

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВА-  
ТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Л.М. Савельев

**Теория пластин и оболочек**

Конспект лекций

направление

151600.68 Прикладная механика

магистерская программа

"Прочность конструкций летательных аппаратов"

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	Общая теория изгиба пластин .....	1-1
1.1.	Основные соотношения при изгибе пластин .....	1-1
1.2.	Потенциальная энергия изгиба пластины .....	1-3
1.3.	Метод Ритца в задачах изгиба пластин .....	1-5
1.4.	Метод Бубнова – Гаплёркина .....	1-6
2.	Изгиб круглых пластин .....	2-1
2.1.	Соотношения теории изгиба пластин в полярных координатах.....	2-1
2.2.	Осесимметричный изгиб круглой пластины.....	2-4
2.3.	Расчёт круглой пластины на действие сосредоточенной силы в центре .....	2-5
2.4.	Расчёт круглой пластины на действие сосредоточенного момента в центре.....	2-7
3.	Безмоментная теория оболочек .....	3-1
3.1.	Геометрия оболочек вращения .....	3-1
3.2.	Уравнения безмоментной теории оболочек вращения.....	3-3
3.3.	Расчёт оболочек вращения при несимметричном нагружении.....	3-7
4.	Моментная теория цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении .....	4-1
4.1.	Основные соотношения осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки .....	4-1
4.2.	Решение дифференциального уравнения изгиба .....	4-4
5.	Осесимметричный изгиб оболочек вращения .....	5-1
5.1.	Основные соотношения моментной теории оболочек вращения при осесимметричном нагружении .....	5-1
5.2.	Приближённый метод учёта краевого эффекта .....	5-5

# 1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБА ПЛАСТИН

## 1.1. Основные соотношения при изгибе пластин

Рассмотрим пластину толщиной  $L$  (рисунок 1.1), отнесённую к декартовой системе координат  $x, y, z$ . Плоскость  $xy$  совместим с срединной плоскостью пластины.

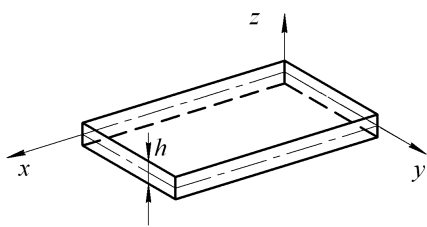


Рисунок 1.1

Теория изгиба пластин основывается на гипотезах Кирхгофа. Согласно первой из них считается, что нормальные отрезки к срединной плоскости остаются нормальными к деформированной срединной поверхности и не изменяют своей длины. Вторая гипотеза постулирует, что слои пластины, параллельные срединной плоскости, не оказывают давления друг на друга, что означает пренебрежение нормальным напряжением  $\sigma_{zz}$  по сравнению с другими компонентами. Эти гипотезы позволяют свести трёхмерную задачу расчёта пластины к двумерной, в которой все величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние пластины, выражаются через одну функцию координат  $x, y$  – прогиб  $w(x, y)$ .

Если принять, что прогибы пластины малы по сравнению с её толщиной (скажем,  $w/h < \frac{1}{5}$ ), то можно пренебречь деформациями срединной плоскости. В этом случае перемещения  $u_x$  и  $u_y$  точек пластины изменяются по толщине пропорционально координате  $z$ :

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.1)$$

Деформации слоёв, параллельных срединной плоскости, определяются формулами

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$  – нормальные деформации,  $\gamma_{xy}$  – деформация сдвига. Остальные деформации оказываются равными нулю:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad \varepsilon_{zz} = 0. \quad (1.3)$$

Слои пластины, параллельные срединной плоскости, находятся в условиях плоского напряжённого состояния с напряжениями  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ . Их результирующие по толщине сводятся к погонным изгибающим  $M_x, M_y$  и крутящим  $M_{xy} = M_{yx}$  моментам, которые связаны с  $w(x, y)$  соотношениями

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$M_{xy} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.4)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (1.5)$$

– изгибная жёсткость пластины ( $E, \mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины).

Через  $M_x, M_y$  и  $M_{xy}$  напряжения выражаются следующим образом:

$$\sigma_{xx} = \frac{12M_x}{h^3} z; \quad \sigma_{yy} = \frac{12M_y}{h^3} z; \quad \sigma_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z. \quad (1.6)$$

Наибольшие по абсолютной величине значения напряжений оказываются при  $z = \pm h/2$ , где они равны

$$\sigma_{xx} = \pm \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_{yy} = \pm \frac{6M_y}{h^2}; \quad \sigma_{xy} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^2}. \quad (1.7)$$

Помимо этих основных напряжений в сечениях пластины плоскостями  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$  возникают также поперечные касательные напряжения  $\sigma_{xz}; \sigma_{yz}$ . Их результирующие по толщине пластины представляют собой погонные перерезывающие силы  $Q_x; Q_y$ , выражающиеся через  $w(x, y)$  посредством формул

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \quad (1.8)$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

При этом сами напряжения могут быть вычислены по формулам

$$\sigma_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right); \quad \sigma_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right). \quad (1.9)$$

Максимальные значения поперечных касательных напряжений возникают в точках срединной поверхности (при  $z = 0$ ) и имеют величину

$$\frac{3}{2} \frac{Q_x}{h}; \quad \sigma_{yz} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h}. \quad (1.10)$$

Функция  $w(x, y)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных четвёртого порядка

$$D\nabla^2\nabla^2w = p(x, y) \quad (1.11)$$

или, в развёрнутом виде,

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = p(x, y). \quad (1.12)$$

Здесь  $p(x, y)$  – поперечная нагрузка на пластину.

Решение уравнения (1.12) необходимо подчинить граничным условиям. На каждом краю должно быть сформулировано два граничных условия. Применительно к прямоугольной пластине, ограниченной в плане сторонами  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ , запись граничных условий для трёх классических схем закрепления представлена в таблице 1.1. Через  $Q_x^*$  и  $Q_y^*$  в таблице обозначены так называемые обобщённые перерезывающие силы в смысле Кирхгофа.

**Таблица 1.1 Граничные условия для прямоугольной пластины**

Край	Жёсткая заделка	Свободное опирание	Свободный край
$x = \text{const}$	$w = 0;$ $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$w = 0;$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$	$M_x = 0;$ $Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$
$y = \text{const}$	$w = 0;$ $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$	$w = 0;$ $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$	$M_y = 0$ $Q_y^* = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$

## 1.2. Потенциальная энергия изгиба пластины

Найдём выражение потенциальной энергии изгиба пластины через функцию  $w$ . Как известно, потенциальная энергия деформации тела  $U$  определяется как

$$U = \int_{\tau} W d\tau, \quad (1.13)$$

где  $\tau$  – объём тела;  $W$  – удельная потенциальная энергия деформации:

$$W = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \varepsilon_{zz}\sigma_{zz} + \gamma_{xy}\sigma_{xy} + \gamma_{xz}\sigma_{xz} + \gamma_{yz}\sigma_{yz}).$$

Применительно к изгибу пластины, когда

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad \sigma_{zz} = 0,$$

выражение для  $W$  имеет более простой вид

$$W = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + \gamma_{xy} \sigma_{xy}).$$

Подставив в это выражение соотношения (1.2) и (1.6), будем иметь

$$W = -\frac{6z^2}{h^3} \left( M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$

Представляя в формуле (1.13)  $d\tau$  в виде произведения

$$d\tau = z d\omega,$$

где  $\omega$  – площадь пластинки в плане, и выполнив интегрирование по координате  $z$ , получим, что

$$U = -\frac{1}{2} \iint_{\omega} \left( M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) d\omega.$$

Подстановка соотношений (1.4) даёт

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\omega} D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d\omega.$$

Раскроем здесь круглые скобки и добавим и вычтем в квадратных скобках слагаемое  $2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ . Это позволяет представить полученный результат в более компактном виде

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\omega} D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} d\omega. \quad (1.14)$$

Можно показать, что в случае пластины, жёстко заделанной по всему контуру, а также для пластины, контур которой очерчен прямыми линиями и имеет свободное опирание, интеграл

$$\iint_{\omega} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d\omega$$

обращается в нуль. Следовательно, для пластины постоянной жёсткости  $D$  выражение для потенциальной энергии можно в таких случаях записать в форме

$$U = \frac{D}{2} \iint_{\omega} (\nabla^2 w)^2 d\omega. \quad (1.15)$$

Выпишем также выражение для потенциала  $\Pi$  внешних сил. При действии распределённого по поверхности давления  $p(x, y)$  будем иметь

$$\Pi = - \int_{\omega} p \omega dx dy. \quad (1.16)$$

При действии сосредоточенных сил  $P_i$ , нормальных к поверхности, и сосредоточенных моментов  $M_i$

$$\Pi = - \sum_1^n P_i w_i - \sum_1^m M_i \varphi_i, \quad (1.17)$$

где  $w_i$  – прогиб в точке приложения  $i$ -й силы;  $\varphi_i$  – угол поворота нормали в точке приложения  $i$ -го момента в плоскости действия этого момента;  $n$  и  $m$  – число сил и моментов соответственно.

Полная потенциальная энергия изогнутой пластины

$$V = U + \Pi. \quad (1.18)$$

### 1.3. Метод Ритца в задачах изгиба пластин

Для приближённого расчёта пластин при изгибе во многих случаях можно воспользоваться методом Ритца. В соответствии с ним приближённое значение функции  $w(x, y)$  отыскивается в виде

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y). \quad (1.19)$$

Здесь  $\varphi_i(x, y)$  –  $n$  линейно независимых базисных функций, выбираемых заранее. Каждая из этих функции должна удовлетворять геометрическим граничным условиям. Коэффициенты  $c_i$  в (1.19) определяются из условия минимума полной потенциальной энергии системы.

Выведем уравнения для нахождения  $c_i$ . Подставим выражение (1.19) в соотношения (1.14), (1.16) и (1.18):

$$V = \frac{1}{2} \iint_{\omega} D \left\{ \left( \sum_1^n c_i \nabla^2 \varphi_i \right)^2 - 2(1-\mu) \left[ \sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} - \left( \sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} d\omega - \int_{\omega} p \sum_1^n c_i \varphi_i d\omega. \quad (1.20)$$

Необходимое условие минимума  $V$  заключается в требовании, чтобы частные производные от  $V$  по каждому из коэффициентов равнялись нулю:

$$\frac{\partial V}{\partial c_j} = 0.$$

Выполняя дифференцирование выражения (1.20), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial c_j} = \iint_{\omega} \left\{ D \sum_1^n c_i \nabla^2 \varphi_i \cdot \nabla^2 \varphi_j - (1-\mu) \left[ \sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + \sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} - 2 \sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y} \right] \right\} d\omega - \iint_{\omega} p \varphi_j d\omega = 0. \quad (1.21)$$

Равенства (1.21), записанные для  $j = 1, 2, \dots, n$ , дают систему уравнений относительно коэффициентов  $c_i$ , которую можно записать в виде

$$[A][c] = [b], \quad (1.22)$$

где

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}; \quad [b] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Коэффициенты при неизвестных  $A_{ij}$  и правые части  $b_i$  вычисляются по формулам

$$A_{ij} = \iint_{\omega} D \left[ \nabla^2 \varphi_i \nabla^2 \varphi_j - (1-\mu) \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y} \right) \right] d\omega; \quad (1.24)$$

$$b_i = \iint_{\omega} p(x, y) \varphi_i d\omega. \quad (1.25)$$

Если пластина жёстко заделана по всему контуру или если она свободно опёрта и её контур составлен прямыми линиями, то для  $A_{ij}$  можно использовать более простое выражение

$$A_{ij} = \iint_{\omega} D \nabla^2 \varphi_i \nabla^2 \varphi_j d\omega.$$

Решив систему уравнений (1.22), по формуле (1.19) получаем приближённое решение задачи.

#### 1.4. Метод Бубнова – Галплёркина

В методе Бубнова – Галплёркина решение, как и в методе Ритца, ищется в виде

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y).$$

К базисным функциям  $\varphi_i(x, y)$  предъявляются более строгие требования, чем в методе Ритца: здесь они должны удовлетворять всем без исключения граничным условиям – как геометрическим, так и статическим. Для оты-



скания коэффициентов  $c_i$  используется процедура Бубнова – Галёркина, состоящая в следующем. Дифференциальное уравнение изгиба пластины (1.11) представляется в виде

$$D\nabla^2\nabla^2 w - p = 0.$$

Выражение  $\tilde{w}$  подставляется в левую часть уравнения. Результат подстановки затем умножается последовательно на каждую из функций  $\varphi_j$ , интегрируется по области  $\omega$  и приравнивается нулю:

$$\iint_{\omega} (D\nabla^2\nabla^2 \tilde{w} - p) \varphi_j d\omega = 0.$$

Систему уравнений относительно  $c_i$  можно снова записать в виде (1.22), (1.23), но коэффициенты  $A_{ij}$  вычисляются здесь по формуле

$$A_{ij} = D \iint_{\omega} \nabla^2 \nabla^2 \varphi_i \varphi_j d\omega. \quad (1.26)$$

Как уже говорилось, в методе Бубнова – Галёркина к базисным функциям  $\varphi_i(x, y)$  предъявляются более жёсткие требования, чем в методе Ритца. Если в методе Ритца использовать те же функции, что и в методе Бубнова – Галёркина, то оба метода при решении одной и той же задачи дадут одинаковый результат. Заметим, что в методе Ритца пластина, в отличие от метода Бубнова – Галёркина, может иметь переменную толщину.

## 2. ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

### 2.1. Соотношения теории изгиба пластин в полярных координатах

Преобразуем общие соотношения теории изгиба пластин к полярным координатам. Обозначим через  $r$  и  $\theta$  полярные координаты произвольной точки срединной плоскости пластины (рисунок 2.1). Они связаны с декартовыми координатами равенствами

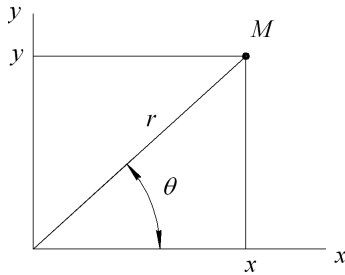


Рисунок 2.1

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta \quad (2.1)$$

или обратными зависимостями

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta. \quad (2.2)$$

Любую величину, характеризующую напряжённно-деформированное состояние пластины, будем понимать как функцию полярных координат. Производные по  $x$  и  $y$  от  $w$  можно найти по формуле дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Требуемые здесь производные  $\frac{\partial r}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \theta}{\partial y}$  можно получить из равенств (2.2). Дифференцируя первое из них по  $x$ , получим равенство

$$2x = 2r \frac{\partial r}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

С учётом первого равенства (2.1) выводим отсюда

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta.$$

Аналогично приходим к соотношению

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta.$$

Подобным же образом найдём  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ , вычислив частные производные по  $x$  и  $y$  применительно ко второму равенству (2.2). Учитывая, что

$$(\operatorname{tg} \theta)' = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

придём к соотношениям

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

Таким образом, в соответствии с (2.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Найдём далее вторые производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin 2\theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin 2\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin 2\theta}{r} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin 2\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin 2\theta}{r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r} - \\ &\quad - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin 2\theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Оператор Лапласа в полярных координатах имеет выражение

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \quad (2.6)$$

Дифференциальное уравнение изгиба пластины

$$\nabla^2 \nabla^2 w = p$$

в развёрнутом виде запишется в полярных координатах так:

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = p(r, \theta). \quad (2.7)$$

Изгибающие и крутящие моменты в сечениях  $\theta = \text{const}$  и  $r = \text{const}$  обозначим через  $M_r$ ,  $M_\theta$  и  $M_{r\theta}$ , а перерезывающие силы – через  $Q_r$  и  $Q_\theta$ . Их положительные направления показаны на рисунке 2.2. Чтобы выразить их

через  $w$ , заметим, что если совместить ось  $x$  с направлением оси  $r$  (то есть положить  $\theta = 0$ ), то площадки  $r = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$  совпадут с декартовыми площадками  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ . С учётом формул (1.4) и (1.8) можно записать поэтому

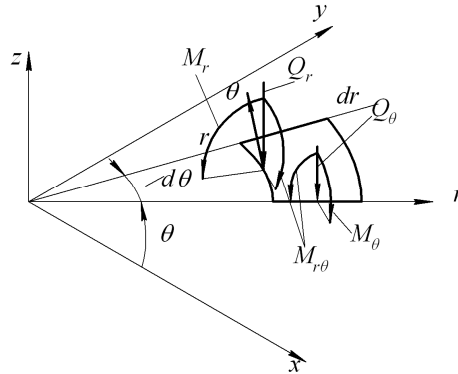


Рисунок 2.2

$$M_r = M_x|_{\theta=0} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{\theta=0};$$

$$M_\theta = M_y|_{\theta=0} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{\theta=0};$$

$$M_{r\theta} = M_{xy}|_{\theta=0} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{\theta=0};$$

$$Q_r = Q_x|_{\theta=0} = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \Big|_{\theta=0}; \quad Q_\theta = Q_y|_{\theta=0} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \Big|_{\theta=0}.$$

Подставив сюда соотношения (2.4), (2.5), приходим к искомым зависимостям

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right];$$

$$M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right);$$

$$M_{r\theta} = D(1-\mu^2) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right);$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w; \quad Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w. \quad (2.8)$$

Запишем далее граничные условия применительно к круглой пластинке, ограниченной двумя окружностями  $r = \text{const}$ . Если пластина жёстко заде-

лана по одной из окружностей, то на этой окружности должны выполняться условия

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

В случае свободного опирания будем иметь  $w = 0; M_r = 0$  или, с учётом (2.8),

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Наконец, для незакреплённого края  $r = \text{const}$  должны выполняться соотношения

$$M_r = 0; \quad Q_r^* = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = 0.$$

## 2.2. Осесимметричный изгиб круглой пластины

Если поперечная нагрузка постоянна в окружном направлении, то есть  $p = p(r)$ , то пластина будет изгибаться осесимметричным образом:  $w = w(r)$ . Дифференциальное уравнение изгиба примет в этом случае вид

$$D \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = p(r). \quad (2.9)$$

Замечая, что

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right),$$

перепишем (2.9) в тождественной форме

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{D}.$$

Последовательное четырёхкратное интегрирование приводит далее к общему решению уравнения изгиба

$$w(r) = A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 r^2 \ln r + w^*(r), \quad (2.10)$$

где  $A_1, \dots, A_4$  – произвольные постоянные;  $w^*(r)$  – частное решение уравнения (2.9):

$$w^*(r) = \frac{1}{D} \int \frac{1}{r} \left\{ \int r \left[ \int \frac{1}{r} \left( \int p r dr \right) dr \right] dr \right\} dr. \quad (2.11)$$

Если, в частности,  $p = \text{const}$ , то

$$w^*(r) = \frac{pr^4}{64D}. \quad (2.12)$$

Формулы для силовых факторов при осесимметричном изгибе следуют из соотношений (2.8):

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right);$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \quad (2.13)$$

Крутящий момент  $M_{r\theta}$  и окружная поперечная сила  $Q_\theta$  равны нулю в силу осевой симметрии напряжённого состояния.

Подставив (2.10) в формулы (2.13), получим следующие выражения

$$M_r = -D \left[ 2(1+\mu)A_2 - \frac{1-\mu}{r^2}A_3 + 2(1+\mu)A_4 \ln r + (3+\mu)A_4 \right] + M_r^*;$$

$$M_\theta = -D \left[ 2(1+\mu)A_2 + \frac{1-\mu}{r^2}A_3 + 2(1+\mu)A_4 \ln r + (1+3\mu)A_4 \right] + M_\theta^*;$$

$$Q_r = -\frac{4D}{r}A_4 + Q_r^*, \quad (2.14)$$

где

$$M_r^* = -D \left( \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw^*}{dr} \right); \quad M_\theta^* = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} + \mu \frac{d^2 w^*}{dr^2} \right);$$

$$Q_r^* = -D \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right). \quad (2.15)$$

В частном случае действия постоянной поперечной нагрузки, когда  $w^*$  определяется формулой (2.12), будем иметь

$$M_r^* = -\frac{(3+\mu)pr^2}{16}; \quad M_\theta^* = -\frac{(1+3\mu)pr^2}{16}; \quad Q_r^* = -\frac{pr}{2}. \quad (2.16)$$

### 2.3. Расчёт круглой пластины на действие сосредоточенной силы в центре

В качестве примера рассмотрим случай, когда круглая пластинка радиуса  $a$  жёстко заделана по контуру и нагружена в центре сосредоточенной силой  $P$  (рисунок 2.3). Так как распределённая нагрузка отсутствует, частное решение

$$w^* = 0$$

и, соответственно,  $M_r^* = M_\theta^* = 0; Q_r^* = 0$ .

При  $r = a$  имеем граничные условия

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dr} = 0. \quad (2.17)$$

В центре пластинки прогиб должен оставаться конечным, откуда вытекает необходимость равенства

$$A_3 = 0.$$

Кроме того, воспользуемся условием равновесия участка пластины произвольного радиуса  $r$  (рисунок 2.4)

$$P + 2\pi r Q_r = 0.$$

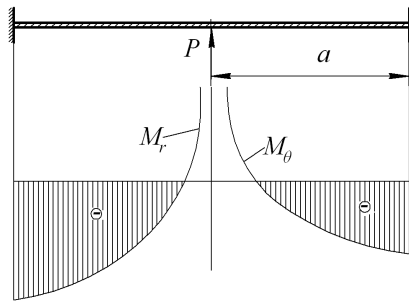


Рисунок 2.3

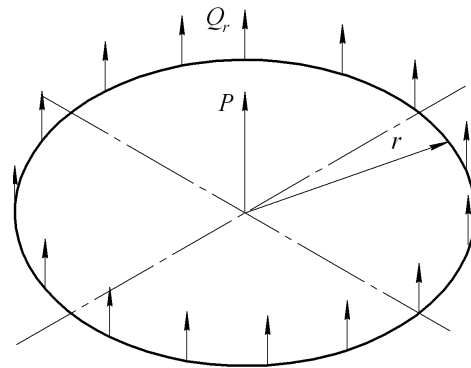


Рисунок 2.4

С учётом равенства (2.14) при  $Q_r^* = 0$  отсюда следует, что

$$A_4 = \frac{P}{8\pi D}.$$

Условия (2.17) дают систему уравнений относительно оставшихся постоянных  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_1 + A_2 a^2 + A_4 a^2 \ln a = 0$$

$$2A_2 a + A_4 (2a \ln a + a) = 0.$$

Отсюда находим

$$A_2 = -\frac{A_4}{2} (2 \ln a + 1) = -\frac{P}{16\pi D} (2 \ln a + 1);$$

$$A_1 = -A_2 a^2 - A_4 a^2 \ln a = \frac{Pa^2}{16\pi D}.$$

Таким образом, прогиб пластины в этом случае на основании (2.10) выражается зависимостью

$$w(r) = \frac{Pa^2}{16\pi D} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} + 2 \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} \right).$$

Изгибающие моменты в соответствии с формулами (2.13) изменяются вдоль радиуса следующим образом:

$$\begin{aligned} M_r &= -\frac{P}{4\pi} \left[ (1 + \mu) \ln \frac{r}{a} + 1 \right]; \\ M_\theta &= -\frac{P}{4\pi} \left[ (1 + \mu) \ln \frac{r}{a} + \mu \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Эти зависимости представлены графически на рисунке 2.3. Как видим, изгибающие моменты неограниченно возрастают в точке приложения силы. В окрестности начала координат полученное решение, однако, несправедливо. Это объясняется тем, что сила  $P$  не может быть приложена в одной точке, а всегда бывает распределена по некоторой площадке. Кроме того, возле точки приложения силы нарушаются исходные гипотезы теории изгиба пластин, так что и сама теория здесь неприменима.

Полученными соотношениями можно пользоваться лишь на некотором удалении от центра. Если радиус площадки  $c$  существенно меньше толщины пластины, то вблизи нагруженной поверхности пластины возникают большие местные напряжения. В центре пластины, на стороне, противоположной нагруженной, возникают при этом напряжения равномерного двухосного растяжения, мало зависящие от размеров зоны нагружения. Эти максимальные напряжения можно вычислить по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{6M_*}{h^2},$$

где  $M_*$  – значение момента  $M_r$ , вычисленное по формуле (2.18), но не в центре пластины, а на расстоянии  $r = 0,16h$  от центра (при  $\mu = 0,3$ ).

#### 2.4. Расчёт круглой пластины на действие сосредоточенного момента в центре

Пластина радиуса  $a$  нагружена сосредоточенным моментом в центре (рисунок 2.5). Нагружение является симметричным относительно плоскости действия момента и обратно симметричным относительно плоскости, перпендикулярной к ней. Считая, что плоскостью симметрии является плоскость координат  $xu$ , решение уравнения (2.7) при  $p = 0$  будем искать в виде  $w = F(r) \cos \theta$ . Функция  $F(r)$  должны удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{1}{r^2} F \right) = 0. \quad (2.19)$$



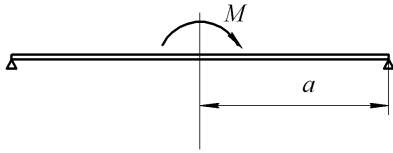


Рисунок 2.5

Частное решение этого уравнения ищем в виде

$$F(r) = r^\nu.$$

Подстановка этого выражения в равенство (2.19) позволяет прийти к характеристическому уравнению вида

$$(\nu^2 - 1)[(\nu - 2)^2 - 1] = 0.$$

Его корни

$$\nu_{1,2} = \pm 1; \quad \nu_{3,4} = \pm 1 + 2.$$

Для кратного корня  $\nu = 1$  линейно независимыми частными решениями будут функции  $r$  и  $r \ln r$ . Таким образом, приходим к следующему решению дифференциального уравнения изгиба:

$$w(r, \theta) = \left( A_1 r + A_2 r^3 + \frac{A_3}{r} + A_4 r \ln r \right) \cos \theta. \quad (2.20)$$

Формулы для внутренних силовых факторов в соответствии с равенствами (2.17) имеют вид

$$M_r = -D \left[ 2(3 + \mu) A_2 r + \frac{2(1 - \mu)}{r^3} A_3 + \frac{1 + \mu}{r} A_4 \right] \cos \theta;$$

$$M_\theta = -D \left[ 2(1 + 3\mu) A_2 r - \frac{2(1 - \mu)}{r^3} A_3 + \frac{1 + \mu}{r} A_4 \right] \cos \theta;$$

$$M_{r\theta} = D(1 - \mu) \left( 2A_2 r - \frac{2}{r^3} A_3 + \frac{1}{r} A_4 \right) \sin \theta;$$

$$Q_r = -D \left( 8A_2 - \frac{2}{r^2} A_4 \right) \cos \theta;$$

$$Q_\theta = D \left( 8A_2 + \frac{2}{r^2} A_4 \right) \sin \theta.$$

Поскольку в центре пластины прогиб должен иметь конечное значение, следует положить  $A_3 = 0$ . Для отыскания остальных постоянных необходимо воспользоваться граничными условиями на окружности  $r = a$ :

$$w(a) = 0; \quad M_r(a) = 0. \quad (2.21)$$

Кроме того, нужно учесть условие равновесия центральной части пластины радиуса  $r$  (рисунок 2.6) Равенство нулю момента относительно оси  $y$  приводит к соотношению

$$M - \int_0^{2\pi} Q_r r \cos \theta r d\theta + \int_0^{2\pi} M_r \cos \theta r d\theta + \int_0^{2\pi} M_{r\theta} \sin \theta r d\theta = 0. \quad (2.22)$$

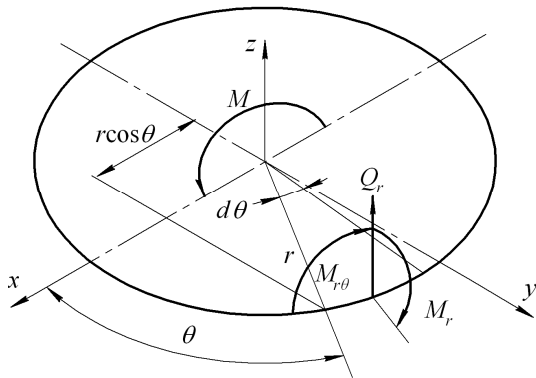


Рисунок 2.6

Условия (2.21) и (2.22) приводят к следующим значениям постоянных

$$A_1 = \left[ \frac{1 + \mu}{2(3 + \mu)} - \ln a \right] \frac{M}{4\pi D};$$

$$A_2 = -\frac{1 + \mu}{3 + \mu} \frac{M}{8\pi D a^2};$$

$$A_4 = \frac{M}{4\pi D}.$$

Закон изменения прогиба пластины определяется теперь выражением

$$w = \frac{Ma}{8\pi D} \left[ \frac{1 + \mu}{3 + \mu} (\rho - \rho^3) + 2 \ln \rho \right] \cos \theta, \quad (2.23)$$

где

$$\rho = \frac{r}{a}.$$

Формула для изгибающего момента имеет вид

$$M_r = \frac{M(1 + \mu)}{4\pi a} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos \theta. \quad (2.24)$$

Как видно в этом случае изгибающий момент имеет в начале координат особенность типа  $1/r$ .

### 3. БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК

#### 3.1. Геометрия оболочек вращения

Оболочкой называется тонкое тело, ограниченное двумя близкими криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина оболочки) мало по сравнению с характерными размерами самих поверхностей. Поверхность, которая делит толщину пополам, называется срединной. Наибольшее значение для технических приложений имеют оболочки, срединная поверхность которых представляет собой поверхность вращения (рисунок 3.1).

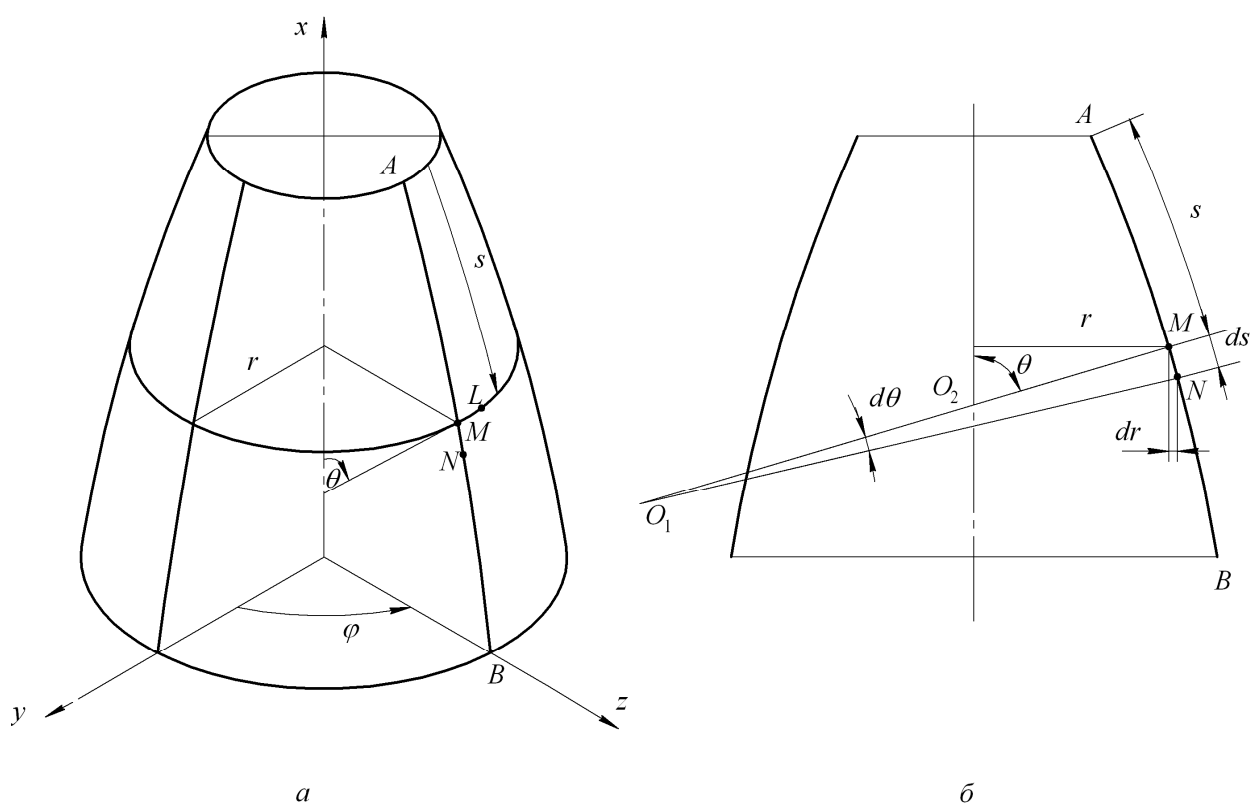


Рисунок 3.1

Линии, образующиеся при пересечении поверхности плоскостями, проходящими через ось вращения, называются меридианами. На рисунке 3.1 показан меридиан  $AB$ . Линии в пересечении срединной поверхности с плоскостями, перпендикулярными оси вращения, представляют собой окружности и называются параллелями.

Чтобы задать положение точки  $M$  срединной поверхности, достаточно задать угол  $\varphi$ , отсчитываемый от некоторого начального меридиана и расстояние  $s$ , отсчитываемое от какого либо края оболочки. Иногда вместо  $s$  удобнее пользоваться угловой координатой  $\theta$ , представляющую угол между осью вращения и нормалью к поверхности оболочки.

Поверхность вращения может быть задана аналитически в явной форме

$$r = r(x)$$

или в параметрической форме

$$r = r(s); \quad x = x(s).$$

На рисунке 3.1, б показано сечение оболочки осевой плоскостью, проходящей через меридиан  $AB$ . Радиус кривизны меридиана обозначим через  $R_1$ . На рисунке этот радиус соответствует отрезку  $O_1M$ . Точка  $O_1$ , представляющая собой центр кривизны меридиана в точке  $M$ , является точкой пересечения нормалей к срединной поверхности в точке  $M$  и бесконечно близкой к ней точке  $N$ .

Радиус кривизны срединной поверхности в направлении перпендикулярном меридиану, обозначим через  $R_2$ ; этот радиус равен отрезку  $O_2M$ . Действительно, нормали к поверхности в точке  $M$  и бесконечно близкой к ней точке  $L$  пересекаются на оси вращения в точке  $O_2$ . Следовательно, последняя будет центром кривизны поверхности.

Радиусы  $R_1$  и  $R_2$  называют главными радиусами кривизны поверхности вращения. Эти радиусы обладают свойствами экстремальности: радиус кривизны в любом другом направлении, наклонном к меридиану, имеет промежуточное значение между  $R_1$  и  $R_2$ .

Кроме  $R_1$  и  $R_2$  геометрию оболочки характеризует также радиус параллели  $r$ . Он связан с  $R_2$  соотношением

$$r = R_2 \sin \theta. \quad (3.1)$$

Радиусы  $R_1$ ,  $R_2$  и  $r$  являются функциями  $s$ . Для того, чтобы они в совокупности определяли некоторую поверхность вращения, необходимо, чтобы они подчинялись определённой зависимости. Из рисунка 3.1 можно вывести, что

$$dr = ds \cos \theta$$

или, учитывая равенство (3.1),

$$\frac{d(R_2 \sin \theta)}{ds} = \cos \theta.$$

Так как  $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_1}$ , то после дифференцирования полученного соотношения

будем иметь

$$\frac{dR_2}{ds} \sin \theta = \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) \cos \theta. \quad (3.2)$$

Если в качестве независимой переменной использовать угол  $\theta$ , то дифференцирование по  $s$  следует заменить дифференцированием по  $\theta$ . Тогда равенство (3.2) следует записать в виде

$$\frac{1}{R_1} \frac{dR_2}{d\theta} \sin \theta = \left( 1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \cos \theta$$

или

$$\frac{dR_2}{d\theta} \sin \theta = (R_1 - R_2) \cos \theta. \quad (3.3)$$

Соотношение (3.2) или (3.3) есть частный случай общих соотношений Кодацци – Гаусса, которым должны удовлетворять радиусы кривизны всякой поверхности.

### 3.2. Уравнения безмоментной теории оболочек вращения

В безмоментной теории принимается, что нормальные напряжения – меридиональное  $\sigma_{11}$  и окружное  $\sigma_{22}$ , а также касательное напряжение  $\sigma_{12}$  постоянны по толщине оболочки, а остальные компоненты  $\sigma_{ij}$  отсутствуют. Обозначим через

$$N_1 = \sigma_{11}h; \quad N_2 = \sigma_{22}h; \quad T = \sigma_{12}h,$$

где  $h$  – толщина оболочки, погонные усилия, рассчитанные на единицу длины сечения: меридиональное, окружное и касательное.

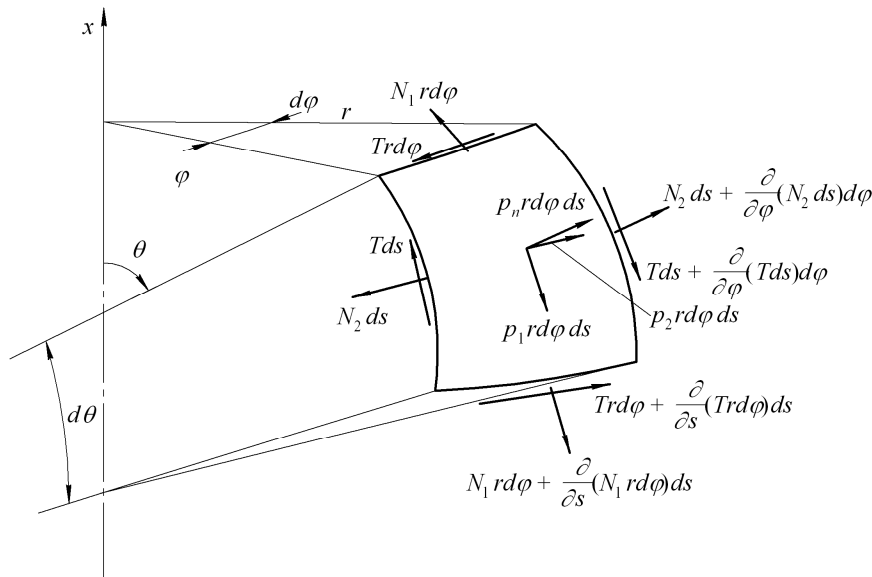


Рисунок 3.2

На рисунке 3.2 показан бесконечно малый элемент срединной поверхности оболочки с размерами  $ds$  и  $rd\varphi$ , ограниченный двумя меридиональными сечениями и двумя коническими сечениями, перпендикулярными срединной поверхности. Внутренние силы, указанные на рисунке, в общем случае являются функциями двух переменных – дуги  $s$  и полярного угла  $\varphi$ . Помимо них, на элемент действует поверхностная распределённая нагрузка с составляющими  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_n$ , кото-

рые являются функциями двух переменных – дуги  $s$  и полярного угла  $\varphi$ . Помимо них, на элемент действует поверхностная распределённая нагрузка с составляющими  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_n$ , кото-

рые действуют в меридиональном, окружном и нормальном к срединной поверхности направлениях соответственно.

Составим уравнения равновесия сил, действующих на элемент, в проекции на нормаль к поверхности  $n$ , на ось вращения  $x$  и на касательную к окружности  $t$ :

$$\sum F_n = 0: \quad -N_1 r d\varphi \frac{d\theta}{2} - \left[ N_1 r d\varphi + \frac{\partial}{\partial s} (N_1 r d\varphi) ds \right] \frac{d\theta}{2} - \\ - 2N_2 ds \frac{d\varphi}{2} \sin \theta + p_n r d\varphi ds = 0;$$

$$\sum F_x = 0: \quad N_1 r d\varphi \sin \theta - \left[ N_1 r d\varphi \sin \theta + \frac{\partial}{\partial s} (N_1 r d\varphi \sin \theta) ds \right] + T ds \sin \theta - \\ - \left[ T ds \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_1 ds \sin \theta) d\varphi \right] + (p_n \cos \theta - p_1 \sin \theta) r d\varphi ds = 0;$$

$$\sum F_t = 0: \quad -T r d\varphi + \left[ T r d\varphi + \frac{\partial}{\partial s} (T r d\varphi) ds \right] - N_2 ds + \\ + \left[ N_2 ds + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_2 ds) d\varphi \right] + T ds \frac{d\varphi}{2} \cos \theta + \\ + \left[ T ds + \frac{\partial}{\partial \varphi} T d\varphi ds \right] \frac{d\varphi}{2} \cos \theta + p_2 r d\varphi ds = 0.$$

Уравнения моментов удовлетворяются тождественно.

Отбросив величины третьего порядка малости, можно с учётом зависимостей

$$\frac{ds}{R_1} = d\theta; \quad \frac{r}{R_2} = \sin \theta; \quad \frac{dr}{ds} = \cos \theta$$

преобразовать эти уравнения к виду

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = p_n; \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (N_1 r \sin \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \sin \theta = p_x; \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial s} (T r^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} = -p_2. \tag{3.6}$$

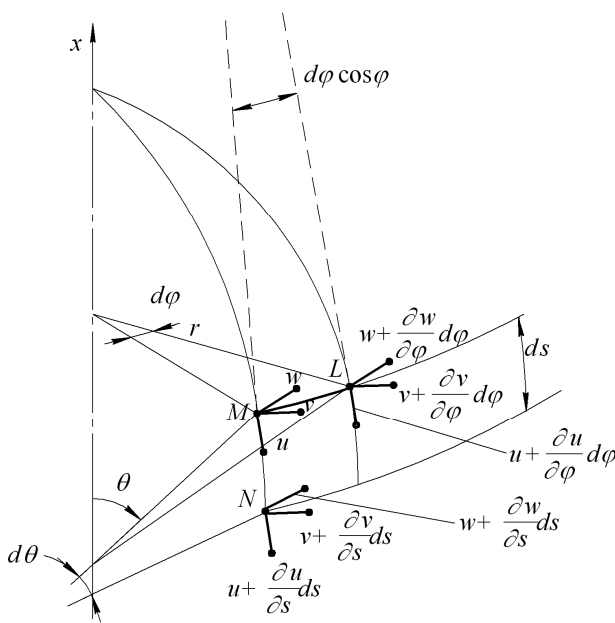
Здесь  $p_x$  – осевая составляющая поверхностной нагрузки:

$$p_x = p_n \cos \theta - p_1 \sin \theta. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.4) называется обычно уравнением Лапласа.

Уравнения (3.4)...(3.6) могут быть сведены к одному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных относительно одной неизвестной функции. Решение этих уравнений должно удовлетворять граничным условиям на краях. В случае силовых граничных условий решение системы уравнений (3.4)...(3.6) может быть доведено до конца. Если же граничные условия геометрические (на краях заданы перемещения), то необходимо дополнительно воспользоваться геометрическими соотношениями.

Обозначим через  $u$ ,  $v$  и  $w$  составляющие перемещения произвольной точки  $M$  срединной поверхности по направлению касательной к меридиану, касательной к параллели и по нормали к поверхности. Показанные на рисунке 3.3 перемещения примем за положительные. Перемещения бесконечно



**Рисунок 3.3**

близких к  $M$  точек  $L$  и  $N$  отличаются от перемещений точки  $M$  на бесконечно малые величины.

Вычислим линейные относительные деформации в меридиональном и окружном направлениях  $\epsilon_{11}$  и  $\epsilon_{22}$  и угловую деформацию в касательной плоскости  $\gamma_{12}$ .

За счёт приращения перемещения  $u$  по координате  $s$  отрезок  $MN = ds$  получает удлинение, равное  $\frac{\partial u}{\partial s} ds$ . За счёт перехода точек  $M$  и

$N$  на больший радиус тот же отрезок получает удлинение  $w d\theta$ . Сложив эти удлинения и разделив на первоначальную длину отрезка  $ds = R_1 d\theta$ , получим относительное удлинение в меридиональном направлении

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}. \quad (3.8)$$

Аналогично определим окружную деформацию. Отрезок  $ML = rd\phi$  получает следующие удлинения:

- за счёт приращения перемещения  $v$  по координате  $\phi$ :  $\frac{\partial v}{\partial \phi} d\phi$ ;
- за счёт смещения точек  $M$  и  $L$  вдоль меридианов:  $u d\phi \cos \theta$ ;

– за счёт смещения точек  $M$  и  $L$  по нормали и перехода их на больший радиус:  $w d\varphi \sin \theta = w d\varphi \frac{r}{R_2}$ .

Разделив сумму этих удлинений на первоначальную длину отрезка  $r d\varphi$ , найдём относительную окружную деформацию

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u \cos \theta}{r} + \frac{w}{R_2}. \quad (3.9)$$

Угловая деформация  $\gamma_{12}$  равна сумме углов поворота отрезков  $MN$  и  $ML$  в касательной плоскости. Угол поворота  $ML$  (обозначим его  $\alpha$ ) зависит только от приращения перемещения  $u$  по координате  $\varphi$ :

$$\alpha = \frac{\partial u}{r \partial \varphi}.$$

Угол поворота второго отрезка  $MN$  связан с приращением перемещения  $v$  по координате  $s$ :

$$\beta_1 = \frac{\partial v}{\partial s}.$$

Этот угол, однако, зависит не только от деформации срединной поверхности, но и от поворота оболочки как жёсткого целого вокруг её оси. При повороте оболочки на некоторый угол  $\psi$  точка  $M$  получит перемещение по окружности  $v = \psi r$ , а соседняя с ней точка  $N$  – перемещение  $\psi(r + dr) = \frac{v}{r}(r + dr)$ . Разность окружных перемещений точек  $M$  и  $N$ , разделённая на длину отрезка  $ds$ , даёт ту часть угла поворота отрезка  $MN$ , которая не зависит от деформации срединной поверхности:

$$\beta_2 = \frac{v}{r} \frac{dr}{ds}.$$

Вычитая  $\beta_2$  из  $\beta_1$ , найдём угол поворота отрезка  $MN$ , связанной со сдвигом срединной поверхности:

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \cos \theta.$$

Сумма углов  $\alpha$  и  $\beta$  даёт угловую деформацию

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \cos \theta. \quad (3.10)$$

Формулы (3.8)...(3.10) устанавливают зависимость между деформациями  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\gamma_{12}$  и компонентами перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .



Выразим далее деформации через усилия. Согласно обобщённому закону Гука

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \mu\sigma_{22}}{E} = \frac{N_1 - \mu N_2}{Eh}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} - \mu\sigma_{11}}{E} = \frac{N_2 - \mu N_1}{Eh};$$

$$\gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G} = \frac{T}{Gh}.$$

С учётом этих равенств формулы (3.8)...(3.10) приводят к соотношениям

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1} = \frac{N_1 - \mu N_2}{Eh}; \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial v}{r\partial\varphi} + \frac{u \cos\theta}{r} + \frac{w}{R_2} = \frac{N_2 - \mu N_1}{Eh}; \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u}{r\partial\varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \cos\theta = \frac{T}{Gh}. \quad (3.13)$$

### 3.3. Расчёт оболочек вращения при несимметричном нагружении

Представим уравнения равновесия (3.4)...(3.6) в следующей форме:

$$N_2 = p_n R_2 - \frac{R_2}{R_1} N_1; \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (N_1 r \sin\theta) + \frac{\partial T}{r\partial\varphi} \sin\theta = p_x; \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial s} (T r^2) + \frac{1}{r} R_2 \frac{\partial p_n}{\partial\varphi} - \frac{R_2}{r R_1} \frac{\partial N_1}{\partial\varphi} = -p_2. \quad (3.16)$$

Системы уравнений равновесия (3.14)...(3.16) и перемещений (3.11)...(3.13) могут быть приведены к двум дифференциальным уравнениям второго порядка с двумя неизвестными. Решение последних будет содержать четыре неопределённые функции от  $\varphi$ , которые должны быть определены из граничных условий. Для пояса оболочки необходимо задать по два условия на каждом краю; для оболочки, замкнутой с одной стороны – два условия на краю и два в вершине. Граничные условия могут быть силовыми, геометрическими или смешанными. В силовых условиях могут быть заданы на краю усилия  $N_1$  и  $T$ , а в геометрических – перемещения  $u$  и  $v$ . На перемещение  $w$  нельзя накладывать связей, так как в противном случае возникают реакции в виде поперечных сил и напряжённое состояние не будет безмоментным.

Если будут заданы два силовых граничных условия и два геометрических, то оболочка будет статически определима по отношению к внутренним

усилиям. Это значит, что для определения внутренних усилий привлечь соотношения для перемещений не требуется.

Если же будет задано три геометрических условия и одно силовое или если все четыре условия геометрические, то оболочка один или два раза статически неопределима. В этом случае внутренние усилия могут быть определены только в результате совместного решения уравнений равновесия и перемещений.

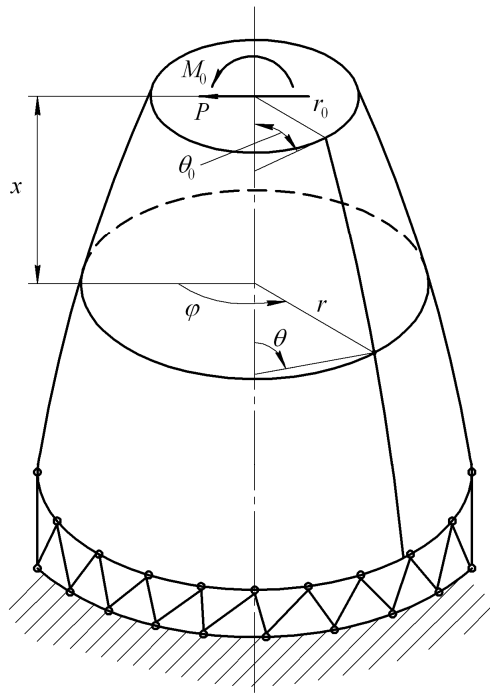


Рисунок 3.4

Исследуем в качестве примера напряжённое состояние оболочки, показанной на рисунке 3.4. Нагрузка, приложенная к верхнему краю, статически эквивалентна силе  $P$  и моменту  $M_0$ . Нижний край закреплён так, что перемещения  $u$  и  $v$  равны нулю; перемещение  $w$  не стеснено.

Заданная оболочка в целом работает на изгиб. Так как составляющие поверхностной нагрузки в данном случае отсутствуют, уравнения равновесия (3.14)...(3.16) принимают вид

$$N_2 = \frac{R_2}{R_1} N_1; \quad (3.17)$$

$$\frac{d}{ds}(N_1 r \sin \theta) + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \sin \theta = 0; \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(T r^2) - \frac{R_2}{r R_1} \frac{\partial N_1}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.19)$$

Мы имеем фактически два дифференциальных уравнения (3.18) и (3.19) с двумя неизвестными  $N_1$  и  $T$ . Усилие  $N_2$  в эти уравнения не входит и определяется соотношением (3.17).

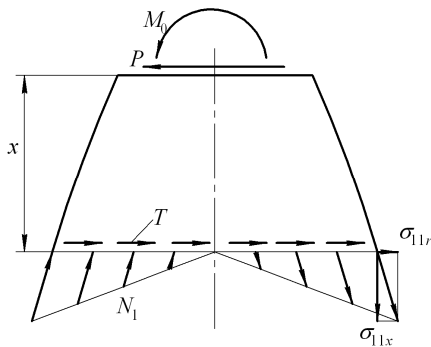


Рисунок 3.5

Рассмотрим произвольное поперечное сечение на расстоянии  $x$  от верхнего торца (рисунок 3.5). Поверхность сечения будем считать перпендикулярной к срединной поверхности оболочки. В сечении возникает нормальное  $\sigma_{11}$  и касательное  $\sigma_{12}$  напряжения.

Разложим нормальное напряжение на две составляющие, направленные по оси оболочки

и по радиусу:

$$\sigma_{11x} = \sigma_{11} \sin \theta;$$

$$\sigma_{11r} = \sigma_{11} \cos \theta.$$

Предположим, что составляющая  $\sigma_{11x}$  определяется так же, как при изгибе балки:

$$\sigma_{11x} = \frac{M_x}{I} y = \frac{M_0 + Px}{\pi r^3 h} (-r \cos \varphi).$$

Тогда полное меридиональное напряжение в произвольной точке

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{11x}}{\sin \theta} = -\frac{M_0 + Px}{\pi r^2 h \sin \theta} \cos \varphi;$$

Меридиональное усилие

$$N_1 = \sigma_{11} h = -\frac{(M_0 + Px) \cos \varphi}{\pi r^2 \sin \theta}. \quad (3.20)$$

Подставив  $N_1$  в дифференциальное уравнение (3.15), определим из него сдвигающее усилие  $T$ :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ -\frac{(M_0 + Px) \cos \varphi}{\pi r} \right] + \frac{\partial T}{d\varphi} \sin \theta = 0.$$

Учитывая, что  $\frac{dr}{ds} = \cos \theta$  и  $\frac{d\varphi}{ds} = \sin \theta$ , преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\frac{\partial T}{d\varphi} = -\frac{(M_0 + Px) \cos \theta \cos \varphi}{\pi r^2 \sin \theta} + \frac{P \cos \varphi}{\pi r}.$$

Отсюда

$$T = -\frac{(M_0 + Px) \cos \theta \sin \varphi}{\pi r^2 \sin \theta} + \frac{P \sin \varphi}{\pi r} + C(\theta). \quad (3.21)$$

Функция  $\tilde{N}(\theta)$  не зависит от угла  $\varphi$  и соответствует постоянной составляющей сдвигающей силы  $T$ , которая может возникнуть при закручивании оболочки. Поскольку в данном случае крутящий момент равен нулю, то  $\tilde{N}(\theta) = 0$ .

Внесём теперь  $N_1$  и  $T$  в уравнение (3.19). Выполнив очевидные преобразования, устанавливаем, что это уравнение обращается в тождество. Следовательно, найденные функции и есть искомое решение задачи. Это решение будет справедливо при условии, что заданная нагрузка, то есть момент  $M_0$  и сила  $P$  приложены в виде распределённых нормальных и касательных сил, удовлетворяющих уравнениям (3.20) и (3.21):

$$N_{10} = -\frac{M_0 \cos \varphi}{\pi r_0^2 \sin \theta_0};$$

$$T_0 = -\frac{M_0 \operatorname{ctg} \theta_0 \sin \varphi}{\pi r_0^2} + \frac{P \sin \varphi}{\pi r_0}. \quad (3.22)$$

При ином характере распределения внешних сил по торцу решение можно представить как сумму найденного решения и наложенного на него дополнительного решения, соответствующего самоуравновешенной системе сил, получающейся при вычитании из фактически приложенных сил  $N_{10}$  и  $T_0$  тех значений, которые удовлетворяют равенствам (3.22)

## 4. МОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

### 4.1. Основные соотношения осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, толщиной  $h$  с радиусом средней поверхности  $R$ , нагруженную осесимметричным образом. Расчёт оболочки основывается на гипотезах Кирхгофа – Лява гипотезе прямых нормалей и гипотезе о ненадавливании слоёв оболочки друг на друга.

В сечении оболочки, расположенном на оси на расстоянии  $x$  от начала координат, точка  $m$ , расположенная на средней поверхности, имеет осевое перемещение  $u$  нормальное перемещение  $w$ . Точка  $n$ , отстоящая от точки  $m$  на расстоянии  $z$  по нормали к средней поверхности, имеет перемещения

$$u^{(z)} = u - z\vartheta; \quad w^{(z)} = w, \quad (4.1)$$

где  $\vartheta$  – угол поворота нормали. Согласно гипотезе прямых нормалей имеем

$$\vartheta = \frac{dw}{dx}, \quad (4.2)$$

так что для  $u^{(z)}$  получаем выражение

$$u^{(z)} = u - z \frac{dw}{dx}. \quad (4.3)$$

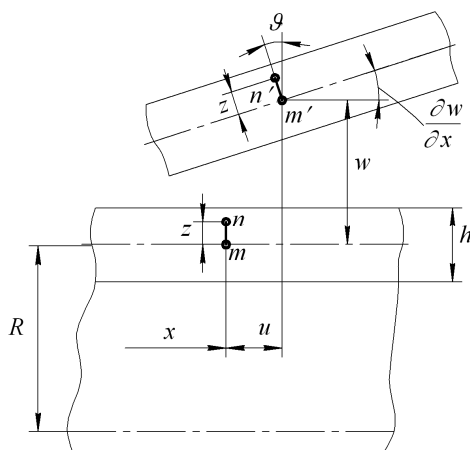


Рисунок 4.1

Относительная деформация в продольном направлении в слое на расстоянии  $z$  от средней поверхности, будет

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u^{(z)}}{\partial x} = \varepsilon_1 - z \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (4.4)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dx} \quad (4.5)$$

– продольная деформация в средней поверхности.

Окружная деформация вызвана тем, что точка  $n$ , располагавшаяся на окружности радиуса  $R + z$ , в результате деформирования окажется на окружности радиуса  $R + w + z$ . Следовательно,

$$\varepsilon_{22} = \frac{2\pi(R + w + z) - 2\pi(R + z)}{2\pi(R + z)} = \frac{w}{R + z}.$$

В силу тонкостенности оболочки можно принять

$$\varepsilon_{22} = \frac{w}{R}. \quad (4.6)$$

Пользуясь законом Гука

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}),$$

можно связать напряжения с прогибом  $w$ :

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \varepsilon_1 - z \frac{d^2w}{dx^2} + \mu \frac{w}{R} \right); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{w}{R} + \mu \left( \varepsilon_1 - z \frac{d^2w}{dx^2} \right) \right],$$

где  $E$ ,  $\mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

Переходя далее от напряжений к погонным силам и моментам, получаем

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \varepsilon_1 + \mu \frac{w}{R} \right); \quad (4.7)$$

$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{w}{R} + \mu\varepsilon_1 \right); \quad (4.8)$$

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} z dz = -D \frac{d^2w}{dx^2}; \quad (4.9)$$

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} z dz = -\mu D \frac{d^2w}{dx^2} = \mu M_1. \quad (4.10)$$

Здесь  $N_1$ ;  $N_2$  – погонные осевое и окружное усилия;  $M_1$ ;  $M_2$  – погонные продольный и окружной изгибающие моменты; через

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

обозначена изгибая жёсткость оболочки.

Величину  $\varepsilon_1$  можно исключить из соотношений (4.6) и (4.7), что приводит к выражению окружного усилия  $N_2$  через  $w$  и  $N_1$ :

$$N_2 = \mu N_1 + \frac{Ehw}{R}. \quad (4.12)$$

Помимо рассмотренных силовых факторов, в поперечных сечениях действует также перерезывающая сила  $Q$ . На рисунке 4.2 показан элемент срединной поверхности с действующими на него внутренними и внешними силами. Через  $p_1$  и  $p_n$  обозначены осевая и радиальная поверхностные нагрузки на оболочку.

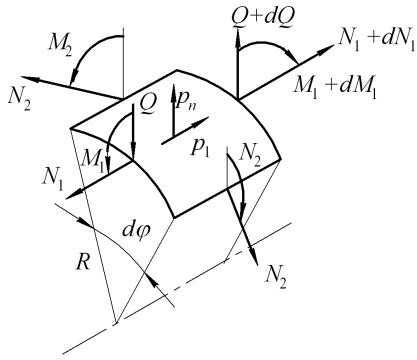


Рисунок 4.2

Условия равновесия элемента в проекциях на нормаль и на ось, а также угловые равновесия моментов приводят к равенствам

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{N_2}{R} + p_n = 0; \quad (4.13)$$

$$\frac{dN_1}{dx} = p_1; \quad (4.14)$$

$$Q = \frac{dM_1}{dx}. \quad (4.15)$$

Умножив обе части равенства (4.14) на  $2\pi R$  и проинтегрировав их, получим

$$2\pi RN_1 = 2\pi R \int p_1 dx + C.$$

Это равенство представляет собой уравнение равновесия части оболочки, отсечённой по окружности  $x = \text{const}$ . Поэтому осевую силу  $N_1$  можно считать неизвестной, имея в виду, что она заранее может быть найдена из рассмотрения равновесия отсечённой части оболочки.

Равенство (4.15) вместе с формулой (4.9) позволяет выразить  $Q$  через  $w$ :

$$Q = -D \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (4.16)$$

Условие равновесия (4.13) с учётом соотношений (4.12) и (4.16) позволяет прийти к уравнению относительно  $w$ :

$$-D \frac{d^4 w}{dx^4} - \mu \frac{N_1}{R} - \frac{E4w}{R^2} + p_n = 0$$

или

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_n}{D} - \frac{\mu N_1}{DR}, \quad (4.17)$$

где

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}}. \quad (4.18)$$

Если решение уравнения (4.17) найдено, то по формулам (4.9); (4.10); (4.12) и (4.16) можно рассчитывать силовые факторы в сечениях оболочки. Напряжения находятся по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{h} + \frac{12M_1}{h^3} z; \quad \sigma_{22} = \frac{N_2}{h} + \frac{12M_2}{h^3} z.$$

Наибольшие напряжения возникают при  $z = \pm \frac{h}{2}$ :

$$\sigma_{11\max} = \frac{N_1}{h} \pm \frac{6M_1}{h^2}; \quad \sigma_{22\max} = \frac{N_2}{h} \pm \frac{6M_2}{h^2}. \quad (4.19)$$

#### 4.2. Решение дифференциального уравнения изгиба

Общее решение дифференциального уравнения (4.17)

$$w = w^o + w^*,$$

где  $w^o$  – общее решение однородного уравнения, а  $w^*$  – частное решение неоднородного уравнения (4.17). Частное решение зависит от закона распределения поверхностных нагрузок  $p_1$  и  $p_n$ . Обычно на практике нагрузки или постоянны, или изменяются вдоль  $x$  по линейному или квадратичному закону. Ограничиваясь этими случаями, для частного решения  $w^*$  будем иметь выражение

$$w^* = \frac{1}{4\beta^4} \left( \frac{p_n}{D} - \frac{\mu N_1}{D^2} \right) = \frac{R^2}{Eh} \left( p_n - \frac{\mu N_1}{R} \right). \quad (4.20)$$

Решение однородного уравнения

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0 \quad (4.21)$$

ищем в виде

$$w = Ce^{kx}.$$

Подстановка этого выражения в равенство (4.21) приводит к характеристическому уравнению

$$k^4 + 4\beta^4 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$k = \pm \beta(1 \pm i).$$

Общее решение однородного уравнения (4.21) имеет вид

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x). \quad (4.22)$$

Как видим, общее решение содержит две группы функций: убывающие с ростом  $x$ , имеющие множителем  $e^{-\beta x}$ , и возрастающие с ростом  $x$ , которые имеют в качестве множителя  $e^{\beta x}$ . Изменение этих функций происходит очень быстро. Уже при  $\beta x = 3$  величина  $e^{\beta x} \approx 20$ . Поэтому если длина оболочки



$$l > \frac{3}{\beta} = \frac{3}{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} \sqrt{Rh} = 2,2\sqrt{Rh},$$

то на левом его конце существенно лишь убывающее решение, а на правом лишь возрастающее. Таким образом, граничные условия на каждом из торцов могут быть удовлетворены независимо.

Рассмотрим решение однородного уравнения для данной оболочки. Опустив в (4.22) возрастающую часть, будем иметь

$$w = C_1 f_1 + C_2 f_2, \quad (4.23)$$

где  $f_1 = e^{-\beta x} \sin \beta x$ ;  $f_2 = e^{-\beta x} \cos \beta x$ .

Установим формальные правила дифференцирования функций  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\frac{df_1}{dx} = \beta e^{-\beta x} (-\sin \beta x + \cos \beta x) = \beta(-f_1 + f_2);$$

$$\frac{df_2}{dx} = \beta e^{-\beta x} (-\cos \beta x - \sin \beta x) = -\beta(f_1 + f_2);$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} = \beta \left( -\frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx} \right) = \beta [-\beta(-f_1 + f_2) - \beta(f_1 + f_2)] = -\beta^2 f_2;$$

$$\frac{d^2 f_2}{dx^2} = -\beta \left( \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx} \right) = -\beta [\beta(-f_1 + f_2) - \beta(f_1 + f_2)] = \beta^2 f_1;$$

$$\frac{d^3 f_1}{dx^3} = -\beta^2 \frac{df_2}{dx} = \beta^3 (f_1 + f_2);$$

$$\frac{d^3 f_2}{dx^3} = \beta^2 \frac{df_1}{dx} = \beta^3 (-f_1 + f_2).$$

Выражения для расчётных величин можно теперь представить в виде

$$w = C_1 f_1 + C_2 f_2 + w^* : \quad (4.25)$$

$$\vartheta = \frac{dw}{dx} = \beta [C_1(-f_1 + f_2) - C_2(f_1 + f_2)] + \frac{dw^*}{d\theta}; \quad (4.26)$$

$$N_2 = \mu N_1 + \frac{Eh}{R} (C_1 f_1 + C_2 f_2) + \frac{Eh}{R} w^*; \quad (4.27)$$

$$M_1 = D\beta^2 (C_1 f_2 - C_2 f_1) - D \frac{d^2 w^*}{dx^2}; \quad (4.28)$$

$$M_2 = \mu M_1; \quad (4.29)$$

$$Q = -D\beta^3 [C_1 (f_1 + f_2) + C_2 (-f_1 + f_2)] \quad (4.30)$$

В выражениях для  $Q$  отсутствует слагаемое  $-D \frac{d^3 w^*}{dx^3}$ , поскольку если  $p_1$  и  $p_3$  представляют собой полиномиальные функции от  $x$  степени не выше второй, то и  $w^*$  будет полиномиальной функцией той же степени; следовательно  $\frac{d^3 w^*}{dx^3} = 0$ .

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  должны быть найдены из двух граничных условий на краю  $x = 0$ .

Заметим, что выражения (4.25)...(4.30) описывают напряжённо-деформированное состояние вблизи края  $x = 0$ . Если необходимо найти перемещения и напряжения у другого края, то следует поместить на этом крае начало координат и сменить направление оси  $x$  на противоположное.

В качестве примера рассмотрим полубесконечную оболочку, нагруженную на торце  $x = 0$  моментом интенсивности  $m$  (рисунок 4.3)

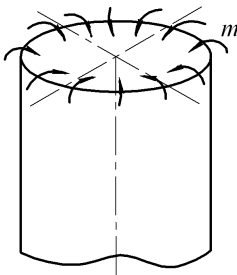


Рисунок 4.3

Граничные условия в этом случае запишутся так: при  $x = 0$

$$M_1 = m, \quad Q = 0. \quad (4.31)$$

Поскольку в рассматриваемом случае  $N_1 = 0$  и  $p_n = 0$ , во всех выражениях (4.25)...(4.28) следует опустить слагаемые, содержащие  $w^*$ . Учитывая, что при  $x = 0$  функции  $f_1 = 0$ ;  $f_2 = 1$ , из условий (4.31) получаем уравнения

$$D\beta^2 C_1 = m; \quad -D\beta^2 (C_1 + C_2) = 0,$$

из которых находим

$$C_1 = -C_2 = \frac{m}{D\beta^2}.$$

Подстановка этих значений в расчётные формулы позволяет найти все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние. В частности, с учётом формул (4.11) и (4.18) можно записать

$$w = -\frac{m}{D\beta^2} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x);$$

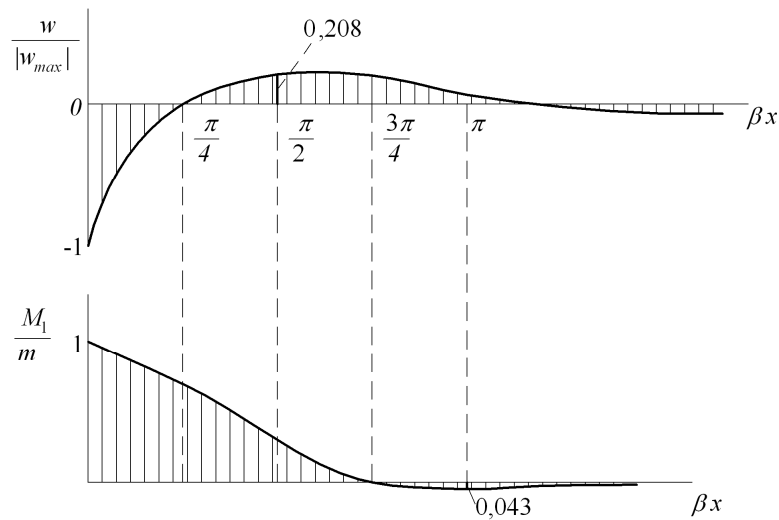
$$N_2 = -\frac{4m\sqrt{3(1-\mu^2)}}{h} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x);$$

$$M_1 = m e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x).$$

Максимальный прогиб

$$w|_{x=0} = -\frac{m}{D\beta^2} = -\frac{4mR\sqrt{3(1-\mu^2)}}{Eh^2}.$$

На рисунке 4.4 показан характер изменения  $w$  и  $M_1$  вдоль оси  $x$ .



**Рисунок 4.4**

Рассмотрим теперь случай короткой оболочки, когда нельзя пренебрегать взаимным влиянием краёв. В этом случае общее решение однородного уравнения должно быть взято в полной форме (4.12). Однако для удобства вычислений его лучше преобразовать следующим образом. Вместо показательных функций  $e^{\beta x}$  и  $e^{-\beta x}$  воспользуемся гиперболическими синусом и косинусом, являющимися их линейными комбинациями:

$$\operatorname{sh} \beta x = \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2}; \quad \operatorname{ch} \beta x = \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2}.$$

Тогда в качестве решений однородного уравнения будут выступать четыре функции

$$\operatorname{sh} \beta x \sin \beta x; \quad \operatorname{ch} \beta x \sin \beta x; \quad \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x; \quad \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x \text{ и } \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x.$$

Удобнее использовать их линейные комбинации  $K_i(\beta x)$  ( $i=1, \dots, 4$ ), называемые функциями А.Н. Крылова:

$$\begin{aligned} K_1(\beta x) &= \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x; \\ K_2(\beta x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \beta x \sin \beta x + \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x); \\ K_3(\beta x) &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} \beta x \sin \beta x; \\ K_4(\beta x) &= \frac{1}{4}(\operatorname{ch} \beta x \sin \beta x - \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Удобство в применении этих функций связано с тем, что их производные выражаются через эти же функции простейшим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} K_4(\beta x) &= K_3(\beta x); & \frac{d}{dx} K_3(\beta x) &= K_2(\beta x); \\ \frac{d}{dx} K_2(\beta x) &= K_1(\beta x); & \frac{d}{dx} K_1(\beta x) &= -4K_4(\beta x). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Кроме того, при  $x=0$  все функции  $K_i(\beta x)$  обращаются в нуль, кроме  $K_1$ :

$$K_1(0) = 1.$$

Решение однородного уравнения можно представить теперь в форме

$$w = A_1 K_1(\beta x) + A_2 K_2(\beta x) + A_3 K_3(\beta x) + A_4 K_4(\beta x). \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= w|_{x=0}; & A_2 &= \frac{1}{\beta} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0}; \\ A_3 &= \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{D\beta^2} M_1 \Big|_{x=0}; \\ A_4 &= \frac{1}{\beta^3} \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{D\beta^3} Q \Big|_{x=0}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Благодаря этим соотношениям, две из четырёх постоянных можно непосредственно найти из условия при  $x=0$ .

Пусть, например, короткая оболочка нагружена моментом интенсивности  $m$  на торце  $x=l$  (рисунок 4.5). Так как  $M_1=0$  и  $Q=0$  при  $x=0$ , то в общем решении (4.34) равны нулю постоянные  $A_3$  и  $A_4$ . Тогда

$$w = A_1 K_1(\beta x) + A_2 K_2(\beta x). \quad (4.36)$$

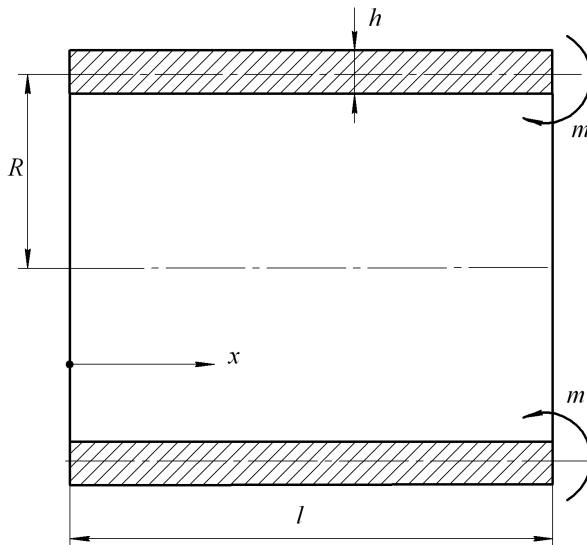


Рисунок 4.5

Постоянные  $A_1$  и  $A_2$  найдём из условий при  $x=l$

$$\begin{aligned} M_1|_{x=l} &= -D \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=l} = m; \\ Q|_{x=l} &= -D \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Дифференцируя (4.36) с использованием соотношений (4.33), приведём граничные условия (4.37) к виду

$$\begin{aligned}
-D\beta^2 \{A_1[-4K_3(\lambda)] + A_2[-4K_4(\lambda)]\} &= m; \\
-D\beta^2 \{A_1[-4K_2(\lambda)] + A_2[-4K_3(\lambda)]\} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

где

$$\lambda = \beta l = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{l}{\sqrt{Rh}}.$$

Из уравнений (4.38) находим

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{m}{4D\beta^2} \frac{K_3(\lambda)}{K_3^2(\lambda) - K_2(\lambda)K_4(\lambda)}; \\
A_2 &= -\frac{m}{4D\beta^2} \frac{K_2(\lambda)}{K_3^2(\lambda) - K_2(\lambda)K_4(\lambda)}.
\end{aligned}$$

При этом постоянная  $A_1$  представляет собой перемещение  $w|_{x=0}$ ; а  $A_2 = \frac{1}{\beta} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0}$ . Перемещения в нагруженном сечении можно найти, подставляя в формулу (4.36)  $x = l$ :

$$\begin{aligned}
w|_{x=l} &= A_1 K_1(\lambda) + A_2 K_2(\lambda) = \frac{m}{4D\beta^2} \frac{K_1(\lambda)K_3(\lambda) - K_2^2(\lambda)}{K_3^2(\lambda) - K_2(\lambda)K_4(\lambda)}; \\
\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} &= -4A_1\beta K_4(\lambda) + A_2\beta K_1(\lambda) = -\frac{m}{4D\beta^2} \frac{4K_3(\lambda)K_4(\lambda) - K_1(\lambda)K_2(\lambda)}{K_3^2(\lambda) - K_2(\lambda)K_4(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Полученными результатами можно практически пользоваться при очень малых  $\lambda$ , так как при больших  $\lambda$  в формулы вводят малые разности. Поэтому для практических вычислений удобнее от функций Крылова вновь вернуться к гиперболо-тригонометрическим функциям с помощью формул (4.32). В итоге получим

$$\begin{aligned}
w|_{x=0} &= \frac{m}{D\beta^2} \frac{\text{sh}\lambda \sin \lambda}{\text{sh}^2 \lambda - \sin^2 \lambda}; \\
\frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} &= -\frac{m}{D\beta} \frac{\text{ch}\lambda \sin \lambda + \text{sh}\lambda \cos \lambda}{\text{sh}^2 \lambda - \sin^2 \lambda}; \\
w|_{x=l} &= -\frac{m}{2D\beta^2} \frac{\text{ch}^2 \lambda - \cos^2 \lambda}{\text{sh}^2 \lambda - \sin^2 \lambda}; \\
\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} &= -\frac{m}{D\beta} \frac{\text{ch}\lambda \text{sh}\lambda + \cos \lambda \sin \lambda}{\text{sh}^2 \lambda - \sin^2 \lambda}.
\end{aligned}$$

Для весьма малых  $\lambda$  можно разложить тригонометрические и гиперболические функции в ряды. Удерживая только первые, не обращающиеся в

нуль слагаемые, можно понять, что в этом случае получающиеся формулы совпадают с формулами, описывающими деформацию бруса малой кривизны. Практически эти результаты обладают достаточной точностью при  $\lambda < 0,3$ .

Таким образом, при  $\lambda < 0,3$  цилиндрическую оболочку можно рассматривать как кривой брус, при  $\lambda > 3$  – как полубесконечную, а при  $0,3 < \lambda < 3$  – как короткую оболочку.

## 5. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

### 5.1. Основные соотношения моментной теории оболочек вращения при осесимметричном нагружении

Рассмотрим перемещения и деформации точек срединной поверхности оболочки вращения в случае осесимметричного нагружения. В силу симметрии нагружения окружные перемещения точек срединной поверхности будут отсутствовать. Перемещения будут происходить только в плоскости меридиана и являются функциями одной независимой переменной – дуговой координаты  $s$  или угла  $\vartheta$  (рисунок 5.1).

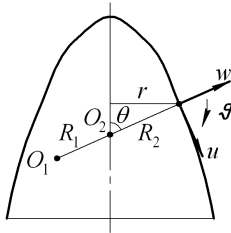


Рисунок 5.1

Выражения для деформаций срединной поверхности вытекают из формул (3.8); (3.9):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{R_1} \left( \frac{du}{d\theta} + w \right); \\ \varepsilon_{22} &= \frac{u \cos \theta}{r} + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{R_2} (u \operatorname{ctg} \theta + w).\end{aligned}\quad (5.1)$$

Нормальный к срединной поверхности отрезок поворачивается на угол  $\vartheta$ , связанный с перемещениями соотношением

$$\vartheta = \frac{u}{R_1} - \frac{dw}{ds} = \frac{1}{R_1} \left( u - \frac{dw}{d\theta} \right).\quad (5.2)$$

Перемещения точки, отстоящей от точки  $M$  на расстояние  $z$ , получает перемещения, которые в соответствии с гипотезами Кирхгофа – Лява равны

$$u^{(z)} = u + z\vartheta; \quad w^{(z)} = w.\quad (5.3)$$

Слой оболочки, расположенный на расстоянии  $z$  от срединной поверхности, имеет радиусы кривизны

$$R_1^{(z)} = R_1 + z = R_1 \left( 1 + \frac{z}{R_1} \right); \quad R_2^{(z)} = R_2 + z = R_2 \left( 1 + \frac{z}{R_2} \right).$$

В случае тонкой оболочки слагаемые  $z/R_1$ , и  $z/R_2$  малы по сравнению с единицей; тогда

$$R_1^{(z)} \simeq R_1; \quad R_2^{(z)} \simeq R_2.\quad (5.4)$$

Деформации поверхности, находящейся на расстоянии  $z$  от срединного, будут равны в соответствии с (5.1), (5.2)

$$\varepsilon_{11}^{(z)} = \frac{1}{R_1^{(z)}} \left( \frac{du^{(z)}}{d\theta} + w^{(z)} \right); \quad \varepsilon_{22}^{(z)} = \frac{1}{R_2^{(z)}} (u^{(z)} \operatorname{ctg} \theta + w^{(z)}).$$

Принимая во внимание соотношения (5.3) и (5.4), получаем отсюда

$$\varepsilon_{11}^{(z)} = \varepsilon_{11} + z\chi_1; \quad \varepsilon_{22}^{(z)} = \varepsilon_{22} + z\chi_2, \quad (5.5)$$

где

$$\chi_1 = \frac{1}{R_1} \frac{d\vartheta}{d\theta}; \quad \chi_2 = \frac{1}{R_2} \vartheta \operatorname{ctg} \theta. \quad (5.6)$$

Можно показать, что  $\chi_1$  и  $\chi_2$  представляют собой изменения кривизны срединной поверхности при деформации.

Согласно гипотезе о ненадавливании слоев, нормальное напряжение  $\sigma_{zz} = 0$ . Следовательно, связь напряжений с деформациями запишется как для плоского напряжённого состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{11}^{(z)} + \mu\varepsilon_{22}^{(z)}); \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{22}^{(z)} + \mu\varepsilon_{11}^{(z)}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Перейдём от напряжений к их результирующим по толщине оболочки – погонным силам и моментам согласно формулам

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz; & N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dz; \\ M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} z dz; & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} z dz. \end{aligned}$$

В результате подстановки выражений (5.7) и (5.5) можно прийти к следующим соотношениям:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \quad N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1); \quad (5.8)$$

$$M_1 = D(\chi_1 + \mu\chi_2); \quad M_2 = D(\chi_2 + \mu\chi_1); \quad (5.9)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (5.10)$$

Помимо напряжений (5.7), в сечениях, нормальных к меридиану, возникает также поперечное касательное напряжение  $\sigma_{13}$ , равнодействующая которого по толщине представляет собой погонную перерезывающую силу

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dz.$$



Сами напряжения  $\sigma_{13}$  невелики и в расчётах на прочность их обычно не принимают во внимание. Но их равнодействующая  $Q$  играет важную роль в уравнениях равновесия.

На рисунке 5.2 изображён элемент срединной поверхности оболочки с действующими на него силами и моментами. Условия равновесия элемента в проекции на нормаль и на касательную к меридиану, а также условие равновесия моментов относительно оси, касательной к параллельной окружности приводят к следующим трём уравнениям:

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{d(Q R_2 \sin \theta)}{d\theta} - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + p_n = 0; \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \left[ \frac{d(N_1 R_2 \sin \theta)}{d\theta} - \frac{d(R_2 \sin \theta)}{d\theta} N_2 \right] + \frac{Q}{R_1} + p_1 = 0; \quad (5.12)$$

$$Q = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \left[ \frac{d(M_1 R_2 \sin \theta)}{d\theta} - \frac{d(R_2 \sin \theta)}{d\theta} M_2 \right]. \quad (5.13)$$

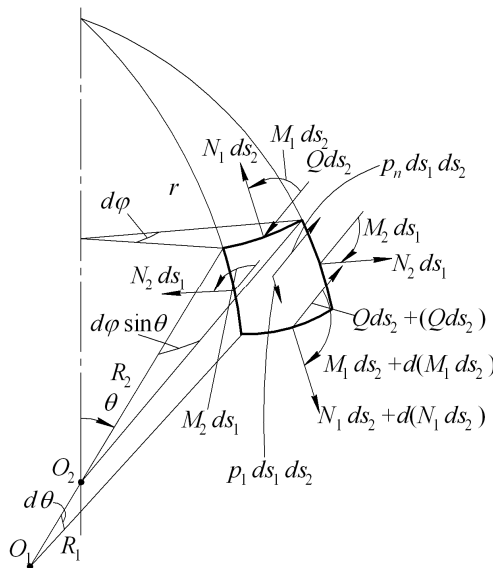


Рисунок 5.2

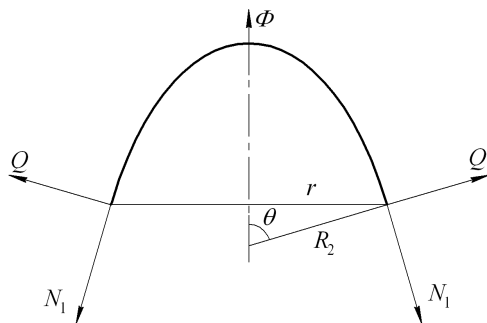


Рисунок 5.3

Вместо уравнения (5.12) удобнее воспользоваться интегральным условием равновесия для зоны оболочки, отсекаемой поверхностью  $\theta = \text{const}$  (рисунок 5.3):

$$2\pi r Q \cos \theta - 2\pi r N_1 \sin \theta + \Phi(\theta) = 0,$$

где  $\Phi(\theta) = 0$  – результирующая внешних сил, действующих на отсечённую часть. Отсюда

$$N_1 = N_{1\Phi} + Q \operatorname{ctg} \theta, \quad (5.14)$$

где

$$N_{1\Phi} = \frac{\Phi(\theta)}{2\pi r \sin \theta} = \frac{\Phi(\theta)}{2\pi R_2 \sin^2 \theta}. \quad (5.15)$$

Уравнения равновесия должны быть дополнены уравнениями совместности деформации. Воспользуемся для этого условием

$$dr = ds_1 \cos \theta, \quad (5.16)$$

Которое должно выполняться также для деформированной срединной поверхности:

$$dr^* = ds_1^* \cos \theta^*. \quad (5.17)$$

Звёздочкой помечены величины, относящиеся к деформированной срединной поверхности.

Поскольку

$$r^* = r(1 + \varepsilon_{22}); \quad ds_1^* = ds_1(1 + \varepsilon_{11}); \quad \theta^* = \theta + \vartheta,$$

Равенство (5.17) принимает вид

$$dr + d(r\varepsilon_{22}) = [ds_1 + d(s_1\varepsilon_{11})][\cos\theta\cos\vartheta - \sin\theta\sin\vartheta]$$

В силу малости угла  $\vartheta$  полагаем  $\cos\vartheta \approx 1$ ;  $\sin\vartheta \approx \vartheta$ . Учитывая (5.16) и сохраняя члены одного порядка малости, получаем

$$d(r\varepsilon_{22}) = ds_1\varepsilon_{11}\cos\theta - ds_1\vartheta\sin\theta.$$

Разделив обе части равенства на  $ds_1\sin\theta$  и учтя соотношение  $ds_1 = R_1d\theta$ ;  $r = R_2\sin\theta$ , приходим к искомому уравнению совместности деформаций

$$\frac{1}{R_1\sin\theta} \frac{d(R_2\varepsilon_{22}\sin\theta)}{2\theta} - \varepsilon_{11}\operatorname{ctg}\theta + \vartheta = 0. \quad (5.18)$$

Следуя Мейсснеру, приведём полученную систему уравнений к двум уравнениям относительно двух неизвестных функций. В качестве последних принимаются угол поворота нормали  $\vartheta$  и величина

$$V = QR_2. \quad (5.19)$$

Через них могут быть выражены все другие величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние оболочки. Из (5.14) и (5.12) имеем

$$N_1 = V \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2} + N_{1\Phi}, \quad (5.20)$$

$$N_2 = \frac{1}{R_1} \frac{dV}{d\theta} + R_2 p_n + N_{2\Phi}, \quad (5.21)$$

где

$$N_{2\Phi} = -\frac{R_2}{R_1} N_{1\Phi}. \quad (5.22)$$

По закону Гука могут быть найдены деформации

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{Eh}(N_1 - \mu N_2); \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{Eh}(N_2 - \mu N_1).$$

С учётом формул (5.20) и (5.21) выводим отсюда

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{Eh} \left( \frac{V}{R_2} \operatorname{ctg}\theta - \frac{\mu}{R_1} \frac{dV}{d\theta} \right) - \frac{\mu R_2}{Eh} p_n + \varepsilon_{11\Phi}; \quad (5.23)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{Eh} \left( \frac{1}{R_1} \frac{dV}{d\theta} - \frac{\mu}{R_2} V \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{R_2}{Eh} p_n + \varepsilon_{22\Phi}, \quad (5.24)$$

где

$$\varepsilon_{11\Phi} = \frac{1}{Eh} (N_{1\Phi} - \mu N_{2\Phi}); \quad \varepsilon_{22\Phi} = \frac{1}{Eh} (N_{2\Phi} - \mu N_{1\Phi}). \quad (5.25)$$

Выражения для изгибающих моментов запишем в виде

$$M_1 = D \left( \frac{1}{R_1} \frac{d\vartheta}{d\theta} + \frac{\mu}{R_2} \vartheta \operatorname{ctg} \theta \right); \quad M_2 = D \left( \frac{1}{R_2} \vartheta \operatorname{ctg} \theta + \frac{\mu}{R_1} \frac{d\vartheta}{d\theta} \right). \quad (5.26)$$

Для получения разрешающих уравнений подставим соотношения (5.23), (5.24) и (5.26) в уравнения (5.13) и (5.18), учитывая, что  $Q = V/R_2$ . В результате приходим к двум уравнениям Мейсснера

$$L(V) + \mu V = -EhR_1\vartheta + F(\theta);$$

$$L(\vartheta) - \mu\vartheta = \frac{R_1}{D} V, \quad (5.27)$$

где

$$L(\bullet) = \frac{R_2}{R_1} \frac{d^2(\bullet)}{d\theta^2} + \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \theta \right] \frac{d(\bullet)}{d\theta} - \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}^2 \theta (\bullet); \quad (5.28)$$

$$F(\theta) = \frac{\Phi(\theta)}{2\pi \sin^2 \theta} \left[ \left( \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right) \operatorname{ctg} \theta + \frac{d}{d\theta} \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \right] - \frac{d}{d\theta} (p_n R_2^2) - p_1 R_2 (R_2 + \mu R_1). \quad (5.29)$$

Решение системы (5.27) представляет собой сумму общего решения однородной системы, получаемой из (5.27) при  $F(\theta) = 0$ , и частного решения неоднородной системы:

$$V = V^\circ + V^*; \quad \vartheta = \vartheta^\circ + \vartheta^*.$$

Функции  $V^*$ ,  $\vartheta^*$  зависят от характера внешней нагрузки, а функции  $V^\circ$ ,  $\vartheta^\circ$  удовлетворяют однородной системе

$$L(V^\circ) + \mu V^\circ = -EhR_1\vartheta^\circ;$$

$$L(\vartheta^\circ) - \mu\vartheta^\circ = \frac{R_1}{D} V^\circ. \quad (5.30)$$

## 5.2. Приближённый метод учёта краевого эффекта

Если оболочка вблизи края, где возникают наибольшие напряжения, не слишком полая, то напряжённое состояние у этого края может быть пред-

ставлено в виде суммы безмоментного состояния и быстро затухающего состояния, связанного с изгибом образующей. Это моментное состояние, называемое краевым эффектом, может быть рассчитано с помощью упрощённых уравнений.

Для получения необходимых соотношений примем следующие допущения.

1. Все функции, характеризующие напряжения и деформации в оболочке около края, а также их первые производные малы по сравнению со старшими производными. Это допущение основано на том факте, что рассматриваемые функции содержат, как это будет видно из дальнейшего, многочлен вида  $e^{-k\omega}$ , где  $\omega$  – угол или дуга, отсчитываемая от рассматриваемого края,  $k$  – параметр. При дифференцировании функций параметр  $k$  выходит каждый раз в виде множителя. Так как все эти функции – быстрозатухающие, то величина параметра  $k$  велика. Поэтому значения первых производных намного больше, чем самих функций, вторых производных – больше, чем первых. На этом основании отбросим в левых частях разрешающих уравнений члены, содержащие сами функции и их первые производные. Функция  $F(\theta)$  в данном случае равна нулю, так как рассматриваются только краевые нагрузки. В результате разрешающие уравнения (5.27) принимают вид

$$\frac{R_2}{R_1} \frac{d^2 V}{d\theta^2} = -EhR_1 \vartheta; \quad (5.31)$$

$$\frac{R_2}{R_1} \frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2} = \frac{R_1}{D} V. \quad (5.32)$$

2. Радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  около края принимаем постоянными. Это допущение строго выполняется в случае сферической оболочки. Для оболочек иной формы это допущение выполняется тем точнее, чем ближе форма оболочки к сферической.

Приведём уравнения (5.31) и (5.32) к одному уравнению с одним неизвестным. Продифференцировав (5.31) дважды и подставив  $\frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2}$  в уравнение (5.31), получим искомое уравнение

$$\frac{d^4 V}{d\theta^4} + \frac{R_1^4 Eh}{R_2^2 D} V = 0$$

или

$$\frac{d^4 V}{d\theta^4} + 4\beta^4 V = 0, \quad (5.33)$$

где введено обозначение

$$4\beta^4 = \frac{R_1^4 E h}{R_2^2 D} = R_1^4 \frac{12(1-\mu^2)}{R_2^2 h^2}.$$

Параметр  $\beta$  вычисляется, следовательно, по формуле

$$\beta = R_1 \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_2^2 h^2}}. \quad (5.34)$$

Уравнение (5.33) имеет вид, аналогичный однородному дифференциальному уравнению изгиба цилиндрической оболочки.

Введём новую независимую переменную  $\omega$ , представляющую собой угловую координату, отсчитываемую от края оболочки. Если рассматривается нижний край (рисунок 5.4, а), то  $\omega = \theta_0 - \theta$ . Если рассматривается верхний край (рисунок 5.4, б), то  $\omega = \theta - \theta_0$ .

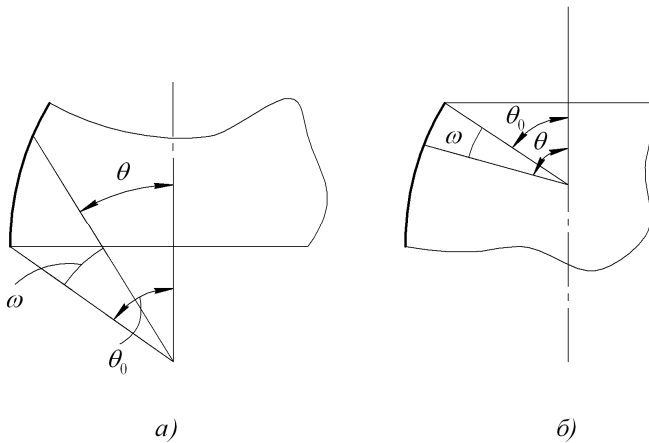


Рисунок 5.4

Так как в обоих этих случаях

$$\frac{d^4 V}{d\theta^4} = \frac{d^4 V}{d\omega^4},$$

то при переходе к новой переменной дифференциальное уравнение сохраняет вид:

$$\frac{d^4 V}{d\omega^4} + 4\beta^4 V = 0. \quad (5.35)$$

Решение дифференциального уравнения (5.35) записывается также, как для цилиндрической оболочки.

$$V = e^{-\beta\omega} (C_1 \sin \beta\omega + C_2 \cos \beta\omega) + e^{\beta\omega} (C_3 \sin \beta\omega + C_4 \cos \beta\omega). \quad (5.36)$$

Имея в виду, что функция  $V$  должна затухать с ростом  $\omega$ , следует опустить второе слагаемое в выражении (5.36) приравняв постоянные  $C_3$  и  $C_4$  нулю. Тогда

$$V = e^{-\beta\omega} (C_1 \sin \beta\omega + C_2 \cos \beta\omega). \quad (5.37)$$

Точность расчёта по изложенному методу тем выше, чем ближе угол  $\theta_0$  к  $90^\circ$  и чем меньше величина  $\frac{d}{d\theta} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$ . Практически этим методом можно пользоваться, если угол на крае  $\theta_0 > 35^\circ$ .