МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

О.Ю. Семёнова

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего образования технических специальностей и направлений подготовки бакалавров

С А М А Р А
Издательство СГАУ
2015

УДК 514.742.4 (075)
ББК 22.1я7
С302

Рецензент: д-р техн. наук, проф. СГАУ В.Ф. П а в л о в
доц., канд. физ.-мат. наук СамГУ Е.Я. Г о р е л о в а

Семёнова О.Ю.
С302 **Векторный анализ и его приложения:** учеб. пособие / *О.Ю. Семёнова.* – Самара: Изд-во СГАУ, 2015. – 48 с.

ISBN 978-5-7883-1035-0

Учебное пособие составлено в соответствии с действующей программой по курсу высшей математики для инженерно-технических специальностей Самарского государственного аэрокосмического университета. Пособие обеспечивает полную теоретическую и методическую поддержку практических занятий по теме «Векторный анализ и его приложения».

Может быть рекомендовано студентам для самостоятельной работы и подготовки к экзаменам. Также пособие может быть использовано в качестве математической поддержки при рассмотрении целого ряда задач сопротивления материалов, механики, гидрогазодинамики и других технических дисциплин.

Подготовлено на кафедре высшей математики.

УДК 514.742.4 (075)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-7883-1035-0

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Пусть в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ заданы гладкая поверхность S и скалярная функция $u = f(x; y; z)$, непрерывная во всех точках этой поверхности. Выполним действия:

1. Произвольным образом разобьём поверхность S кусочно-гладкими дугами на n частичных поверхностей S_i с площадями ΔS_i, $i = 1, 2, ..., n$.

2. На каждой частичной поверхности S_i выберем произвольно точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$ и вычислим значения функции $f(x_i; y_i; z_i)$.

3. Составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; \dots y_i; z_i) \cdot \Delta S_i .$$

4. Обозначим через Δ максимальный из диаметров частей S_i для данного разбиения.

Определение. Если при $\Delta \to 0$ существует конечный предел интегральных сумм σ_n, не зависящий ни от способа разбиения поверхности S, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется ***поверхностным интегралом 1-го рода от функции $f(x; y; z)$ по поверхности*** S и обозначается

$$\iint_S f(x; y; z) dS = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta S_i .$$

Замечание. Символ dS называется дифференциалом площади поверхности.

Условия существования поверхностного интеграла 1-го рода:

1) Поверхность S является кусочно-гладкой.

2) Функция $u = f(x; y; z)$ непрерывна во всех точках этой поверхности.

2. СВОЙСТВА И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Отметим некоторые важные **свойства поверхностного интеграла 1-го рода**:

1) (линейность) Если функция имеет вид $u = k_1 \cdot f_1(x;y;z) + k_2 \cdot f_2(x;y;z)$, то $\iint\limits_S \left(k_1 \cdot f_1(x;y;z) + k_2 \cdot f_2(x;y;z)\right) dS =$ $= k_1 \iint\limits_S f_1(x;y;z)\, dS + k_2 \iint\limits_S f_2(x;y;z)\, dS$, где k_1, k_2 – произвольные постоянные.

2) (аддитивность) Если поверхность S можно представить в виде объединения непересекающихся гладких поверхностей $S = S_1 \bigcup S_2$, где $S_1 \bigcap S_2 = \varnothing$, то $\iint\limits_S f(x;y;z)\, dS = \iint\limits_{S_1} f(x;y;z)\, dS + \iint\limits_{S_2} f(x;y;z)\, dS$.

3) Если $f(x;y;z) \geq g(x;y;z)$, $\forall (x;y;z) \in S$, то

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\, dS \geq \iint\limits_S g(x;y;z)\, dS.$$

4) (оценка модуля интеграла)

$$\left|\iint\limits_S f(x;y;z)\, dS\right| \leq \iint\limits_S \left|f(x;y;z)\right| dS.$$

5) (теорема о среднем) Если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в точках поверхности S, то на этой поверхности существует точка M_0 такая, что

$\iint\limits_S f(x;y;z)\, dS = f(M_0) \cdot S_{пов}$, где $S_{пов}$ – площадь поверхности S.

6) Если поверхностная плотность $\mu(x;y;z)$ тождественно равна единице, т.е. $\mu(x;y;z) \equiv 1$, то поверхностный интеграл будет численно равен площади поверхности:

$$S_{пов} = \iint\limits_S dS\ .$$

Физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода

Если в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ задана кусочно-гладкая поверхность, в каждой точке которой определена непрерывная поверхностная плотность $\mu = \mu(x; y; z) \geq 0$, то поверхностный интеграл 1-го рода численно равен массе этой поверхности: $m = \iint\limits_S \mu(x; y; z) dS$.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

1. Площадь поверхности: $S_{пов} = \iint\limits_S dS$.

2. Масса поверхности: $m = \iint\limits_S \mu(x; y; z) dS$, где $\mu = \mu(x; y; z)$ – поверхностная плотность.

3. Статические моменты материальной поверхности относительно координатных плоскостей. Если $\mu = \mu(x; y; z)$ – плотность распределения массы по поверхности, то статические моменты этой поверхности относительно плоскостей координат находятся по формулам:

$$M_{XY} = \iint\limits_S z \cdot \mu(x; y; z) dS\ ;$$

$$M_{XZ} = \iint\limits_S y \cdot \mu(x; y; z) dS\ ;$$

$$M_{YZ} = \iint\limits_S x \cdot \mu(x; y; z) dS\ .$$

4. Координаты центра масс материальной поверхности, имеющей плотность $\mu = \mu(x; y; z)$:

$$x_c = \frac{M_{YZ}}{m}\ ;\ y_c = \frac{M_{XZ}}{m}\ ;\ z_c = \frac{M_{XY}}{m},$$ где m - масса поверхности.

5. Моменты инерции материальной поверхности относительно осей координат. Если $\mu = \mu(x; y; z)$ – плотность распределения массы по поверхности, то моменты инерции этой поверхности относительно координатных осей находятся по формулам:

$$I_X = \iint_S \left(y^2 + z^2\right) \cdot \mu(x; y; z) dS ;$$

$$I_Y = \iint_S \left(x^2 + z^2\right) \cdot \mu(x; y; z) dS ;$$

$$I_Z = \iint_S \left(x^2 + y^2\right) \cdot \mu(x; y; z) dS .$$

6. Момент инерции материальной поверхности относительно начала координат находится по формуле:

$$I_0 = \iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \mu(x; y; z) dS .$$

Замечание: в случае, если поверхность однородна (т.е. $\mu = \text{const}$), в формулах для вычисления моментов инерции обычно полагают $\mu = 1$.

Перечисленные приложения поверхностного интеграла 1-го рода имеют широкое применение во многих технических дисциплинах: в сопротивлении материалов, теории тонкостенных оболочек, механике и др.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Поверхностный интеграл 1-го рода может быть сведён к двойному в следующих случаях.

1) Пусть в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ задана поверхность S такая, что:

- существует однозначная проекция D_{xy} этой поверхности на плоскость XOY;

- уравнение поверхности S задано в явном виде $z = z(x;y)$, где $z(x;y)$ – непрерывно-дифференцируемая функция.

Тогда дифференциал площади поверхности $dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$ и поверхностный интеграл 1-го рода равен двойному:

$$\iint_S f(x;y;z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x;y;z(x;y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy\,.$$

2) Аналогично, если D_{yz} – однозначная проекция поверхности S на плоскость YOZ и $x = x(y;z)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, то

$$\iint_S f(x;y;z)dS = \iint_{D_{YZ}} f(x(y;z);y;z)\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz\,.$$

3) Если D_{xz} – однозначная проекция поверхности S на плоскость XOZ и $y = y(x;z)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, то

$$\iint_S f(x;y;z)dS = \iint_{Dxz} f(x;y(x;z);z)\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz\,.$$

4) Если D_{xy} – однозначная проекция поверхности S на плоскость XOY и поверхность S задана в неявном виде уравнением $F(x;y;z)=0$, где $F(x;y;z)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, то дифференциал площади поверхности будет иметь вид: $dS = \dfrac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_z|}dxdy$

и $\displaystyle\iint_S f(x;y;z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x;y;z(x;y))\frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_z|}dxdy$. Заметим, что в двойном интеграле всё-таки придётся выразить $z = z(x;y)$ в явном виде, чтобы остались только две переменные.

5) Если D_{yz} - однозначная проекция поверхности S на плоскость YOZ и поверхность S задана в неявном виде уравнением $F(x;y;z)=0$, где $F(x;y;z)$- непрерывно-дифференцируемая функция, то дифференциал площади поверхности примет вид:

$$dS=\frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_x|}dydz$$ и

$$\iint_S f(x;y;z)dS=\iint_{D_{xy}} f(x(y;z);y;z)\frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_x|}dydz.$$ В этом случае в двойном интеграле следует выразить $x=x(y;z)$ в явном виде.

6) Если D_{xz} – однозначная проекция поверхности S на плоскость XOZ и поверхность S задана в неявном виде уравнением $F(x;y;z)=0$, где $F(x;y;z)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, то дифференциал площади поверхности

$$dS=\frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_y|}dxdz$$ и

$$\iint_S f(x;y;z)dS=\iint_{D_{xz}} f(x;y(x;z);z)\frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_y|}dxdz.$$ Здесь в двойном интеграле функция $y=y(x;z)$ выражена в явном виде.

Пример 1. Найти массу части поверхности *P*: $x+2y+3z=1$, расположенной в 1-м октанте, если её поверхностная плотность $\mu=x^2yz$.

Решение. Поверхность *P* представляет собой треугольник (рис.1).

Масса данной поверхности находится по формуле:

$$m=\iint_S \mu(x;y;z)dS.$$

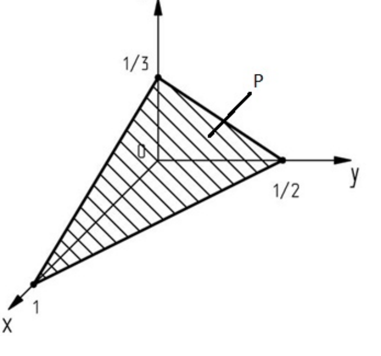

Рис.1. Поверхность *P* к примеру 1

Для нашего случая $m = \iint\limits_P x^2 yz dS$.

Выразим из уравнения поверхности P переменную $z = \dfrac{1 - x - 2y}{3}$

и найдём её частные производные: $z'_x = -\dfrac{1}{3}$, $z'_y = -\dfrac{2}{3}$.

Тогда дифференциал площади поверхности находится по формуле: $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2}\, dxdy = \dfrac{\sqrt{14}}{3} dxdy$.

Вычислим теперь массу поверхности, при этом пояснения к вычислениям будем записывать в квадратных скобках между знаками равенства:

$$m = \iint\limits_P x^2 yz dS = \left[\begin{aligned} & z = \frac{1 - x - 2y}{3}; \\ & dS = \frac{\sqrt{14}}{3} dxdy \end{aligned} \right] = \iint\limits_{D_{xy}} x^2 y \cdot \left(\frac{1 - x - 2y}{3} \right) \frac{\sqrt{14}}{3} dxdy.$$

Область D_{xy} изображена на рис. 2.

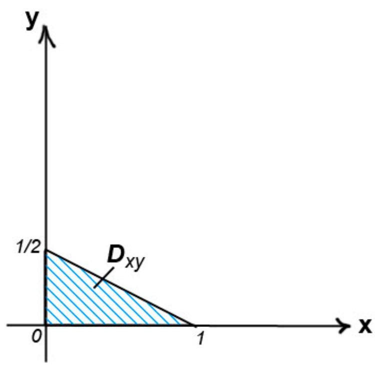

Рис. 2. Проекция поверхности к примеру 1

Расставим пределы в двойном интеграле:

$$m=\iint\limits_{D_{xy}} x^2 y\cdot\left(\frac{1-x-2y}{3}\right)\frac{\sqrt{14}}{3}dxdy=\frac{\sqrt{14}}{9}\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^{\frac{1-x}{2}} y\left(1-x-2y\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{9}\int\limits_0^1 x^2dx\cdot\left(\frac{y^2}{2}\cdot(1-x)-\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_0^{\frac{1-x}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{9}\int\limits_0^1 x^2\cdot\frac{(1-x)^3}{24}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{216}\int\limits_0^1\left(x^2-3x^3+3x^4-x^5\right)dx=\frac{\sqrt{14}}{216}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{5}x^5-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{216}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\sqrt{14}}{216}\cdot\frac{1}{60}=\frac{\sqrt{14}}{12960}.$$

Ответ: масса данной поверхности равна $\frac{\sqrt{14}}{12960}$.

Пример 2. Пусть поверхность S – часть параболоида $z=4x^2+4y^2$, отсеченная плоскостью $z=4$ и расположенная в 1-м октанте. Найти массу поверхности S, если её поверхностная плотность $\mu=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение. Поверхность S изображена на рис. 3. Её масса находится по формуле $m=\iint\limits_S\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dS$.

Из уравнения поверхности $z=4x^2+4y^2$. Следовательно, $z'_x=8x$, $z'_y=8y$. Тогда дифференциал площади поверхности $dS=\sqrt{1+64x^2+64y^2}dxdy$, а её масса будет выражена двойным интегралом: $m=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{1+64x^2+64y^2}dxdy$.

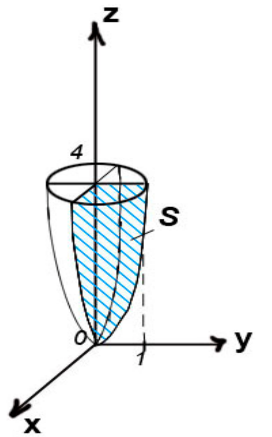

Рис. 3. Поверхность S к примеру 2

Так как область D_{xy} представляет собой четверть круга (рис.4), перейдём в двойном интеграле к полярным координатам по формулам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $dxdy=\rho\,d\rho d\varphi$, $x^2+y^2=\rho^2$.

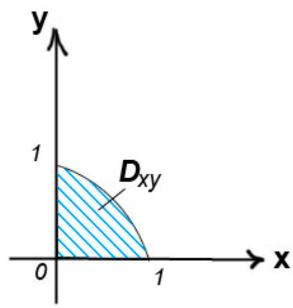

Рис. 4. Проекция поверхности к примеру 2

Тогда масса данной поверхности будет равна

$$m=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\rho^2\cos\varphi}{\rho}\sqrt{1+64\rho^2}\,d\varphi d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho\sqrt{1+64\rho^2}\,d\rho=$$

$$=\left(\sin\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{3}\left(1+64\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\cdot\left(65\sqrt{65}-1\right).$$

Ответ: масса данной поверхности равна $\frac{65\sqrt{65}-1}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интеграл $\iint\limits_S (2x+z)dS$, где S – часть плоскости $x+y+\frac{z}{2}=1$, расположенная в 1-м октанте.

Ответ: 2.

2. Вычислить интеграл $\iint\limits_S (x+3z)dS$, где S – часть плоскости $x+2y+3z=4$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=4$.

Ответ: $\frac{16\sqrt{14}}{3}\pi$.

3. Найти массу части поверхности параболоида $x^2+y^2=2z$, отсечённой плоскостью $z=2$, если поверхностная плотность $\mu=\sqrt{x^2+y^2+1}$.

Ответ: 12π.

4. Найти площадь части поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключённой внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.

Ответ: $8\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$.

5. Найти статический момент полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ относительно плоскости (XOY), если её плотность $\mu=1$.

Ответ: πR^3.

6. Найти координаты центра тяжести однородной полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Ответ: $\left(0;0;\frac{R}{2}\right)$.

7. Вычислить момент инерции относительно начала координат однородной поверхности S: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z \le 3$.

Ответ: $81\pi\sqrt{2}$.

5. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть в области V пространства $\boldsymbol{R^3}$ определена вектор-функция $\overline{a}=a_1(x,y,z)\overline{i}+a_2(x,y,z)\overline{j}+a_3(x,y,z)\overline{k}$, где функции $a_1(x;y;z)$, $a_2(x;y;z)$ и $a_3(x;y;z)$ непрерывны в области V.

Предположим, что в области V задана двусторонняя гладкая поверхность S с выбранной на ней ориентацией.

Пусть $\overline{n}_0=\overline{n}_0(x;y;z)$ – единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности S в точке $M(x;y;z)$.

Выполним следующие действия:

1. Произвольным образом разобьём поверхность S кусочно-гладкими дугами на n частичных поверхностей S_i с площадями ΔS_i, $i=1, 2,..., n$.

2. На каждой частичной поверхности S_i произвольным образом выберем точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$, найдём в ней единичный вектор нормали к поверхности $\overline{n}_0=\overline{n}_0(x_i;y_i;z_i)$ и вычислим значения скалярного произведения заданной вектор-функции $\overline{a}(x_i;y_i;z_i)$ и вектора $\overline{n}_0(x_i;y_i;z_i)$: $(\overline{a}(x_i;y_i;z_i)\cdot\overline{n}_0(x_i;y_i;z_i))$.

3. Составим интегральную сумму:

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}((\overline{a}(x_i;y_i;z_i)\cdot\overline{n}_0(x_i;y_i;z_i))\Delta S_i .$$

4. Обозначим через Δ наибольший из диаметров частей S_i для данного разбиения.

Определение. Если при $\Delta \to 0$ существует <u>конечный</u> предел интегральных сумм σ_n, не зависящий ни от способа разбиения поверхности S, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется ***поверхностным интегралом 2-го рода от вектор-функции*** $\bar{a} = a_1(x,y,z)\bar{i} + a_2(x,y,z)\bar{j} + a_3(x,y,z)\bar{k}$ ***по поверхности*** S и обозначается

$$\iint_S (\bar{a} \cdot \bar{n}) dS = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{a}(x_i; y_i; z_i) \cdot \bar{n}_0(x_i; y_i; z_i)\right) \cdot \Delta S_i .$$

Физический смысл поверхностного интеграла 2-го рода

Если поле $\bar{a} = a_1(x,y,z)\bar{i} + a_2(x,y,z)\bar{j} + a_3(x,y,z)\bar{k}$ – поле скоростей текущей жидкости, то поверхностный интеграл 2-го рода $\iint_S (\bar{a} \cdot \bar{n}_0) dS$ равен количеству жидкости, протекающей через выбранную сторону поверхности в единицу времени, и называется **потоком векторного поля**.

Свойства поверхностного интеграла 2-го рода аналогичны свойствам поверхностного интеграла 1-го рода (линейность, аддитивность и т.д.). Отличительным свойством поверхностного интеграла 2-го рода является зависимость его значения от стороны поверхности: при перемене стороны поверхности поверхностный интеграл 2-го рода меняет знак.

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

В случае, если поверхность S задана уравнением вида $F(x,y,z) = 0$, нормаль к поверхности имеет вид $\bar{n} = \pm grad\, F$, где знак выбирается с учётом стороны поверхности. Тогда поверхностный интеграл 2-го рода можно свести к двойному по формуле:

$$\iint_S (\bar{a} \cdot \bar{n}_0) dS = \iint_{D_{xy}} \frac{(\bar{a} \cdot \bar{n})}{|F'_z|} dxdy ,$$

где D_{xy} – проекция поверхности на S плоскость XOY.

Задачи, приводящие к вычислению некоторого поверхностного интеграла 2-го рода (потока некоторого векторного поля), встречаются во многих технических дисциплинах: в сопротивлении материалов, гидрогазодинамике, механике и др.

Пример 3. Найти поток векторного поля $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ через часть поверхности $S : x^2 + y^2 = 1$, вырезаемую плоскостями $P_1 : z = 0$ и $P_2 : z = 2$ (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

Решение. Боковая поверхность цилиндра (рис. 5) не имеет квадрируемой проекции на плоскость *XOY*. Поэтому будем проецировать её на плоскость *XOZ* (рис. 6).

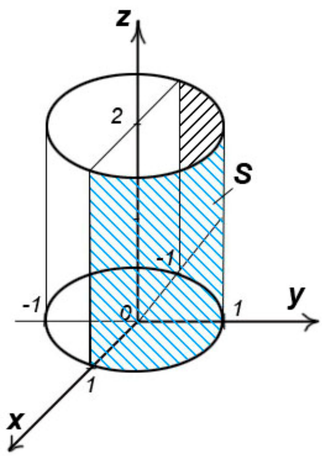

Рис. 5. Поверхность *S* к примеру 3

Так как боковая поверхность цилиндра проецируется на *XOZ* дважды, разобьём её на две части: $S = S_1 \cup S_2$. Тогда поток по свойству аддитивности будет равен сумме потоков через две части: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$.

Поток через поверхность S_1, заданную уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$, где $y \geq 0$, найдём по формуле: $\Pi = \iint\limits_{S} \left(\overline{a} \cdot \overline{n}_0\right) dS = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{\left(\overline{a} \cdot \overline{n}\right)}{\left|F_y'\right|} dxdz$.

Вычислим подынтегральную функцию. Сначала найдём нормаль к поверхности S_1: $x^2+y^2-1=0$ через градиент: $\overline{n}_1 = grad\, S_1 = (2x;2y;0)$. Вычислим скалярное произведение этой нормали и векторного поля $\overline{a}=(x;y;z)$: $\overline{a}\cdot\overline{n}_1 = 2$.

Теперь найдём $|F'_y|$ из уравнения поверхности S_1, записанного в виде $F(x;y;z)=0$. Уравнение S_1 имеет вид $x^2+y^2-1=0$, поэтому $F'_y = 2y$. На поверхности S_1 $y \ge 0$, поэтому $|F'_y| = 2y$.

Тогда интеграл, равный потоку через поверхность S_1, примет вид: $П_1 = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{\overline{a}\cdot\overline{n}_1}{|F'_y|}dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{2}{2y}dxdz$.

В последнем двойном интеграле по области D_{xz} нужно заменить переменную y на функцию от x и z. Выразим y из уравнения поверхности $S_1: x^2+y^2=1$ с учётом знака: $y=\sqrt{1-x^2}$. Тогда $П_1 = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{dxdz}{\sqrt{1-x^2}}$.

Расставим пределы в двойном интеграле по прямоугольнику D_{xz} (рис. 6) и вычислим повторный интеграл:

$$П_1 = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{dxdz}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^2 dz \int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\arcsin x \,\Big|_{-1}^{1} = 2\pi.$$

Итак, $П_1 = 2\pi$.

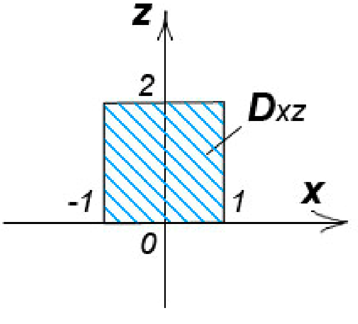

Рис. 6. Проекция поверхности к примеру 3

Рассмотрим теперь вторую половину поверхности цилиндра $S_2:\ x^2+y^2=1,\ y\le 0$.

Выполняя аналогичные действия, получим следующие соотношения:

$S_2: x^2+y^2-1=0$;

$\overline{n}_2 = grad\,S_2 = (2x;2y;0)$;

$\overline{a}\cdot\overline{n}_2 = 2$;

$F'_y = 2y$;

$\left|F'_y\right| = -2y$ с учётом того, что $y\le 0$.

$$\Pi_2 = \iint\limits_S \overline{a}\cdot\overline{n}_{02}dS = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{\overline{a}\cdot\overline{n}_2}{\left|F'_y\right|}dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{dxdz}{-y}.$$

Выразим y из уравнения поверхности $S_2:\ x^2+y^2=1$ ($y\le 0$) с учётом знака: $y=-\sqrt{1-x^2}$.

Тогда $\Pi_2 = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{dxdz}{\sqrt{1-x^2}}$. Заметим, что этот интеграл был вычислен выше, поэтому $\Pi_2 = 2\pi$.

Теперь можно найти поток по всей поверхности цилиндра по свойству аддитивности: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = 2\pi + 2\pi = 4\pi$.

Ответ: 4π.

Пример 4. Найти поток векторного поля $\overline{a} = \left(x+xy^2\right)\overline{i} + \left(y-yx^2\right)\overline{j} + (z-3)\overline{k}$ через часть поверхности $S: x^2+y^2=z^2$ $(z\ge 0)$, вырезаемую плоскостью $P: z=1$ (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

Решение. Поверхность S представляет собой боковую поверхность конуса (рис.7). Поток через неё найдём по формуле:

$$\Pi = \iint\limits_S \left(\overline{a}\cdot\overline{n}_0\right)dS = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\overline{a}\cdot\overline{n}}{\left|F'_z\right|}dxdy.$$

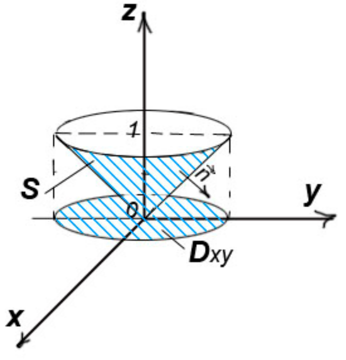

Рис. 7. Поверхность S к примеру 4

Уравнение поверхности S запишем в виде: $F(x;y;z)=0$, т.е. $x^2+y^2-z^2=0$.

Тогда $\overline{n}=grad\,F=(2x;2y;-2z)$. $F'_z=-2z$; $|F'_z|=2z$ с учётом того, что $z\geq 0$.

$$\overline{a}\cdot\overline{n}=2x(x+y^2)+2y(y-yx^2)-2z(z-3)=2x^2+2y^2-2z^2+6z;$$

$$\Pi=\iint\limits_S \overline{a}\cdot\overline{n}_0 dS=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\overline{a}\cdot\overline{n}}{|F'_x|}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{2x^2+2y^2-2z^2+6z}{2z}dxdy.$$

Выразим z из уравнения поверхности S: $x^2+y^2=z^2$ с учётом знака: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Тогда $\Pi=3\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$.

Так как двойной интеграл $\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$ численно равен площади области D_{xy} (см. рис. 7), которая является кругом радиуса $R=3$, то поток через поверхность S будет равен $\Pi=3\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=3\pi R^2=3\pi$.

Ответ: 3π.

Задачи для самостоятельного решения

8. Вычислить поток векторного поля $\overline{a} = 4z\overline{i} + (z+x)\overline{j} + (y-z)\overline{k}$ через поверхность *S*, где S – часть плоскости $x + 2y + 3z = 6$, расположенная в 1-м октанте (нормаль образует острый угол с осью (*OZ*)).

Ответ: 27.

9. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = 3\overline{i} + 2xz\overline{k}$ через верхнюю сторону прямоугольника, вырезанного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $x = 3$, из плоскости $y + z = 6$.

Ответ: 162.

10. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = -y\overline{i} + x\overline{j} + z^2\overline{k}$ через часть параболоида $z = x^2 + y^2$, отсечённую плоскостью $z = 1$ (нормаль образует острый угол с осью (*OZ*)).

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

11. Найти поток вектора $\overline{a} = xz\overline{i}$ через часть параболоида $z = 4 - x^2 - y^2$, расположенную выше плоскости (*XOY*) в сторону внешней нормали к замкнутой поверхности, ограниченной данным параболоидом и плоскостью (*XOY*).

Ответ**:** $\frac{32}{3}\pi$.

В случае, если поверхность S является замкнутой, поток через её внешнюю сторону можно найти с помощью **формулы Остроградского – Гаусса**: $\oint\!\!\oint_S \overline{a} \cdot \overline{n}_0 \, dS = \iiint_V div\overline{a} \, dxdydz$**,** где V **-** тело, ограниченное замкнутой поверхностью S, а $div\overline{a}$ **-** дивергенция векторного поля $\overline{a} = a_1(x,y,z)\overline{i} + a_2(x,y,z)\overline{j} + a_3(x,y,z)\overline{k}$. Это скалярная величина, равная $div\overline{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$. Отметим, что поток через замкнутую поверхность обозначается символом $\oint\!\!\oint_S \overline{a} \cdot \overline{n}_0 \, dS$.

Пример 5. Найти поток векторного поля $\overline{a}=5\pi x\overline{i}+\left(1-2y\right)\overline{j}+$ $+4\pi z\overline{k}$ через часть плоскости $P:\dfrac{x}{2}+4y+\dfrac{z}{3}=1$, расположенную в 1-м октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

Решение. Данная поверхность – треугольник (рис. 8), она не является замкнутой. Вычислим поток, дополнив поверхность до замкнутой.

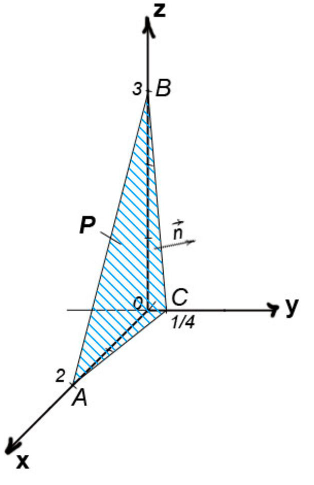

Рис. 8. Поверхность *S* к примеру 5

Пусть поверхность S состоит из плоскостей $P:\dfrac{x}{2}+4y+\dfrac{z}{3}=1$, $P_1:z=0$, $P_2:x=0$ и $P_3:y=0$. Тогда $S=P\cup P_1\cup P_2\cup P_3$.

Плоскости P_1, P_2 и P_3 не имеют квадрируемых пересечений, следовательно, по свойству аддитивности будет справедлива формула:

$$\oiint\limits_S \overline{a}\cdot\overline{n}_0\,dS=\iint\limits_P \overline{a}\cdot\overline{n}_0\,dS+\iint\limits_{P_1}\overline{a}\cdot\overline{n}_{01}dS+\iint\limits_{P_2}\overline{a}\cdot\overline{n}_{02}dS+\iint\limits_{P_3}\overline{a}\cdot\overline{n}_{03}dS.$$

Вычислим сначала поток через замкнутую поверхность S по формуле Остроградского-Гаусса: $\oiint\limits_S \overline{a}\cdot\overline{n}_0\,dS=\iiint\limits_V div\overline{a}\,dxdydz.$

Дивергенция данного векторного поля равна

$$div\bar{a} = \frac{\partial(5\pi x)}{\partial x} + \frac{\partial(1-2y)}{\partial y} + \frac{\partial(4\pi z)}{\partial z} = 5\pi - 2 + 4\pi = 9\pi - 2.$$

Тогда $\oiint\limits_S \bar{a}\cdot\bar{n}_0\, dS = (9\pi-2)\iiint\limits_V dxdydz = (9\pi-2)V_{тела}$.

Объём тела найдём по формуле объёма пирамиды:

$$V_{тела} = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 3 = \frac{1}{4}\cdot$$

Следовательно, $\oiint\limits_S \bar{a}\cdot\bar{n}_0\, dS = \dfrac{9\pi-2}{4}$.

Плоскости P_1, P_2 и P_3 не являются замкнутыми поверхностями, потоки через эти плоскости найдём по формуле $\Pi = \iint\limits_S (\bar{a}\cdot\bar{n}_0)dS$.

Для грани P_1 имеем: $\Pi_1 = \iint\limits_{P_1} \bar{a}\cdot\bar{n}_{01}dS$. Нормаль к нижней стороне треугольника P_1 сонаправлена с отрицательной полуосью *OZ*, следовательно, единичная нормаль к ней имеет координаты: $\bar{n}_{01} = (0;0;-1)$. Тогда $\bar{a}\cdot\bar{n}_{01} = -4\pi z$. Так как на поверхности P_1 $z=0$, то $\bar{a}\cdot\bar{n}_{01} = 0$. Следовательно, $\Pi_1 = 0$.

Для грани P_2 имеем: $\Pi_2 = \iint\limits_{P_2} \bar{a}\cdot\bar{n}_{02}dS$. Нормаль к грани P_2 сонаправлена с отрицательной полуосью *OX*, следовательно, единичная нормаль к ней имеет координаты: $\bar{n}_{01} = (-1;0;0)$. Тогда $\bar{a}\cdot\bar{n}_{02} = -5\pi x$. Так как на поверхности P_2 $x=0$, то $\bar{a}\cdot\bar{n}_{02} = 0$. Отсюда имеем: $\Pi_2 = 0$.

Аналогично, $\bar{n}_{03} = (0;-1;0)$. Тогда $\bar{a}\cdot\bar{n}_{03} = -1+2y$. Поскольку на поверхности P_3 $y=0$, то $\bar{a}\cdot\bar{n}_{03} = -1$.

Следовательно, $\Pi_3 = \iint\limits_{P_3} \bar{a}\cdot\bar{n}_{03}dS = -\iint\limits_{P_3} dS$.

Интеграл $\iint\limits_{P_3} dS$ численно равен площади прямоугольного треугольника с катетами, равными 2 и 3. Тогда $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 3$. Следовательно, $П_3 = -3$.

Окончательно получим значение потока через замкнутую поверхность: $\oiint\limits_S \overline{a}\cdot\overline{n}_0\, dS = \iint\limits_P \overline{a}\cdot\overline{n}_0\, dS + П_1 + П_2 + П_3 = \iint\limits_P \overline{a}\cdot\overline{n}_0 dS - 3 = \dfrac{9\pi - 2}{4}$.

Отсюда $П = \iint\limits_P \overline{a}\cdot\overline{n}_0\, dS = \dfrac{9\pi-2}{4} + 3 = \dfrac{9\pi+10}{4}$.

Ответ: $\dfrac{9\pi+10}{4}$.

Пример 6. Найти поток векторного поля $\overline{a} = (2y-5x)\overline{i} + (x-1)\overline{j} + (2\sqrt{xy}+2z)\overline{k}$ через замкнутую поверхность $S: \begin{cases} 2x+2y-z=4, \\ x=0, y=0, z=0 \end{cases}$ (нормаль внешняя).

Решение. Данная поверхность представляет собой полную поверхность тетраэдра (рис. 9) и является замкнутой. Вычислим поток через неё, используя формулу Остроградского-Гаусса:

$$\oiint\limits_S \overline{a}\cdot\overline{n}_0\, dS = \iiint\limits_V div\overline{a}\, dxdydz$$

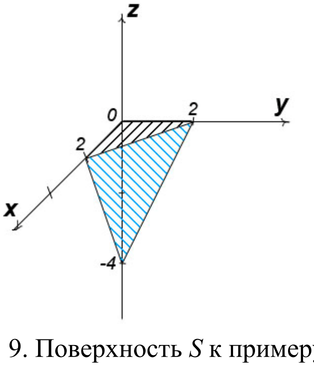

Рис. 9. Поверхность S к примеру 6

Найдём дивергенцию данного векторного поля: $div\bar{a} = \dfrac{\partial(2y-5x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(x-1)}{\partial y} + \dfrac{\partial\left(2\sqrt{xy}+2z\right)}{\partial z} = -5+0+2=-3.$

Тогда $\varPi = \oiint\limits_S \bar{a}\cdot\bar{n}_0\,dS = \iiint\limits_V (-3)\,dxdydz = -3V_{пир}$.

Объём пирамиды вычислим аналогично задаче 5:
$V_{пир} = \dfrac{1}{3}S_{осн}\cdot H = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)\cdot 4 = \dfrac{8}{3}\cdot$

Тогда $\varPi = -3\cdot\dfrac{8}{3} = -8$.

Ответ: -8.

Пример 7. Найти поток векторного поля $\bar{a} = (x+z)\bar{i} + y\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S:\begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2, \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ (нормаль внешняя).

Решение. Поверхность, имеющая уравнение $z = 8 - x^2 - y^2$, представляет собой параболоид, смещённый на 8 единиц вверх, ветви которого направлены вниз, а уравнение $z = x^2 + y^2$ – уравнение параболоида с вершиной, совпадающей с началом координат, и ветвями, направленными вверх (рис. 10). Найдём линию их пересечения как решение уравнения $8 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$. Отсюда $x^2 + y^2 = 4$, т.е. линия пересечения поверхностей – окружность радиуса 2.

Данная поверхность является замкнутой. Вычислим поток через неё, используя формулу Остроградского-Гаусса.

$$div\bar{a} = \frac{\partial(x+z)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(y)}{\partial z} = 1+0+0=1.$$

Тогда $\varPi = \oiint\limits_S \bar{a}\cdot\bar{n}_0\,dS = \iiint\limits_V dxdydz$.

В тройном интеграле перейдём к цилиндрическим координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, $x^2 + y^2 = \rho^2$.

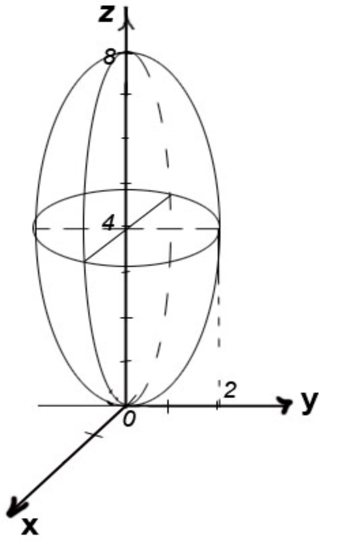

Рис. 10. Поверхность S к примеру 7

Якобиан перехода к цилиндрическим координатам равен $\left|\mathrm{I}\right| = \rho$, поэтому $\iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V \rho d\rho d\varphi dz$.

Пределы в тройном интеграле расставим согласно рис. 10.

$$\Pi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho\, d\rho \int\limits_{\rho^2}^{8-\rho^2} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho\left(8 - 2\rho^2\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(4\rho^2 - \frac{\rho^4}{2}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(16 - 8\right) = 8 \cdot 2\pi = 16\pi.$$

Ответ: 16π.

Пример 8. Найти поток векторного поля $\overline{a} = \left(y^2 + z^2\right)\overline{i} + {} + \left(xy + y^2\right)\overline{j} + \left(xz + z\right)\overline{k}$ через замкнутую поверхность $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0,\ z = 1 \end{cases}$ (нормаль внешняя).

Решение. Данная поверхность является замкнутой (рис. 11). Вычислим поток через неё, используя формулу Остроградского-Гаусса.

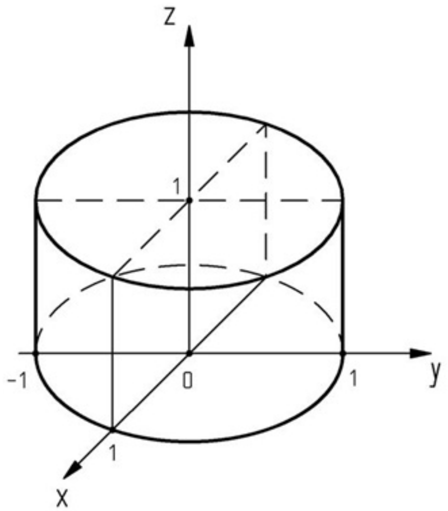

Рис. 11. Поверхность S к примеру 8

$$div\overline{a} = \frac{\partial\left(y^2+z^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(xy+y^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(xz+z\right)}{\partial z} = 0 + x + 2y + x + 1 = 2x + 2y + 1.$$

Тогда $\Pi = \oiint\limits_S \overline{a}\cdot\overline{n}_0\, dS = \iiint\limits_V \left(2x+2y+1\right)dxdydz$.

Так как проекция данного тела на плоскость XOY является кругом, в тройном интеграле перейдём к цилиндрическим координатам по формулам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, $x^2 + y^2 = \rho^2$. Аналогично примеру 7

$$\iiint\limits_V \left(2x+2y+1\right)dxdydz = \iiint\limits_V \rho\left(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + 1\right)d\varphi d\rho dz.$$

Расставим пределы в тройном интеграле:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^1 \left(2\rho\cos\varphi + 2\rho\sin\varphi + 1\right) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\left(2\rho\cos\varphi +\right.$$

$$\left. + 2\rho\sin\varphi + 1\right) d\rho \int_0^1 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2\rho^2\cos\varphi + 2\rho^2\sin\varphi + \rho\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(2\cos\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho + 2\sin\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho + \int_0^1 \rho\, d\rho \right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{2}{3}\rho^3\cos\varphi + \frac{2}{3}\rho^3\sin\varphi + \frac{\rho^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}\cos\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi + \frac{1}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sin\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi + \frac{1}{2} \right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0 - \frac{2}{3} + \pi - 0 + \frac{2}{3} - 0 = \pi.$$

Ответ: π.

Задачи для самостоятельного решения

12. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\overline{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S: $z = x^2 + y^2 + 3$, $z = 4$, $x = 0$ и $y = 0$ (1-й октант).

Ответ: $\frac{11}{12}\pi$.

13. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = (x^2 + y)\bar{i} - 2\bar{j} + x\overline{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S: $y = x^2$, $z = 0$, $z = 4$ и $y = 1$.

Ответ: 0.

14. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = 2xz\bar{i} + x^3\bar{j} + z^2\overline{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 6 - x^2 - y^2$.

Ответ: $\frac{368}{3}\pi$.

15. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = y\overline{i} + xz\overline{j} + z^2\overline{k}$ через замкнутую поверхность S: $z = x^2 + y^2$, $z = 4$ в сторону внешней нормали.

Ответ: $\frac{128}{3}\pi.$

16. Вычислить поток векторного поля

$$\overline{a} = \left(5y^{20} + \sin z - 3x\right)\overline{i} + \left(e^{xz} + 20\ln(x^2+1) + 2y\right)\overline{j} + \left(4z + \frac{\operatorname{arctg} x}{y^4+2}\right)\overline{k}$$

через внешнюю сторону замкнутой поверхности S: $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 2$.

Ответ: 8π .

6. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

Пусть в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ задана гладкая кривая $l = AB$, в каждой точке которой определена непрерывная функция $u = f(x;y;z)$.

Выполним действия:

1. Разобьём кривую l произвольным образом на n частичных дуг l_i, длины частичных дуг обозначим Δl_i, $i = 1, 2,..., n$.

2. На каждой частичной дуге l_i произвольным образом выберем точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$, найдём значения функции в этих точках.

3. Составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\cdot\Delta l_i.$$

4. Обозначим через $\Delta = \max \Delta l_i$.

Определение. Если при $\Delta \to 0$ существует конечный предел интегральных сумм σ_n , не зависящий ни от способа разбиения кривой l , ни от выбора точек M_i, то этот предел называется ***криволинейным интегралом 1-го рода по кривой*** l ***от функции*** $u = f(x;y;z)$ и обозначается

$$\int_l f(x;y;z)\,dl = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta l_i.$$

Замечание: dl часто называют дифференциалом дуги кривой.

7. СВОЙСТВА И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Если в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ задана гладкая кривая, в точках которой непрерывно распределена масса линейной плотностью $\mu = \mu(x;y;z) \geq 0$, то криволинейный интеграл 1-го рода численно равен **массе** этой кривой:

$$m = \int_l \mu(x;y;z)\,dl.$$

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода

1) (линейность) Если функция имеет вид

$u = k_1 \cdot f_1(x;y;z) + k_2 \cdot f_2(x;y;z)$,

то $\int_l \big(k_1 \cdot f_1(x;y;z) + k_2 \cdot f_2(x;y;z)\big)\,dl = k_1\int_l f_1(x;y;z)\,dl + k_2\int_l f_2(x;y;z)\,dl$, где k_1, k_2 – произвольные постоянные.

2) (аддитивность) Если кусочно-гладкую кривую l можно представить в виде объединения непересекающихся гладких дуг $l = l_1 \bigcup l_2$, где $l_1 \bigcap l_2 = \varnothing$, то

$$\int_l f(x;y;z)\,dl = \int_{l_1} f(x;y;z)\,dl + \int_{l_2} f(x;y;z)\,dl.$$

3) Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления пути интегрирования. Это означает, что если кривая l соединяет точки *A* и *B*, то криволинейный интеграл 1-го рода по дуге l от *A* до *B* равен интегралу по этой дуге от *B* до *A*, т.е.

$$\int_{AB} f(x;y;z)\,dl = \int_{BA} f(x;y;z)\,dl.$$

4) (оценка модуля интеграла)

$$\left|\int_l f(x;y;z)dl\right| \le \int_l |f(x;y;z)|dl.$$

5) (теорема о среднем) Если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в точках кривой l, то на этой кривой существует точка M_0 такая, что

$$\int_l f(x;y;z)\,dl = f(M_0)\cdot L,$$

где L – длина кривой l.

6) $\int_l dl = L$, где L – длина кривой l.

7) Если $f(x;y;z) \ge g(x;y;z), \forall (x;y;z) \in l$, то

$$\int_l f(x;y;z)\,dl \ge \int_l g(x;y;z)\,dl.$$

8. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода может быть сведено к нахождению определённого интеграла. Рассмотрим несколько основных случаев задания кривой.

1) Если кривая l задана на плоскости (XOY) уравнением вида $y = y(x), x \in [a;b]$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int_l f(x;y)dl = \int_a^b f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx.$$

2) Если кривая l задана на плоскости (XOY) параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha;\beta]$, где $x(t), y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то справедливо равенство

$$\int_l f(x;y)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(x)) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} \cdot dt.$$

Аналогичная формула справедлива для криволинейного интеграла 1-го рода от функции $u = f(x;y;z)$ по пространственной кривой l, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),$ $z = z(t),\ t \in [a;b]$, где $x(t),\ y(t),\ z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, тогда

$$\int_l f(x;y;z)\,dl = \int_a^b f(x(t);y(x);z(t)) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} \cdot dt.$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int_l xy^2 dl$, где l – отрезок прямой между точками O (0;0) и A(5;2).

Решение. Уравнение прямой OA имеет вид $y = \frac{2}{5}x,\ x \in [0;5]$. Используем формулу $\int_l f(x;y)\,dl = \int_a^b f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y_x')^2}\,dx$, где $y' = \frac{2}{5}$. Тогда искомый криволинейный интеграл будет равен $\int_l xy^2 dl = \int_0^5 x \cdot \left(\frac{2}{5}x\right)^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2}\,dx = \frac{4\sqrt{29}}{125}\int_0^5 x^3 dx = \frac{4\sqrt{29}}{125} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^5 = 5\sqrt{29}.$

Ответ: $5\sqrt{29}$.

Задачи для самостоятельного решения

17. Вычислить интеграл $\int_l \frac{dl}{2 + x^2 - y^2}$, где l- отрезок прямой между точками A (0;1) и B (1;0).

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3$.

18. Вычислить интеграл $\int\limits_{l} \frac{dl}{\sqrt{4x+1}}$, где l – дуга кривой $x = y^2$ между точками A (9;3) и B (16;4).

Ответ: 1.

9. ПРИЛОЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

1) Длина дуги кривой $L = \int\limits_{l} dl$.

2) Масса кривой $m = \int\limits_{l} \mu(x;y;z)\,dl$, где $\mu = \mu(x;y;z)$ – линейная плотность этой кривой.

3) Статические моменты материальной кривой относительно координатных плоскостей. Если $\mu = \mu(x;y;z)$ – плотность распределения массы по кривой, то статические моменты этой кривой относительно плоскостей координат находятся по формулам:

$$M_{XY} = \int\limits_{l} z \cdot \mu(x;y;z)\,dl;$$

$$M_{XZ} = \int\limits_{l} y \cdot \mu(x;y;z)\,dl;$$

$$M_{YZ} = \int\limits_{l} x \cdot \mu(x;y;z)\,dl.$$

4) Координаты центра масс материальной кривой, имеющей линейную плотность $\mu = \mu(x;y;z)$:

$$x_c = \frac{M_{YZ}}{m};\ y_c = \frac{M_{XZ}}{m};\ z_c = \frac{M_{XY}}{m},$$

где m – масса кривой.

Для случая однородной кривой (т.е. $\mu = \text{const}$) формулы имеют вид:

$$x_c = \frac{1}{L}\int_l x\,dl\,,\; y_c = \frac{1}{L}\int_l y\,dl\,, z_c = \frac{1}{L}\int_l z\,dl\,,$$

где L - длина дуги кривой.

5) Моменты инерции материальной кривой относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Если $\mu = \mu(x;y;z)$ – плотность распределения массы по кривой, то моменты инерции этой кривой относительно координатных осей находятся по формулам:

$$I_X = \int_l \left(y^2 + z^2\right)\cdot \mu(x;y;z)\,dl\;;$$

$$I_Y = \int_l \left(x^2 + z^2\right)\cdot \mu(x;y;z)\,dl\;;$$

$$I_Z = \int_l \left(x^2 + y^2\right)\cdot \mu(x;y;z)\,dl\;.$$

Для моментов инерции относительно координатных плоскостей формулы имеют вид:

$$I_{XY} = \int_l z^2 \cdot \mu(x;y;z)\,dl;$$

$$I_{XZ} = \int_l y^2 \cdot \mu(x;y;z)\,dl;$$

$$I_{YZ} = \int_l x^2 \cdot \mu(x;y;z)\,dl.$$

Момент инерции материальной кривой относительно начала координат:

$$I_0 = \int_l \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\cdot \mu(x;y;z)\,dl\;.$$

Замечание. Формулы для вычисления моментов инерции приведены для случая, когда кривая задана в пространстве. Если кривая задана на плоскости, то формулы для нахождения моментов инерции имеют вид:

$$I_X = \int\limits_l y^2 \cdot \mu(x;y)\,dl\,;$$

$$I_Y = \int\limits_l x^2 \cdot \mu(x;y)\,dl\,;$$

$$I_0 = \int\limits_l \left(x^2 + y^2\right)\cdot \mu(x;y)\,dl\,.$$

Приведённые приложения криволинейного интеграла 1-го рода применяются в механике, сопротивлении материалов, теории стержней, прочности и других дисциплинах.

Пример 10. Вычислить массу стержня $[OA]$, где $[OA]$ – отрезок прямой между точками $O(0;0;0)$ и $A(1;2;2)$, если его плотность $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. Массу стержня найдём по формуле $m = \int\limits_l \mu(x;y;z)\,dl$.

В данном случае $m = \int\limits_l (x^2 + y^2 + z^2)\,dl$.

Составим уравнение прямой *OA*. Заметим, что уравнение прямой, проходящей через две точки $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,.$$

В данном случае $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z-0}{2-0}$, или $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.

Запишем параметрические уравнения этой прямой: $x = t,\ y = 2t,\ z = 2t$, где $t \in [0;1]$. Тогда $x'_t = 1;\ y'_t = 2;\ z'_t = 2$. Следовательно, интеграл для вычисления массы стержня $[OA]$ примет вид:

$$m = \int\limits_l (x^2 + y^2 + z^2)\,dl = \int\limits_0^1 \left(t^2 + 4t^2 + 4t^2\right)\cdot\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}\,dt = 27\int\limits_0^1 t^2 dt = 9\,.$$

Ответ: масса стержня равна 9.

Пример 11. Вычислить момент инерции однородной полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$ $(\mu = 1)$ относительно оси (OX).

Решение. Момент инерции кривой относительно оси (OX) найдём по формуле $I_X = \int\limits_l y^2 \cdot \mu(x; y)\, dl$.

Запишем параметрические уравнения этой кривой: $x = R\cos t;\ y = R\sin t;\ t \in [0; \pi]$. Тогда $x'_t = -R\sin t;\ y'_t = R\cos t$ и момент инерции кривой относительно оси (OX) будет равен

$$I_X = \int\limits_l y^2 \cdot dl = \int\limits_0^\pi R^2 \sin^2 t \cdot \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt = R^3 \int\limits_0^\pi \sin^2 t\, dt =$$

$$= R^3 \int\limits_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = R^3 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Bigg|_0^\pi = \frac{\pi R^3}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi R^3}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

19. Найти массу отрезка прямой $y = 2x + 3,\ 0 \leq x \leq 1$, если плотность в любой точке равна расстоянию от этой точки до оси абсцисс.

Ответ: $4\sqrt{5}$.

20. Найти массу дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$, если её плотность $\mu = x$.

Ответ: R^2.

21. Вычислить статический момент относительно оси (OY) отрезка прямой, соединяющего точки A (0;2) и B (1;5), если линейная плотность $\mu = \sqrt{10}y$.

Ответ: 20.

22. Вычислить момент инерции относительно оси ординат дуги кривой $y = \ln x$, соединяющей точки A (1;0) и B (3; ln3), если линейная плотность $\mu = 1$.

Ответ: $\dfrac{10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{3}$.

10. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА, ЕГО СВОЙСТВА

Пусть в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ задана ориентированная гладкая кривая $l = AB$, в каждой точке которой определено векторное поле $\overline{a} = a_1(x, y, z)\overline{i} + a_2(x, y, z)\overline{j} + a_3(x, y, z)\overline{k}$, непрерывное во всех точках этой кривой.

Выполним следующие действия:

1. Произвольным образом разобьём кривую l на n частичных дуг точками $M_0 = A, M_1, M_2, ..., M_n = B$, длины частичных дуг $M_{i-1}M_i$ обозначим Δl_i, $i = 1, 2,..., n$.

2. На каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ произвольно выберем точку $N_i(x_i; y_i; z_i)$, найдём в ней единичный вектор касательной к кривой l $\overline{\tau}_0 = \overline{\tau}_0(x_i; y_i; z_i)$ и вычислим значения скалярного произведения заданной вектор-функции $\overline{a}(x_i; y_i; z_i)$ и единичного касательного вектора $\overline{\tau}_0(x_i; y_i; z_i)$: $(\overline{a}(x_i; y_i; z_i) \cdot \overline{\tau}_0(x_i; y_i; z_i))$.

3. Составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} ((\overline{a}(x_i; y_i; z_i) \cdot \overline{\tau}_0(x_i; y_i; z_i))\Delta l_i .$$

4. Обозначим через $\Delta = \max \Delta l_i$.

Определение. Если при $\Delta \to 0$ существует <u>конечный</u> предел интегральных сумм σ_n, не зависящий ни от способа разбиения кривой l, ни от выбора точек N_i, то этот предел называется ***криволинейным***

интегралом 2-го рода по кривой l ***от вектор-функции*** $\overline{a} = a_1(x,y,z)\overline{i} + a_2(x,y,z)\overline{j} + a_3(x,y,z)\overline{k}$ и обозначается

$$\int_l (\overline{a};\overline{\tau}_0)\,dl = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}((\overline{a}(x_i;y_i;z_i)\cdot\overline{\tau}_0(x_i;y_i;z_i))\Delta l_i.$$

В ***координатной форме*** криволинейный интеграл 2-го рода записывается в виде:

$$\int_l a_1(x;y;z)dx + a_2(x;y;z)dy + a_3(x;y;z)dz.$$

Пусть $\overline{r} = (x;y;z)$ – радиус-вектор точки, тогда $\overline{dr} = (dx;dy;dz)$. Скалярное произведение векторного поля и вектора $\overline{dr}$ будет равно $\overline{a}\cdot\overline{dr} = a_1dx + a_2dy + a_3dz$. Тогда получим ***векторную форму*** записи криволинейного интеграла 2-го рода: $\int_l \overline{a}\cdot\overline{dr}$.

Условия существования криволинейного интеграла 2-го рода:

1) Кривая l является кусочно-гладкой.

2) Функции $a_1(x;y;z), a_2(x;y;z)\, и\ a_3(x;y;z)$ непрерывны во всех точках этой кривой.

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода:

1) При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл 2-го рода меняет знак, т.е. если $l = AB$, то

$$\int_{AB}\overline{a}\cdot d\overline{r} = -\int_{BA}\overline{a}\cdot d\overline{r}.$$

2) Аддитивность: если кривую l можно представить в виде объединения непересекающихся гладких кривых $l = l_1 \cup l_2$, где $l_1 \cap l_2 = \varnothing$, то

$$\int_l \overline{a}\cdot d\overline{r} = \int_{l_1}\overline{a}\cdot d\overline{r} + \int_{l_2}\overline{a}\cdot d\vec{r}.$$

3) (линейность) Если вектор-функция имеет вид $\overline{a} = k_1\cdot\overline{a}_1(x;y;z) + k_2\cdot\overline{a}_2(x;y;z)$, то для любых произвольных постоянных $k_1\ и\ k_2$ справедливо равенство:

$$\int_l (k_1\cdot\overline{a}_1(x;y;z) + k_2\cdot\overline{a}_2(x;y;z))\cdot d\overline{r} = k_1\int_l \overline{a}_1(x;y;z)\cdot d\overline{r} + k_2\int_l \overline{a}_2(x;y;z)\cdot d\overline{r}.$$

11. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО РОДА, ЕГО ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Криволинейный интеграл 2-го рода сводится к определённому в следующих случаях:

1) Если кривая l задана на плоскости (XOY) уравнением $y = y(x),\ x \in [a;b]$, где функция $y(x)$ непрерывна вместе со своей производной $y'(x)$ на $[a;b]$, то

$$\int_l a_1(x;y)dx + a_2(x;y)dy = \int_a^b \left(a_1(x;y(x)) + a_2(x;y(x)) \cdot y'(x)\right)dx.$$

2) Если кривая l задана на плоскости (XOY) уравнением $x = x(y),\ y \in [c;d]$, где функция $x(y)$ непрерывна вместе со своей производной $x'(y)$ на $[c;d]$, то

$$\int_l a_1(x;y)dx + a_2(x;y)dy = \int_c^d \left(a_1(x(y);y) \cdot x'(y) + a_2(x(y);y)\right)dy.$$

3) Если кривая l задана на плоскости (XOY) параметрически, т.е. парой уравнений $x = x(t),\ y = y(t)$, где $t \in [\alpha;\beta]$, то

$$\int_l a_1(x;y)dx + a_2(x;y)dy = \int_\alpha^\beta \left(a_1(x(t);y(t)) \cdot x'(t) + a_2(x(t);y(t)) \cdot y'(t)\right)dt.$$

4) Если кривая l задана в пространстве $\boldsymbol{R^3}$ параметрическими уравнениями:

$$l: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \text{ где } t \in [\alpha;\beta],$$

то криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_l a_1(x;y;z)dx + a_2(x;y;z)dy + a_3(x;y;z)dz =$$

$$= \int_\varepsilon^\beta \left(a_1(x(t);y(t);z(t))\cdot x'(t) + a_2(x(t);y(t);z(t))\cdot y'(t) + a_3(x(t);y(t);z(t))\cdot z'(t)\right)\cdot dt.$$

Физический смысл криволинейного интеграла второго рода – работа силы $\overline{F}$ по перемещению единичной массы вдоль контура l:

$$A = \int_l \overline{F}\cdot\overline{dr}.$$

Пример 12. Найти работу силы $\overline{F} = (x-y)\bar{i} + \bar{j}$ при перемещении точки вдоль линии l от точки $M(2;0)$ до точки $N(-2;0)$, если $l: x^2 + y^2 = 4$ $(y \geq 0)$.

Решение. Работа силы $\overline{F}$ равна $A = \int_l \overline{F}\cdot\overline{dr} = \int_l (x-y)dx + dy$.

Кривая l представляет собой верхнюю полуокружность с центром в начале координат и радиусом 2 (рис. 12).

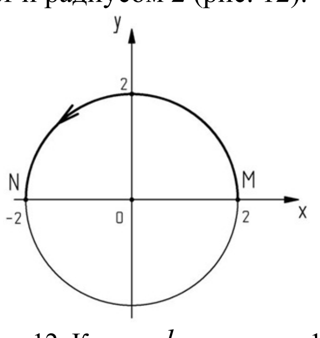

Рис. 12. Кривая l к примеру 12

Используем параметрические уравнения окружности: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$. Для верхней полуокружности $t \in [0;\pi]$. Тогда работа равна

$$A = \int_l (x-y)dx + dy = \begin{bmatrix} x = 2\cos t \Rightarrow dx = -2\sin t\,dt \\ y = 2\sin t \Rightarrow dy = 2\cos t\,dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^\pi (2\cos t - 2\sin t)\cdot(-2\sin t dt) + 2\cos t\,dt =$$

$$=\int_0^{\pi}\left(4\sin^2 t-4\cos t\sin t+2\cos t\right)dt=4\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-$$

$$-4\int_o^{\pi}\sin t\, d\sin t+2\int_0^{\pi}\cos t\, dt=2\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi}-2\sin^2 t\,\Big|_0^{\pi}+$$

$$+2\sin t\Big|_0^{\pi}=2\pi.$$

Ответ: 2π.

Задачи для самостоятельного решения

23. Вычислить интеграл $\int\limits_l ydx-xdy$, где l – дуга кривой $y=x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(2;8)$.

Ответ: -8.

24. Вычислить работу силы $\overline{F}=(x+y)\bar{i}-2xy\bar{j}$, перемещающей точку вдоль отрезка прямой от точки $M(2;-1)$ до точки $N(-1;8)$.

Ответ: -3.

25. Вычислить работу силы $\overline{F}=(x^2+y)\bar{i}+(2-y)\bar{j}$, перемещающей точку вдоль параболы $y=2-x^2$ от точки $M(2;-2)$ до точки $N(-1;1)$.

Ответ: 1,5.

26. Вычислить работу силы $\overline{F}=xy\bar{i}+y^2\bar{j}$ по перемещению точки вдоль эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ от точки $A(0;2)$ до точки $B(3;0)$ $(y\geq 0)$.

Указание: использовать параметрические уравнения эллипса: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, где a и b – полуоси эллипса.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

27. Найти работу силового поля $\overline{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + (x + y - 1)\bar{k}$ по перемещению точки вдоль отрезка прямой от точки $A(1;1;1)$ до точки $B(2;3;4)$.

Ответ: 13.

12. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ФОРМУЛЫ ГРИНА И СТОКСА

Если кривая l является **замкнутой,** то криволинейный интеграл второго рода обозначается $\oint\limits_l \bar{a} \cdot \overline{dr}$ и называется **циркуляцией векторного поля**, он численно равен работе силы по замкнутому контуру.

В случае, если поле плоское, т.е. $\bar{a} = a_1(x;y)\bar{i} + a_2(x;y)\bar{j}$, то его циркуляция может быть вычислена с помощью **формулы Грина**:

$$\oint\limits_l a_1(x;y)dx + a_2(x;y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{dy} \right) dxdy,$$

где D – область на плоскости *XOY*, ограниченная замкнутым контуром l, причём обход контура производится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Пример 13. Найдём работу силы из примера 12 по формуле Грина, дополнив контур до замкнутого.

Решение. Вычислим работу силы, дополнив полуокружность l до замкнутого контура L с помощью отрезка прямой $y = 0$, $x \in [-2;2]$.

Тогда по свойству аддитивности $\oint\limits_L \overline{F} \cdot \overline{dr} = \int\limits_{[MN]} \overline{F} \cdot \overline{dr} + \int\limits_l \overline{F} \cdot \overline{dr}$.

Интеграл $\oint\limits_L \overline{F} \cdot \overline{dr}$ найдём по формуле Грина:

$$\oint\limits_l a_1(x;y)dx + a_2(x;y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{dy} \right) dxdy\,.$$

Здесь $a_1(x;y) = x - y,\ a_2(x;y) = 1$. Следовательно, $\dfrac{\partial a_1}{\partial y} = -1,\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x} = 0$.

Тогда $\oint\limits_L \overline{F} \cdot \overline{dr} = \iint\limits_D (0+1)dxdy = \iint\limits_D dxdy = \dfrac{1}{2} S_{круга} = \dfrac{1}{2}\pi R^2 = 2\pi.$

Интеграл по отрезку $[MN]$, лежащему на оси (OX), равен

$$\int\limits_{[MN]} \overline{F} \cdot \overline{dr} = \int\limits_{[MN]} (x-y)dx + dy = [y = 0 \Rightarrow dy = 0] = \int\limits_{-2}^{2} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{2} = 2 - 2 = 0.$$

Тогда $A = \int\limits_l \overline{F} \cdot \overline{dr} = \oint\limits_L \overline{F} \cdot \overline{dr} - \int\limits_{[MN]} \overline{F} \cdot \overline{dr} = 2\pi - 0 = 2\pi.$

Ответ: 2π.

В общем случае циркуляция векторного поля может быть найдена по **формуле Стокса**.

Теорема Стокса: если функции $a_1(x,y,z), a_2(x,y,z)$ и $a_3(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка во всех точках поверхности S, ограниченной замкнутым контуром l, то

$$\oint\limits_l \overline{a} \cdot \overline{dr} = \iint\limits_S (rot\,\overline{a} \cdot \overline{n}_0)dS,$$

где $rot\,\overline{a}$ – ротор векторного поля, $rot\,\overline{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$.

При этом в формуле Стокса при вычислении поверхностного интеграла выбирается та сторона поверхности S, нормаль к которой расположена так, чтобы обход контура совершался в положительном направлении, если смотреть на него с конца вектора $\overline{a}$ (правило правой руки).

Отметим, что в качестве поверхности S в формуле Стокса может быть выбрана **любая** поверхность, ограниченная кривой l.

Пример 14. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = \frac{y}{3}\bar{i} - 3x\,\bar{j} + x\bar{k}$ вдоль контура *Г:* $\begin{cases} x = 2\cos t, y = 2\sin t, \\ z = 1 - 2\cos t - 2\sin t \end{cases}$ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

Решение. Контур *Г* изображен на рис.13. Вычислим циркуляцию поля двумя способами: непосредственно и по формуле Стокса.

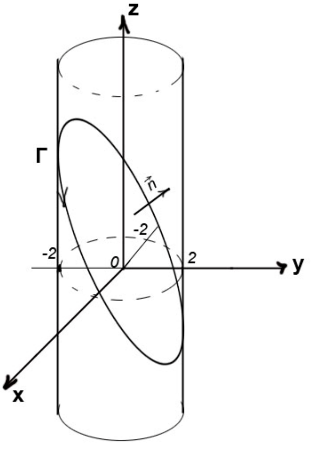

Рис. 13. Кривая *Г* к примеру 14

Способ 1. Вычислим циркуляцию непосредственно, т.е. как криволинейный интеграл второго рода:

$$\oint_{\Gamma} \bar{a} \cdot \overline{dr} = \oint_{\Gamma} \frac{y}{3}dx - 3xdy + xdz.$$

Из параметрических уравнений кривой имеем:

$$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,$$

$$z = 1 - 2\cos t - 2\sin t.$$

Тогда $dx = -2\sin t,\ dy = 2\cos t$,

$dz = \left(2\sin t - 2\cos t\right)dt.$

Подставляя выражения для *x, y, z, dx, dy* и *dz* в криволинейный интеграл, получим:

$$\oint_{\Gamma} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \oint_{\Gamma} \frac{y}{3}dx - 3xdy + xdz = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\sin t \cdot \left(-2\sin t dt\right) -$$

$$-3 \cdot 2\cos t \cdot 2\cos t dt + 2\cos t\left(2\sin t - 2\cos t\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{4}{3}\sin^2 t - 12\cos^2 t + 4\cos t \sin t - 4\cos^2 t \right)dt =$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt - 16\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt + 4\int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt =$$

$$= -\frac{2}{3}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt - 8\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt + 4\int\limits_0^{2\pi}\sin t\, d\sin t =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} - 8\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} + 2\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{2}{3}(2\pi - 0) - 8(2\pi + 0) + 0 = -\frac{4\pi}{3} - 16\pi = -\frac{52}{3}\pi.$$

Способ 2. Используем формулу Стокса. Сначала найдём ротор векторного поля:

$$rot\,\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y}{3} & -3x & x \end{vmatrix} = 0\overline{i} - \overline{j} + \left(-3 - \frac{1}{3}\right)\overline{k} = -\overline{j} - \frac{10}{3}\overline{k}.$$

Из параметрических уравнений контура Γ следует, что $x^2 + y^2 = 4$, тогда $z = 1 - x - y$. То есть контур Γ является пересечением двух поверхностей: кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ и плоскости $z = 1 - x - y$ (рис. 13), т.е. Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 1 - x - y. \end{cases}$

В качестве поверхности S возьмём часть плоскости $z = 1 - x - y$, расположенную внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$. Нормаль к ней имеет координаты $\overline{n} = \left(-z'_x; -z'_y; 1\right)$. $z'_x = -1$, $z'_y = -1$.

Тогда $\overline{n} = (1;1;1)$, $|\overline{n}| = \sqrt{3}$, $\overline{n}_0 = \dfrac{\overline{n}}{|\overline{n}|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Следовательно, скалярное произведение будет равно $rot\,\overline{a} \cdot \overline{n}_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{10}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{13}{3\sqrt{3}}$.

Отсюда, применяя формулу Стокса, получим:

$$\oint\limits_{\Gamma} \overline{a} \cdot d\overline{r} = \iint\limits_S \left(\frac{-13}{3\sqrt{3}}\right) dS = -\frac{13}{3\sqrt{3}} \iint\limits_S dS.$$

Спроектируем поверхность S на плоскость XOY. Эта проекция представляет собой круг с центром в начале координат радиуса 2.

Тогда дифференциал площади поверхности находится по формуле

$$dS = \sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy\,.$$

Т.к. $z = 1 - x - y,\ z'_x = -1, z'_y = -1$, то $dS = \sqrt{1+1+1}\,dxdy = \sqrt{3}\,dxdy$.

Следовательно, $\oint\limits_{\Gamma} \bar{a}\cdot\overline{dr} = -\dfrac{13}{3}\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = -\dfrac{13}{3}\cdot S_{круга} = -\dfrac{13}{3}\pi\cdot 2^2 = -\dfrac{52}{3}\pi.$

Ответ: $-\dfrac{52}{3}\pi.$

Пример 15. Найти модуль циркуляции векторного поля $\bar{a} = yz\bar{i} - xz\,\bar{j} + xy\bar{k}$ вдоль контура $Г$: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 25, \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases} \quad (z \ge 0).$

Решение. Кривая $Г$ является линией пересечения сферы $x^2+y^2+z^2 = 25$ и кругового цилиндра $x^2+y^2 = 9$ (рис. 14).

Вычислим циркуляцию векторного поля по формуле Стокса.

Сначала найдём ротор этого поля:

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & xy \end{vmatrix} = (x+x)\bar{i} - (y-y)\bar{j} + (-z-z)\bar{k} = 2x\bar{i} - 2z\bar{k}\,.$$

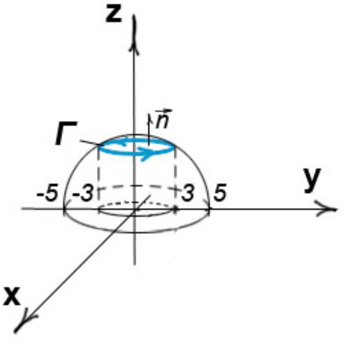

Рис. 14. Контур $Г$ к примеру 15

Замкнутый контур Γ является окружностью, лежащей в плоскости $z=4$. Следовательно, в качестве поверхности S целесообразно взять часть плоскости $z=4$, расположенную внутри цилиндра $x^2+y^2=9$. Единичная нормаль к ней имеет координаты $\overline{n}_0=(0;0;1)$.

Тогда $(rot\,\overline{a}\cdot\overline{n}_0)=2x\cdot 0+0\cdot 0-2z\cdot 1=-2z$. Подставляя значение скалярного произведения $(rot\,\overline{a}\cdot\overline{n}_0)$ в формулу Стокса, имеем:

$$\oint_\Gamma \overline{a}\cdot\overline{dr}=-2\iint_S z\,dS=\left[S:z=4\right]=-8\iint_{D_{xy}}dxdy=-8\cdot S_{круга}=$$

$$=-8\pi\cdot 3^2=-72\pi.$$

Следовательно, модуль циркуляции равен 72π.

Ответ: 72π.

Задачи для самостоятельного решения

28. Вычислить интеграл $\oint\limits_l (x+2y)dx+(5y-6x)dy$, где l – контур треугольника *OABO*, *O*(0;0), *A*(2;0), *B*(2;3).

Ответ: –24.

29. Найти циркуляцию вектора $\overline{F}=x\overline{i}+(2y-x)\overline{j}$ по контуру l: $y=x^2$, $y=1$, пробегаемому в положительном направлении.

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

30. Вычислить работу силы $\overline{F}=y^3\overline{i}-x^3\overline{j}$ по контуру l: $y=x,\ y=-x,\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4\ (y>0)$ в положительном направлении.

Ответ: $-\frac{45}{8}\pi$.

31. Вычислить циркуляцию векторного поля $\overline{F}=yz\overline{i}+(x+y+z)\overline{j}-xy\overline{k}$ по ломаной *l=OABO* , где *O*(0;0;0), *A*(0;1;0), *B*(0;0;2).

Ответ: –1.

32. Вычислить циркуляцию векторного поля $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + (x+y)\overline{k}$ по линии пересечения поверхностей $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$.

Ответ: -2π.

33. Вычислить циркуляцию вектора $\overline{F} = x^2 y\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ по линии пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $x+y+z = 1$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}$.

34. Найти циркуляцию вектора $\overline{a} = x^2\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}$ по линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ и $y = 4$.

Ответ: -36π.

35. Найти циркуляцию вектора $\overline{a} = x^2\overline{i} + xy\overline{j} + xz\overline{k}$ по линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = 4$ и $z = 3$.

Ответ: 0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жевняк, Р.М.* Высшая математика: учеб. пособие для втузов. Ч. IV / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск: Вышэйш. шк., 1987. – 240 с.
2. *Письменный, Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. Ч. 2 / Д.Т. Письменный. – М.: Рольф, 2001. – 256 с.
3. Элементы векторного анализа в задачах и упражнениях: метод. указания / сост.: Л.Г. Зубрина, Н.Ю. Поникарова. – Самара: Из-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 52 с.
4. *Кузнецов, Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты: учеб. пособие / Л.А. Кузнецов. – 4-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2005. – 240 с.

Учебное издание

Семёнова Ольга Юрьевна

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор Н.С. Куприянова
Доверстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 02.06.2015. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ. л. 3,0.
Тираж 300 экз. Заказ . Арт. 26/2015.

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П.Королева
(национальный исследовательский университет)»
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во СГАУ. 443086 Самара, Московское шоссе, 34