

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВА-
ТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Л.М. Савельев

Устойчивость конструкций

Конспект лекций

направление

151600.68 Прикладная механика

магистерская программа

"Прочность конструкций летательных аппаратов"

Самара 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	2
1. Устойчивость стержневых систем.....	3
1.1 Энергетический критерий бифуркационной потери устойчивости	3
1.2 Приращение полной потенциальной энергии сжатого стержня при бифуркационных перемещениях	4
1.3 Уравнение устойчивости стержня с учётом деформаций поперечного сдвига.....	8
1.4 Влияние деформаций поперечного сдвига на устойчивость стержня...	10
1.5 Устойчивость составных стержней.....	13
1.6 Уравнение устойчивости кругового кольца	21
1.7 расчёт на устойчивость кругового кольца.....	27
1.8 Устойчивость круговой арки	30
2 Устойчивость тонкостенных стержней.....	33
2.1. Основные соотношения теории кручения тонкостенных стержней ...	33
2.2. Устойчивость стержня, имеющего сечение с двумя осями симметрии, при центральном сжатии	38
2.3. Устойчивость стержня, имеющего сечение с одной осью симметрии.	41
2.4. Устойчивость стержня с несимметричным сечением	47
2.5 Устойчивость плоской формы при чистом изгибе	49
3. Устойчивость подкреплённых пластин	53
3.1. Дифференциальное уравнение устойчивости ортотропной пластины.....	53
3.2. Устойчивость ортотропных пластин при осевом сжатии.....	58
3.3. Конструктивно-ортотропные пластинки	61
4. Устойчивость трёхслойных пластин.....	66
4.1 Соотношения теории изгиба трёхслойных пластин	66
4.2 Устойчивость бесконечно широкой пластины при сжатии.....	71
4.3 Прямоугольная трёхслойная пластина с лёгким наполнителем при одноосном сжатии	72
4.4 Симметричная форма потери устойчивости трёхслойной пластины с лёгким наполнителем	74

ВВЕДЕНИЕ

Потеря устойчивости представляет большую опасность для силовых элементов конструкций летательных аппаратов. Когда нагрузка достигает критического значения, исходная форма равновесия становится неустойчивой и внезапно сменяется на другую, для которой обычно характерны большие перемещения; в результате этого может наступить исчерпание несущей способности системы. Иногда – как, например, в случае потери устойчивости обшивки тонкостенного подкреплённого отсека – катастрофических последствий может сразу и не наступить, но в закритическом состоянии характер работы конструкции существенно изменяется, что должно быть соответствующим образом учтено в расчётах. Поэтому расчёты на устойчивость составляют важную часть процесса создания летательного аппарата.

Чаще всего расчёт на устойчивость сводится к определению критической нагрузки и формы потери устойчивости упругой системы. Под упругой системой понимается собственно упругое тело, наложенные на него связи (условия закрепления) и действующие нагрузки. В данном пособии рассматриваются главным образом консервативные системы, то есть упругие системы, которые имеют идеальные связи и нагружены консервативными силами. Напомним, что связи называются идеальными, если работа реакций связей на любых возможных перемещениях точек системы равны нулю. Это предполагает, в частности, отсутствие трения в шарнирных, катковых и тому подобных опорных устройствах. Силы называются консервативными, если они имеют потенциал. Совершённая такими силами работа зависит только от начальной и конечной конфигурации тела, к которому они приложены, но не от истории перехода тела от одной конфигурации к другой. Примером консервативных являются так называемые «мертвые силы», сохраняющие всегда неизменное направление. Неконсервативной является, например, сила трения.

1. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

1.1 ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ БИФУРКАЦИОННОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим консервативную упругую систему, закреплённую неподвижно и нагруженную некоторой системой сил. Напряжённо-деформированное состояние системы, найденное с помощью линейных соотношений теории упругости, будем называть начальным. Через V^0 обозначим полную потенциальную энергию системы в начальном состоянии, которая складывается из потенциальной энергии деформации U^0 и потенциала внешних сил Π^0 :

$$V^0 = U^0 + \Pi^0.$$

Отклоним систему от начального состояния, создав посредством какого-либо воздействия малые перемещения точек тела, называемые *бифуркационными*. В результате полная потенциальная энергия системы получит приращение ΔV . Если $\Delta V > 0$, то после снятия воздействия система вернётся в исходное состояние, поскольку в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия системы минимальна. В случае устойчивой системы такая картина будет наблюдаться при любых малых отклонениях системы от начального состояния. В частности, при отсутствии внешней нагрузки (когда $V^0 = 0$) всегда будем иметь $\Delta V = \Delta U > 0$. С ростом нагрузки величина ΔV остаётся положительной до некоторого критического уровня нагрузки, который зависит от характера бифуркационных перемещений.

Будем считать, что уровень нагружения системы определяется параметром P , пропорционально которому возрастают все нагрузки, действующие на систему. Критическим параметром $P_{кр}$ будем называть наименьшее значение P , при котором становятся возможными отклонения, приводящие к $\Delta V = 0$.

Приращение полной энергии системы ΔV имеет две составляющих, одна из которых не зависит от внешней нагрузки, а другая содержит множителем параметр P :

$$\Delta V = M + P \cdot N. \quad (1.1)$$

Величины M и N зависят от бифуркационных перемещений, являющихся функциями координат, то есть они представляют собой функционалы. Условие $\Delta V = 0$ приводит к соотношению

$$M + P \cdot N = 0, \quad (1.2)$$

откуда имеем равенство

$$P = -\frac{M}{N}. \quad (1.3)$$

Необходимое условие минимума P заключается в требовании, чтобы вариация отношения M/N равнялась нулю:

$$\delta\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{\delta M \cdot N - M \cdot \delta N}{N^2} = \frac{1}{N}\left(\delta M - \frac{M}{N}\delta N\right) = 0.$$

Учитывая равенство (1.3), получаем отсюда

$$\delta M + P \cdot \delta N = 0.$$

На основании (1.2) приходим к следующей формулировке энергетического критерия бифуркационной устойчивости упругой системы:

$$\delta(\Delta V) = 0. \quad (1.4)$$

Для выяснения физического смысла данного равенства заметим, что полная потенциальная энергия V_1 системы в отклонённом состоянии равна сумме

$$V_1 = V^0 + \Delta V.$$

При варьировании бифуркационных перемещений будем иметь

$$\delta V_1 = \delta V^0 + \delta(\Delta V).$$

Так как начальное состояние является равновесным, в соответствии с вариационным уравнением Лагранжа должно выполняться равенство $\delta V^0 = 0$ для любых возможных перемещений. С учётом условия (1.4) приходим к равенству

$$\delta V_1 = 0.$$

Оно означает, что отклонённая система при $P = P_{\text{кр}}$ также находится в состоянии равновесия.

1.2 ПРИРАЩЕНИЕ ПОЛНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ БИФУРКАЦИОННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Вычисление ΔV проиллюстрируем на примере стержня длиной l , закреплённого неподвижно и нагруженного вдоль своей оси, как показано на рисунке 1.1. Стержень отнесём к декартовой системе координат, совместив ось x с осью стержня, а оси y, z – с главными центральными осями инерции поперечного сечения.

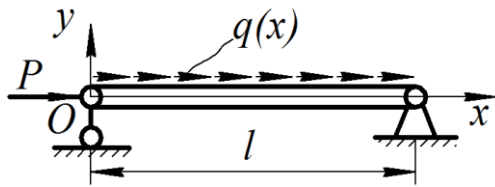


Рисунок 1.1 – Стержень, нагруженный вдоль своей оси

Предположим, что в результате расчёта начального состояния найден закон изменения осевых перемещений $u_0(x)$ по длине стержня. Продольные деформации в начальном состоянии будут

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0}{dx} = u_0',$$

а осевые напряжения –

$$\sigma_0(x) = E\varepsilon_0 = Eu_0',$$

где E – модуль упругости материала.

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по координате x . Обозначив через $N_0(x)$ осевую силу в сечении стержня, будем иметь также

$$N_0(x) = \sigma_0 A = EAu_0',$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Будем предполагать, что при изгибе стержня его сечения остаются плоскими, но не обязательно перпендикулярными изогнутой осевой линии. В качестве бифуркационных будем рассматривать малые продольные $u(x)$ и поперечные $v(x)$ перемещения точек осевой линии в плоскости xu , а также углы поворота сечений $\theta(x)$. Переходя к вычислению $\Delta V = \Delta U + \Delta \Pi$, начнём с приращения потенциала внешних сил, которое равно взятой с обратным знаком работе внешних сил на бифуркационных перемещениях:

$$\Delta \Pi = -Pu(0) - \int_0^l q(x)u(x)dx. \quad (1.5)$$

Приращение ΔU потенциальной энергии деформации складывается из потенциальной энергии изгиба стержня $U_{\text{изг}}$ и работы ΔU^* внутренних сил начального состояния на дополнительных (бифуркационных) деформациях:

$$\Delta U = U_{\text{изг}} + \Delta U^*. \quad (1.6)$$

Потенциальная энергия изгиба бруса выражается известной формулой

$$U_{\text{изг}} = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \frac{M^2}{EI} dx + k \int_0^l \frac{Q^2}{GA} dx \right), \quad (1.7)$$

где M , Q – изгибающий момент и перерезывающая сила в сечении стержня, I – момент инерции сечения относительно оси z , G – модуль сдвига. Коэффициент k перед вторым интегралом учитывает неравномерность распределения касательных напряжений по сечению стержня. Поскольку второе сла-

гаемое в формуле (1.7), учитывающее деформации поперечного сдвига, является всегда второстепенным, а величина k близка к единице, будем принимать в дальнейшем $k = 1$.

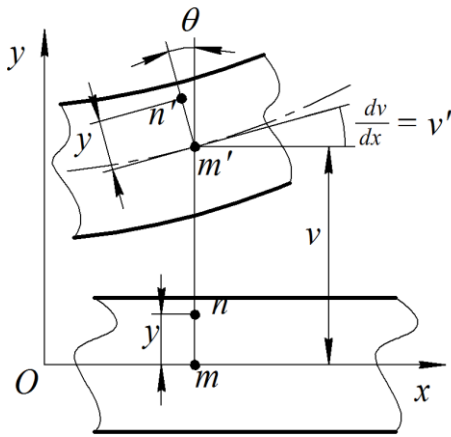


Рисунок 1.2 – Перемещения при изгибе стержня

Выразим M и Q через бифуркационные перемещения. На рисунке 1.2 показаны перемещения v и θ , характеризующие изгиб стержня. Точка n поперечного сечения окажется при изгибе в положении n' , оставаясь в том же сечении и на том же расстоянии y от оси z , что и в исходном состоянии. Перемещение точки n в осевом направлении $u^{(y)} = -y\theta$, а относительное удлинение продольного волокна, проходящего через точку n , будет

$$\varepsilon = \frac{\partial u^{(y)}}{\partial x} = -y\theta'.$$

Угол между сечением стержня и осевой линией, вообще говоря, перестаёт быть прямым. Деформация поперечного сдвига γ составит величину

$$\gamma = \frac{\partial u^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta + v'.$$

По закону Гука находим нормальное σ и касательное τ напряжения при изгибе:

$$\sigma = E\varepsilon = -Ey\theta'; \quad \tau = G\gamma = G(v' - \theta).$$

Для изгибающего момента и перерезывающей силы будем иметь

$$M = \int_A \sigma y dA = -E\theta' \int_A y^2 dA;$$

$$Q = \int_A \tau dA = G(v' - \theta) \int_A dA,$$

то есть

$$M = -EI\theta'; \quad Q = GA(v' - \theta). \quad (1.8)$$

Подставив эти выражения в формулу (1.7), получим при $k = 1$

$$U_{\text{изг}} = \frac{1}{2} \left[\int_0^l EI\theta'^2 dx + \int_0^l GA(v' - \theta)^2 dx \right]. \quad (1.9)$$

В результате создания бифуркационных перемещений возникнут дополнительные удлинения ε^* осевой линии. Осевые силы начального состояния произведут при этом работу

$$\Delta U^* = \int_0^l N_0 \varepsilon^* dx. \quad (1.10)$$

Для вычисления ε^* рассмотрим бесконечно малый участок dx осевой линии стержня (рисунок 1.3). Его длина после деформации будет

$$dx' = \sqrt{(dx + du)^2 + dv^2} = dx \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^* = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{dx'}{dx} - 1 = \sqrt{(1 + u')^2 + v'^2} - 1.$$

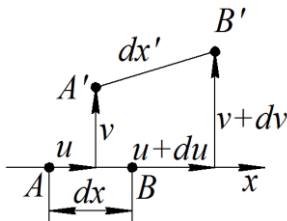


Рисунок 1.3 – Деформация осевой линии

Перемещения u и v и их производные являются по определению малыми величинами, и можно принять приближённо

$$(1 + u')^2 = 1 + 2u' + u'^2 \approx 1 + 2u'.$$

Тогда

$$\varepsilon^* = \sqrt{1 + 2\left(u' + \frac{1}{2}v'^2\right)} - 1.$$

Воспользуемся далее разложением в степенной ряд

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n+1)}{2!}\alpha^2 + \dots,$$

где α – малая величина. Полагая

$$\alpha = 2\left(u' + \frac{1}{2}v'^2\right); \quad n = \frac{1}{2}$$

и ограничиваясь в разложении двумя первыми слагаемыми приведём выражение для ε^* к виду

$$\varepsilon^* = u' + \frac{1}{2}v'^2.$$

Для ΔU^* согласно (1.10) будем иметь тогда

$$\Delta U^* = \int_0^l N_0 \left(u' + \frac{1}{2}v'^2\right) dx.$$

Объединяя данный результат с выражениями (1.5) и (1.9), приходим к искомой зависимости ΔV от бифуркационных перемещений:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \left[\int_0^l EI \theta'^2 dx + \int_0^l GA (v' - \theta)^2 dx \right] + \int_0^l N_0 \left(u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) dx - Pu(0) - \int_0^l q(x) u(x) dx. \quad (1.11)$$

Если сгруппировать слагаемые, содержащие продольные перемещения $u(x)$, то можно представить эту зависимость в виде

$$\Delta V = \frac{1}{2} EI \theta'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l GA (v' - \theta)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l N_0 v'^2 dx + \left[\int_0^l N_0 u' dx - Pu(0) - \int_0^l q(x) u(x) dx \right].$$

Перемещения $u(x)$ можно рассматривать как возможные перемещения для начального состояния равновесия, так как, будучи сколь угодно малыми величинами, они согласуются с наложенными на стержень продольными связями. В таком случае выражение в квадратных скобках нужно трактовать как сумму работ внешних и внутренних сил начального состояния на возможных перемещениях, которая равна нулю согласно принципу возможных перемещений. Опуская данное выражение, получим окончательно

$$\Delta V = \frac{1}{2} EI \theta'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l GA (v' - \theta)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l N_0 v'^2 dx. \quad (1.12)$$

Как следует из равенства (1.12), для суждения о величине ΔV достаточно в качестве бифуркационных перемещений использовать функции $v(x)$ и $\theta(x)$. Задание продольных перемещений $u(x)$ на результат не влияет, и можно без ущерба для общности принимать $u(x) = 0$.

1.3 УРАВНЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С УЧЁТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Систему дифференциальных уравнений устойчивости стержня получим, воспользовавшись условием

$$\delta(\Delta V) = 0.$$

Варьируя равенство (1.12) по v и θ , запишем

$$\delta(\Delta V) = \int_0^l EI \theta' \delta \theta' dx + \int_0^l GA (v' - \theta) (\delta v' - \delta \theta) dx + \int_0^l N_0 v' \delta v' dx = 0. \quad (1.13)$$

С помощью интегрирования по частям можно избавиться от производных $\delta v'$, $\delta\theta'$ в подинтегральных выражениях. Рассмотрим, например, интеграл

$$J_1 = \int_0^l EI\theta'\delta\theta' dx.$$

Преобразуем его по схеме

$$\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU,$$

где U , V – некоторые функции переменной x ; a , b – пределы интегрирования. Полагая $U = EI\theta'$; $dV = \delta\theta' dx$, будем иметь для J_1 выражение

$$J_1 = EI\theta'\delta\theta \Big|_0^l - \int_0^l (EI\theta')' \delta\theta dx.$$

Аналогично преобразуем ещё два интеграла

$$J_2 = \int_0^l GA(v' - \theta) \delta v' dx = GA(v' - \theta) \delta v \Big|_0^l - \int_0^l [GA(v' - \theta)]' \delta v dx;$$

$$J_3 = \int_0^l N_0 v' \delta v' dx = N_0 v' \delta v \Big|_0^l - \int_0^l (N_0 v')' \delta v dx.$$

С учётом данных соотношений можно согласно (1.13) записать следующее равенство:

$$\begin{aligned} & EI\theta'\delta\theta \Big|_0^l + [GA(v' - \theta) + N_0 v'] \delta v \Big|_0^l - \\ & - \int_0^l [(EI\theta')' + GA(v' - \theta)] \delta\theta dx - \\ & - \int_0^l \left\{ [GA(v' - \theta)]' + (N_0 v')' \right\} \delta v dx = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Соотношение (1.14) должно выполняться для любых вариаций δv и $\delta\theta$, которые не связаны между собой. Это возможно лишь в том случае, если равно нулю каждое слагаемое, содержащееся в (1.14), и равны нулю подинтегральные функции в интегральных слагаемых. Отсюда следуют, во-первых, равенства

$$(EI\theta')' + GA(v' - \theta) = 0; \quad (1.15)$$

$$[GA(v' - \theta)]' + (N_0 v')' = 0, \quad (1.16)$$

образующие систему дифференциальных уравнений устойчивости относительно v и θ .

Приравнивание нулю внеинтегральных членов в (1.14) приводит далее к условиям, которые должны удовлетворяться при $x=0$ и при $x=l$, то есть приводит к формулировке граничных условий. Учитывая, что согласно соотношениям (1.8) $EI\theta' = M$; $GA(v' - \theta) = Q$, имеем равенства

$$M\delta\theta|_0^l = 0; \quad (Q + N_0v')\delta v|_0^l = 0.$$

Поскольку значения вариаций δv и $\delta\theta$ при $x=0$ и при $x=l$ не зависят друг от друга, отсюда следует, что на каждом конце балки должны выполняться следующие условия:

- 1) либо $\delta\theta = 0$ (то есть угол θ задан), либо $M = 0$;
- 2) либо $\delta v = 0$ (то есть задано перемещение v), либо $Q + N_0v' = 0$.

1.4 ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ

Пусть шарнирно закреплённый по концам стержень постоянного сечения сжат силой P (рисунок 1.4). В этом случае $N_0 = -P$, и уравнения устойчивости (1.15), (1.16) принимают вид

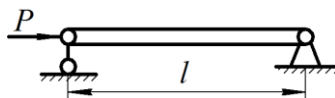


Рисунок 1.4 – Сжатый стержень

$$EI\theta'' + GA(v' - \theta) = 0; \quad (1.17)$$

$$GA(v'' - \theta') - Pv'' = 0. \quad (1.18)$$

Исключим из данной системы θ . Из (1.18) следует, что

$$GA(v'' - \theta') = Pv''. \quad (1.19)$$

Отсюда получаем равенство

$$\theta' = \left(1 - \frac{P}{GA}\right)v''. \quad (1.20)$$

Продифференцируем далее (1.17):

$$EI\theta''' + GA(v'' - \theta') = 0.$$

Подставив сюда соотношение (1.19), запишем

$$EI\theta''' + Pv'' = 0.$$

С учётом равенства (1.20) приходим к одному уравнению относительно функции v :

$$EI\left(1 - \frac{P}{GA}\right)v^{IV} + Pv'' = 0.$$

Представим его в виде

$$v^{IV} + k^2v'' = 0, \quad (1.21)$$

где

$$k^2 = \frac{P}{EI \left(1 - \frac{P}{GA}\right)}. \quad (1.22)$$

Из (1.17) и (1.20) можно выразить θ через v :

$$\theta = v' + \frac{EI}{GA} \theta'' = v' + \frac{EI}{GA} \left(1 - \frac{P}{GA}\right) v''$$

или

$$\theta = v' + \frac{P}{k^2 GA} v'''. \quad (1.23)$$

Общее решение уравнения (1.21):

$$v(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx + A_3 x + A_4, \quad (1.24)$$

где $A_1 \dots A_4$ – произвольные постоянные. Последние должны быть подчинены граничным условиям, которые в рассматриваемом случае имеют вид

- 1) $v(0) = 0$; 2) $M(0) = 0$ или $\theta'(0) = 0$;
- 3) $v(l) = 0$; 4) $M(l) = 0$ или $\theta'(l) = 0$.

Требуемая здесь производная $\theta'(x)$ определяется равенством (1.20):

$$\theta'(x) = \left(1 - \frac{P}{GA}\right) v''(x) = -A_1 k^2 \left(1 - \frac{P}{GA}\right) \sin kx - A_2 k^2 \left(1 - \frac{P}{GA}\right) \cos kx.$$

На основании условий на конце $x = 0$ запишем

$$v(0) = A_2 + A_4 = 0;$$

$$\theta'(0) = -A_2 k^2 \left(1 - \frac{P}{GA}\right) = 0.$$

Отсюда $A_2 = 0$, $A_4 = 0$.

Остаются два условия при $x = l$:

$$v(l) = A_1 \sin kl + A_3 l = 0; \quad (1.25)$$

$$\theta'(l) = -A_1 k^2 \left(1 - \frac{P}{GA}\right) \sin kl = 0. \quad (1.26)$$

Из последнего соотношения следует, что либо $1 - \frac{P}{GA} = 0$, либо $\sin kl = 0$. Остановимся вначале на последнем равенстве, которое выполняется при $kl = n\pi$, где n – целые числа. Так как $k^2 l^2 = n^2 \pi^2$, на основании (1.22) получаем соотношение

$$\frac{Pl^2}{EI \left(1 - \frac{P}{GA}\right)} = n^2 \pi^2. \quad (1.27)$$

Введя обозначение

$$P_0 = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}, \quad (1.28)$$

равенство (1.27) представим в виде

$$P = \left(1 - \frac{P}{GA}\right) P_0,$$

откуда находим

$$P = \frac{P_0}{1 + \frac{P_0}{GA}}. \quad (1.29)$$

Формула (1.29) даёт множество значений P , соответствующих различным n . Чтобы установить наименьшее значение, перепишем данную формулу в виде

$$P = \frac{1}{\frac{1}{P_0} + \frac{1}{GA}}.$$

С ростом n величина P_0 увеличивается, знаменатель дроби уменьшается, а P возрастает. Наименьшее значение получим при $n=1$, и расчётная формула для $P_{кр}$ может быть записана так:

$$P_{кр} = \frac{P_{0кр}}{1 + \frac{P_{0кр}}{GA}}, \quad (1.30)$$

где величина

$$P_{0кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (1.31)$$

представляет собой критическую сжимающую силу для стержня без учёта деформации поперечного сдвига.

Как было сказано, равенство (1.26) удовлетворяется также, если

$$1 - \frac{P}{GA} = 0,$$

откуда вытекает критическое значение $P = GA$. Но данная величина больше той, которая даётся формулой (1.30). В этом можно убедиться переписав формулу (1.30) следующим образом:

$$P_{\text{кр}} = \frac{GA}{\frac{GA}{P_{0\text{кр}}} + 1} < GA.$$

Итак, при учёте деформаций поперечного сдвига критическая сила определяется равенством (1.30). Чисто сдвиговая форма потери устойчивости не реализуется, поскольку требует более высокого значения критической силы $P = GA$.

При $kl = \pi$ из (1.25) следует $A_3 = 0$. Тогда из формул (1.24) и (1.23) можно при $n = 1$ получить выражения, описывающие форму потери устойчивости стержня:

$$v(x) = A_1 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \theta(x) = A_1 \frac{\pi}{l} \frac{1}{1 + \frac{P_{0\text{кр}}}{GA}} \cos \pi x. \quad (1.32)$$

В случае стержня сплошного сечения поправка на деформации поперечного сдвига оказывается весьма небольшой. В самом деле, поскольку

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

можно записать

$$\frac{P_{0\text{кр}}}{GA} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \frac{P_{0\text{кр}}}{A}.$$

Но $P_{0\text{кр}}/A = \sigma_{0\text{кр}}$, а $\sigma_{0\text{кр}}/E = \varepsilon_{0\text{кр}}$. Следовательно, поправка к классическому значению $P_{0\text{кр}}$ имеет порядок $2(1 + \mu)\varepsilon_{0\text{кр}}$ по сравнению с единицей.

В практике, однако, могут встретиться упругие системы, в которых эффект деформаций поперечного сдвига оказывается существенным. Примером могут служить трёхслойные стержни, у которых заполнитель имеет относительно низкую жёсткость на сдвиг. Особенности работы заполнителя будут представлены позднее применительно к расчёту на устойчивость трёхслойных пластин. Другим примером являются рассматриваемые далее составные стержни.

1.5 УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ

1.5.1 Составные стержни ферменной структуры. На рисунке 1.5 показан составной стержень, который образован двумя продольными поясами и соединяющими их раскосами. Если соединительную решётку представить приближённо как непрерывный заполнитель, то для вычисления критической

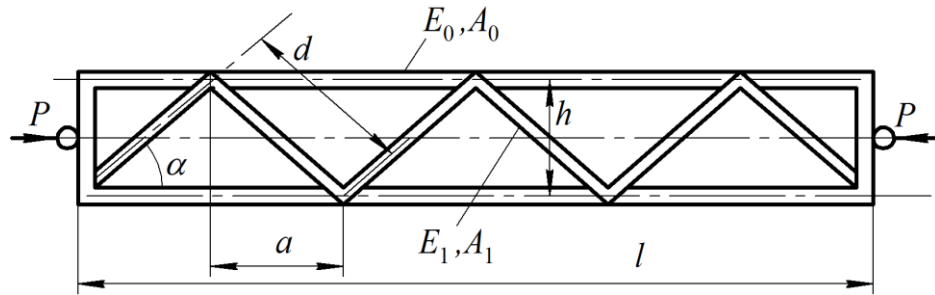


Рисунок 1.5 – Составной стержень ферменной структуры

сжимающей силы такого стержня можно применить формулу (1.30). Преобразуем её предварительно следующим образом. Жёсткость стержня на сдвиг GA связана с деформацией поперечного сдвига (рисунок 1.6) равенством $\gamma = Q/(GA)$. Поэтому формулу (1.30) можно представить в виде

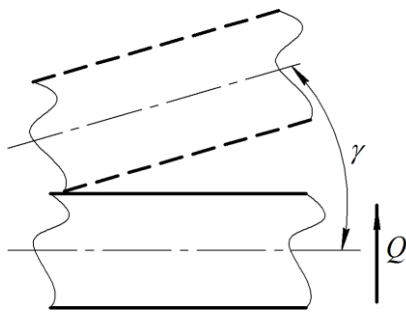


Рисунок 1.6 – Деформация поперечного сдвига

$$P_{кр} = \frac{P_{0кр}}{1 + \xi}, \quad (1.33)$$

где

$$\xi = cP_{0кр}. \quad (1.34)$$

Здесь величина c представляет собой податливость стержня на сдвиг:

$$c = \frac{1}{GA} = \frac{\gamma}{Q}. \quad (1.35)$$

Будем считать, что раскосы имеют шарнирное соединение с поясами. При действии силы Q в раскосах возникают равные по модулю и чередующиеся по знаку осевые силы $\pm N_1$ (рисунок 1.7).

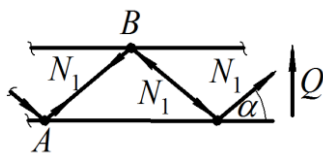


Рисунок 1.7 – Осевые силы в раскосах

Здесь

Условие статики

$$N_1 \sin \alpha = Q$$

дает значение

$$N_1 = \frac{Q}{\sin \alpha} = \frac{Qd}{h}. \quad (1.36)$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{d}; \quad d = \sqrt{a^2 + h^2},$$

где α – угол между раскосом и поясом; d – длина стержня; h – расстояние между осевыми линиями поясов; a – половина расстояния между соседними узлами пояса.

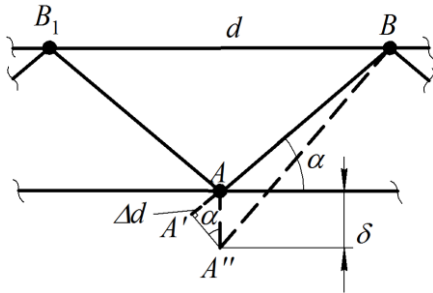
Растянутый раскос AB получит удлинение

$$\Delta d = \frac{N_1 d}{E_1 A_1},$$

где E_1 , A_1 – модуль упругости материала раскоса и площадь его сечения. С учётом (1.36) запишем

$$\Delta d = \frac{Qd^2}{E_1 A_1 h}. \quad (1.37)$$

Если считать условно точку B неподвижной, то деформированный раскос займёт положение $A''B$ (рисунок 1.8), а точка A опустится на величину



$$\delta = \frac{\Delta d}{\sin \alpha} = \Delta d \frac{d}{h} = \frac{Qd^3}{E_1 A_1 h^2}.$$

Рисунок 1.8 – Деформация растянутого раскоса

Сжатый раскос получит укорочение той же величины (1.37), вследствие чего точка B_1 дополнительно опустится на величину δ . В итоге будем иметь изображённую на рисунке 1.9 картину деформирования составного стержня. Угол сдвига γ оказывается равным

$$\gamma = \frac{2\delta}{2a} = \frac{\delta}{a} = \frac{Qd^3}{E_1 A_1 a h^2},$$

а податливость стержня на сдвиг

$$c = \frac{\gamma}{Q} = \frac{d^3}{E_1 A_1 a h^2}. \quad (1.38)$$

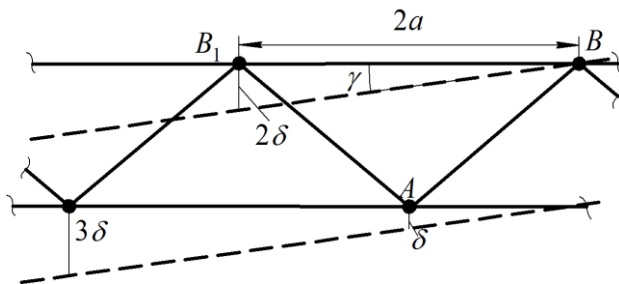


Рисунок 1.9 – «Деформация сдвига» составного стержня

При расчёте момента инерции поперечного сечения составного стержня необходимо учитывать только вклад поясов:

$$I = 2A_0 \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{A_0 h^2}{2},$$

где A_0 – площадь сечения пояса.

Тогда для $P_{0кр}$ согласно (1.31)

будем иметь

$$P_{0кр} = \frac{\pi^2 E_0 I}{l^2} = \frac{\pi^2 E_0 A_0 h^2}{2l^2}, \quad (1.39)$$

где E_0 – модуль упругости материала пояса.

Поправка на сдвиг по формулам (1.34), (1.38) составит

$$\xi = c P_{0кр} = \frac{\pi^2 E_0 A_0 d^3}{2 E_1 A_1 a l^2}. \quad (1.40)$$

В качестве примера рассмотрим составной стержень, для которого $E_0 = E_1$; $A_1 = A_0/2$; $a = h$; $d = h\sqrt{2}$. Величина ξ в этом случае будет

$$\xi = \frac{\pi^2}{2} \frac{2A_0}{A_0} \frac{h^3 2\sqrt{2}}{hl^2} = 27,9 \frac{h^2}{l^2}.$$

Если, в частности, $h/l = 1/10$, то $\xi = 0,279$, так что, согласно (1.33),

$$P_{\text{кр}} = \frac{P_{0\text{кр}}}{1 + \xi} = 0,78P_{0\text{кр}}.$$

При $h/l = 1/5$ будет $P_{\text{кр}} = 0,47P_{0\text{кр}}$.

Следует иметь в виду, что данные результаты справедливы, если критическое напряжение сжатия

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{2A_0}$$

не превышает предела пропорциональности материала пояса. В противном случае в формуле (1.31) для $P_{0\text{кр}}$ следует заменить модуль упругости пояса E_0 касательным модулем материала $E_{\text{к}}$. Для этого необходимо располагать диаграммой деформирования материала пояса $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ или её приближённым аналитическим представлением. Расчёт критического напряжения осуществляется методом последовательных приближений. Пусть $\sigma_{\text{кр}}^{(n)}$ – критическое напряжение, полученное в n -ом приближении. По формуле

$$\varepsilon_{\text{кр}}^{(n)} = \frac{\sigma_{\text{кр}}^{(n)}}{E_c^{(n-1)}}$$

находим осевую деформацию пояса n -го приближения, где $E_c^{(n-1)}$ – секущий модуль материала $n-1$ -го приближения. На основании зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ вычисляем касательный и секущий модули материала n -го приближения:

$$E_{\text{к}}^{(n)} = \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon^{(n)}}; \quad E_c^{(n)} = \frac{\sigma(\varepsilon^{(n)})}{\varepsilon^{(n)}}.$$

По формулам (1.30) и (1.31) находим затем уточнённое значение $\sigma_{\text{кр}}^{(n+1)}$. Расчёт продолжается до тех пор пока не будет достигнута желаемая точность. В нулевом приближении следует принять $E_c^{(0)} = E_0$.

На рисунке 1.10 показан составной стержень, соединительная решётка которого имеет помимо раскосов дополнительные поперечные стойки. На

общую устойчивость конструкции они практически не влияют. Но наряду с

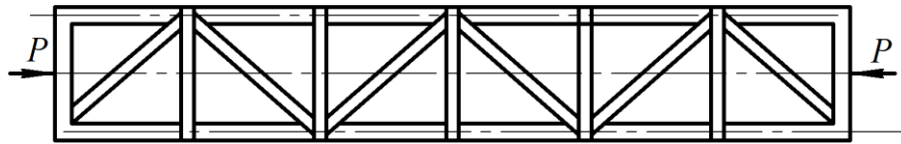


Рисунок – 1.10 Соединительная решётка с дополнительными стойками

общей необходимо исключить также местную потерю устойчивости, которая заключается в выпучивании участка пояса между двумя соседними узлами. В этом отношении стойки эффективны, так как они уменьшают вдвое длину пролёта.

1.5.2 Составные стержни рамной структуры. Рассмотрим составной стержень, образованный двумя поясами и жёстко связанными с ними поперечными планками (рисунок 1.11). Характер деформирования стержня при

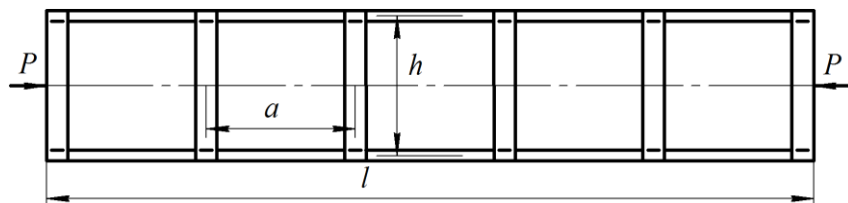


Рисунок 1.11 – Составной стержень рамной структуры

действии перерезывающей силы Q схематично изображён на рисунке 1.12. Точки m' и m'' условно считаются неподвижными. Среднее значение угла γ можно принять равным

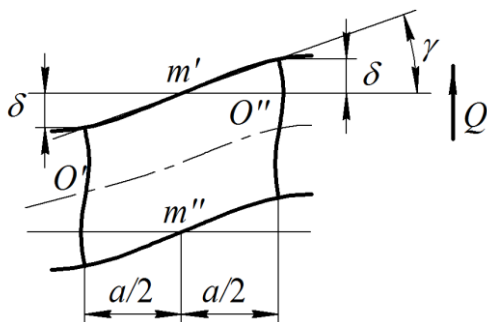


Рисунок 1.12 – Схема деформирования стержня при сдвиге

$$\gamma = \frac{2\delta}{a}, \quad (1.41)$$

где δ – поперечное смещение точки пересечения осевых линий пояса и планки.

Для нахождения δ рассмотрим участок стержня длиной a с планкой посередине под действием силы Q (рисунок 1.13). Отмеченные на рисунке 1.12 точки m' и m'' являются точками перегиба при изгибе поясов, поэтому изгибающие моменты в поясах в этих сечениях отсутствуют. Если на правом конце выделенного участка действует сила Q , то на левом помимо направленной противоположно такой же силы должны действовать осевые силы в поясах, образующие пару и равные

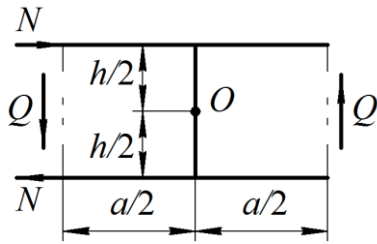


Рисунок 1.13 – Силы, действующие на участок стержня

$$N = Q \frac{a}{h},$$

как это вытекает из условия равновесия данного участка.

Точка O тоже является точкой перегиба упругой линии изгиба планки (см. точки O' и O'' на рисунке 1.12). Поэтому для вычисления δ можно принять расчётную схему, показанную на рисунке 1.14; величина δ равна перемещению точки m . Реакции опор в точке O

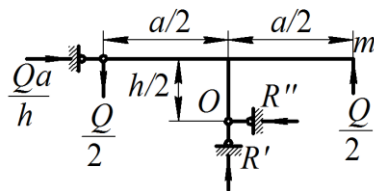


Рисунок 1.14 – Расчётная, схема для вычисления δ

$$R' = 0; \quad R'' = \frac{Qa}{h}.$$

Эпюры изгибающих моментов M_0 и перерезывающих сил Q_0 показаны на рисунке 1.15.

Далее прикладываем единичную силу в точке m . Реакции опор и эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил в единичной системе представлены на рисунках 1.16 и 1.17. Перемещение в направлении единичной силы даётся формулой Мора, которая для плоской рамы имеет вид

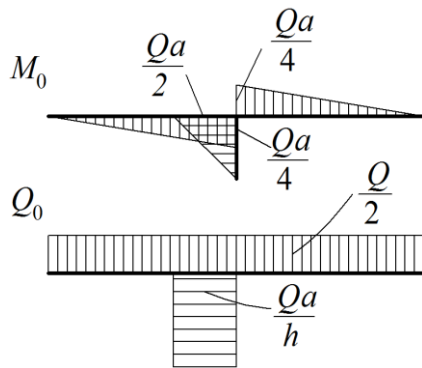


Рисунок 1.15 – Эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил при действии силы Q

$$\delta = \sum_i \left(\int_{l_i} \frac{M_0 \bar{M}}{EI} ds + k_i \int_{l_i} \frac{Q_0 \bar{Q}}{GA} ds + \int_{l_i} \frac{N_0 \bar{N}}{EA} ds \right).$$

Здесь l_i – длина i -го стержня; E , G – модуль упругости и модуль сдвига материала; A , I – площадь и момент инерции сечения стержня; коэффициент k_i зависит от формы поперечного сечения i -го стержня; суммирование выполняется по всем стержням рамы. Последнее слагаемое в скобках учитывает влияние продольных деформаций стержней и

его можно отбросить из-за малости. Значения k_i близки к единице, и будем полагать $k_i = 1$, принимая во внимание то, что вклад деформаций поперечного сдвига, представленный вторым слагаемым, является второстепенным по сравнению с вкладом деформаций изгиба.

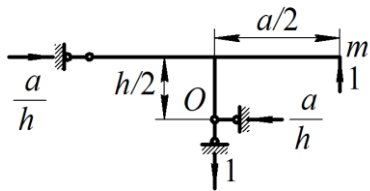


Рисунок 1.16 –
Единичная система

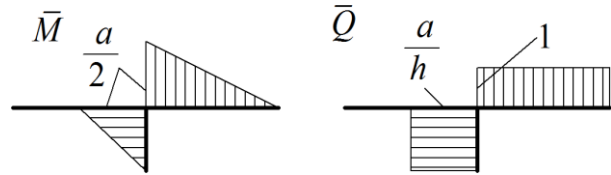


Рисунок 1.17 – Изгибающие моменты
и перерезывающие силы в единичной системе

Пользуясь правилом Верещагина, находим

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{E_0 I_0} \frac{1}{2} \frac{Qa}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{E_1 I_1} \frac{1}{2} \frac{Qa}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{G_0 A_0} \frac{Q}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot 1 + \frac{1}{G_1 A_1} \frac{Qa}{h} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{a}{h} = \\ &= Q \left(\frac{1}{E_0 I_0} \frac{a^3}{48} + \frac{1}{E_1 I_1} \frac{a^2 h}{24} + \frac{1}{G_0 A_0} \frac{a}{4} + \frac{1}{G_1 A_1} \frac{a^2}{2h} \right), \end{aligned}$$

где E_0, I_0 – модуль упругости материала пояса и момент инерции его сечения; E_1, I_1 – то же, для планки; G_0, A_0 – модуль сдвига и площадь сечения пояса; G_1, A_1 – то же, для планки.

Планка имеет относительно малую длину, поэтому для неё влияние деформаций сдвига на перемещение может оказаться существенным. Для пояса же этим влиянием можно пренебречь. Отбросим третье слагаемое в выражении для δ и на основании (1.41) запишем далее

$$\gamma = \frac{2\delta}{a} = Q \left(\frac{a^2}{24E_0 I_0} + \frac{ah}{12E_1 I_1} + \frac{a}{G_1 A_1 h} \right).$$

В соответствии с формулой (1.35) получаем, наконец,

$$c = \frac{\gamma}{Q} = \frac{a^2}{24E_0 I_0} + \frac{ah}{12E_1 I_1} + \frac{a}{G_1 A_1 h}. \quad (1.42)$$

Числовые расчёты выполним применительно к конструкции составного стержня, представленной на рисунке 1.18. Стержень состоит из двух поясов швеллерного сечения, расстояние между которыми $h_0 = 28\text{мм}$. С двух сторон они соединены планками в виде прямоугольных пластин шириной $b = 140\text{мм}$ и толщиной $t = 7\text{мм}$. Общая длина стержня $l = 3600\text{мм}$; расстояние между осями планок $a = 1200\text{мм}$. Точкой O_1 отмечен центр тяжести сечения швеллера; его расстояние от стенки $z_0 = 17,5\text{мм}$. Собственные моменты инерции сечения швеллера $I_x = 83,4 \cdot 10^4 \text{мм}^4$; $I_y = 934,5 \cdot 10^4 \text{мм}^4$; площадь сечения $A' = 2515 \text{мм}^2$. Модуль упругости материала швеллеров и планок $E_0 = E_1 = E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа}$; предел пропорциональности $\sigma_{\text{пц}} = 270 \text{МПа}$.

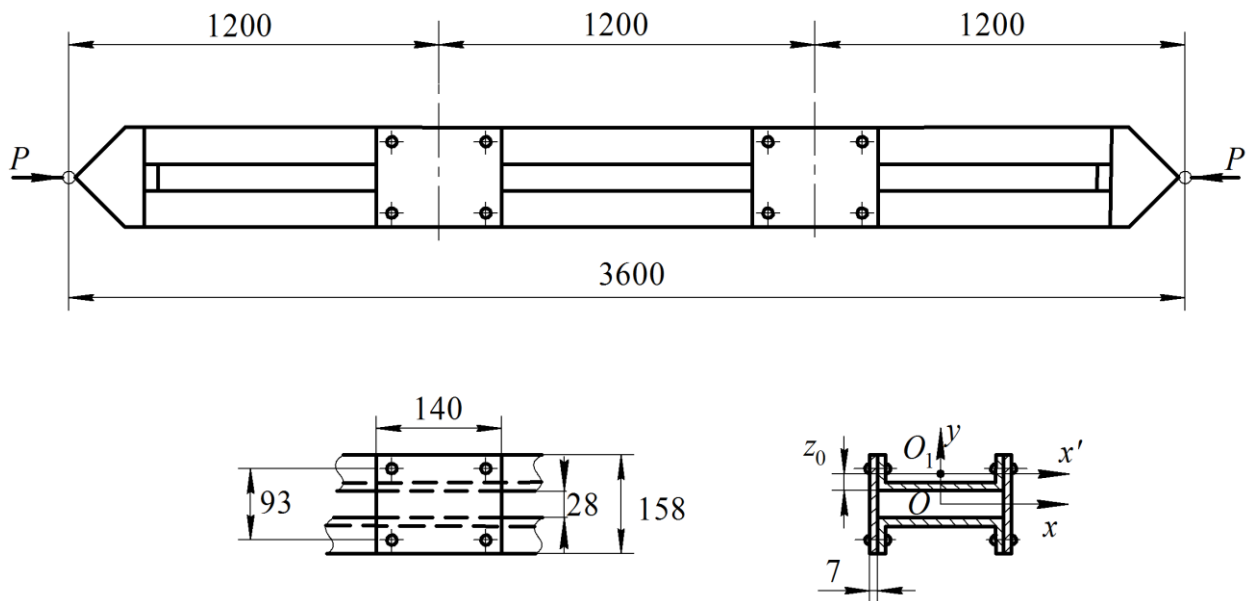


Рисунок 1.18 – Конструкция составного стержня

Площадь и моменты инерции всего сечения (в пролёте между планками):

$$A_0 = 2A' = 2 \cdot 2515 = 5030 \text{ мм}^2;$$

$$I_x = 2 \left[I_{x'} + A' \left(\frac{h_0}{2} + z_0 \right)^2 \right] = 2 \left[83,4 \cdot 10^4 + 2515 \left(\frac{28}{2} + 17,5 \right)^2 \right] = 666 \cdot 10^4 \text{ мм}^4;$$

$$I_y = 2I_{y'} = 2 \cdot 934,5 \cdot 10^4 = 1869 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Сравнение этих величин показывает, что потеря устойчивости будет происходить в плоскости решётки, так как $I_x < I_y$.

В случае весьма большой жёсткости на сдвиг критическая сила определится бы формулой (1.31):

$$P_{0\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 666 \cdot 10^4}{3600^2} = 1014 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Учитывая, что планки стоят в двух плоскостях, находим далее

$$A_1 = 2bt = 2 \cdot 140 \cdot 7 = 1960 \text{ мм}^2;$$

$$I_1 = 2 \frac{tb^3}{12} = 2 \frac{7 \cdot 140^3}{12} = 320 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Расстояние между осевыми линиями поясов

$$h = h_0 + 2z_0 = 28 + 2 \cdot 17,5 = 63 \text{ мм},$$

а $I_0 = I_{x'} = 83,4 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$. Кроме того, при $\mu = 0,3$ имеем

$$G_1 = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0,3)} = 7,69 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Согласно (1.42) вычисляем

$$c = \frac{1200^2}{24 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 83,4 \cdot 10^4} + \frac{1200 \cdot 63}{12 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 320 \cdot 10^4} + \frac{1200}{7,69 \cdot 10^4 \cdot 1960 \cdot 63} = \\ = (0,360 + 0,010 + 0,126) \cdot 10^{-6} = 0,496 \cdot 10^{-6} \text{ 1/Н.}$$

Величина ξ оказывается равной

$$\xi = cP_{0\text{кр}} = 0,496 \cdot 10^{-6} \cdot 1014 \cdot 10^3 = 0,503.$$

По формуле (1.33) устанавливаем действительное значение критической силы

$$P_{\text{кр}} = \frac{P_{0\text{кр}}}{1 + \xi} = \frac{1014 \cdot 10^3}{1 + 0,503} = 675 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Как видим, снижение критической силы из-за деформации решётки составляет 33%. Численные значения слагаемых в формуле для c позволяют понять сравнительную роль отдельных факторов. Наибольший вклад в ослабление стержня вносит изгиб поясов между планками; существенное значение имеет также деформация сдвига планок. Если длину пролёта между планками уменьшить вдвое, установив пять планок вместо двух, то получим $P_{\text{кр}} = 874 \cdot 10^3 \text{ Н}$, то есть снижение критической силы составит только 14%.

Отметим в заключение, что критическое напряжение

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{A_0} = \frac{675 \cdot 10^3}{5030} = 134 \text{ МПа}$$

находится ниже предела пропорциональности материала, так что никаких корректив в полученные результаты вносить не требуется.

1.6 УРАВНЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Круговое кольцо радиуса r равномерно сжато распределённой радиальной нагрузкой q (рисунок 1.19). При достаточно большой нагрузке оно может потерять устойчивость, в результате чего его форма перестанет быть круговой. Найдём величину критической нагрузки $q_{\text{кр}}$ и форму потери устойчивости.

В докритическом (начальном) состоянии в сечениях кольца возникает постоянная осевая сила N_0 , величина которой

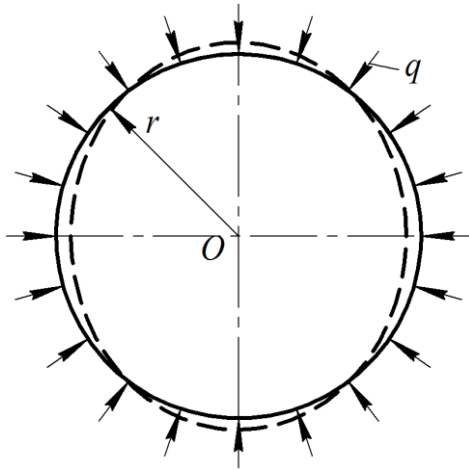


Рисунок 1.19 – Потеря устойчивости равномерно сжатого кольца

остаются при изгибе плоскими и нормальными к деформированной осевой линии.

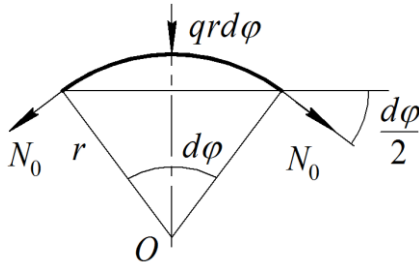


Рисунок 1.20 – Начальное напряжённое состояние

представим их в виде

$$\varepsilon = \varepsilon^u + \varepsilon^v; \quad \theta = \theta^u + \theta^v, \quad (1.44)$$

где ε^u и θ^u обусловлены перемещением u , а ε^v и θ^v – перемещением v .

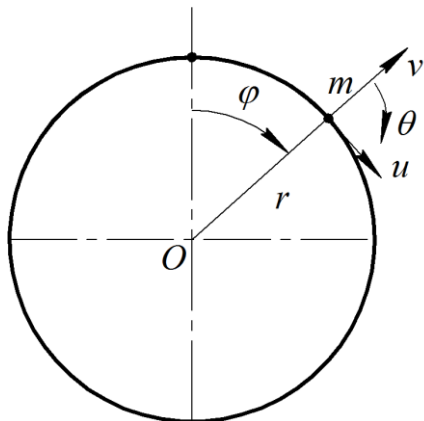


Рисунок 1.21 – Бифуркационные перемещения

Штрихом здесь и далее отмечается дифференцирование по координате φ .

$$N_0 = -rq, \quad (1.43)$$

определяется из условия равновесия показанного на рисунке 1.20 элемента.

Пусть, далее, точки осевой линии (окружности, проходящей через центры тяжести сечений) получают дополнительные бифуркационные перемещения $u(\varphi)$ и $v(\varphi)$. Их положительные направления указаны на рисунке 1.21, где также буквой θ обозначен угол поворота сечения; угол φ отсчитывается от некоторой произвольно выбранной точки. Будем предполагать, что сечения кольца

Вследствие изгиба кольца осевая сила получит приращение N^* и, кроме того, появятся изгибные силовые факторы – изгибающий момент M и перерезывающая сила Q . Чтобы связать их с бифуркационными перемещениями, найдём сначала деформацию осевой линии ε и угол поворота θ , для чего

Если точки осевой линии получают только окружные перемещения, то элемент дуги mn длиной $rd\varphi$ (рисунок 1.22) займёт после деформации положение $m'n'$. Деформация будет

$$\varepsilon^u = \frac{m'n' - mn}{mn} = \frac{rd\varphi + du - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{1}{r}u',$$

а угол поворота сечения –

$$\theta^u = \frac{1}{r}u.$$

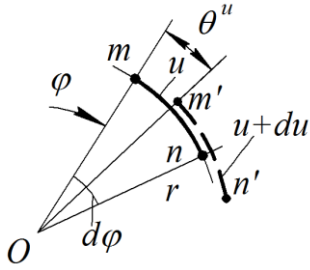


Рисунок 1.22 – Окружные перемещения точек осевой линии

Если же имеются только радиальные перемещения, то будет картина, показанная на рисунке 1.22. Деформация определится так:

$$\begin{aligned} \varepsilon^v &= \frac{m'n' - mn}{mn} \approx \frac{m'n'' - mn}{mn} = \\ &= \frac{(r+v)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{1}{r}v. \end{aligned}$$

Заменив приближённо дуги $m'n'$ и $m'n''$ прямыми отрезками, найдём и угол θ^v :

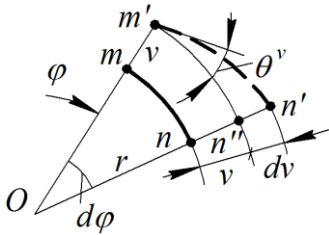


Рисунок 1.23 – Радиальные перемещения точек осевой линии

$$\theta^v = -\frac{n'n''}{m'n'} = -\frac{dv}{(1+\varepsilon)rd\varphi} \approx -\frac{1}{r}v'.$$

Знак минус поставлен здесь потому, что при положительной величине v' (когда перемещение v возрастает с ростом φ) поворот сечения происходит в отрицательном направлении.

Согласно (1.44) получаем искомые зависимости

$$\varepsilon = \frac{1}{r}(u' + v'); \quad (1.45)$$

$$\theta = \frac{1}{r}(u - v'). \quad (1.46)$$

Деформацию $\varepsilon^{(y)}$ произвольного кругового волокна, имеющего радиус $r + y$ (рисунок 1.24), можно найти по формуле (1.45), подставив в неё величины, относящиеся к данному волокну:

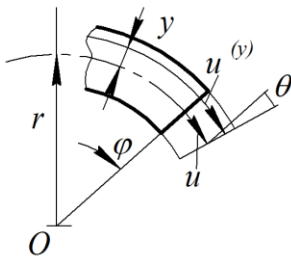


Рисунок 1.24 – Окружные перемещения в сечении кольца

$$\varepsilon^{(y)} = \frac{1}{r^{(y)}}(u^{(y)'} + v^{(y)}).$$

Для $r^{(y)}$ имеем

$$r^{(y)} = r + y = r\left(1 + \frac{y}{r}\right).$$

Ограничимся случаем тонкого кольца, для которого размеры поперечного сечения значительно меньше радиуса. Тогда можно величиной y/r пренебречь по сравнению с единицей и принять $r^{(y)} \approx r$.

Учитывая, что сечения сохраняют свою форму неизменной, будем иметь также

$$u^{(y)} = u + y\theta; \quad v^{(y)} = v.$$

Для $\varepsilon^{(y)}$ получаем тогда

$$\varepsilon^{(y)} = \frac{1}{r}(u' + y\theta' + v) = \varepsilon + y\chi. \quad (1.47)$$

Здесь обозначено

$$\chi = \frac{1}{r}\theta'. \quad (1.48)$$

Согласно (1.46) можно выражение для χ представить в виде

$$\chi = \frac{1}{r^2}(u' - v''). \quad (1.49)$$

При расчётах кольца на изгиб обычно используется допущение о том, что удлинение осевой линии $\varepsilon = 0$. На основании (1.45) это означает справедливость равенства

$$u' = -v. \quad (1.50)$$

Тогда величину χ можно выразить через одно только радиальное перемещение:

$$\chi = -\frac{1}{r^2}(v'' + v). \quad (1.51)$$

Исходя из (1.47) находим по закону Гука дополнительное нормальное напряжение в сечении кольца:

$$\sigma = E\varepsilon^{(y)} = E(\varepsilon + y\chi).$$

Интегрирование по площади сечения A даёт приращение N^* осевой силы и изгибающего момента M :

$$N^* = \int_A \sigma dA = \int_A E(\varepsilon + y\chi) dA;$$

$$M = \int_A \sigma y dA = \int_A E(\varepsilon + y\chi) z dA.$$

Обозначая через

$$I = \int_A y^2 dA$$

момент инерции сечения, получаем

$$N^* = EA\varepsilon, \quad (1.52)$$

$$M = EI\chi. \quad (1.53)$$

Отметим, что принятие условия $\varepsilon = 0$ не означает, что $N^* = 0$. Осевая сила может быть найдена из условия равновесия, а определение ε из (1.52) позволяет при желании сделать оценку того, в какой мере нарушается в действительности равенство (1.50).

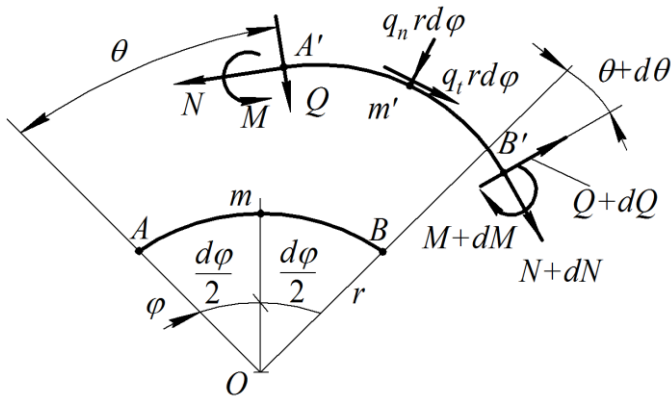


Рисунок 1.25 – Силы, действующие на деформированный элемент кольца

В зависимости от способа нагружения внешняя нагрузка q может при создании возмущения отклоняться от направления нормали к искривлённой осевой линии. Поэтому на рисунке показаны две составляющие нагрузки – нормальная q_n и касательная q_t .

Для удобства записи уравнений равновесия условно перенесём деформированный элемент в положение, в котором средняя точка m' совпадает с точкой m и совпадают касательные в этих точках к начальной и деформированной осевым линиям, как показано на рисунке (1.26).

Составим условие равновесия сил на направление хорды AB :

$$N + dN - N + (Q + dQ)\left(\frac{d\varphi}{2} + \frac{d\theta}{2}\right) + Q\left(\frac{d\varphi}{2} + \frac{d\theta}{2}\right) + q_t r d\varphi = 0.$$

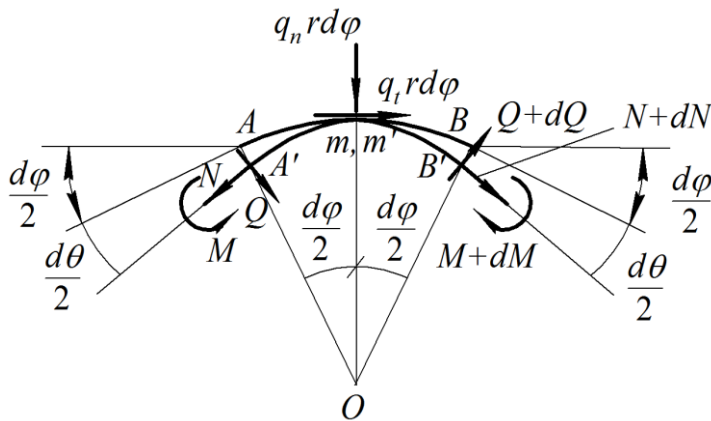


Рисунок 1.26 – К составлению уравнений равновесия

Отбросив бесконечно малую величину второго порядка с множителем dQ и приведя подобные члены, после деления на $d\varphi$ получим

$$N' + Q(1 + \theta') + r q_t = 0.$$

Осевая сила в возмущённом состоянии с учётом равенства (1.43) представляет собой сумму

$$N = N_0 + N^* = -r q + N^*, \quad (1.54)$$

так что $N' = N^*$. Бифуркационные перемещения можно трактовать как сколь угодно малые величины, поэтому $\theta' \ll 1$. Отбросив θ' , первому уравнению равновесия придадим вид

$$N^* + Q + rq_t = 0. \quad (1.55)$$

Далее запишем условие равновесия деформированного элемента на радиальное направление, перпендикулярное хорде:

$$-N\left(\frac{d\varphi}{2} + \frac{d\theta}{2}\right) - (N + dN)\left(\frac{d\varphi}{2} + \frac{d\theta}{2}\right) + Q + dQ - Q - q_n r d\varphi = 0.$$

Отбросив бесконечно малую величину с множителем dN и приведя подобные члены, после деления на $d\varphi$ получим

$$-N(1 + \theta') + Q' - rq_n = 0.$$

Угол отклонения вектора нагрузки от направления нормали к осевой линии является малой величиной, поскольку связан с бифуркационными перемещениями. Косинус этого угла можно принять равным единице; тогда $q_n \approx q$. Подставим также выражение (1.54) вместо N и раскроем скобки в левой части равенства:

$$-(-rq + N^*) - (-rq + N^*)\theta' + Q' - rq = 0.$$

Во втором слагаемом величину N^* в скобках можно опустить как малую по сравнению с rq . После приведения подобных членов приходим ко второму уравнению равновесия в следующем виде:

$$Q' - N^* + rq\theta' = 0. \quad (1.56)$$

Составим, наконец, условие равновесия моментов относительно точки m' . С точностью до малых высших порядков имеем

$$M + dM - M - (Q + dQ)\frac{rd\varphi}{2} - Q\frac{rd\varphi}{2} = 0.$$

Отбросив бесконечно малую второго порядка, после приведения подобных членов приходим к соотношению

$$Q = \frac{1}{r}M'. \quad (1.57)$$

Подставив последнее равенство в (1.56), получим

$$\frac{1}{r}M'' - N^* + rq\theta' = 0.$$

Отсюда находим

$$N^* = \frac{1}{r}M'' + rq\theta'.$$

С учётом этого соотношения и формулы (1.57) приходим согласно (1.55) к дифференциальному уравнению устойчивости

$$M''' + M' + r^2q\theta'' + r^2q_t = 0. \quad (1.58)$$

1.7 РАСЧЁТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Величина критической нагрузки зависит от способа её приложения. Для практики наиболее важен случай гидростатического нагружения, когда нагрузка всё время остаётся нормальной к деформированной осевой линии. В этом случае $q_t = 0$, и уравнение устойчивости принимает вид

$$M''' + M' + r^2 q \theta'' = 0. \quad (1.59)$$

Воспользуемся соотношениями (1.48) и (1.53). Тогда

$$M = \frac{EI}{r} \theta' \quad (1.60)$$

и мы приходим к уравнению относительно θ :

$$\frac{EI}{r} (\theta^{IV} + \theta'') + r^2 q \theta'' = 0. \quad (1.61)$$

Периодическое решение уравнения (1.61) будем искать в виде

$$\theta = C \sin n\varphi, \quad (1.62)$$

где C – постоянная; n – целое число. Подстановка в (1.61) даёт

$$C \left[\frac{EI}{r} (n^4 - n^2) - r^2 q n^2 \right] \sin n\varphi = 0.$$

Это равенство должно выполняться для любого угла φ . Так как $C \neq 0$, должно равняться нулю выражение в квадратных скобках. Учитывая, что $n \neq 0$, находим отсюда

$$q = (n^2 - 1) \frac{EI}{r^3}.$$

Данное соотношение определяет множество значений нагрузки, при которых возможно равновесие в отклонённом состоянии. Наименьшая величина q есть критическая нагрузка $q_{кр}$. Она получится при $n = 2$ (случай $n = 1$ соответствует жёсткому перемещению кольца в своей плоскости и не представляет интереса):

$$q_{кр} = \frac{3EI}{r^3} \quad (1.63)$$

Для установления формы потери устойчивости обратимся к соотношению (1.46). Если учесть также зависимость (1.50), получим уравнение относительно u :

$$u'' + u = r\theta.$$

Согласно (1.61) имеем

$$u'' + u = Cr \sin n\varphi. \quad (1.64)$$

Интересующее нас частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$u(\varphi) = C_1 \sin n\varphi. \quad (1.65)$$

Подстановка в (1.64) приводит к равенству

$$C_1(-n^2 + 1) \sin n\varphi = Cr \sin n\varphi,$$

из которого следует соотношение

$$C_1 = -\frac{r}{n^2 - 1} C.$$

Таким образом, устанавливаем зависимость

$$u(\varphi) = -\frac{r}{n^2 - 1} C \sin n\varphi. \quad (1.66)$$

Перемещение v получим, дифференцируя данное выражение в соответствии с (1.50):

$$v(\varphi) = -u'(\varphi) = \frac{nr}{n^2 - 1} C \cos n\varphi. \quad (1.67)$$

При потере устойчивости, когда $n = 2$, перемещения выражаются равенствами

$$u = -\frac{1}{3} Cr \sin 2\varphi; \quad v = \frac{2}{3} Cr \cos 2\varphi. \quad (1.68)$$

Таким образом, потеря устойчивости кольца происходит с образованием двух волн. Форма потери устойчивости отмечена на рисунке 1.19 штриховой линией.

Помимо гидростатического возможны и другие способы нагружения. Рассмотрим, в частности, случай «мёртвой» нагрузки, когда направление нагрузки сохраняется при отклонениях от исходного состояния неизменным, как показано на рисунке 1.27. В этом случае $q_t = q\theta$, и уравнение (1.58) будет выглядеть так:

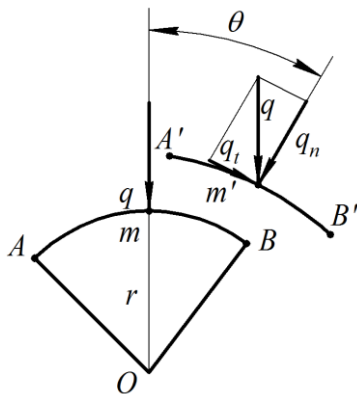


Рисунок 1.27 – Случай «мёртвой» нагрузки

$$M''' + M' + r^2 q(\theta'' + \theta) = 0.$$

Пользуясь снова равенством (1.59), перепишем уравнение устойчивости в виде

$$\frac{EI}{r}(\theta^{IV} + \theta'') + r^2 q(\theta'' + \theta) = 0.$$

Задавшись его решением в прежней форме (1.62), придём к равенству

$$C \left[\frac{EI}{r} (n^4 - n^2) + r^2 q (-n^2 + 1) \right] \sin n\varphi = 0.$$

Отсюда при $n \neq 1$ следует соотношение

$$q = n^2 \frac{EI}{r^3}.$$

Как и в предыдущем случае, критическое значение нагрузки получается при $n = 2$, но теперь

$$q_{кр} = \frac{4EI}{r^3}. \quad (1.69)$$

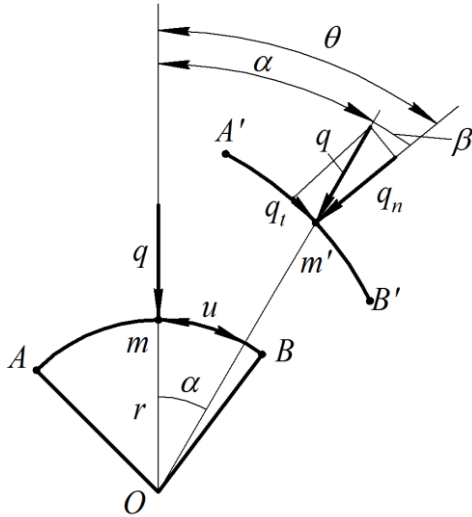


Рисунок 1.28 – Случай нагрузки, сохраняющей направление к центру кольца

Остановимся ещё на случае, когда вектор q всегда направлен к центру кольца (рисунок 1.28). Касательная составляющая нагрузки в деформированном состоянии

$$q_t = q\beta,$$

где

$$\beta = \theta - \alpha; \quad \alpha = \frac{u}{r}.$$

Принимая во внимание формулу (1.46), получим

$$\beta = \frac{1}{r}(u - v') - \frac{1}{r}u = -\frac{1}{r}v',$$

так что

$$q_t = -\frac{1}{r}qv'.$$

В этом случае согласно (1.58) приходим к равенству

$$M''' + M' + r^2q \left(\theta'' - \frac{1}{r}v' \right) = 0. \quad (1.70)$$

Для получения разрешающего уравнения выразим все слагаемые через v . На основании (1.46) и (1.50) можно записать

$$\theta'' = \frac{1}{r}(u'' - v''') = -\frac{1}{r}(v' + v'''), \quad (1.71)$$

а в соответствии с (1.51) и (1.53) имеем

$$M = -\frac{EI}{r^2}(v'' + v). \quad (1.72)$$

С учётом этого равенство (1.70) примет вид

$$-\frac{EI}{r^2}(v^{IV} + 2v''' + v') - rq(v''' + 2v') = 0.$$

Задаваясь нетривиальным решением уравнения в форме

$$v = C \cos n\varphi,$$

получим

$$C \left[\frac{EI}{r^2} n(n^2 - 1)^2 - rqn(n^2 - 2) \right] \sin n\varphi = 0.$$

Отсюда вытекает зависимость

$$q = \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 - 2} \frac{EI}{r^3}.$$

При $n = 2$ находим

$$q_{кр} = \frac{9 EI}{2 r^3}. \quad (1.73)$$

Как видим, критическая нагрузка существенно различна в рассмотренных случаях. Форма же потери устойчивости во всех трёх случаях одинакова.

1.8 УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВОЙ АРКИ

Пусть круговая арка радиуса r с углом раствора 2α , шарнирно закреплённая по концам (рисунок 1.29), испытывает действие равномерной радиальной нагрузки q , которую будем считать гидростатической. Основные соотношения, выведенные для кругового кольца, остаются справедливыми и в данном случае. В частности, уравнение устойчивости имеет вид (1.59):

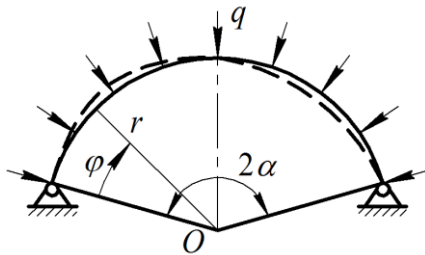


Рисунок 1.29 – Круговая арка

Уравнение устойчивости имеет вид (1.59):

$$M''' + M' + r^2 q \theta'' = 0.$$

$$M''' + M' + r^2 q \theta'' = 0.$$

Воспользовавшись соотношениями (1.71) и (1.72), перепишем его следующим образом:

$$\frac{EI}{r^2} (v^v + 2v''' + v') + rq(v''' + v') = 0. \quad (1.74)$$

Решение данного уравнения должно быть подчинено граничным условиям. Шарнирное закрепление концов означает, что на каждом из них должны равняться нулю перемещения u и v , а также изгибающий момент M . Так как согласно (1.72)

$$M = -\frac{EI}{r^2} (v'' + v),$$

граничные условия могут быть представлены шестью равенствами

$$\begin{aligned} u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad v''(0) = 0; \\ u(2\alpha) = 0; \quad v(2\alpha) = 0; \quad v''(2\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Будем искать функцию $v(\varphi)$ в виде

$$v(\varphi) = C \sin k\varphi. \quad (1.75)$$

Поскольку

$$v''(\varphi) = -Ck^2 \sin k\varphi,$$

условия $v(0) = 0$ и $v''(0) = 0$ будут удовлетворены автоматически. Условия на другом конце арки $v(2\alpha) = 0$ и $v''(2\alpha) = 0$ также будут удовлетворяться, если $\sin 2k\alpha = 0$. Для выполнения этого равенства следует положить $2k\alpha = n\pi$, то есть взять

$$k = \frac{n\pi}{2\alpha}, \quad (1.76)$$

где n – целое число.

Чтобы удовлетворить двум оставшимся условиям, найдём перемещение $u(\varphi)$, воспользовавшись зависимостью (1.50):

$$u' = -v = -C \sin k\varphi.$$

Интегрирование даёт

$$u(\varphi) = \frac{C}{k} \cos k\varphi + C_0,$$

где C_0 – постоянная интегрирования.

Полагая $\varphi = 0$, запишем

$$u(0) = \frac{C}{k} + C_0 = 0,$$

откуда находим $C_0 = -C/k$. Следовательно, для $u(\varphi)$ получаем выражение

$$u(\varphi) = \frac{C}{k} (1 - \cos k\varphi). \quad (1.77)$$

Последнее условие $u(2\alpha) = 0$ требует выполнения равенства $1 - \cos 2k\alpha = 0$ или, учитывая (1.76), равенства $\cos n\pi = 1$. Это будет обеспечено, если n – чётное число: $n = 2, 4, \dots$

Итак, при задании функции $v(\varphi)$ в виде (1.75) можно удовлетворить всем граничным условиям, если величина k определяется выражением (1.76), в котором n – чётное число. Подстановка $v(\varphi)$ в уравнение устойчивости даёт

$$C \left[\frac{EI}{r^2} (k^5 - 2k^3 + k) + rq(-k^3 + k) \right] \sin k\varphi = 0.$$

Отсюда выводим

$$q = (k^2 - 1) \frac{EI}{r^3} = \left(\frac{n^2 \pi^2}{4\alpha^2} - 1 \right) \frac{EI}{r^3}.$$

Критическую нагрузку получим, положив здесь $n = 2$:

$$q_{кр} = \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{EI}{r^3}. \quad (1.78)$$

При выпучивании арки образуются две полуволны, как отмечено на рисунке 1.29 штриховой линией. Если в (1.78) положить $\alpha = \pi/2$, то получим результат, совпадающий с критической нагрузкой для кругового кольца (1.63). Этого и следовало ожидать, так как дуга в виде полуокружности есть расстояние между точками перегиба упругой линии кольца, в которых изгибающий момент равен нулю.

2 УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

2.1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Характерной особенностью работы стержня при кручении является деформация его сечений, возникающая вследствие осевых перемещений точек стержня. Если величина деформации одинакова для всех сечений, то в них возникают только касательные напряжения; такое кручение называется свободным или чистым.

Если деформация невозможна в каком-либо сечении или её величина изменяется по длине, кручение называется стеснённым. В этом случае возникают также нормальные и связанные с ними дополнительные касательные напряжения. В реальных условиях свободное кручение в чистом виде встречается редко, но если стержень имеет сплошное или толстостенное сечение, то эффект стеснения можно игнорировать. В случае же тонкостенных стержней с открытым сечением учёт стеснения может привести к совершенно иным результатам по сравнению с теми, которые даёт классическая теория Сен – Венана свободного кручения.

Отнесём стержень к системе координат x, y, z , совместив ось x с прямой, проходящей через центры тяжести поперечных сечений, а оси y, z – с главными центральными осями инерции поперечного сечения (рисунок 2.1)

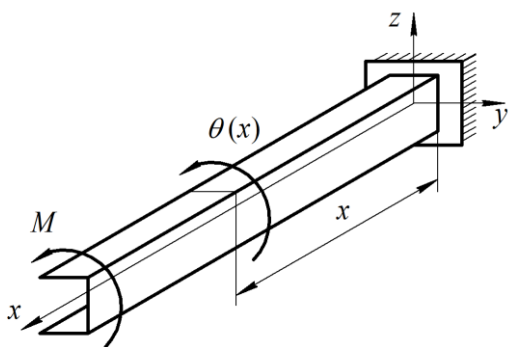


Рисунок 2.1 – Кручение тонкостенного стержня

Деформация сечения характеризуется осевым перемещением u , которое пропорционально относительному или погонному углу закручивания:

$$u = -\alpha\omega(s). \quad (2.1)$$

Здесь α – угол закручивания стержня, рассчитываемый на единицу его длины, то есть

$$\alpha = \frac{d\theta}{dx} = \theta',$$

где штрих означает дифференцирование по x . Через ω в формуле (2.1) обозначена так называемая секториальная площадь, под которой понимается удвоенная площадь, образуемая при перемещении радиуса-вектора, начало которого совпадает с некоторым полюсом K , а конец скользит вдоль средней линии профиля (рисунок 2.2). Величина ω является функцией дуговой координаты s , отсчитываемой от некоторой начальной точки O . При записи ра-

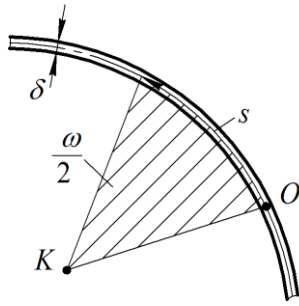


Рисунок 2.2– Секториальная площадь

венства (2.1) принято, что вектор положительного угла вращения радиуса-вектора, направлен в положительную сторону оси x .

Если относительный угол закручивания α , а вместе с ним и перемещение u изменяются вдоль оси стержня, то возникает деформация продольных волокон и, следовательно, появляются нормальные напряжения

$$\sigma_{\omega} = E \frac{\partial u}{\partial x} = -E\theta''\omega. \quad (2.2)$$

Напряжения σ_{ω} являются самоуравновешенными, поскольку осевая сила и моменты относительно осей y, z при кручении отсутствуют:

$$N = \int_F \sigma_{\omega} dF = 0; \quad M_y = \int_F \sigma_{\omega} z dF = 0; \quad M_z = \int_F \sigma_{\omega} y dF = 0,$$

где F – площадь сечения.

Если подставить сюда соотношение (2.2), то после сокращения на $E\theta''$ получим три равенства:

$$\int_F \omega dF = 0; \quad \int_F \omega z dF = 0; \quad \int_F \omega y dF = 0. \quad (2.3)$$

Секториальная площадь ω , удовлетворяющая этим равенствам, называется главной секториальной площадью. Данные равенства определяют положение начальной точки O , а также положение центра кручения, который, как можно показать, совпадает с центром изгиба сечения.

Умножим равенство (2.2) на ω и проинтегрируем по площади сечения:

$$\int_F \sigma_{\omega} \omega dF = -E\theta'' \int_F \omega^2 dF.$$

Отсюда получаем соотношение

$$E\theta'' = -\frac{B}{I_{\omega}}, \quad (2.4)$$

где

$$I_{\omega} = \int_F \omega^2 dF - \quad (2.5)$$

секториальный момент инерции сечения, а через

$$B = \int_F \sigma_{\omega} \omega dF \quad (2.6)$$

обозначена величина, называемая бимоментом. Она имеет размерность $\text{Н}\cdot\text{м}^2$ и представляет собой внутренний силовой фактор, определяющий уровень

напряжений σ_ω . Подставив равенство (2.4) в (2.2), получим формулу для вычисления σ_ω :

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega} \omega. \quad (2.7)$$

Так как напряжения σ_ω образуют в сечении самоуравновешенную систему сил, бимомент не может быть найден из условия равновесия отсечённой части стержня подобно тому, как это делается при вычислении осевой силы или изгибающего момента. Его величина выражается через угол закручивания по формуле

$$B = -EI_\omega \theta'', \quad (2.8)$$

вытекающей из соотношения (2.4).

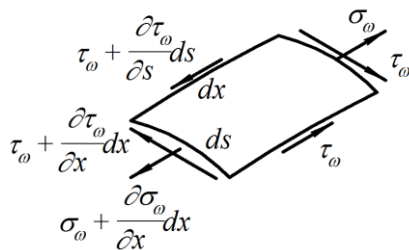


Рисунок 2.3– Равновесие бесконечно малого элемента стенки

Касательные напряжения стеснённого кручения можно найти из уравнения равновесия (рисунок 2.3):

$$\frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} + \frac{\partial \tau_\omega}{\partial s} = 0.$$

Напряжения τ_ω постоянны по толщине стенки в отличие от касательных напряжений свободного кручения τ_θ , которые в случае тонкостенного сечения с открытым контуром изменяются по толщине по линейному закону. Обозначим через $T = \delta \tau_\omega$, где δ – толщина стенки, погонную касательную силу. Тогда из уравнения равновесия следует равенство

$$\frac{\partial T}{\partial s} = -\delta \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x},$$

откуда

$$T = -\int_0^s \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \delta ds + C.$$

Постоянную интегрирования C найдём из условия равенства нулю касательного напряжения на краю сечения:

$$-\int_0^{s_0} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \delta ds + C = 0,$$

где s_0 – дуговая координата крайней точки A профиля, отсчитываемая от точки O (рисунок 2.4). Отсюда

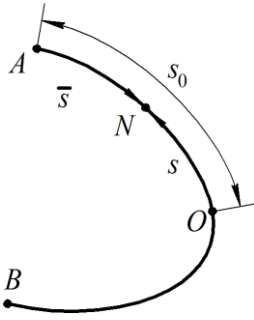


Рисунок 2.4– Дуговые координаты s и \bar{s}

$$C = \int_0^{s_0} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \delta ds,$$

и мы получаем

$$\begin{aligned} T &= -\int_0^s \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \delta ds + \int_0^{s_0} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \delta ds = \\ &= -\int_0^s \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \delta ds - \int_{s_0}^0 \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \delta ds = -\int_{s_0}^s \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \delta ds. \end{aligned}$$

Если обозначить через $\bar{s} = s_0 - s$ расстояние текущей точки N от края сечения, то выражение для T можно записать в виде

$$T = \int_0^{\bar{s}} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} \delta d\bar{s} = \int_0^{\bar{s}} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} dF,$$

где $dF = \delta d\bar{s}$ – площадь элемента сечения стенки. С учётом выражения (2.2) будем иметь зависимость

$$T = -E\theta''' \int_0^{\bar{s}} \omega dF.$$

Обозначив через

$$\bar{S}_\omega = \int_0^{\bar{s}} \omega dF \quad (2.9)$$

секторальный статический момент части площади сечения с дугой \bar{s} , получим окончательно

$$T = -E\theta''' \bar{S}_\omega. \quad (2.10)$$

Найдём момент M_ω , создаваемый в сечении стержня касательными усилиями стеснённого кручения относительно полюса K . Для принятых положительных направлений x и s положительная сила T в сечении, нормаль к которому направлена в сторону оси x , действует в сторону возрастания координаты s или, что то же, против возрастания координаты \bar{s} (см. рисунок 2.4). Примем, что положительный крутящий момент в том же сечении имеет вектор, направленный в положительную сторону оси x . Как видно из рисунка 2.5, момент элементарной силы $Td\bar{s}$ равен $T\rho d\bar{s}$. Но $\rho d\bar{s} = -\rho ds = -d\omega$, где $d\omega$ – элементарная секториальная площадь. Поэтому

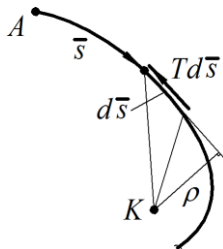


Рисунок 2.5 – К вычислению момента касательных сил

Поэтому

$$M_{\omega} = -\int_F T d\omega = E\theta''' \int_F \bar{S}_{\omega} d\omega. \quad (2.11)$$

Преобразуем данное выражение с помощью интегрирования по частям. Если L – длина контура поперечного сечения, то можно записать

$$\int_F \bar{S}_{\omega} d\omega = [\bar{S}_{\omega}\omega]_0^L - \int_F \omega d\bar{S}_{\omega}, \quad (2.12)$$

где выражение $[\dots]_0^L$ означает разность значений стоящей в скобках величины при $\bar{s} = L$ и $\bar{s} = 0$. Согласно (2.9) и первому из соотношений (2.3) величина \bar{S}_{ω} равна нулю не только при $\bar{s} = 0$, но и при $\bar{s} = L$, так что внеинтегральный член в (2.12) обращается в ноль. Так как $d\bar{S}_{\omega} = \omega dF$, мы приходим к равенству

$$\int_F \bar{S}_{\omega} d\omega = -\int_F \omega^2 dF = -I_{\omega}. \quad (2.13)$$

Выражение (2.11) для M_{ω} приводится теперь к виду

$$M_{\omega} = -EI_{\omega}\theta'''. \quad (2.14)$$

Далее, момент M_{θ} , создаваемый касательными напряжениями свободного кручения, равен

$$M_{\theta} = GI_{\kappa}\alpha = GI_{\kappa}\theta', \quad (2.15)$$

где GI_{κ} – жёсткость стержня на кручение; I_{κ} – геометрическая характеристика жёсткости (константа Сен-Венана); G – модуль сдвига материала. Для тонкостенного сечения открытого профиля, составленного из нескольких участков, можно принимать

$$I_{\kappa} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i \delta_i^3, \quad (2.16)$$

где n – число участков; b_i , δ_i – длина и толщина i -го участка.

Крутящий момент M_{κ} должен равняться сумме

$$M_{\kappa} = M_{\omega} + M_{\theta}, \quad (2.17)$$

откуда вытекает равенство

$$-EI_{\omega}\theta''' + GI_{\kappa}\theta' = M_{\kappa}. \quad (2.18)$$

Равенство (2.18) есть дифференциальное уравнение стеснённого кручения для стержня открытого профиля. Если продифференцировать его по x , получим

$$-EI_{\omega}\theta^{IV} + GI_{\kappa}\theta'' = \frac{dM_{\kappa}}{dx}. \quad (2.19)$$

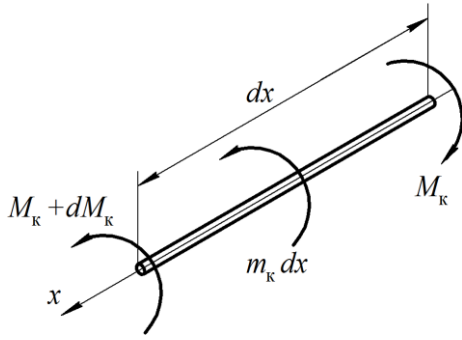


Рисунок 2.6 – Распределённый скручивающий момент

Производная $\frac{dM_k}{dx}$ отлична от нуля, когда имеется распределённый по длине стержня скручивающий момент m_k (рисунок 2.6). Считая, что вектор m_k направлен в положительную сторону оси x , из условия равновесия элемента стержня будем иметь

$$m_k = -\frac{dM_k}{dx}. \quad (2.20)$$

С учётом этого равенства и соотношения (2.8) уравнение (2.19) приводится к уравнению второго порядка для бимомента

$$\frac{d^2 B}{dx^2} - \frac{GI_k}{EI_\omega} B = -m_k. \quad (2.21)$$

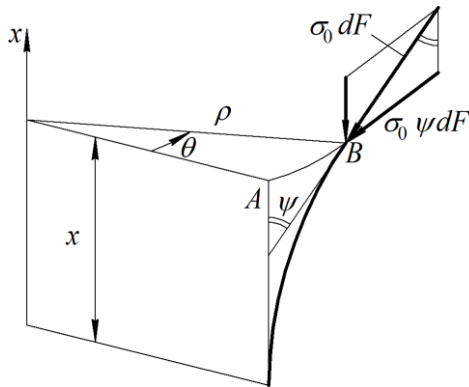
2.2. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ, ИМЕЮЩЕГО СЕЧЕНИЕ С ДВУМЯ ОСЯМИ СИММЕТРИИ, ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ СЖАТИИ

Пусть стержень длиной l , сечение которого имеет две оси симметрии, испытывает осевое сжатие силой P , проходящей через центр тяжести сечения. Предположим, что при критической нагрузке наряду с первоначальной формой равновесия становится возможной другая, искривлённая форма равновесия, причём искривление получают все продольные волокна, кроме центрального. Иными словами, имеется в виду чисто крутильная форма потери устойчивости, без изгиба осевой линии стержня.

Для нахождения критической нагрузки рассмотрим равновесие стержня в деформированном состоянии. Обозначим через $\sigma_0 = P/F$ начальные напряжения исходного состояния и выделим некоторое волокно стержня, параллельное до деформации оси x ; и находящееся на расстоянии ρ от неё. В поперечном сечении этому волокну отвечает элемент площади dF . После закручивания стержня волокно примет вид кривой линии, расположенной на круговом цилиндре радиуса ρ (рисунок 2.7).

Обозначим через ψ малый угол между касательной, проведённой к искривлённому волокну в точке на расстоянии x от нижнего конца, и вертикалью. Этот угол будет, вообще говоря, переменным по длине стержня. Передаваемая волокну нормальная сила $\sigma_0 dF$ окажется после искривления волокна наклонённой к вертикали под тем же углом ψ . Горизонтальная проекция силы, равная $\sigma_0 \psi dF$, имеет относительно оси момент величиной

$-\sigma_0 \psi \rho dF$. Интегрирование позволяет далее найти момент M_0 , создаваемый в данном сечении нормальными напряжениями:



$$M_0 = -\int_F \sigma_0 \psi \rho dF = -\sigma_0 \int_F \psi \rho dF. \quad (2.22)$$

Угол ψ можно выразить через θ . Длина дуги AB (см. рисунок 2.7) равна $\rho\theta$. С другой стороны можно представить её как интеграл $\int_0^x \psi dx$. Следовательно, справедли-

Рисунок 2.7 – Волокно стержня в искривлённом состоянии

$$\rho\theta = \int_0^x \psi dx,$$

откуда имеем искомое соотношение

$$\psi = \rho\theta'. \quad (2.23)$$

Таким образом, для M_0 будем иметь

$$M_0 = -\sigma_0 \theta' \int_F \rho^2 dF = -\sigma_0 I_p \theta', \quad (2.24)$$

где

$$I_p = \int_F \rho^2 dF - \quad (2.25)$$

полярный момент инерции сечения.

Суммируя теперь M_ω , M_θ и M_0 , получим крутящий момент M_κ в сечении. Поскольку единственной внешней нагрузкой является осевая сила, величина M_κ должна равняться нулю. Отсюда получаем равенство

$$-EI_\omega \theta''' + GI_\kappa \theta' - \sigma_0 I_p \theta' = 0.$$

Продифференцировав данное равенство по x , придём к дифференциальному уравнению четвёртого порядка

$$\theta^{IV} + \frac{1}{EI_\omega} (\sigma_0 I_p - GI_\kappa) \theta'' = 0. \quad (2.26)$$

Если воспользоваться соотношением (2.8), можно получить уравнение второго порядка относительно бимомента:

$$\frac{d^2 B}{dx^2} + \left(\frac{\sigma_0 I_p}{EI_\omega} - \frac{GI_\kappa}{EI_\omega} \right) B = 0. \quad (2.27)$$

Примем, что концевые сечения свободны от нормальных напряжений стеснённого кручения, то есть что депланация этих сечений осуществляется

свободно. Исходя из (2.17), мы можем сформулировать граничные условия задачи следующим образом:

$$B = 0 \quad \text{при } x = 0, x = l. \quad (2.28)$$

Полагая

$$\frac{\sigma_0 I_p}{EI_\omega} - \frac{GI_\kappa}{EI_\omega} = k^2, \quad (2.29)$$

получим решение уравнения (2.27) в виде

$$B = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \quad (2.30)$$

Из граничных условий находим $C_2 = 0$. При $C_1 \neq 0$ будет

$$kl = n\pi; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.31)$$

Принимая $n = 1$, определяем по (2.29) наименьшее – критическое – значение σ_0 , которое будем обозначать σ_θ :

$$\sigma_\theta = \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2 I_p} + \frac{GI_\kappa}{I_p}. \quad (2.32)$$

Эта формула справедлива, очевидно, лишь в пределах упругости. Если сечение состоит из относительно тонких стенок, то вторым членом в (2.32) можно пренебречь по сравнению с первым, отвечающим напряжению стеснённого кручения. Тогда получим формулу

$$\sigma_\theta = \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2 I_p}, \quad (2.33)$$

по структуре аналогичную формуле Эйлера.

Для тех случаев, когда граничные условия (2.28) не выполняются, удобнее пользоваться дифференциальным уравнением в форме (2.26); с учётом обозначения (2.29) запишем его в виде.

$$\theta^{IV} + k^2 \theta'' = 0. \quad (2.34)$$

Пусть, например, задано, что торцевые сечения не поворачиваются и остаются плоскими. Исходя из (2.1) получаем граничные условия

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = l; \\ \frac{d\theta}{dx} &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = l. \end{aligned} \quad (2.35)$$

По аналогии с задачей об устойчивости стержня сплошного сечения с защемлёнными концами находим

$$\sigma_\theta = \frac{\pi^2 EI_\omega}{(vl)^2 I_p} + \frac{GI_\kappa}{I_p}, \quad (2.36)$$

где коэффициент приведения длины $\nu = 0,5$. При одном полностью закреплённом конце, а другом свободном, будет $\nu = 2$; при одном полностью закреплённом конце, а другом – закреплённом только в отношении поворота, $\nu = 0,7$.

Величину σ_θ следует сопоставить с критическими напряжениями, определяемыми по формуле Эйлера для изгибной потери устойчивости в плоскостях, содержащих главные оси инерции сечения z и y :

$$\sigma_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2 F}; \quad \sigma_z = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2 F}. \quad (2.37)$$

Расчёт стержня надо вести по тому из значений критического напряжения σ_θ , σ_y или σ_z , которое окажется наименьшим. Для двутавровых балок величина σ_θ , как правило, оказывается более высокой, чем σ_y или σ_z , так что проверка крутильной устойчивости оказывается излишней. Но для стержней крестообразных сечений, когда $I_\omega = 0$, значение σ_θ может быть меньше, чем σ_y и σ_z .

2.3. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ, ИМЕЮЩЕГО СЕЧЕНИЕ С ОДНОЙ ОСЬЮ СИММЕТРИИ

Пусть поперечное сечение тонкостенного стержня имеет только одну ось симметрии; совместим с ней ось y (рисунок 2.8). Для такого сечения

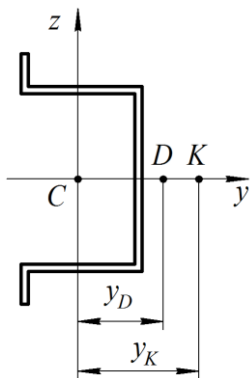


Рисунок 2.8 – Сечение с одной осью симметрии

можно отметить три характерные точки: центр тяжести C , центр изгиба D и центр вращения K , относительно которого поворачивается сечение при потере устойчивости. Заранее указать положение точки K нельзя, можно лишь утверждать, что она находится на оси симметрии.

Для вывода дифференциального уравнения достаточно повторить те же рассуждения, которые приведены выше для сечения с двумя осями симметрии. Отличие заключается в том, что секториальный момент инерции I_ω и полярный момент инерции I_p должны вычисляться теперь относительно полюса K , который не совпадает ни с центром изгиба ни с центром тяжести сечения. Связанные с данным полюсом геометрические характеристики будем отмечать чёрточкой сверху ($\bar{\omega}$, $\bar{\rho}$, \bar{I}_ω , \bar{I}_p). Обозначения I_ω и I_p без чёрточек будут в дальнейшем применяться для мо-

ментов инерции, отнесённых к *центру тяжести* сечения (а не к центру изгиба, как в случае простого кручения). С учётом сказанного вместо (2.26) и (2.27) будем иметь уравнения

$$\theta^{IV} + \frac{1}{EI_{\omega}} (\sigma_0 \bar{I}_p - GI_{\kappa}) \theta'' = 0; \quad (2.38)$$

$$\frac{d^2 B}{dx^2} + \left(\frac{\sigma_0 \bar{I}_p}{EI_{\omega}} - \frac{GI_{\kappa}}{EI_{\omega}} \right) B = 0. \quad (2.39)$$

Пусть торцевые сечения свободно деформируются. Тогда удобнее обратиться к уравнению (2.39), интегрирование которого приводит к выражению типа (2.36)

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\omega}}{l^2 \bar{I}_p} + \frac{GI_{\kappa}}{\bar{I}_p}. \quad (2.40)$$

Воспользоваться непосредственно формулой (2.40) для вычисления критического напряжения нельзя, поскольку неизвестно положение полюса K . Для его нахождения примем, что положение центра вращения на оси y должно быть таким, при котором величина $\sigma_{\text{кр}}$ окажется наименьшей.

Чтобы представить $\sigma_{\text{кр}}$ в виде функции, зависящей от координаты центра вращения y_K , установим связь между секториальной площадью относительно центра вращения и секториальной площадью относительно центра тяжести. Если начало координат совместить с центром вращения K , будем иметь

$$\bar{\omega} = \int_0^s \bar{\rho} ds.$$

Как видно из рисунка 2.9, a , $\bar{\rho} = \bar{y} \cos \vartheta + \bar{z} \sin \vartheta$, где \bar{y} , \bar{z} – координаты

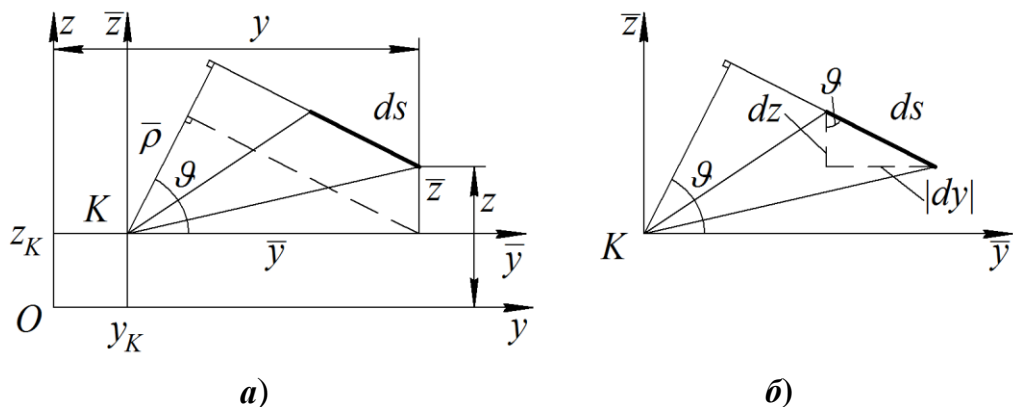


Рисунок 2.9 – К вычислению секториальной площади через координаты точек контура

ты текущей точки контура, \mathcal{G} – угол между перпендикуляром, опущенным из точки K на касательную к контуру, и осью y . Кроме того (рисунок 2.9,б),

$$ds \cos \mathcal{G} = dz; \quad ds \sin \mathcal{G} = -dy,$$

где знак минус связан с тем, что ds и dy имеют противоположные знаки, когда $\sin \mathcal{G} > 0$.

С учётом данных соотношений выразим секториальную площадь через координаты точек контура:

$$\bar{\omega} = \int_0^s (-\bar{z}dy + \bar{y}dz).$$

В общем случае, когда полюс K не совпадает с началом координат, а имеет координаты y_K и z_K , в полученном выражении нужно положить $\bar{y} = y - y_K$ и $\bar{z} = z - z_K$:

$$\bar{\omega} = \int_0^s [-(z - z_K)dy + (y - y_K)dz].$$

Отсюда

$$\bar{\omega} = \int_0^s (-zdy + ydz) + z_K \int_0^s dy - y_K \int_0^s dz.$$

Первое слагаемое представляет собой секториальную площадь с полюсом в начале координат, и мы приходим к искомому выражению

$$\bar{\omega} = \omega + z_K(y - y_0) - y_K(z - z_0), \quad (2.41)$$

где через y_0 и z_0 обозначены координаты начальной точки O .

Возвращаясь к случаю сечения с одной осью симметрии, положим $z_K = 0$; $z_0 = 0$. Тогда из формулы (2.41) будем иметь

$$\bar{\omega} = \omega - y_K z. \quad (2.42)$$

Подставим далее данное выражение в формулу для \bar{I}_ω :

$$\bar{I}_\omega = \int_F \bar{\omega}^2 dF = \int_F \omega^2 dF - 2y_K \int_F \omega z dF + y_K^2 \int_F z^2 dF. \quad (2.43)$$

Первый интеграл равен секториальному моменту инерции I_ω , вычисленному относительно центра тяжести. Для второго интеграла введём обозначение

$$R_y = \int_F \omega z dF; \quad (2.44)$$

его можно назвать секториальным центробежным моментом инерции. Наконец, последний интеграл представляет собой момент инерции I_y . Вместо (2.43) находим

$$\bar{I}_\omega = I_\omega - 2y_K R_y + y_K^2 I_y. \quad (2.45)$$

Заметим, что при закручивании стержня вокруг продольной оси, проходящей через полюс K , наряду с собственно кручением будет происходить изгиб стержня в плоскости zx вследствие искривления продольного волокна, проходящего через центр изгиба D (см. рисунок 2.8). В сечениях стержня возникнут изгибающие моменты относительно оси y , и второе равенство (2.3) выполняться не будет.

Полярный момент инерции относительно точки K равен сумме осевых моментов инерции:

$$\bar{I}_p = I_{\bar{y}} + I_{\bar{z}}.$$

Ось \bar{y} совпадает с осью y , а ось \bar{z} проходит через точку K . Поэтому

$$I_{\bar{y}} = I_y; \quad I_{\bar{z}} = I_z + y_K^2 F.$$

Следовательно,

$$\bar{I}_p = I_y + I_z + y_K^2 F = I_p + y_K^2 F. \quad (2.46)$$

Таким образом, критическое напряжение (2.40) оказывается равным

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\frac{\pi^2 E}{l^2} (I_\omega - 2y_K R_y + y_K^2 I_y) + GI_K}{I_p + y_K^2 F}. \quad (2.47)$$

Введём следующие обозначения:

$$\sigma_\theta = \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2 I_p} + \frac{GI_K}{I_p}; \quad \sigma_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2 F}. \quad (2.48)$$

Величину σ_θ можно истолковать как критическое напряжение при крутильной потере устойчивости вокруг центра тяжести сечения по (2.2); величину σ_y – как критическое напряжение при изгибной потере устойчивости в плоскости zx . Кроме того, обозначим

$$\rho_y = \frac{\pi^2 ER_y}{l^2 \sqrt{FI_p}}; \quad \eta = y_K \sqrt{\frac{F}{I_p}}. \quad (2.49)$$

Первая из этих величин, пропорциональная R_y , имеет размерность напряжения. Вторая является безразмерной параметром для координаты центра вращения y_K .

Выражение (2.47) можно теперь переписать следующим образом:

$$\sigma_{кр} = \frac{\sigma_{\theta} - 2\rho_y \eta + \sigma_y \eta^2}{1 + \eta^2}. \quad (2.50)$$

Желая найти минимум $\sigma_{кр}$, приравняем нулю производную от (2.50) по η . Это приводит к равенству

$$(-2\rho_y + 2\sigma_y \eta)(1 + \eta^2) - 2\eta(\sigma_{\theta} - 2\rho_y \eta + \sigma_y \eta^2) = 0.$$

Разделив его на $1 + \eta^2$, можно с учётом обозначения (2.50) получить соотношение

$$\eta = \frac{\rho_y}{\sigma_y - \sigma_{кр}}. \quad (2.51)$$

Равенство (2.50) преобразуем далее следующим образом:

$$\sigma_{кр} - \sigma_{\theta} + \eta^2(\sigma_{кр} - \sigma_y) + 2\eta\rho_y = 0.$$

После подстановки сюда соотношения (2.51) можно прийти к квадратному уравнению относительно $\sigma_{кр}$:

$$(\sigma_{кр} - \sigma_{\theta})(\sigma_{кр} - \sigma_y) - \rho_y^2 = 0 \quad (2.52)$$

или

$$\sigma_{кр}^2 - \sigma_{кр}(\sigma_{\theta} + \sigma_y) + (\sigma_{\theta}\sigma_y - \rho_y^2) = 0. \quad (2.53)$$

Из двух корней уравнения (2.53) выбираем наименьший:

$$\sigma_{кр} = \frac{\sigma_{\theta} + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\theta} - \sigma_y}{2}\right)^2 + \rho_y^2}. \quad (2.54)$$

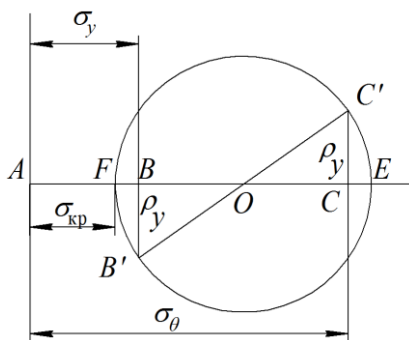


Рисунок 2.10 – Связь $\sigma_{кр}$ с σ_{θ} и σ_y

Данный результат аналогичен формуле, определяющей главные напряжения в плоской задаче. Удобно воспользоваться его графической интерпретацией в виде круга Мора (рисунок 2.10). Откладываем по оси абсцисс отрезки $AB = \sigma_y$ и $AC = \sigma_{\theta}$, по вертикали $CC' = \rho_y$ (вверх) и BB' (вниз). На отрезке $B'C'$ как на диаметре строим окружность. Отрезку AF отвечает величина $\sigma_{кр}$ (2.54). Как видно из рисунка

2.10, критическое напряжение $\sigma_{кр}$ для профиля с одной осью симметрии будет меньше каждой из величин σ_{θ} и σ_y .

Наряду с изгибно-крутильной формой потери устойчивости для профиля с одной осью симметрии возможна и чисто изгибная форма потери устойчивости в плоскости xu . Соответствующее критическое напряжение определяется по формуле

$$\sigma_z = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2 F}. \quad (2.55)$$

Расчётное критическое напряжение определяется как наименьшая из величин (2.54) и (2.55).

С помощью формул (2.49) и (2.51) мы можем теперь определить координату центра вращения:

$$y_K = \frac{\rho_y}{\sigma_y - \sigma_{кр}} \sqrt{\frac{I_p}{F}}. \quad (2.56)$$

Как видим, центр вращения не лежит в центре тяжести сечения. Вместе с тем он не совпадает с другой характерной точкой – центром изгиба сечения D (см. рисунок 2.8). Это можно показать следующим образом. Координата центра изгиба в случае тонкостенного стержня открытого профиля совпадает с центром кручения, то есть

$$y_D = \frac{1}{I_y} \int \omega z dF = \frac{R_y}{I_y}. \quad (2.57)$$

Из формулы (2.49) имеем

$$\rho_y = \frac{\pi^2 ER_y}{l^2 \sqrt{FI_p}} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2 F} \cdot \frac{R_y}{I_y} \sqrt{\frac{F}{I_p}} = \sigma_y y_D \sqrt{\frac{F}{I_p}}. \quad (2.58)$$

Внося это равенство в формулу (2.56), получаем связь

$$y_K = \frac{\sigma_y}{\sigma_y - \sigma_{кр}} y_D. \quad (2.59)$$

Отсюда можно заключить, что в общем случае $y_K \neq y_D$. Умножив (2.59) на $\sqrt{F/I_p}$, устанавливаем также зависимость

$$\eta_K = \frac{\sigma_y}{\sigma_y - \sigma_{кр}} \eta_D, \quad (2.60)$$

где

$$\eta_D = y_D \sqrt{\frac{F}{I_p}}. \quad (2.61)$$

2.4. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Рассмотрим теперь общий случай несимметричного сечения. Пусть y и z – главные центральные оси инерции сечения (рисунок 2.11). Допустим, что

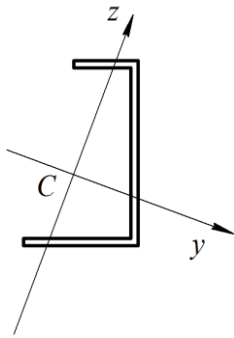


Рисунок 2.11 – Несимметричное сечение

стержень подвергается центральному сжатию и что концевые сечения его свободно деформируются. Критическое напряжение, соответствующее изгибно-крутильной форме потери устойчивости, по-прежнему будет определяться выражением (2.40), где \bar{I}_ω и \bar{I}_p должны вычисляться относительно центра вращения, координаты y_K и z_K которого подлежат отысканию.

Кручение стержня при потере устойчивости будет сопровождаться изгибом в каждой из плоскостей xy и xz . Из трёх равенств (2.3) справедливым остаётся только первое. Оно вытекает из условия равенства нулю равнодействующей напряжений σ_ω в сечении стержня и должно выполняться при любом выборе полюса K . Записав равенство

$$\int_F \bar{\omega} dF = 0,$$

внесём в подынтегральное выражение соотношение (2.41):

$$\int_F \omega dF + z_K \int_F y dF - y_K \int_F z dF + (z_0 y_K - y_0 z_K) F = 0.$$

Первый интеграл равен нулю согласно (2.3). Второй и третий интегралы есть статические моменты площади относительно центральных осей z , y и также равны нулю. Мы приходим к равенству

$$z_0 y_K - y_0 z_K = 0. \quad (2.62)$$

На этом основании из выражения (2.41) получаем связь между $\bar{\omega}$ и ω в виде

$$\bar{\omega} = \omega + z_K y - y_K z. \quad (2.63)$$

Секториальный момент инерции \bar{I}_ω будет равен

$$\bar{I}_\omega = \int_F \bar{\omega}^2 dF = \int_F (\omega^2 - 2\omega y_K z + 2\omega z_K y - 2y_K z_K yz + y_K^2 z^2 + z_K^2 y^2) dF. \quad (2.64)$$

Введём обозначение для второго секториального центробежного момента инерции

$$R_z = \int_F \omega y dF. \quad (2.65)$$

Учитывая, что для главных осей центробежный момент инерции

$$I_{yz} = \int_F yz dF \quad (2.66)$$

равен нулю, находим

$$\bar{I}_\omega = I_\omega - 2y_K R_y + 2z_K R_z + y_K^2 I_y + z_K^2 I_z. \quad (2.67)$$

Для полярного момента инерции относительно точки K получим выражение

$$\bar{I}_p = I_y + I_z + y_K^2 F + z_K^2 F = I_p + F(y_K^2 + z_K^2). \quad (2.68)$$

Формула (2.40) для критического напряжения приобретает вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\frac{\pi^2 E}{l^2} (I_\omega - 2y_K R_y + 2z_K R_z + y_K^2 I_y + z_K^2 I_z) + GI_K}{I_p + (y_K^2 + z_K^2) F}. \quad (2.69)$$

Воспользуемся новыми обозначениями

$$\rho_z = \frac{\pi^2 E R_z}{l^2 \sqrt{E F I_p}}; \quad \zeta = z_K \sqrt{\frac{F}{I_p}}. \quad (2.70)$$

Тогда с учётом (2.48), (2.49) и (2.55) найдём

$$\sigma_{кр} = \frac{\sigma_\theta - 2\rho_y \eta + 2\rho_z \zeta + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2}{1 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (2.71)$$

Необходимые условия минимума $\sigma_{кр}$:

$$\frac{\partial \sigma_{кр}}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{кр}}{\partial \zeta} = 0; \quad (2.72)$$

пользуясь (2.67), получим

$$\eta = \frac{\rho_y}{\sigma_y - \sigma_{кр}}; \quad \zeta = -\frac{\rho_z}{\sigma_z - \sigma_{кр}}. \quad (2.73)$$

Формула (2.71) приводит теперь к кубическому уравнению относительно $\sigma_{кр}$:

$$(\sigma_{кр} - \sigma_\theta)(\sigma_{кр} - \sigma_y)(\sigma_{кр} - \sigma_z) - \rho_y^2 (\sigma_{кр} - \sigma_z) - \rho_z^2 (\sigma_{кр} - \sigma_y) = 0. \quad (2.74)$$

Это уравнения обобщает полученные ранее результаты. Для сечения с двумя осями симметрии $\rho_y = \rho_z = 0$; три корня уравнения (2.75) будут

$$(\sigma_{кр})_1 = \sigma_\theta; \quad (\sigma_{кр})_2 = \sigma_y; \quad (\sigma_{кр})_3 = \sigma_z,$$

что согласуется с формулами (2.32) и (2.37). В случае сечения с одной осью симметрии $\rho_y \neq 0$; $\rho_z = 0$. Тогда получим $(\sigma_{кр})_{1,2}$ по уравнению (2.52) и $(\sigma_{кр})_3 = \sigma_z$ по (2.55).

Исследование уравнения (2.74) показывает, что каково бы ни было соотношение между величинами σ_θ , σ_y и σ_z , наименьший его корень будет всегда лежать ниже любой из этих величин. Следовательно, потеря устойчивости стержня с несимметричным сечением возможна только в изгибно-крутильной форме.

2.5 УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Предположим, что тонкостенный стержень с сечением, имеющим одну ось симметрии, подвергается чистому изгибу в плоскости симметрии xu .

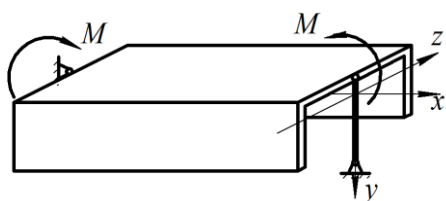


Рисунок 2.12 – Чистый изгиб тонкостенного стержня

Пусть каждая из пар, приложенных по торцам, имеет момент M (рисунок 2.12). Нормальные напряжения начального состояния в любом сечении стержня, будут распределяться по закону

$$\sigma_0 = \frac{M}{I_z} y; \quad (2.75)$$

напряжения в крайних волокнах будут

$$\sigma_0 = \frac{M}{W_z}, \quad (2.76)$$

где W_z – момент сопротивления сечения, относящийся к тому или иному крайнему волокну (точкам c или d) на рисунке 2.13.

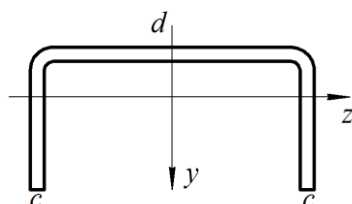


Рисунок 2.13 – Краевые волокна сечения

В начальном напряжённом состоянии упругая линия стержня является плоской кривой. При определённом значении момента M может произойти выпучивание стержня по направлению оси z , перпендикулярной плоскости изгиба. Это явление носит название потери устойчивости плоской формы изгиба. При этом любое сечение стержня совершает поворот вокруг некоторого центра вращения K , лежащего на оси симметрии. При вычислении момента начальных напряжений относительно точки K в деформированном состоянии необходимо учесть зависимость (2.75). Тогда вместо (2.22) получим выражение

$$M_0 = - \int_F \sigma_0 \psi \bar{\rho} dF = - \frac{M}{I_z} \int_F \psi y \bar{\rho} dF,$$

где $\bar{\rho}$ – радиус-вектор площадки dF относительно центра вращения. Подставив сюда соотношение (2.23), в котором вместо ρ следует писать $\bar{\rho}$, найдём

$$M_0 = -\frac{M}{I_z} \theta' \int_F y \bar{\rho}^2 dF = -\frac{M \bar{H}_z}{I_z} \theta'. \quad (2.77)$$

Здесь введено новое обозначение

$$\bar{H}_z = \int_F y \bar{\rho}^2 dF. \quad (2.78)$$

В итоге вместо (2.26) будем иметь дифференциальное уравнение четвёртого порядка

$$\theta^{IV} + \frac{1}{EI_\omega} \left(\frac{M \bar{H}_z}{I_z} - GI_\kappa \right) \theta'' = 0,$$

а вместо (2.27) – уравнение

$$\frac{d^2 B}{dx^2} + \left(\frac{M}{EI_\omega} \frac{\bar{H}_z}{I_z} - \frac{GI_\kappa}{EI_\omega} \right) B = 0. \quad (2.79)$$

Считая, что концевые сечения свободно деформируются, получим решение уравнения (2.79) снова в виде (2.30), причём

$$k^2 = \frac{M}{EI_\omega} \frac{\bar{H}_z}{I_z} - \frac{GI_\kappa}{EI_\omega}. \quad (2.80)$$

Принимая согласно (2.31) $kl = n\pi$ и $n = 1$, найдём критические значения момента:

$$\frac{M_{\text{кр}}}{I_z} = \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2 \bar{H}_z} + \frac{GI_\kappa}{\bar{H}_z}. \quad (2.81)$$

Мы пришли к формуле той же структуры, что и для напряжения при центральном сжатии (2.40), но вместо \bar{I}_p входит величина \bar{H}_z . Координату центра вращения будем по-прежнему обозначать через y_K , тогда для \bar{I}_ω сохранится выражение (2.45). Воспользуемся далее соотношением между радиусами-векторами, отнесёнными к центру вращения и центру тяжести:

$$\bar{\rho}^2 = \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = (y - y_K)^2 + z^2 = \rho^2 - 2y_K y + y_K^2. \quad (2.82)$$

Отсюда по (2.78)

$$\bar{H}_z = \int_F (\rho^2 - 2y_K y + y_K^2) y dF = H_z - 2y_K I_z, \quad (2.83)$$

где

$$H_z = \int_F y \rho^2 dF. \quad (2.84)$$

Вместо (2.81) получаем теперь

$$\frac{M_{\text{кр}}}{I_z} = \frac{\frac{\pi^2 E}{l^2} (I_\omega - 2y_K R_y + y_K^2 I_y) + G I_K}{H_z - 2y_K I_z}. \quad (2.85)$$

Если ввести безразмерные параметры

$$\beta_y = \left(\frac{H_z}{2I_z} - y_D \right) \sqrt{\frac{F}{I_p}}, \quad t = \frac{W_z}{\sqrt{I_p F}}; \quad (2.86)$$

то от (2.85) можно перейти к критическому напряжению в краевом волокне:

$$t\sigma_M = \frac{\sigma_\theta - 2\sigma_y \eta_D \eta_K + \sigma_y \eta_K^2}{2(\beta_y + \eta_D - \eta_K)}. \quad (2.87)$$

Определяем положение центра вращения, приравнивая нулю производную от $(t\sigma_M)$ по η_K ; тогда получим при $\beta_y + \eta_D - \eta_K \neq 0$

$$-2\sigma_y \eta_D + 2\sigma_y \eta_K + 2t\sigma_M = 0,$$

откуда

$$\eta_K = \eta_D - t \frac{\sigma_M}{\sigma_y}. \quad (2.88)$$

Подставляем теперь (2.88) в (2.87); для критического напряжения будем иметь квадратное уравнение

$$(t\sigma_M)^2 + 2\beta_y \sigma_y (t\sigma_M) + \sigma_y^2 \eta_D^2 - \sigma_\theta \sigma_y = 0; \quad (2.89)$$

корни его будут

$$(t\sigma_M) = \sigma_y \left(-\beta_y \pm \sqrt{\beta_y^2 + \frac{\sigma_\theta}{\sigma_y} - \eta_D^2} \right). \quad (2.90)$$

Критические значения момента получаются равными

$$M = P_y \left(-\gamma_y \pm \sqrt{\gamma_y^2 + \frac{P_\theta}{P_y} r^2 - y_D^2} \right), \quad (2.91)$$

где

$$r = \sqrt{\frac{I_p}{F}}; \quad \gamma_y = \beta_y \sqrt{\frac{I_p}{F}} = \frac{H_z}{2I_z} - y_D; \quad P_y = \sigma_y F; \quad P_\theta = \sigma_\theta F. \quad (2.92)$$

Отрицательный знак M относится к парам, придающим упругой линии стержня выпуклость не вниз, как на рисунке 2.12, а вверх.

Если тело имеет две оси симметрии, то будем иметь

$$R_y = H_z = \beta_y = y_D = 0.$$

Для критических значений σ_M и M получим простые формулы

$$\sigma_{M,кр} = \frac{1}{t} \sqrt{\sigma_{\theta} \sigma_y}; \quad M_{кр} = r \sqrt{P_{\theta} P_y}. \quad (2.93)$$

Для профиля, состоящего из пучка полос, будет

$$I_{\omega} = 0; \quad \frac{\sigma_{\theta}}{t^2} = \frac{GI_{\kappa}}{W_z^2} F;$$

следовательно,

$$\sigma_{M,кр} = \frac{\pi}{W_z l} \sqrt{GI_{\kappa} EI_y}; \quad M_{кр} = \frac{\pi}{l} \sqrt{GI_{\kappa} EI_y}. \quad (2.94)$$

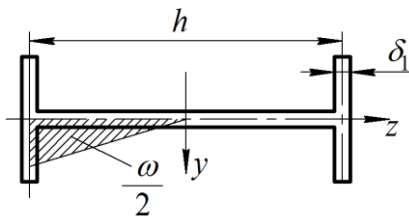
При изгибе полосы прямоугольного сечения $b \times h$ парами сил, лежащими в её плоскости, положим

$$I_{\kappa} = \frac{bh^3}{3}; \quad I_y = \frac{bh^3}{12};$$

так что

$$\sigma_{M,кр} = \pi \sqrt{GE} \frac{h}{l} = \frac{\pi}{\sqrt{2(1+\mu)}} \frac{Eh}{l}. \quad (2.95)$$

В случае двутавровой балки (рисунок 2.14) секториальный момент инерции может быть определён по (2.5). Для точек стенки $\omega = 0$. Для точек



полки имеем $\omega = yh/2$, где h – высота профиля; y отсчитывается от средней линии стенки, и начальный радиус-вектор совпадает с этой же линией. Следовательно,

Рисунок 2.14– Секториальная площадь для двутаврового сечения

$$I_{\omega} = 2 \frac{h^2 \delta_1}{4} \int_{F_1} y^2 dy = \frac{I_1 h^2}{2},$$

где интеграл распространяется на площадь полки; I_1 – момент инерции полки относительно оси стенки. По (2.48) и (2.86) будет

$$\frac{\sigma_{\theta}}{t^2} = \left(\frac{\pi^2 EI_{\omega}}{l^2} + GI_{\kappa} \right) \frac{F}{W_z^2}; \quad \sigma_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2 F}; \quad (2.96)$$

отсюда

$$\sigma_{M,кр} = \frac{1}{W_z} \frac{\pi}{l} \sqrt{GI_{\kappa} EI_y} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_1 h^2}{2l^2 GI_{\kappa}}}. \quad (2.97)$$

Эта формула относится к случаю, когда изгибающие пары лежат в плоскости стенки.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЁННЫХ ПЛАСТИН

3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Если пластина подкреплена достаточно часто и регулярно расположенными рёбрами, то в расчётах на устойчивость можно «размазать» жёсткость рёбер по пластине, заменив таким образом, реальную систему некоторой эквивалентной в жесткостном отношении гладкой пластиной. Последняя будет иметь различные жесткостные характеристики в разных направлениях, то есть будет обладать анизотропией упругих свойств. В связи с этим начнём с вывода уравнения устойчивости ортотропной пластинки.

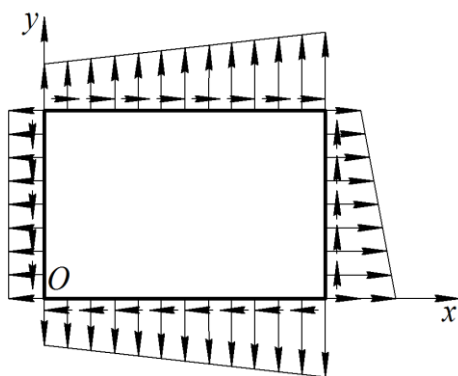


Рисунок 3.1 – Пластина, нагруженная в своей плоскости

Вместо напряжений удобнее оперировать погонными силами

$$N_x(x, y) = h\sigma_{xx}^0; N_y(x, y) = h\sigma_{yy}^0; N_{xy}(x, y) = h\sigma_{xy}^0,$$

где h – толщина пластины.

Погонные силы удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия плоской задачи теории упругости (при нулевых объёмных силах)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Заметим, что силы N_x , N_y , N_{xy} помимо координат зависят также от внешней нагрузки, и содержат в качестве множителя параметр, определяющий уровень нагружения.

Предположим далее, что в результате потери устойчивости наряду с начальным становится возможным равновесие пластины в изогнутом состоянии, которое характеризуется прогибом $w(x, y)$. Примем, что изгиб описыва-

ется теорией, основывающейся на гипотезах Кирхгофа. По одной из них нормальный к срединной плоскости отрезок остаётся прямолинейным и нормальным к деформированной срединной поверхности. Это означает отсутствие деформаций поперечного сдвига:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0,$$

где u_x , u_y и $u_z \equiv w$ – перемещения точек в направлении осей x , y и z . Отсюда следуют соотношения

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y); \quad u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y),$$

где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ – произвольные функции. Считая, что точки срединной поверхности перемещаются при изгибе только вдоль оси z , примем

$$f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0.$$

Окончательно имеем

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

С перемещениями u_x , u_y связаны деформации слоёв пластины, которые вычисляются по формулам Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Воспользовавшись затем обобщённым законом Гука, найдём изгибные напряжения. Согласно второй гипотезе Кирхгофа принимается, что $\sigma_{zz} = 0$. Считая, что направления ортотропии совпадают с направлениями координатных осей, закон Гука запишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_x} (\sigma_{xx} - \mu_{yx} \sigma_{yy}); & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E_y} (\sigma_{yy} - \mu_{xy} \sigma_{xx}); \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь E_x , E_y , G_{xy} – нормальные модули упругости в направлении осей x , y и модуль сдвига в плоскости xy соответственно, μ_{xy} и μ_{yx} – коэффициенты поперечного сужения в двух направлениях. В силу симметрии матрицы упругих коэффициентов имеет место равенство

$$\frac{\mu_{yx}}{E_x} = \frac{\mu_{xy}}{E_y}$$

или

$$\mu_{xy} E_x = \mu_{yx} E_y. \quad (3.4)$$

Если разрешить равенства (3.3) относительно напряжений, получим выражения

$$\sigma_{xx} = \frac{E_x}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}} (\varepsilon_{xx} + \mu_{xy}\varepsilon_{yy}); \quad \sigma_{yy} = \frac{E_y}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}} (\varepsilon_{yy} + \mu_{yx}\varepsilon_{xx});$$

$$\sigma_{xy} = G_{xy}\gamma_{xy}.$$

Подставив в них формулы (3.2), установим связь изгибных напряжений с прогибом:

$$\sigma_{xx} = -\frac{zE_x}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_{yy} = -\frac{zE_y}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$\sigma_{xy} = -2zG_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.5)$$

Перейдём далее к равнодействующим данных напряжений по толщине, которые сводятся к погонным изгибающим и крутящим моментам:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz; \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz,$$

Подставив сюда соотношения (3.5) получим после интегрирования по координате z выражения

$$M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -2D_{\kappa} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (3.6)$$

где

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})}; \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})}; \quad D_{\kappa} = \frac{G_{xy} h^3}{12}. \quad (3.7)$$

Помимо моментов в сечениях пластины возникают перерезывающие силы Q_x и Q_y , которые также можно выразить через w с помощью уравнений равновесия.

На рисунке 3.2 показан бесконечно малый элемент срединной поверхности пластины. Элемент вместе с действующими на него силами и моментами изображён условно в недеформированном состоянии. Уравнения же

равновесия должны быть записаны для деформированного состояния элемента, чтобы учесть проекции на ось z сил начального состояния. Это является характерной особенностью задач устойчивости.

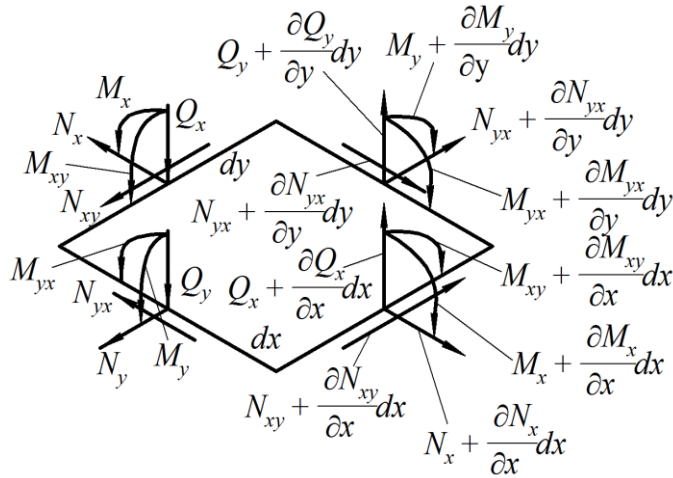


Рисунок 3.2 – Внутренние силы и моменты в сечениях пластины

причина силы в срединной плоскости N_x , N_y , N_{xy} сохраняют при выпучивании пластины те же значения, какие они имеют в начальном состоянии.

Условие равновесия элемента в проекции на ось z представим в виде

$$Z_Q + Z_{N_x} + Z_{N_y} + Z_{N_{xy}} = 0,$$

где Z_Q – проекция перерезывающих сил, а Z_{N_x} , Z_{N_y} и $Z_{N_{xy}}$ – проекции сил начального состояния. Ввиду малости углов поворота нормали к изогнутой срединной поверхности следует принять, что перерезывающие силы проектируются на ось z в натуральную величину. Поэтому

$$Z_Q = \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx = \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) dx dy.$$

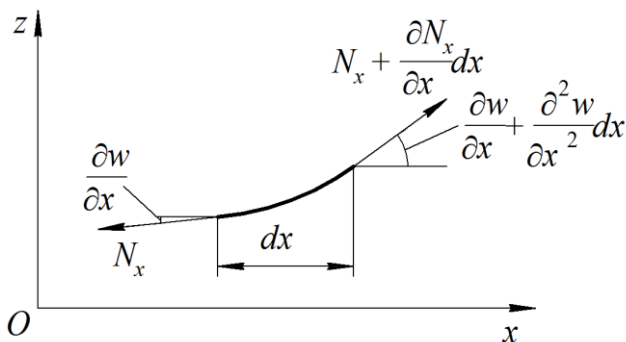


Рисунок 3.3 – К вычислению Z_{N_x}

Как сама функция $w(x, y)$

так и её производные $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$

рассматриваются как сколь угодно малые величины. Вследствие этого косинусы углов наклона изогнутой пластины к плоскости xu можно считать равными единице, а синусы и тангенсы – равными самим углам. Кроме того, по этой же

причина силы в срединной плоскости N_x , N_y , N_{xy} сохраняют при выпучивании пластины те же значения, какие они имеют в начальном состоянии.

Условие равновесия элемента в проекции на ось z представим в виде

$$Z_Q + Z_{N_x} + Z_{N_y} + Z_{N_{xy}} = 0,$$

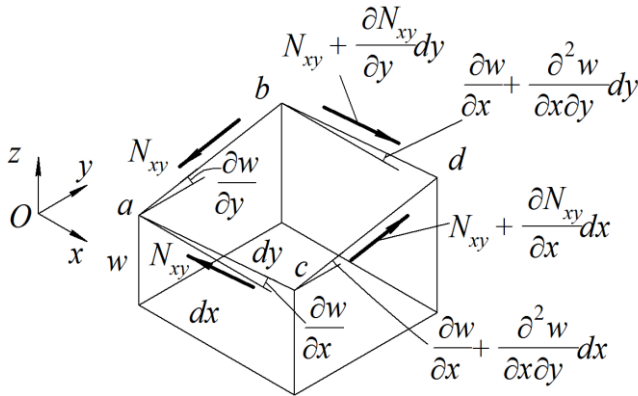
где Z_Q – проекция перерезывающих сил, а Z_{N_x} , Z_{N_y} и $Z_{N_{xy}}$ – проекции сил начального состояния. Ввиду малости углов поворота нормали к изогнутой срединной поверхности следует принять, что перерезывающие силы проектируются на ось z в натуральную величину. Поэтому

$$Z_Q = \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx = \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) dx dy.$$

На рисунке 3.3 показан, далее, вид на деформированный элемент при взгляде вдоль оси y ; перерезывающие силы и изгибающие моменты условно не изображены. Как следует из рисунка, величина Z_{N_x} равна

$$Z_{N_x} = \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - N_x dy \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Раскрыв скобки, будем иметь после приведения подобных членов и отбрасывания бесконечно малой величины третьего порядка



$$Z_{N_x} = \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy.$$

Аналогично получим

$$Z_{N_y} = \left(N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$

Найдём, наконец, проекцию касательных сил на ось z (рисунок 3.4):

Рисунок 3.4 – К вычислению $Z_{N_{xy}}$

$$Z_{N_{xy}} = \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) - N_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) dx \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right) - N_{xy} dx \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Приведя подобные члены и отбросив малые третьего порядка, получим

$$Z_{N_{xy}} = \left(2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy.$$

Складывая отдельные составляющие, запишем теперь уравнение равновесия элемента в виде

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Выражения в скобках равны нулю в силу соотношений (3.1). Таким образом, приходим к равенству

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.8)$$

Условия равновесия моментов приводят к тем же соотношениям, что и в случае поперечного изгиба пластины:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

С учётом зависимостей (3.6) отсюда вытекают формулы

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (3.9)$$

Здесь

$$D_{xy} = 2D_k + \mu_{xy} D_x = 2D_k + \mu_{yx} D_y. \quad (3.10)$$

Заметим, что равенство $\mu_{xy} D_x = \mu_{yx} D_y$ вытекает из соотношения (3.4).

Внесём соотношения (3.9) в уравнение равновесия (3.8). В результате получим дифференциальное уравнение устойчивости ортотропной пластины

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.11)$$

В случае изотропного материала, когда $E_x = E_y = E$; $\mu_{xy} = \mu_{yx} = \mu$,

$G_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}$, будем иметь $D_x = D_y = D_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, и уравнение (3.11) пе-

реходит в известное уравнение устойчивости изотропной пластины

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

3.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Предположим, что прямоугольная пластина со сторонами a и b , сво-

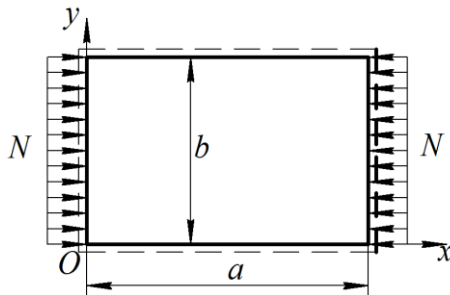


Рисунок 3.5 – Одноосное сжатие прямоугольной пластины

гда, очевидно, будем иметь

$$N_x(x, y) = -N; \quad N_y(x, y) = 0; \quad N_{xy}(x, y) = 0.$$

Дифференциальное уравнение (3.11) перепишем в этом случае в виде

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3.12)$$

Нетривиальное решение уравнения (3.12) отыскиваем в форме

$$w(x, y) = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.13)$$

где m, n – целые числа. Они характеризуют число полуволн, образующихся при потере устойчивости соответственно в продольном и поперечном направлениях.

Принятое выражение для $w(x, y)$ удовлетворяет всем граничным условиям, а именно:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и при } x = a;$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и при } y = b.$$

Подстановка (3.13) в уравнение (3.12) приводит к равенству

$$A \left[D_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_{xy} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_y \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - N \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

Приравнявая нулю выражение в квадратных скобках, получим

$$D_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_{xy} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_y \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - N \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 = 0.$$

Отсюда находим те значения нагрузки N , при которых возможно равновесие в изогнутом состоянии:

$$N = \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \left[D_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_{xy} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_y \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right].$$

Этот результат можно переписать так:

$$N = \frac{\pi^2}{b^2} \left(D_x \frac{m^2}{\gamma^2} + 2D_{xy} n^2 + D_y n^4 \frac{\gamma^2}{m^2} \right), \quad (3.14)$$

где

$$\gamma = \frac{a}{b}.$$

Придавая m и n различные целые значения, получим множество значений N , удовлетворяющих равенству (3.14). Под критической силой понимается наименьшее значение N , при котором возможно равновесие в изогнутом состоянии. Поскольку с увеличением n величина N возрастает, следует принять $n = 1$. Это означает, что при потере устойчивости в поперечном направлении всегда будет образовываться одна полуволна. Формулу для критической силы можно представить тогда в виде

$$N_{\text{кр}} = \frac{k\pi^2 \sqrt{D_x D_y}}{b^2}, \quad (3.15)$$

где коэффициент устойчивости k представляет собой наименьшее значение выражения

$$k = \left(\frac{m}{\gamma}\right)^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} + \frac{2D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} + \left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}. \quad (3.16)$$

Формальный минимум k может быть найден из условия

$$\frac{dk}{dm} = \frac{2m}{\gamma^2} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \frac{2\gamma^2}{m^3} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} = 0,$$

которое приводит к значению

$$m = \gamma^4 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}. \quad (3.17)$$

При этом величина коэффициента устойчивости оказывается равной

$$k = 2 \left(1 + \frac{D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} \right). \quad (3.18)$$

Данный результат будет вполне строгим, если величина m , получаемая согласно (3.17), является целым числом. В противном случае необходимо

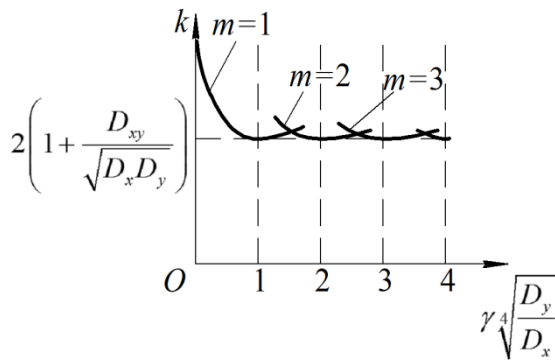


Рисунок 3.6– Зависимость коэффициента устойчивости от отношения сторон

провести дополнительное исследование, аналогичное тому, которое выполняется для изотропной пластинки. Результаты отражены на рисунке 3.6, где показана зависимость коэффициента k от параметра $\gamma^4 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}$. Как видно из это-

го рисунка, при $\gamma \geq \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}$ откло-

нение коэффициента k от его минимального значения (3.18) невелико, и для подобных пластин, удлинённых в продольном направлении, можно пользоваться формулой (3.18), что идёт в запас устойчивости. Если же отношение

сторон $\gamma < \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}$, то в продольном направлении будет образовываться одна

полуволна ($m=1$), и коэффициент k в соответствии с (3.16) следует вычислять по формуле

$$k = \frac{1}{\gamma^2} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} + \frac{2D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} + \gamma^2 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}. \quad (3.19)$$

3.3. КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫЕ ПЛАСТИНКИ

Как уже говорилось, пластина, имеющая регулярно расположенные подкрепляющие рёбра, может приближённо рассматриваться как гладкая ортотропная пластина. Поскольку анизотропия жесткостных свойств проистекает не от свойств материала, а от конструктивных особенностей, такие пластины называются конструктивно-ортотропными. Расчёт подобных пластин сводится по существу к вычислению их жесткостных характеристик.

Рассмотрим прямоугольную изотропную пластину, подкреплённую системой рёбер, расположенных параллельно оси x с шагом t (рисунок 3.7). Предположим вначале, что пластина испытывает изгиб под действием поперечной нагрузки $p(x, y)$. Тогда изогнутая поверхность пластины будет описываться уравнением

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y).$$

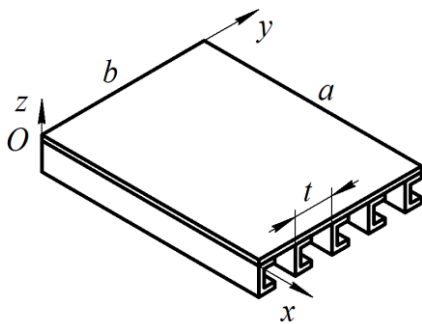


Рисунок 3.7 – Пластина, подкреплённая рёбрами параллельно оси x

Если, в частности, пластинка вытянута вдоль оси x ($a \gg b$), а нагрузка в направлении оси x постоянна, то пластина окажется в условиях цилиндрического изгиба. Её изогнутая поверхность будет близка к цилиндрической с образующими, параллельными оси x (исключая, быть может, небольшие области, примыкающие к коротким сторонам), как показано на рисунке 3.8. Прогиб в этом случае является функцией только координаты y , и уравнение изгиба будет иметь вид

$$D_y \frac{d^4 w}{dy^4} = p(y).$$

Поскольку рёбра ориентированы вдоль оси x , они в этом случае не изгибаются и не оказывают влияния на деформацию пластины. Отсюда следует, что величина D_y совпадает с изгибной жёсткостью неподкреплённой пластины:

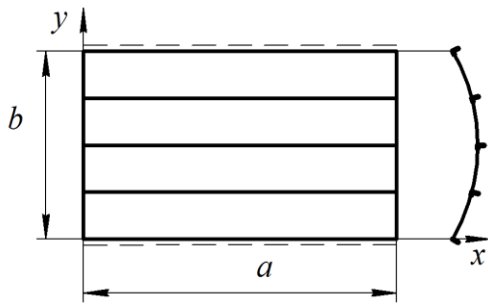


Рисунок 3.8 – Цилиндрический изгиб пластины

$$D_y = D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad (3.20)$$

где E , μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

Предположим далее, что пластина испытывает цилиндрический изгиб в другом направлении, имея размеры $b \gg a$ и воспринимая нагрузку $p(x)$. Уравнение

изгиба будет в этом случае иметь вид

$$D_x \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x).$$

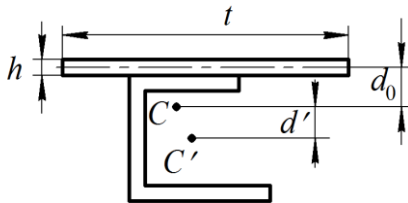


Рисунок 3.9 – Сечение участка пластины с ребром

При этом рёбра изгибаются вместе с пластиной, увеличивая её жёсткость. Для нахождения D_x рассмотрим сечение пластины плоскостью $x = \text{const}$, выделив в нём участок длиной t (рисунок 3.9). Буквой C на рисунке 3.9 отмечен центр тяжести совокупного сечения пластины с ребром, C' – центр тяжести сечения изолированного ребра. Момент инерции сечения пластины относительно оси, проходящей через точку C , обозначим через I_0 :

$$I_0 = \frac{th^3}{12} + thd_0^2.$$

Через I_1 обозначим вклад в момент инерции сечения ребра:

$$I_1 = I_1' + F_1 d'^2,$$

где F_1 и I_1' – площадь и собственный момент инерции сечения ребра.

Учитывая, что выделенная полоска пластины взаимодействует с соседними полосками и что D_x есть изгибная жёсткость сечения $x = \text{const}$, приходящаяся на единицу его длины, находим

$$D_x = \frac{E}{t} \left(\frac{I_0}{1-\mu^2} + I_1 \right). \quad (3.21)$$

Переходя к вычислению D_{xy} , предположим вначале, что пластина растягивается вдоль оси x напряжением σ_{xx} , которое действует как в самой пластине, так и в сечениях её рёбер. Если пластину рассматривать как конструктивно-ортотропную, то её деформации будут определяться равенствами

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_x} \sigma_{xx}; \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{\mu_{yx}}{E_x} \sigma_{xx}.$$

Очевидно, что рёбра не препятствуют поперечному сужению, которое будет таким же, как и у гладкой пластины. Учитывая, что $E_x = E$, заключаем, что

$$\mu_{yx} = \mu. \quad (3.22)$$

Исходя из формулы (3.10), приходим к выводу, что

$$D_{xy} = \mu D_y + 2D_k = \mu D + 2D_k. \quad (3.23)$$

Величина D_k , фигурирующая в соотношении (3.6), характеризует жёсткость пластины на кручение. Вторая смешанная производная $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ представляет собой относительное закручивание срединной поверхности. Она равна углу поворота стороны cd относительно стороны ab (см. рисунок 3.4), отнесённого к расстоянию dx между ними. Точно так же её можно понимать как взаимный угол поворота сторон bd и ac , делённый на dy .

Выделим мысленно из пластины полоску единичной ширины двумя сечениями $y = \text{const}$. Если жёсткость на кручение сечения $x = \text{const}$, рассчитанную на единицу его длины, обозначить через C_x , то момент M_{xy} , необходимый для создания относительного угла закручивания α_x будет равен

$$M_{xy} = C_x \alpha_x.$$

Точно так же момент M_{yx} , необходимый для закручивания единичной полоски, выделенной из пластины параллельно оси y , будет

$$M_{yx} = C_y \alpha_y,$$

где α_y – относительный угол закручивания полоски; C_y – жёсткость на кручение сечения пластины $y = \text{const}$, рассчитанная на единицу его длины.

Полагая

$$\alpha_x = \alpha_y = \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right|,$$

приходим к соотношениям

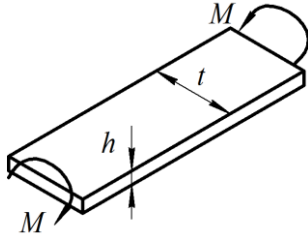
$$M_{xy} = -C_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad M_{yx} = -C_y \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Используя эти соотношения вместо формул (3.6) и повторяя выкладки, необходимые при выводе уравнения устойчивости (3.1), можно прийти к за-

ключению, что величина $4D_k$, которая присутствует в качестве слагаемого в выражении для коэффициента $2D_{xy} = 4D_k + \mu_{xy}D_x + \mu_{yx}D_y$, будет

$$4D_k = \frac{1}{2}(C_x + C_y). \quad (3.24)$$

Для вычисления погонных жесткостей C_x и C_y можно воспользоваться результатами, известными из теории упругости и строительной механики. В частности, погонный угол закручивания тонкой полосы (рисунок 3.10) определяется выражением



$$\alpha = \frac{M}{GI_k},$$

где G – модуль сдвига, а $I_k = th^3/3$.

Поскольку пластина не имеет подкреплений в направлении оси y , следует принять

$$C_y = \frac{Gh^3}{3}.$$

Рисунок 3.10 – Кручение тонкой полосы

Пусть, далее, подкрепляющее ребро, ориентированное по оси x , имеет тонкостенное сечение с открытым контуром (рисунок 3.11). Тогда имеем

$$C_x = \frac{G}{t} \left(\frac{th^3}{3} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i h_i^3 \right),$$

где b_i ; h_i – ширина и толщина i -го прямоугольного участка в сечении ребра; n – число участков.

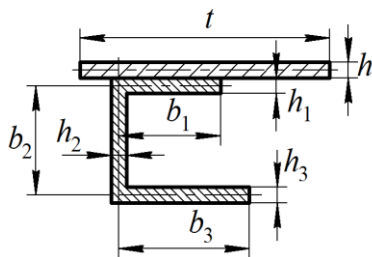


Рисунок 3.11 – Подкрепляющее ребро с открытым контуром сечения

При отсутствии рёбер будем иметь

$$C_x = C_y = \frac{Gh^3}{3};$$

при этом для D_k согласно (3.24) получаем значение

$$D_k = \frac{Gh^3}{12},$$

что соответствует случаю гладкой пластины.

Если сечение подкрепляющего ребра образует вместе с пластиной замкнутый контур (рисунок 3.12), то жёсткость на кручение многократно возрастает по сравнению с открытым сечением. В этом случае для вычисления относительного угла закручивания следует воспользоваться формулой

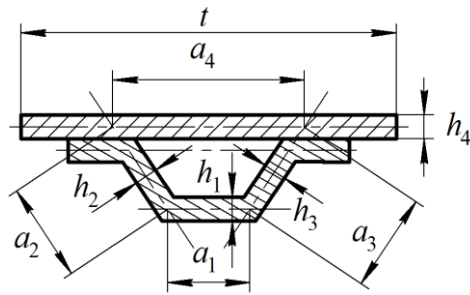


Рисунок 3.12 – Подкрепление с замкнутым контуром сечения

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{T ds}{Gh},$$

известной из балочной теории тонкостенных конструкций. Здесь T – погонная касательная сила в сечении; Ω – удвоенная площадь, охватываемая средней линией замкнутого контура.

В случае кручения имеем $T = \frac{M}{\Omega}$, и

для относительного угла получаем

$$\alpha = \frac{M}{\Omega^2} \oint \frac{ds}{Gh} = \frac{M}{G\Omega^2} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i},$$

где a_i , h_i – значения ширины и толщины участков, составляющих замкнутый контур, n – число участков (включая участок пластины). Тогда

$$C_x = \frac{G}{t} \frac{\Omega^2}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i}}.$$

Жёсткости участков пластины, находящихся вне замкнутого контура, здесь не учтены из-за их малости по сравнению с жёсткостью замкнутого контура.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЁХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

4.1 СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ИЗГИБА ТРЁХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Трёхслойная пластина состоит из двух относительно тонких внешних слоёв, изготовленных как правило, из высокопрочного материала, которые связаны между собой слоем относительно лёгкого и маложёсткого заполнителя. Назначение последнего – обеспечить совместную работу внешних слоёв. В качестве заполнителя могут использоваться пенопласт, пористая резина, гофрированный металлический лист, сотовые ячейки и т.д.

Расположение внешних слоёв на достаточно большом расстоянии друг от друга при соответствующем выборе параметров заполнителя позволяет создавать жёсткие конструкции, во многих случаях более лёгкие, чем панели со стрингерным подкреплением.

Главное отличие расчёта трёхслойных конструкций от расчёта однослойных пластин состоит в учёте деформаций сдвига заполнителя. По установившейся терминологии различают трёхслойные конструкции с лёгким заполнителем и конструкции с жёстким заполнителем. В первом случае продольные силы и моменты практически полностью воспринимаются несущими слоями, а роль заполнителя сводится исключительно к работе на сдвиг. В конструкциях с жёстким заполнителем заметная часть продольных сил и моментов воспринимается заполнителем. Мы в дальнейшем ограничимся случаем лёгкого заполнителя.

При выводе расчётных соотношений будем исходить из следующих предположений.

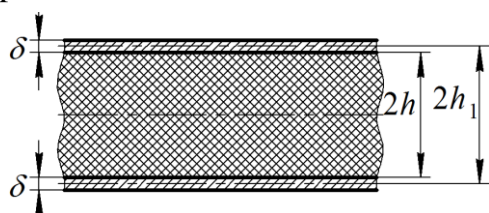


Рисунок 4.1 – Трёхслойная пластина

1. Толщина несущих слоёв значительно меньше толщины пакета (рисунок 4.1), то есть, в частности, $\delta \ll h_1$. Вследствие этого перемещения и деформации в плоскости слоёв, а также напряжения в них можно считать постоянными по тол-

щине каждого из несущих слоёв.

2. Внешние слои будем считать изотропными с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ . Модули упругости заполнителя \bar{E}_x , \bar{E}_y значительно меньше E .

3. Слои работают в безмоментном состоянии. Перерезывающие силы воспринимаются только заполнителем.

4. Жёсткость заполнителя в поперечном направлении достаточно велика, чтобы обеспечить неизменность расстояния между несущими слоями.

Ввиду малой жёсткости заполнителя нельзя считать, что нормальный элемент, перпендикулярный срединной плоскости сохраняет свою прямолинейность и после деформации, как это постулирует гипотеза Кирхгофа в случае однослойной пластины. Взамен можно предположить, что нормальный отрезок превращается в ломаную линию. При этом отрезок ломаной, относящийся к заполнителю, перестаёт быть нормальным к деформированной срединной поверхности за счёт сдвига. Схема изменения по толщине пластины перемещения u_x для точек, первоначально располагавшихся на нормали mn (в сечении $x = \text{const}$), показана на рисунке 4.4. Через u_x^0 обозначено перемещение точки срединной плоскости, а через u_x^B , u_x^H – перемещения точек соответственно верхнего и нижнего слоёв, кото-

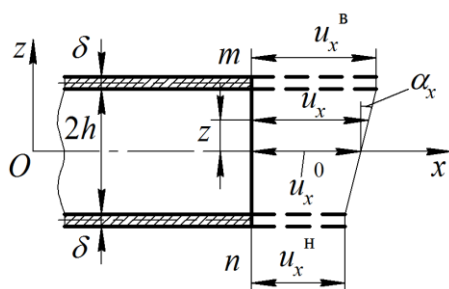


Рисунок 4.2 – Схема изменения перемещения u_x по толщине пластины

рые в соответствии с принятыми гипотезами считаются постоянными по толщине каждого из несущих слоёв. Через α_x обозначен угол поворота нормального элемента заполнителя в плоскости xz .

Перемещение произвольной точки заполнителя, расположенной на расстоянии z от срединной плоскости:

$$u_x = u_x^0 + z\alpha_x.$$

Подобным же образом изменяется по толщине перемещение u_y . Из этих представлений вытекают следующие формулы:

– для заполнителя

$$u_x = u_x^0 + z\alpha_x; \quad u_y = u_y^0 + z\alpha_y; \quad (4.1)$$

– для несущих слоёв

$$\begin{aligned} u_x^B &= u_x^0 + h\alpha_x; & u_y^B &= u_y^0 + h\alpha_y; \\ u_x^H &= u_x^0 - h\alpha_x; & u_y^H &= u_y^0 - h\alpha_y. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь α_y – угол поворота нормального отрезка заполнителя в плоскости yz ; h – половина толщины заполнителя.

По формулам Коши получаем для деформаций несущих слоёв выражения

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{B,H} &= \frac{\partial u_x^{B,H}}{\partial x} = \varepsilon_{xx}^0 \pm h \frac{\partial \alpha_x}{\partial x}; & \varepsilon_{yy}^{B,H} &= \frac{\partial u_y^{B,H}}{\partial y} = \varepsilon_{yy}^0 \pm h \frac{\partial \alpha_y}{\partial y}; \\ \gamma_{xy}^{B,H} &= \gamma_{xy}^0 \pm h \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right),\end{aligned}\quad (4.3)$$

где

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_x^0}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial u_y^0}{\partial y}; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \frac{\partial u_x^0}{\partial y}.$$

Верхние знаки в формулах относятся к верхнему слою, а нижние – к нижнему.

Деформации поперечного сдвига заполнителя будут

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}.$$

Чёрточкой здесь и далее будем помечать все величины, относящиеся к заполнителю. Перемещение u_z есть прогиб пластины $w(x, y)$, и с учётом формул (4.1) получаем

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_x; \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha_y. \quad (4.4)$$

Пользуясь далее законом Гука, находим напряжения в несущих слоях

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{B,H} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{xx}^{B,H} + \mu \varepsilon_{yy}^{B,H}) = \sigma_{xx}^0 \pm \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right); \\ \sigma_{yy}^{B,H} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{yy}^{B,H} + \mu \varepsilon_{xx}^{B,H}) = \sigma_{yy}^0 \pm \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right); \\ \sigma_{xy}^{B,H} &= G\gamma_{xy}^{B,H} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^{B,H} = \sigma_{xy}^0 \pm \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right),\end{aligned}\quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^0 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{xx}^0 + \mu \varepsilon_{yy}^0); & \sigma_{yy}^0 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{yy}^0 + \mu \varepsilon_{xx}^0); \\ \sigma_{xy}^0 &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^0.\end{aligned}$$

Для поперечных касательных напряжений в заполнителе будем иметь формулы

$$\tau_{zx} = \bar{G}\gamma_{zx} = \bar{G} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_x \right); \quad \tau_{zy} = \bar{G}\gamma_{zy} = \bar{G} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha_y \right), \quad (4.6)$$

где \bar{G} – модуль сдвига заполнителя в поперечных плоскостях.

Перейдём теперь от напряжений к их результирующим – погонным силам и моментам. На рисунке 4.3 показан элемент трёхслойной пластины, имеющий в плане размеры $dx dy$, с приложенными к нему напряжениями.

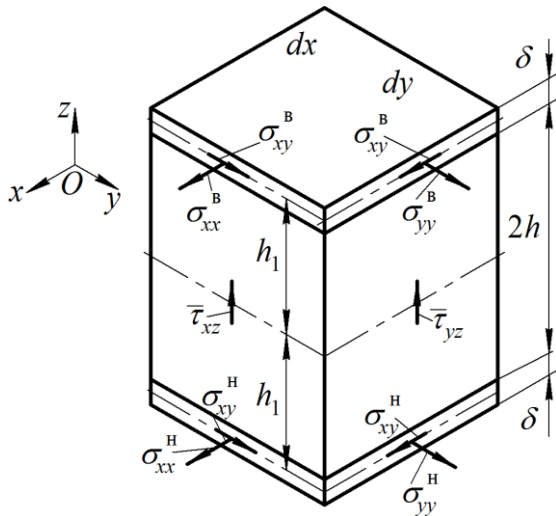


Рисунок 4.3 – Напряжения в трёхслойной пластине

Вводя результирующие силы и моменты в площадках $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ и относя их к единице длины сечения, получим силы в срединной плоскости

$$N_x = \delta(\sigma_{xx}^B + \sigma_{xx}^H);$$

$$N_y = \delta(\sigma_{yy}^B + \sigma_{yy}^H);$$

$$N_{xy} = \delta(\sigma_{xy}^B + \sigma_{xy}^H),$$

изгибающие и крутящий моменты

$$M_x = \delta h_1(\sigma_{xx}^B - \sigma_{xx}^H); \quad M_y = \delta h_1(\sigma_{yy}^B - \sigma_{yy}^H);$$

$$M_{xy} = \delta h_1(\sigma_{xy}^B - \sigma_{xy}^H),$$

а также перерезывающие силы

$$Q_x = 2h\bar{\tau}_{xz}; \quad Q_y = 2h\bar{\tau}_{yz}.$$

Подставив в эти формулы выражения (4.5) и (4.6), приходим к соотношениям

$$N_x = 2\delta\sigma_{xx}^0; \quad N_y = 2\delta\sigma_{yy}^0; \quad N_{xy} = 2\delta\sigma_{xy}^0; \quad (4.7)$$

$$M_x = D\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial x} + \mu\frac{\partial\alpha_y}{\partial y}\right); \quad M_y = D\left(\frac{\partial\alpha_y}{\partial y} + \mu\frac{\partial\alpha_x}{\partial x}\right);$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\mu)}{2}\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial\alpha_y}{\partial x}\right); \quad (4.8)$$

$$Q_x = 2\bar{G}h\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_x\right); \quad Q_y = 2\bar{G}h\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha_y\right). \quad (4.9)$$

Здесь

$$D = \frac{2E\delta h h_1}{1-\mu^2}$$

– изгибная жёсткость трёхслойной пластины.

Предположим далее, что в начальном состоянии пластина нагружена только в своей плоскости. Внутренние силы N_x , N_y и N_{xy} должны находиться тогда из уравнений плоской задачи теории упругости. Будем считать, что

это решение получено и силы N_x , N_y и N_{xy} являются известными функциями координат x , y . Прогиб w и связанные с ним силовые факторы могут возникнуть в результате потери устойчивости пластины. Для вывода дифференциального уравнения устойчивости запишем условия равновесия всех сил, действующих на бесконечно малый элемент пластины в деформированном состоянии, на ось z , а также условия равновесия моментов. Эти уравнения не отличаются от соответствующих уравнений для однослойной пластины, так что будем иметь

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0; \quad (4.11)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (4.12)$$

Из (4.12) вытекает, что

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}.$$

Подстановка выражений (4.8) в последнее равенство приводит к соотношению

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = D \nabla^2 \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right). \quad (4.13)$$

Входящую сюда сумму $\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y}$ можно исключить с помощью выражений (4.9). Продифференцировав первое из них по x , а второе по y и сложив, результаты получим

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 2\bar{G}h \left(\nabla^2 w + \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right).$$

Отсюда выражаем упомянутую сумму:

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} = \frac{1}{2\bar{G}h} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) - \nabla^2 w.$$

Подстановка этого результата в равенство (4.13) даёт возможность установить связь перерезывающих сил с прогибом в виде

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = D \nabla^2 \left[\frac{1}{2\bar{G}h} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) - \nabla^2 w \right]$$

или

$$\left(1 - \frac{D}{2\bar{G}h} \nabla^2\right) \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) = -D \nabla^2 \nabla^2 w.$$

Подставим наконец этот результат в уравнение (4.11), для чего проделаем предварительно над обоими частями уравнения (4.11) операцию $\left(1 - \frac{D}{2\bar{G}h} \nabla^2\right)$. В итоге придём к дифференциальному уравнению устойчивости трёхслойной пластины вида

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = \left(1 - \frac{D}{2\bar{G}h} \nabla^2\right) \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right). \quad (4.14)$$

Отметим, что при $\bar{G} \rightarrow \infty$ уравнение (4.14) превращается в уравнение для изотропной пластины, состоящей из двух тонких слоёв, разнесённых на высоту заполнителя.

4.2 УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ШИРОКОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ СЖАТИИ

Пусть трёхслойная пластина с лёгким заполнителем свободно оперта вдоль сторон $y=0$ и $y=b$, имеет весьма большой размер в направлении оси x и сжата равномерно распределенными усилиями интенсивности N (рисунок 4.4). При потере устойчивости пластина будет изгибаться по цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси x ,

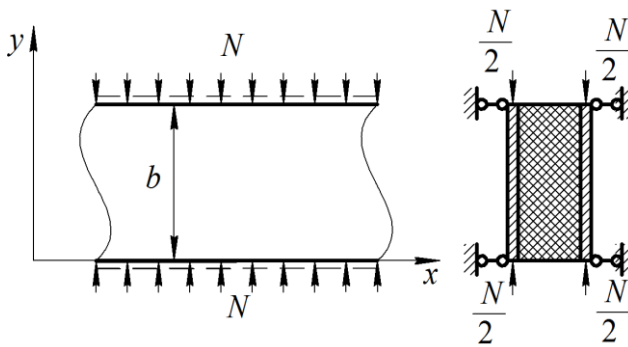


Рисунок 4.4 – Сжатие бесконечно широкой пластины

так что w будет функцией только координаты x . Учитывая, что $N_y = -N$, $N_x = 0$, $N_{xy} = 0$, дифференциальное уравнение устойчивости (4.14) представим в виде

$$D \frac{d^4 w}{dy^4} = - \left(1 - \frac{D}{2\bar{G}h} \frac{d^2}{dy^2}\right) \left(N \frac{d^2 w}{dy^2}\right)$$

или

$$D \frac{d^4 w}{dy^4} = -N \frac{d^2 w}{dy^2} + N \frac{D}{2\bar{G}h} \frac{d^4 w}{dy^4}. \quad (4.15)$$

Решение уравнения (4.15) ищем в виде

$$w = A \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (4.16)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (4.15) приводит к равенству

$$A \left\{ D \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - N \left[1 + \frac{D}{2\bar{G}h} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \right\} = 0.$$

Приравняв нулю выражение в фигурных скобках, найдём значения N , при которых возможно равновесие в изогнутой форме:

$$N = \frac{\pi^2 D}{b^2} \frac{1}{\frac{1}{n^2} + \frac{D}{2\bar{G}hb^2}}. \quad (4.17)$$

Критическая сила определяется как наименьшее значение среди всех, удовлетворяющих равенству (4.17). Оно получается при $n=1$. Расчётную формулу для $N_{кр}$ представим в виде

$$N_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (4.18)$$

где

$$K = \frac{1}{1+C}; \quad C = \frac{\pi^2 D}{2\bar{G}hb^2} = \frac{\pi^2}{1-\mu^2} \frac{E\delta h_1}{\bar{G}b^2}. \quad (4.18)$$

В качестве примера рассмотрим трёхслойную пластину с несущими слоями из материала Д16 с параметрами $\delta = 1\text{мм}$; $E = 7 \cdot 10^4 \text{МПа}$; $\mu = 0,3$. Заполнитель – пенопласт ПХВ-1 с модулем сдвига $\bar{G} = 20 \text{МПа}$; толщина заполнителя $h = 10\text{мм}$. Для такой пластины $C \approx 1,5$ и коэффициент $K \approx 0,4$.

Если взять более плотный заполнитель с модулем сдвига $\bar{G} = 120 \text{МПа}$, то получим $C \approx 0,25$; $K \approx 0,8$.

4.3 ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ТРЁХСЛОЙНАЯ ПЛАСТИНА С ЛЁГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ

Рассмотрим теперь прямоугольную трёхслойную пластину, свободно

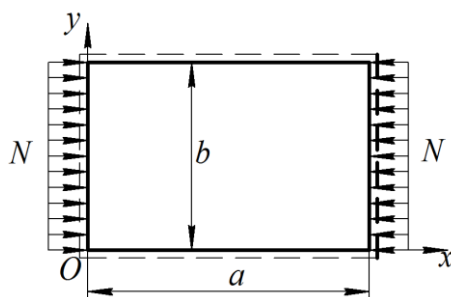


Рисунок 4.5 – Одноосное сжатие прямоугольной пластины

опёртую по всем сторонам и нагруженную осевыми сжимающими усилиями N вдоль оси x (рисунок (4.5)). В этом случае

$$N_x = -N, \quad N_y = N_{xy} = 0.$$

Уравнение устойчивости имеет вид

$$D\nabla^2\nabla^2 w = \left(1 - \frac{D}{2\bar{G}h} \nabla^2 \right) \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (4.20)$$

Нетривиальное решение уравнения

отыскиваем в виде

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Подстановка этого выражения уравнение (4.20) приводит к следующему равенству:

$$D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] = N \left\{ 1 + \frac{D}{2\bar{G}h} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \right\} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2,$$

отсюда

$$N = \frac{\pi^2 D}{b^2} \frac{\frac{m^2}{\gamma^2} + 2n^2 + n^4 \frac{\gamma^2}{m^2}}{1 + C \left(\frac{m^2}{\gamma^2} + n^2 \right)}, \quad (4.21)$$

где

$$\gamma = \frac{a}{b}; \quad C = \frac{\pi^2 D}{2\bar{G}hb^2}. \quad (4.22)$$

При $C = 0$ (случай абсолютно жёсткого заполнителя) величина N имеет наименьшее значение при $n = 1$. Это же остаётся в силе и для конечных значений \bar{G} . С учётом сказанного выражение для $N_{\text{êð}}$ принимает вид

$$N_{\text{êð}} = \frac{\pi^2 D}{b^2} K_{\text{min}}, \quad (4.13)$$

где K_{min} – наименьшее значение величины

$$K = \frac{\left(\frac{m}{\gamma} + \frac{\gamma}{m} \right)^2}{1 + C \left(\frac{m^2}{\gamma^2} + 1 \right)}. \quad (4.14)$$

Задаваясь целыми значениями m , можно найти при заданных C и γ по этой формуле K_{min} . При значениях $C > 0,5$ можно приближённо принимать

$$K_{\text{min}} = \frac{1}{C},$$

а при $C < 0,1$ – использовать формулу

$$K_{\text{min}} = \frac{4}{1 + 2C}.$$

4.4 СИММЕТРИЧНАЯ ФОРМА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЁХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЛЁГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Выше рассмотрена общая потеря устойчивости трёхслойной пластины, когда при потере устойчивости изгибается весь пакет. Однако в случае достаточно слабого заполнителя возможна иная форма потери устойчивости, когда срединная плоскость остаётся плоской, а происходит выпучивание несущих слоёв, как показано на рисунке 4.6,а. Такое поведение возможно, если

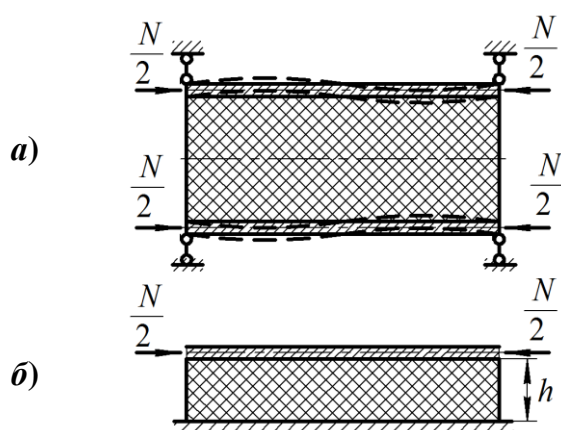


Рисунок 4.6 – Потеря устойчивости несущих слоёв (а) и расчётная схема (б)

выполняет заполнитель.

Основание будем считать линейно упругим, то есть давление, действующее со стороны заполнителя на несущий слой примем пропорциональным прогибу w несущего слоя:

$$p = -\alpha w. \quad (4.15)$$

Здесь α – так называемый коэффициент постели упругого основания.

В качестве уравнения устойчивости возьмём уравнение устойчивости однослойной пластины, но записанное с учётом действия давления p :

$$D_0 \nabla^2 \nabla^2 w = -\alpha w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.16)$$

Здесь

$$D_0 = \frac{E \delta^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (4.17)$$

– изгибная жёсткость несущего слоя.

Для нахождения коэффициента постели выделим из заполнителя столбик высотой h , имеющий единичную площадь основания (рисунок 4.7). Укорочение столбика, обусловленное действием давления p , найдём по закону Гука:

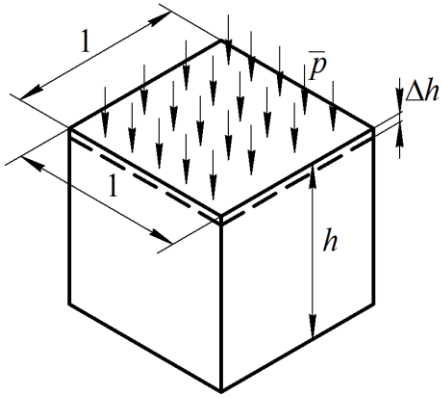


Рисунок 4.7 – К определению коэффициента постели

$$\Delta h = \frac{P}{\bar{E}_z} h.$$

Сопоставляя это равенство с (4.25), заключаем, что

$$\alpha = \frac{\bar{E}_z}{h}. \quad (4.18)$$

В качестве примера остановимся на случае бесконечно широкой трёхслойной пластины с лёгким заполнителем (см. рисунок 4.4), нагруженный в направлении оси y равномерной сжимающей нагрузкой N . Нагрузка на каждый слой составляет $\frac{N}{2}$. Под-

ставляя в уравнение (4.26)

$$N_x = N_{xy} = 0; \quad N_y = -\frac{N}{2}$$

и учитывая, что в этом случае $w = w(y)$, приходим к уравнению

$$D_0 \frac{d^4 w}{dy^4} + \frac{N}{2} \frac{d^2 w}{dy^2} + \alpha w = 0. \quad (4.19)$$

Полагая, что нагруженные кромки свободно опёрты, нетривиальное решение уравнения (4.26) будет иметь в виде

$$w = A \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

где b – размер пластины вдоль оси y .

Подстановка этого выражения в уравнение (4.19) даёт

$$A \left[D_0 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - \frac{N}{2} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \alpha \right] \sin \frac{n\pi}{b} y = 0.$$

Приравняв нулю выражение в фигурных скобках, приходим к выражению

$$N = 2 \left[D_0 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \alpha \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \right]. \quad (4.20)$$

Найдём формальный минимум этого выражения из условия

$$\frac{dN}{dn} = 0.$$

Отсюда получается

$$\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{D_0}}.$$

Внеся это значение в выражение (4.20), устанавливаем критическое значение нагрузки

$$N_{\text{кр}} = 4\sqrt{\alpha D_0}. \quad (4.21)$$

Если подставить сюда выражение D_0 (4.17) и α (4.18), то при $\mu = 0,3$ получим

$$N_{\text{кр}} = 1,2\delta\sqrt{\bar{E}_z E \frac{\delta}{h}}. \quad (4.22)$$

Критическое напряжение в несущем слое будет при этом равно

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{N_{\text{кр}}}{2\delta} = 0,6\sqrt{\bar{E}_z E \frac{\delta}{h}}. \quad (4.23)$$

Местная потеря устойчивости трёхслойных пластин недопустима в конструкциях, поскольку при развитии прогибов может произойти отслоение несущих слоёв от заполнителя, то есть нарушение целостности пакета. Поэтому при практических расчётах необходимо вычислять критические напряжения как общей, так и местной потери устойчивости, принимая в качестве предельно допустимого наименьшее из них.