy}} = 0,$$

где  $Z_Q$  – проекция перерезывающих сил, а  $Z_{N_x}$ ,  $Z_{N_y}$ ,  $Z_{N_{xy}}$  – проекции сил начального состояния. Ввиду малости углов поворота нормали к срединной поверхности следует принять, что перерезывающие силы проектируются на ось  $z$  в натуральную величину. Поэтому

$$\begin{aligned} Z_Q &= \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx = \\ &= \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

На рисунке 9.3 показан вид на деформированный элемент при взгляде вдоль оси  $y$ ; перерезывающие силы и изгибающие моменты условно не изображены. Величина  $Z_{N_x}$  равна

$$Z_{N_x} = \left( N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - N_x dy \frac{\partial w}{\partial x}.$$

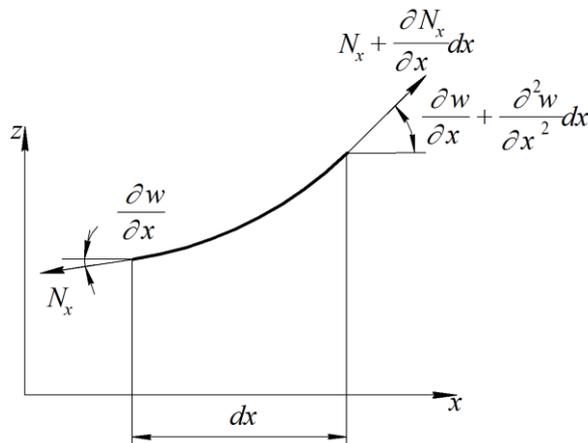


Рисунок 9.3 – К вычислению  $Z_{N_x}$

Раскрыв скобки, после приведения подобных членов и отбрасывания бесконечно малой третьего порядка будем иметь

$$Z_{N_x} = \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy.$$

Аналогично получим

$$Z_{N_y} = \left( N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$

Найдём, наконец, проекции касательных сил на ось  $z$  (рисунок 9.4):

$$\begin{aligned} Z_{N_{xy}} = & \left( N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) - N_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} + \\ & + \left( N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) dx \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right) - N_{xy} dx \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

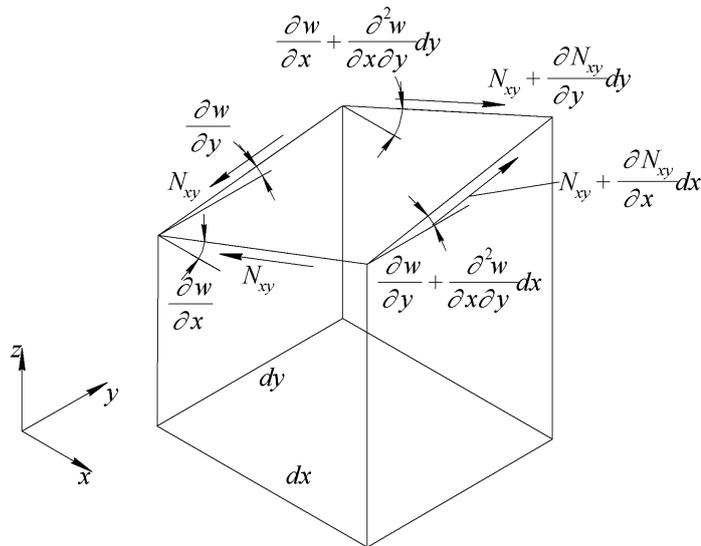


Рисунок 9.4 – К вычислению  $Z_{N_{xy}}$

Приведа подобные члены и отбросив малые высшего порядка, получим

$$Z_{N_{xy}} = \left( 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy.$$

Складывая отдельные составляющие, запишем теперь уравнение равновесия элемента в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ + \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Выражения в скобках равны нулю в силу соотношений (9.1). Таким образом, приходим к следующему равенству:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (9.4)$$

Что касается условий равновесия моментов, то нетрудно видеть, что они приводят к тем же равенствам, что и в случае поперечного изгиба пластины:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

С учётом (9.2) отсюда следуют соотношения

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w.$$

Их подстановка в равенство (9.4) позволяет прийти к дифференциальному уравнению устойчивости пластины

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9.5)$$

Как следует из этих рассуждений, расчёт пластины на устойчивость включает в себя два этапа. На первом этапе должен быть выполнен расчёт начального состояния путём решения плоской задачи теории упругости. Найденные функции  $N_x(x, y)$ ,  $N_y(x, y)$  и  $N_{xy}(x, y)$  подставляются в уравнение (9.5). Затем решается вопрос, при каких значениях внешней нагрузки уравнение (9.5) имеет нетривиальное решение. Тривиальное решение  $w = 0$  интереса не представляет, поскольку соответствует начальному состоянию. Наименьшее значение нагрузки, при котором существует нетривиальное решение уравнения (9.5), принимается в качестве критического.

## 9.2 Устойчивость прямоугольной пластины, свободно опёртой по всем сторонам, при одноосном сжатии

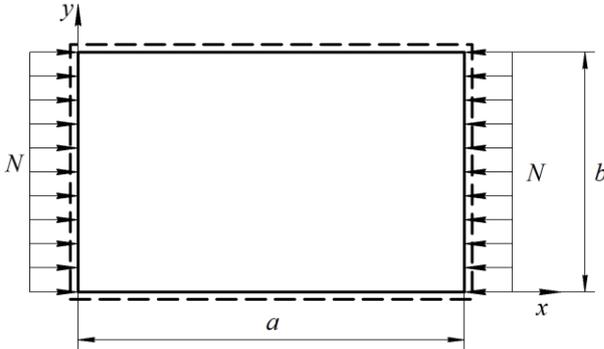
Проиллюстрируем расчёт критической нагрузки, испытывающей равномерное сжатие вдоль оси  $x$ , на примере прямоугольной пластины со сторонами  $a$  и  $b$  (рисунок 9.5). Интенсивность сжимающей нагрузки обозначим через  $N$ . Пластина имеет свободное опирание по каждой из четырёх сторон. Будем предполагать, что условия закрепления относятся лишь к поперечному перемещению и не препятствуют свободному перемещению точек контура в плоскости пластины.

Очевидно, что в данном случае в начальном состоянии

$$N_x = -N; \quad N_y = N_{xy} = 0,$$

и уравнение устойчивости (9.5) можно записать в виде

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (9.6)$$



**Рисунок 9.5 – Одноосное сжатие пластины**

Сюда необходимо присоединить граничные условия относительно прогиба:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a;$$

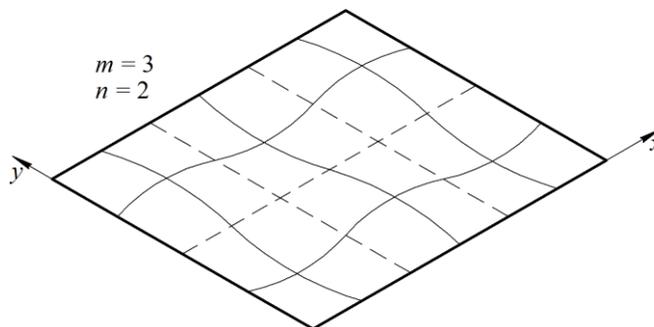
$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b.$$

Нетривиальное решение уравнения (9.6), удовлетворяющее всем

граничным условиям, будем искать в виде

$$w(x, y) = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (9.7)$$

где  $m$  и  $n$  – целые положительные числа;  $A$  – некоторая постоянная. Согласно (9.7) изогнутая поверхность пластины при потере устойчивости представляется в виде чередующихся в шахматном порядке вмятин и выпучин прямоугольной формы. При этом  $m$  есть число полуволин синусоиды (то есть число вмятин и выпучин) в продольном, а  $n$  – в поперечном направлениях. На рисунке 9.6 показан вид функции  $w(x, y)$  (которая называется формой потери устойчивости) в предположении, что  $m = 3$ ,  $n = 2$ .



**Рисунок 9.6 – Форма изогнутой пластины**

Подстановка выражения (9.7) в уравнение (9.6) позволяет прийти к равенству

$$A \left[ D \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right) - N \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях  $x$  и  $y$ . Поскольку  $A \neq 0$  (случай  $A = 0$  возвращает нас к тривиальному решению  $w = 0$ ), выражение в квадратных скобках необходимо приравнять нулю. Это условие позволяет найти те значения  $N$ , для которых возможно равновесие в изогнутом состоянии:

$$\begin{aligned} N &= D \frac{a^2}{m^2 \pi^2} \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right) = \\ &= D \frac{a^2}{m^2 \pi^2} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{\pi^2}{b^2} \left( \frac{m^2 b^2}{a^2} + 2n^2 + \frac{n^4 a^2}{m^2 b^2} \right). \end{aligned}$$

Обозначив через

$$\gamma = \frac{a}{b} \quad (9.8)$$

отношение сторон пластины, представим формулу для  $N$  в виде

$$N = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left( \frac{m}{\gamma} + n^2 \frac{\gamma}{m} \right)^2. \quad (9.9)$$

Полученное выражение даёт бесконечное множество значений  $N$ , соответствующих различным  $m$  и  $n$ . Критическая сила  $N_{\text{кр}}$  есть наименьшее из них. Выясним, при каких  $m$  и  $n$  выражение (9.9) принимает наименьшее значение. Во-первых, очевидно, что  $N$  тем меньше, чем меньше  $n$ , и наименьшее значение будет при  $n = 1$ . Это означает, что в поперечном направлении при потере устойчивости образуется одна полуволна независимо от соотношения сторон. С учётом этого приходим к следующей формуле для  $N_{\text{кр}}$ :

$$N_{\text{кр}} = k \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (9.10)$$

где величина  $k$ , называемая коэффициентом устойчивости, есть минимальное значение выражения

$$k = \left( \frac{m}{\gamma} + \frac{\gamma}{m} \right)^2, \quad (9.11)$$

зависящего от  $m$ . Параметр  $m$  может принимать только целые положительные значения, но мы найдём формально минимум функции (9.11), считая  $m$  непрерывным аргументом.

Перепишем выражение для  $k$  в виде

$$k = \frac{m^2}{\gamma^2} + 2 + \frac{\gamma^2}{m^2},$$

воспользуемся необходимым условием минимума функции:

$$\frac{dk}{dm} = \frac{2m}{\gamma^2} - \frac{2\gamma^2}{m^3} = 0.$$

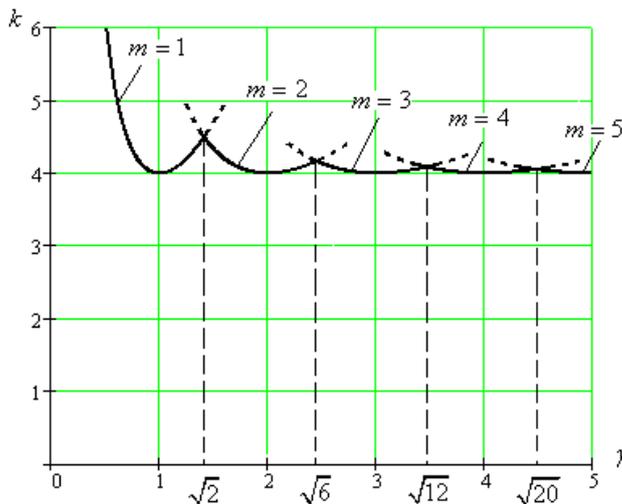
Отсюда находим

$$m = \gamma,$$

и минимальное значение  $k$  оказывается равным

$$k_{\min} = 4. \quad (9.12)$$

Этот результат требует уточнения в том случае, когда отношение сторон пластины  $\gamma$  не является целым числом. Построим зависимости коэффициента  $k$  от  $\gamma$  согласно (9.11), задаваясь различным числом полуволн  $m$  (рисунок 9.7).



**Рисунок 9.7 – Зависимость коэффициента устойчивости от отношения сторон**

Получается серия кривых, огибающая которых соответствует наименьшему значению  $k$ . Как видно из рисунка 9.7, в случае  $\gamma < \sqrt{2}$  в продольном направлении образуется одна полуволна, если  $\sqrt{2} < \gamma < \sqrt{6}$  – две полуволны и т.д. Когда отношение сторон составляет величину  $\gamma = \sqrt{m(m+1)}$ , где  $m$  – целое число, потеря устойчивости с равной вероятностью может происходить с образованием  $m$  или  $m+1$  полуволн в продольном направлении. Так как при  $\gamma > 1$  величина  $k$  мало отклоняется от значения  $k_{\min} = 4$ , на практике часто в случае удлинённой пластины ( $\gamma \geq 1$ ) принимают просто

$$k = 4, \quad (9.13)$$

что при нецелых  $\gamma$  идёт в запас прочности. Если же  $\gamma < 1$ , следует воспользоваться формулой (9.11), положив в ней  $m = 1$ :

$$k = \left( \frac{1}{\gamma} + \gamma \right)^2. \quad (9.14)$$

Для практических расчётов удобно от погонной критической силы  $N_{кр}$  перейти к критическому сжимающему напряжению  $\sigma_{кр} = N_{кр}/h$ . Учитывая выражение (9.3) для изгибной жёсткости  $D$ , будем иметь

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{h} k \frac{\pi^2}{b^2} \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} \frac{kE}{(b/h)^2}.$$

Если принять  $\mu = 0,3$ , то числовой коэффициент в этой формуле будет

$$\frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} \approx 0,9.$$

Тогда получим расчётную формулу вида

$$\sigma_{кр} = \frac{0,9kE}{(b/h)^2}. \quad (9.15)$$

Отметим в заключение, что значение коэффициента  $A$ , характеризующего величину прогиба согласно (9.7), осталось не определённым. Но для практических целей достаточно найти обычно величину критического напряжения и форму потери устойчивости, что достигается с помощью линеаризованных уравнений, как это изложено выше.

### 9.3 Влияние условий закрепления на устойчивость пластины при сжатии

Приведём без вывода значения критических напряжений прямоугольной пластины при равномерном одноосном сжатии для некоторых типичных случаев закрепления. Более обширные данные можно найти в справочниках по строительной механике.

Критическое напряжение в любом случае может быть вычислено по формуле (9.15):

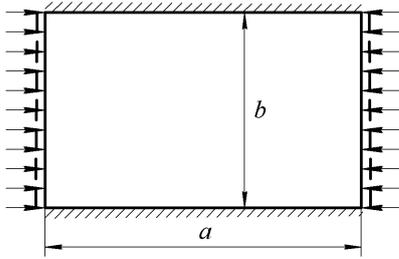
$$\sigma_{кр} = \frac{0,9kE}{(b/h)^2},$$

где  $b$  – поперечный размер, а коэффициент устойчивости  $k$  зависит от характера закрепления и отношения сторон пластины.

1. *Пластина свободно опёрта по нагруженным сторонам и жёстко закреплена по двум другим* (рисунок 9.8).

Минимальное значение коэффициента устойчивости

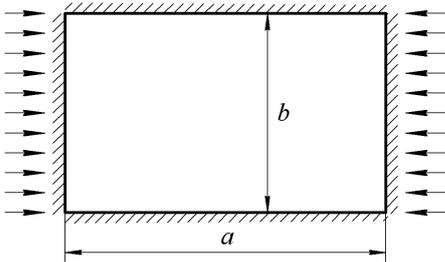
$$k_{\min} = 7,00$$



**Рисунок 9.8 – Пластина, жёстко зашумлённая по продольным сторонам**

имеет место, когда отношение сторон  $\gamma$  кратно 0,662. Для квадратной пластины  $k = 7,69$ . Для удлинённой пластины при  $\gamma > 2$  можно принимать  $k = 7$ . Таким образом, зашумление продольных сторон даёт увеличение критических напряжений приблизительно в 1,8 раза по сравнению со свободным опиранием.

*2. Пластина жёстко зашумлена по всем сторонам (рисунок 9.9).*



**Рисунок 9.9 – Пластина, жёстко зашумлённая по всем сторонам**

Для квадратной пластины ( $\gamma = 1$ )

$$k = 10,1.$$

Для удлинённой пластины при  $\gamma > 3$  можно принимать

$$k = 7.$$

Сопоставление с предыдущим случаем показывает, что для удлинённых пластин условия закрепления нагруженных сторон не оказывают существенного влияния на критические напряжения.

*3. Одна из продольных сторон пластины свободна, а другая жёстко зашумлена или свободно опёрта.*

Для пластины со свободным краем величина коэффициента устойчивости  $k$  в отличие от предыдущих случаев существенно зависит от коэффициента Пуассона  $\mu$ . Ниже представлены данные для  $\mu = 0,3$ .

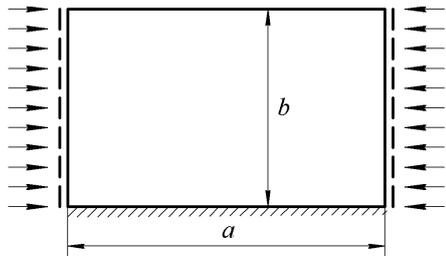
В схеме, показанной на рисунке 9.10, при  $\gamma > 1,5$  можно брать

$$k = 1,29.$$

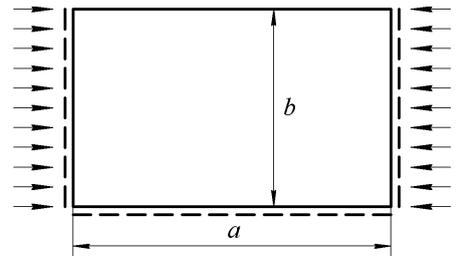
В случае закрепления по схеме рисунка 9.11 в продольном направлении образуется одна полуволна при любом отношении сторон. Коэффициент устойчивости определяется приближённой формулой

$$k = 0,425 + \frac{1}{\gamma^2}.$$

Заметим, что по схеме пластины со свободным краем производится расчёт на устойчивость полок сжатых стрингеров.



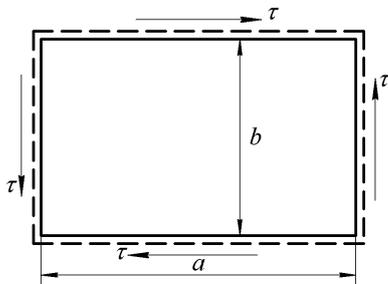
**Рисунок 9.10 – Пластина с жёстко защемлёнными и свободными продольными краями**



**Рисунок 9.11 – Пластина со свободной и свободно опёртой продольными сторонами**

#### 9.4 Устойчивость пластины при сдвиге и при комбинированном нагружении

Для пластины при сдвиге (рисунок 9.12) критическое значение касательного напряжения определяется формулой той же структуры, что и при сжатии:



**Рисунок 9.12 – Прямоугольная пластина при сдвиге**

$$\tau_{кр} = \frac{0,9kE}{(b/h)^2}.$$

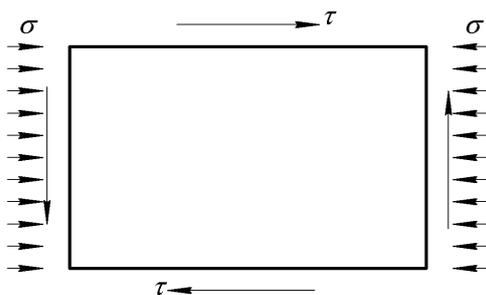
Но в этом случае в качестве  $b$  следует всегда брать размер меньшей стороны. Для свободно опёртой по всем сторонам пластины значение  $k$  определяется приближённой формулой

$$k = 5,34 + \frac{4}{\gamma^2},$$

где  $\gamma = \frac{a}{b} \geq 1$ . В частности, для квадратной пластины  $k = 9,34$ , а для полосы ( $\gamma \rightarrow \infty$ )  $k = 5,34$ .

Для пластины, жёстко защемлённой по всем сторонам,

$$k = 8,98 + \frac{5,6}{\gamma^2}.$$



**Рисунок 9.13 – Комбинированное нагружение пластины**

На практике встречаются случаи одновременного действия сжатия и сдвига (рисунок 9.13). Критическое сочетание напряжений сжатия и сдвига устанавливается приближённым равенством

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{0кр}} + \left( \frac{\tau_{кр}}{\tau_{0кр}} \right)^2 = 1,$$

где  $\sigma_{0кр}$  и  $\tau_{0кр}$  – критические нормальное и касательное напряжения при их раздельном действии.

## 9.5 Расчёт пластины на устойчивость за пределом пропорциональности

Формула

$$\sigma_{кр}^0 = \frac{0,9kE}{(b/h)^2} \quad (9.16)$$

даёт критическое напряжение в предположении о справедливости закона Гука. Предельное отношение  $b/h$ , характеризующее область применимости этой формулы, получится, если приравнять  $\sigma_{кр}^0$  к пределу пропорциональности материала  $\sigma_{пц}$ . Это приводит к выражению

$$\left(\frac{b}{h}\right)_0 = \sqrt{\frac{0,9kE}{\sigma_{пц}}}. \quad (9.17)$$

Например, для материала Д16 ( $E = 7,2 \cdot 10^4$  МПа;  $\sigma_{пц} = 190$  МПа) в случае одноосного сжатия пластины, свободно опёртой по всем сторонам ( $k = 4$ ), будем иметь

$$\left(\frac{b}{h}\right)_0 = 36,9.$$

Если отношение  $b/h$  окажется меньше, чем  $(b/h)_0$ , получаемое по формуле (9.16) значение  $\sigma_{кр}^0$  будет превосходить  $\sigma_{пц}$ . Это означает, что к моменту потери устойчивости появятся пластические деформации, закон Гука не будет выполняться и формула (9.16) неприменима.

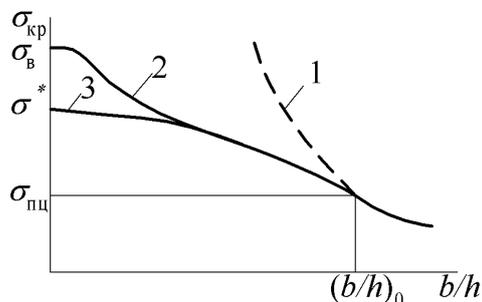


Рисунок 9.14 – Критические напряжения за пределом пропорциональности

На рисунке (9.14) показана зависимость  $\sigma_{кр}$  от параметра  $b/h$ . Кривая 1 представляет гиперболу, определяемую формулой (9.16). При  $b/h < (b/h)_0$  пользоваться этой зависимостью для определения критических напряжений нельзя, поэтому здесь кривая показана штриховой линией.

Действительная зависимость  $\sigma_{кр}$  от  $b/h$  в упругопластической области представлена кривой 2. Очевидно, что

критическое напряжение не может превосходить предела прочности материала при сжатии  $\sigma_b$ . Заметим, что предел прочности при сжатии часто бывает неизвестен; в таких случаях допустимо использовать вместо него предел прочности при растяжении.

Если потеря устойчивости происходит за пределом пропорциональности, вместо закона Гука необходимо обратиться к экспериментальной диаграмме, устанавливающей зависимость напряжения от деформации  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  при одноосном деформировании материал. Это существенно усложняет расчёт  $\sigma_{кр}$ , поскольку основные зависимости становятся нелинейными.

Для получения пригодных для практики расчётных формул предложены различные приближённые подходы. Хорошее согласие с экспериментальными данными даёт формула Блейха

$$\sigma_{кр} = \sigma_{кр}^0 \sqrt{\frac{E_k}{E}}, \quad (9.18)$$

где

$$E_k = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

– касательный модуль материала. Чтобы избежать численного дифференцирования диаграммы деформирования материала, можно аппроксимировать её с помощью тех или иных аналитических соотношений. Один из простейших вариантов аппроксимации диаграммы деформирования на участке упрочнения имеет вид

$$\sigma = \sigma^* - \frac{(\sigma^* - \sigma_{\text{тц}})^2}{E\varepsilon + \sigma^* - 2\sigma_{\text{тц}}}, \quad (9.19)$$

где

$$\sigma^* = \sigma_{0,2} + \frac{1}{0,002E} (\sigma_{0,2} - \sigma_{\text{тц}})^2. \quad (9.20)$$

Здесь  $\sigma_{0,2}$  – условный предел текучести.

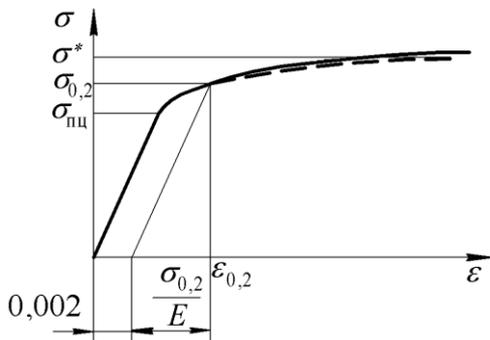
В частности, для материала Д16 ( $E = 7,2 \cdot 10^4$  МПа;  $\sigma_{\text{тц}} = 190$  МПа;  $\sigma_{0,2} = 280$  МПа) будем иметь  $\sigma^* = 336$  МПа.

При  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{тц}} = \sigma_{\text{тц}}/E$  согласно (9.19) получается  $\sigma = \sigma_{\text{тц}}$ ;  $d\sigma/d\varepsilon = E$ , то есть кривая  $\sigma(\varepsilon)$ , определяемая выражением (9.19), плавно сопрягается с линейным участком  $\sigma = E\varepsilon$  при  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{тц}}$ . Кроме того, она проходит через точку диаграммы деформирования, в которой  $\sigma = \sigma_{0,2}$ , а  $\varepsilon = \varepsilon_{0,2} = 0,002 + \sigma_{0,2}/E$ .

На рисунке 9.15 сплошной линией показан вид действительной диаграммы деформирования, а штриховой – её аппроксимация на участке упрочнения согласно (9.19).

При использовании данной аппроксимации можно для критического напряжения в случае  $\sigma_{кр}^0 > \sigma_{пл}$  получить, исходя из (9.18), выражение

$$\sigma_{кр} = \frac{\sigma^*}{\sigma^* - \sigma_{пл} + \sigma_{кр}^0} \sigma_{кр}^0. \quad (9.21)$$



**Рисунок 9.15 – Аппроксимация диаграммы деформирования материала**

Вытекающие из формулы (9.21) результаты представлены на рисунке 9.14 кривой 3. Для тонких пластин (у которых  $b/h > 10$ ) она совпадает с кривой 2. Для более толстых пластин формула (9.21) даёт заниженные значения критических напряжений, что идёт в запас прочности.

В случае закрепления пластины по схеме рисунка 9.11 более хорошее согласие с экспериментами данными даёт линейная интерполяция зависимости  $\sigma_{кр}$  от  $b/h$ .

При этом вместо (9.21) можно получить формулу вида

$$\sigma_{кр} = \bar{\sigma} - (\bar{\sigma} - \sigma_{пл}) \sqrt{\frac{\sigma_{пл}}{\sigma_{кр}^0}}, \quad (9.22)$$

где  $\bar{\sigma}$  – величина, определяемая для каждого материала экспериментально. В частности, для алюминиевого сплава Д16Т величина  $\bar{\sigma}$  составляет  $1,2\sigma_{0,2}$  для прессованных профилей и  $(1,0...1,1)\sigma_{0,2}$  для профилей, изготовленных путём гнутья. При отсутствии опытных данных можно принимать в запас прочности  $\bar{\sigma} = \sigma_{0,2}$ .

Заметим, что формулой (9.22) в запас устойчивости можно пользоваться и при других схемах закрепления пластины.

Аналогично, расчёт  $\tau_{кр}$  сводится к предварительному вычислению  $\tau_{кр}^0$  по формуле

$$\tau_{кр}^0 = \frac{0,9kE}{(b/h)^2}.$$

Если окажется, что  $\tau_{кр}^0 \leq \tau_{пл}$ , то следует положить

$$\tau_{кр} = \tau_{кр}^0.$$

В противном случае необходимо выполнить корректировку критического напряжения по формуле

$$\tau_{кр} = \frac{\tau^*}{\tau^* - \tau_{пц} + \tau_{кр}^0} \tau_{кр}^0. \quad (9.23)$$

В этих расчётах можно принимать

$$\tau_{пц} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{пц}; \quad \tau^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma^*.$$

## 9.6 Закритическое поведение обшивки при сжатии

Если пластина подкреплена рёбрами, то её потеря устойчивости не означает исчерпания несущей способности. Выпучиваясь, пластина частично выключается из работы. Но участки пластины, примыкающие к рёбрам, продолжают вместе с ними воспринимать внешнюю нагрузку до тех пор, пока рёбра не потеряют устойчивость. Рассмотрим это более подробно.

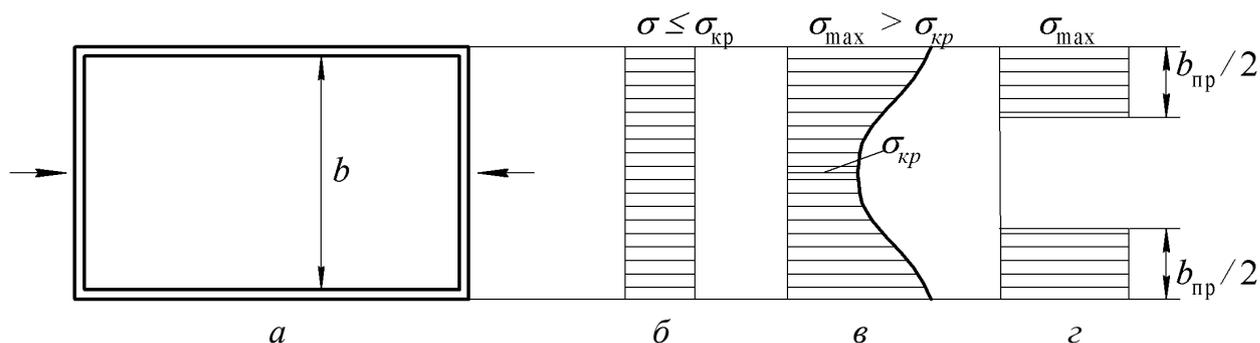


Рисунок 9.16 – Закритическая работа пластины при сжатии

На рисунке 9.16,а показана сжатая панель, представляющая собой прямоугольную пластину, подкреплённую рёбрами. До потери устойчивости напряжение  $\sigma$  постоянно по сечению пластины (рисунок 9.16,б). После выпучивания, которое происходит при напряжении

$$\sigma_{кр} = \frac{0,9kE}{(b/h)^2},$$

где  $b$ ,  $h$  – ширина и толщина пластины, средняя часть сечения пластины практически перестаёт сопротивляться возрастанию нагрузки. Среднее по толщине напряжение здесь, по существу, сохраняет значение  $\sigma_{кр}$ , поддерживая пластину в выпученном состоянии. В то же время примыкающие к рёбрам волокна пластины деформируются вместе с ними и напряжения в них

продолжают возрастать с ростом нагрузки. Распределение напряжений по сечению пластины становится таким, как показано на рисунке 9.16,в.

Эту картину можно схематизировать в виде эпюры, представленной на рисунке 9.16,г. Здесь принято, что средняя часть сечения вообще не участвует в работе, но примыкающие к рёбрам участки обшивки с общей шириной  $b_{\text{пр}}$  работают при напряжениях  $\sigma_{\text{max}}$ .

Следуя Карману, приведённую ширину пластины  $b_{\text{пр}}$  найдём из условия равенства  $\sigma_{\text{max}}$  критическому напряжению фиктивной панели шириной  $b_{\text{пр}}$ :

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{0,9kE}{(b_{\text{пр}}/h)^2}.$$

Умножив и поделив правую часть этого равенства на  $b^2$ , приведём его к виду

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{0,9kE}{(b_{\text{пр}}/h)^2} \frac{b^2}{b^2} = \frac{0,9kE}{(b/h)^2} \left( \frac{b}{b_{\text{пр}}} \right)^2 = \sigma_{\text{кр}} \left( \frac{b}{b_{\text{пр}}} \right)^2.$$

Отсюда вытекает формула Кармана

$$b_{\text{пр}} = b \sqrt{\frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{max}}}}. \quad (9.24)$$

Нагружение может продолжаться до тех пор, пока величина  $\sigma_{\text{max}}$  не достигнет критического напряжения продольного ребра. Если продольным ребром является стрингер, изготовленный из того же материала, что и пластина, то предельное состояние конструкции определится условием

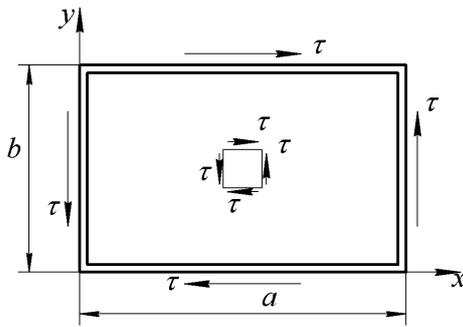
$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{кр стр}}.$$

При этом  $b_{\text{пр}}$  будет иметь минимальное значение:

$$b_{\text{пр}} = b \sqrt{\frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр стр}}}}.$$

## 9.7 Закритическое поведение пластины при сдвиге

На рисунке 9.17 показана окаймлённая рёбрами прямоугольная пластина, нагруженная постоянными касательными напряжениями  $\tau$ . Горизонтальные рёбра будем называть для краткости поясами, вертикальные – стойками.



**Рисунок 9.17 – Подкреплённая пластина при сдвиге**

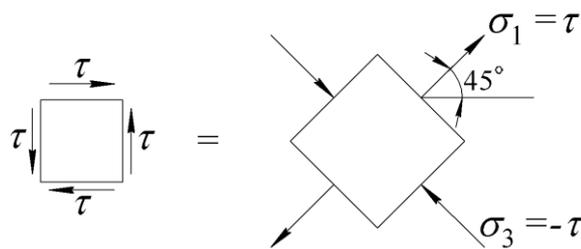
наклонённых под углом  $45^\circ$  к оси  $x$  (рисунок 9.18).

До потери устойчивости в пластине действует только касательное напряжение

$$\sigma_{xy} = \tau,$$

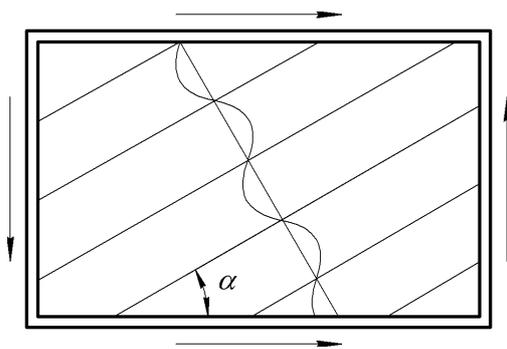
одинаковое во всех точках. Никаких других напряжений в пластинке нет. В поясах и стойках напряжения также отсутствуют.

При чистом сдвиге главные напряжения  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$  действуют в площадках,



**Рисунок 9.18 – Главные напряжения при чистом сдвиге**

Действие сжимающего напряжения  $\sigma_3$  приводит к потере устойчивости с образованием наклонных волн. Поверхность пластины приобретает вид гофрированной, как показано на рисунке 9.19. В первом приближении гофры

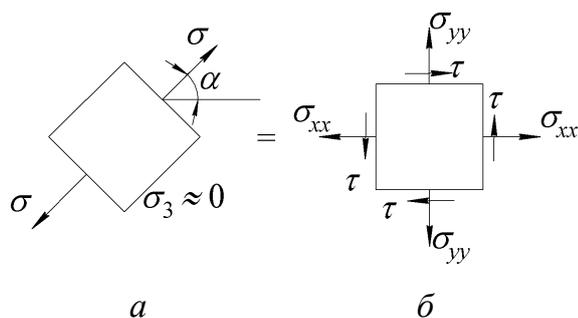


**Рисунок 9.19 – Схема волнообразования при сдвиге**

можно считать прямолинейными. Угол  $\alpha$  между направлением гофров и поясами близок к  $45^\circ$ , но зависит от жесткостей поясов и стоек.

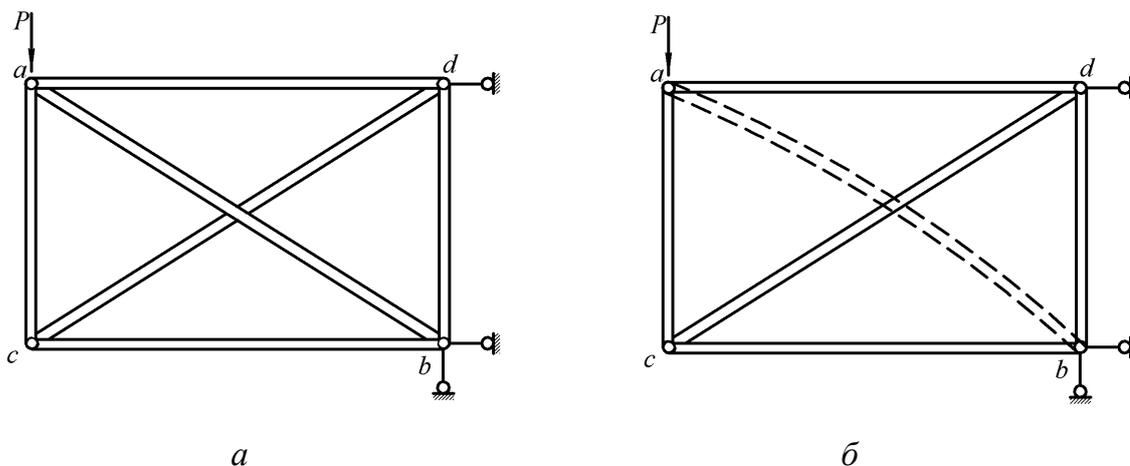
Когда внешняя нагрузка (то есть величина  $\tau$ ) продолжает расти после потери устойчивости, сжимающее нормальное напряжение, действующее поперёк гофров и поддерживающее их в выпученном состоянии, практически перестаёт изменяться.

В то же время нормальное напряжение, растягивающее волокна пластины вдоль гофров, продолжает увеличиваться с ростом нагрузки. Если действующее напряжение  $\tau$  значительно превосходит  $\tau_{кр}$ , можно считать, что в пластине возникает диагональное поле с растягивающим напряжением  $\sigma$ , ориентированным под углом  $\alpha$  к поясам (рисунок 9.20,а).



**Рисунок 9.20 – Напряжения в случае диагонального поля**

Роль пластины в рассматриваемой конструкции можно уподобить роли диагональных стержней, установленных в соединении поясов и стоек между собой посредством шарниров (рисунок 9.21,а). При определённой нагрузке сжатый диагональный стержень *ab* потеряет устойчивость и выключится из работы (рисунок 9.21,б). Система сохранит при этом работоспособность, поскольку второй диагональный стержень обеспечивает её геометрическую неизменяемость. В пластине роль растянутого стержня *cd* выполняют гофры.



**Рисунок 9.21 – Стержневая модель критической работы пластины при сдвиге**

В напряжённом состоянии панели после потери устойчивости пластины происходят изменения, которые необходимо учитывать в расчётах. Во-первых, в пластине помимо касательного появляются нормальные напряжения  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  (см. рисунок 9.20,б). Их можно найти, рассматривая равновесие показанных на рисунке 9.22 треугольных элементов пластины, у которых одна из сторон параллельна оси *x* или оси *y*, а две другие ориентированы вдоль и поперёк гофров.

Принимая во внимание размеры площадок, указанные на рисунке 9.22, и записывая условия равновесия элементов в проекциях на оси  $x$  и  $y$ , можно прийти к равенствам:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma \cos^2 \alpha; \\ \sigma_{yy} &= \sigma \sin^2 \alpha; \\ \tau &= \sigma \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}$$

Первые два равенства показывают, что возникающие после потери устойчивости нормальные напряжения всегда растягивающие. Третье равенство позволяет выразить диагональное напряжение  $\sigma$  через заданное касательное напряжение:

$$\sigma = \frac{\tau}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

С учётом этого получаем формулы

$$\sigma_{xx} = \tau \operatorname{ctg} \alpha; \quad \sigma_{yy} = \tau \operatorname{tg} \alpha. \quad (9.25)$$

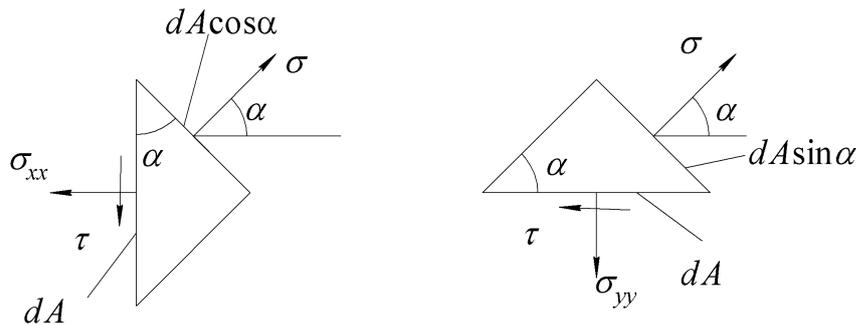


Рисунок 9.22 – К расчёту напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$

Во-вторых, появляются напряжения в поясах и стойках. Отделим мысленно пластину от подкрепляющих рёбер. Напряжения (9.25) действуют во всех точках пластины, в том числе и на её сторонах. Умножив их на толщину пластины  $h$ , будем иметь погонные нагрузки

$$q_x = \sigma_{xx} h = \tau h \operatorname{ctg} \alpha; \quad q_y = \sigma_{yy} h = \tau h \operatorname{tg} \alpha, \quad (9.26)$$

приложенные по контуру пластины (рисунок 9.23,а).

Эти нагрузки есть, очевидно, результат действия рёбер на пластину. Такие же, но противоположно направленные нагрузки должны действовать со стороны пластины на пояса и стойки (рисунок 9.23,б). Они стремятся стянуть противоположные рёбра друг к другу, вызывая сжатие поясов и стоек. Осевые силы в поясах и стойках равны

$$N_{\text{пояс}} = -\frac{1}{2} q_x b; \quad N_{\text{ст}} = -\frac{1}{2} q_y a. \quad (9.27)$$

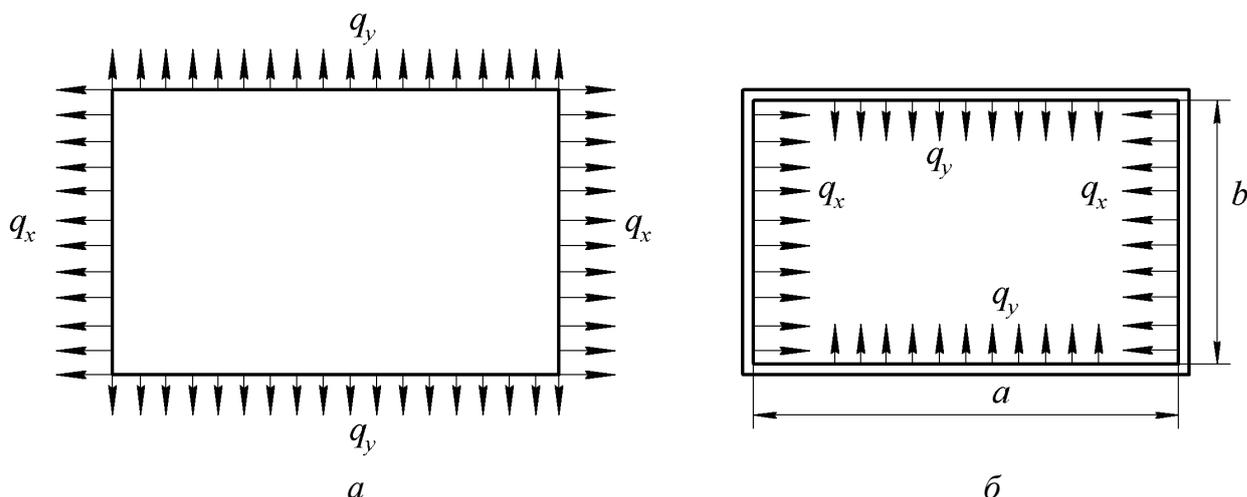


Рисунок 9.23 – Работа поясов и стоек после потери устойчивости обшивки

Напряжения в них получим по формулам:

$$\sigma_{\text{пояс}} = \frac{N_{\text{пояс}}}{F_{\text{пояс}}}; \quad \sigma_{\text{ст}} = \frac{N_{\text{ст}}}{F_{\text{ст}}}, \quad (9.28)$$

где  $F_{\text{пояс}}$ ,  $F_{\text{ст}}$  – площади сечений соответственно пояса и стойки.

Исходя из (9.26)...(9.28), будем иметь:

$$\sigma_{\text{пояс}} = -\frac{\tau b h}{2F_{\text{пояс}}} \text{ctg } \alpha;$$

$$\sigma_{\text{ст}} = -\frac{\tau a h}{2F_{\text{ст}}} \text{tg } \alpha.$$

Что касается угла наклона волн  $\alpha$ , то в соответствии с началом наименьшей работы его можно найти из условия минимума потенциальной энергии деформации панели. Таким путём можно прийти к формуле

$$\text{tg } \alpha = \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{bh}{2F_{\text{пояс}}}}{1 + \frac{ah}{2F_{\text{ст}}}}}.$$

Представленная выше схема закритической работы панели при сдвиге справедлива лишь в случае  $\tau \gg \tau_{\text{кр}}$ , когда можно пренебречь сжимающими нормальными напряжениями, действующими поперёк гофров. В реальных условиях это напряжение отлично от нуля, вследствие чего напряжения  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  оказываются меньше, чем это получается по формулам (9.25). Далее выпучивание пластины происходит лишь в средней её части. Участки, прилегающие к рёбрам, сохраняют плоскую форму, в результате чего осевые силы в рёбрах также оказываются по абсолютной величине меньше, чем по фор-

мулам (9.27). Наконец, эти силы воспринимаются не только самими рёбрами, но и прилегающими к ним участками пластины, так что напряжения в них окажутся меньше, чем это даётся соотношениями (9.28). Поправки к изложенной выше элементарной теории, определяемые на основании экспериментальных данных, рассматриваются в курсе расчёта ЛА на прочность.

## 10 ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

### 10.1 Основные зависимости осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки

Пусть круговая цилиндрическая оболочка толщиной  $h$  с радиусом средней поверхности  $R$  испытывает действие осесимметричной нагрузки. Напряжённо-деформированное состояние оболочки также будет осесимметричным. При выводе расчётных соотношений так же, как и в теории изгиба пластин, воспользуемся гипотезой прямых нормалей и гипотезой о ненадавливании слоёв оболочки друг на друга.

На рисунке 10.1 показано осевое сечение оболочки. Положение произвольной точки  $m$  средней поверхности характеризуется осевой координатой  $x$ , отсчитываемой от торцевого сечения. При деформации точка  $m$  получает осевое перемещение  $u_0$  и радиальное перемещение  $w$  и попадает в положение  $m_1$ . Точка  $n$ , отстоящая от точки  $m$  на расстоянии  $z$  по нормали к средней поверхности, окажется в положении  $n_1$ .

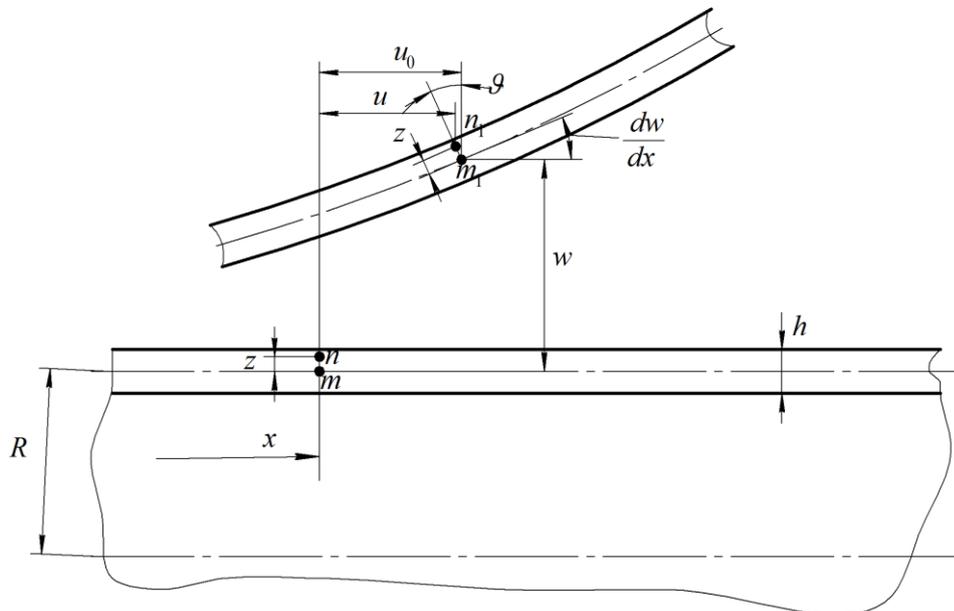


Рисунок 10.1 – Перемещения цилиндрической оболочки

Перемещение точки  $n$  в осевом направлении

$$u = u_0 - z\varphi,$$

где  $\varphi$  – угол, на который поворачивается нормальный отрезок  $mn$  при деформации. В соответствии с гипотезой прямых нормалей этот угол отожд-

дествляется с углом наклона  $\frac{dw}{dx}$  касательной к срединной поверхности в точке  $m$ :

$$\vartheta = \frac{dw}{dx}.$$

Таким образом, приходим к соотношению

$$u = u_0 - z \frac{dw}{dx}. \quad (10.1)$$

Радиальное перемещение точки  $n$  совпадает с величиной  $w$ , поскольку длина отрезка  $mn$  считается неизменной, а угол поворота  $\vartheta$  мал.

Продольную деформацию в точке  $n$ , которую обозначим через  $\varepsilon_{11}$ , найдём по формуле

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} = \varepsilon_{11}^0 - z \frac{d^2w}{dx^2}, \quad (10.2)$$

где через

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{du_0}{dx}$$

обозначена осевая деформация в срединной поверхности.

Помимо осевой в оболочке возникает также окружная деформация  $\varepsilon_{22}$  вследствие изменения длины окружности, на которой находится точка  $n$ :

$$\varepsilon_{22} = \frac{2\pi(R+w+z) - 2\pi(R+z)}{2\pi(R+z)} = \frac{w}{R+z} = \frac{w}{R\left(1+\frac{z}{R}\right)}.$$

Считая оболочку тонкой, будем пренебрегать отношением  $z/R$  по сравнению с единицей и принимать

$$\varepsilon_{22} = \frac{w}{R}. \quad (10.3)$$

Переходя к напряжениям, следует иметь в виду, что  $\sigma_{zz} = 0$ , как это вытекает из гипотезы о ненадавливании слоёв. Тогда связь напряжений с деформациями запишется в виде

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}).$$

Подстановка в эти выражения соотношений (10.2) и (10.3) приводит к зависимостям

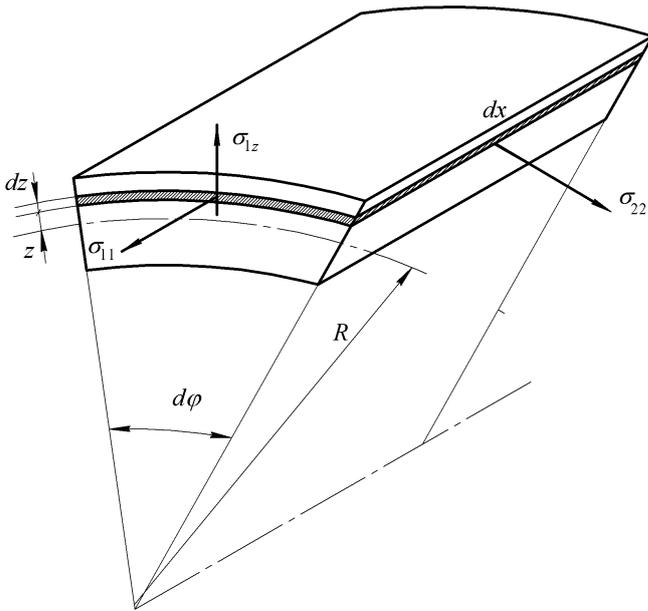
$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \varepsilon_{11}^0 - z \frac{d^2w}{dx^2} + \mu \frac{w}{R} \right);$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{w}{R} + \mu \varepsilon_{11}^0 - \mu z \frac{d^2 w}{dx^2} \right). \quad (10.4)$$

Кроме этих компонент при изгибе оболочки возникает также поперечное касательное напряжение  $\sigma_{1z}$ , которое, однако, не может быть найдено из закона Гука из-за использования гипотезы прямых нормалей. Так же как и в теории изгиба пластин, результирующая этих напряжений по толщине оболочки находится с помощью уравнений равновесия. Заметим, что касательное напряжение  $\sigma_{2z}$  отсутствует в силу осевой симметрии напряжённого состояния.

От напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  перейдём далее к их результирующим по толщине – погонным силам и моментам. В слое оболочки толщиной  $dz$  в площадке с центральным углом  $d\varphi$  (рисунок 10.2) создаётся сила

$$\sigma_{11} dz (R+z) d\varphi = \sigma_{11} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) R d\varphi dz.$$



**Рисунок 10.2 – Напряжения в сечениях оболочки**

Отбросим слагаемое  $z/R$  в скобках, учитывая тонкостенность оболочки. Если далее проинтегрировать это выражение по толщине и поделить на длину дуги  $Rd\varphi$ , то получим погонную меридиональную силу  $N_1$ , то есть силу, рассчитанную на единицу длины окружности радиуса  $R$ :

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz.$$

Аналогично вводим погонную окружную силу  $N_2$ :

$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dz.$$

Подставим соотношения (10.4) в формулы для  $N_1$  и  $N_2$ . Учитывая, что

$$\int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0,$$

приходим к выражениям

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \varepsilon_{11}^0 + \mu \frac{w}{R} \right); \quad N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{w}{R} + \mu \varepsilon_{11}^0 \right). \quad (10.5)$$

Меридиональная сила  $N_1$ , будучи равномерно распределённой по окружности, легко находится из условия равновесия части оболочки, выделяемой сечением  $x = \text{const}$ . Следовательно  $N_1$  можно рассматривать наряду с другими нагрузками как заданную величину. На этом основании исключим  $\varepsilon_{11}^0$  из соотношений (10.5). Умножим  $N_1$  на  $\mu$  и вычтем из  $N_2$ :

$$\begin{aligned} N_2 - \mu N_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{w}{R} + \mu \varepsilon_{11}^0 \right) - \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \mu \varepsilon_{11}^0 + \mu^2 \frac{w}{R} \right) = \\ &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{w}{R} (1 - \mu^2) = \frac{Eh}{R} w. \end{aligned}$$

Отсюда получаем выражение

$$N_2 = \frac{Eh}{R} w + \mu N_1. \quad (10.6)$$

Поперечные касательные напряжения  $\sigma_{1z}$  дают погонную перерезывающую силу

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{1z} dz.$$

Её выражение через  $w$  будет получено ниже с помощью уравнения равновесия.

В сечениях оболочки помимо сил действуют погонные изгибающие моменты  $M_1$  и  $M_2$ , определяемые следующими выражениями:

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} z dz; \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} z dz.$$

Если подставить сюда формулы (10.4) и учесть, что

$$\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12},$$

то получим связь изгибающих моментов с перемещением  $w$  вида

$$M_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad M_2 = -\mu D \frac{d^2 w}{dx^2} = \mu M_1, \quad (10.7)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (10.8)$$

– изгибная жёсткость оболочки.

Как видим, погонные силы и моменты выражаются через нормальное перемещение  $w$ . Напряжения по известным силам и моментам могут быть найдены по формулам, вытекающим из соотношений (10.4), (10.5), (10.7) и (10.8):

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{h} + \frac{12M_1}{h^3} z; \quad \sigma_{22} = \frac{N_2}{h} + \frac{12M_2}{h^3} z.$$

Наибольшие напряжения, возникающие при  $z = \pm h/2$ , равны

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{h} \pm \frac{6M_1}{h^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{N_2}{h} \pm \frac{6M_2}{h^2}, \quad (10.9)$$

где знак плюс относится к наружной, а минус – к внутренней поверхности оболочки.

## 10.2 Дифференциальное уравнение изгиба цилиндрической оболочки

Для вывода разрешающего уравнения относительно  $w$  обратимся к условиям равновесия бесконечно малого элемента срединной поверхности, показанного на рисунке 10.3.

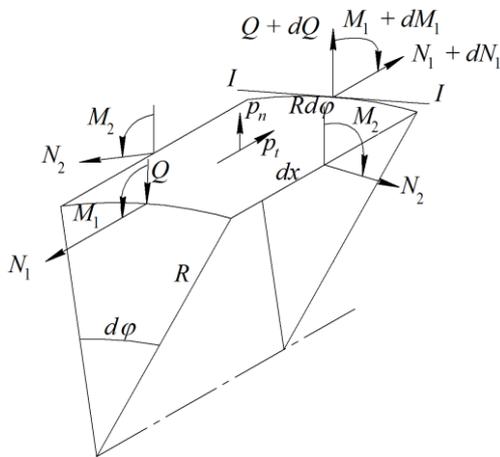


Рисунок 10.3 – Нагружение элемента срединной поверхности

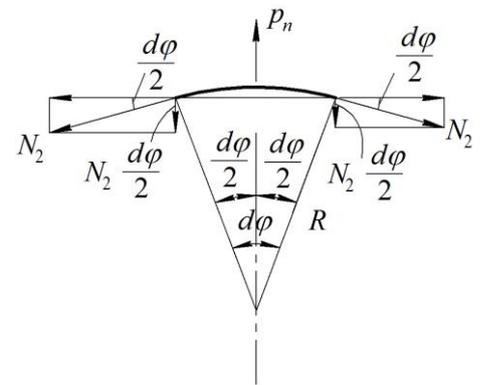


Рисунок 10.4 – Проекция окружных сил на нормаль

Составим условие равновесия сил в проекции на нормаль к элементу. Учитывая проекции окружных сил  $N_2$  (рисунок 10.4) и обозначая через  $p_n$  нормальную нагрузку, будем иметь

$$(Q + dQ)Rd\varphi - QRd\varphi - 2N_2 dx \frac{d\varphi}{2} + p_n R d\varphi dx = 0.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{N_2}{R} + p_n = 0. \quad (10.10)$$

Условие равновесия моментов относительно оси  $I-I$  даёт соотношение

$$Q = \frac{dM_1}{dx},$$

которое позволяет при учёте первого равенства (10.7) выразить перерезывающую силу  $Q$  через функцию  $w(x)$ :

$$Q = -D \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (10.11)$$

Подстановка этого результата вместе с соотношением (10.6) в равенство (10.10) приводит к искомому уравнению осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки:

$$-D \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{Eh}{R^2} w - \frac{\mu N_1}{R} + p_n = 0$$

или

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = p_n - \frac{\mu N_1}{R}. \quad (10.12)$$

### 10.3 Решение дифференциального уравнения изгиба для длинной оболочки

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (10.12) имеет вид

$$w(x) = w^0(x) + w^*(x), \quad (10.13)$$

где  $w^0(x)$  – общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (10.12), а  $w^*(x)$  – частное решение неоднородного уравнения.

На практике обычно распределённые по поверхности нагрузки, действующие вдоль оси  $x$ , отсутствуют. При этом величина  $N_1$  будет постоянной по длине. Нормальная нагрузка  $p_n$  может создаваться, скажем, давлением наддува или гидростатическим давлением, изменяющимся по длине по линейному закону. Ограничиваясь этими случаями, частное решение  $w^*(x)$  будем искать в виде линейной функции координаты  $x$ . Тогда

$$\frac{d^4 w^*}{dx^4} = 0,$$

и из уравнения (10.12) будем иметь

$$w^* = \frac{R^2}{Eh} \left( p_n - \frac{\mu N_1}{R} \right). \quad (10.14)$$

Заметим, что в силу линейной зависимости  $w^*(x)$  производные  $\frac{d^2 w^*}{dx^2}$  и  $\frac{d^3 w^*}{dx^3}$  равны нулю. На основании формул (10.7) и (10.11) заключаем, что изгибные силовые факторы, соответствующие  $w^*$ , также равны нулю. Иными словами, функция  $w^*(x)$  представляет радиальное перемещение в безмоментном напряжённом состоянии оболочки.

Функция  $w^0(x)$  является общим решением однородного уравнения

$$D \frac{d^4 w^0}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w^0 = 0,$$

которое можно записать так:

$$\frac{d^4 w^0}{dx^4} + 4\alpha^4 w^0 = 0. \quad (10.15)$$

Здесь

$$4\alpha^4 = \frac{Eh}{R^2 D} = \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h^2}, \quad (10.16)$$

так что

$$\alpha = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{1}{\sqrt{Rh}}. \quad (10.17)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (10.15), имеет вид

$$r^4 + 4\alpha^4 = 0.$$

Добавляя в левой и правой частях последнего равенства слагаемое  $4r^2\alpha^2$ , получаем

$$r^4 + 4r^2\alpha^2 + 4\alpha^4 = 4r^2\alpha^2$$

или

$$(r^2 + 2\alpha^2)^2 = 4r^2\alpha^2.$$

Отсюда

$$r^2 + 2\alpha^2 = \pm 2r\alpha.$$

Представив последнее равенство в виде

$$r^2 \pm 2r\alpha + \alpha^2 = -\alpha^2$$

или

$$(r \pm \alpha)^2 = -\alpha^2,$$

находим корни характеристического уравнения:

$$r = \pm i\alpha \pm \alpha.$$

По виду корней запишем общее решение уравнения (10.15):

$$w^0(x) = e^{-\alpha x} (C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x) + e^{\alpha x} (C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x),$$

где  $C_1, \dots, C_4$  – произвольные постоянные.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения изгиба цилиндрической оболочки имеет следующее выражение:

$$w(x) = e^{-\alpha x} (C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x) + e^{\alpha x} (C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x) + w^*(x). \quad (10.18)$$

Произвольные постоянные должны быть определены из четырёх граничных условий – по два условия на каждом краю оболочки.

Общее решение (10.18) помимо  $w^*(x)$  включает две группы функций – убывающих с ростом  $x$ , которые имеют множителем  $e^{-\alpha x}$ , и возрастающих с ростом  $x$ , которые содержат множитель  $e^{\alpha x}$ . Благодаря множителям  $\sin \alpha x$  и  $\cos \alpha x$  они носят колебательный характер. Изменение этих функций происходит очень быстро. Уже при  $\alpha x = 3$  величина  $e^{\alpha x} \approx 20$ .

Поэтому если (при  $\mu = 0,3$ )

$$x > \frac{3}{\alpha} = \frac{3}{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} \sqrt{Rh} = 2,3\sqrt{Rh}, \quad (10.19)$$

то убывающие функции становятся пренебрежимо малыми. Они играют роль лишь возле края, на котором  $x = 0$ . Наоборот, возрастающие функции имеют значение лишь возле края  $x = l$ , где  $l$  – длина оболочки, быстро убывая от него при уменьшении  $x$ . Отсюда следует, что *граничные условия на каждом из краёв длинной оболочки не оказывают влияния на напряжённое состояние возле другого края* и что они могут быть удовлетворены независимо друг от друга.

Из изложенного следует, что напряжённое состояние длинной цилиндрической оболочки может быть представлено в виде суммы безмоментного напряжённого состояния и быстро убывающих от каждого края моментных состояний. *Моментное напряжённое состояние, быстро убывающее от края оболочки и имеющее колебательный характер, называется краевым эффектом.*

Для расчёта напряжённого состояния возле края  $x=0$  следует отбросить в выражении (10.18) возрастающие функции.

Обозначая

$$f_1(x) = e^{-\alpha x} \sin \alpha x; \quad f_2(x) = e^{-\alpha x} \cos \alpha x, \quad (10.20)$$

запишем применительно к этому случаю

$$w(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + w^*(x). \quad (10.21)$$

При исследовании напряжённого состояния возле края  $x=l$  следовало бы, напротив, опустить убывающие и оставить в (10.18) только возрастающие функции. Но удобнее сменить направление оси  $x$ , взять новое начало отсчёта на краю  $x=l$  и опять воспользоваться выражением вида (10.21) с функциями (10.20).

Установим формальные правила дифференцирования функций  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\frac{df_1}{dx} = \alpha e^{-\alpha x} (-\sin \alpha x + \cos \alpha x) = \alpha(-f_1 + f_2);$$

$$\frac{df_2}{dx} = \alpha e^{-\alpha x} (-\cos \alpha x - \sin \alpha x) = -\alpha(f_1 + f_2);$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} = \alpha \left( -\frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx} \right) = \alpha [-\alpha(-f_1 + f_2) - \alpha(f_1 + f_2)] = -2\alpha^2 f_2;$$

$$\frac{d^2 f_2}{dx^2} = -\alpha \left( \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx} \right) = -\alpha [\alpha(-f_1 + f_2) - \alpha(f_1 + f_2)] = 2\alpha^2 f_1;$$

$$\frac{d^3 f_1}{dx^3} = -2\alpha^2 \frac{df_2}{dx} = 2\alpha^3 (f_1 + f_2);$$

$$\frac{d^3 f_2}{dx^3} = 2\alpha^2 \frac{df_1}{dx} = 2\alpha^3 (-f_1 + f_2).$$

Выражения для расчётных величин можно теперь представить в виде

$$w = C_1 f_1 + C_2 f_2 + w^*; \quad (10.22)$$

$$\vartheta = \frac{dw}{dx} = \alpha [C_1(-f_1 + f_2) - C_2(f_1 + f_2)] + \frac{dw^*}{dx}; \quad (10.23)$$

$$N_2 = \frac{Eh}{R}(C_1 f_1 + C_2 f_2) + \frac{Eh}{R} w^* + \mu N_1; \quad (10.24)$$

$$M_1 = 2D\alpha^2 (C_1 f_2 - C_2 f_1); \quad (10.25)$$

$$M_2 = \mu M_1; \quad (10.26)$$

$$Q = -2D\alpha^3 [C_1(f_1 + f_2) + C_2(-f_1 + f_2)]. \quad (10.27)$$

Как уже обсуждалось ранее, в формулах для  $M_1$  и  $Q$  отсутствуют слабые, содержащие производные от  $w^*$ .

Полученное решение применимо для достаточно длинных оболочек. Практически можно считать оболочку длинной и пользоваться приведёнными соотношениями, если параметр

$$\lambda = \alpha l = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{l}{\sqrt{Rh}} \quad (10.28)$$

имеет значение  $\lambda > 3$ . При  $\mu = 0,3$  это приблизительно соответствует длине  $l > 2,5\sqrt{Rh}$ .

#### 10.4 Пример расчёта длинной цилиндрической оболочки на изгиб

Пусть цилиндрический сосуд закрыт днищем на одном конце и жёстко заделан на другом. Сосуд находится под действием постоянного внутреннего давления  $p$  (рисунок 10.5). Найдём напряжения, возникающие у заделки.

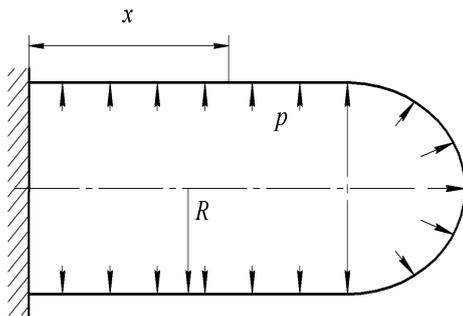


Рисунок 10.5 – Цилиндрический сосуд под внутренним давлением

Считая цилиндрическую оболочку длинной, поместим начало отсчёта координаты  $x$  на заделанном конце и воспользуемся полученными выше соотношениями.

Так как в рассматриваемом случае

$$N_1 = \frac{pR}{2},$$

где  $R$  – радиус срединной поверхности цилиндра, согласно (10.14) имеем при  $p_n = p$ :

$$w^* = \frac{R^2}{Eh} \left( p - \frac{\mu p}{2} \right) = \frac{pR^2}{2Eh} (2 - \mu).$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  должны быть подчинены граничным условиям

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Подставим сюда (10.22) и (10.23) и учтём, что  $f_1(0) = 0$ ;  $f_2(0) = 1$ ;

$$\frac{dw^*}{dx} = 0:$$

$$C_2 + w^* = 0; \quad \alpha(C_1 - C_2) = 0.$$

Отсюда находим

$$C_1 = C_2 = -w^* = -\frac{pR^2}{2Eh}(2 - \mu).$$

Согласно соотношениям (10.22)...(10.27), а также (10.8) и (10.17) получаем следующие выражения для расчётных величин:

$$w(x) = \frac{(2 - \mu)pR^2}{2Eh} \left[ 1 - e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x) \right];$$

$$g(x) = (2 - \mu) \frac{pR^2 \alpha}{Eh} e^{-\alpha x} \sin \alpha x;$$

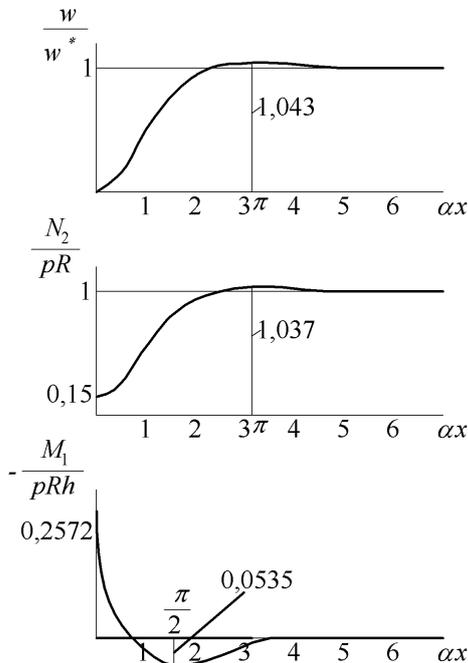
$$N_2(x) = pR \left[ 1 - \frac{2 - \mu}{2} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x) \right];$$

$$M_1(x) = -(2 - \mu) \frac{pR^2 \alpha^2 D}{Eh} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) =$$

$$= -\frac{2 - \mu}{4 \cdot \sqrt{3(1 - \mu^2)}} pR h e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x);$$

$$M_2 = \mu M_1;$$

$$Q(x) = \frac{2 - \mu}{2} \cdot \frac{p}{\alpha} e^{-\alpha x} \cos \alpha x.$$



**Рисунок 10.6 – Характер напряжённно-деформированного состояния у заделки**

На рисунке 10.6 приведены эпюры  $w$ ,  $N_2$  и  $M_1$  (для  $\mu = 0,3$ ). Наибольшие напряжения возникают при  $x = 0$ , где силы и моменты имеют значения

$$N_1 = \frac{pR}{2}; \quad N_2 = \mu \frac{pR}{2};$$

$$M_1 = -\frac{2 - \mu}{4 \cdot \sqrt{3(1 - \mu^2)}} pR h; \quad M_2 = \mu M_1.$$

При  $z = \pm h/2$  напряжения равны (в случае  $\mu = 0,3$ )

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{h} \pm \frac{6M_1}{h^2} = \frac{pR}{2h} \mp 1,543 \frac{pR}{h};$$

$$\sigma_{22} = \frac{N_2}{h} \pm \frac{6M_2}{h^2} = 0,15 \frac{pR}{h} \mp 0,463 \frac{pR}{h}.$$

Здесь, как и ранее, верхний знак относится к наружной, а нижний – к внутренней поверхности.

Наиболее напряжённой оказывается точка внутренней поверхности, где

$$\sigma_{11} = 2,043 \frac{pR}{h}; \quad \sigma_{22} = 0,613 \frac{pR}{h}.$$

Вдали от заделки, где напряжённое состояние является безмоментным, имеем

$$\sigma_{11} = \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_{22} = \frac{pR}{h}.$$

Как видим, у заделки наибольшим оказывается меридиональное напряжение  $\sigma_{11}$ , причём оно в два с лишним раза превосходит окружное напряжение, вычисляемое по безмоментной теории. Для более корректного сопоставления напряжённых состояний у заделки и вдали от неё воспользуемся четвёртой теорией прочности, согласно которой эквивалентное напряжение при отсутствии касательных напряжений определяется как

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right]}.$$

Поскольку в данном случае  $\sigma_{33} = \sigma_{zz} = 0$ , эта формула приобретает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2}.$$

Для наиболее напряжённой точки получаем

$$(\sigma_{\text{экв}})_{\text{max}} = 1,816 \frac{pR}{h}.$$

По безмоментной же теории

$$\sigma_{\text{экв}} = 0,866 \frac{pR}{h},$$

так что максимальное эквивалентное напряжение в 2,1 раза выше, чем в безмоментном состоянии.

Ещё раз подчеркнём, что влияние заделки ограничено малой областью длиной порядка  $2,5\sqrt{Rh} = 2,5R\sqrt{h/R}$ . Если, например,  $R/h = 100$ , то этот размер составляет приблизительно четверть радиуса оболочки.

## 10.5 Расчёт короткой цилиндрической оболочки

Если длина оболочки настолько мала, что нельзя пренебречь взаимным влиянием краёв, то необходимо использовать для  $w$  полное выражение (10.18). Но в этом случае лучше от показательных перейти к гиперболическим функциям:

$$\text{sh } \alpha x = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}; \quad \text{ch } \alpha x = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}.$$

Тогда в качестве линейно независимых частных решений однородного дифференциального уравнения (10.15) будут выступать функции  $\text{sh } \alpha x \sin \alpha x$ ;  $\text{sh } \alpha x \cos \alpha x$ ;  $\text{ch } \alpha x \sin \alpha x$  и  $\text{ch } \alpha x \cos \alpha x$ .

При решении задач удобнее, однако, использовать их линейные комбинации, называемые функциями А.Н. Крылова:

$$\begin{aligned} K_1(\alpha x) &= \text{ch } \alpha x \cos \alpha x; \\ K_2(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\text{ch } \alpha x \sin \alpha x + \text{sh } \alpha x \cos \alpha x); \\ K_3(\alpha x) &= \frac{1}{2}\text{sh } \alpha x \sin \alpha x; \\ K_4(\alpha x) &= \frac{1}{4}(\text{ch } \alpha x \sin \alpha x - \text{sh } \alpha x \cos \alpha x). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Удобство в применении функций Крылова связано с тем, что их производные выражаются через эти же функции простейшим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} K_4(\alpha x) &= \alpha K_3(\alpha x); & \frac{d}{dx} K_3(\alpha x) &= \alpha K_2(\alpha x); \\ \frac{d}{dx} K_2(\alpha x) &= \alpha K_1(\alpha x); & \frac{d}{dx} K_1(\alpha x) &= -4\alpha K_4(\alpha x). \end{aligned} \quad (10.30)$$

Кроме того, при  $x=0$  все функции  $K_i(\alpha x)$  обращаются в нуль за исключением  $K_1(\alpha x)$ :

$$K_1(0) = 1.$$

Решение дифференциального уравнения изгиба можно представить теперь в форме

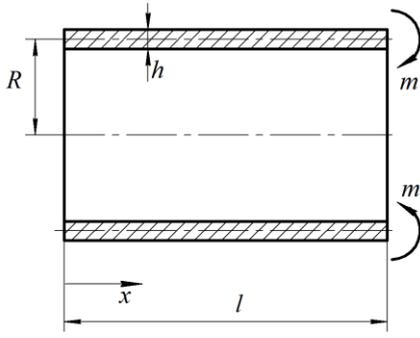
$$w = A_1 K_1(\alpha x) + A_2 K_2(\alpha x) + A_3 K_3(\alpha x) + A_4 K_4(\alpha x) + w^*, \quad (10.31)$$

где  $A_1, \dots, A_4$  – произвольные постоянные. Две из них всегда можно непосредственно найти из условий при  $x=0$ , поскольку справедливы равенства

$$\begin{aligned} w|_{x=0} &= A_1 + w^*|_{x=0}; & \frac{dw}{dx}|_{x=0} &= \alpha A_2 + \frac{dw^*}{dx}|_{x=0}; \\ M_1|_{x=0} &= -D\alpha^2 A_3; & Q|_{x=0} &= -D\alpha^3 A_4. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Пусть, например, короткая оболочка нагружена моментом интенсивности  $m$  на краю  $x=l$  (рисунок 10.7). Так как  $M_1=0$  и  $Q=0$  при  $x=0$ , согласно (10.32) имеем  $A_3=A_4=0$ . Тогда, учитывая, что  $w^*=0$ , выражение (10.31) приводится к виду

$$w(x) = A_1 K_1(\alpha x) + A_2 K_2(\alpha x). \quad (10.33)$$



**Рисунок 10.7 – К расчёту короткой цилиндрической оболочки**

Постоянные  $A_1$  и  $A_2$  найдём из условий при  $x = l$ :

$$M_1|_{x=l} = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=l} = m;$$

$$Q|_{x=l} = -D \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=l} = 0.$$

Если продифференцировать (10.33) с использованием соотношений (10.30), то из граничных условий получим систему уравнений

$$-D\alpha^2 \{A_1 [-4K_3(\lambda)] + A_2 [-4K_4(\lambda)]\} = m;$$

$$-D\alpha^3 \{A_1 [-4K_2(\lambda)] + A_2 [-4K_3(\lambda)]\} = 0,$$

где  $\lambda$  определяется формулой (10.28).

Решая систему, находим

$$A_1 = \frac{m}{4D\alpha^2} \cdot \frac{K_3(\lambda)}{K_3^2(\lambda) - K_2(\lambda)K_4(\lambda)};$$

$$A_2 = -\frac{m}{4D\alpha^2} \cdot \frac{K_2(\lambda)}{K_3^2(\lambda) - K_2(\lambda)K_4(\lambda)}.$$

При этом постоянная  $A_1$  представляет собой перемещение  $w|_{x=0}$ , а  $A_2 = \frac{1}{\alpha} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0}$ . Перемещение в нагруженном сечении можно найти, полагая в формуле (10.33)  $x = l$ :

$$w|_{x=l} = A_1 K_1(\lambda) + A_2 K_2(\lambda) = \frac{m}{4D\alpha^2} \cdot \frac{K_1(\lambda)K_3(\lambda) - K_2^2(\lambda)}{K_3^2(\lambda) - K_2(\lambda)K_4(\lambda)};$$

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} = -4A_1 \alpha K_4(\lambda) + A_2 \alpha K_1(\lambda) = -\frac{m}{4D\alpha} \cdot \frac{4K_3(\lambda)K_4(\lambda) + K_1(\lambda)K_2(\lambda)}{K_3^2(\lambda) - K_2(\lambda)K_4(\lambda)}.$$

Полученными результатами можно пользоваться при очень малых  $\lambda$ , так как при увеличении  $\lambda$  в формулах возникают малые разности больших чисел. Поэтому для практических вычислений удобнее от функций Крылова снова вернуться к гиперболо-тригонометрическим функциям. В итоге несложных преобразований получим

$$w|_{x=0} = \frac{m}{D\alpha^2} \cdot \frac{\text{sh } \lambda \sin \lambda}{\text{sh}^2 \lambda - \sin^2 \lambda};$$

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{m}{D\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{sh}^2 \lambda - \sin^2 \lambda};$$

$$w|_{x=l} = -\frac{m}{2D\alpha^2} \cdot \frac{\operatorname{ch}^2 \lambda - \cos^2 \lambda}{\operatorname{sh}^2 \lambda - \sin^2 \lambda};$$

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l} = -\frac{m}{D\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \lambda + \cos \lambda \sin \lambda}{\operatorname{sh}^2 \lambda - \sin^2 \lambda}.$$

## 11 МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 11.1 Дискретизация тела

Метод конечных элементов представляет собой приближённый метод решения задач строительной механики, в котором принципы расчёта, используемые в матричном методе перемещений для стержневых систем, распространяются на случай сплошных тел и конструкций. Тело разбивается на небольшие подобласти относительно простой формы, называемые конечными элементами, которые взаимодействуют между собой по смежным поверхностям, но предполагаются соединёнными друг с другом в отдельных точках – узлах (рисунок 11.1). Перемещения узлов принимаются в качестве неизвестных. Название метода определяется тем обстоятельством, что подобласти имеют хотя и малые, но всё же конечные размеры, в отличие от бесконечно малых элементов, фигурирующих при выводе дифференциальных уравнений равновесия.

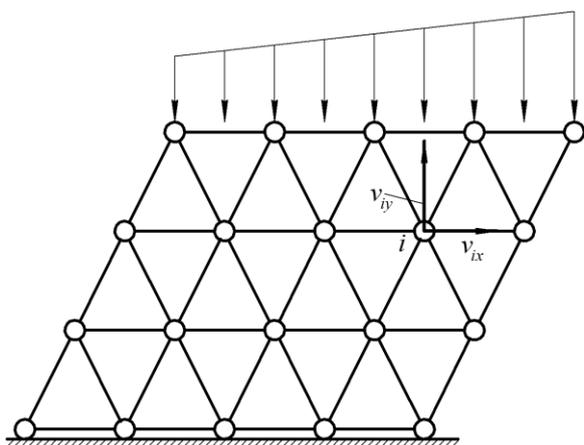


Рисунок 11.1 – Разбиение тела на конечные элементы

Если все нагрузки представить в виде сосредоточенных сил, приложенных в узлах, то связь между узловыми силами и узловыми перемещениями может быть записана в форме равенства типа

$$[P] = [K][v],$$

где  $[P]$ ,  $[v]$  – матрицы-столбцы узловых сил и узловых перемещений;  $[K]$  – матрица жёсткости данной системы.

Если матрица жёсткости известна, то это равенство может быть использовано для нахождения узловых перемещений. Таким образом, сплошное тело, имеющее бесконечное число степеней свободы, заменяется дискретной системой с конечным числом степеней свободы, каковыми являются узловые перемещения.

Чтобы прийти к расчётным зависимостям, необходимо знать ответы на следующие вопросы:

- как определить перемещения, деформации и напряжения в отдельном конечном элементе, если известны его узловые перемещения;
- как установить матрицы жёсткости отдельных конечных элементов;

- как заменить распределённые поверхностные и объёмные силы сосредоточенными узловыми;
- как объединить разрозненные конечные элементы в общую систему.

Решению этих проблем и посвящено дальнейшее изложение.

Независимо от типа и формы конечных элементов все этапы решения поддаются единому описанию и имеют общий алгоритм, вследствие чего их можно сравнительно легко реализовать с помощью универсальных программных комплексов. Благодаря этому метод конечных элементов стал мощным средством решения разнообразных задач строительной механики и прочности конструкций, а также других задач математической физики.

## 11.2 Перемещения, деформации и напряжения конечного элемента

Предположим, что все конечные элементы, на которые разбито тело, и все узлы пронумерованы определённым образом. Рассмотрим произвольный (типовой) конечный элемент. Пусть узлы этого элемента имеют номера  $i, j, \dots, m$ . Обозначим через  $[v_i], [v_j], \dots, [v_m]$  матрицы-столбцы перемещений соответствующих узлов. Количество узлов, принадлежащих конечному элементу, и количество перемещений в каждом узле могут быть различными в разных задачах. На рисунке 11.2 показан, например, треугольный элемент

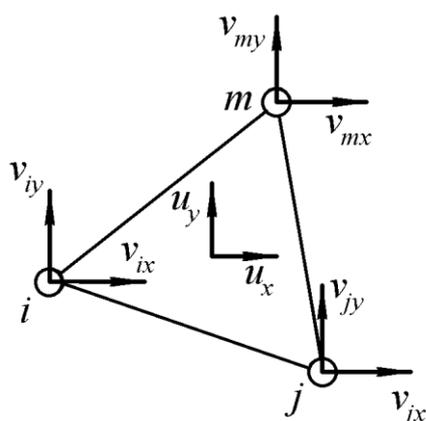


Рисунок 11.2 – Перемещения конечного элемента

двумерной области с тремя узлами в вершинах. В случае обобщённого плоского напряжённого состояния или в случае плоской деформации каждый узел перемещается в плоскости  $xu$ , так что матрицы перемещений узлов будут содержать по две компоненты, например:

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}.$$

В случае трёхмерного тела компонентами матриц  $[v_i], [v_j], \dots$  будут перемещения узлов в направлении всех трёх осей  $x, y, z$ , а количество самих узлов зависит от формы и типа элемента.

Все узловые перемещения конечного элемента представим матрицей

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \dots \\ v_j \\ \vdots \\ \dots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее верхним индексом «e» помечаются величины, относящиеся к отдельному конечному элементу. Такие же величины, но без этого индекса, имеют отношение ко всей конечно-элементной системе в целом. Как всегда, штриховые разделительные линии означают, что данная матрица является блочной, то есть она составлена из подматриц.

Перемещения произвольной точки конечного элемента в направлении координатных осей представим матрицей-столбцом  $[u]$ . В пространственной задаче она будет содержать компоненты  $u_x, u_y, u_z$ , а в плоской задаче (см. рисунок 11.2) – две из них:

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}.$$

Ясно, что компоненты матрицы  $[u]$  являются функциями координат.

В основе метода конечных элементов лежит допущение о том, что узловые перемещения  $[v^e]$  однозначно определяют значения перемещений  $[u]$  в каждой точке конечного элемента. Зависимость, которая связывает  $[u]$  и  $[v^e]$ , может быть представлена стандартным выражением

$$[u] = [\alpha][v^e], \quad (11.1)$$

где  $[\alpha]$  – прямоугольная матрица, в которой количество строк равно числу компонент матрицы  $[u]$ , а количество столбцов – числу компонент матрицы  $[v^e]$ . Элементами  $[\alpha]$  являются некоторые функции координат. Для их нахождения нужно сделать те или иные предположения относительно характера изменения перемещений в пределах конечного элемента. Для некоторых простейших элементов необходимые подробности будут представлены ниже.

Если матрица  $[\alpha]$  установлена, то с помощью формул Коши можно связать деформации с узловыми перемещениями, представив эту связь в следующей стандартной форме:

$$[\varepsilon] = [\beta][v^e]. \quad (11.2)$$

Здесь  $[\varepsilon]$  – матрица-столбец, содержащая список тех деформаций, которые могут возникнуть в данном конечном элементе; компоненты прямоугольной матрицы  $[\beta]$  получаются из элементов матрицы  $[\alpha]$  в соответствии с формулами Коши.

Например, в случае плоской задачи равенство (11.1) может быть представлено в форме

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} [v^e],$$

где  $[\alpha_x]$  и  $[\alpha_y]$  – строки матрицы  $[\alpha]$ . Отсюда вытекают соотношения

$$u_x = [\alpha_x][v^e]; \quad u_y = [\alpha_y][v^e].$$

Деформации в плоской задаче связаны с  $u_x$  и  $u_y$  формулами

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y},$$

на основании которых получаем

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial [\alpha_x]}{\partial x} [v^e]; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial [\alpha_y]}{\partial y} [v^e]; \quad \varepsilon_{xy} = \left( \frac{\partial [\alpha_y]}{\partial x} + \frac{\partial [\alpha_x]}{\partial y} \right) [v^e].$$

Понимая в этом случае под  $[\varepsilon]$  матрицу-столбец

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix},$$

приходим к соотношению вида (11.2), в котором

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Воспользовавшись далее законом Гука в форме

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon],$$

получим и зависимость напряжений от узловых перемещений

$$[\sigma] = [\kappa][\beta][v^e], \quad (11.3)$$

где  $[\sigma]$  – матрица-столбец напряжений, которая имеет тот же размер, что и матрица  $[\varepsilon]$ . Вид матрицы упругости  $[k]$  зависит от типа напряжённо-деформированного состояния. Например, в случае обобщённого плоского напряжённого состояния формулы закона Гука записываются так:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}); \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx});$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\varepsilon_{xy}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}.$$

Принимая в этом случае в качестве  $[\sigma]$  матрицу

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix},$$

приходим к искомой зависимости  $[\sigma] = [k][\varepsilon]$ , в которой

$$[k] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (11.4)$$

Как видим, напряжённо-деформированное состояние конечного элемента однозначно определяется его узловыми перемещениями, если построена подходящая матрица  $[\alpha]$ .

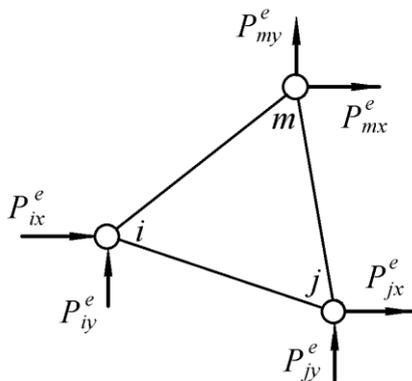
### 11.3 Матрица жёсткости конечного элемента

Конечный элемент испытывает действие внешних нагрузок, приложенных к телу, а также действие напряжений со стороны смежных конечных элементов. Предположим, что все силы, распределённые по объёму и поверхности конечного элемента, заменены некоторыми статически эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в его узлах в направлении узловых перемещений, как показано на рисунке 11.3 применительно к

случаю плоского треугольного конечного элемента. Перечисляя узловые силы в том же порядке, что и перемещения в матрице  $[v^e]$ , составим матрицу-столбец

$$[P^e] = \begin{bmatrix} P_i^e \\ \vdots \\ P_j^e \\ \vdots \\ P_m^e \end{bmatrix},$$

где  $[P_i^e]$ ,  $[P_j^e]$ , ...,  $[P_m^e]$  – матрицы сил в узлах конечного элемента.



**Рисунок 11.3 – Узловые силы конечного элемента**

Основываясь на полученных выше соотношениях, можно установить зависимость между узловыми силами и узловыми перемещениями, которая, по существу, выражает условие равновесия конечного элемента при заданных узловых перемещениях. Выведем эту зависимость, воспользовавшись принципом возможных перемещений. В соответствии с ним для тела, находящегося в равновесии, работа внешних сил на любых возможных перемещениях равна

вариации потенциальной энергии деформации.

Предположим, что узловые перемещения  $[v^e]$  получили независимые бесконечно малые приращения, определяемые матрицей  $[\delta v^e]$ . Силы  $[P^e]$  совершат на этих перемещениях работу

$$\delta A^e = [\delta v^e]^T [P^e]. \quad (11.5)$$

Поскольку перемещения  $[u]$  точек конечного элемента связаны с узловыми перемещениями равенством (11.1), они получают приращения

$$[\delta u] = [\alpha][\delta v^e].$$

Но тогда на основании соотношения (11.2) деформации  $[\varepsilon]$  также изменятся на величину

$$[\delta \varepsilon] = [\beta][\delta v^e]. \quad (11.6)$$

Вариация потенциальной энергии деформации конечного элемента определится по формуле

$$\delta U^e = \int_{\tau^e} [\delta \varepsilon]^T [\sigma] d\tau,$$

где интегрирование выполняется по объёму  $\tau^e$  конечного элемента. Подставим сюда равенство (11.6), а также соотношение (11.3) для напряжений. Тогда формула для  $\delta U^e$  может быть преобразована к виду

$$\delta U^e = [\delta v^e]^T \left( \int_{\tau^e} [\beta]^T [\kappa] [\beta] d\tau \right) [v^e].$$

Выражение в круглых скобках представляет собой квадратную симметричную матрицу, элементы которой получаются интегрированием элементов матрицы  $[\beta]^T [\kappa] [\beta]$  по объёму конечного элемента. Введя обозначение

$$[K^e] = \int_{\tau^e} [\beta]^T [\kappa] [\beta] d\tau, \quad (11.7)$$

приходим к равенству

$$\delta U^e = [\delta v^e]^T [K^e] [v^e]. \quad (11.8)$$

Если приравнять теперь правые части равенств (11.5) и (11.8) и учесть, что матрица  $[\delta v^e]$  содержит произвольные элементы, получим искомую зависимость

$$[P^e] = [K^e] [v^e]. \quad (11.9)$$

Равенство (11.9) связывает узловые силы и перемещения в той же стандартной форме, что и в случае элемента стержневой системы в матричном методе перемещений. Матрица  $[K^e]$  есть *матрица жёсткости конечного элемента*.

Принимая во внимание блочную структуру матрицы

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \dots \\ v_j \\ \vdots \\ \dots \\ v_m \end{bmatrix},$$

матрицы  $[\alpha]$  и  $[\beta]$  в формулах (11.1) и (11.2) можно также представить в блочной форме:

$$[\alpha] = [\alpha_i \mid \alpha_j \mid \dots \mid \alpha_m];$$

$$[\beta] = [\beta_i \mid \beta_j \mid \dots \mid \beta_m].$$

Тогда и матрица жёсткости  $[K^e]$  будет иметь блочную структуру

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & \dots & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & \dots & K_{jm}^e \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & \dots & K_{mm}^e \end{bmatrix},$$

где типовая подматрица  $[K_{rs}^e]$  может быть вычислена по формуле

$$[K_{rs}^e] = \int_{\tau^e} [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] d\tau.$$

#### 11.4 Приведение распределённых внешних нагрузок к эквивалентным узловым силам

Пусть тело нагружено объёмными  $[R]$  и поверхностными  $[p]$  силами, а также, возможно, сосредоточенными силами, приложенными в узловых точках. Чтобы заменить распределённые силы сосредоточенными узловыми, рассмотрим вначале отдельный конечный элемент. Будем предполагать для общности, что часть поверхности элемента совпадает с внешней поверхностью, ограничивающей тело (рисунок 11.4). Это позволяет включить в рассмотрение как объёмные, так и поверхностные силы.

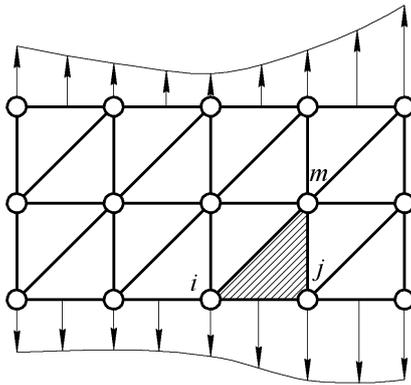


Рисунок 11.4 – Действие распределённых нагрузок на отдельный конечный элемент

Предположим, что узловые перемещения  $[v^e]$  конечного элемента получили бесконечно малые приращения  $[\delta v^e]$ . Приращения перемещений точек конечного элемента определяются матрицей

$$[\delta u] = [\alpha][\delta v^e].$$

Обозначая через  $\delta A^e$  работу сил  $[R]$  и  $[p]$  на этих перемещениях, запишем

$$\delta A^e = \int_{\tau^e} [\delta u]^T [R] d\tau + \int_{\omega^e} [\delta u]^T [p] d\omega,$$

где первый интеграл берётся по объёму  $\tau^e$  конечного элемента, а второй – по его поверхности  $\omega^e$ .

Если подставить сюда  $[\delta u]$ , получим выражение

$$\delta A^e = [\delta v^e]^T \left( \int_{\tau^e} [\alpha]^T [R] d\tau + \int_{\omega^e} [\alpha]^T [p] d\omega \right).$$

Пусть, далее, вместо распределённых действуют сосредоточенные силы, приложенные в узлах конечного элемента и составляющие матрицу

$$[\tilde{P}^e] = \begin{bmatrix} \tilde{P}_i^e \\ \tilde{P}_j^e \\ \vdots \\ \tilde{P}_m^e \end{bmatrix}.$$

На перемещениях  $[\delta v^e]$  они произведут работу

$$\delta \tilde{A}^e = [\delta v^e]^T [\tilde{P}^e].$$

Будем считать, что силы  $[\tilde{P}^e]$  эквивалентны заданной внешней нагрузке, если  $\delta \tilde{A}^e = \delta A^e$ . Учитывая, что компоненты матрицы  $[\delta v^e]$  независимы и произвольны, приходим к соотношению

$$[\tilde{P}^e] = \int_{\tau^e} [\alpha]^T [R] d\tau + \int_{\omega^e} [\alpha]^T [p] d\omega. \quad (11.10)$$

С учётом блочной структуры матрицы  $[\alpha]$  можно получить выражение для вычисления типового блока  $[\tilde{P}_r^e]$  матрицы  $[\tilde{P}^e]$ , относящегося к какому-либо узлу  $r$  данного конечного элемента:

$$[\tilde{P}_r^e] = \int_{\tau^e} [\alpha_r]^T [R] d\tau + \int_{\omega^e} [\alpha_r]^T [p] d\omega.$$

Эта формула определяет тот вклад, который вносит данный конечный элемент в эквивалентные узловые силы в узле  $r$  тела. Аналогично выполняется приведение распределённых нагрузок к эквивалентным сосредоточенным силам и для других конечных элементов. Заметим, что если конечный элемент находится целиком внутри тела, то второе слагаемое в формуле (11.10) будет для него отсутствовать.

Если далее просуммировать вклады всех конечных элементов, сходящихся в узле  $r$ , то получим матрицу эквивалентных сил в этом узле

$$[\tilde{P}_r] = \sum_e [\tilde{P}_r^e],$$

где суммирование формально производится по всем конечным элементам, но фактически оно затрагивает лишь те из них, которые сходятся в узле  $r$ .

## 11.5 Объединение конечных элементов и определение узловых перемещений

Выполнив дискретизацию упругого тела, можно теперь составить уравнения равновесия узлов и установить связь между узловыми перемещениями

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

где  $n$  – общее число узлов, и узловыми силами.

Если в узлах тела приложены сосредоточенные силы, то из них можно образовать матрицу

$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix},$$

где типовой блок  $[P_r]$  представляет собой подматрицу сил, действующих в узле  $r$  в направлении перемещений  $[v_r]$ .

Узловые силы, эквивалентные внеузловым нагрузкам, также объединим в матрицу

$$[\tilde{P}] = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_n \end{bmatrix}.$$

Уравнения равновесия для каждого узла составляются точно так же, как это делается в матричном методе перемещений для стержневых систем. Если их объединить, получим зависимость между узловыми перемещениями и узловыми силами вида

$$[K][v] = [P] + [\tilde{P}]. \quad (11.11)$$

Здесь  $[K]$  – матрица жёсткости всего тела, которая может быть представлена в форме

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}.$$

Типовая подматрица  $[K_{ij}]$  вычисляется через подматрицы отдельных конечных элементов так же, как и для стержневых систем, а именно:

$[K_{ij}] = [0]$ , если узлы  $i$  и  $j$  не принадлежат одновременно ни к одному конечному элементу;

$[K_{ij}] = \sum_e [K_{ij}^e]$ , где суммирование производится по тем конечным элементам, которые одновременно имеют узлы с номерами  $i$  и  $j$ ;

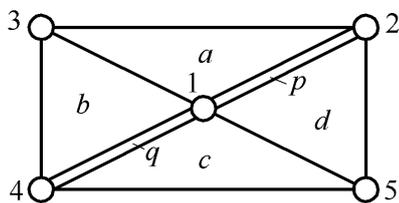
$[K_{ii}] = \sum_e [K_{ii}^e]$ , где суммирование производится по всем конечным элементам, сходящимся в узле  $i$ .

Все перечисленные варианты можно объединить одной общей формулой

$$[K_{ij}] = \sum_e [K_{ij}^e],$$

где суммирование формально распространяется на все конечные элементы, фактически же оно затрагивает лишь те конечные элементы, которым одновременно принадлежат узлы  $i$  и  $j$ .

Поясним схему формирования матрицы жёсткости простым примером. На рисунке 11.5 показана конечно-элементная модель пластины, подкреплённой ребром жёсткости.



**Рисунок 11.5 – Конечно-элементная модель пластины с ребром жёсткости**

Модель имеет 5 узлов и включает четыре конечных элемента плоской пластины треугольной формы с узлами в вершинах (элементы  $a, b, c, d$ ) и два стержневых конечных элемента ( $p$  и  $q$ ) с узлами по концам. Пусть найдены матрицы жёсткости отдельных конечных элементов. Они имеют блочную структуру типа

$$[K^a] = \begin{bmatrix} K_{11}^a & K_{12}^a & K_{13}^a \\ K_{21}^a & K_{22}^a & K_{23}^a \\ K_{31}^a & K_{32}^a & K_{33}^a \end{bmatrix}; \quad [K^q] = \begin{bmatrix} K_{11}^q & K_{14}^q \\ K_{41}^q & K_{44}^q \end{bmatrix} \text{ и т.д.}$$

Здесь верхний индекс указывает, к какому конечному элементу относится данная величина. Нижние индексы означают номера узлов, принадлежащих конечному элементу.

Матрица жёсткости данной системы, имеющая в блочном виде размер  $5 \times 5$ , формируется по следующей схеме:

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{array}{l} K_{11}^a + K_{11}^b + K_{11}^c + \\ + K_{11}^d + K_{11}^p + K_{11}^q \\ K_{21}^a + K_{21}^d + K_{21}^p \\ K_{31}^a + K_{31}^b \\ K_{41}^b + K_{41}^c + K_{41}^q \\ K_{51}^c + K_{51}^d \end{array} & \begin{array}{l} K_{12}^a + K_{12}^d + K_{12}^p \\ K_{22}^a + K_{22}^d + K_{22}^p \\ K_{32}^a \\ 0 \\ K_{52}^d \end{array} & \begin{array}{l} K_{13}^a + K_{13}^b \\ K_{23}^a \\ K_{33}^a + K_{33}^b \\ K_{43}^b \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} K_{14}^b + K_{14}^c + K_{14}^q \\ 0 \\ K_{34}^b \\ K_{44}^b + K_{44}^c + K_{44}^q \\ K_{54}^c \end{array} & \begin{array}{l} K_{15}^c + K_{15}^d \\ K_{25}^d \\ 0 \\ K_{45}^c \\ K_{55}^c + K_{55}^d \end{array} \end{array} \end{array}$$

Для нахождения узловых перемещений необходимо исключить из равенства (11.11) нулевые перемещения тех узлов, которые имеют закрепления. Матрицу остающихся неизвестных перемещений обозначим через  $[v_\alpha]$ , а матрицы сил в направлении этих перемещений – через  $[P_\alpha]$  и  $[\tilde{P}_\alpha]$ . Вычёркивая в матрице жёсткости строки и столбцы, соответствующие нулевым перемещениям, придём к матричному уравнению

$$[K_{\alpha\alpha}][v_\alpha] = [P_\alpha] + [\tilde{P}_\alpha], \quad (11.12)$$

где  $[K_{\alpha\alpha}]$  – сокращённая матрица жёсткости.

Решив систему уравнений (11.12), найдём неизвестные узловые перемещения, после чего могут быть вычислены напряжения в каждом конечном элементе.

Далее рассмотрим примеры простых конечных элементов, используемых в плоской задаче теории упругости.

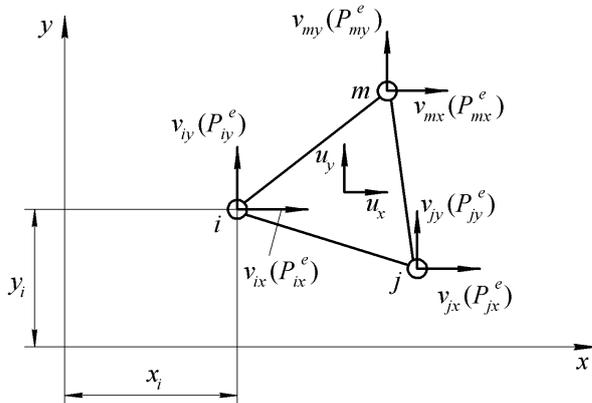
## 11.6 Плоский треугольный конечный элемент

Простейшим конечным элементом, применяемым для решения плоской задачи теории упругости, является треугольный элемент с узлами в вершинах

(рисунок 11.6). Геометрия элемента определяется координатами его узлов  $x_i, y_i; x_j, y_j; x_m, y_m$ .

Матрицы сил и перемещений для каждого узла состоят из двух компонент. Так, для узла  $i$  имеем

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}; \quad [P_i^e] = \begin{bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \end{bmatrix}.$$



**Рисунок 11.6 – Плоский треугольный конечный элемент**

При составлении матриц  $[v^e]$  и  $[P^e]$  для всего конечного элемента условимся обходить узлы против часовой стрелки. Тогда

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}; \quad [P^e] = \begin{bmatrix} P_i^e \\ \vdots \\ P_j^e \\ \vdots \\ P_m^e \end{bmatrix}.$$

Матрица перемещений произвольной точки конечного элемента

имеет две компоненты:

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}.$$

Чтобы выразить  $[u]$  через  $[v^e]$  предположим, что перемещения  $u_x$  и  $u_y$  в пределах элемента изменяются по закону

$$u_x = f_1 + f_2x + f_3y; \quad u_y = f_4 + f_5x + f_6y,$$

где  $f_i$  – некоторые постоянные.

В вершинах треугольника  $u_x$  и  $u_y$  должны совпадать с соответствующими узловыми перемещениями:

$$\begin{aligned} u_x = v_{ix}; \quad u_y = v_{iy} & \quad \text{при } x = x_i; \quad y = y_i; \\ u_x = v_{jx}; \quad u_y = v_{jy} & \quad \text{при } x = x_j; \quad y = y_j; \\ u_x = v_{mx}; \quad u_y = v_{my} & \quad \text{при } x = x_m; \quad y = y_m. \end{aligned}$$

Отсюда получаем шесть уравнений, связывающих постоянные  $f_i$  с узловыми перемещениями. Эти уравнения распадаются на две группы, в первую из которых войдут постоянные  $f_1, f_2$  и  $f_3$ , а во вторую –  $f_4, f_5$  и  $f_6$ .

Первая группа уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 x_i + f_3 y_i &= v_{ix}; \\ f_1 + f_2 x_j + f_3 y_j &= v_{jx}; \\ f_1 + f_2 x_m + f_3 y_m &= v_{mx}. \end{aligned}$$

Решая данную систему по правилу Крамера, получаем выражения

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2F^e} (a_i v_{ix} + a_j v_{jx} + a_m v_{mx}); \\ f_2 &= \frac{1}{2F^e} (b_i v_{ix} + b_j v_{jx} + b_m v_{mx}); \\ f_3 &= \frac{1}{2F^e} (c_i v_{ix} + c_j v_{jx} + c_m v_{mx}), \end{aligned}$$

где

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j; \quad b_i = y_j - y_m; \quad c_i = x_m - x_j; \quad (11.13)$$

остальные коэффициенты получаются круговой заменой индексов по схеме  $i \rightarrow j \rightarrow m \rightarrow i$ .

Величина  $F^e$  представляет собой площадь треугольника  $ijm$  и может быть вычислена через координаты узлов с помощью определителя:

$$2F^e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = a_i + a_j + a_m. \quad (11.14)$$

Подставив найденные выражения в формулу для  $u_x$ , после соответствующей группировки слагаемых получаем

$$u_x = \frac{1}{2F^e} \left[ (a_i + b_i x + c_i y) v_{ix} + (a_j + b_j x + c_j y) v_{jx} + (a_m + b_m x + c_m y) v_{mx} \right].$$

Аналогичным образом устанавливаем связь перемещения  $u_y$  с его узловыми значениями  $v_{iy}$ ,  $v_{jy}$ ,  $v_{my}$ .

Если ввести обозначение

$$\psi_r(x, y) = a_r + b_r x + c_r y \quad (r = i, j, m),$$

то полученные результаты могут быть записаны в виде

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2F^e} \begin{bmatrix} \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ \vdots \\ v_{jx} \\ v_{jy} \\ \vdots \\ v_{mx} \\ v_{my} \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекает искомое представление перемещений

$$[u] = [\alpha][v^e],$$

где

$$[\alpha] = \frac{1}{2F^e} \begin{bmatrix} \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m \end{bmatrix}.$$

Матрицу  $[\alpha]$  можно записать в блочной форме

$$[\alpha] = [\alpha_i \mid \alpha_j \mid \alpha_m],$$

где типовой блок

$$[\alpha_r] = \frac{1}{2F^e} \begin{bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{bmatrix} \quad (r = i, j, m).$$

Выделим далее в матрице  $[\alpha]$  строки  $[\alpha_x]$  и  $[\alpha_y]$  и вычислим матрицу  $[\beta]$  в соотношении  $[\varepsilon] = [\beta][v^e]$ :

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \hline \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица  $[\alpha]$  представлена в блочной форме, такую же структуру будет иметь и матрица  $[\beta]$ :

$$[\beta] = [\beta_i \mid \beta_j \mid \beta_m].$$

Здесь типовой блок

$$[\beta_r] = \frac{1}{2F^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2F^e} \begin{bmatrix} b_r & 0 \\ 0 & c_r \\ c_r & b_r \end{bmatrix}. \quad (11.15)$$

Как видим, элементы матрицы  $[\beta]$  не зависят от координат. Это означает, что деформации (и, следовательно, напряжения) в пределах рассматри-

ваемого конечного элемента постоянны. При переходе от одного конечного элемента к другому они изменяются скачкообразно.

Если моделируемая область представляет собой пластину, то будем иметь дело с обобщённым плоским напряжённым состоянием, для которого матрица упругости  $[\kappa]$  имеет вид (11.4):

$$[\kappa] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

По общей формуле

$$[K^e] = \int_{\tau^e} [\beta]^T [\kappa] [\beta] d\tau$$

теперь можно найти матрицу жёсткости этого элемента.

В данном случае подынтегральное выражение не зависит от координат и может быть вынесено за знак интеграла. Если  $h$  – толщина пластины, то объём элемента  $\tau^e = hF^e$ . Таким образом,

$$[K^e] = [\beta]^T [\kappa] [\beta] \int_{\tau^e} d\tau = hF^e [\beta]^T [\kappa] [\beta]$$

или

$$[K^e] = hF^e \begin{bmatrix} \beta_i^T \\ \beta_j^T \\ \beta_m^T \end{bmatrix} [\kappa] \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_j \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$[K_{rs}^e] = hF^e [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] \quad (r, s = i, j, m). \quad (11.16)$$

В случае плоской деформации матрица жёсткости рассчитывается на единицу длины тела. Выражение для неё можно также получить по формулам (1.13)...(11.16), приняв  $h=1$  и заменив в матрице  $[\kappa]$  модуль упругости  $E$  на  $E/(1-\mu^2)$ , а коэффициент Пуассона  $\mu$  на  $\mu/(1-\mu)$ .

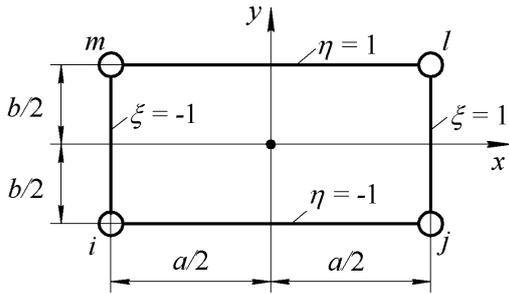
Достоинством рассмотренного элемента является его простота. Но поскольку напряжения в пределах треугольника постоянны, для получения достаточной точности решения приходится часто использовать весьма густую сетку.

## 11.7 Плоский прямоугольный элемент

Рассмотрим далее плоский прямоугольный элемент с узлами в вершинах (рисунок 11.7). Начало системы координат перенесём в центр тяжести прямоугольника и введём безразмерные координаты

$$\xi = \frac{2x}{a}; \quad \eta = \frac{2y}{b},$$

где  $a$  и  $b$  – стороны прямоугольника. На каждой из сторон параметры  $\xi$  и  $\eta$  принимают значения 1 или  $-1$ , как указано на рисунке 11.7.



**Рисунок 11.7 – Прямоугольный конечный элемент**

Для приближённого представления поля перемещения конечного элемента воспользуемся билинейной зависимостью перемещений  $u_x$ ,  $u_y$  от координат:

$$\begin{aligned} u_x &= f_1 + f_2\xi + f_3\eta + f_4\xi\eta; \\ u_y &= f_5 + f_6\xi + f_7\eta + f_8\xi\eta. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Количество постоянных в этих зависимостях равно числу узловых перемещений, что позволяет установить однозначную связь между ними. Эту связь получим, приравняв в узловых точках перемещения  $u_x$  и  $u_y$  к их узловым значениям. В частности, последовательно приравнявая  $u_x$  к горизонтальным перемещениям узлов  $i$ ,  $j$ ,  $l$  и  $m$ , придём к равенствам:

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 - f_3 + f_4 &= v_{ix}; \\ f_1 + f_2 - f_3 - f_4 &= v_{jx}; \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4 &= v_{lx}; \\ f_1 - f_2 + f_3 - f_4 &= v_{mx}. \end{aligned}$$

Если разрешить данные уравнения относительно  $f_1, \dots, f_4$ , будем иметь выражения:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4}(v_{ix} + v_{jx} + v_{lx} + v_{mx}); \\ f_2 &= \frac{1}{4}(-v_{ix} + v_{jx} + v_{lx} - v_{mx}); \\ f_3 &= \frac{1}{4}(-v_{ix} - v_{jx} + v_{lx} + v_{mx}); \\ f_4 &= \frac{1}{4}(v_{ix} - v_{jx} + v_{lx} - v_{mx}). \end{aligned}$$

Подставив их в формулу для  $u_x$  и сгруппировав соответствующим образом слагаемые, получим следующее соотношение:

$$u_x = \psi_i v_{ix} + \psi_j v_{jx} + \psi_l v_{lx} + \psi_m v_{mx},$$

где через  $\psi_r(\xi, \eta)$  ( $r = i, j, l, m$ ) обозначены четыре функции координат, которые можно представить единым выражением

$$\psi_r(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta). \quad (11.18)$$

Узловые значения координат  $\xi_r, \eta_r$  ясны из рисунка 11.7. Подобным же образом выводится соотношение

$$u_y = \psi_i v_{iy} + \psi_j v_{jy} + \psi_l v_{ly} + \psi_m v_{my}.$$

Объединяя найденные выражения для  $u_x$  и  $u_y$ , получим требуемую связь  $[u] = [\alpha][v^e]$ , где

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}; \quad [v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \dots \\ v_j \\ \dots \\ v_l \\ \dots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[\alpha]$  имеет здесь вид

$$[\alpha] = [\alpha_i \mid \alpha_j \mid \alpha_l \mid \alpha_m],$$

где

$$[\alpha_r] = \begin{bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{bmatrix} \quad (r = i, j, l, m). \quad (11.19)$$

По формуле

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \dots \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \dots \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

находим теперь матрицу  $[\beta]$ . Так же, как и матрицу  $[\alpha]$ , её можно представить в блочной форме:

$$[\beta] = [\beta_i \mid \beta_j \mid \beta_l \mid \beta_m],$$

где на основании (11.19) типовая подматрица

$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{b} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

в соответствии с (11.18) будем иметь

$$[\beta_r] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\xi_r}{a}(1 + \eta_r \eta) & 0 \\ 0 & \frac{\eta_r}{b}(1 + \xi_r \xi) \\ \frac{\eta_r}{b}(1 + \xi_r \xi) & \frac{\xi_r}{a}(1 + \eta_r \eta) \end{bmatrix}. \quad (11.20)$$

В отличие от предыдущего случая элементы матрицы  $[\beta]$  зависят здесь от координат.

Далее вычисляем матрицу жёсткости конечного элемента по формуле

$$[K^e] = \int_{\tau^e} [\beta]^T [\kappa] [\beta] d\tau,$$

где матрица  $[\kappa]$  определяется выражением (11.4), а  $d\tau = h \frac{ab}{4} d\xi d\eta$ .

С учётом блочной структуры матрицы  $[\beta]$  можно и для матрицы  $[K^e]$  получить блочное представление

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{il}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jl}^e & K_{jm}^e \\ K_{li}^e & K_{lj}^e & K_{ll}^e & K_{lm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{ml}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix},$$

где типовая подматрица  $[K_{rs}^e]$  находится по формуле

$$[K_{rs}^e] = \frac{hab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] d\xi d\eta. \quad (11.21)$$

Заметим, что задание перемещений в виде (11.17) является простейшим, но не единственным употребительным вариантом для прямоугольного

конечного элемента. Можно, например, потребовать, чтобы в пределах конечного элемента удовлетворялись дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0.$$

Как известно, однородные уравнения равновесия в плоской задаче теории упругости удовлетворяются тождественно, если напряжения выражаются через так называемую функцию напряжений посредством соотношений

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

При этом функция  $\varphi$  должна удовлетворять бигармоническому уравнению  $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$  или

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Примем, что в пределах рассматриваемого конечного элемента функция напряжений изменяется по закону

$$\varphi = C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + C_4 x^3 + C_5 y^3,$$

при котором удовлетворяется бигармоническое уравнение. В этом случае напряжения получаются равными

$$\sigma_{xx} = 2C_3 + 6C_5 y; \quad \sigma_{yy} = 2C_1 + 6C_4 x; \quad \sigma_{xy} = -C_2.$$

Как видим, используемое здесь представление для функции напряжений включает простейшие напряжённые состояния: равномерное растяжение в двух направлениях, чистый сдвиг и чистый изгиб в направлении каждой из осей  $x$ ,  $y$ .

Определим затем деформации по формулам закона Гука, а потом и перемещения, интегрируя соотношения Коши

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

При интегрировании появятся ещё три константы. Опуская подробности, укажем, что результаты могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} u_x &= f_1 + f_2 x + f_3 y + f_4 xy - \frac{1}{2} f_8 (\mu x^2 + y^2); \\ u_y &= f_5 + f_6 x + f_7 y + f_8 xy - \frac{1}{2} f_4 (x^2 + \mu y^2), \end{aligned} \quad (11.22)$$

где  $f_1, \dots, f_8$  – новые постоянные.

Далее можно, как и ранее, выразить постоянные  $f_i$  через узловые перемещения и получить матрицы  $[\alpha]$ ,  $[\beta]$ , а затем и  $[K^e]$ .

### 11.8 О сходимости метода конечных элементов

Приближённое решение, получаемое по методу конечных элементов, должно стремиться к точному по мере сгущения сетки, то есть с увеличением числа элементов. Характер сходимости может быть различным при использовании различных конечных элементов. Он зависит от того, в какой степени учтены особенности геометрии тела, а также насколько хорошо обеспечена аппроксимация перемещений для всего тела в целом.

Прежде всего, очевидно, что деформированные конечные элементы должны плотно прилегать друг к другу, образуя сплошное деформированное тело. Другими словами, перемещения  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ , которые для каждого конечного элемента вычисляются через его узловые перемещения, должны оставаться непрерывными функциями при переходе от одного элемента к другому. Если это условие обеспечивается при любых узловых перемещениях, то конечные элементы называются совместными.

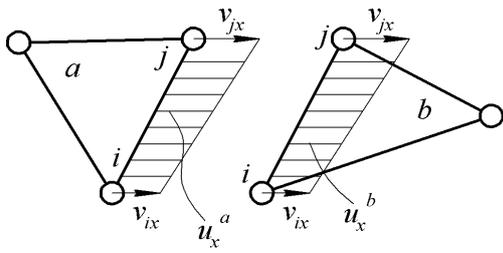
Примером совместных могут служить треугольные конечные элементы плоской задачи теории упругости, рассмотренные выше. Перемещения  $u_x$ ,  $u_y$  определяются здесь выражениями

$$u_x = f_1 + f_2x + f_3y; \quad u_y = f_4 + f_5x + f_6y$$

и изменяются по линейному закону вдоль любой прямой, в том числе и на сторонах треугольника. Линейная функция полностью определена, если известны её значения в двух каких-либо точках. Скажем, перемещения  $v_{ix}$  и  $v_{jx}$  соседних узлов  $i$  и  $j$  однозначно определяют перемещения  $u_x$  точек, лежащих на стороне  $ij$ , и эти перемещения будут одинаковыми для двух смежных конечных элементов  $a$  и  $b$  с общей стороной  $ij$  (рисунок 11.8). То же самое можно сказать о перемещениях  $u_y$  для смежных элементов. Следовательно, данные конечные элементы являются совместными.

Точно так же прямоугольные конечные элементы, в которых перемещения задаются соотношениями

$$\begin{aligned} u_x &= f_1 + f_2\xi + f_3\eta + f_4\xi\eta; \\ u_y &= f_5 + f_6\xi + f_7\eta + f_8\xi\eta, \end{aligned}$$

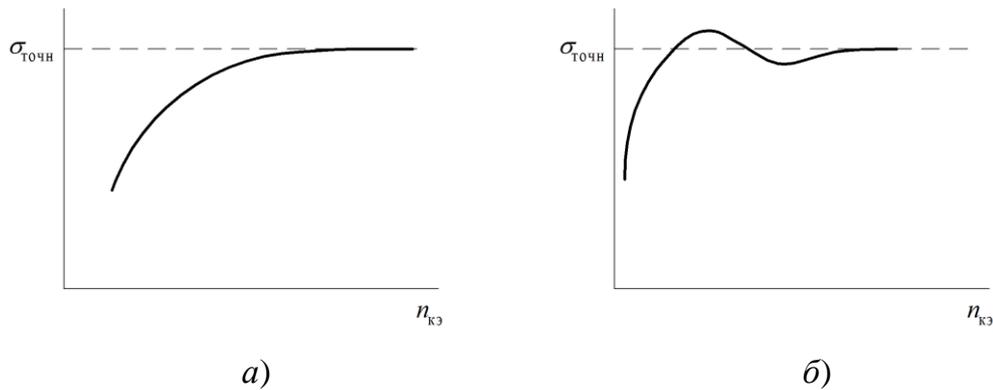


**Рисунок 11.8 – К совместности треугольных элементов**

совместны по отношению друг другу, так как  $u_x$  и  $u_y$  изменяются по линейному закону вдоль каждой стороны. Заметим, что по тем же соображениям совместность будет обеспечиваться и при использовании в конечно-элементной модели прямоугольных элементов в сочетании с треугольными.

Такая комбинация может оказаться полезной для плоских тел, имеющих форму, отличную от прямоугольной.

При использовании совместных конечных элементов имеет место монотонная сходимость приближённого решения к точному. Перемещения и напряжения по мере сгущения сетки стремятся к своим точным значениям, как показано на рисунке 11.9,а.

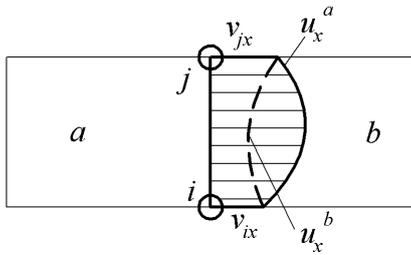


**Рисунок 11.9 – Монотонная (а) и немонотонная (б) сходимость к точному значению**

Наряду с совместными иногда используются и несовместные конечные элементы. Примером таких элементов являются прямоугольные конечные элементы с законом изменения перемещений

$$\begin{aligned}
 u_x &= f_1 + f_2x + f_3y + f_4xy - \frac{1}{2}f_8(\mu x^2 + y^2); \\
 u_y &= f_5 + f_6x + f_7y + f_8xy - \frac{1}{2}f_4(x^2 + \mu y^2),
 \end{aligned}
 \tag{11.23}$$

о которых говорилось выше. Здесь при  $x = \text{const}$  или  $y = \text{const}$  перемещения изменяются по квадратичному закону. Квадратная парабола задаётся тремя параметрами, и узловые перемещения двух соседних вершин прямоугольника не могут однозначно определить значения перемещений  $u_x$  и  $u_y$  на прилегающих к ним сторонах. Следовательно, на линии раздела смежных конечных элементов перемещения будут претерпевать разрывы (рисунок 11.10).



**Рисунок 11.10 – Перемещения на границе несовместных элементов**

в пределе соответствовать линейной зависимости от координат вида

$$u_x = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z;$$

$$u_y = b_1 + b_2x + b_3y + b_4z;$$

$$u_z = c_1 + c_2x + c_3y + c_4z.$$

Если принятый закон изменения перемещений в конечном элементе позволяет обеспечить такой характер деформирования, то в пределе будут выполняться и условия совместности.

В частности, соотношения (11.23) удовлетворяют этому условию, так как при  $f_4 = f_8 = 0$  они как раз и определяют линейную зависимость перемещений  $u_x$  и  $u_y$  от координат  $x$ ,  $y$ . Поскольку постоянные  $f_1, \dots, f_8$  однозначно связаны с узловыми перемещениями, из сказанного следует, что при подходящем задании узловых перемещений в конечном элементе может быть создано линейное поле перемещений. Именно такие условия будут возникать при сгущении сетки, что и позволяет пользоваться подобными конечными элементами.

В случае несовместных конечных элементов сходимость приближённого решения к точному оказывается, как правило, немонотонной. По мере сгущения сетки приближённое значение какой-либо величины может оказываться то выше, то ниже точного значения (рисунок 11.9,б).

При практическом использовании метода конечных элементов встаёт вопрос о том, каковы должны быть размеры конечных элементов для получения приемлемой точности. При отсутствии опыта приходится экспериментировать, исследуя изменение численных результатов по мере сгущения сетки.

Использование несовместных элементов допустимо в том случае, когда несовместность исчезает с уменьшением размеров конечных элементов. При сгущении сетки деформированное состояние каждого конечного элемента должно приближаться к однородному, а изменение перемещений в элементе должно в

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Алгоритм выбора метода исследования геометрической неизменяемости и определения усилий в стержнях ферм [Текст] : метод. указания / сост. Х. С. Хазанов. – Куйбышев: КуАИ, 1984. – 32 с.
- 2 Зацепина, М. В. Балочная теория расчета тонкостенных конструкций [Текст] : учеб. пособие / М. В. Зацепина. – Самара: СГАУ, 1993. – 48 с.
- 3 Кац, А. М. Теория упругости [Текст] : учеб. для студентов вузов / А. М. Кац. – СПб. : Лань, 2002. – 208 с.
- 4 Конечно-элементное решение плоской задачи теории упругости [Текст]: метод. указания к лаб. работам / сост. Ю. В. Скворцов, А. В. Хивинцев. – Самара: СГАУ, 1999. – 16 с.
- 5 Леонов, В. И. Строительная механика элементов конструкций летательных аппаратов в виде оболочек вращения [Текст] : учеб. пособие / В. И. Леонов. – Куйбышев: КуАИ, 1987. – 87 с.
- 6 Липовцев, Ю. В. Прикладная теория упругости [Текст] : учеб. пособие / Ю. В. Липовцев, М. Ю. Русин. – М.: Дрофа, 2008. – 319 с.
- 7 Тонкостенные конструкции [Текст] : метод. указания к лаб. работам / сост. В. А. Мехеда. – Куйбышев: КуАИ, 1983. – 36 с.
- 8 Образцов, И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов [Текст] : учеб. пособие / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.
- 9 Строительная механика летательных аппаратов [Текст] : учеб. для авиационных специальностей вузов / И. Ф. Образцов, Л. А. Булычев, В. В. Васильев [и др.] ; под ред. И. Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
- 10 Плоские фермы. Тонкостенные конструкции [Текст] : метод. указания / сост. В. М. Дуплякин, В. И. Леонов. – Самара: СГАУ, 1993. – 40 с.
- 11 Погорелов, В. И. Строительная механика тонкостенных конструкций [Текст] : учеб. пособие / В. И. Погорелов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 528 с.
- 12 Расчёт пластин и безмоментных оболочек [Текст] : метод. указания / сост. М. В. Зацепина, Л. М. Савельев. – Самара: СГАУ, 1994. – 30 с.
- 13 Расчёт ферм матричным методом перемещений на ЭВМ [Текст]: метод. указания / сост. В. И. Леонов, Ю. В. Скворцов. – Самара: СГАУ, 2007. – 24 с.

- 14 Саргсян, А. Е. Строительная механика. Механика инженерных конструкций [Текст] : учеб. для вузов / А. Е. Саргсян. – М.: Высшая школа, 2004. – 462 с.
- 15 Стержневые системы [Текст] : метод. указания к лаб. работам / сост. В. А. Мехеда. – Куйбышев: КуАИ, 1982. – 28 с.
- 16 Тонкостенные оболочки [Текст] : метод. указания к лаб. работам / сост. И. С. Ахмедьянов, В. А. Мехеда. – Куйбышев: КуАИ, 1985.– 18 с.