ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

О.Ф. Меньших, Ю.Л. Файницкий

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Самара
Издательство СГАУ
2 0 0 6

УДК 517.958(075)
ББК 22.311
М513

Рецензенты: проф., канд. тех. наук *В.Г. Шахов*,
доц., канд. физ.-мат. наук *В.А. Носов*,
доц., канд. физ.-мат. наук *М.И. Тимошин*

Меньших О.Ф.
М513 **Уравнения математической физики:** учеб. пособие / *О.Ф. Меньших, Ю.Л. Файницкий*. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 119 с.: ил.

ISBN 5-7883-0395-8

Учебное пособие содержит материалы теоретического характера и решения типовых задач по курсу математической физики, предусмотренному учебным планом специальности «Механика». В пособие включены некоторые результаты оригинальных исследований одного из авторов.

Выполнено на кафедре высшей математики и предназначено для студентов третьего курса факультета летательных аппаратов, обучающихся по указанной специальности.

УДК 517.958(075)
ББК 22.311

ISBN 5-7883-0395-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Механика». Программой этой специальности предусмотрен курс математической физики, который читается два семестра (пятый и шестой). В процессе его изучения студенты должны овладеть методами решения основных задач указанного раздела математики. Помочь студентам в этой работе является целью данного пособия.

Изложенный материал соответствует, в основном, тематике, рассматриваемой в пятом семестре. Здесь содержатся сведения теоретического характера, разъясняющие важнейшие методы математической физики. Приводятся формулы, необходимые для решения задач.

В процессе изучения материала студенты выполняют задания, базирующиеся, прежде всего, на материале сборника В.Ф. Чудесенко [18] (раздел «Уравнения математической физики»). В настоящем пособии подробно рассматриваются решения соответствующих типовых задач. По некоторым темам, не вошедшим в книгу [18], достаточное число задач содержится в сборнике под редакцией А. В. Ефимова [12].

Пособие состоит из введения и восьми глав. В введении рассматриваются наиболее важные понятия математической физики, в том числе определения уравнения с частными производными, интегрального уравнения, их решений и т.д.

Большинство глав имеют следующую структуру. На примере выбранной задачи показывается теоретическая сущность основного метода данной главы и решается соответствующая задача с заданными условиями. Для остальных задач приводятся расчетные формулы и подробные решения.

В первой главе рассматривается вводная часть математической физики – классификация квазилинейных уравнений с частными производными второго порядка и приведение их к каноническому виду. Решены две задачи на приведение уравнения к указанной форме и отыскание его общего решения.

Вторая глава посвящена основам фундаментального приема математической физики – метода Фурье. На примере первой краевой задачи для волнового уравнения на отрезке достаточно подробно разбирается разделение переменных, решение задачи Штурма-Лиувилля и представление искомой функции в виде ряда по собственным функциям. Затем этим методом решается аналогичная задача для уравнения теплопроводности.

Третья глава посвящена применению метода Фурье к решению краевой задачи в многомерной области (прямоугольнике). Приводится вывод расчетных формул для уравнения теплопроводности, решается соответствующий пример, а также пример первой краевой задачи для волнового уравнения.

В четвертой и пятой главах изложены материалы по краевой задаче для круговой области. На этот раз подробно рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа, затем решается пример этой задачи. Приводятся также решения уравнения Гельмгольца, Пуассона (в кольце), уравнения теплопроводности и волнового уравнения.

Шестая глава содержит материалы по решению задачи Коши в неограниченной области. Для уравнения теплопроводности рассматривается идея вывода расчетной формулы и, как всегда, изложено подробное решение примера для данного уравнения, а также волнового уравнения в трехмерном пространстве и на плоскости.

Седьмая глава посвящена интегральным уравнениям. На примере уравнения Вольтерра второго рода показано, как применение метода последовательных приближений приводит к понятию резольвенты ядра и как ее использовать для решения интегрального уравнения. Во второй части главы рассматривается уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром.

В восьмой главе изложены элементы теории гиперболических систем первого порядка, линейных и квазилинейных. Приводятся некоторые результаты оригинальных исследований одного из авторов, до настоящего времени публиковавшиеся только в научных журналах.

В целом пособие представляет собой прежде всего иллюстрацию ряда наиболее широко применяемых классических методов математической физики путем решения соответствующих типовых задач. Авторы ограничились небольшим числом упомянутых методов, стремясь по возможности подробно рассказать о сущности и деталях применения каждого из них.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнениями математической физики называются уравнения, описывающие математические модели физических явлений. Среди них процессы, изучаемые в теории упругости, гидродинамике, электродинамике, квантовой физике и т. д. Во многих случаях их изучение приводит к уравнениям с частными производными второго порядка.

Дифференциальным уравнением с частными производными (в частных производных) называется уравнение, связывающее функцию $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и частные производные от функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то есть соотношение

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \qquad (1)$$

где F – известная функция и $k = k_1 + \ldots + k_n$.

При этом предполагается, что в области, где рассматривается данное уравнение, функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет частные производные порядка k.

Порядок старшей из частных производных, входящих в уравнение (1), называется порядком этого уравнения. Например, уравнение второго порядка для функции, имеющей непрерывные частные производные второго порядка, в общем случае может быть записано в виде

$$F\left(x_1, x_2, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0.$$

Уравнение (1) называется квазилинейным, если это уравнение линейно относительно старших производных функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Оно называется линейным, если данное уравнение линейно относительно этой функции и ее производных.

Решением уравнения (1) называется всякая функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая, будучи подставлена в указанное уравнение, обращает его в тождество по всем переменным.

Для полного описания физических процессов помимо уравнений необходимо указать некоторые дополнительные условия. В частности, может быть задана картина процесса в фиксированный момент времени, т.е. начальные условия. Кроме того, задают значения изучаемых величин на границе рассматриваемой области – граничные (или краевые) условия. Дифференциальное уравнение вместе с соответствующими краевыми (и начальными) условиями называется краевой задачей математической физики.

В настоящем пособии рассматриваются краевые задачи для линейных уравнений с частными производными второго порядка. Среди них волновое

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u ,$$

которое описывает колебательные процессы в сплошной среде. Здесь u – искомая функция; t – время; Δ – оператор Лапласа,

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} ,$$

$x_1, \ldots , x_k$ – пространственные переменные; $n = 1, 2, 3$; a – постоянная, $a > 0$.

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

позволяет рассчитывать распространение тепла и процессы диффузии.

Исключительную роль в математической физике играет уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0 ,$$

которому удовлетворяют различного рода потенциалы – ньютонов потенциал, потенциал течения несжимаемой жидкости и т.д.

Линейное дифференциальное уравнение называется однородным, если функция $u \equiv 0$ является его решением. Например, уравнение Лапласа однородно.

Если в качестве дополнительных заданы только начальные условия, то говорят, что требуется решить задачу Коши. Как правило, в этом случае область изменения пространственных переменных бесконечна. Такая задача может быть поставлена для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.

Для уравнения Лапласа обычно считают, что необходимо найти функцию u, удовлетворяющую этому уравнению внутри некоторой области D, ограниченной поверхностью (кривой) S, или вне этой области. Если при этом функция u должна удовлетворять краевому условию

$$u\big|_S = f_1(P),$$

то говорят, что необходимо решить соответственно внутреннюю или внешнюю задачу Дирихле.

Если краевые условия имеют вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f_2(P),$$

где $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$ есть производная по внешней нормали к границе S области D, то говорят, что требуется решить задачу Неймана (внутреннюю или внешнюю).

Если краевые условия записываются в форме

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(P,\, t)u\right)\right|_S = f_3(P),$$

то это – третья краевая задача для уравнения Лапласа.

Здесь P – текущая точка границы S; $\alpha(P,\, t)$, f_1, f_2, f_3 – заданные функции.

Если какая-то из последних трех функций тождественно равна нулю, то соответствующее условие называется однородным.

Для уравнения теплопроводности и волнового уравнения во многих случаях приходится решать так называемую смешанную задачу, то есть задачу с начальными и граничными условиями. Если при этом на границе пространственной (плоской) области задано значение искомой функции, то говорят, что поставлена первая смешанная задача.

Если в качестве краевого условия задано значение производной от искомой функции в направлении внешней нормали к границе, то говорят, что решается вторая смешанная задача. Если задана линейная зависимость между значениями функции на границе и ее производной по нормали, то это – третья смешанная задача.

Описание многих физических явлений требует использования интегральных уравнений. Они появляются также при изучении свойств уравнений с частными производными.

Интегральным называется уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Интегральное уравнение

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,\, t)y(t)dt \tag{2}$$

называется линейным уравнением Вольтерра второго рода.

Здесь λ – параметр; $y(x)$ – искомая функция, а $K(x,\, t)$ и $f(x)$ известны. При этом $f(x)$ должна быть определена на отрезке $[a,\, b]$. Она называется свободным членом уравнения (2). Функция $K(x, t)$ определена в треугольнике

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ a \le t \le x \end{cases}$$

и называется ядром указанного уравнения.

Решением уравнения (2) называется всякая определенная на отрезке $[a, b]$ функция $y(x)$, при подстановке которой в уравнение (2) это уравнение обращается в тождество.

Соотношение

$$\int_a^x K(x, t)y(t)dt = f(x)$$

называется линейным интегральным уравнением Вольтерра первого рода, а равенства

$$\int_a^b K(x, t)y(t)dt = f(x)$$

и

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x, t)y(t)dt$$

– линейными интегральными уравнениями Фредгольма первого и второго рода соответственно.

1 ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Рассмотрим уравнение с двумя независимыми переменными

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \Phi(x,\, y,\, u,\, u_x,\, u_y), \tag{3}$$

где A, B, C являются функциями x и y, а искомая функция $u(x,\, y)$ дважды непрерывно дифференцируема.

Пусть преобразование

$$\begin{cases} \alpha = \varphi(x,\, y), \\ \beta = \psi(x,\, y) \end{cases} \tag{4}$$

имеет обратное и функции φ и ψ дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда после перехода к переменным α, β получается уравнение, эквивалентное исходному уравнению (3).

Приравнивая нулю коэффициент при $u_{\alpha\alpha}$ в новом уравнении, получим уравнение с частными производными первого порядка

$$A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2 = 0\,.$$

Его решение можно отыскать, рассмотрев уравнение

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0\,. \tag{5}$$

Оно называется характеристическим для уравнения (3) или уравнением характеристик. Пусть

$$\varphi(x,\, y) = C_1,\;\; \psi(x,\, y) = C_2 \tag{6}$$

есть общие интегралы уравнения (5) (здесь C_1, C_2 – постоянные). Соотношения (6) называются характеристиками уравнения (3). Если принять $\alpha = \varphi(x,\, y)$, $\beta = \psi(x,\, y)$, то в уравнении, получившемся из (3) после замены переменных (4), коэффициенты при $u_{\alpha\alpha}$ и $u_{\beta\beta}$ обратятся в ноль.

Уравнение (5) распадается на два:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{7}$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \;. \tag{8}$$

Если в некоторой области справедливо неравенство

$$B^2 - AC > 0,$$

то говорят, что в этой области уравнение (3) принадлежит гиперболическому типу. В этом случае имеются два семейства характеристик (6) и уравнение (3) приводится к каноническому виду

$$u_{\alpha\beta} = F_1(\alpha,\, \beta,\, u,\, u_\alpha,\, u_\beta).$$

Если

$$B^2 - AC = 0,$$

то говорят, что уравнение относится к параболическому типу. В этом случае уравнения (7) и (8) совпадают и имеется один общий интеграл

$$\varphi(x,\, y) = C_1 .$$

Можно использовать преобразование (4), где ψ – любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, независимая от φ, то есть такая, что якобиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} & \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\beta}{\partial x} & \dfrac{\partial\beta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда уравнение (3) принимает канонический вид

$$u_{\beta\beta} = F_2(\alpha,\, \beta,\, u,\, u_\alpha,\, u_\beta).$$

Если

$$B^2 - AC < 0,$$

то уравнение (3), по определению, эллиптического типа. Правые части уравнений (7), (8) в этом случае комплексны. Если, например, первое из них имеет решение

$$\varphi(x,\, y) = \varphi_1(x,\, y) + i\varphi_2(x,\, y),$$

то, считая, что

$$\alpha = \varphi_1(x,\, y),\; \beta = \varphi_2(x,\, y),$$

получим уравнение (3) в форме

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = F_3(\alpha,\ \beta,\ u,\ u_\alpha,\ u_\beta).$$

1. Найти общее решение уравнения

$$36u_{xx} - 12u_{xy} + u_{yy} + 18u_x - 3u_y = 0\ , \tag{9}$$

приведя его к каноническому виду.

Решение.

Соотношение (9) представляет собой частный случай уравнения (3). Для данной задачи

$$A = 36,\ B = -6,\ C = 1,$$
$$\Phi\left(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y\right) = -18u_x + 3u_y .$$

Вычислим

$$B^2 - AC = 36 - 36 = 0 .$$

Следовательно, уравнение (9) параболического типа.

Составим уравнение характеристик (5). В данном случае оно принимает вид

$$36(dy)^2 + 12dxdy + (dx)^2 = 0. \tag{10}$$

Преобразуя уравнение (10), получим

$$36\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 12\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

или

$$\left(6\frac{dy}{dx} + 1\right)^2 = 0, \quad 6dy = -dx.$$

После интегрирования найдем

$$6y + x = C_1 .$$

Можно принять

$$\begin{cases} \alpha = 6y + x, \\ \beta = x. \end{cases}$$

Это следует из того, что

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial(6y+x)}{\partial x} & \dfrac{\partial(6y+x)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Найдем частные производные от новых переменных α и β по x и y:

$$\alpha_x = 1, \quad \alpha_y = 6,$$
$$\beta_x = 1, \quad \beta_y = 0.$$

Учитывая это, получим

$$u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = u_\alpha + u_\beta,$$
$$u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y = 6u_\alpha,$$
$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = 1\left(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\alpha}\right) + 1\left(u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}\right) = u_{\alpha\alpha} + 2u_{\beta\alpha} + u_{\beta\beta},$$
$$u_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} = 6\left(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\alpha}\right) + 0 = 6u_{\alpha\alpha} + 6u_{\beta\alpha},$$
$$u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} = 6\left(6u_{\alpha\alpha}\right) + 0 = 36u_{\alpha\alpha}.$$

Подставляя найденные частные производные в исходное уравнение (9), запишем его в формах

$$36\left(u_{\alpha\alpha} + 2u_{\beta\alpha} + u_{\beta\beta}\right) - 12\left(6u_{\alpha\alpha} + 6u_{\beta\alpha}\right) + 36u_{\alpha\alpha} + 18\left(u_\alpha + u_\beta\right) - 3\cdot 6u_\alpha = 0,$$
$$36u_{\alpha\alpha} + 72u_{\beta\alpha} + 36u_{\beta\beta} - 72u_{\alpha\alpha} - 72u_{\beta\alpha} + 36u_{\alpha\alpha} + 18u_\alpha + 18u_\beta - 18u_\alpha = 0,$$
$$36u_{\beta\beta} + 18u_\beta = 0.$$

Следовательно, канонический вид уравнения (9) есть

$$u_{\beta\beta} = -\frac{1}{2}\,u_\beta$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial \beta}. \tag{11}$$

Найдем его общее решение. Для этого введем в (11) замену $\dfrac{\partial u}{\partial \beta} = w$, так что

$$\frac{\partial w}{\partial \beta} = -\frac{1}{2} w.$$

Восстановим функцию по ее частной производной:

$$\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial \beta} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \ln w}{\partial \beta} = -\frac{1}{2},$$

$$\ln w = \ln\left|C_1(\alpha)\right| - \frac{1}{2}\beta,$$

$$w = C_1(\alpha) e^{-\frac{1}{2}\beta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = C_1(\alpha) e^{-\frac{1}{2}\beta}.$$

Интегрируя еще раз, имеем

$$u = -2C_1(\alpha) e^{-\frac{1}{2}\beta} + \varphi_2(\alpha),$$

или

$$u = \varphi_1(\alpha) e^{-\frac{1}{2}\beta} + \varphi_2(\alpha),$$

где φ_1 и φ_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции.

В итоге решение принимает вид

$$u = \varphi_1(6y + x) e^{-\frac{1}{2}x} + \varphi_2(6y + x).$$

Ответ:

$$u = \varphi_1(6y + x) e^{-\frac{1}{2}x} + \varphi_2(6y + x),$$

где φ_1 и φ_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции.

2. Найти общее решение уравнения

$$4u_{xx} + 3u_{xy} - u_{yy} = 0, \tag{12}$$

приведя его к каноническому виду.

Решение.

Соотношение (12) представляет собой частный случай уравнения (3). Для данной задачи

$$A = 4,\ B = \frac{3}{2},\ C = -1.$$

Найдем

$$B^2 - AC = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4} > 0.$$

Следовательно, уравнение (12) гиперболического типа.

Составим уравнение характеристик

$$4(dy)^2 - 3dxdy - (dx)^2 = 0.$$

Преобразуя последнее, получим

$$4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{4} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{4},$$

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}.$$

После интегрирования находим

$$y - x = C_1, \quad y + \frac{1}{4}x = C_2.$$

Введем новые переменные α и β:

$$\begin{cases} \alpha = y - x, \\ \beta = y + \dfrac{1}{4}x. \end{cases}$$

Найдем частные производные от этих переменных по x и y:

$$\alpha_x = -1, \;\; \alpha_y = 1,$$
$$\beta_x = \frac{1}{4}, \;\; \beta_y = 1.$$

Учитывая это, получим

$$u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = -u_\alpha + \frac{1}{4}u_\beta,$$
$$u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y = u_\alpha + u_\beta,$$
$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} =$$
$$= -\left(-u_{\alpha\alpha} + \frac{1}{4}u_{\beta\alpha}\right) + \frac{1}{4}\left(-u_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}u_{\beta\beta}\right) = u_{\alpha\alpha} - \frac{1}{2}u_{\alpha\beta} + \frac{1}{16}u_{\beta\beta},$$
$$u_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} =$$
$$= \left(-u_{\alpha\alpha} + \frac{1}{4}u_{\beta\alpha}\right) + \left(-u_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}u_{\beta\beta}\right) = -u_{\alpha\alpha} - \frac{3}{4}u_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}u_{\beta\beta},$$
$$u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} =$$
$$= \left(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\alpha}\right) + \left(u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}\right) = u_{\alpha\alpha} + 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}.$$

Подставим найденные частные производные в уравнение (12):

$$4\left(u_{\alpha\alpha} - \frac{1}{2}u_{\alpha\beta} + \frac{1}{16}u_{\beta\beta}\right) + 3\left(-u_{\alpha\alpha} - \frac{3}{4}u_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}u_{\beta\beta}\right) - \left(u_{\alpha\alpha} + 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}\right) = 0,$$
$$4u_{\alpha\alpha} - 2u_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}u_{\beta\beta} - 3u_{\alpha\alpha} - \frac{9}{4}u_{\alpha\beta} + \frac{3}{4}u_{\beta\beta} - u_{\alpha\alpha} - 2u_{\alpha\beta} - u_{\beta\beta} = 0,$$
$$\left(-4 - \frac{9}{4}\right)u_{\alpha\beta} = 0.$$

Таким образом, уравнение (12) имеет каноническое вид

$$u_{\alpha\beta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0\,. \tag{13}$$

Найдем его общее решение. Запишем (13) в виде

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$u_\alpha = \varphi_1(\alpha).$$

Проинтегрируем еще раз. Получим

$$u = \psi_1(\alpha) + \psi_2(\beta),$$

где ψ_1 и ψ_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции. Итак, искомое решение имеет вид

$$u = \psi_1(y - x) + \psi_2\left(y + \frac{1}{4}x\right).$$

Ответ:

$$u = \psi_1(y - x) + \psi_2\left(y + \frac{1}{4}x\right),$$

где ψ_1 и ψ_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции.

2 КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА ОТРЕЗКЕ

2.1 Задача Штурма-Лиувилля

Одним из основных методов решения уравнений математической физики является метод Фурье (метод разделения переменных). Задача Штурма-Лиувилля – важный этап этого метода. Она формулируется следующим образом.

Дано уравнение

$$y'' - q(x)y' + \lambda y = 0. \tag{14}$$

Требуется найти его решение $y(x)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$$

Здесь $x \in [a, b]$, $q(x)$ – непрерывная на этом отрезке функция; α_1, α_2, β_1, β_2 – параметры, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Значения параметра λ, при которых существуют ненулевые решения уравнения (14), удовлетворяющие указанным условиям, называются собственными числами или собственными значениями, а соответствующие им решения – собственными функциями краевой задачи.

3. Дано дифференциальное уравнение. В указанной области найти его решения $y = y(x)$, отличные от тождественного нуля и удовлетворяющие заданным краевым условиям:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & (15) \\ \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{5\pi}{2}, \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = 0. & (16) \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим отдельно три случая.

1) $\lambda < 0$.

Пусть $\lambda = -\omega^2$. Тогда уравнение (15) имеет общее решение

$$y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Используем краевые условия (16):

$$y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0: \quad C_1 e^{\frac{5\pi}{2}\omega} + C_2 e^{-\frac{5\pi}{2}\omega} = 0,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0: \quad C_1 \omega e^{\frac{\pi}{2}\omega} - C_2 \omega e^{-\frac{\pi}{2}\omega} = 0.$$

Получили систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2. Составим ее определитель.

$$\begin{vmatrix} e^{\frac{5\pi}{2}\omega} & e^{-\frac{5\pi}{2}\omega} \\ \omega e^{\frac{\pi}{2}\omega} & -\omega e^{-\frac{\pi}{2}\omega} \end{vmatrix} = -\omega e^{\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\omega} - \omega e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2}\right)\omega} \neq 0.$$

Это соотношение верно при любом значении ω. Следовательно, при $\lambda < 0$ существует только тривиальное решение системы, то есть $C_1 = C_2 = 0$, а уравнение (15) имеет единственное решение $y \equiv 0$.

2) $\lambda = 0$.

Уравнение (15) принимает вид

$$y'' = 0.$$

Решение данного уравнения записывается в форме

$$y = C_1 x + C_2.$$

Используя краевые условия (16), составим соответствующий определитель по аналогии с предыдущим случаем

$$\begin{vmatrix} \frac{5\pi}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Следовательно, при $\lambda = 0$ возможно только тривиальное решение $y \equiv 0$.

3) $\lambda > 0$.

В этом случае решение уравнения (15) имеет вид

$$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x. \tag{17}$$

Тогда

$$y' = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x.$$

Используя краевые условия (16), получим

$$y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0: \quad C_1\cos\left(\frac{5\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) + C_2\sin\left(\frac{5\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) = 0, \tag{18}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0: \quad -C_1\sqrt{\lambda}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) + C_2\sqrt{\lambda}\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) = 0. \tag{19}$$

Составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{5\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) & \sin\left(\frac{5\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) \\ -\sqrt{\lambda}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) & \sqrt{\lambda}\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) \end{vmatrix},$$

раскрывая который, найдем

$$\Delta = \sqrt{\lambda}\cos(2\pi\sqrt{\lambda}).$$

Отыщем ненулевые решения уравнения

$$\sqrt{\lambda}\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Так как $2\pi\sqrt{\lambda} > 0$, то

$$2\pi\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

или

$$\lambda_n = \left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

При полученных значениях λ уравнения (18) и (19) линейно зависимы. Рассмотрим уравнение (18). Выразим из него C_1:

$$C_1 = -C_2 \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}\right)}.$$

Подставим это выражение в соотношение (17):

$$y = -C_2 \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}\right)} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right),$$

или

$$y = \frac{C_2}{\cos\left(\frac{5\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}\right)} \sin\left[\sqrt{\lambda_n}\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)\right].$$

Ненулевые решения задачи (15) – (16) определяются с точностью до множителя. Поэтому можно принять

$$C_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}\right).$$

В итоге получим

$$y = \sin\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)\right].$$

Проверка.

Проверим, удовлетворяет ли найденное решение краевым условиям (16).

$$y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin(0) = 0,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\cos\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\cos\left(2\pi \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{2\pi}\right) = 0.$$

Таким образом, условия (16) выполняются.

Ответ: $y = \sin\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)\right]$, $n = 0,\ 1, 2, \ldots$

2.2 Первая смешанная задача для волнового уравнения

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{20}$$
$$0 \le x \le l, \quad 0 \le t < T$$

при граничных условиях

$$u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0 \tag{21}$$

и начальных условиях

$$u(x,\ 0) = f(x),\ u_t(x,\ 0) = h(x). \tag{22}$$

Здесь T – постоянная.

К такой задаче приводит описание свободных колебаний струны, закрепленной на концах. Для ее решения применим метод Фурье (метод разделения переменных).

Будем искать ненулевые решения уравнения (20), удовлетворяющие граничным условиям (21), в виде

$$u(x,\ t) = X(x)T(t).$$

Подставляя это выражение в уравнение (20), получим соотношение

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{23}$$

Так как левая часть уравнения (23) является функцией одной независимой переменной, а правая – другой, то обе эти части равны некоторой постоянной. Обозначая ее $(-\lambda)$, получим два уравнения

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \tag{24}$$
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{25}$$

Из соотношений (21) следует, что должны выполняться условия

$$X(0)=0,\ X(l)=0\,. \tag{26}$$

Таким образом, необходимо решить задачу Штурма – Лиувилля (25) – (26). Отличные от нуля решения возможны только при $\lambda>0$, что доказывается в общем случае так же, как в задаче **3**. При этом

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x\,.$$

Здесь C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Учитывая граничные условия (26), получаем

$$\begin{cases} C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=0\ , \\ C_1\cos\sqrt{\lambda}l+C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0\,, \end{cases}$$

то есть $C_1=0$ и

$$C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0\,.$$

Так как решение $X(x)$ должно быть ненулевым, то $C_2\neq 0$ и

$$\sin\sqrt{\lambda}l=0\,,$$

так что

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\pi n}{l},$$

где $n=1,\ 2,\ \ldots$

Таким образом, собственными значениями задачи (25) – (26) являются числа

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Им соответствуют собственные функции

$$X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x\,.$$

При $\lambda=\lambda_n$ уравнение (24) имеет решение

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{\pi n a t}{l}+B_n\sin\frac{\pi n a t}{l},$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Функции

$$u_n(x,\ t) = X_n(x)T_n(t),$$

или

$$u_n(x,\ t) = (A_n \cos\frac{\pi nat}{l} + B_n \sin\frac{\pi nat}{l})\sin\frac{\pi nx}{l}$$

удовлетворяют уравнению (20) и граничным условиям (21).

Решение задачи (20) – (22) будем искать в виде ряда

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi nat}{l} + B_n \sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{27}$$

Производная по времени

$$u_t(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l}\left(-A_n \sin\frac{\pi nat}{l} + B_n \cos\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{28}$$

С учетом начальных условий (22) при $t = 0$ равенства (27) и (28) принимают вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi nx}{l},$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l} B_n \sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Это – разложения функций $f(x)$ и $h(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[0,\ l]$. Поэтому

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^l h(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

4. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке:

$$u_{tt} = \frac{1}{9}\, u_{xx},$$
$$0 \le x \le 2, \quad 0 \le t < T,$$
$$u(x,\ 0) = x(x-2), \quad u_t(x,\ 0) = 0,$$
$$u(0,\ t) = 0, \quad u(2,\ t) = 0.$$

Решение.

Имеем частный случай соотношений (20) – (22). В данной задаче $a = \frac{1}{3}$, $l = 2$, $f(x) = x(x-2)$, $h(x) = 0$.

Решение (27) принимает вид

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n}{2} \frac{1}{3} t \right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{2} \frac{1}{3} t \right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{2} x \right),$$

где коэффициенты A_n и B_n соответственно равны:

$$A_n = \int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{2} x \right) dx, \tag{29}$$

$$B_n = \frac{6}{\pi n} \int_0^2 h(x) \sin\left(\frac{\pi n}{2} x \right) dx. \tag{30}$$

Так как $h(x) = 0$, то из формулы (30) следует, что $B_n = 0$.
По формуле (29) найдем A_n:

$$A_n = \int_0^2 x(x-2) \sin\left(\frac{\pi n}{2} x \right) dx.$$

Дважды интегрируя по частям, получим

$$A_n = \frac{16}{(\pi n)^3} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{32}{(\pi n)^3}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Здесь $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Запишем решение

$$u(x,\,t)=-\frac{32}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}t\right)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right).$$

Выпишем несколько первых членов этого ряда:

$$u(x,\,t)=-\frac{32}{\pi^3}\left[\cos\frac{\pi t}{6}\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{27}\cos\frac{\pi t}{2}\sin\frac{3\pi x}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{125}\cos\frac{5\pi t}{6}\sin\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right].$$

.

Ответ: $$u(x,\,t)=-\frac{32}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}t\right)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right).$$

2.3 Первая смешанная задача для уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t=a^2u_{xx},$$
$$0\le x\le l,\quad 0\le t<T$$

при граничных условиях

$$u(0,\,t)=0,\ u(l,\,t)=0$$

и начальных условиях

$$u(x,\,0)=f(x).$$

Здесь T − постоянная.

Решение данной задачи может быть получено методом разделения переменных (методом Фурье) и представляет собой ряд

$$u(x,\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\,e^{-\frac{a^2\pi^2k^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{31}$$

где коэффициенты A_k определяются по стандартной формуле

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx$$

[15, гл. III, § 2].

5. Найти решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$u_t = 36u_{xx},$$
$$0 \le x \le 3, \quad 0 \le t < T,$$

$$u(x,\ 0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & 0 \le x \le \dfrac{3}{2}, \\ 3 - x, & \dfrac{3}{2} < x \le 3, \end{cases}$$

$$u(0,\ t) = u(3,\ t) = 0.$$

Решение.

В данном случае

$$l = 3, \quad a = 6,$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & 0 \le x \le \dfrac{3}{2}, \\ 3 - x, & \dfrac{3}{2} < x \le 3 \end{cases}$$

и равенство (31) приобретает вид

$$u(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-4\pi^2 k^2 t}\sin\frac{\pi k}{3}x, \tag{32}$$

где

$$A_k = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{\pi k}{3}x\,dx.$$

Интеграл в последней формуле целесообразно искать в виде суммы

$$A_k = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{3}\sin\frac{\pi k}{3}x\,dx + \frac{2}{3}\int_{\frac{3}{2}}^{3}(3-x)\sin\frac{\pi k}{3}x\,dx .$$

Вычислим интегралы

$$S_1 = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{3}\sin\frac{\pi k}{3}x\,dx$$

и

$$S_2 = \frac{2}{3}\int_{\frac{3}{2}}^{3}(3-x)\sin\frac{\pi k}{3}x\,dx .$$

Интегрируя в обоих случаях по частям, найдем

$$S_1 = \left(\frac{12}{(\pi k)^3} - \frac{3}{2\pi k}\right)\cos\frac{\pi k}{2} + \frac{6}{(\pi k)^2}\sin\frac{\pi k}{2} - \frac{12}{(\pi k)^3},$$

$$S_2 = \frac{3}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2} + \frac{6}{(\pi k)^2}\sin\frac{\pi k}{2} .$$

Поэтому

$$A_k = \left(\frac{12}{(\pi k)^3} - \frac{3}{2\pi k}\right)\cos\frac{\pi k}{2} + \frac{6}{(\pi k)^2}\sin\frac{\pi k}{2} -$$

$$-\frac{12}{(\pi k)^3} + \frac{3}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2} + \frac{6}{(\pi k)^2}\sin\frac{\pi k}{2} =$$

$$= \frac{3(\pi k)^2 + 24}{2(\pi k)^3}\cos\frac{\pi k}{2} + \frac{12}{(\pi k)^2}\sin\frac{\pi k}{2} - \frac{12}{(\pi k)^3}.$$

Подставив это выражение в соотношение (32), получим решение

$$u(x,\ t) = \frac{3}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(\pi k)^2 + 8}{2k^3}\cos\frac{\pi k}{2} + \right.$$

$$+\frac{4\pi}{k^2}\sin\frac{\pi k}{2}-\frac{4}{k^3}\Bigg]\, e^{-4\pi^2k^2 t}\sin\frac{\pi k}{3}x\,. \qquad (33)$$

Выпишем несколько первых членов ряда (33):

$$u(x,\, t)=\frac{12(\pi-1)}{\pi^3}e^{-4\pi^2t}\sin\frac{\pi x}{3}-\frac{3(\pi^2+4)}{4\pi^3}e^{-16\pi^2t}\sin\frac{2\pi x}{3}-$$
$$-\frac{4(3\pi+1)}{9\pi^3}e^{-36\pi^2t}\sin\pi x+\frac{3}{8\pi}e^{-64\pi^2t}\sin\frac{4\pi x}{3}+\ldots$$

Ответ:
$$u(x,\, t)=\frac{3}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\frac{(\pi k)^2+8}{2k^3}\cos\frac{\pi k}{2}+$$
$$+\frac{4\pi}{k^2}\sin\frac{\pi k}{2}-\frac{4}{k^3}\Bigg]\, e^{-4\pi^2k^2 t}\sin\frac{\pi k}{3}x\,.$$

3 КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

3.1 Первая смешанная задача для уравнения теплопроводности

Пусть требуется найти функцию $u(x,\ y)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{34}$$

$$0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ 0 < t < T$$

при граничных условиях

$$u(0,\ y,\ t) = u(l_1,\ y,\ t) = 0, \tag{35}$$

$$u(x,\ 0,\ t) = u(x,\ l_2,\ t) = 0 \tag{36}$$

и начальном условии

$$u(x,\ y,\ 0) = f(x,\ y). \tag{37}$$

Здесь T − постоянная.

Запишем уравнение (34) в форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u. \tag{38}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Будем искать ненулевые решения уравнения (38), удовлетворяющие граничным условиям (35) – (36), в виде

$$u = T(t)F(x,\ y), \tag{39}$$

где функция $F(x,\ y)$ удовлетворяет условиям

$$F(0,\ y) = F(l_1,\ y) = F(x,\ 0) = F(x,\ l_2) = 0. \tag{40}$$

Подставляя произведение (39) в уравнение (38), получим равенство

$$T'F = a^2 T\ \Delta F,$$

или

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{\Delta F}{F}=-\lambda^2,$$

где λ – постоянная.

Отсюда

$$T'=-\lambda^2a^2T, \tag{41}$$

$$\Delta F+\lambda^2F=0. \tag{42}$$

Уравнение (41) имеет общее решение

$$T=Ae^{-\lambda^2a^2t}. \tag{43}$$

Здесь A – произвольная постоянная.

Для уравнения (42), то есть уравнения

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=-\lambda^2F, \tag{44}$$

будем искать ненулевые частные решения, удовлетворяющие условиям (40), в виде

$$F(x,\ y)=X(x)\ Y(y), \tag{45}$$

где

$$X(0)=0,\ X(l_1)=0,$$
$$Y(0)=0,\ Y(l_2)=0.$$

Функция (39) принимает форму

$$u=T(t)\ X(x)\ Y(y). \tag{46}$$

Подставляя произведение (45) в соотношение (44), получим уравнение

$$X''Y+XY''=-\lambda^2XY,$$

или

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2. \tag{47}$$

Так как λ постоянно, то последнее равенство возможно, если только каждое из слагаемых в левой части также постоянно:

$$\frac{X''}{X}=-\mu^2,\ \frac{Y''}{Y}=-\nu^2.$$

При этом $\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2$.

Таким образом, функции $X(x)$ и $Y(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$X'' + \mu^2 X = 0\,, \tag{48}$$

$$Y'' + \nu^2 Y = 0\,. \tag{49}$$

Эти уравнения имеют, соответственно, общие решения:

$$X = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x\,,$$
$$Y = D_1 \cos \nu y + D_2 \sin \nu y\,.$$

Здесь C_1, C_2, D_1, D_2 – произвольные постоянные.
Из краевых условий для функций X и Y следует, что

$$C_1 = 0,\ \sin \mu l_1 = 0\,,$$
$$D_1 = 0,\ \sin \nu l_2 = 0\,,$$

так что

$$\mu l_1 = \pi m,\ \nu l_2 = \pi n\,,$$

где m, n – натуральные числа.

Обозначим

$$\mu_m = \frac{\pi m}{l_1},\ \nu_n = \frac{\pi n}{l_2},$$
$$\lambda_{mn}^2 = \frac{\pi^2 m^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2 n^2}{l_2^2}\,.$$

Таким образом, уравнения (48) – (49) имеют частные решения

$$X_m = \sin \frac{\pi m}{l_1} x\,,$$

$$Y_n = \sin \frac{\pi n}{l_2} y\,,$$

а функция (43) принимает вид

$$T_{mn} = A_{mn} e^{-a^2 \left(\frac{\pi^2 m^2}{l_1} + \frac{\pi^2 n^2}{l_2} \right) t}\,.$$

Соответственно решение (46) записывается в форме

$$u_{mn} = A_{mn} e^{-a^2\left(\frac{\pi^2 m^2}{l_1} + \frac{\pi^2 n^2}{l_2}\right)t} \sin\frac{\pi m}{l_1}x \, \sin\frac{\pi n}{l_2}y.$$

Сумма

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-a^2\left(\frac{\pi^2 m^2}{l_1} + \frac{\pi^2 n^2}{l_2}\right)t} \sin\frac{\pi m}{l_1}x \, \sin\frac{\pi n}{l_2}y \qquad (50)$$

также является решением задачи (34) − (36).

Начальное условие (37) удовлетворено, если справедливо равенство

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{\pi m}{l_1}x \, \sin\frac{\pi n}{l_2}y, \qquad (51)$$

то есть если коэффициенты данного ряда определяются соотношением

$$A_{mn} = \frac{4}{l_1 l_2}\int_0^{l_1} dx \int_0^{l_2} f(x, y) \sin\frac{\pi m}{l_1}x \, \sin\frac{\pi n}{l_2}y dy.$$

6. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

в квадрате

$$0 < x < 1,$$
$$0 < y < 1$$

при краевых условиях

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0,$$
$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0$$

и начальном условии

$$u(x, y, 0) = \sin \pi x \, \sin \pi y.$$

Решение.

Здесь $a = 1$, $l_1 = l_2 = 1$, и соотношение (51) принимает вид

$$\sin\pi x\ \sin\pi y = A_{11}\sin\pi x\ \sin\pi y + A_{21}\sin 2\pi x\ \sin\pi y +$$
$$+A_{12}\sin\pi x\ \sin 2\pi y + A_{22}\sin 2\pi x\ \sin 2\pi y + \ldots$$

Отсюда

$$A_{11} = 1$$

и

$$A_{mn} = 0$$

при $m \neq 1$, $n \neq 1$. Искомое решение (50) в данном случае записывается в форме

$$u(x,\ y,\ t) = e^{-2\pi^2 t}\sin\pi x\ \sin\pi y\,.$$

Проверка.

Подставим найденное решение в заданное уравнение:

$$-2\pi^2 e^{-2\pi^2 t}\sin\pi x\sin\pi y = e^{-2\pi^2 t}(-\pi^2\sin\pi x\sin\pi y - \pi^2\sin\pi x\sin\pi y)\,.$$

Это – тождество.

Ответ: $u(x,\ y,\ t) = e^{-2\pi^2 t}\sin\pi x\ \sin\pi y\,.$

3.2 Первая смешанная задача для волнового уравнения

К ней приводит, например, описание колебаний прямоугольной мембраны. Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), \\ 0 \le x \le b_1,\ 0 \le y \le b_2, \\ 0 \le t < T \end{gathered} \tag{52}$$

при граничных условиях

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{y=0} = u\big|_{x=b_1} = u\big|_{y=b_2} = 0$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = f(x,y), \quad u_t\big|_{t=0} = h(x,y).$$

Здесь T – постоянная.

Решение поставленной задачи может быть получено методом разделения переменных (методом Фурье) и задано двойным рядом

$$u(x,\, y,\, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \cos \lambda_{mn} at + B_{mn} \sin \lambda_{mn} at \right] \Pi_{mn}(x,\, y), \tag{53}$$

где коэффициенты A_{mn} и B_{mn} определяются по формулам

$$A_{mn} = \iint\limits_D f(x,\, y) \Pi_{mn}(x,\, y)\, dxdy, \tag{54}$$

$$B_{mn} = \frac{1}{a\lambda_{mn}} \iint\limits_D h(x,\, y) \Pi_{mn}(x,\, y)\, dxdy, \tag{55}$$

в которых D – прямоугольная область (52),

$$\lambda_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{b_1^2} + \frac{n^2}{b_2^2}} ,$$

$$\Pi_{mn}(x,\, y) = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}} \sin \frac{\pi m}{b_1} x \sin \frac{\pi n}{b_2} y$$

[15, гл. V, § 3].

7. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения в прямоугольнике:

$$u_{tt} = 64 \Delta u,$$
$$u\big|_{t=0} = xy(6-x)(3-y), \quad u_t\big|_{t=0} = 0,$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{y=0} = u\big|_{x=6} = u\big|_{y=3} = 0.$$

Решение.

В данном случае

$$f(x,\, y) = xy(6-x)(3-y), \quad h(x,y) = 0,$$

$$a = 8,\ b_1 = 6,\ b_2 = 3,$$

$$\lambda_{mn} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{36} + \frac{n^2}{9}}, \tag{56}$$

$$\Pi_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{18}} \sin\frac{\pi m}{6} x \sin\frac{\pi n}{3} y. \tag{57}$$

Так как $h(x, y) = 0$, то, согласно формуле (55), $B_{mn} = 0$.

По формуле (54) найдем

$$A_{mn} = \iint\limits_D xy(6-x)(3-y)\Pi_{mn}(x, y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D xy(6-x)(3-y)\sqrt{\frac{4}{18}} \sin\frac{\pi m}{6} x \sin\frac{\pi n}{3} y\,dxdy.$$

Этот двойной интеграл по прямоугольнику D можно свести к двум определенным интегралам:

$$A_{mn} = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^6 x(6-x)\sin\frac{\pi m}{6} x\,dx \int_0^3 y(3-y)\sin\frac{\pi n}{3} y\,dy.$$

Вычислим интегралы

$$S_1 = \int_0^6 x(6-x)\sin\frac{\pi m}{6} x\,dx$$

и

$$S_2 = \int_0^3 y(3-y)\sin\frac{\pi n}{3} y\,dy.$$

Дважды интегрируя в обоих случаях по частям, получим

$$S_1 = \left(-\frac{432}{(\pi m)^3}\right)\left[(-1)^m - 1\right] = \begin{cases} 0, & m = 2k, \\ \dfrac{864}{(\pi m)^3}, & m = 2k+1; \end{cases}$$

$$S_2 = \left(-\frac{54}{(\pi n)^3}\right)\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2s, \\ \dfrac{108}{(\pi n)^3}, & n = 2s+1. \end{cases}$$

Здесь $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ При этом $A_{mn} \neq 0$, если $m = 2k+1$, $n = 2s+1$, т.е.

$$A_{ks} = \frac{\sqrt{2}}{3} S_1 S_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{864}{\left(\pi(2k+1)\right)^3} \frac{108}{\left(\pi(2s+1)\right)^3} = \frac{31104\sqrt{2}}{\pi^6 (2k+1)^3 (2s+1)^3}.$$

Запишем $\Pi_{ks}(x,\ y)$ и λ_{ks}, используя формулы (57) и (56) соответственно:

$$\Pi_{ks}(x,\ y) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{6} x\right) \sin\left(\frac{\pi(2s+1)}{3} y\right),$$

$$\lambda_{ks} = \pi \sqrt{\frac{(2k+1)^2}{36} + \frac{(2s+1)^2}{9}}.$$

Согласно (53)

$$u(x,\ y,\ t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{ks} \Pi_{ks}(x,\ y) \cos \lambda_{ks} a t.$$

Таким образом, искомое решение

$$u(x,\ y,\ t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{31104\sqrt{2}}{\pi^6 (2k+1)^3 (2s+1)^3} \cos\left(8\pi t \sqrt{\frac{(2k+1)^2}{36} + \frac{(2s+1)^2}{9}}\right)\right] \frac{\sqrt{2}}{3} \times$$
$$\times \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{6} x\right) \sin\left(\frac{\pi(2s+1)}{3} y\right),$$

или

$$u(x,\ y,\ t) = \frac{20736}{\pi^6} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3 (2s+1)^3} \cos\left(8\pi t \sqrt{\frac{(2k+1)^2}{36} + \frac{(2s+1)^2}{9}}\right) \times$$
$$\times \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{6} x\right) \sin\left(\frac{\pi(2s+1)}{3} y\right). \qquad (58)$$

Выпишем несколько первых членов двойного ряда (58):

$$u\left(x,\, y,\, t\right)=\frac{20736}{\pi^6}\left[\cos\left(8\pi t\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{9}}\right)\ \sin\frac{\pi\, x}{6}\sin\frac{\pi\, y}{3}+\right.$$

$$+\frac{1}{27}\cos\left(8\pi t\sqrt{\frac{1}{36}+1}\right)\sin\frac{\pi\, x}{6}\sin\pi\, y+$$

$$+\frac{1}{27}\cos\left(8\pi t\sqrt{\frac{9}{36}+\frac{1}{9}}\right)\sin\frac{\pi\, x}{2}\sin\frac{\pi\, y}{3}+$$

$$\left.+\frac{1}{729}\cos\left(8\pi t\sqrt{\frac{9}{36}+1}\right)\sin\frac{\pi\, x}{2}\sin\pi\, y+\ \ldots\right],$$

или

$$u\left(x,\, y,\, t\right)=\frac{1}{\pi^6}\left[20736\cos\frac{4\sqrt{5}\pi t}{3}\ \sin\frac{\pi\, x}{6}\sin\frac{\pi\, y}{3}+\right.$$

$$+768\cos\frac{4\sqrt{37}\pi t}{3}\sin\frac{\pi\, x}{6}\sin\pi\, y+768\cos\frac{4\sqrt{13}\pi t}{3}\sin\frac{\pi\, x}{2}\sin\frac{\pi\, y}{3}+$$

$$\left.+\frac{256}{9}\cos 4\sqrt{5}\pi t\sin\frac{\pi\, x}{2}\sin\pi\, y+\ \ldots\right].$$

Ответ:

$$u\left(x,\, y,\, t\right)=\frac{20736}{\pi^6}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(2k+1\right)^3\left(2s+1\right)^3}\cos\left(8\pi t\sqrt{\frac{\left(2k+1\right)^2}{36}+\frac{\left(2s+1\right)^2}{9}}\right)\right]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi\left(2k+1\right)}{6}x\right)\sin\left(\frac{\pi\left(2s+1\right)}{3}y\right).$$

4 КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В КРУГЕ И КОЛЬЦЕ

4.1 Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге может быть задана в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \ , \tag{59}$$

$$u\Big|_{r=R}=f(\varphi), \tag{60}$$

$$u(r,\ 2\pi)=u(r,\ 0)\,, \tag{61}$$

$$r\in[0,\ R],\ \ \varphi\in[0,\ 2\pi],$$

где $(r,\ \varphi)$ – полярные координаты точки $(x,\ y)$:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \end{cases}$$

$f(\varphi)$ – заданная на отрезке $[0,\ 2\pi]$ непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$f(0)=f(2\pi)\,.$$

В полярных координатах уравнение Лапласа (59) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\,,$$

или

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\,. \tag{62}$$

Будем искать решение уравнения (62) в виде произведения

$$u=\Phi(\varphi)\Psi(r)\,. \tag{63}$$

Подставим это выражение в указанное уравнение:

$$r^2\Phi(\varphi)\Psi''(r)+r\Phi(\varphi)\Psi'(r)+\Phi''(\varphi)\Psi(r)=0,$$

откуда

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2\Psi''(r) + r\Psi'(r)}{\Psi(r)}. \tag{64}$$

Так как левая часть уравнения (64) является функцией одной независимой переменной, а правая – другой, то обе эти части равны некоторой постоянной. Обозначая ее $(-\lambda^2)$, получим два уравнения:

$$r^2\Psi''(r) + r\Psi'(r) - \lambda^2\Psi(r) = 0 \tag{65}$$

и

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2\Phi(\varphi) = 0. \tag{66}$$

При $\lambda \neq 0$ соотношение (65) представляет собой однородное уравнение Эйлера, решением которого является функция

$$\Psi(r) = r^m.$$

Подставляя в (65), находим

$$r^2 m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} - \lambda^2 r^m = 0.$$

Приводя подобные члены и сокращая на r^m, получим

$$m^2 - \lambda^2 = 0,$$

или $m = \pm\lambda$, так что общее решение уравнения (65) есть

$$\Psi(r) = Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda},$$

где C и D – постоянные.

Если $\lambda \neq 0$, то уравнение (66) имеет решение

$$\Phi(\varphi) = A\cos\lambda\varphi + B\sin\lambda\varphi$$

(A и B – постоянные). Согласно (63), в этом случае

$$u = (A\cos\lambda\varphi + B\sin\lambda\varphi)(Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda}). \tag{67}$$

Если $\lambda = 0$, то уравнения (66) и (65) соответственно принимают вид:

$$\Phi''(\varphi) = 0$$

и

$$r\Psi''(r) + \Psi'(r) = 0.$$

Поэтому в данном случае

$$u = (E + F\varphi)(G + K\ln r), \tag{68}$$

где E, F, G, K – постоянные.

Из соотношения (61) следует, что в равенстве (67) λ может принимать только целые значения. В формуле (67) A, B, C, D − произвольные постоянные. Если заменить λ на $(-\lambda)$, то структура решения (67) не изменится. Поэтому достаточно считать, что здесь параметр λ принимает натуральные значения.

Из условия (61) следует также, что в равенстве (68) $F = 0$. Так как искомое решение должно быть конечным и непрерывным в центре круга, то в соотношениях (67) и (68) $D = K = 0$. Обозначая

$$AC = A_n,\ BC = B_n,\ EG = \frac{A_0}{2},$$

получим решение при $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ в виде

$$u_n(r,\ \varphi) = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n.$$

При этом

$$u_0(r,\ \varphi) = \frac{A_0}{2}.$$

В силу линейности и однородности уравнения (62) сумма

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n \tag{69}$$

также является его решением. Из условия (60) следует равенство

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) R^n,$$

где

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

8. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\Delta u = 0,$$
$$0 \le r < 4,$$
$$u|_{r=4} = 17\sin^3\varphi.$$

Решение.

Это внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

в круге, причем на границе круга радиуса $R = 4$ задано условие

$$u|_{r=4} = 17\sin^3\varphi,$$

где функция $f(\varphi) = 17\sin^3\varphi$ непрерывна и имеет период 2π. Коэффициенты Фурье A_0, A_n и B_n ряда (69) можно определить по формулам:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)d\varphi,$$
$$A_n = \frac{1}{\pi 4^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos n\varphi \, d\varphi,$$
$$B_n = \frac{1}{\pi 4^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin n\varphi \, d\varphi.$$

Однако в данном случае эти коэффициенты могут быть найдены более простым способом. Запишем функцию $f(\varphi)$ в виде

$$f(\varphi) = 17\sin^3\varphi = 17\left(\frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi\right)$$

и учтем, что должно быть справедливо соотношение

$$f(\varphi) = u(4, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)4^n.$$

Из единственности разложения функции в тригонометрический ряд следует, что отличны от нуля только коэффициенты B_1 и B_3. Они определяются равенствами

$$4B_1 = 17 \cdot \frac{3}{4}, \qquad 4^3 B_3 = -17 \cdot \frac{1}{4},$$

так что

$$B_1 = \frac{51}{16}, \qquad B_3 = -\frac{17}{256}.$$

Согласно (69) решение имеет вид

$$u(r,\ \varphi) = B_1 r \sin\varphi + B_3 r^3 \sin 3\varphi,$$

или

$$u(r,\ \varphi) = \frac{51}{16} r \sin\varphi - \frac{17}{256} r^3 \sin 3\varphi.$$

Ответ: $u(r,\ \varphi) = \dfrac{51}{16} r \sin\varphi - \dfrac{17}{256} r^3 \sin 3\varphi$.

4.2 Краевая задача для уравнения Пуассона в кольце

Уравнением Пуассона называется соотношение

$$\Delta u = f,$$

где f – заданная функция. Это уравнение возникает при изучении электростатики и гравитации.

Решение уравнения Пуассона при неоднородных (ненулевых) граничных условиях во многих случаях целесообразно искать в виде суммы решения соответствующего однородного уравнения (уравнения Лапласа) при указанных условиях и решения неоднородного уравнения (уравнения Пуассона) при однородных условиях.

Уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

согласно формулам (67), (68) имеет периодические решения:

$$u = E(G + K \ln r)$$

и

$$u_n = (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)(c_n r^n + d_n r^{-n}),$$

где $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Обозначим

$$EG=A_0,\ EK=B_0,\ A_n=a_n c_n,$$
$$B_n=a_n d_n,\ C_n=b_n c_n,\ D_n=b_n d_n$$

и составим ряд

$$u(r,\ \varphi)=A_0+B_0\ln r+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n r^n+B_n r^{-n}\right)\cos n\varphi+\left(C_n r^n+D_n r^{-n}\right)\sin n\varphi\right]. \tag{70}$$

Отыскав постоянные

$$A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n$$

с помощью краевых условий, получим искомое решение уравнения Лапласа в круге или кольце.

Структура решения уравнения Пуассона при однородных граничных условиях определяется правой частью этого уравнения. С деталями можно ознакомиться в процессе решения следующей задачи.

9. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в кольце:

$$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{71}$$
$$1\le r\le 3,$$
$$u\Big|_{r=1}=3,\quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=3}=2. \tag{72}$$

Решение.

Введем полярные координаты $(r,\ \varphi)$ с помощью соотношений

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда уравнение Пуассона (71) примет вид

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=\frac{r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}{r},$$

то есть

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=r\cos 2\varphi,$$

или

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = r^3 \cos 2\varphi .$$

И в уравнении (71), и в граничных условиях (72) правые части ненулевые, то есть эти соотношения неоднородны. Будем искать решение задачи (71) – (72) в виде суммы

$$u(r,\ \varphi) = v(r,\ \varphi) + w(r,\ \varphi)\ . \tag{73}$$

Здесь $v(r,\ \varphi)$ – решение однородного уравнения

$$r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\varphi\varphi} = 0 \tag{74}$$

при неоднородных условиях

$$v\big|_{r=1} = 3, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=3} = 2 . \tag{75}$$

Второе слагаемое в равенстве (73) есть решение неоднородного уравнения

$$r^2 w_{rr} + r w_r + w_{\varphi\varphi} = r^3 \cos 2\varphi \tag{76}$$

при однородных условиях

$$w\big|_{r=1} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=3} = 0 . \tag{77}$$

Согласно (70)

$$v(r,\ \varphi) = A_0 + B_0 \ln r +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n r^n + B_n r^{-n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n r^n + D_n r^{-n} \right) \sin n\varphi \right],$$

где A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n – постоянные.

Вычислим производную

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{B_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(n A_n r^{n-1} - n B_n r^{-n-1} \right) \cos n\varphi + \left(n C_n r^{n-1} - n D_n r^{-n-1} \right) \sin n\varphi \right]$$

и учтем краевые условия (75):

$$3 = A_0 + B_0 \ln 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n 1^n + B_n 1^{-n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n 1^n + D_n 1^{-n} \right) \sin n\varphi \right],$$

$$2 = \frac{B_0}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(nA_n 3^{n-1} - nB_n 3^{-n-1} \right) \cos n\varphi + \left(nC_n 3^{n-1} - nD_n 3^{-n-1} \right) \sin n\varphi \right].$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A_n + B_n = 0, \\ n3^{n-1} A_n - n3^{-n-1} B_n = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} C_n + D_n = 0, \\ n3^{n-1} C_n - n3^{-n-1} D_n = 0, \end{cases}$$

где $n = 1,\ 2,\ \ldots$

Эти системы имеют только нулевые решения, так что

$$A_n = 0,\ B_n = 0,\ C_n = 0,\ D_n = 0 \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\ A_0 = 3,\ B_0 = 6.$$

Таким образом, решение задачи (74) – (75) есть

$$v(r,\ \varphi) = 3 + 6 \ln r. \tag{78}$$

Рассмотрим уравнение (76) при условиях (77). Будем искать решение этого уравнения в виде

$$w(r,\ \varphi) = f(r) \cos 2\varphi .$$

Подставив данное выражение в уравнение (76), получим краевую задачу для функции $f(r)$:

$$r^2 f''(r) + rf'(r) - 4f(r) = r^3, \tag{79}$$

$$f\big|_{r=1} = 0, \quad f'\big|_{r=3} = 0. \tag{80}$$

Таким образом, мы свели решение краевой задачи (76) – (77) в частных производных к решению краевой задачи (79) – (80) для обыкновенного линейного дифференциального уравнения (79) (уравнения Эйлера).

Общее решение однородного уравнения

$$r^2 f''(r) + rf'(r) - 4f(r) = 0$$

совпадает с решением уравнения (65) при $\lambda = 2$:

$$f_0(r) = c_1 r^2 + c_2 r^{-2},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения (79) может быть найдено в форме

$$f_1(r) = Ar^3.$$

Подставляя в (79), получаем

$$6Ar^3 + 3Ar^3 - 4Ar^3 = r^3,$$

$$A = \frac{1}{5}, \; f_1(r) = \frac{1}{5} r^3.$$

Соответственно общее решение уравнения (79) есть

$$f(r) = c_1 r^2 + c_2 r^{-2} + \frac{1}{5} r^3.$$

Найдем производную

$$f'(r) = 2c_1 r - 2c_2 r^{-3} + \frac{3}{5} r^2.$$

Используя краевые условия (80), получим

$$f(1) = c_1 + c_2 + \frac{1}{5} = 0,$$

$$f'(3) = 6c_1 - \frac{2c_2}{27} + \frac{27}{5} = 0.$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений относительно c_1 и c_2, найдем

$$c_1 = -\frac{731}{820}, \quad c_2 = \frac{567}{820}.$$

Значит, решение задачи (79) – (80) имеет вид

$$f(r) = -\frac{731}{820} r^2 + \frac{567}{820} r^{-2} + \frac{1}{5} r^3,$$

а решение задачи (76) – (77) можно записать в форме

$$w(r,\ \varphi)=\left(-\frac{731}{820}r^2+\frac{567}{820}r^{-2}+\frac{1}{5}r^3\right)\cos 2\varphi\,. \tag{81}$$

Подставив (78) и (81) в (73) , получим решение задачи (71) – (72):

$$u(r,\ \varphi)=3+6\ln r+\left(-\frac{731}{820}r^2+\frac{567}{820}r^{-2}+\frac{1}{5}r^3\right)\cos 2\varphi\,.$$

Ответ: $u(r,\ \varphi)=3+6\ln r+\left(-\frac{731}{820}r^2+\frac{567}{820}r^{-2}+\frac{1}{5}r^3\right)\cos 2\varphi\,.$

5 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ТРЕБУЮЩИЕ ПРИМЕНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

5.1 Решение уравнения Гельмгольца

Уравнением Гельмгольца называется соотношение

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

где k – постоянная. К этому уравнению приводит, в частности, изучение установившихся колебательных процессов.

Введем полярные координаты с помощью соотношений

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Если

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

то задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$
$$0 \le r < R,$$
$$u\big|_{r=R} = f(\varphi)$$

можно записать в виде

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + k^2 u = 0,$$
$$0 \le r < R \quad ,$$
$$u\big|_{r=R} = f(\varphi).$$

Будем предполагать, что функция $f(x)$ непрерывна и имеет период 2π.

Применим метод Фурье. Подставим произведение

$$u(r,\ \varphi) = \Phi(\varphi)R(r)$$

в уравнение Гельмгольца, записанное в полярных координатах:

$$r^2\Phi R'' + r\Phi R' + \Phi'' R + k^2 r^2 \Phi R = 0.$$

Отсюда

$$\frac{r^2R''+rR'+k^2r^2R}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda^2,$$

где λ – постоянная.

Последнее равенство определяет собственные числа и собственные функции данной краевой задачи:

$$\Phi''+\lambda^2\Phi=0,$$
$$\lambda=n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$
$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi.$$

Здесь A_n и B_n – постоянные.

Для функции $R(r)$ получается уравнение

$$r^2R''+rR'+(k^2r^2-n^2)R=0.$$

Сделаем замену переменной

$$kr=x,\ r=\frac{x}{k},$$
$$R'=\frac{dR}{dr}=\frac{dR}{dx}\frac{dx}{dr}=k\frac{dR}{dx}.$$

Аналогично

$$R''=k^2\frac{d^2R}{dx^2}.$$

Следовательно, функция R удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^2}{k^2}k^2\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{x}{k}k\frac{dR}{dx}+(x^2-n^2)R=0,$$

то есть

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-n^2)R=0.$$

Это уравнение Бесселя порядка n. Оно имеет общее решение

$$R=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x).$$

Здесь $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода, порядка n; $Y_n(x)$ – функция Бесселя второго рода, порядка n; C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Таким образом,

$$R(r)=C_1J_n(kr)+C_2Y_n(kr).$$

Так как $Y_n(kr)$ не ограничена в окрестности начала координат, то $C_2 = 0$ и

$$R(r) = J_n(kr).$$

Искомая функция

$$u(r,\ \varphi) = \frac{A_0}{2} J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) J_n(kr). \qquad (82)$$

Учитывая граничное условие

$$u(R, \varphi) = f(\varphi),$$

получаем разложение

$$f(\ \varphi) = \frac{A_0}{2} J_0(kR) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) J_n(kR),$$

где коэффициенты A_0, A_n и B_n определяются по стандартным формулам:

$$A_0 = \frac{1}{\pi J_0(Rk)} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi\, J_n(Rk)} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi\, J_n(Rk)} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi\, d\varphi. \qquad (83)$$

10. Найти функцию u, удовлетворяющую внутри круга уравнению Гельмгольца и принимающую на границе круга заданные значения:

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$
$$0 \le r < 14{,}5,$$
$$u\big|_{r=14{,}5} = 2\sin^3 \varphi.$$

Решение.

Запишем

$$f(\varphi) = 2\sin^3\varphi = 2\left(\frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi\right) = \frac{3}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 3\varphi.$$

Должно быть справедливо соотношение

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2}J_0(14{,}5k) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right)J_n(14{,}5k),$$

поэтому в формуле (82) ненулевыми будут только коэффициенты B_1 и B_3. Значит искомое решение имеет вид

$$u(r,\ \varphi) = B_1 J_1(kr)\sin\varphi + B_3 J_3(kr)\sin 3\varphi, \tag{84}$$

где

$$B_1 = \frac{3}{2J_1(14{,}5k)},\quad B_3 = -\frac{1}{2J_3(14{,}5k)}.$$

В данном случае эти коэффициенты легко вычисляются без использования формулы (83). По формуле (84) находим

$$u(r,\ \varphi) = \frac{3}{2J_1(14{,}5k)}J_1(kr)\sin\varphi - \frac{1}{2J_3(14{,}5k)}J_3(kr)\sin 3\varphi.$$

Ответ: $u(r,\ \varphi) = \dfrac{3}{2J_1(14{,}5k)}J_1(kr)\sin\varphi - \dfrac{1}{2J_3(14{,}5k)}J_3(kr)\sin 3\varphi.$

5.2 Первая смешанная задача для волнового уравнения

Пусть необходимо решить волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2\Delta u$$

при начальных условиях

$$u(r,\ 0) = f(r),\ u_t(r,\ 0) = h(r)$$

и граничных

$$u(R,\ t) = 0.$$

Здесь $0 \le r \le R$ и R – постоянная.

К этой задаче приводит описание колебаний круглой мембраны.

Введем полярные координаты с помощью соотношений

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Так как функции, задающие начальные и граничные условия, не зависят от полярного угла φ, целесообразно искать решение, не зависящее от этого угла. Тогда волновое уравнение приобретает вид

$$u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right).$$

Решение поставленной задачи получено методом разделения переменных (методом Фурье) и записывается в виде ряда

$$u(r,\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \cos\left(\frac{\mu_k}{R}at\right) + B_k \sin\left(\frac{\mu_k}{R}at\right)\right]J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right), \tag{85}$$

где $J_0\left(\dfrac{\mu_k}{R}r\right)$ – значения функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, μ_k – нули функции $J_0(x)$, а коэффициенты A_k, B_k определяются по формулам

$$A_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\int_0^1 x J_0(\mu_k x) f(Rx)dx, \tag{86}$$

$$B_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\frac{R}{\mu_k a}\int_0^1 x J_0(\mu_k x) h(Rx)dx \tag{87}$$

[14, гл. III, § 14, п. 7]. Здесь $J_1(\mu_k)$ – значение функции Бесселя первого рода, первого порядка.

Следует иметь в виду, что формулы (86) – (87) получены из соотношений, приведенных в книге [14], с помощью замены переменной $\dfrac{r}{R} = x$.

11. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения в круге

$$u_{tt} = 25\Delta u,$$
$$0 \le r < 2,\ \ 0 < t < T,$$
$$u(r,\ 0) = \frac{1}{8}\left[1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right],$$
$$u_t(r,\ 0) = 0,\ \ u(2,\ t) = 0.$$

Здесь T – постоянная.

Решение.

В данном случае

$$f(r) = \frac{1}{8}\left[1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right], \quad h(r) = 0, \quad R = 2,\ a = 5.$$

Так как здесь $h(r) = 0$, то, согласно формуле (87), $B_k = 0$. Равенство (85) принимает вид

$$u(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k}{2} r\right)\cos\left(\frac{\mu_k}{2} 5t\right). \tag{88}$$

По формуле (86) найдем

$$A_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\int_0^1 x J_0(\mu_k x)\frac{1}{8}\left[1 - \left(\frac{2x}{2}\right)^2\right]dx = \frac{1}{4J_1^2(\mu_k)}\int_0^1 x\left(1 - x^2\right)J_0(\mu_k x)dx.$$

Запишем последнее равенство в форме

$$A_k = \frac{1}{4J_1^2(\mu_k)}\left(\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)dx - \int_0^1 x^3 J_0(\mu_k x)\,dx\right). \tag{89}$$

Вычислим интегралы

$$S_1 = \int_0^1 xJ_0(\mu_k x)\,dx$$

и

$$S_2 = \int_0^1 x^3 J_0(\mu_k x)dx.$$

С этой целью воспользуемся рекуррентными формулами

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(x)\right) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$$

и

$$xJ_{\nu+1}(x) = -xJ_{\nu-1}(x) + 2\nu J_{\nu}(x)$$

[15, дополнение 2, ч.1, § 1, п.2]. Из первой из них при $\nu = 1$ и $\nu = 2$ получаем соответственно:

$$\int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi = xJ_1(x), \tag{90}$$

$$\int_0^x \xi^2 J_1(\xi) d\xi = x^2 J_2(x).$$

Вычислим по частям интеграл

$$\int_0^x \xi^3 J_0(\xi) d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi^2, \ du = 2\xi d\xi \\ dw = \xi J_0(\xi) d\xi, \ w = \xi J_1(\xi) \end{bmatrix} =$$

$$= \xi^3 J_1(\xi)\Big|_0^x - 2\int_0^x \xi^2 J_1(\xi) d\xi =$$

$$= x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x).$$

Согласно второй из приведенных рекуррентных формул, при $\nu = 1$ справедливо равенство

$$xJ_2(x) = -xJ_0(x) + 2J_1(x).$$

Поэтому

$$\int_0^x \xi^3 J_0(\xi) d\xi =$$

$$= x^3 J_1(x) - 2x(-xJ_0(x) + 2J_1(x)) =$$

$$= 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x),$$

то есть

$$\int_0^x \xi^3 J_0(\xi) d\xi = 2x^2 J_0(x) + x\left(x^2 - 4\right) J_1(x). \tag{91}$$

Вернемся к вычислению интегралов S_1 и S_2. Используем замену переменной $\mu_k x = \xi$. Получим

$$S_1 = \int_0^{\mu_k} J_0(\xi) \frac{\xi}{\mu_k} \frac{d\xi}{\mu_k} = \frac{1}{\mu_k^2} \int_0^{\mu_k} \xi J_0(\xi)\, d\xi .$$

По формуле (90) находим

$$S_1 = \frac{1}{\mu_k} J_1(\mu_k).$$

Аналогично с помощью замены $\mu_k x = \xi$ и формулы (91) найдем интеграл S_2:

$$S_2 = \int_0^{\mu_k} J_0(\xi) \frac{\xi^3}{\mu_k^3} \frac{d\xi}{\mu_k} = \frac{1}{\mu_k^4} \int_0^{\mu_k} J_0(\xi) \xi^3\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\mu_k^4} \left[2\mu_k^2 J_0(\mu_k) + \mu_k \left(\mu_k^2 - 4 \right) J_1(\mu_k) \right] = \frac{J_1(\mu_k)}{\mu_k} - \frac{4 J_1(\mu_k)}{\mu_k^3}.$$

Здесь $J_0(\mu_k) = 0$, так как μ_k – корень функции $J_0(x)$.

Далее

$$S_1 - S_2 = \frac{1}{\mu_k} J_1(\mu_k) - \left[\frac{J_1(\mu_k)}{\mu_k} - \frac{4 J_1(\mu_k)}{\mu_k^3} \right],$$

или

$$S_1 - S_2 = \frac{4 J_1(\mu_k)}{\mu_k^3}. \qquad (92)$$

Подставив (92) в (89), получим коэффициенты

$$A_k = \frac{1}{4 J_1^2(\mu_k)} (S_1 - S_2) = \frac{1}{4 J_1^2(\mu_k)} \frac{4 J_1(\mu_k)}{\mu_k^3} = \frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}. \qquad (93)$$

Учитывая (88) и (93), получим решение

$$u(r,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}J_0\left(\frac{\mu_k}{2}r\right)\cos\left(\frac{\mu_k}{2}5t\right). \qquad (94)$$

Запишем несколько первых членов этого ряда. С этой целью вычислим соответствующие коэффициенты A_k. Для первых трех членов ряда имеем значения корней

$$\mu_1=2{,}404,\ \ \mu_2=5{,}520,\ \mu_3=8{,}654$$

[13, гл. VII, п. 191]. Соответственно

$$J_1(\mu_1)=0{,}519,\ J_1(\mu_2)=-0{,}340,\ J_1(\mu_3)=0{,}271.$$

По формуле (93)

$$A_1=\frac{1}{\mu_1^3 J_1(\mu_1)}=0{,}1391,$$
$$A_2=\frac{1}{\mu_2^3 J_1(\mu_2)}=-0{,}0175,$$
$$A_3=\frac{1}{\mu_3^3 J_1(\mu_3)}=0{,}0057.$$

Подставляя найденные значения в решение (94), получим в итоге

$$u(r,\ t)=0{,}139J_0(1{,}2r)\cos(6{,}0t)-0{,}017J_0(2{,}76r)\cos(13{,}8t)+$$
$$+0{,}006J_0(4{,}33r)\cos(21{,}63t)+\ldots$$

Ответ: $$u(r,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}J_0\left(\frac{\mu_k}{2}r\right)\cos\left(\frac{\mu_k}{2}5t\right).$$

5.3 Первая смешанная задача для уравнения теплопроводности

Предположим, что искомая функция u не зависит от полярного угла. Тогда уравнение теплопроводности в круге имеет вид

$$u_t=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right).$$

Пусть его необходимо решить при начальном условии

$$u(r,\ 0)=f(r)$$

и граничном условии

$$u(R,\ t)=0.$$

Решение поставленной задачи получено методом разделения переменных и записывается в виде ряда

$$u(r,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-\frac{\mu_k^2}{R^2}a^2 t}\, J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right), \tag{95}$$

где $J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)$ – значения функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, μ_k – нули функции $J_0(x)$, а коэффициенты A_k определяются по формуле

$$A_k=\frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\int_0^1 x J_0(\mu_k x) f(Rx)\,dx$$

([6, гл. XXVIII, § 3, случай 1], затем замена $\frac{r}{R}=x$). Здесь $J_1(\mu_k)$ – значение функции Бесселя первого рода, первого порядка.

12. Найти решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности в круге:

$$u_t=4\Delta u,$$
$$0\le r<8,\quad 0<t<T,$$
$$u(r,\ 0)=64-r^2,$$
$$u(8,\ t)=0.$$

Здесь T – постоянная.

Решение.

В данном случае $f(r)=64-r^2,\ \ R=8, a=2$ и соотношение (95) принимает вид

$$u(r,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-\frac{\mu_k^2}{16}t}\, J_0\left(\frac{\mu_k}{8}r\right),$$

где

$$A_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 64x\left(1 - x^2\right) J_0(\mu_k x)\, dx,$$

или

$$A_k = \frac{128}{J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 x\left(1 - x^2\right) J_0(\mu_k x)\, dx = \frac{128}{J_1^2(\mu_k)} (S_1 - S_2)\ .$$

Здесь разность $S_1 - S_2$ определяется соотношением (92). С его учетом находим

$$A_k = \frac{128}{J_1^2(\mu_k)} \frac{4J_1(\mu_k)}{\mu_k^3} = \frac{512}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}. \tag{96}$$

Получаем решение

$$u(r,\ t) = 512 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} e^{-\frac{\mu_k^2}{16} t} J_0\left(\frac{\mu_k}{8} r\right). \tag{97}$$

Запишем несколько первых членов ряда (97). Так как в данной задаче коэффициенты (96) в 512 раз больше коэффициентов A_k, найденных в задаче **11** (см. формулу (93)), то можно сразу написать для первых трех членов ряда (97):

$$A_1 = \frac{512}{\mu_1^3 J_1(\mu_1)} = 71{,}2,$$

$$A_2 = \frac{512}{\mu_2^3 J_1(\mu_2)} = -8{,}9,$$

$$A_3 = \frac{512}{\mu_3^3 J_1(\mu_3)} = 2{,}9$$

и

$$u(r,\ t) = 71{,}2 e^{-0{,}36t} J_0(0{,}30r) - 8{,}9 e^{-1{,}9t} J_0(0{,}69r) +$$
$$+ 2{,}9 e^{-4{,}6t} J_0(1{,}08r) + \ldots$$

Ответ: $u(r,\ t) = 512 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} e^{-\frac{\mu_k^2}{16} t} J_0\left(\frac{\mu_k}{8} r\right).$

6 ЗАДАЧА КОШИ

6.1 Уравнение теплопроводности

Пусть требуется найти ограниченное решение одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{98}$$

$$-\infty < x < +\infty, \; 0 < t < T$$

при начальном условии

$$u\big|_{t=0} = f(x). \tag{99}$$

Здесь T – постоянная, а функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < \infty .$$

Будем искать частные решения уравнения (98) в виде

$$u(x, t) = T(t) X(x). \tag{100}$$

Подставляя (100) в (98), получим соотношение

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t) X''(x),$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 , \tag{101}$$

где λ – постоянная.

Следовательно, функции $T(t)$ и $X(x)$ должны удовлетворять уравнениям

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \tag{102}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Эти уравнения соответственно имеют решения:

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t}, \tag{103}$$

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x,$$

где A, B, C – постоянные.

Если в правой части соотношения (101) и соответственно в решении (103) изменить знак перед λ^2, то это решение будет неограниченным. Именно поэтому отношения (101) с самого начала считались неположительными.

Так как граничные условия отсутствуют, то параметр λ может принимать любые действительные значения. Поэтому вместо обычного ряда составим интеграл

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x) d\lambda . \qquad (104)$$

Подстановка функции (104) непосредственно в уравнение (98) показывает, что при достаточно «хороших» свойствах коэффициентов $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ указанная функция является решением данного уравнения.

Согласно начальным условиям должно выполняться равенство

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x) d\lambda . \qquad (105)$$

Запишем формулу Фурье для функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos\lambda(s-x) ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos\lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos\lambda s ds + \sin\lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\sin\lambda s ds) d\lambda .$$

Отсюда следует, что условие (105) будет выполнено, если принять

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos\lambda s ds , \qquad (106)$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\sin\lambda s ds . \qquad (107)$$

Соотношения (104), (106) и (107) в совокупности представляют собой решение задачи (98) – (99). Ему может быть придана более удобная форма. Если подставить выражения (106) – (107) в равенство (104), получится решение в виде одной формулы, содержащей двойной интеграл. Если затем изменить порядок интегрирования, можно вычислить интеграл по переменной λ. В результате решение записывается в форме

$$u(x,\, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} f(s)\, ds. \tag{108}$$

Это соотношение иногда называют формулой Пуассона. Подробное доказательство ее справедливости приведено в учебнике В.И. Смирнова [13], п.п. 84, 214.

13. Используя формулу Пуассона, найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t = 2u_{xx},$$
$$-\infty < x < +\infty,\ 0 < t < T,$$
$$u\big|_{t=0} = e^{-4x^2+8x}. \tag{109}$$

Решение.

В данном случае $f(x)=e^{-4x^2+8x}$, $a=\sqrt{2}$. Соотношение (108) принимает вид

$$u(x,\, t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\left(s^2-2s\right)} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-s)^2}{8t}}\, ds. \tag{110}$$

В последней формуле сделаем замену

$$\frac{x-s}{2\sqrt{2t}} = z\,.$$

Тогда

$$u(x,\, t)=\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi t}}\int\limits_{+\infty}^{-\infty} e^{-4\left(\left(x-2\sqrt{2t}\, z\right)^2-2\left(x-2\sqrt{2t}\, z\right)\right)} e^{-z^2} \left(-2\sqrt{2t}\right)dz =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[z^2+4\left(x-2\sqrt{2t}\, z\right)^2-8\left(x-2\sqrt{2t}\, z\right)\right]}\, dz\,.$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках:

$$A(x,\, t,\, z) = z^2 + 4\left(x - 2\sqrt{2t}\, z\right)^2 - 8\left(x - 2\sqrt{2t}\, z\right).$$

Выделим в нем полный квадрат:

$$\begin{aligned}
A(x,\, t,\, z) &= z^2 + 4\left(x^2 - 4\sqrt{2t}\, xz + 8tz^2\right) - 8\left(x - 2\sqrt{2t}\, z\right) = \\
&= z^2 + 4x^2 - 16\sqrt{2t}\, xz + 32tz^2 - 8x + 16\sqrt{2t}\, z = \\
&= z^2(1 + 32t) + 2z\left(8\sqrt{2t} - 8\sqrt{2t}\, x\right) + \left(4x^2 - 8x\right) = \\
&= \left(z\sqrt{1+32t}\right)^2 + 2z\sqrt{1+32t}\,\frac{8\sqrt{2t} - 8\sqrt{2t}\, x}{\sqrt{1+32t}} + \\
&+ \frac{\left(8\sqrt{2t} - 8\sqrt{2t}\, x\right)^2}{1+32t} - \frac{\left(8\sqrt{2t} - 8\sqrt{2t}\, x\right)^2}{1+32t} + \left(4x^2 - 8x\right) = \\
&= \left(z\sqrt{1+32t} + \frac{8\sqrt{2t} - 8\sqrt{2t}\, x}{\sqrt{1+32t}}\right)^2 + \left(4x^2 - 8x\right) - \frac{\left(8\sqrt{2t} - 8\sqrt{2t}\, x\right)^2}{1+32t}.
\end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$w = z\sqrt{1+32t} + \frac{8\sqrt{2t} - 8\sqrt{2t}\, x}{\sqrt{1+32t}}.$$

Тогда

$$u(x,\, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[z^2 + 4\left(x - 2\sqrt{2t}\, z\right)^2 - 8\left(x - 2\sqrt{2t}\, z\right)\right]}\, dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2}\, e^{-\left(4x^2 - 8x\right)}\, e^{\frac{\left(8\sqrt{2t} - 8\sqrt{2t}\, x\right)^2}{1+32t}}\, \frac{dw}{\sqrt{1+32t}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+32t}} e^{-\left(4x^2 - 8x\right)}\, e^{\frac{\left(8\sqrt{2t} - 8\sqrt{2t}\, x\right)^2}{1+32t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2}\, dw.$$

Учитывая, что интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2}\,dw = \sqrt{\pi},$$

получим решение

$$u(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{1+32t}} e^{-\left(4x^2-8x\right)} e^{\frac{\left(8\sqrt{2t}-8\sqrt{2t}\,x\right)^2}{1+32t}},$$

или

$$u(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{1+32t}} e^{-\left(4x^2-8x\right)} e^{\frac{\left(8\sqrt{2t}\right)^2(1-x)^2}{1+32t}},$$

$$u(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{1+32t}} e^{-\left(4x^2-8x\right)} e^{\frac{128t(1-x)^2}{1+32t}},$$

$$u(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{1+32t}} e^{-\left(4x^2-8x\right)+\frac{128t(1-x)^2}{1+32t}}. \qquad (111)$$

Проверим выполнение начального условия (109). Вычислим значение искомой функции при $t=0$:

$$u(x,\ 0) = \frac{1}{\sqrt{1+0}} e^{-\left(4x^2-8x\right)+\frac{0}{(1+0)}} = e^{-4x^2+8x}.$$

Таким образом, начальное условие выполняется.

Найдем предельное значение искомой функции при $t \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\ t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+32t}} e^{-\left(4x^2-8x\right)+\frac{128t(1-x)^2}{1+32t}} = 0.$$

Следовательно предел, к которому при $t \to \infty$ стремится решение, не зависит от x.

Ответ: $$u(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{1+32t}} e^{-\left(4x^2-8x\right)+\frac{128t(1-x)^2}{1+32t}}.$$

6.2 Волновое уравнение на плоскости

Пусть требуется найти функцию $u(x,\ y,\ t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right),$$
$$-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty,\ 0 < t < T$$

и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = f(x,\ y),\ u_t\big|_{t=0} = F(x,\ y).$$

Здесь T – постоянная.

Решение этой задачи выражается формулой Пуассона

$$u(x,\ y,\ t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_D \frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \right.$$
$$\left. + \iint\limits_D \frac{F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\right], \qquad (112)$$

где D – круг радиуса at с центром в точке $(x,\ y)$ [14, гл. III, § 11, п. 2].

Следует иметь в виду, что для волнового уравнения обычно используется иной принцип доказательства соотношений, которые называют формулами Пуассона, нежели тот, который приведен в главе 6.1.

При решении задачи Коши с помощью формулы (112) во многих случаях целесообразно применять обобщенные полярные координаты (ξ, η), заданные соотношениями

$$\begin{cases} \xi = x + \rho\cos\varphi, \\ \eta = y + \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (113)$$

14. Используя формулу Пуассона, найти решение задачи Коши для волнового уравнения на плоскости:

$$u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), \qquad (114)$$
$$-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty,\ 0 < t < T,$$

$$u\big|_{t=0} = 3x^2 + 2y^2, \; u_t\big|_{t=0} = 0. \tag{115}$$

Решение.

Применим формулу Пуассона (112), полагая, что

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^2, \; F(x, y) = 0.$$

Тогда

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_D \frac{\left(3\xi^2 + 2\eta^2\right)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}. \tag{116}$$

Используем обобщенные полярные координаты (113). Равенство (116) примет вид

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\;\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{at} \frac{3(x+\rho\cos\varphi)^2 + 2(y+\rho\sin\varphi)^2}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\, d\rho\,,$$

или

$$u = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{at} \left(\frac{\left(3x^2+2y^2\right)\rho + \left(3\rho^3\cos^2\varphi + 2\rho^3\sin^2\varphi\right)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{6x\rho^2\cos\varphi + 4y\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\right)d\rho\right].$$

Будем считать подынтегральное выражение суммой трех слагаемых, и проинтегрируем каждое из них. Интеграл от первого слагаемого

$$S_1 = \left(3x^2+2y^2\right)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{at} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}} = -(3x^2+2y^2)\cdot 2\pi\frac{1}{2}\int_0^{at}\frac{d(a^2t^2-\rho^2)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}} =$$

$$= -2\pi(3x^2+2y^2)\sqrt{a^2t^2-\rho^2}\;\Big|_0^{at} = 2\pi(3x^2+2y^2)at\,.$$

Во втором слагаемом

$$S_2=\int_0^{2\pi}\left(3\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi\right)d\varphi\int_0^{at}\frac{\rho^3}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}d\rho$$

сделаем замену

$$\rho=at\sin\beta\,.$$

Получим

$$S_2=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\varphi+2\right)d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3t^3\sin^3\beta}{at\cos\beta}at\cos\beta\,d\beta=$$

$$=a^3t^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}+2\right)d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\beta\,d\beta\,.$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\beta\,d\beta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\beta)d\cos\beta=\left(-\cos\beta+\frac{\cos^3\beta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$

Соответственно

$$S_2=a^3t^3\left(\frac{1}{2}2\pi+4\pi\right)\frac{2}{3}=\frac{10}{3}\pi a^3t^3\,.$$

Интеграл от последнего слагаемого упомянутого подынтегрального выражения

$$S_3=\int_0^{2\pi}\left(6x\cos\varphi+4y\sin\varphi\right)d\varphi\int_0^{at}\frac{\rho^2}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}d\rho=0\,.$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$u\left(x,\,y,\,t\right)=\frac{1}{2\pi a}\,\frac{\partial}{\partial t}(S_1+S_2+S_3)=\frac{1}{2\pi a}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[2\pi\left(3x^2+2y^2\right)at+\frac{10}{3}\pi a^3t^3\right],$$

то есть

$$u(x,\,y,\,t)=3x^2+2y^2+5a^2t^2\,. \qquad (117)$$

Проверим, выполняются ли для решения (117) начальные условия (115). Вычислим:

$$u(x,\, y,\, t)\big|_{t=0} = 3x^2 + 2y^2,$$
$$u_t\left(x,\, y,\, t\right) = 10a^2 t,$$
$$u_t\left(x,\, y,\, t\right)\big|_{t=0} = 0.$$

Таким образом, начальные условия удовлетворяются.

Убедимся, что решение (117) удовлетворяет двумерному волновому уравнению (114). Для этого найдем

$$u_{xx} = 6,$$
$$u_{yy} = 4,$$
$$u_{tt} = 10a^2.$$

Подставив все это в уравнение (114), получим тождество

$$10a^2 = a^2\left(6+4\right).$$

Таким образом, найденное решение удовлетворяет волновому уравнению (114), функция (117) является решением задачи Коши (114) – (115).

Ответ: $\quad u\left(x,\, y,\, t\right) = 3x^2 + 2y^2 + 5a^2t^2.$

6.3 Волновое уравнение в пространстве

Пусть требуется найти функцию $u\left(x,\, y,\, z,\, t\right)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right),$$
$$-\infty < x,\, y,\, z < +\infty, \quad 0 < t < T$$

и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = f\left(x,\, y,\, z\right),\ u_t\big|_{t=0} = F\left(x,\, y,\, z\right).$$

Здесь T – постоянная.

Решение этой задачи выражается формулой Пуассона

$$u\left(x,\, y,\, z,\, t\right) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{a\,t}} \frac{f\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{t}d\sigma + \iint\limits_{S_{a\,t}} \frac{F\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{t}d\sigma\right], \qquad (118)$$

где $S_{a\,t}$ – сфера радиуса at с центром в точке $(x,\, y,\, z)$ [14, гл. III, § 11, п. 1].

При решении пространственной задачи Коши с помощью данной формулы во многих случаях целесообразно применять следующее преобразование:

$$\begin{cases} \xi = x + \sqrt{a}\,t \sin\theta \cos\varphi, \\ \eta = y + \sqrt{a}\,t \sin\theta \sin\varphi, \\ \zeta = z + \sqrt{a}\,t \cos\theta. \end{cases} \tag{119}$$

Здесь

$$0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi \quad \text{и} \quad d\sigma \ = a^2 t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

15. Используя формулу Пуассона, найти решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве:

$$u_{tt} = 2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right), \tag{120}$$

$$u\big|_{t=0} = 4x^2 + 5y^2 + 3z^2,\ u_t\big|_{t=0} = 0. \tag{121}$$

Решение.

Применим формулу Пуассона (118), полагая, что

$$f(x,\, y,\, z) = 4x^2 + 5y^2 + 3z^2,\ F(x,\, y,\, z) = 0,\ a = \sqrt{2}\,.$$

Получим

$$u(x,\, y,\, z,\, t) = \frac{1}{8\pi}\ \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{Sat} \frac{4\xi^2 + 5\eta^2 + 3\zeta^2}{t} d\sigma\ . \tag{122}$$

Применим преобразование (119). Формула (122) примет вид

$$u(x,\, y,\, z,\, t) = \frac{1}{4\pi}\ \frac{\partial}{\partial t}\left[t \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(4\left(x + \sqrt{2}\,t \sin\theta\cos\varphi\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. +5\left(y + \sqrt{2}\,t \sin\theta \sin\varphi\right)^2 + 3\left(z + \sqrt{2}\,t\cos\theta\right)^2 \right) \sin\theta\, d\theta \right],$$

или

$$u(x,\, y,\, z,\, t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left\{ \left(4x^2 + 5y^2 + 3z^2\right)\sin\theta + \right.\right.$$

$$+\left(8t^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + 10t^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + 6t^2\cos^2\theta\right)\sin\theta +$$

$$\left.\left. +\left(8\sqrt{2}\,t\,x\sin\theta\cos\varphi + 10\sqrt{2}\,t\,y\sin\theta\sin\varphi + 6\sqrt{2}\,t\,z\cos\theta\right)\sin\theta \right\} d\theta \right]. \qquad (123)$$

Обозначим

$$u(x,\, y,\, z,\, t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\left(S_1 + S_2 + S_3\right)\right],$$

где S_1, S_2, S_3 – интегралы от слагаемых подынтегрального выражения в соотношении (123).

Вычислим

$$S_1 = \left(4x^2 + 5y^2 + 3z^2\right)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi\left(4x^2 + 5y^2 + 3z^2\right).$$

$$S_2 = t^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(8\sin^3\theta\cos^2\varphi + 10\sin^3\theta\sin^2\varphi + 6\cos^2\theta\sin\theta\right) d\theta =$$

$$= t^2\left[8\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta + 10\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta + \right.$$

$$\left. +6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta \right].$$

Здесь

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta = -\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, d\cos\theta = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta = -\int_0^{\pi}\left(1 - \cos^2\theta\right) d\cos\theta = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Соответственно

$$S_2 = t^2\left(8\cdot\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi + 10\cdot\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi + 6\cdot 2\pi\frac{2}{3}\right) =$$

$$= t^2\left(\frac{32}{3}\pi + \frac{40}{3}\pi + 6\cdot 2\pi\frac{2}{3}\right) = 32\pi t^2.$$

Последний интеграл

$$S_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left[8\sqrt{2}\, t\, x \sin^2\theta \cos\varphi + 10\sqrt{2}\, t\, y \sin^2\theta \sin\varphi + \right.$$
$$\left. +6\sqrt{2}\, t\, z \sin\theta \cos\theta \right] d\theta = 0.$$

Получили решение

$$u(x,\, y,\, z,\, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[t\left(4\pi \left(4x^2 + 5y^2 + 3z^2 \right) + 32\pi t^2 \right) \right],$$

или

$$u(x,\, y,\, z,\, t) = \left(4x^2 + 5y^2 + 3z^2 \right) + 24t^2. \qquad (124)$$

Проверим, выполняются ли для него начальные условия (121). Вычислим

$$u(x,\, y,\, z,\, t)\big|_{t=0} = 4x^2 + 5y^2 + 3z^2,$$
$$u_t(x,\, y,\, z,\, t) = 48t,$$
$$u_t(x,\, y,\, z,\, t)\big|_{t=0} = 0.$$

Таким образом, начальные условия удовлетворены.

Убедимся, что решение (124) удовлетворяет волновому уравнению (120). Для этого найдем

$$u_{xx} = 8,$$
$$u_{yy} = 10,$$
$$u_{zz} = 6,$$
$$u_{tt} = 48.$$

Подставляя все это в уравнение (120), получим тождество

$$48 = 2(8 + 10 + 6).$$

Следовательно, найденное решение удовлетворяет волновому уравнению (120), функция (124) является решением задачи Коши (120) – (121).

Ответ: $u(x,\, y,\, z,\, t) = \left(4x^2 + 5y^2 + 3z^2 \right) + 24t^2.$

7 ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7.1 Резольвента ядра

Рассмотрим уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,\ t)y(t)dt\ . \qquad (125)$$

Применим метод последовательных приближений. В качестве исходной примем функцию

$$y_0 = f(x)\,.$$

Следующие приближения получим, подставляя найденное выражение в правую часть уравнения (125). Так,

$$y_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,\ t)y_0(t)dt,$$

или

$$y_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K_1(x,\ t)f(t)dt\,.$$

Здесь $K_1(x,\ t) = K(x,\ t)$. Далее,

$$y_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,\ t)y_1(t)dt.$$

При этом

$$y_1(t) = f(t) + \lambda\int_a^t K_1(t,\ s)f(s)ds\,.$$

Поэтому

$$y_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,\ t)\left(f(t) + \lambda\int_a^t K_1(t,\ s)f(s)ds\right)dt =$$

$$= f(x) + \lambda\int_a^x K(x,\ t)f(t)dt + \lambda^2\int_a^x dt\int_a^t K(x,\ t)K_1(t,\ s)f(s)ds\,.$$

Область интегрирования для последнего слагаемого представляет собой треугольник

$$\begin{cases} a \le t \le x, \\ a \le s \le t \end{cases}$$

(рис. 1).

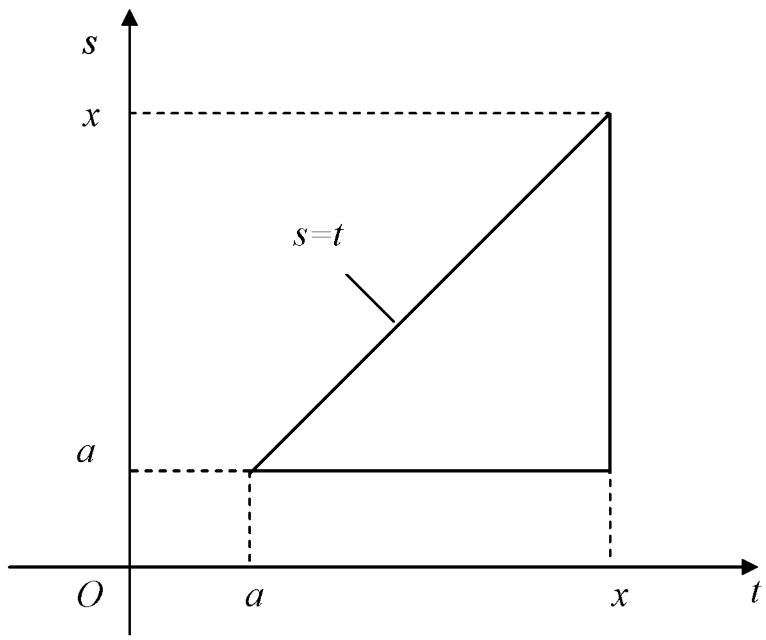

Рис.1. Область интегрирования

Изменим порядок интегрирования:

$$y_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K_1(x,\,t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^x f(s)ds\int_s^x K(x,\,t)K_1(t,\,s)dt\,.$$

Так как значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то в двукратном интеграле можно поменять местами символы t и s:

$$y_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K_1(x,\,t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^x f(t)dt\int_t^x K(x,\,s)K_1(s,\,t)ds\,.$$

Обозначим

$$K_2(x,\,t)=\int_t^x K(x,\,s)K_1(s,\,t)ds\,.$$

Тогда

$$y_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K_1(x,\,t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^x K_2(x,\,t)f(t)dt\,.$$

Аналогично,

$$y_3(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K_1(x,\,t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^x K_2(x,\,t)f(t)dt+\lambda^3\int_a^x K_3(x,\,t)f(t)dt$$

и

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \int_a^x K_k(x, t) f(t) dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} K_k(x, t) f(t) dt.$$

Функции $K_k(x, t)$ называются итерированными ядрами и определяются рекуррентными соотношениями

$$K_1(x, t) = K(x, t), \tag{126}$$

$$K_k(x, t) = \int_t^x K(x, s) K_{k-1}(s, t) ds, \tag{127}$$

где $k = 2, 3, \ldots$

Если ядро $K(x, t)$ непрерывно, то решение уравнения (125)

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} K_k(x, t) \right) f(t) dt.$$

Функция

$$R(x, t, \lambda) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} K_k(x, t),$$

или

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K_k(x, t) \tag{128}$$

называется резольвентой ядра $K(x, t)$.

При этом искомое решение

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, t, \lambda) f(t) dt. \tag{129}$$

Для уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$$

также могут быть рассмотрены итерированные ядра и резольвента, причем справедливы соотношения, отличающиеся от (126) – (129) только тем, что интегрирование во всех этих формулах выполняется в пределах от a до b.

16. Дано интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) = 2^x + \int_0^x 2^{x-t} y(t)dt .$$

Найти резольвенту его ядра и, используя ее, решить заданное уравнение.

Решение.

Найдем итерированные ядра.

$$K_1(x,\ t) = 2^{x-t} ,$$

$$K_2(x,\ t) = \int_t^x 2^{x-s} 2^{s-t} ds = 2^{x-t}(x-t) ,$$

$$K_3(x,\ t) = \int_t^x 2^{x-s} 2^{s-t} (s-t)ds = 2^{x-t} \frac{(x-t)^2}{2} .$$

Аналогично

$$K_4(x,\ t) = 2^{x-t} \frac{(x-t)^3}{2 \cdot 3}$$

и

$$K_n(x,\ t) = 2^{x-t} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} ,$$

где $n = 2,\ 3,\ 4, \ldots$

Вычислим резольвенту

$$R(x,\ t,\ \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} 2^{x-t} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} = 2^{x-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(x-t)]^k}{k!} = 2^{x-t} e^{\lambda(x-t)} .$$

В данном случае $\lambda = 1, f(x) = 2^x$. Поэтому, согласно формуле (129), искомая функция

$$y(x) = 2^x + \int_0^x 2^{x-t} e^{x-t} 2^t dt =$$

$$= 2^x + \int_0^x 2^x e^{x-t} dt = 2^x - 2^x(1-e^x) ,$$

то есть

$$y(x)=2^x e^x.$$

Проверка.

Подставим найденное решение в заданное уравнение:

$$2^x e^x = 2^x + \int_0^x 2^{x-t} 2^t e^t dt,$$

$$2^x e^x = 2^x + 2^x \int_0^x e^t dt,$$

$$2^x e^x = 2^x + 2^x e^t \Big|_0^x,$$

$$2^x e^x = 2^x + 2^x (e^x - 1),$$

$$2^x e^x = 2^x + 2^x e^x - 2^x.$$

Это – тождество.

Ответ: $y(x)=2^x e^x$.

7.2 Уравнение с вырожденным ядром

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,\, t) y(t) dt = f(x), \tag{130}$$

где $f(x)$ и $K(x,\, t)$ непрерывны в своей области определения. Ядро $K(x,\, t)$ называется вырожденным, если его можно представить в виде

$$K(x,\, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(x) q_j(t).$$

Ограничимся случаем $n=2$. При произвольных значениях n порядок решения аналогичен. Если $n=2$, то в уравнении (130) ядро

$$K(x,\, t) = p_1(x) q_1(t) + p_2(x) q_2(t)$$

и указанное уравнение можно записать в форме

$$y(x)-\lambda\int_a^b[p_1(x)q_1(t)+p_2(x)q_2(t)]y(t)dt=f(x),$$

или

$$y(x)-\lambda p_1(x)\int_a^b q_1(t)y(t)dt-\lambda p_2(x)\int_a^b q_2(t)y(t)dt=f(x).$$

Обозначим

$$s_1=\int_a^b q_1(t)y(t)dt$$

и

$$s_2=\int_a^b q_2(t)y(t)dt.$$

Тогда уравнение (130) запишется в следующем виде:

$$y(x)-\lambda p_1(x)s_1-\lambda p_2(x)s_2=f(x). \tag{131}$$

Умножим обе части этого уравнения на $q_1(x)$:

$$y(x)q_1(x)-\lambda s_1 p_1(x)q_1(x)-\lambda s_2 p_2(x)q_1(x)=f(x)q_1(x)$$

и проинтегрируем:

$$\int_a^b y(x)q_1(x)dx-\lambda s_1\int_a^b p_1(x)q_1(x)dx-\lambda s_2\int_a^b p_2(x)q_1(x)dx=$$
$$=\int_a^b f(x)q_1(x)dx. \tag{132}$$

Аналогично, умножая уравнение на $q_2(x)$ и интегрируя, находим

$$\int_a^b y(x)q_2(x)dx-\lambda s_1\int_a^b p_1(x)q_2(x)dx-\lambda s_2\int_a^b p_2(x)q_2(x)dx=$$
$$=\int_a^b f(x)q_2(x)dx. \tag{133}$$

Первые слагаемые в равенствах (132) и (133) равны соответственно s_1 и s_2. Обозначим

$$a_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx, \tag{134}$$

$$f_i = \int_a^b f(x) q_i(x) dx, \tag{135}$$

где $i = 1,\ 2,\ j = 1,\ 2$. В результате получаем систему линейных уравнений относительно s_1 и s_2:

$$\begin{cases} s_1 - \lambda s_1 a_{11} - \lambda s_2 a_{12} = f_1, \\ s_2 - \lambda s_1 a_{21} - \lambda s_2 a_{22} = f_2. \end{cases} \tag{136}$$

Решив эту систему, найдем, согласно соотношению (131), искомую функцию

$$y(x) = \lambda[s_1 p_1(x) + s_2 p_2(x)] + f(x). \tag{137}$$

Для произвольного n система

$$s_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j = f_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

и функция

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} p_j(x) s_j$$

являются обобщением соотношений (136) – (137).

17. Решить интегральное уравнение

$$y(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-t) y(t) dt = \sin x.$$

Решение.

Это уравнение Фредгольма второго рода. Запишем его в виде

$$y(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos t - \cos x \sin t) y(t) dt = \sin x. \tag{138}$$

Обозначим

$$p_1(x) = \sin x,\ \mathrm{q}_1(t) = \cos t\,,$$
$$p_2(x) = -\cos x,\ \mathrm{q}_2(t) = \sin t\,.$$

Тогда уравнение (138) примет форму

$$y(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[p_1(x)q_1(t) + p_2(x)q_2(t)\right] y(t)dt = \sin x\,.$$

Его ядро

$$K(x,t) = p_1(x)q_1(t) + p_2(x)q_2(t)$$

вырожденное.

Вычислим параметры (134) – (135):

$$a_{11} = \int_a^b q_1(x)p_1(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx = \frac{1}{2},$$

$$a_{12} = \int_a^b q_1(x)p_2(x)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos x dx = -\frac{\pi}{4},$$

$$a_{21} = \int_a^b q_2(x)p_1(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin x dx = \frac{\pi}{4},$$

$$a_{22} = \int_a^b q_2(x)p_2(x)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = -\frac{1}{2},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)q_1(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2},$$

$$f_2 = \int_a^b f(x)q_2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin x dx = \frac{\pi}{4}.$$

В данном случае $\lambda = 1$. Система (136) принимает вид

$$\begin{cases} s_1 - \dfrac{1}{2}s_1 + \dfrac{\pi}{4}s_2 = \dfrac{1}{2}, \\ s_2 - \dfrac{\pi}{4}s_1 + \dfrac{1}{2}s_2 = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Она имеет решение

$$s_1 = \frac{12-\pi^2}{12+\pi^2},\ s_2 = \frac{4\pi}{12+\pi^2}.$$

Согласно (137), искомая функция

$$y(x) = \frac{12-\pi^2}{12+\pi^2}\sin x - \frac{4\pi}{12+\pi^2}\cos x + \sin x,$$

то есть

$$y(x) = \frac{24}{12+\pi^2}\sin x - \frac{4\pi}{12+\pi^2}\cos x.$$

Проверка:

Подставим найденное решение в заданное уравнение.

$$\frac{24}{12+\pi^2}\sin x - \frac{4\pi}{12+\pi^2}\cos x -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-t)\left(\frac{24}{12+\pi^2}\sin t - \frac{4\pi}{12+\pi^2}\cos t\right)dt = \sin x.$$

Так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-t)\sin t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x\cos t\sin t - \cos x\sin^2 t)dt =$$

$$= \sin x\cdot\frac{1}{2} - \cos x\cdot\frac{\pi}{4}$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-t)\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x\cos^2 t - \cos x\sin t\cos t)dt =$$

$$= \sin x \cdot \frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \frac{1}{2},$$

то получаем равенство

$$\frac{24}{12+\pi^2}\sin x - \frac{4\pi}{12+\pi^2}\cos x - \frac{24}{12+\pi^2}\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\pi}{4}\cos x\right) +$$

$$+\frac{4\pi}{12+\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = \sin x,$$

или

$$\left(\frac{24}{12+\pi^2} - \frac{12}{12+\pi^2} + \frac{\pi^2}{12+\pi^2}\right)\sin x +$$

$$+\left(-\frac{4\pi}{12+\pi^2} + \frac{6\pi}{12+\pi^2} - \frac{2\pi}{12+\pi^2}\right)\cos x = \sin x,$$

то есть

$$\left(\frac{12}{12+\pi^2} + \frac{\pi^2}{12+\pi^2}\right)\sin x = \sin x.$$

Это – тождество.

Ответ: $$y(x) = \frac{24}{12+\pi^2}\sin x - \frac{4\pi}{12+\pi^2}\cos x.$$

8 ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1 Простейшие линейные уравнения и системы

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{139}$$

Его левая часть напоминает формулу для полной производной от функции $u(x,\ t)$, где $x = x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Эти выражения совпадают, когда

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \text{или} \quad x = t + C,$$

где C – постоянная. В этом случае

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Если при этом функция $u(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению (139), то

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Это означает, что в различных точках прямой

$$x = t + C$$

решение уравнения (139) принимает одно и то же значение. Так как конкретная прямая соответствует определенному значению постоянной C, то

$$u = f(C),$$

или

$$u(x,\ t) = f(x - t), \tag{140}$$

где f − дифференцируемая функция.

Убедимся, что соотношение (140) действительно задает решение уравнения (139). Выберем произвольную дифференцируемую функцию f, определим $u(x,\ t)$ равенством (140) и вычислим производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-t),\ \frac{\partial u}{\partial t} = -f'(x-t)\,.$$

Складывая эти равенства, получим тождество вида (139). Следовательно, функция (140) удовлетворяет указанному уравнению. Она называется его общим решением.

Будем называть гладкими функции, имеющие производные достаточно большого порядка, чтобы рассматриваемые соотношения были верными.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0\ , \qquad (141)$$
$$-\infty < x < +\infty,\quad 0 \le t < +\infty$$

и требуется найти его гладкое решение, удовлетворяющее начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\quad x \in X\ , \qquad (142)$$

где X – конечный или бесконечный промежуток , а $\varphi(x)$ – гладкая функция. В этом случае говорят, что поставлена задача Коши для уравнения (141).

Предположим, что

$$u = f(x-t)$$

есть общее решение уравнения (141). Условие

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

выполняется, если

$$f(x) = f(x-t)\big|_{t=0} = \varphi(x)\,.$$

Поэтому задача Коши (141) – (142) имеет решение

$$u = \varphi(x-t)\,.$$

Как отмечалось, на прямых

$$x = t + C$$

функция $u(x, t)$ (решение уравнения (141)) постоянна. Указанные прямые называются характеристиками этого уравнения (рис. 2).

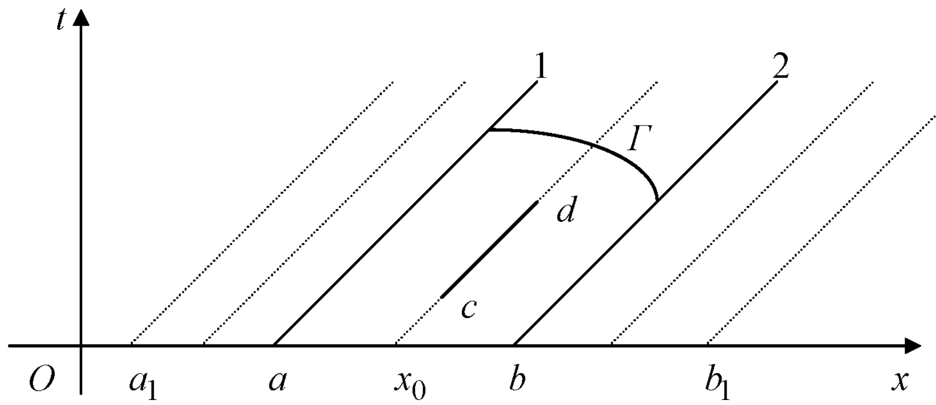

Рис. 2. Характеристики:
1 – $x = t + a$, 2 – $x = t + b$

Предположим, что начальные условия (142) заданы на отрезке $[a, b]$. Тогда на характеристике, проходящей через некоторую точку $x_0 \in [a, b]$, искомая функция u в любой момент времени $t \geq 0$ принимает одно и то же значение

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = \varphi(x_0).$$

Поэтому в области, ограниченной отрезком $[a, b]$ оси Ox и характеристиками

$$x = t + a, x = t + b,$$

проходящими через его концы (рис. 2), решение уравнения (141) при условии (142), где $X = [a, b]$, существует и единственно.

Выясним, существует ли единственное решение этой задачи в какой-то более широкой области. Считая, что начальные условия заданы на отрезке $[a, b]$, доопределим функцию $\varphi(x)$ произвольным образом на отрезке $[a_1, b_1]$, содержащем $[a, b]$. Тогда некоторое конкретное решение можно получить и в области, ограниченной отрезком $[a_1, b_1]$ и характеристиками

$$x = t + a_1, x = t + b_1.$$

Однако полученная таким образом функция $u(x, t)$ уже не будет единственным решением задачи (141) – (142) при $X = [a, b]$, так как это решение зависит от способа доопределения функции $\varphi(x)$.

Таким образом, задача (141) – (142) в случае $X = [a, b]$ имеет единственное решение только в области, ограниченной отрезком $[a, b]$ оси Ox и характеристиками

$$x = t + a,\ x = t + b.$$

Можно обобщить постановку задачи Коши, задавая начальное условие на произвольной гладкой линии Γ (рис. 2). Если эта линия пересекается с любой характеристикой, принадлежащей некоторой области, не более одного раза, то в этой области существует единственное решение поставленной таким образом задачи Коши.

Рассмотрим теперь случай, когда начальные условия для уравнения (141) заданы на отрезке $[c, d]$, принадлежащем характеристике

$$x = t + x_0$$

(рис. 2). Если при этом значения функции $u(x, t)$, определенные данными условиями, различаются в каких-то точках отрезка $[c, d]$, то решения нет, поскольку указанная функция должна быть постоянна на характеристике.

Пусть на этом отрезке

$$u(x, t) = C_0,$$

где C_0 – заданное число. Как отмечалось, при произвольной гладкой функции $f(x)$ величина

$$u = f(x - t)$$

является решением уравнения (141). На характеристике $x = t + x_0$ функция $u(x, t)$ постоянна:

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = f(x_0).$$

Поэтому условие $u(x, t) = C_0$, $(x, t) \in [c, d]$ выполняется, если для функции f справедливо равенство

$$f(x_0) = C_0.$$

В остальных точках оси Ox функция $f(x)$ произвольна.

Таким образом, задание начальных данных на характеристике не определяет единственного решения ни в какой области плоскости xOt.

18. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{143}$$

где a – постоянная.

Решение.

Рассмотрим формулу

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Зададим функцию $x(t)$ уравнением

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a,$$

то есть

$$x=at+C, \tag{144}$$

где C − произвольная постоянная.

На прямой (144)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Если u удовлетворяет уравнению (143), то на указанной прямой

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0. \tag{145}$$

Так как на прямой (144)

$$x-at=C,$$

то соотношение (145) справедливо, если

$$u=f(x-at),$$

где f – дифференцируемая функция.

Ответ: $u=f(x-at)$, где f − произвольная дифференцируемая функция.

19. Построить графики решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ b\le x\le c$$

в моменты времени $t=0;\ 1;\ 2$. Здесь φ − заданная дифференцируемая функция, $a,\ b,\ c$ − постоянные, $a>0$.

Решение.

В данном случае

$$u = \varphi(x - at). \tag{146}$$

С увеличением времени t график функции $u = \varphi(x)$, соответствующей моменту $t = 0$, перемещается вдоль оси Ox вправо (рис. 3). За время t график сдвигается на at единиц. Следовательно, скорость его движения равна a.

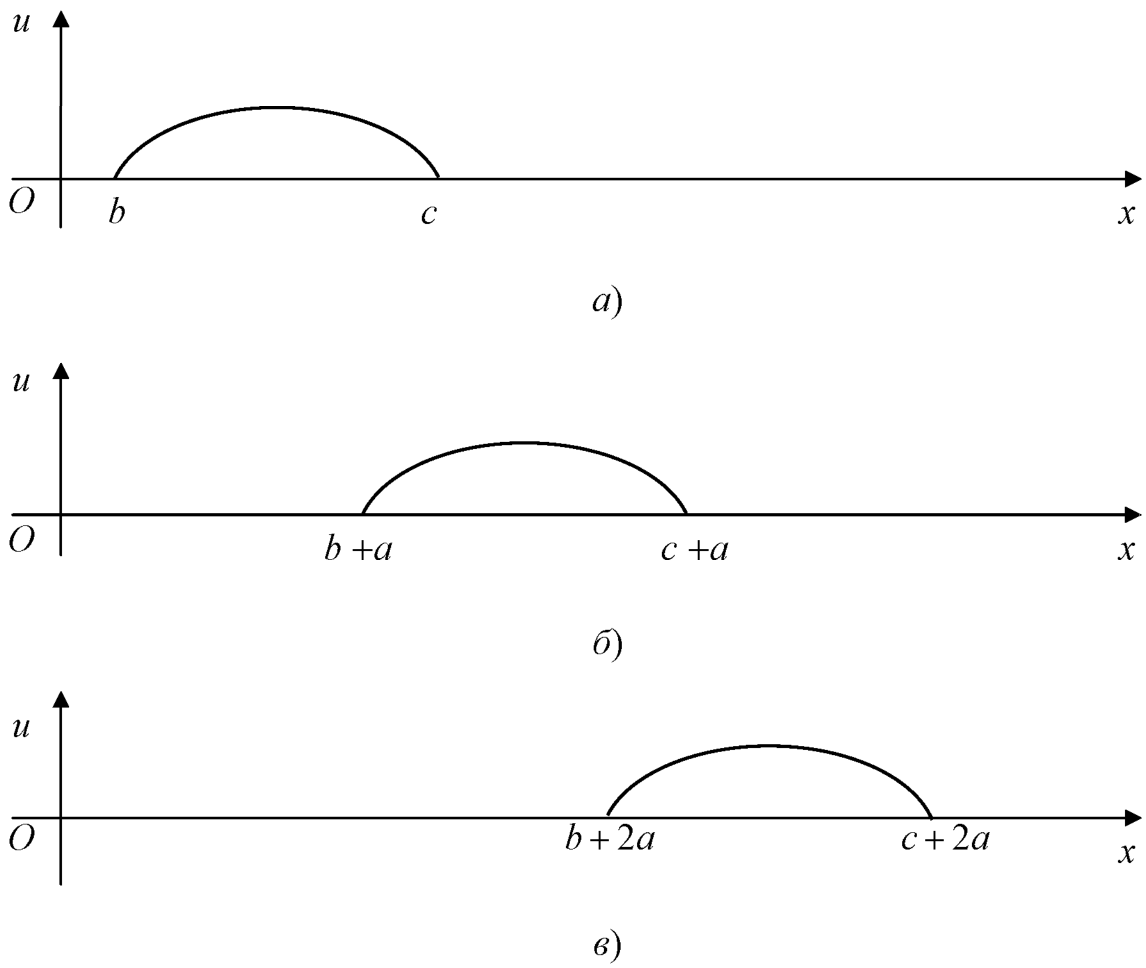

Рис. 3. Графики решения:
а) $t = 0$; *б*) $t = 1$; *в*) $t = 2$.

Замечание. Решение (146) называется волной, а параметр a – ее скоростью.

Определение. Прямые $x - at = C$, где C – произвольная постоянная, называются характеристиками уравнения (143).

20. Найти область единственности решения задачи Коши

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \tag{147}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \tag{148}$$

$$u_1\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{149}$$

$$u_2\big|_{t=0} = \psi(x), \quad a \le x \le b \tag{150}$$

(рис. 4) и записать это решение. Здесь a, b, a_1, b_1 – постоянные, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Решение.

Задача Коши

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,$$

$$u_1\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad a \le x \le b$$

имеет единственное решение

$$u_1 = \varphi(x - a_1 t)$$

в области, ограниченной отрезком $[a, b]$ оси Ox и характеристиками

$$x - a_1 t = a \quad \text{и} \quad x - a_1 t = b.$$

Задача

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0,$$

$$u_2\big|_{t=0} = \psi(x), \quad a \le x \le b$$

также имеет единственное решение

$$u_2 = \psi(x + a_2 t)$$

в области, заданной тем же отрезком и характеристиками

$$x + a_2 t = a \quad \text{и} \quad x + a_2 t = b.$$

Соответственно решение задачи Коши (147) – (150) образуют функции

$$u_1 = \varphi(x - a_1 t), \tag{151}$$

$$u_2 = \psi(x + a_2 t). \tag{152}$$

Это решение единственное в пересечении указанных областей, то есть в треугольнике AMB (рис. 4), который может быть задан соотношениями

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ a + a_1 t \le x \le b - a_2 t. \end{cases}$$

Ответ.

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ x \ge a + a_1 t, \\ x \le b - a_2 t. \end{cases}$$

$$u_1 = \varphi(x - a_1 t),\ u_2 = \psi(x + a_2 t).$$

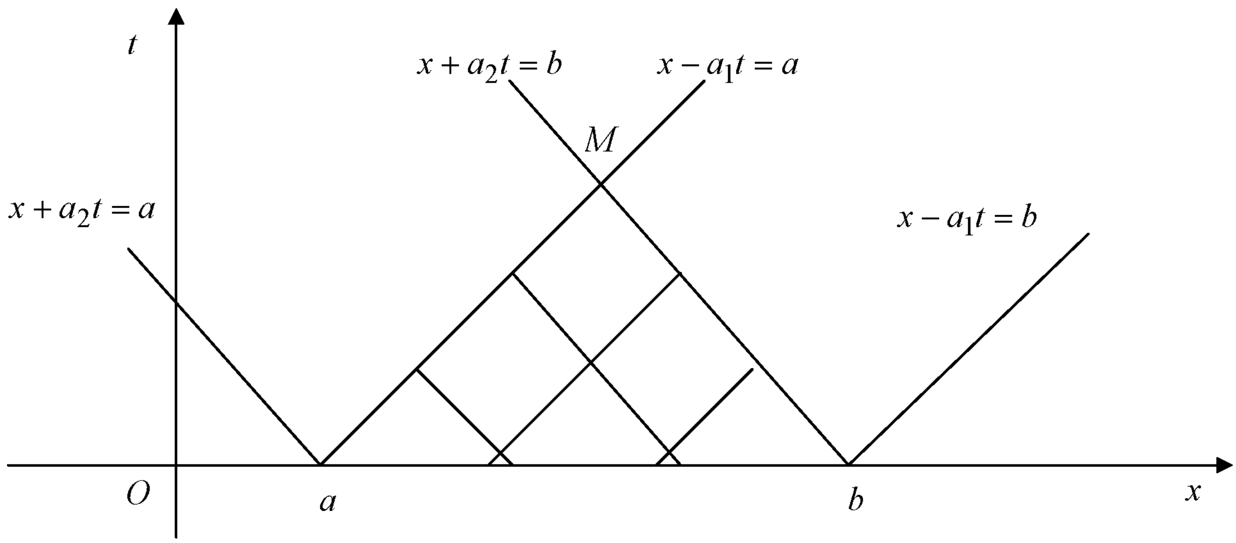

Рис. 4. Область единственности решения

21. Пусть $u_1(x,\ t)$, $u_2(x,\ t)$ – решение системы (147) – (148) при условиях

$$u_1\big|_{t=0} = \varphi(x),$$
$$u_2\big|_{t=0} = \psi(x),$$
$$-\infty < x < +\infty,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – дифференцируемые функции. Найти на плоскости xOt область, в которой на искомые функции u_1, u_2 оказывают влияние значения $\varphi(x)$, $\psi(x)$, принимаемые на отрезке $[a,\ b]$.

Решение.

На характеристиках, проходящих через точку $x_0 \in [a,\ b]$ (рис. 5), значения $u_1(x,\ t),\ u_2(x,\ t)$ определяются величинами $\varphi(x_0),\ \psi(x_0)$. Учитывая все точки отрезка $[a,\ b]$, получаем сетку характеристик, лежащую в объединении областей, одна из которых ограничена отрезком $[a,\ b]$ и характеристиками

$$x = a - a_2 t,\ x = b - a_2 t,$$

а другая – этим отрезком и линиями

$$x = a + a_1 t,\ x = b + a_1 t.$$

В этой и только в этой области оказывают влияние значения $\varphi(x),\ \psi(x)$, $x \in [a,\ b]$.

Ответ.

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} a + a_1 t \le x \le b + a_1 t, \\ a - a_2 t \le x \le b - a_2 t. \end{array}\right. \end{cases}$$

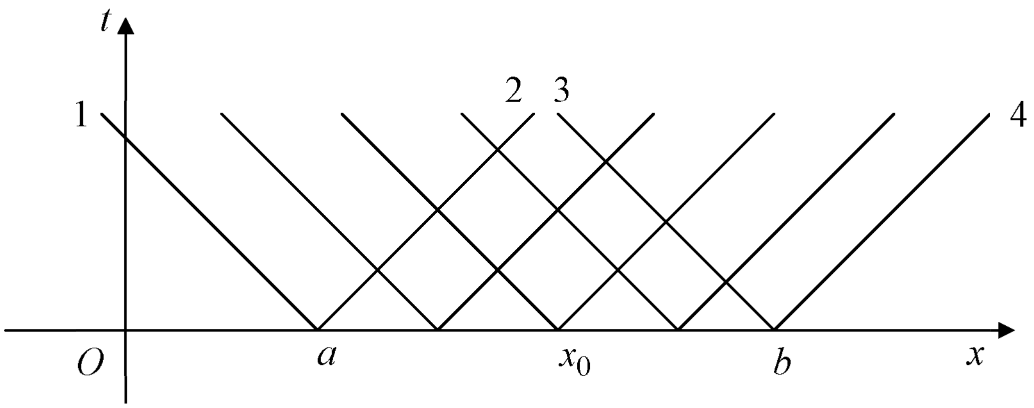

Рис. 5. Область влияния отрезка:
1 – $x = a - a_2 t$; 2 – $x = a + a_1 t$; 3 – $x = b - a_2 t$; 4 – $x = b + a_1 t$

8.2 Линейные и квазилинейные системы общего вида

Рассмотрим систему уравнений

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f, \tag{153}$$

где

$$A=\begin{pmatrix} A_{11}\ A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21}\ A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1}\ A_{n2} \dots A_{nn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11}\ B_{12} \dots B_{1n} \\ B_{21}\ B_{22} \dots B_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ B_{n1}\ B_{n2} \dots B_{nn} \end{pmatrix},\quad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$$

и

$$A_{ij}=A_{ij}(x,\ t),\quad B_{ij}=B_{ij}(x,\ t),\ f_i=f_i(x,\ t),\quad i=1,\ 2,\ \dots,\ n,\quad j=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

При $n=2$ она принимает форму

$$\begin{pmatrix} A_{11}\ A_{12} \\ A_{21}\ A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_{11}\ B_{12} \\ B_{21}\ B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x,\ t) \\ f_2(x,\ t) \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} A_{11}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+A_{12}\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+B_{11}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+B_{12}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=f_1(x,\ t) \\ A_{21}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+A_{22}\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+B_{21}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+B_{22}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=f_2(x,\ t). \end{cases} \tag{154}$$

Предположим, что система (154) имеет решение в некоторой области G на плоскости xOt. Через точку $(x_0,\ t_0)\in G$ проведем линию Γ. Будем считать, что на этой линии известны значения функций $u_1,\ u_2$. Если при этом требуется найти решение системы (154) в некоторой окрестности линии Γ, то говорят, что необходимо решить задачу Коши для этой системы.

Предварительным этапом решения задачи Коши может служить отыскание производных $\dfrac{\partial u_1}{\partial t},\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t},\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x},\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x}$ в точках линии Γ. Зная эти величины, можно найти производные по нормали к данной линии и затем определить $u_1,\ u_2$.

Пусть линия Γ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x(\alpha), \\ t=t(\alpha) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x_0=x(\alpha_0), \\ t_0=t(\alpha_0). \end{cases}$$

Тогда вектор с координатами

$$\mathrm{d}x = x'(\alpha_0)\mathrm{d}\alpha,$$
$$\mathrm{d}t = t'(\alpha_0)\mathrm{d}\alpha$$

показывает направление движения из точки $(x_0,\ t_0) \in \Gamma$ вдоль этой линии. Будем считать, что величина $\mathrm{d}\alpha$ выбрана и тем самым дифференциалы $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}t$ заданы.

По предположению, значения функций u_1, u_2 на линии Γ известны, то есть заданы величины $u_1(x(\alpha),\ t(\alpha))$, $u_2(x(\alpha),\ t(\alpha))$. Следовательно, известны их дифференциалы

$$\mathrm{d}u_1 = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}\alpha,\ \mathrm{d}u_2 = \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

В то же время

$$\mathrm{d}u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial u_1}{\partial x}\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial u_2}{\partial x}\mathrm{d}x,$$

где $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}t$ – координаты вектора, направленного вдоль Γ.

Поэтому производные

$$\frac{\partial u_1}{\partial t},\ \frac{\partial u_1}{\partial x},\ \frac{\partial u_2}{\partial t},\ \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

определяются уравнениями

$$\begin{cases} A_{11}\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12}\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = f_1(x,\ t), \\ A_{21}\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22}\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = f_2(x,\ t), \\ \mathrm{d}t\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \mathrm{d}x\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \mathrm{d}u_1, \\ \mathrm{d}t\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \mathrm{d}x\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = \mathrm{d}u_2. \end{cases} \qquad (155)$$

Систему (155) можно записать в матричной форме

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial u}{\partial t} + B\dfrac{\partial u}{\partial x} = f, \\ \mathrm{d}tE\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{d}xE\dfrac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{d}u. \end{cases} \tag{156}$$

Здесь E – единичная матрица.

Система (155) однозначно задает искомые производные, если определитель этой системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ \mathrm{d}t & 0 & \mathrm{d}x & 0 \\ 0 & \mathrm{d}t & 0 & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \neq 0,$$

или в матричной форме

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ \mathrm{d}tE & \mathrm{d}xE \end{pmatrix} \neq 0. \tag{157}$$

Как отмечалось при рассмотрении простейшей системы, если задать начальные условия на характеристике, то задача не имеет решений или имеет их множество. В то же время, если на линии Γ не выполняется условие (157), то и система (155) не имеет решений или таких решений множество.

Поэтому, обобщая рассмотренные определения характеристик, линии, вдоль которых

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ \mathrm{d}tE & \mathrm{d}xE \end{pmatrix} = 0, \tag{158}$$

называют характеристиками системы (153). Если $\det A \neq 0$, то эту систему можно записать в форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A^{-1}B\frac{\partial u}{\partial x} = A^{-1}f,$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} = g, \tag{159}$$

где

$$C = A^{-1}B,\ g = A^{-1}f.$$

В этом случае коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial t}$ можно считать равным единичной матрице E и условие (158) принимает форму

$$\det\begin{pmatrix} E & C \\ \mathrm{d}tE & \mathrm{d}xE \end{pmatrix} = 0.$$

Если

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$\det\begin{pmatrix} E & C \\ \mathrm{d}tE & \mathrm{d}xE \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 1 & C_{21} & C_{22} \\ \mathrm{d}t & 0 & \mathrm{d}x & 0 \\ 0 & \mathrm{d}t & 0 & \mathrm{d}x \end{vmatrix} = (\mathrm{d}t)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 1 & C_{21} & C_{22} \\ 1 & 0 & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix}.$$

Упростим определитель. Вычтем из его первой строки третью, из второй – четвертую:

$$\det\begin{pmatrix} E & C \\ \mathrm{d}tE & \mathrm{d}xE \end{pmatrix} = (\mathrm{d}t)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & C_{11} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ 1 & 0 & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель два раза по первым столбцам:

$$\det\begin{pmatrix} E & C \\ \mathrm{d}tE & \mathrm{d}xE \end{pmatrix} = (\mathrm{d}t)^2 \begin{vmatrix} 0 & C_{11} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & C_{12} \\ 0 & C_{21} & C_{22} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ 1 & 0 & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = (\mathrm{d}t)^2 \begin{vmatrix} C_{11} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix}.$$

Равенство (158) при сделанных предположениях равносильно соотношению

$$\det\begin{pmatrix} E & C \\ \mathrm{d}tE & \mathrm{d}xE \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = 0 .$$

Следовательно, на характеристиках значения производной $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ совпадают с собственными значениями матрицы C, то есть с корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} C_{11} - k & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} - k \end{vmatrix} = 0 .$$

Если эти корни вещественны и различны, то система (159) называется гиперболической. Такая система имеет характеристики, заданные уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_1(x,\ t),\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_2(x,\ t)\ , \tag{160}$$

где $k_1(x,\ t),\ k_2(x,\ t)$ – указанные корни.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + A_{11}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + A_{12}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + B_{11}u_1 + B_{12}u_2 = f_1, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + A_{21}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + A_{22}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + B_{21}u_1 + B_{22}u_2 = f_2. \end{cases} \tag{161}$$

Здесь

$$A_{ij} = A_{ij}(x,\ t),\quad B_{ij} = B_{ij}(x,\ t),\ f_i = f_i(x,\ t),\quad i = 1,\ 2,\quad j = 1,\ 2 .$$

Эта система, как и (159), называется гиперболической, если собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

действительны и различны. Говорят, что система (161) имеет каноническую форму, если матрица A диагональная. Справедливо следующее утверждение [5, гл. II, §9]. Пусть k_1, k_2 – собственные значения матрицы A и матрица

Z составлена из координат собственных векторов, соответствующих этим значениям. Тогда преобразованием

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

система (161) приводится к каноническому виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + k_1 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + D_{11} v_1 + D_{12} v_2 = g_1, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} + k_2 \dfrac{\partial v_2}{\partial x} + D_{21} v_1 + D_{22} v_2 = g_2, \end{cases} \tag{162}$$

где $D_{ij} = D_{ij}(x,\, t)$, $g_i = g_i(x,\, t)$ ($i = 1,\, 2,\ j = 1,\, 2$) − некоторые функции.

Новые искомые функции v_1, v_2 называются инвариантами Римана системы (161). Для нее существует два семейства характеристик (160). Инвариант v_1 не изменяется вдоль характеристик одного семейства, инвариант v_2 – другого.

Простейшим примером системы (161) являются уравнения (147) – (148). Матрица этой системы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}$$

диагональная, следовательно данная система записана в каноническом виде.

Инвариант Римана системы (147)−(148)

$$u_1 = \varphi(x - a_1 t)$$

сохраняет значение на характеристиках

$$x - a_1 t = C_1,$$

а инвариант

$$u_2 = \psi(x + a_2 t)$$

на характеристиках

$$x + a_2 t = C_2 .$$

Рассмотрим теперь квазилинейные уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11}(u_1, u_2)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12}(u_1, u_2)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + a_{21}(u_1, u_2)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22}(u_1, u_2)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{163}$$

В этом случае понятие гиперболической системы и ее характеристик вводится так же, как для линейных систем. Обозначим с этой целью матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и составим уравнение

$$\det(A - kE) = 0,$$

то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{164}$$

Если уравнение (164) в каждой точке некоторой области G имеет два различных действительных корня, то система (163) называется гиперболической в этой области.

Для гиперболической системы указанные корни в общем случае являются функциями переменных u_1 и u_2:

$$k_1 = k_1(u_1, u_2),$$
$$k_2 = k_2(u_1, u_2).$$

Пусть известно некоторое решение системы (163)

$$u_1 = u_1(x, t), \; u_2 = u_2(x, t).$$

Тогда характеристики указанной системы определяются уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = k_1(u_1(x, t), u_2(x, t)), \tag{165}$$

$$\frac{dx}{dt} = k_2(u_1(x, t), u_2(x, t)). \tag{166}$$

В отличие от случая линейной системы характеристики (165)–(166) зависят от решения: линия, которая является характеристикой для одного решения, может не быть характеристикой для другого.

Таким образом, чтобы найти характеристики системы (163), необходимо сначала ее решить (в аналитической или численной форме) и затем проинтегрировать систему (165) – (166).

Для квазилинейных систем сохраняются определения их канонической формы и инвариантов Римана, введенные для линейных систем. Как и в последнем случае, для квазилинейной системы, записанной в канонической форме, искомые функции являются римановыми инвариантами, каждый из которых сохраняет постоянные значения на характеристиках одного из их семейств.

Для системы (163) может быть поставлена задача Коши: найти функции $u_1(x,\ t),\ u_2(x,\ t)$, удовлетворяющие уравнениям (163) и начальным условиям

$$u_1\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \ u_2\big|_{t=0} = \psi(x),\ \ x \in X\ ,$$

где X – конечный или бесконечный промежуток; $\varphi,\ \psi$ – гладкие функции.

Если $X = [x_1,\ x_2]$, то, как и в задаче **20** , единственное решение системы находится в характеристическом треугольнике вида x_1Mx_2 (рис. 6). Этот треугольник можно построить, проведя через концы отрезка $[x_1,\ x_2]$ пересекающиеся характеристики x_1M и x_2M различных семейств.

22. Выяснить, можно ли получить гладкое решение задачи Коши для квазилинейной гиперболической системы на промежутке времени произвольной длины. Коэффициенты системы и функции, задающие начальные условия, считать гладкими.

Решение.

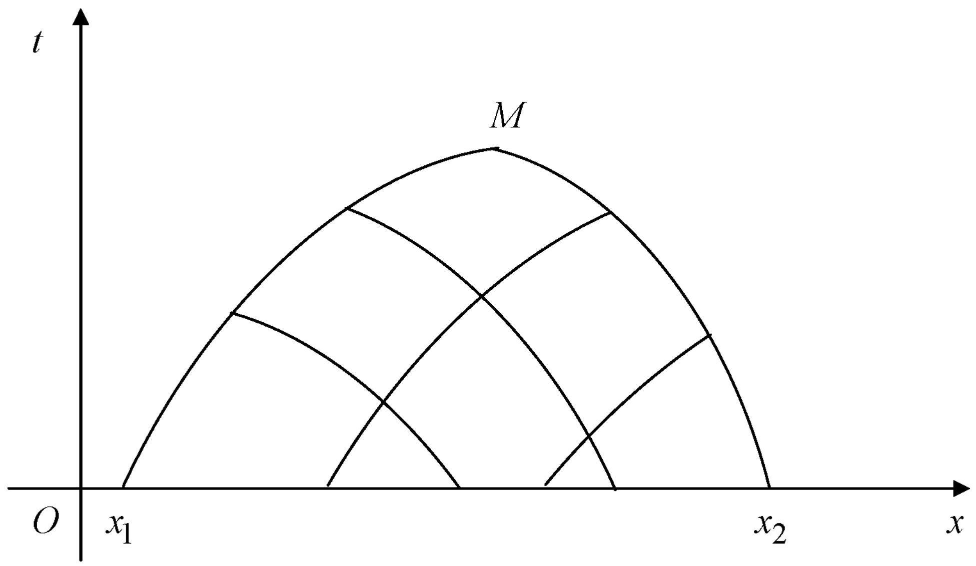

Рис. 6. Характеристический треугольник

Сравним свойства уравнений: линейного

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (167)$$

и квазилинейного

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \qquad (168)$$

Решение уравнения (167)

$$u = \varphi(x - at) \qquad (169)$$

представляет собой волну, распространяющуюся вдоль оси Ox со скоростью a (см. рис. 3).

В уравнении (168) место коэффициента, определяющего скорость в уравнении (167), занимает искомая функция u, и формально равенство (169) принимает вид

$$u = \varphi(x - ut)\,. \qquad (170)$$

Это соотношение неявно определяет функцию $u(x,\ t)$. Выясним, является ли она решением уравнения (168).

Запишем равенство (170) в виде

$$F(x,\ t,\ u) = 0\,,$$

где

$$F(x,\ t,\ u) = u - \varphi(x - ut)\,.$$

Вычислим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_u} = -\frac{-\varphi'(x-ut)}{1 + t\varphi'(x-ut)}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{F_t}{F_u} = -\frac{u\varphi'(x-ut)}{1 + t\varphi'(x-ut)}\,.$$

Подставляя эти выражения в (168), получим тождество. Следовательно, соотношение (170) действительно определяет решение $u(x,\ t)$ уравнения (168).

Рассмотрим изменение графиков этого решения со временем (рис. 7). Точки графика перемещаются вправо со скоростью u. Чем выше такая точка, тем больше в этой точке значение u, тем быстрее она движется. Поэтому точки вершины графика перемещаются быстрее, чем точки основания. С течением времени график деформируется: левая часть становится все более пологой, правая – крутой.

Угол наклона касательной в точках правой части графика уменьшается и в некоторый момент $t = t_{кр}$ (t критическое) достигает значения $\frac{\pi}{2}$. Производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ в соответствующей точке не существует, решение перестает быть гладким. Таким образом, гладкое решение существует только на конечном промежутке времени $[0,\ t_{кр})$.

Ответ: Нет.

8.3 Простейшая слабо нелинейная гиперболическая система

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial t} + s\dfrac{\partial r}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} + r\dfrac{\partial s}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{171}$$

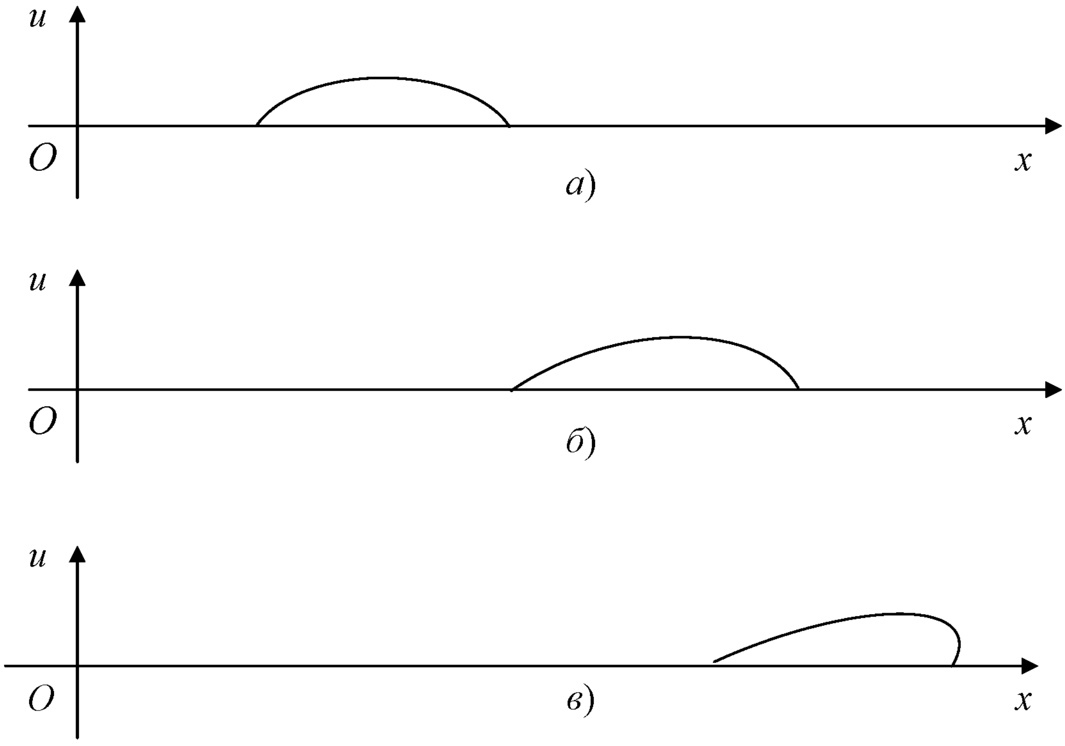

Рис. 7. Графики решения квазилинейного уравнения:
а) $t = 0$; *б)* $t = t_1 > 0$; *в)* $t = t_{кр} > t_1$

то есть систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial t} + s\dfrac{\partial r}{\partial x} + 0\dfrac{\partial s}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} + 0\dfrac{\partial r}{\partial x} + r\dfrac{\partial s}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Запишем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}. \tag{172}$$

Если уравнение

$$\det(A - kE) = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} s-k & 0 \\ 0 & r-k \end{vmatrix} = 0,$$

то есть

$$(s-k)(r-k) = 0$$

имеет различные действительные корни $k_1 = s$, $k_2 = r$, то система (171) гиперболическая. В данном случае это равносильно соотношению

$$s \neq r. \tag{173}$$

Определение. Система уравнений (171) при условии (173) называется простейшей слабо нелинейной системой гиперболического типа.

Такие системы рассматриваются, в частности, в газовой динамике при описании одномерного движения газа [11] и в теоретической физике [10]. Система (171) обладает, в частности, следующим важным свойством. Как правило, гладкое решение задачи Коши для квазилинейной гиперболической системы существует только на некотором конечном промежутке времени. При достаточно больших значениях t производные становятся неограниченными так же, как для уравнения (168). Говорят, что происходит градиентная катастрофа. Однако при решении системы (171) в области, где $s \neq r$, эта катастрофа не возникает, если начальные условия достаточно гладкие [19].

Поскольку матрица (172) диагональная, то система (171) имеет каноническую форму. Следовательно, функции $r(x, t)$, $s(x, t)$ являются римановыми инвариантами данной системы.

Существует два семейства характеристик системы (171): r- характеристики, определяемые соотношениями

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = s(x, t), \tag{174}$$
$$r = C_1,$$

и s-характеристики, для которых

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r(x, t), \tag{175}$$
$$s = C_2,$$

где C_1, C_2 – постоянные.

Таким образом, инвариант Римана r сохраняет значения на r-характеристике, инвариант s – на s-характеристике. Характеристики можно отыскать интегрированием уравнений (174) и (175).

Чтобы сделать обозначения, использованные для системы (171), более привычными, запишем в такой же форме уравнения (147)–(148):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial t} + a_1 \dfrac{\partial r}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} - a_2 \dfrac{\partial s}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{176}$$

начальные условия

$$r\big|_{t=0} = r_0(x), \tag{177}$$

$$s\big|_{t=0} = s_0(x), \tag{178}$$

($r_0(x)$, $s_0(x)$ – заданные дифференцируемые функции) и решение (151), (152) задачи (147)–(150):

$$r = r_0(x - a_1 t), \tag{179}$$

$$s = s_0(x + a_2 t). \tag{180}$$

Этому решению можно придать следующий вид:

$$r = r_0(\alpha), \; s = s_0(\beta),$$

где

$$\alpha = \alpha(x, t) = x - a_1 t, \tag{181}$$

$$\beta = \beta(x, t) = x + a_2 t. \tag{182}$$

Вернемся к системе (171). Рассмотрим следующую задачу Коши. Необходимо найти гладкие функции $r(x, t)$, $s(x, t)$, удовлетворяющие в характеристическом треугольнике $x_1 M x_2$ (рис. 6) системе (171) при начальных условиях

$$r\big|_{t=0} = r_0(x), \; s\big|_{t=0} = s_0(x), \; x_1 \le x \le x_2 \, . \tag{183}$$

Здесь $r_0(x)$, $s_0(x)$ – известные гладкие функции. Кроме того, наложим на них следующие ограничения:

$$-a \le r_0(x) < 0, \; 0 < s_0(x) \le a, \tag{184}$$

где a – некоторая положительная постоянная.

Из соотношения (184) следует, что

$$s_0(x) - r_0(x) > 0,$$
$$r_0(x) \neq s_0(x),$$

то есть начальные значения удовлетворяют условию (173) для гиперболической системы.

В работах [8], [9] доказывается следующее утверждение.

Гладкое решение задачи (171), (183)−(184) может быть задано формулами

$$r = r_0(\alpha),\ s = s_0(\beta), \tag{185}$$

где $\alpha = \alpha(x,\ t), \beta = \beta(x,\ t)$ − функции, неявно заданные уравнениями

$$t = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}\lambda}{s_0(\lambda) - r_0(\lambda)}, \tag{186}$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{s_0(\lambda) + r_0(\lambda)}{s_0(\lambda) - r_0(\lambda)} \mathrm{d}\lambda \tag{187}$$

и удовлетворяющие условиям

$$\alpha(x,\ 0) = \beta(x,\ 0) = x. \tag{188}$$

Это решение определено в характеристическом треугольнике x_1Mx_2 (см. рис. 6).

Таким образом, структура данного решения вполне аналогична решению (179)−(180) линейной системы (176). В обоих случаях искомые функции $r(x,\ t),\ s(x,\ t)$ выражаются через функции $r_0,\ s_0$, задающие начальные условия. Важное отличие заключается в том, что соотношения (181)−(182), задающие функции $\alpha(x,\ t),\ \beta(x,\ t)$ в линейном случае, существенно проще соотношений (186)−(188).

23. Найти характеристики системы (171).

Решение.

Согласно (174)−(175) характеристики данной системы определяются соотношениями

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = s(x,\ t),$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r(x,\ t).$$

Зафиксируем значение переменной α в соотношениях (186)−(187), считая, что $\alpha = \alpha_0$, где α_0 − постоянная. Будем предполагать, что $\alpha_0 \le \beta \le x_2$ (рис. 8).

Получим параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x(\beta), \\ t = t(\beta), \end{cases} \tag{189}$$

где

$$t(\beta) = \int_{\alpha_0}^{\beta} \frac{\mathrm{d}\lambda}{s_0(\lambda) - r_0(\lambda)}, \tag{190}$$

$$x(\beta) = \frac{\alpha_0 + \beta}{2} + \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\beta} \frac{s_0(\lambda) + r_0(\lambda)}{s_0(\lambda) - r_0(\lambda)}\mathrm{d}\lambda. \tag{191}$$

Вычислим производную функции $x = x(t)$, заданной уравнениями (189) – (191):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x'(\beta)}{t'(\beta)}. \tag{192}$$

Дифференцируя функции (190) и (191), находим

$$x'(\beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{s_0(\beta) + r_0(\beta)}{s_0(\beta) - r_0(\beta)} = \frac{s_0(\beta)}{s_0(\beta) - r_0(\beta)},$$

$$t'(\beta) = \frac{1}{s_0(\beta) - r_0(\beta)}.$$

Поэтому, согласно (192) и (185),

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = s_0(\beta) = s. \tag{193}$$

Следовательно, соотношения (189)−(191) задают характеристику (174). На этой характеристике значение $\alpha(x,\ t)$ фиксировано ($\alpha = \alpha_0$). Поэтому значение $r = r_0(\alpha) = r_0(\alpha_0)$ на ней постоянно, то есть линия (189) есть r-характеристика системы (171).

Аналогично доказывается, что s - характеристики – это линии

$$\begin{cases} x = x(\alpha), \\ t = t(\alpha), \end{cases} \tag{194}$$

где

$$t(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta_0} \frac{d\lambda}{s_0(\lambda) - r_0(\lambda)},$$

$$x(\alpha) = \frac{\alpha + \beta_0}{2} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta_0} \frac{s_0(\lambda) + r_0(\lambda)}{s_0(\lambda) - r_0(\lambda)} d\lambda,$$

$$x_1 \le \alpha \le \beta_0$$

и β_0 – фиксированное значение переменной β.

Определение. Пусть заданы два семейства кривых. Если каждая линия одного семейства является изоклиной для кривых другого, то говорят, что линии одного и того же семейства параллельны [19].

24. Доказать, что при допущениях, принятых в данном разделе для системы (171), для нее верно утверждение: характеристики каждого из семейств этой системы параллельны.

Решение.

Построим семейство r-характеристик a_1M_1, a_2M_2, … , a_kM_k (рис. 9). Все они пересекаются s-характеристикой M_1N. Угол наклона касательной M_1P_1 к r-характеристике a_1M_1 определяется соотношением

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{s}. \tag{195}$$

Оно следует из (193). Инвариант Римана s сохраняет значение вдоль s-характеристики M_1N. Согласно (184), $s_0(N) > 0$. Поэтому в точке M_1 знаменатель дроби в равенстве (195) $s = s_0(N) \ne 0$ и соотношение (195) действительно задает указанный угол.

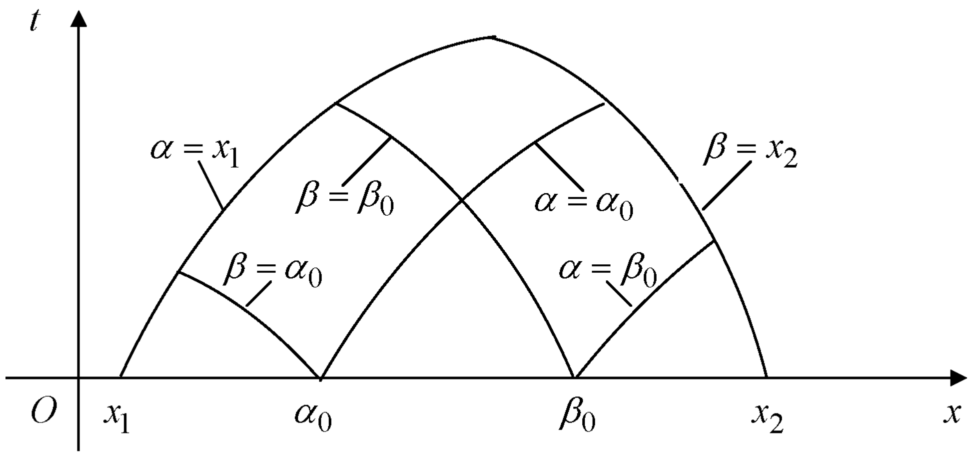

Рис 8. r- и s-характеристики

Аналогичные рассуждения верны для точек M_2, ... M_k, причем во всех этих случаях s принимает одно и то же значение. Следовательно, углы наклона касательных M_1P_1, M_2P_2, ... , M_kP_k равны, то есть s- характеристика M_1N является изоклиной семейства r-характеристик. Аналогично доказывается , что всякая r-характеристика представляет собой изоклину семейства s-характеристик.

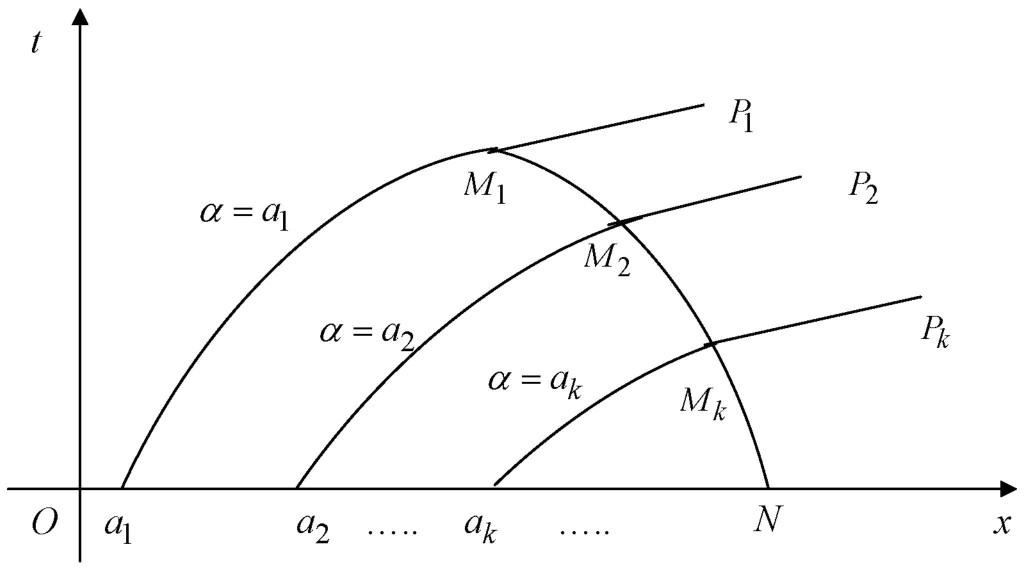

Рис. 9. Параллельные характеристики

Определение. Решение (r, s) гиперболической системы

$$\frac{\partial r}{\partial t} + s\frac{\partial r}{\partial x} = 0, \tag{196}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + r\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \tag{197}$$

называется вырожденным, если

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial t} & \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial t} & \frac{\partial s}{\partial x} \end{vmatrix} = 0.$$

25. Найти вырожденные решения системы (196) – (197).

Решение.

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial t} & \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial t} & \frac{\partial s}{\partial x} \end{vmatrix} = \frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Если функции r, s удовлетворяют уравнениям (196) – (197), то

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -s\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -r\frac{\partial s}{\partial x},$$

$$\Delta = \left(-s\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial s}{\partial x} - \left(-r\frac{\partial s}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = (r-s)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}.$$

По условию $\Delta = 0$, то есть

$$(r-s)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Так как система (196) – (197) гиперболическая, то $r \neq s$. Следовательно, или $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$, или $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$. Если $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$, то, согласно уравнению (196), $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$, то есть $r = r_1$, где r_1 – постоянная. Аналогично, если $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$, то $s = s_1$ (s_1 – постоянная).

При $r = r_1$ уравнение (196) обращается в тождество, а (197) принимает вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + r_1\frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

При условии

$$s\big|_{t=0} = s_0(x)$$

($s_0(x)$ – гладкая функция) оно имеет решение

$$s = s_0(x - r_1 t). \qquad (198)$$

Аналогично, если $s = s_1$, где s_1 – постоянная, то

$$r = r_0(x - s_1 t) \qquad (199)$$

($r_0(x)$ – гладкая функция).

Ответ:

$$\begin{cases} r = r_1, \\ s = s_0(x - r_1 t), \end{cases}$$
$$\begin{cases} s = s_1, \\ r = r_0(x - s_1 t), \end{cases}$$

$r_0(x)$, $s_0(x)$ – гладкие функции, r_1, s_1 – постоянные.

8.4 Взаимодействие уединенных волн

Рассмотрим решение системы (171) при начальных условиях

$$s_0(x) = \begin{cases} s_1, \ x < x_1, \\ \varphi(x), \ x_1 \le x \le x_2, \\ s_1, \ x > x_2, \end{cases}$$
$$r_0(x) = \begin{cases} r_1, \ x < x_3, \\ \psi(x), \ x_3 \le x \le x_4, \\ r_1, \ x > x_4, \end{cases}$$
$$x_3 < x_4 < 0 < x_1 < x_2,$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – постоянные, φ, ψ – гладкие функции (рис. 10).

Предположим, что система (171) решается, например, численно. В момент t функции $r(x, t)$, $s(x, t)$ известны. Нужно найти их значения в момент времени $t + \Delta t$. Для квазилинейной системы, как и для линейной, область влияния значений, которые функция s принимает на отрезке $[x_1, x_2]$, ограничена характеристиками, проходящими через концы отрезка. Ситуация здесь совпадает с рассмотренной в задаче **21.** Поэтому при достаточно малых значениях приращения времени Δt значения $s_0(x)$, принимаемые на отрезке $[x_1, x_2]$ в момент времени $t = 0$, скажутся только на малой окрестности этого отрезка. При $x \in [x_3, x_4]$ этого влияния не будет, так что здесь можно считать верным равенство

$$s(x,t) = s_1$$

и вычислять $r(x, t)$ по формуле (199). Аналогично при показанном на рис. 10 взаимном расположении графиков функций $s(x, t)$ вычисляется по формуле (198).

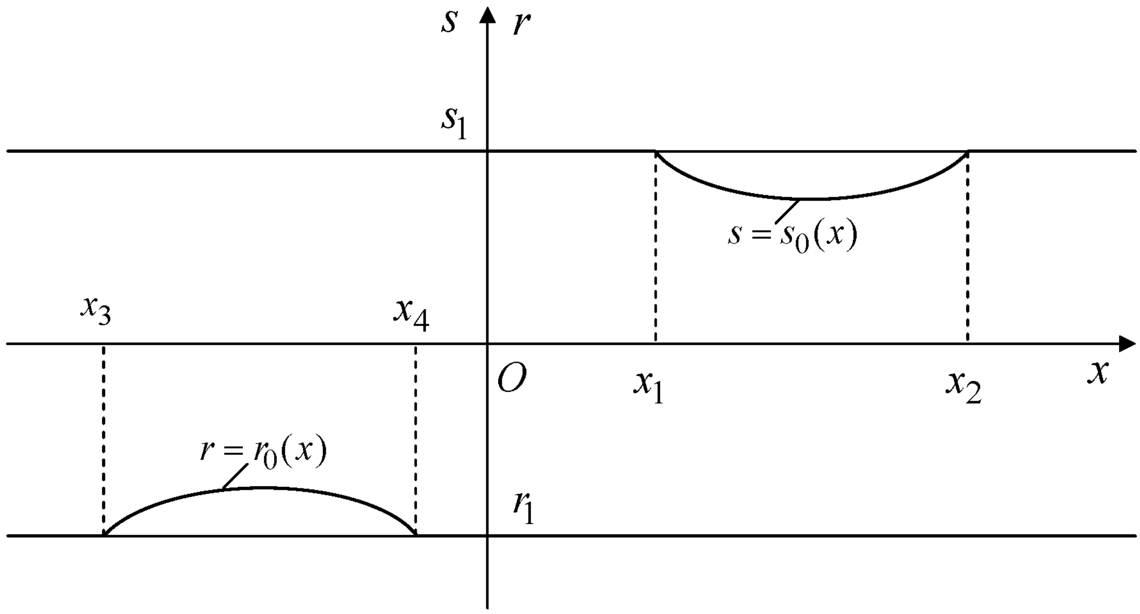

Рис. 10. Уединенные волны

Каждое из этих решений задает волну. На рис. 10 приведены графики искомых функций в начальный момент $t=0$. Так как здесь $s_1>0$, то с течением времени нижняя волна

$$\begin{cases} r = r_0(x - s_1 t), \\ s = s_1 \end{cases}$$

будет двигаться вправо. Аналогично верхняя волна перемещается влево.

В какой-то момент времени волны соприкоснутся (рис. 11, *а*). Примем теперь этот момент за начальный. Будем считать, что

$$s\big|_{t=0} = s_0(x) = \begin{cases} a, \ -\infty < x < 0, \\ \varphi(x), \ 0 \le x \le h_2, \\ a, \ h_2 < x < +\infty, \end{cases} \tag{200}$$

$$r\big|_{t=0} = r_0(x) = \begin{cases} -a, \ -\infty < x < h_1, \\ \psi(x), \ -h_1 \le x \le 0, \\ -a, \ 0 < x < \infty. \end{cases} \tag{201}$$

Таким образом, здесь принято

$$r_1 = -a, \ s_1 = a.$$

Предположим также, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\min \varphi(x) > \max \psi(x).$$

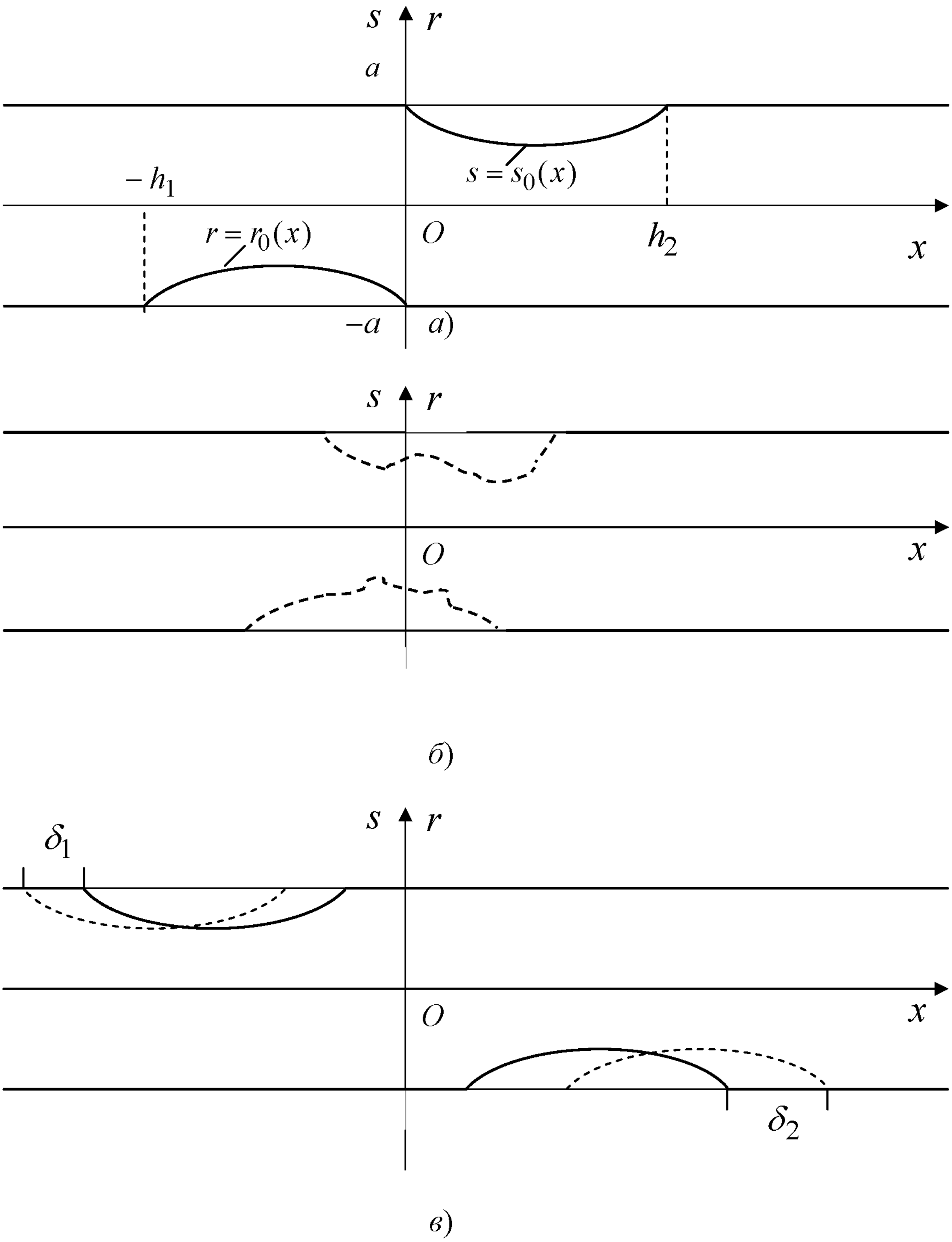

Рис. 11.Взаимодействие уединенных волн:
а) начальные условия; *б*) взаимодействие волн; *в*) волны после взаимодействия

При данных условиях правая волна

$$\begin{cases} r = -a, \\ s = s_0(x + at) \end{cases} \tag{202}$$

по-прежнему движется влево, а левая волна

$$\begin{cases} s = a, \\ r = r_0(x - at) \end{cases} \tag{203}$$

перемещается вправо.

В окрестности начала координат при $t > 0$ появляется область, в которой и $r(x,\ t)$, и $s(x,\ t)$ непостоянны. Коэффициенты в уравнениях системы (171) становятся переменными, причем значение каждой из функций $r,\ s$ влияет на значения другой. Решение теряет форму совокупности уединенных волн, становится значительно сложнее. Символически это показано на рис. 11, *б*.

Если теперь продолжить решение задачи Коши, то для отыскания величин $r(x,\ t)$, $s(x,\ t)$ в последующие моменты времени необходимо принять значения $r,\ s$, полученные в зоне взаимодействия, за начальные условия. Можно ожидать, что дальнейший процесс, начинающийся с таких сложных начальных условий, также не будет простым.

Для многих квазилинейных систем это действительно так. Однако в некоторых случаях, в том числе для рассматриваемой задачи (171), (200) – (201), через достаточно большой промежуток времени решение вновь приобретает вид двух волн

$$\begin{cases} r = -a, \\ s = s_0(x + at - \delta_1) \end{cases} \tag{204}$$

и

$$\begin{cases} s = a, \\ r = r_0(x - at + \delta_2), \end{cases} \tag{205}$$

которые отличаются от решения (202) – (203) только фазой. На рис. 11, *в* штриховой линией изображено решение (202) – (203), сплошной – (204) – (205). Изменение фаз волн можно вычислить по формулам

$$\delta_1 = \int_0^{h_2} \frac{a - s_0(\lambda)}{a + s_0(\lambda)} \mathrm{d}\lambda,$$

$$\delta_2 = \int_{-h_1}^{0} \frac{a + r_0(\lambda)}{a - r_0(\lambda)} \mathrm{d}\lambda$$

(см. [8]).

В теории эволюционных уравнений, то есть уравнений, описывающих процессы, происходящие во времени, решение, обладающее свойством сохранения формы после взаимодействия волн, называется солитоном [16]. Поэтому решение задачи (171), (200) – (201) можно назвать солитоноподобным.

26. Построить систему характеристик задачи (171), (200) – (201).

Решение.

Построим схематично r- и s-характеристики, проходящие через точки M_1, O, M_2 (рис. 12). В основном это прямые. Например, из точки M_1 исходят характеристики

$$x = -h_1 + at,$$
$$x = -h_1 - at$$

и т.д. Значения, заданные в начальный момент времени на отрезке $[-h_1,\ 0]$, оказывают влияние, в частности, в области, ограниченной характеристиками M_1ACH и OBL. В зону влияния отрезка OM_2 входит криволинейная полоса $OAFGCBM_2$. Эти области пересекаются по криволинейному четырехугольнику $OACB$ (область 3), где происходит взаимодействие волн. Здесь решение не имеет вида системы простых волн вида (202) – (203) и характеристики не являются прямыми.

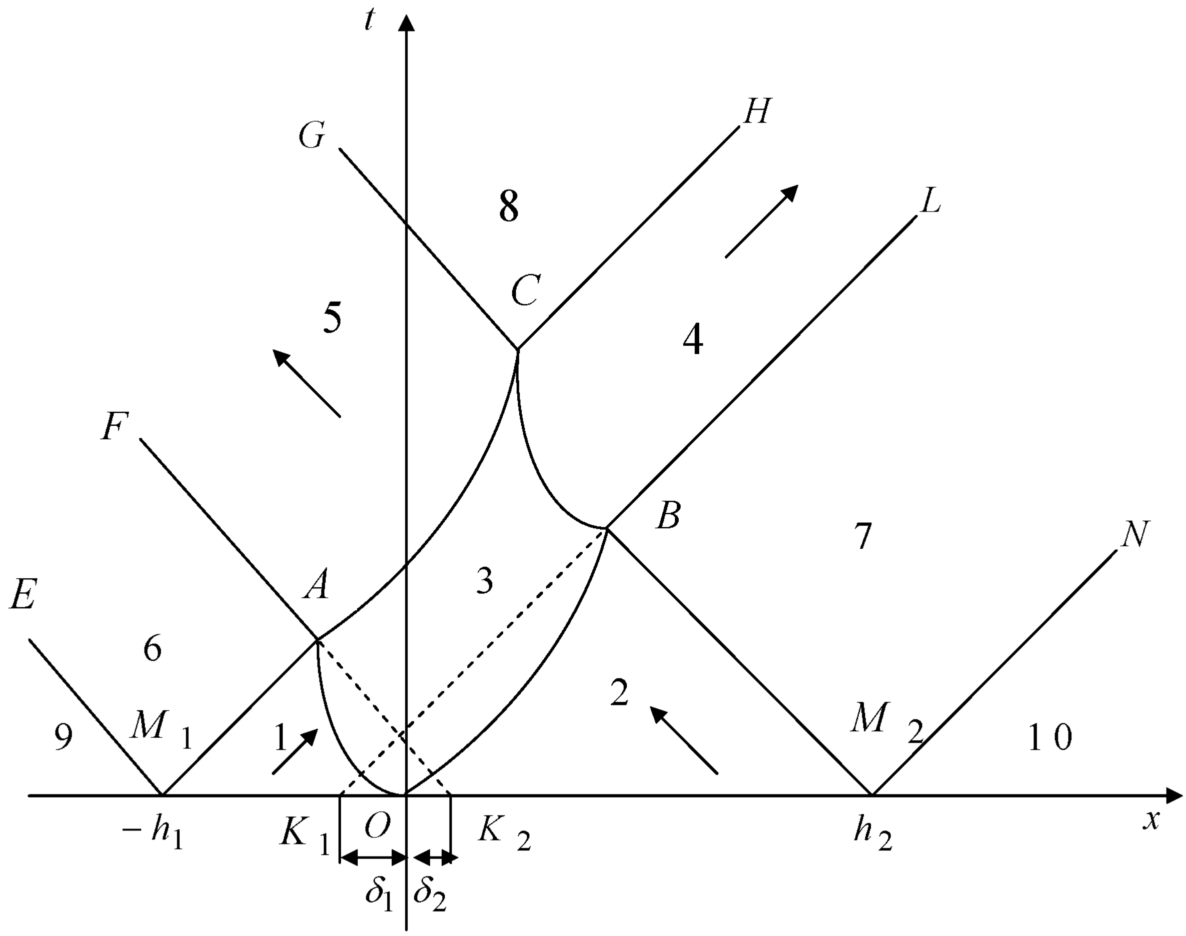

Рис. 12. Характеристики солитоноподобного решения

В области 5 значения функции r определяются условиями на интервале $(-\infty,\ -h_1)$. Поэтому здесь $r = -a$. Для функции s имеем уравнение волны

$$s = s_0(x + at - \delta_2).$$

Соответственно характеристика AF сдвинута вправо на δ_2 по отношению к началу координат. Аналогично сдвинута характеристика CG, а характеристики BL и CH − влево на δ_1.

27. Записать значения функций r, s (задача (171), (200) – (201)) в каждой области, указанной на рис. 12.

Решение.

Согласно соотношениям (185) – (188) в области 3 ($OACB$, то есть области взаимодействия волн)

$$r = r_0(\alpha),\ s = s_0(\beta),$$

где α и β определяются уравнениями

$$t = \int_{\alpha}^{0} \frac{\mathrm{d}\lambda}{a - \psi(\lambda)} + \int_{0}^{\beta} \frac{\mathrm{d}\lambda}{a + \varphi(\lambda)},$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0} \frac{a + \psi(\lambda)}{a - \psi(\lambda)}\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{2}\int_{0}^{\beta} \frac{\varphi(\lambda) - a}{\varphi(\lambda) + a}\mathrm{d}\lambda.$$

Область 1 (M_1AO) находится под влиянием левой волны, здесь решение имеет вид

$$s = a,\ r = \psi(x - at).$$

В области 2 (OBM_2) действует правая волна,

$$r = -a,\ s = \varphi(x + at).$$

Область 5 ($FACG$) занимает правая волна после взаимодействия:

$$r = -a,\ s = \varphi(x + at - \delta_2).$$

Аналогично в области 4 ($BCHL$) имеем левую волну

$$s = a,\ r = \psi(x - at + \delta_1).$$

В областях 9 (левее EM_1), 6 (EM_1AF), 8 (GCH), 7 (LBM_2N) и 10 (правее M_2N) решение определяется начальными значениями на интервалах, где в момент времени $t=0$ искомые функции постоянны. В указанных областях

$$r=-a,\ s=a.$$

Ответ:

Область 1:

$$s=a,\ r=\psi(x-at).$$

Область 2:

$$r=-a,\ s=\varphi(x+at).$$

Область 3:

$$r=r_0(\alpha),\ s=s_0(\beta),$$

$$t=\int_{\alpha}^{0}\frac{\mathrm{d}\lambda}{a-\psi(\lambda)}+\int_{0}^{\beta}\frac{\mathrm{d}\lambda}{a+\varphi(\lambda)},$$

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0}\frac{a+\psi(\lambda)}{a-\psi(\lambda)}\mathrm{d}\lambda+\frac{1}{2}\int_{0}^{\beta}\frac{\varphi(\lambda)-a}{\varphi(\lambda)+a}\mathrm{d}\lambda.$$

Область 4:

$$s=a,\ r=\psi(x-at+\delta_1).$$

Область 5:

$$r=-a,\ s=\varphi(x+at-\delta_2).$$

Области 6, 7, 8, 9, 10:

$$r=-a,\ s=a.$$

Замечание. Координаты точек A, B, C и уравнения криволинейных характеристик OA, AC, BC, OB (рис. 12) можно найти в работе [8]. Тем самым завершается решение задачи (171), (200) – (201) о взаимодействии уединенных волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Студент, проработавший настоящее пособие, должен отчетливо сознавать, что перед ним только вершина айсберга, называемого математической физикой. Решение ее задач в большинстве случаев отнюдь не сводится к использованию готовых формул и упражнениям в вычислении интегралов.

Сталкиваясь с проблемой, связанной с математической физикой, исследователь, как правило, выясняет, что не только не располагает готовыми формулами решения, но и вынужден уравнения, описывающие явление, отыскать – найти в литературе, если они уже существуют, либо вывести их заново. Обычно работа над проблемой начинается с разработки математической модели и выбора методов ее решения.

Что касается упомянутых методов, то в пособии рассмотрены только некоторые наиболее широко применяемые классические приемы. Здесь нет решения Даламбера волнового уравнения, не упоминается мощный аппарат интегральных преобразований и т.д.

Вполне сознательно авторы полностью проигнорировали в настоящей брошюре весьма эффективную и популярную часть математической физики – приближенные методы. Это связано с тем, что в основном данная тематика изучается в следующем, шестом семестре, и заслуживает отдельного рассмотрения.

Все это должен иметь в виду студент, приступающий к подготовке к зачету (экзамену) по математической физике.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арсенин, В.Я. Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1984. – 383 с.
2. Бицадзе, А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А.В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. – М.: Наука, 1985. – 310 с.
3. Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1980. – 686 с.
4. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
5. Годунов, С.К. Уравнения математической физики / С.К. Годунов. – М.: Наука, 1971. – 416 с.
6. Кошляков, Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
7. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию / М.Л. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 303 с.
8. Меньших, О.Ф. Об одном обобщенном уравнении Борна-Инфельда / О.Ф. Меньших. – М., 1986.– 103 с. Деп. в ВИНИТИ, № 7926-В86.
9. Меньших, О.Ф. О взаимодействии финитных уединенных волн для уравнений типа Борна-Инфельда / О.Ф. Меньших // Теорет. и матем. физ., 1989. Т. 79, №1. С. 16 – 29.
10. Меньших, О.Ф. О взаимодействии уединенных волн для системы уравнений Борна-Инфельда / О.Ф. Меньших // Теорет. и матем. физ., 1990. Т. 84, №2. С. 181 – 193.
11. Рождественский, Б.М. Системы квазилинейных уравнений / Б.М. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
12. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения : учеб. пособие / под ред. А. В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 304 с.
13. Смирнов, В.И. Курс высшей математики. Т. 2 / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 656 с.
14. Смирнов, М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1964. – 208 с.
15. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
16. Уизем, Дж. Линейные и квазилинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
17. Фарлоу, С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу – М.: Мир, 1985. – 383 с.
18. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты / В.Ф. Чудесенко. – М.: Высшая школа, 1999. – 126 с.
19. Яненко, Н.Н. О разрывах в решениях квазилинейных уравнений / Н.Н. Яненко // УМН, 1995. Т. 10, №2. С. 195 – 202.

Учебное издание

М е н ь ш и х Олег Федорович
Ф а й н и ц к и й Юрий Львович

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Учебное пособие

Редактор Н. С. К у п р и я н о в а

Подписано в печать 30.08.2006 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,9. Усл. кр.-отт. 7,1. Уч.-изд. л. 7,5.
Тираж 200 экз. Заказ Арт. С – 4 /2006.

Самарский государственный аэрокосмический
университет. 443086 Самара, Московское шоссе, 34

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086 Самара, Московское шоссе, 34