

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

В.В. КОТЛЯР, С.Н. ХОНИНА, А.А. КОВАЛЕВ

ВИХРЕВЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

УДК 535.4, 535.8

ББК 22.343

К 73



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэро-
космических и геоинформационных технологий"**

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Ивахник,
д-р физ.-мат. наук, проф. И.П. Завершинский

Котляр В.В.

К 73 Вихревые лазерные пучки: учеб. пособие / В.В. Котляр,

С.Н. Хонина, А.А. Ковалев. –

Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 160 с.: ил.

ISBN

В данном пособии рассмотрены основные виды параксиальных вихревых лазерных пучков и дифракционные оптические элементы, с помощью которых формируются эти пучки. Получены аналитические выражения для скалярной дифракции плоской волны и гауссового пучка на спиральных оптических элементах. Исследовано распространение в пространстве гипергеометрических мод, эллиптических пучков Лагерра-Гаусса и простых оптических вихрей.

Пособие предназначено для студентов специальностей и направлений "Прикладная математика и информатика", "Прикладные математика и физика".

УДК 535.4, 535.8

ББК 22.343

ISBN

© Котляр В.В., Хонина С.Н.,

Ковалев А.А., 2007

© Самарский государственный

аэрокосмический университет, 2007

Оглавление

Введение	5
1. Дифракция неограниченной плоской волны на	
спиральной фазовой пластинке (СФП)	7
2. Дифракция гауссового пучка на СФП.....	14
2.1. Численное сравнение дифракции вихревых лазерных пучков с	
разными амплитудными составляющими	19
3. Дифракция ограниченной плоской волны на СФП	29
3.1. Дифракция Фраунгофера ограниченной плоской волны на.....	
СФП.....	29
3.2. Дифракция Френеля ограниченной плоской волны на СФП... 33	
4. Дифракция ограниченной плоской волны на спиральном	
аксиконе (СА)	37
4.1. Аналитические выражения	37
4.2. Дифракция ограниченной плоской волны на спиральной	
фазовой пластинке	39
4.3. Численное моделирование	40
5. Дифракция гауссового пучка на ограниченном	
спиральном аксиконе	43
5.1. Аналитические выражения	43
5.2. Численное моделирование	47
6. Гипергеометрические моды	51
7. Параксиальные гипергеометрические лазерные пучки	
с особенностью в центре перетяжки	58
7.1. Гипергеометрические пучки в ближней зоне	61
7.2. Гипергеометрические пучки в дальней зоне	61
7.3. Частные случаи гипергеометрических пучков.....	62
7.4. Гипергеометрические моды при $\gamma = 0$	64
7.5. Обобщенные гипергеометрические моды	65
7.6. Дифракция Гауссового пучка на спиральном логарифмическом	
аксиконе	67

7.7. Мода Лагерра-Гаусса порядка $(0, n)$	71
7.8. Численное моделирование	73
8. Эллиптические пучки Лагерра-Гаусса (ЛГ).....	78
8.1. Преобразование Френеля от моды ЛГ.....	80
8.2. Наклонный параксиальный световой пучок ЛГ	83
8.3. Эллиптический параксиальный пучок ЛГ	87
8.4. Численное моделирование	98
8.5. Эксперименты по формированию астигматических пучков ЛГ.....	102
9. Простые оптические вихри.....	108
9.1. Оптические вихри, сформированные СФП со степенной амплитудной составляющей	108
9.2. Простой оптический вихрь почти без боковых лепестков	115
9.3. Дифракция Фраунгофера для чистых оптических вихрей	117
10. Дифракция Фраунгофера на многоуровневой (квантованной) спиральной фазовой пластинке	119
10.1. Уравнение полиномиальной апертуры	120
10.2. Дифракция Фраунгофера плоской волны на ДОЭ с формой правильного многоугольника и кусочно-постоянным микрорельефом	122
10.3. Численное моделирование	125
11. Дифракция плоской волны на ограниченной спиральной фазовой пластинке: параксиальная векторная теория	128
Заключение	140
Список специальных терминов.....	142
Список контрольных вопросов	143
Список литературы	144
Приложение А. Вывод математических соотношений	148
Приложение Б Вывод уравнения полиномиальной апертуры	157

ВВЕДЕНИЕ

Объекты с вихревой структурой существуют в самых разнообразных сферах материального мира, в макромире (спиральная форма галактик и туманностей), в микромире (элементарные частицы, световые поля) и в нашей повседневной жизни (циклоны и антициклоны, торнадо и тайфуны). Их структуры и поведение до сих пор ещё исчерпывающе не изучены и представляют собой обширное поле для исследований. Так, в последнее время происходит выделение в отдельный раздел («сингулярная оптика») отрасли оптики, занимающейся исследованием световых пучков с винтовыми фазовыми особенностями (т.е. вихревых лазерных пучков).

Вихревым лазерным пучкам посвящены многочисленные исследования и публикации как российских учёных-оптиков, так и их зарубежных коллег. В настоящее время активно изучаются свойства подобных пучков на основе мод Бесселя, Лагерра-Гаусса (ЛГ), Гаусса-Эрмита (ГЭ) и т.д.

Такие световые пучки формируются при прохождении света через спиральные оптические элементы. Простейшими такими элементами являются спиральная фазовая пластинка (СФП) и спиральный аксикон (СА).

Область применения оптических вихрей постоянно расширяется. В частности, их предлагается использовать для фотолитографии с разрешением $\lambda/10$, λ - длина волны света. На основе СФП, помещенной в плоскость пространственного спектра $4f$ -оптической системы (f - фокусное расстояние сферической линзы) предложен способ получения спиральных интерферограмм. С помощью спиральной интерферограммы легко различать выпуклые и вогнутые участки волнового фронта. СФП используется также в звездном коронографе, в котором свет от яркой звезды преобразуется в кольцо и дифрагируется, а слабый свет от планет этой звезды проходит через

диафрагму и регистрируется. СФП также применяется для оптического выполнения радиального преобразования Гильберта.

В этом пособии рассматриваются основные типы параксиальных оптических вихрей и их получение с помощью дифракционных оптических элементов в рамках скалярной теории дифракции. Векторная дифракция исследуется в последнем разделе и только для СФП.

Пособие построено следующим образом. В разделах 1 – 5 рассмотрено формирование вихревых лазерных пучков с помощью дифракционных оптических элементов. В разделах 1 и 3 рассмотрена дифракция неограниченной и ограниченной плоской волны на СФП. В разделе 2 описана дифракция на СФП гауссового пучка. В разделах 4 и 5 исследована дифракция ограниченной плоской волны и гауссового пучка на СА. В разделах 6 – 8 описаны другие виды вихревых лазерных пучков: гипергеометрические моды и пучки (разделы 6 и 7), эллиптические пучки Лагерра-Гаусса (раздел 8) и простые оптические вихри (раздел 9). В разделе 10 исследуется многоуровневая (квантованная) СФП. Раздел 11 посвящен анализу дифракции на СФП в рамках векторной теории электромагнитного поля.

1. ДИФРАКЦИЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА СПИРАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛАСТИНКЕ (СФП)

Функция комплексного пропускания спиральной фазовой пластинки имеет вид:

$$f_n(r, \varphi) = f_n(\varphi) = \exp(in\varphi). \quad (1.1)$$

Преобразование Френеля, описывающее распространение света в свободном пространстве, от светового поля (1.1) имеет вид:

$$F_n(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1} k}{z} \exp\left(in\theta + \frac{ik}{2z} \rho^2\right) \times \int_0^\infty \exp\left(\frac{ik}{2z} r^2\right) J_n\left(\frac{k}{z} r \rho\right) r dr, \quad (1.2)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света; z – координата вдоль оптической оси; (ρ, θ) – поперечные полярные координаты в поперечной плоскости на расстоянии z ; $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка.

Интеграл, входящий в выражение (1.2), можно вычислить [1], и вместо (1.2) получим:

$$F_n(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{k\rho^2}{4z}} \times \exp\left(in\theta + \frac{i\pi n}{4} + \frac{ik}{4z} \rho^2\right) \left\{ i J_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right) + J_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right) \right\}. \quad (1.3)$$

Из уравнения (1.3) видно, что при $\rho = 0$ поле при любом z (кроме $z = 0$) имеет нулевое значение. Само поле является результатом интерференции двух расходящихся световых пучков типа мод Бесселя. Но, в отличие от модовых пучков Бесселя, порядок самой

функции Бесселя и порядок угловой гармоники (фазовой сингулярности) в уравнении (1.3) не согласованы:

$$J_{\frac{n+1}{2}}(x)\exp(in\theta).$$

По этой причине результирующая интерференция двух пучков типа Бесселя должна меняться с ростом z не только масштабно, но и структурно. Однако этого не происходит в связи с тем, что функция $F_n(\rho, \theta, z)$ в уравнении (1.3) однородная, т.к. зависит только от комбинации переменных ρ^2/z . То есть световое поле (1.3) является парааксиальной модой свободного пространства, т.к. при своем распространении сохраняет свою структуру, а изменяется только масштабно, аналогично обычным гауссовым модам [2, 3]. Также поле (1.3) является решением парааксиального волнового уравнения, удовлетворяющим граничному условию (1.1) при $z = 0$.

Из уравнения (1.3) следует выражение для распределения интенсивности:

$$\hat{I}_n(\rho, z) = |F_n(\rho, \theta, z)|^2 = \frac{\pi}{2} x \left\{ J_{\frac{n-1}{2}}^2(x) + J_{\frac{n+1}{2}}^2(x) \right\}, \quad (1.4)$$

где $x = k\rho^2/(4z)$.

Найдем уравнение для определения локальных максимумов интенсивности (1.4). Производная функции (1.4) по переменной ρ имеет вид (см. приложение А):

$$\frac{d\hat{I}_n(\rho, z)}{d\rho} = \frac{\pi k \rho n}{4z} \left\{ J_{\frac{n-1}{2}}^2\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right) - J_{\frac{n+1}{2}}^2\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right) \right\}. \quad (1.5)$$

Приравнивая правую часть уравнения (1.5) к нулю, получим уравнение для поиска локальных максимумов:

$$\left| J_{\frac{n-1}{2}}(x) \right| = \left| J_{\frac{n+1}{2}}(x) \right|. \quad (1.6)$$

Информативным является положение только первого максимума, который определяет радиус световой «воронки», где интенсивность спадает от максимума до нуля при $\rho = 0$. Из уравнения (1.6) точно аналитически координату первого максимума определить нельзя, но приблизительно оценить можно. Например, при $z \rightarrow 0$ аргументы функций в уравнении (1.6) при постоянном ρ будут стремиться к бесконечности. Поэтому можно воспользоваться асимптотикой для функций Бесселя [4]:

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (1.7)$$

при $x \rightarrow \infty$.

Тогда уравнение (1.6) для первого максимума можно переписать в виде:

$$\operatorname{tg}\left[x - (n-1)\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right] = 1, \quad (1.8)$$

из которого следует оценка для радиуса световой «воронки» ($n > 0$):

$$\rho_n \approx \sqrt{\frac{(n+1)\lambda z}{2}}. \quad (1.9)$$

Из уравнения (1.9) следует, что размер «воронки» может быть меньше длины волны при

$$z < \frac{2\lambda}{n+1}, \quad (1.10)$$

т.е. при расстоянии от плоскости $z = 0$, меньшем длины волны.

Для конкретных порядков сингулярности $n = 1, 2$ можно получить оценки радиуса «воронки» при любом z . При $n = 1$ уравнение (1.6) приобретает вид:

$$J_0(x) = J_1(x), \quad (1.11)$$

из которого следует оценка для радиуса первого светового кольца:

$$\rho_1 \approx 0.94\sqrt{\lambda z}. \quad (1.12)$$

Для $n = 2$ вместо уравнения (1.6) получим

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{1-x}{x}, \quad (1.13)$$

из которого следует оценка для первого светлого кольца:

$$\rho_2 \approx 1.13\sqrt{\lambda z}. \quad (1.14)$$

Из формулы (1.9), верной только при $z \rightarrow 0$, при $n = 1$ и $n = 2$ получим:

$$\rho_1 \approx \sqrt{\lambda z}, \quad (1.15)$$

$$\rho_2 \approx 1.22\sqrt{\lambda z}. \quad (1.16)$$

На рис. 1.1 показано распределение интенсивности плоской волны с сингулярностью первого (а) и второго (б) порядков на расстоянии 10 мм от плоскости $z = 0$ и для длины волны 0.633 мкм.

На основе численного построения графика по формуле (1.4) было получено, что радиус первого светлого кольца или радиус «воронки» равен $\rho_1 \approx 0.076$ мм, при этом по формуле (1.12) получается 0.074 мм, а по формуле (1.15) – 0.0795 мм. Для $n = 2$ графически было получено значение $\rho_2 \approx 0.091$ мм, по формуле (1.14) – 0.0899 мм, и по формуле (1.16) – 0.097 мм.

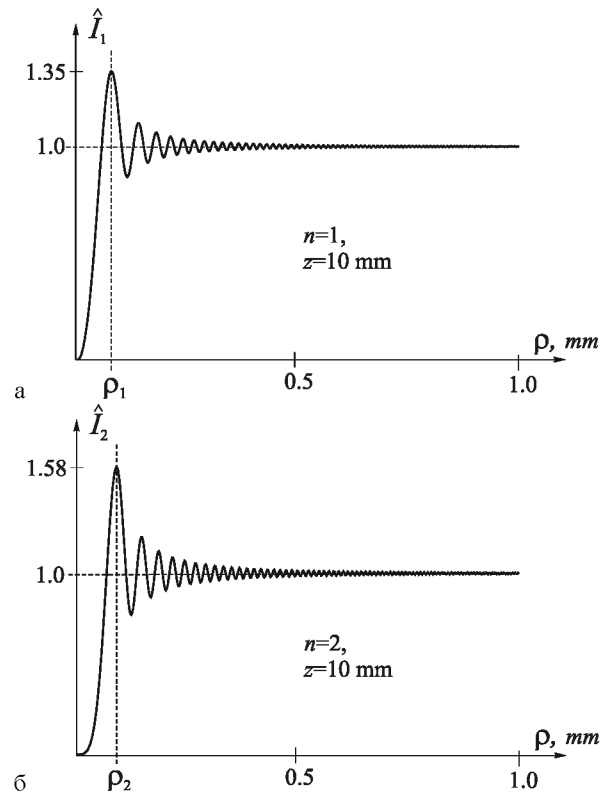


Рис. 1.1. Распределение интенсивности плоской волны с сингулярностью первого (а) и второго (б) порядков на расстоянии 10 мм от плоскости $z = 0$

Получим выражения для интенсивности (1.4) при $\rho \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow 0$. Для этого воспользуемся асимптотикой функций Бесселя (1.7) при $\rho \rightarrow \infty$, и

$$J_\nu(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \Gamma^{-1}(\nu+1), \quad (1.17)$$

при $\rho \rightarrow 0$, где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Из уравнения (1.7) следует, что интенсивность плоской волны с сингулярностью при $\rho \rightarrow \infty$ стремится к единице:

$$\hat{I}_n(\rho, z) \approx \frac{\pi}{2} x \left\{ \frac{2}{\pi x} \left[\cos^2 \left(x - \frac{(n-1)\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + \cos^2 \left(x - \frac{(n+1)\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} = 1. \quad (1.18)$$

На рис. 1.1 это хорошо видно.

Из уравнения (1.17) следует, что при $\rho \rightarrow 0$ интенсивность (1.4) можно аппроксимировать выражением:

$$\hat{I}_n(\rho, z) \approx \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left(\frac{k\rho^2}{8z} \right)^n. \quad (1.19)$$

Из уравнения (1.19) видно, что с ростом порядка сингулярности «стенки воронки» становятся все более вертикальными, т.е. стремятся к виду «ступеньки» при том же z (рис. 1.2).

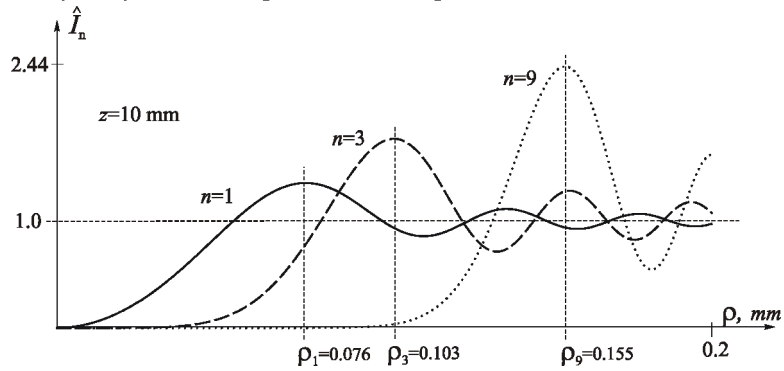


Рис. 1.2. Распределение интенсивности плоской волны с сингулярностью $n = 1, 3, 9$ порядков на расстоянии 10 мм

Заметим, что уравнение (1.4) не описывает поведение интенсивности в дальней зоне дифракции, т.к. при $z \rightarrow \infty$ из (1.4) получается аппроксимация (1.19). То есть получается, что при $z \rightarrow \infty$ радиус «воронки» (область с пониженной интенсивностью) стремится к

бесконечности, а интенсивность при любом фиксированном ρ стремится к нулю.

Для того чтобы оценить поведение плоской волны с сингулярностью в дальней зоне, нужно ограничить плоскую волну при $z = 0$ некоторым кругом радиуса R . Тогда вместо уравнения (1.1) следует рассматривать световое поле с амплитудой

$$F(r, \varphi) = \text{circl}\left(\frac{r}{R}\right) \exp(in\varphi) = \begin{cases} \exp(in\varphi), & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (1.20)$$

Аналитическое исследование дифракции Фраунгофера светового поля (1.20) приводится далее в этом пособии, однако аналитически исследовать дифракцию Френеля не удастся. Но если вместо функции $\text{circl}(x)$ использовать гауссовую функцию, то есть осуществить «мягкое» ограничение плоской волны

$$F(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \exp(in\varphi), \quad (1.21)$$

то можно получить некоторые аналитические выражения. Поэтому в следующем разделе будет рассмотрена дифракция гауссового пучка с фазовой сингулярностью.

2. ДИФРАКЦИЯ ГАУССОВОГО ПУЧКА НА СФП

В [5, 6] получены явные аналитические выражения, описывающие дифракцию Френеля гауссового пучка на СФП. На расстоянии z комплексная амплитуда светового поля в параксиальном приближении будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 E_n(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)k}{2\pi z} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E_n^0(r, \varphi) \times \\
 &\times \exp\left\{\frac{ik}{2z}\left[r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)\right]\right\} r dr d\varphi = \\
 &= \frac{(-i)^{n+1}\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \left(\frac{\rho}{w}\right) \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}} \times \\
 &\times \exp\left[i\frac{3}{2}\arctg\left(\frac{z_0}{z}\right) + i\frac{k\rho^2}{2R(z)} - \frac{\rho^2}{w^2(z)} + in\theta\right] \times \\
 &\times \left\{I_{\frac{n-1}{2}}\left[\rho^2\left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R_0(z)}\right)\right] - I_{\frac{n+1}{2}}\left[\rho^2\left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R_0(z)}\right)\right]\right\},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$w^2(z) = 2w^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right],$$

$$R(z) = 2z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right] \cdot \left[2 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]^{-1},$$

$$R_0(z) = 2z \left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right],$$

$$z_0 = \frac{kw^2}{2},$$

$$E_n^0(r, \varphi) = \exp\left[-\left(\frac{r}{w}\right)^2 + in\varphi\right],$$

$I_\nu(x)$ – функция Бесселя второго рода ν -го порядка.

В [6] путем предельного перехода от дифракции в зоне Френеля к дальней зоне также получено выражение для дифракции Фраунгофера гауссового пучка на СФП.

При $z \gg z_0$

$$w^2(z) \approx 2w^2 \frac{z^2}{z_0^2},$$

$$R(z) \approx z,$$

$$R_0(z) \approx \frac{2z^3}{z_0^2}.$$

$$E_n(\rho, \theta, z \rightarrow \infty) = \frac{(-i)^{n+1} \sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \left(\frac{\rho}{w}\right) \times \exp(in\theta) \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right] \left\{ I_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) - I_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) \right\}. \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует выражение для интенсивности гауссового пучка с фазовой сингулярностью в дальней зоне дифракции:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_n(\rho, z \rightarrow \infty) &\approx \frac{\pi}{4} \left(\frac{z_0}{z}\right)^4 \left(\frac{\rho}{w}\right)^2 \times \\
&\times \exp\left[-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right] \left\{ I_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) - I_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) \right\}^2 = \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 x \exp(-2x) \left\{ I_{\frac{n-1}{2}}(x) - I_{\frac{n+1}{2}}(x) \right\}^2,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\text{где } x = \left(\frac{\rho z_0}{\sqrt{2} z w}\right)^2.$$

В этом разделе получена аналитическая формула для описания дифракции Фраунгофера гауссового пучка на СФП, расположенной в его перетяжке. Картина дифракции Фраунгофера формируется в фокальной плоскости сферической линзы.

Рассмотрим исходную функцию в виде:

$$f'_n(r, \theta) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\theta\right), \tag{2.4}$$

где w - радиус перетяжки гауссового пучка. Тогда комплексная амплитуда дифракции Фраунгофера гауссового пучка в перетяжке на СФП будет описываться выражением:

$$F'_n(\rho, \varphi) = \frac{(-i)^{n+1} k}{f} \exp(in\varphi) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) J_n\left(\frac{k}{f} r \rho\right) r dr. \tag{2.5}$$

Известен справочный интеграл [1]:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \exp(-px^2) J_n(cx) x dx &= \frac{c\sqrt{\pi}}{8p^{3/2}} \times \\
&\times \exp\left(-\frac{c^2}{8p}\right) \left[I_{(n-1)/2}\left(\frac{c^2}{8p}\right) - I_{(n+1)/2}\left(\frac{c^2}{8p}\right) \right],
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $I_\nu(x)$ - модифицированная функция Бесселя или функция Бесселя второго рода. С учетом уравнения (2.6) выражение (2.5) перепишем в виде:

$$F'_n(\rho, \varphi) = (-i)^{n+1} \exp(in\varphi) \left(\frac{kw^2}{4f} \right) \times \\ \times \sqrt{2\pi x} \exp(-x) [I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x)], \quad (2.7)$$

где $x = \frac{1}{2} \left(\frac{kw\rho}{2f} \right)^2$.

Функция интенсивности картины дифракции Фраунгофера гауссового пучка на СФП имеет вид:

$$\bar{I}'_n(\rho) = |F'_n(\rho, \varphi)|^2 = \\ = 2\pi \left(\frac{kw^2}{4f} \right)^2 x \exp(-2x) [I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x)]^2. \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.8) видно, что при $x=0$ в центре Фурье-плоскости интенсивность будет равна нулю ($n \neq 0$): $\bar{I}'_n(0) = 0$. Сомножители $x \exp(-2x)$ в уравнении (2.8) показывают, что в дальней зоне формируется кольцевое распределение интенсивности. Радиус кольца можно найти из уравнения [5] (см. приложение А):

$$(n - 4x)I_{(n-1)/2}(x) + (n + 4x)I_{(n+1)/2}(x) = 0. \quad (2.9)$$

Найдем вид функции интенсивности на внешней стороне кольца при $\rho \rightarrow \infty$ (или $x \rightarrow \infty$).

Для этого воспользуемся асимптотикой функции Бесселя [4]:

$$I_\nu(x) \approx \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8x} \right), \quad x \gg 1. \quad (2.10)$$

Тогда вместо уравнения (2.8) при $x \rightarrow \infty$ получим:

$$\bar{I}'_n(\rho) \approx \left(\frac{nf}{k\rho^2} \right)^2. \quad (2.11)$$

Заметим, что выражение (2.11) можно получить из уравнения (2.8), устремляя к бесконечности радиус гауссового пучка $w \rightarrow \infty$ при фиксированном ρ .

Найдем вид функции интенсивности на внутренней стороне кольца. При стремлении ρ к нулю (при фиксированном w) аргумент функции Бесселя x также стремится к нулю, и можно использовать первые члены разложения в ряд цилиндрической функции:

$$I_\nu(x) \approx \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \Gamma^{-1}(\nu+1), \quad x \ll 1, \quad (2.12)$$

где $\Gamma(x)$ - гамма-функция. Тогда вместо уравнения (2.8) при $\rho \rightarrow 0$ получим:

$$\bar{I}'_n(\rho) \approx \pi \Gamma^{-2} \left(\frac{n+1}{2} \right) \left(\frac{kw^2}{f} \right) \left(\frac{kw\rho}{4f} \right)^{2n}. \quad (2.13)$$

Из уравнения (2.13) видно, что интенсивность вблизи центра Фурье-плоскости растет как степень $2n$ от радиальной координаты:

$$\bar{I}'_n(\rho) \approx (w\rho)^{2n}, \quad \rho \ll 1. \quad (2.14)$$

Если одновременно со стремлением ρ к нулю устремить к бесконечности радиус гауссового пучка w так, чтобы их произведение $w\rho$ оставалось постоянным, то из уравнения (2.13) следует, что интенсивность вблизи центра Фурье-плоскости будет стремиться к бесконечности пропорционально квадрату радиуса перетяжки:

$$\bar{I}'_n(\rho \rightarrow 0, w \rightarrow \infty) \approx w^2, \quad \rho w = const, \quad (2.15)$$

но в самой центральной точке при $\rho = 0$ интенсивность будет нулевой, $\bar{I}'_n(\rho = 0) = 0$ при любом w .

2.1. Численное сравнение дифракции вихревых лазерных пучков с разными амплитудными составляющими

Чтобы согласовать размеры различных освещающих пучков, радиус перетяжки гауссового пучка и радиус круглой апертуры подбирались исходя из условия равенства первого момента (по координате-радиусу) распределения интенсивности:

$$M_{1r} [I(r, \varphi)] = \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} I(r, \varphi) r^2 dr d\varphi}{\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} I(r, \varphi) r dr d\varphi}. \quad (2.16)$$

Для мод Гаусса-Лагерра $(0, n)$

$$\Psi_{0n}(r, \varphi) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi |n|!}} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^{|n|} \exp\left[-\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] \exp(in\varphi), \quad (2.17)$$

где σ – радиус перетяжки модового пучка, момент (2.16) для интенсивности:

$$I_{0n}^{GL}(r) = \frac{1}{\sigma^2 \pi |n|!} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^{2|n|} \exp\left[-\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\right] \quad (2.18)$$

будет равен

$$M_{1r} [I_{0n}^{GL}(r)] = \sigma \left[\frac{\sqrt{\pi}}{|n|!} 2^{-(|n|+1)} \prod_{p=0}^{|n|} (2p+1) \right]. \quad (2.19)$$

Для гауссового пучка с фазовой сингулярностью

$$f_n^g(r, \varphi) = \exp\left[-\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)^2\right] \exp(in\varphi) \quad (2.20)$$

момент (2.16) равен

$$M_{1r}\left[I_n^g(r)\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_1, \quad (2.21)$$

где

$$I_n^g(r, \varphi) = \exp\left[-\left(\frac{r}{\sigma_1}\right)^2\right].$$

Аналогично для плоской волны, ограниченной кругом радиуса R , содержащей фазовую сингулярность, момент будет равен:

$$M_{1r}\left[I_n^c(r)\right] = \frac{2}{3} R. \quad (2.22)$$

Приравнивая выражения (2.19) и (2.21), а также (2.19) и (2.22), получаем значения радиуса гауссового пучка σ_1 и радиуса круга R , выраженные через радиус перетяжки пучка Гаусса-Лагерра $(0, n)$, σ :

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma \left[\frac{\sqrt{\pi}}{|n|!} 2^{-(|n|+1)} \prod_{p=0}^{|n|} (2p+1) \right], \quad (2.23)$$

$$R = \frac{3}{2} \sigma \left[\frac{\sqrt{\pi}}{|n|!} 2^{-(|n|+1)} \prod_{p=0}^{|n|} (2p+1) \right]. \quad (2.24)$$

На рис. 2.1 и 2.2 показаны результаты сравнения дифракции фазовой сингулярности порядка $n=2$ с разными амплитудными составляющими (здесь и далее, если не указано особо, длина волны падающего света $\lambda=0,63*10^{-6}$ м. Для моделирования процесса распространения используется вычисление интеграла разложения по

сферическим волнам.). Численное моделирование дифракции проводилось с помощью преобразований Френеля и Фурье. Были выбраны следующие параметры освещающих пучков: для мод Гаусса-Лагерра $\sigma=0.391$ мм; для гауссового пучка $\sigma_1=0.7234$ мм; для круглой апертуры $R=0.9775$ мм.

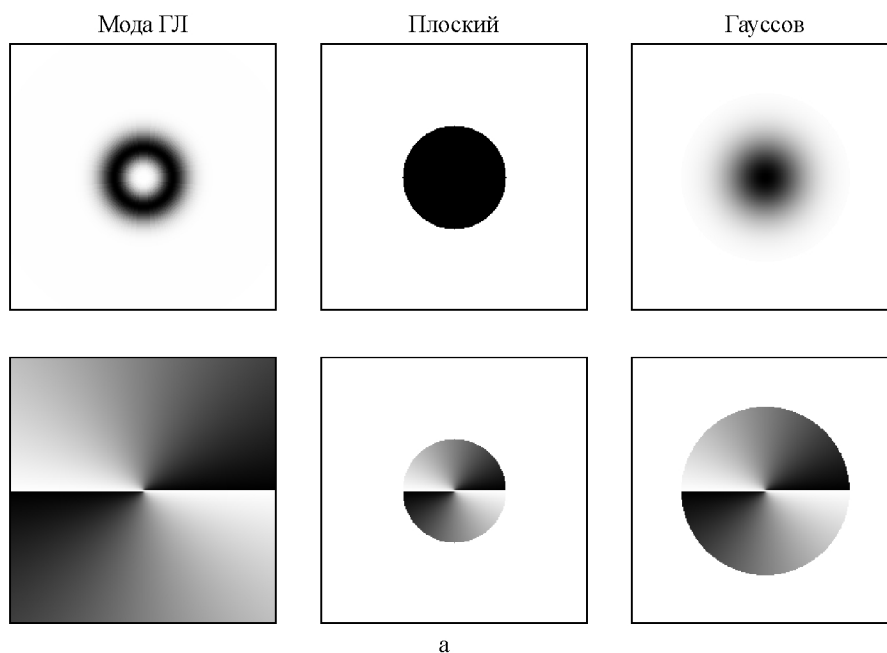


Рис. 2.1. Поперечное распределение интенсивности и фазы пучков с фазовой сингулярностью $n=2$ во входной плоскости $z=0$ (а), в дальней зоне дифракции $z=5000$ мм (б) и в фокальной плоскости линзы (в), размер изображений 5×5 мм² (см. также с. 22)

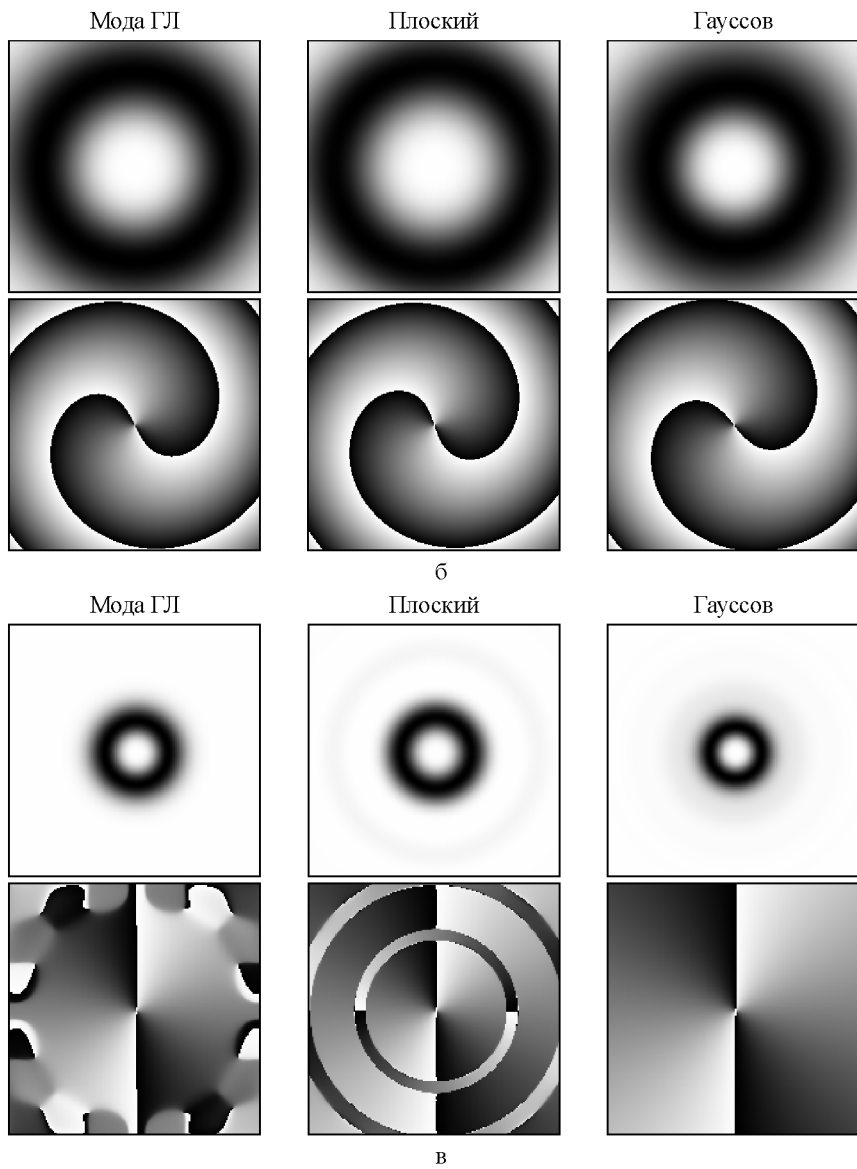


Рис. 2.1. Окончание

На рис. 2.1 видно, что в дальней зоне дифракции в центральной части распределение пучков становится практически одинаковым для различных типов амплитуд.

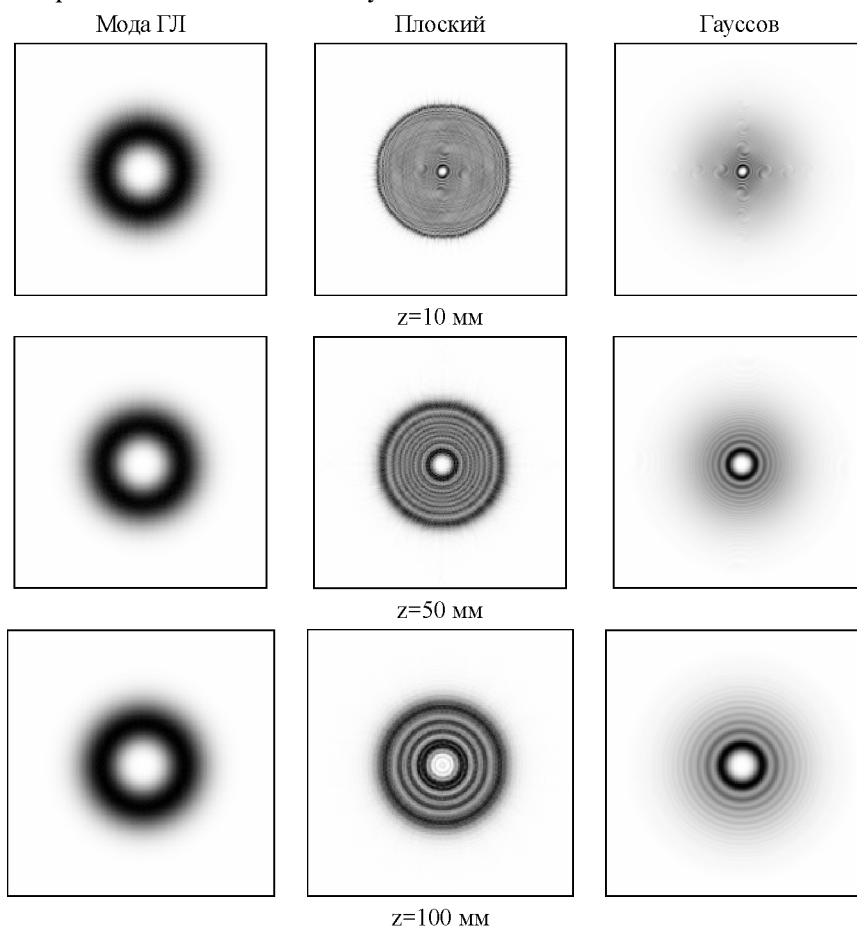


Рис. 2.2. Поперечное распределение интенсивности пучков с фазовой сингулярностью $n=2$ на различных расстояниях от входной плоскости, размер изображений 3.5×3.5 мм² (см. также с. 24)

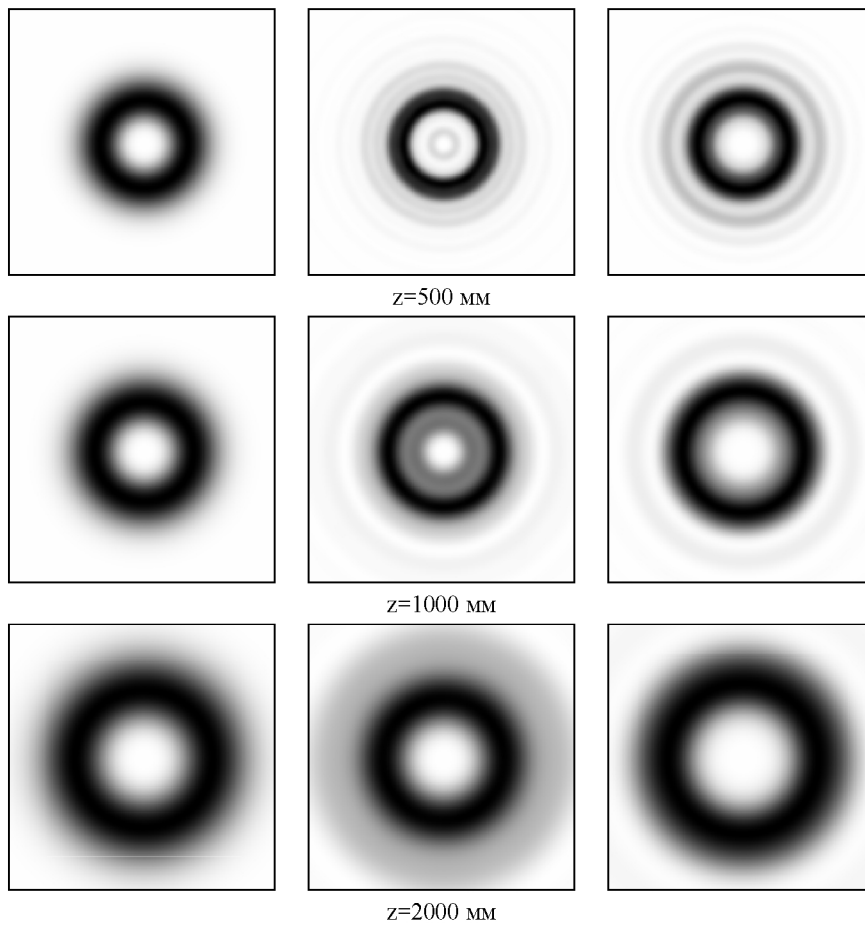


Рис. 2.2. Окончание

Аналогично можно сравнить дифракцию линейной суперпозиции фазовых сингулярностей различного порядка:

$$T(\varphi) = \sum_{k=1}^K C_k \exp(in_k \varphi) \quad (2.25)$$

с разными амплитудными составляющими.

В этом случае согласование параметров σ , σ_1 и R можно осуществлять по усредненному для К мод выражению (2.19). На рис. 2.3 и 2.4 показаны результаты сравнения дифракции двух фазовых сингулярностей $n_1 = 2$ и $n_2 = -1$ с разными амплитудными составляющими. Для численного моделирования были выбраны следующие параметры освещающих пучков: для мод Гаусса-Лагерра $\sigma = 0.391$ мм; для гауссового пучка $\sigma_1 = 0.6647$ мм; для круглой апертуры $R = 0.8832$ мм.

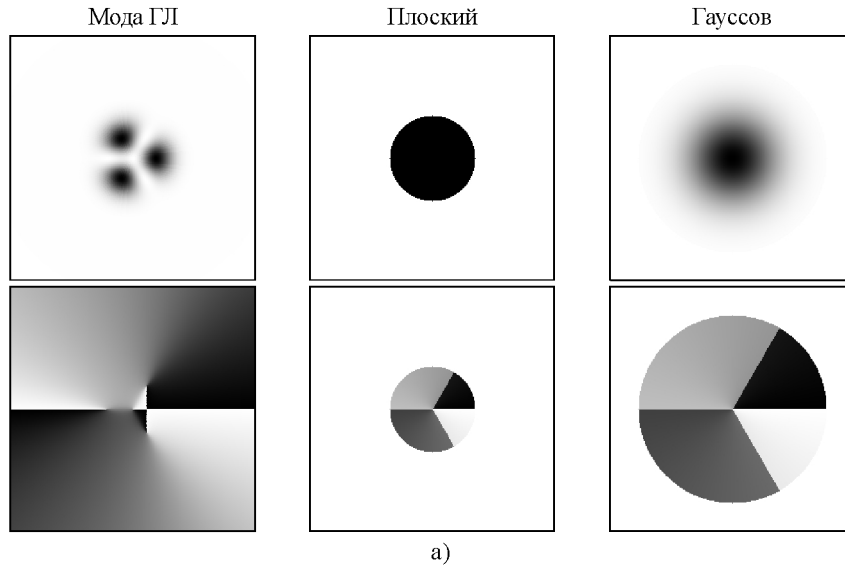
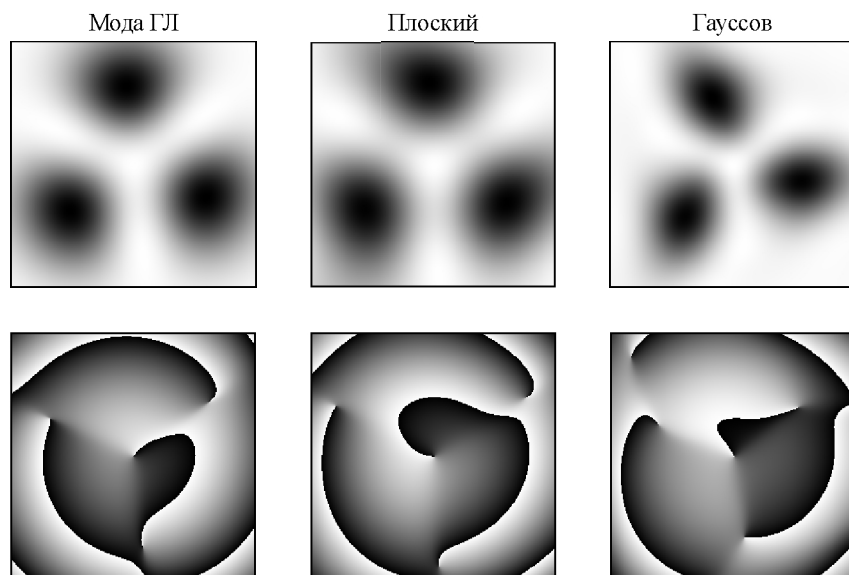
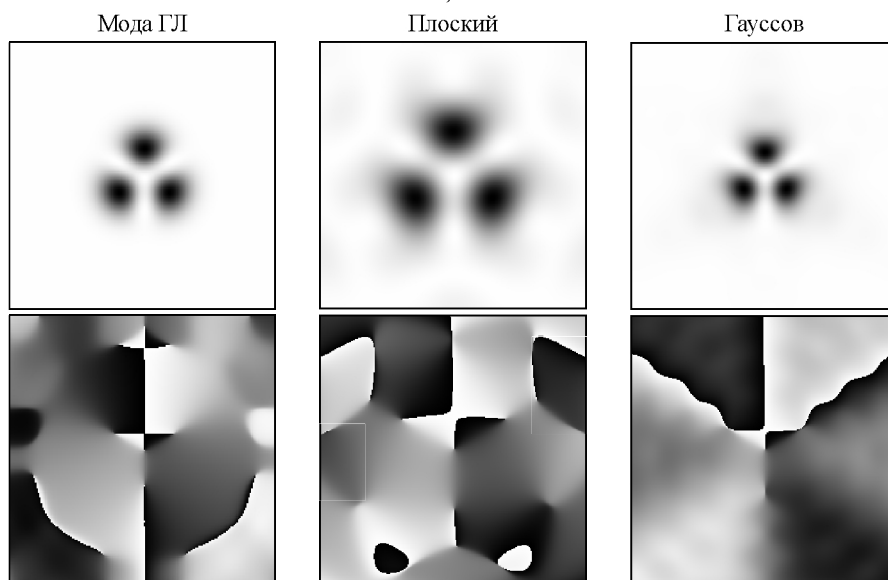


Рис. 2.3. Поперечное распределение интенсивности и фазы пучков-суперпозиций двух полей с фазовыми сингулярностями $n_1=2$ и $n_2=-1$ и во входной плоскости ($z=0$, слева), в дальней зоне дифракции ($z=5000$ мм, в середине) и в фокальной плоскости линзы (справа), размер изображений 5×5 мм² (см. также с. 26)



б)



в)

Рис. 2.3. Окончание

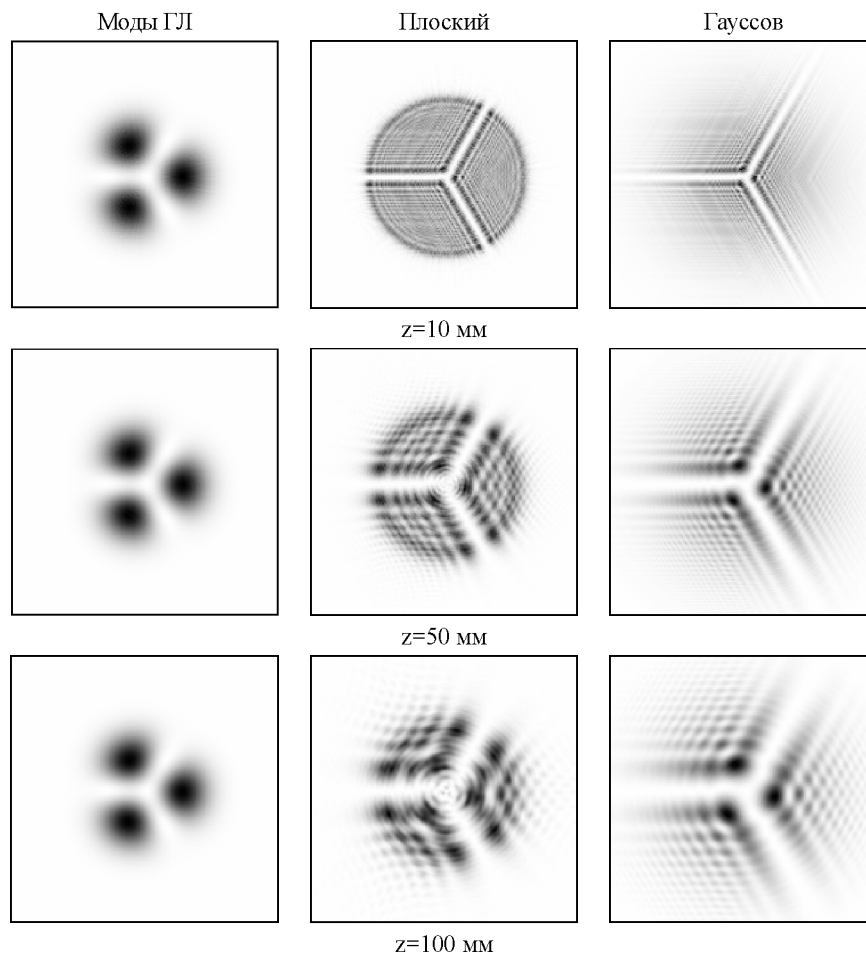


Рис. 2.4. Поперечное распределение интенсивности пучков-суперпозиций двух полей с фазовыми сингулярностями $n_1=2$ и $n_2=-1$ на различных расстояниях от входной плоскости. Размер изображений 3.5×3.5 мм² (см. также с. 28)

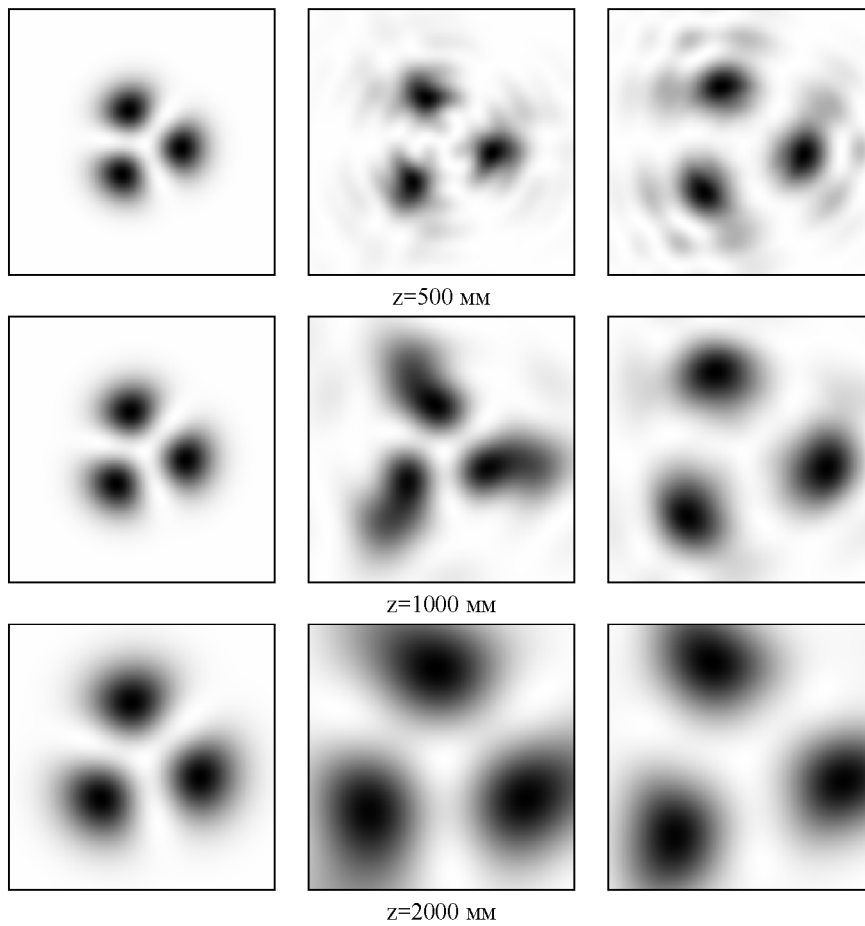


Рис. 2.4. Окончание

На рис. 2.1 – 2.4 видно, что характер поведения отдельной фазовой сингулярности и их суперпозиции очень похож, и в дальней зоне дифракции в центральной части распределение пучков становится практически одинаковым для различных типов амплитуд.

3. ДИФРАКЦИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА СФП

3.1. Дифракция Фраунгофера ограниченной плоской волны на СФП

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СФП. Плоская волна единичной амплитуды с радиусом R и волновым числом $k = 2\pi/\lambda$, λ - длина волны, распространяющаяся вдоль оси z , описывается комплексной амплитудой при $z = 0$:

$$E_0(r) = \text{circl}\left(\frac{r}{R}\right), \quad (3.1)$$

где

$$\text{circl}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Пусть плоская волна (3.1) падает на СФП, функция пропускания которой имеет вид:

$$\tau(\varphi) = \exp(in\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

где (r, φ) - полярные координаты при $z = 0$. Картина дифракции Фраунгофера плоской волны (3.1) на СФП (3.3) формируется в задней фокальной плоскости сферической Фурье-линзы с фокусным расстоянием f и описывается преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} E_n(\rho, \theta) &= \frac{(-i)^{n+1} k}{f} \exp(in\theta) \int_0^R J_n\left(\frac{k}{f} r \rho\right) r dr = \\ &= \frac{(-i)^{n+1} \exp(in\theta) k R^2}{(n+2)n! f} \left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^n {}_1F_2\left[\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1; -\left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^2\right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

где (ρ, θ) – полярные координаты в Фурье-плоскости, $J_n(x)$ – функция Бесселя n -го порядка первого рода, ${}_1F_2(a, b, c; x)$ – гипергеометрическая функция:

$${}_1F_2(a, b, c; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{(b)_m (c)_m m!}, \quad (3.5)$$

где $(a)_m = a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)$ – символ Похгаммера, $(a)_0 = 1$. Уравнение (3.4) было получено на основе справочного интеграла из [1].

С учетом того, что функция Бесселя представима в виде ряда

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}, \quad (3.6)$$

из уравнения (3.4) при $n=0$ (СФП отсутствует) следует выражение для дифракции Фраунгофера плоской волны на круглой диафрагме радиуса R :

$$E_0(\rho) = \left(\frac{-iR}{\rho}\right) J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\right). \quad (3.7)$$

Из (3.4) можно видеть также, что при $n \neq 0$ в центре Фурье-плоскости ($\rho=0$) амплитуда равна нулю: $E_n(\rho=0, \theta) = 0$. Из (3.4) и (3.5) также следует, что при малых $\rho \ll 2f/(kR)$ ${}_1F_2(a, b, c; x) \approx 1$ и

$$E_n(\rho \rightarrow 0, \theta) \sim \frac{kR^2}{f} \left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^n, \quad (3.8)$$

где \sim – знак пропорциональности. Из (3.4) можно найти радиус ρ_n кольца (радиус максимального значения интенсивности), приравняв

дробь в круглых скобках некоторой постоянной a_n , зависящей только от номера спиральной пластинки n :

$$\rho_n = \frac{\lambda f a_n}{\pi R}. \quad (3.9)$$

На рис. 3.1 показаны графики функции интенсивности $I_n(\rho) = |E_n(\rho, \theta)|^2$, вычисленные по формуле (3.4). В ряду (3.5) сохранилось 110 слагаемых. Параметры расчета: $\lambda = 0.633$ мкм, $f = 100$ мм, $R = 1$ мм.

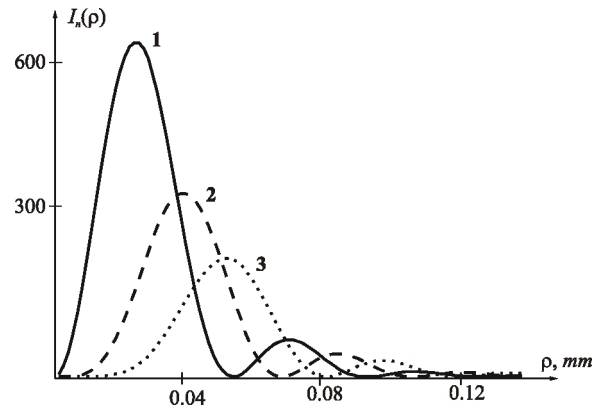


Рис. 3.1. Радиальные распределения интенсивности картины дифракции Фраунгофера плоской волны радиуса $R = 1$ мм на СФП с номером $n = 1$ (кривая 1), $n = 2$ (кривая 2) и $n = 3$ (кривая 3)

Из уравнения (3.4) следует, что так как амплитуда $E_n(\rho, \theta)$ пропорциональна сомножителю ρ^n , то с ростом номера n будет увеличиваться радиус первого кольца картины дифракции (рис. 3.1). На рис. 3.2 показаны радиальные распределения интенсивности картины дифракции плоской волны с разными радиусами R на СФП с номером $n = 2$.

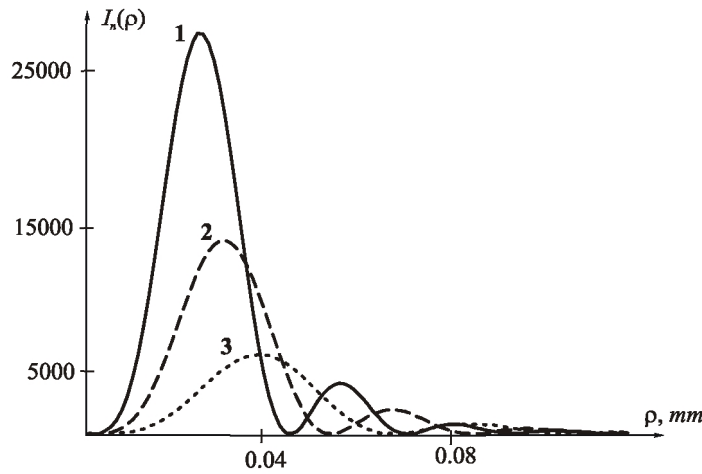


Рис. 3.2. Радиальные распределения интенсивности картины дифракции Фраунгофера плоской волны на СФП с номером $n = 2$ при $R = 3$ мм (кривая 1), $R = 2.5$ мм (кривая 2) и $R = 2$ мм (кривая 3)

Из рис. 3.2 видно, что с увеличением радиуса плоской волны R радиус и ширина первого кольца картины дифракции уменьшаются, а максимальное значение интенсивности на кольце увеличивается. Из уравнения (3.4) следует, что интенсивность пропорциональна выражению:

$$I_n(\xi) \sim R^4 \xi^{2n} \left| {}_1F_2 \left[\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1; -\left(\frac{k\xi}{2f} \right)^2 \right] \right|^2, \quad (3.10)$$

где $\xi = R\rho$. Из уравнений (3.4) и (3.9) следует, что с ростом R картина дифракции меняется только масштабно и радиусы колец уменьшаются во столько раз, во сколько раз увеличивается R . Максимальное значение интенсивности на первом кольце растет пропорционально R^4 . Например, для кривых 1 и 3 на рис. 3.2 отношение максимальных значений интенсивности равно $3^4/2^4 \approx 5$.

3.2. Дифракция Френеля ограниченной плоской волны на СФП

Рассмотрим дифракцию Френеля ограниченной плоской волны на СФП. Параксиальная дифракция волны (3.1) на СФП (3.3) будет описываться преобразованием Френеля:

$$\begin{aligned}
 E_n(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{n+1} k}{z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times \\
 &\times \int_0^R \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{k}{z} r\rho\right) r \, dr = \\
 &= \exp\left(\frac{iz_0\bar{\rho}^2}{z} + in\theta\right) \frac{2\left(\frac{-iz_0}{z}\right)^{n+1} \bar{\rho}^n}{n!} \times \\
 &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{iz_0}{z}\right)^m}{(2m+n+2)m!} {}_1F_2\left[\frac{2m+n+2}{2}, \frac{2m+n+4}{2}, n+1; -\left(\frac{z_0\bar{\rho}}{z}\right)^2\right],
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $z_0 = kR^2/2$ - длина Рэлея, $\bar{\rho} = \rho/R$. Уравнение (3.11) отличается от уравнения (3.4) тем, что гипергеометрические функции (3.5) появляются как слагаемые ряда. Из уравнения (3.11) видно, что при $n \neq 0$ в центре пучка при $\rho = 0$ имеет место нулевая амплитуда $E_n(\rho = 0, \theta, z) = 0$ при любом z , кроме $z = 0$. Из уравнения (3.11) также видно, что с ростом z в ряду гипергеометрических функций вклад дают только несколько первых членов ряда, а при $z \rightarrow \infty$ ($z \gg z_0$, дальняя зона) вклад в амплитуду будет давать только первый член при $m = 0$, который совпадает с правой частью уравнения (3.4). Заметим, что в (3.11) целая часть отношения z_0/z равна числу Френеля. Заметим также, что выражение (3.11) при $n = 0$ (СФП отсутствует) описывает дифракцию Френеля плоской волны на круглой диафрагме радиуса R :

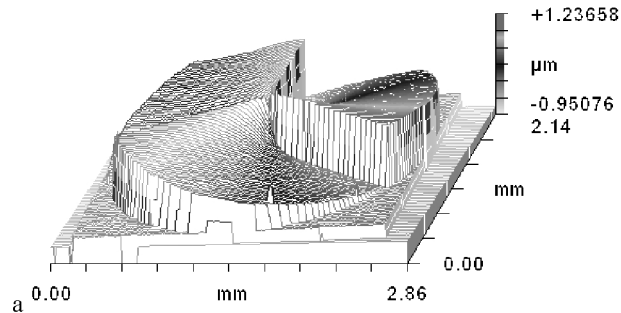
$$E_0(\rho, z) = (-1) \exp\left(\frac{iz_0 \bar{\rho}^2}{z}\right) \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{iz_0}{z}\right)^{m+1}}{(m+1)!} {}_1F_2\left[m+1, m+2, 1; -\left(\frac{z_0 \bar{\rho}}{z}\right)^2\right]. \quad (3.12)$$

Из (3.12) можно получить простую зависимость комплексной амплитуды светового поля на оптической оси ($\rho = 0$) от расстояния z до диафрагмы:

$$E_0(\rho = 0, z) = 1 - \exp\left(\frac{iz_0}{z}\right). \quad (3.13)$$

Выражение (3.13) совпадает с полученным ранее [7].

На рис. 3.3 показаны результаты сравнения эксперимента и расчета. На рис. 3.3, а показан профиль поверхности СФП с номером $n = 3$ и диаметром 2.5 мм, визуализированный с помощью интерферометра Newview 5000 Zygo (увеличение в 200 раз). Профиль СФП отличается от идеального на 4.3%, а сама СФП имеет 32 градации рельефа и была изготовлена на низкоконтрастном отрицательном резисте XAR-N7220 путем прямой записи электронным пучком с помощью литографа Leica LION LV1 с разрешением 5 мкм.



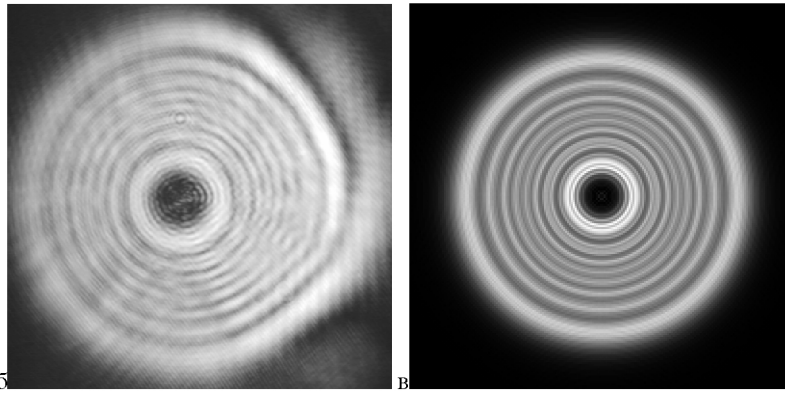
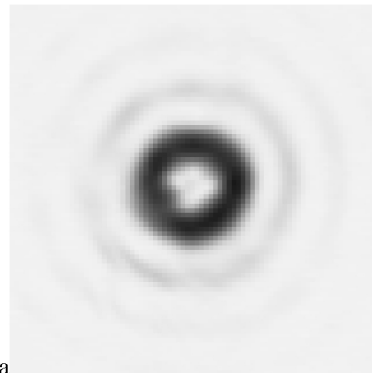


Рис. 3.3. Профиль поверхности СФП ($n = 3$) (а), картина дифракции Френеля плоской волны с радиусом $R = 1.25$ мм и длиной волны $\lambda = 0.633$ мкм на расстоянии $z = 80$ мм от СФП: эксперимент (б) и теория (в)

На рис. 3.3, б, в показаны экспериментальная и расчетная картины дифракции на СФП плоской волны с радиусом $R = 1.25$ мм и длиной волны $\lambda = 0.633$ мкм на расстоянии $z = 80$ мм. Обе картины дифракции имеют одинаковое число колец (8 колец).

На рис. 3.4 показан результат регистрации с помощью CCD-камеры картины дифракции Фраунгофера в фокусе линзы ($f = 150$ мм), полученной для плоской волны с радиусом 1.25 мм, длиной волны 0.633 мкм и СФП $n = 3$.



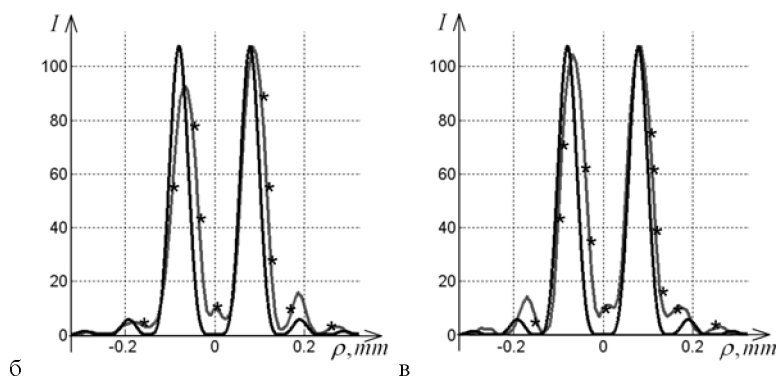


Рис. 3.4. Картина дифракции Фраунгофера на СФП с номером $n = 3$ плоской волны с радиусом 1.25 мм и длиной волны 0.633 мкм, сформированная в фокальной плоскости Фурье-линзы с фокусным расстоянием 150 мм: распределение интенсивности (негатив) (а), вертикальное (б) и горизонтальное (в) сечения интенсивности (——теория, --*---*---эксперимент)

Относительное среднеквадратичное отклонение теоретических и экспериментальных кривых на рис. 3.4, б, в составило 14,3%.

В данном разделе получены аналитические выражения, описывающие параксиальную дифракцию ограниченной плоской волны на СФП. С помощью изготовленной с высокой точностью СФП с номером $n = 3$ получены экспериментальные картины дифракции Френеля и Фраунгофера. Теория и эксперимент согласуются со средней ошибкой не больше чем 15%.

4. ДИФРАКЦИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА СПИРАЛЬНОМ АКСИКОНЕ (СА)

4.1. Аналитические выражения

Дифракция плоской неограниченной волны рассмотрена в [9]. Дифракция Фраунгофера плоской волны на спиральном аксиконе конечного радиуса с функцией пропускания $\text{sigcl}(r/R)\exp(i\alpha r)$ описывается следующим выражением:

$$F(\rho) = \int_0^R \exp(i\alpha r) J_n\left(\frac{k}{f}\bar{\rho}r\right) r dr. \quad (4.1)$$

Рассмотрим интеграл:

$$I = \int_0^R \exp(i\alpha r) J_n(\rho r) r dr. \quad \rho = \frac{k}{f}\bar{\rho}. \quad (4.2)$$

Используя интегральное представление функции Бесселя

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(in\varphi) \exp(ix \cos \varphi) d\varphi, \quad (4.3)$$

получим:

$$I = \frac{(-i)^{n+2}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\exp(i\alpha R) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{2\pi} \exp(in\varphi) \frac{\exp(iR\rho \cos \varphi)}{\alpha + \rho \cos \varphi} d\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{\exp(in\varphi) d\varphi}{\alpha + \rho \cos \varphi} \right]. \quad (4.4)$$

Используя соотношение (см. приложение А)

$$\exp(ix \cos \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \exp(-im\varphi) J_m(x), \quad (4.5)$$

вместо интеграла (4.4) можно получить выражение для дифракции в виде ряда:

$$I = \frac{(-i)^n}{2\pi} \frac{\partial I_1^n}{\partial \alpha} - \frac{\exp(i\alpha R)}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \left(iRI_1^m + \frac{\partial I_1^m}{\partial \alpha} \right) J_{m+n}(R\rho), \quad (4.6)$$

где

$$I_1^n = \int_0^{2\pi} \frac{\exp(in\varphi) d\varphi}{\alpha + \rho \cos \varphi}. \quad (4.7)$$

Интегралы (4.7) и их производные вычисляются с применением теории вычетов. Выражения для интегралов I_1^n и $\partial I_1^n / \partial \alpha$ приведены ниже.

Случай 1. $0 < \rho < |\alpha|$.

$$I_1^n = \frac{2\pi \operatorname{sgn} \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}} \left(\frac{-\alpha + \operatorname{sgn} \alpha \sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}{\rho} \right)^{|n|}. \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial I_1^n}{\partial \alpha} = -2\pi \operatorname{sgn} \alpha \left(\frac{-\alpha + \operatorname{sgn} \alpha \sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}{\rho} \right)^{|n|} \frac{\alpha + \operatorname{sgn} \alpha |n| \sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}{(\alpha^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.9)$$

Случай 2. $\rho > |\alpha|$:

$$\begin{aligned} I_1^n &= \frac{\pi i}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}} \left[\left(\frac{-\alpha - i\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}{\rho} \right)^{|n|} - \left(\frac{-\alpha + i\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}{\rho} \right)^{|n|} \right] = \\ &= \pi i \frac{\chi^{*|n|} - \chi^{|n|}}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\chi = \left[-\alpha + i(\rho^2 - \alpha^2)^{1/2} \right] / \rho$.

$$\frac{\partial I_1^n}{\partial \alpha} = \pi i \left[\alpha (\rho^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} (\chi^{*|n|} - \chi^{|n|}) - i(\rho^2 - \alpha^2)^{-1} |n| (\chi^{*|n|} + \chi^{|n|}) \right]. \quad (4.11)$$

4.2. Дифракция ограниченной плоской волны на спиральной фазовой пластинке

Получим формулу для дифракции Фраунгофера плоской волны на ограниченной спиральной фазовой пластинке (т.е. $\alpha = 0$). Далее будем предполагать $n \geq 0$, так как при $n < 0$ комплексную амплитуду в выходной плоскости достаточно умножить на $(-1)^n$.

При $\alpha = 0$ выражения для интегралов I_1^n и $\partial I_1^n / \partial \alpha$ существенно упрощаются:

$$I_1^n = \begin{cases} 0, n = 2m, \\ -2\pi i^{2m+1} \rho^{-1}, n = 2m + 1; \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial I_1^n}{\partial \alpha} = \begin{cases} 2\pi i^{|n|} |n| \rho^{-2}, n = 2m, \\ 0, n = 2m + 1. \end{cases} \quad (4.13)$$

Подставляя эти выражения в (4.6), разбивая суммы по $m \in (-\infty, +\infty)$ на суммы по $m \in [0, +\infty)$ и по $m \in (-\infty, -1]$, чтобы избавиться от модулей, используя рекуррентное соотношение для функций Бесселя $2\nu J_\nu(z) = z[J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)]$ и учитывая, что $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} J_\nu(z) = 0$, можно привести (4.6) к следующему виду:

$$I = \frac{(-i)^n}{2\pi} \frac{\partial I_1^n}{\partial \alpha} + n\rho^{-2} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} J_{2m+n}(R\rho) - \sum_{m=1}^{+\infty} J_{n-2m}(R\rho) \right] - R\rho^{-1} J_{n-1}(R\rho). \quad (4.14)$$

При четных $n \geq 0$:

$$I = n\rho^{-2} - n\rho^{-2} \left[J_0(R\rho) + 2 \sum_{m=1}^{n/2-1} J_{2m}(R\rho) \right] - R\rho^{-1} J_{n-1}(R\rho). \quad (4.15)$$

Умножая на k/f и заменяя ρ на $k\rho/f$, получим формулу для дифракции Фраунгофера плоской волны на ограниченной СФП целого четного неотрицательного порядка n :

$$F(\rho) = \frac{f}{k\rho^2} \left\{ n \left[1 - J_0\left(\frac{k}{f}R\rho\right) \right] - \frac{k}{f}R\rho J_{n-1}\left(\frac{k}{f}R\rho\right) - 2n \sum_{m=1}^{n/2-1} J_{2m}\left(\frac{k}{f}R\rho\right) \right\}. \quad (4.16)$$

При нечетных n , $n > 0$:

$$I = n\rho^{-2} \left[\int_0^{R\rho} J_0(x) dx - 2 \sum_{m=1}^{(n-1)/2} J_{2m-1}(R\rho) \right] - R\rho^{-1} J_{n-1}(R\rho). \quad (4.17)$$

Умножая на k/f и заменяя ρ на $k\rho/f$, получим формулу для дифракции Фраунгофера плоской волны на ограниченной СФП целого нечетного положительного порядка n :

$$F(\rho) = \frac{f}{k\rho^2} \left[n \int_0^{\frac{k}{f}R\rho} J_0(x) dx - 2n \sum_{m=1}^{(n-1)/2} J_{2m-1}\left(\frac{k}{f}R\rho\right) - \frac{k}{f}R\rho J_{n-1}\left(\frac{k}{f}R\rho\right) \right]. \quad (4.18)$$

4.3. Численное моделирование

Использование конического аксикона дает дополнительную степень свободы (параметр α) по сравнению с плоской волной. Так, например, можно добиться более гладкого радиального распределения амплитуды.

На рис. 4.1, 4.2 показаны результаты численного моделирования дифракции Фраунгофера плоской волны на спиральном аксиконе конечного радиуса. Использовались следующие значения параметров:

Длина волны: $\lambda = 633$ нм.

Фокусное расстояние сферической линзы: $f = 140$ мм.

Порядок СФП: $n = 4$.

Параметр аксикона: $\alpha = 0$ мм⁻¹ (т.е. аксикон отсутствует) (а) и $\alpha = 1$ мм⁻¹ (б).

Радиус апертуры: $R = 2$ мм.

Видно, что график на рис. 4.1, б, полученный с использованием аксикона, более гладкий.

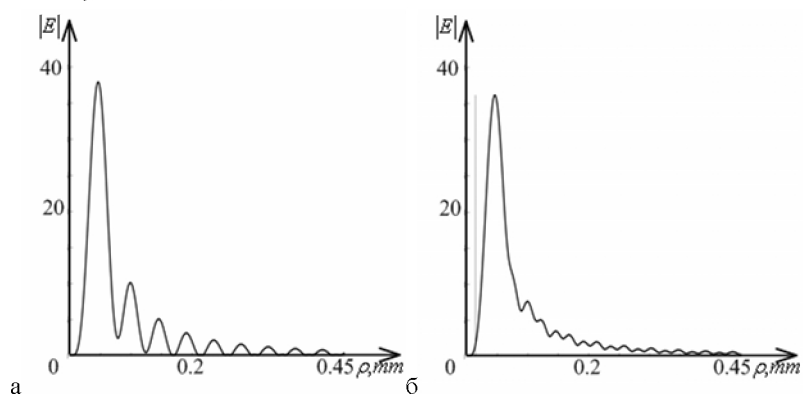


Рис. 4.1. Результат численного моделирования дифракции Фраунгофера плоской волны на спиральном аксиконе конечного радиуса (зависимости модуля амплитуды от радиальной координаты): без аксикона $\alpha = 0$ (а) и с аксиконом $\alpha = 1$ мм⁻¹ (б)

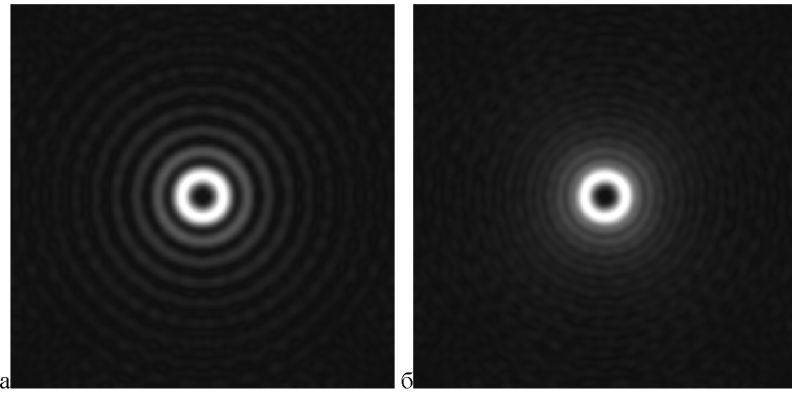


Рис. 4.2. Результат численного моделирования дифракции Фраунгофера плоской волны на спиральном аксиконе конечного радиуса (двумерные картины дифракции): без аксикона $\alpha = 0$ (а) и с аксиконом $\alpha = 1 \text{ мм}^{-1}$ (б)

Если увеличить значение параметра аксикона α , то при увеличении значения радиальной координаты ρ возрастает количество «лепестков» (рис. 4.3).

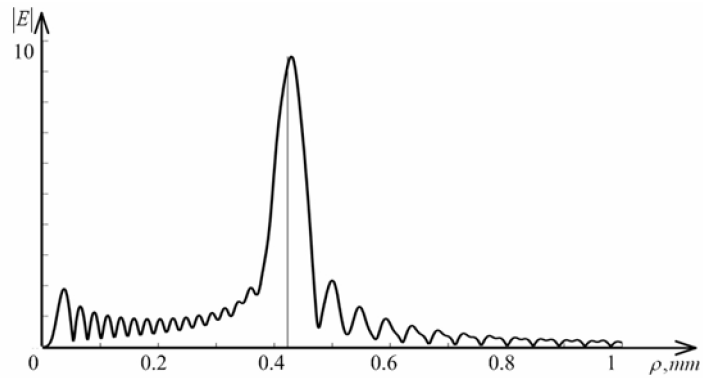


Рис. 4.3. Результат численного моделирования дифракции Фраунгофера плоской волны на спиральном аксиконе конечного радиуса при значении параметра аксикона $\alpha = 30 \text{ мм}^{-1}$

Эксперименты по формированию светового кольца с помощью СА приведены в [10].

5. ДИФРАКЦИЯ ГАУССОВОГО ПУЧКА НА ОГРАНИЧЕННОМ СПИРАЛЬНОМ АКSIKОНЕ

5.1. Аналитические выражения

Рассмотрим скалярную парааксиальную дифракцию коллимированного Гауссова пучка с комплексной амплитудой

$$E_0(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \quad (5.1)$$

на СА, который в приближении тонкого транспаранта описывается функцией пропускания вида

$$\tau_n(r, \varphi) = \exp(i\alpha r + in\varphi), \quad (5.2)$$

где w – радиус перетяжки Гауссова пучка, (r, φ) – полярные координаты в плоскости СА при $z = 0$, z – оптическая ось, α – параметр аксикона, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – номер СФП.

Тогда парааксиальная дифракция волны (5.1) на СА (5.2) описывается преобразованием Френеля:

$$F_n(\rho, \theta, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \exp\left(ikz + \frac{ik\rho^2}{2z}\right) \times \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{r^2}{w^2} + i\alpha r + in\varphi + \frac{ikr^2}{2z} - \frac{ik}{z} \rho r \cos(\varphi - \theta)\right] r dr d\varphi, \quad (5.3)$$

где (ρ, θ) – полярные координаты в плоскости z (z – оптическая ось), $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Используя справочный интеграл [1]

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} x^{\lambda+1} \exp(-px^2) J_\nu(cx) dx = \\
& = \frac{c^\nu p^{-(\nu+\lambda+2)/2}}{2^{\nu+1} \nu!} \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda+2}{2}\right) {}_1F_1\left[\frac{\nu+\lambda+2}{2}, \nu+1, -\left(\frac{c}{2\sqrt{p}}\right)^2\right],
\end{aligned} \tag{5.4}$$

вместо выражения (5.3) получим:

$$\begin{aligned}
F_n(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{n+1} k}{z} \exp\left[in\theta + ikz + \frac{ik\rho^2}{2z}\right] \times \\
& \times \left(\frac{k\rho}{2z}\right)^n \frac{\gamma^{-(n+2)/2}}{2^{n+1} n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^m \gamma^{-m/2}}{m!} \Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right) \times \\
& \times {}_1F_1\left[\frac{m+n+2}{2}, n+1, -\left(\frac{k\rho}{2z\sqrt{\gamma}}\right)^2\right],
\end{aligned} \tag{5.5}$$

где $\gamma = 1/w^2 - ik/(2z)$, ${}_1F_1(a, b, x)$ - вырожденная или конфлуэнтная гипергеометрическая функция:

$${}_1F_1(a, b, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{(b)_m m!}, \tag{5.6}$$

$(a)_m = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$, $(a)_0 = 1$, а $\Gamma(x)$ - гамма-функция.

Из выражения (5.5) следует, что картина дифракции представляет собой набор concentрических колец. При $\rho = 0$ в центре картины дифракции при любом $n \neq 0$ будет нулевая интенсивность. Так как комплексная амплитуда (5.5) зависит от комбинации переменных $k\rho/(2z\sqrt{\gamma})$, то радиусы ρ_l локальных максимумов и минимумов картины дифракции должны удовлетворять выражению:

$$\rho_l = \frac{wz a_l}{z_0} \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)^{1/4}, \tag{5.7}$$

где α_l - постоянные, зависящие только от номера кольца $l=1,2,\dots$ картины дифракции и параметра α , $z_0 = kw^2/2$ - длина Рэлея.

При $\alpha = 0$ (т.е. аксикон отсутствует), из (5.5) следует соотношение для комплексной амплитуды дифракции Френеля Гауссова пучка на СФП:

$$F_n(\rho, \theta, z, \alpha = 0) = \frac{(-i)^{n+1} k}{z} \exp \left[i(n\theta + kz) + \frac{ik\rho^2}{2z} \right] \left(\frac{k\rho}{2z} \right)^n \times \\ \times \frac{\gamma^{-(n+2)/2}}{2^{n+1} n!} \Gamma \left(\frac{n+2}{2} \right) {}_1F_1 \left[\frac{n+2}{2}, n+1, - \left(\frac{k\rho}{2z\sqrt{\gamma}} \right)^2 \right]. \quad (5.8)$$

Учитывая связь между гипергеометрической и Бесселевой функциями:

$$J_{(n-1)/2}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{(n-1)/2} \exp(-ix)}{\Gamma \left(\frac{n-1}{2} \right)} {}_1F_1 \left(\frac{n}{2}, n; 2ix \right) \quad (5.9)$$

и рекуррентное соотношение для гипергеометрических функций

$${}_1F_1 \left(\frac{n}{2}, n+1; 2ix \right) = \left(i \frac{d}{dx} + 2 \right) {}_1F_1 \left(\frac{n}{2}, n; 2ix \right), \quad (5.10)$$

мы можем вместо (5.8) получить хорошо известное соотношение для дифракции Френеля Гауссова пучка на СФП [5, 6]:

$$\begin{aligned}
E_n(\rho, \theta, z, \alpha = 0) &= \frac{(-i)^{n+1} \sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \left(\frac{\rho}{w}\right) \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]^{-3/4} \times \\
&\times \exp \left[i \frac{3}{2} \tan^{-1} \left(\frac{z_0}{z}\right) - i \frac{k \rho^2}{2R_0(z)} + i \frac{k \rho^2}{2z} - \frac{\rho^2}{w^2(z)} + in\theta + ikz \right] \times \\
&\times \left\{ I_{\frac{n-1}{2}} \left[\rho^2 \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R_0(z)} \right) \right] - I_{\frac{n+1}{2}} \left[\rho^2 \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R_0(z)} \right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{5.11}$$

где $w^2(z) = 2w^2 \left[1 + (z/z_0)^2 \right]$, $R_0(z) = 2z \left[1 + (z/z_0)^2 \right]$, $I_\nu(x)$ – функция Бесселя второго рода и ν -го порядка.

При $z \rightarrow \infty$ ($z \gg z_0$) из выражения (5.5) следует соотношение для комплексной амплитуды дифракции Фраунгофера Гауссового пучка на СА ($\gamma = 1/w^2$):

$$\begin{aligned}
F_n(\rho, \theta, z \rightarrow \infty) &= \frac{(-i)^{n+1} z_0}{2^n n! z} \exp \left(in\theta + ikz + \frac{ik \rho^2}{2z} \right) \left(\frac{z_0 \rho}{zw} \right)^n \times \\
&\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha w)^m}{m!} \Gamma \left(\frac{m+n+2}{2} \right) {}_1F_1 \left[\frac{m+n+2}{2}, n+1, - \left(\frac{z_0 \rho}{zw} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{5.12}$$

При $\alpha = 0$ (т.е. аксикон отсутствует) и $z \rightarrow \infty$ ($z \gg z_0$), из (5.5) следует выражение для комплексной амплитуды дифракции Фраунгофера Гауссового пучка на СФП:

$$\begin{aligned}
F_n(\rho, \theta, z \rightarrow \infty, \alpha = 0) &= \\
&= \frac{(-i)^{n+1} z_0}{2^n n! z} \exp \left(in\theta + ikz + \frac{ik \rho^2}{2z} \right) \left(\frac{z_0 \rho}{zw} \right)^n \times \\
&\times \Gamma \left(\frac{n+2}{2} \right) {}_1F_1 \left[\frac{n+2}{2}, n+1, - \left(\frac{z_0 \rho}{zw} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Интересно сравнить выражение (5.13) с комплексной амплитудой дифракции Фраунгофера плоской ограниченной волны радиуса R на СФП, когда фокусное расстояние сферической линзы равно f [8]:

$$E_n(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{n+1} \exp(in\theta + ikz) \left(\frac{kR^2}{f}\right) \left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^n}{(n+2)n!} \times \\ \times {}_1F_2\left[\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1, -\left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^2\right], \quad (5.14)$$

где ${}_1F_2(a, b, c, x)$ - гипергеометрическая функция:

$${}_1F_2(a, b, c, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{(b)_m (c)_m m!}. \quad (5.15)$$

5.2. Численное моделирование

На рис. 5.1 показано рассчитанное распределение амплитуды $|F_n(\rho, \theta)|$ в относительных единицах как функция радиальной переменной. Эти кривые представляют собой радиальный профиль картины дифракции Френеля ($z = 200$ мм) Гауссова пучка с радиусом перетяжки $w = 1$ мм и длиной волны $\lambda = 633$ нм на СА ($n = 8$) с параметром $\alpha = 0$ мм⁻¹ (а), $\alpha = 20$ мм⁻¹ (б), $\alpha = 50$ мм⁻¹ (в).

Из рис. 5.1 видно, что радиус главного максимума модуля амплитуды увеличивается с ростом значения α .

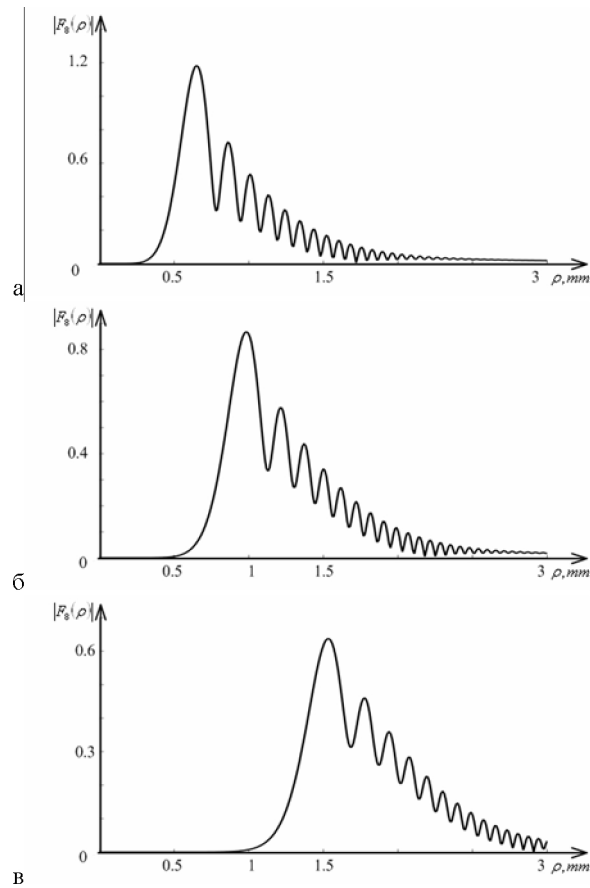


Рис. 5.1. Радиальный профиль картины дифракции Френеля (амплитуда $|F_n(\rho, \theta)|$) на расстоянии $z = 200$ мм) для Гауссова пучка ($\lambda = 633$ нм, $w = 1$ мм) на СА ($n = 8$): $\alpha = 0$ мм $^{-1}$ (а), $\alpha = 20$ мм $^{-1}$ (б), $\alpha = 50$ мм $^{-1}$ (в)

На рис. 5.2 показаны две рассчитанных радиальных картины дифракции Френеля (амплитуды $|F_n(\rho, \theta)|$) для Гауссова пучка ($w = 1$ мм, $\lambda = 633$ нм) на СА ($n = 8$) с параметром $\alpha = 20$ мм $^{-1}$ на расстояниях $z = 400$ мм (а) и $z = 500$ мм (б). Из рис. 5.2 можно увидеть, что с ростом расстояния z радиус первого на дифракционной карти-

не яркого кольца, характеризующегося максимальной амплитудой, также увеличивается. Сравнение рисунков 5.1 и 5.2 дает основание заключить, что радиус первого кольца может меняться либо путем изменения параметра аксикона α при неизменном расстоянии z , либо изменением расстояния z от аксикона до плоскости наблюдения. Отличие будет состоять в количестве периферийных колец (боковых лепестков) на дифракционной картине. Из рис. 5.1, в видно, что 13 периферийных дифракционных колец укладываются в радиальный интервал от 1.5 мм до 3 мм. В то же время на рис. 5.2, а в тот же радиальный интервал от 1.5 мм до 3 мм укладываются только семь боковых лепестков, при том, что радиус первого кольца на обеих картинах одинаков.

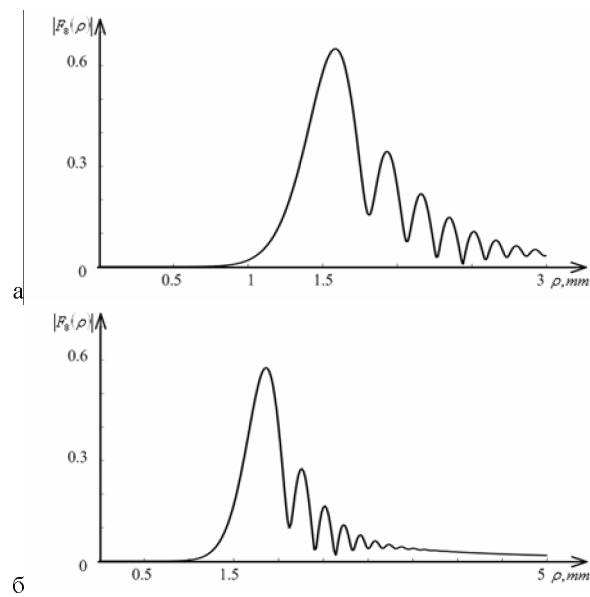


Рис. 5.2. Радиальный профиль картины дифракции Френеля (амплитуда $|F_n(\rho, \theta)|$) Гауссова пучка ($\lambda = 633$ нм, $w = 1$ мм) на СА ($n = 8$, $\alpha = 20 \text{ мм}^{-1}$): $z = 400$ мм (а), $z = 500$ мм (б)

На рис. 5.3 показаны две рассчитанных радиальных картины дифракции Френеля (амплитуды $|F_n(\rho, \theta)|$ на расстоянии $z = 200$ мм) Гауссового пучка ($w = 1$ мм, $\lambda = 633$ нм) на СА ($\alpha = 20 \text{ мм}^{-1}$) разных порядков n : 40 (а) и 50 (б).

Из рис. 5.3 видно, что радиус первого кольца на дифракционной картине может быть изменен как варьированием порядка СА n , так и параметра α . Заметим, однако, что в случае рис. 5.3, вдобавок к увеличению радиуса первого кольца, увеличение порядка n приводит к утончению первого кольца, к большему количеству периферийных колец и к повышенному контрасту колец.

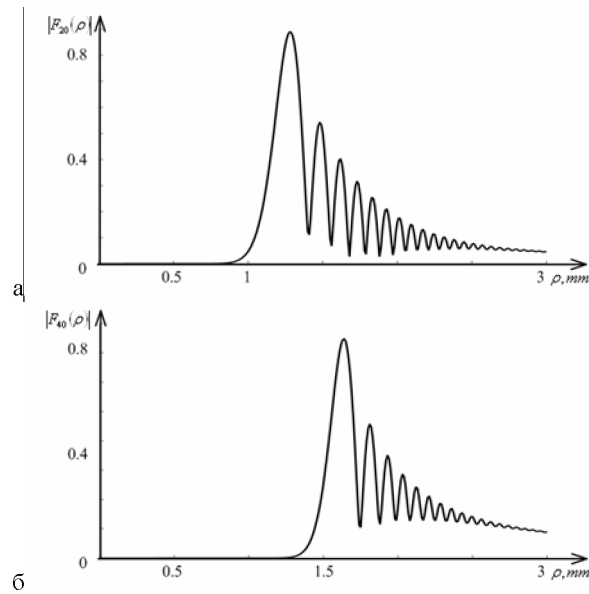


Рис. 5.3. Радиальный профиль картины дифракции Френеля (амплитуда $|F_n(\rho, \theta)|$ на расстоянии $z = 200$ мм) Гауссового пучка ($\lambda = 633$ нм, $w = 1$ мм) на СА ($\alpha = 20 \text{ мм}^{-1}$): $n = 20$ (а), $n = 40$ (б)

6. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЫ

Уравнение Гельмгольца, которое описывает распространение непараксиальной монохроматической световой волны в однородном пространстве, допускает одиннадцать решений с разделяющимися переменными в различных системах координат [11]. Это означает, что существуют световые поля, распространяющиеся без изменения своей структуры. Примером являются хорошо известные моды Бесселя [12]. Параксиальный аналог уравнения Гельмгольца – это параболическое уравнение типа Шредингера, которое описывает распространение параксиальных световых полей. Это уравнение допускает семнадцать решений с разделяющимися переменными в системах координат [11]. Световые поля, которые описываются такими решениями, при распространении сохраняют свою структуру с точностью до масштаба. Примером являются хорошо известные моды Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса [13].

В последнее время резко увеличилось количество работ, в которых решения с разделяющимися переменными для уравнения Гельмгольца и Шредингера используются в оптике [14-22]. Новые непараксиальные световые пучки, которые сохраняют свою структуру при распространении, рассматривались в [14-16]. Это параболические пучки [14], волны Гельмгольца-Гаусса [15] и Лапласа-Гаусса [16]. Новые параксиальные световые пучки, сохраняющие свою структуру с точностью до масштаба, рассматривались в [17-20]. Это моды Айнса-Гаусса [17], элегантные пучки Айнса-Гаусса [18], моды Эрмита-Лагерра-Гаусса [19] и чистые оптические вихри [5]. Некоторые из этих пучков были реализованы с помощью лазерных резонаторов [19, 20], дифракционных оптических элементов [5] и жидкокристаллических дисплеев [21].

В этом разделе рассмотрено еще одно семейство лазерных мод, представляющих собой ортонормированный базис и являющихся

решением с разделенными переменными параксиального параболического уравнения в цилиндрической системе координат. В цилиндрической системе координат уравнение Шредингера кроме решений в виде мод Бесселя и мод Лагерра-Гаусса также имеет решения в виде вырожденных гипергеометрических функций. Распределения интенсивности в поперечном сечении таких пучков близко к распределению интенсивности для мод Бесселя. Это также набор концентрических световых колец, но интенсивность их спадает с ростом радиальной переменной как r^{-2} , т.е. быстрее, чем для мод Бесселя. Как и моды Бесселя, гипергеометрические моды имеют бесконечную энергию. В отличие же от мод Бесселя радиусы световых колец гипергеометрических мод увеличиваются с ростом продольной координаты z как \sqrt{z} . Описан также эксперимент по генерации таких лазерных мод с помощью жидкокристаллического микродисплея.

Комплексная амплитуда параксиального светового поля $E(r, \varphi, z)$ в цилиндрической системе координат (r, φ, z) удовлетворяет уравнению типа Шредингера:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) E(r, \varphi, z) = 0, \quad (6.1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ волновое число света с длиной волны λ . Уравнению (6.1) удовлетворяют функции, образующие ортонормированный базис:

$$E_{\gamma, n}(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{z} \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{n+1+i\gamma}{2} \right) \times \exp \left[\frac{i\pi}{4} (3n+i\gamma-1) + \frac{i\gamma}{2} \ln \frac{z_0}{z} + in\varphi \right] x^{\frac{n}{2}} {}_1F_1 \left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, ix \right), \quad (6.2)$$

где $-\infty < \gamma < \infty$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ непрерывный и дискретный параметры, от которых зависят функции (6.2) и которые будем называть но-

мерами моды; $z_0 = kw^2/2$ - аналог длины Рэлея, w - параметр моды, аналогичный радиусу гауссового пучка, хотя здесь он имеет другой смысл; $x = kr^2/(2z)$; $\Gamma(x)$ - гамма функция; ${}_1F_1(a, b, y)$ - вырожденная или конфлюэнтная гипергеометрическая функция [4]:

$${}_1F_1(a, b, y) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} \exp(yt) dt, \quad (6.3)$$

где $\text{Re}(b) > \text{Re}(a) > 0$. Из (6.3) видно, что ${}_1F_1(a, b, y)$ - это целая аналитическая функция. В случае (6.2) $\text{Re}(y) = 0$ и тогда уравнение (6.3) является одномерным преобразованием Фурье от ограниченной функции на отрезке $[0, 1]$. По теореме Шеннона асимптотически при $r \rightarrow \infty$ период модуляции функции (6.2) (т.е. расстояние между соседними максимумами или минимумами) равно 2π . При больших значениях аргумента $x \gg 1$ имеет место асимптотика $x^{n/2} \left| {}_1F_1\left[\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, ix\right] \right| \approx 1/\sqrt{x}$. Такое поведение модуля функции (6.2) приводит к более быстрому спаду, чем у функции Бесселя. Кроме того, нули вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1(a, b, y_{0m}) = 0$ близки к нулям функции Бесселя $J_{b-1}(y_{b-1,m}) = 0$ [4]:

$$y_{0,m} \approx \left| \frac{y_{b-1,m}^2}{2b-4a} \right|. \quad (6.4)$$

Реализовать световые пучки (6.2), которые в дальнейшем будем называть гипергеометрическими (ГГ) модами, можно с помощью оптического элемента, имеющего функцию пропускания:

$$E_{\gamma,n}(\rho, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{w}{\rho} \right) \exp \left[i\gamma \ln \left(\frac{\rho}{w} \right) + in\theta \right]. \quad (6.5)$$

При освещении оптического элемента (6.5), расположенного в плоскости $z = 0$, неограниченной плоской волной на расстоянии z сформируется световое поле с комплексной амплитудой (6.2). Энергия световых полей (6.2) и (6.5) неограниченна, как и у моды Бесселя

$$E_{\beta,n}(r, \varphi, z) = J_n(\beta r) \exp\left[i\frac{\beta^2 z}{2k} + in\varphi\right], \quad (6.6)$$

которая также удовлетворяет уравнению (6.1). Поэтому на практике для реализации моды (6.2) оптический элемент (6.5) следует ограничивать кольцевой диафрагмой. При этом на конечном расстоянии $z_0 < R \tan(\gamma/R)$, где R – большой радиус кольцевой диафрагмы, будет эффективно формироваться мода (6.2).

Световое поле (6.2) при распространении сохраняет свою структуру и меняется только масштабно. Поперечное распределение интенсивности ГГ моды (6.2) представляет собой набор концентрических световых колец, радиусы которых удовлетворяют условию:

$$r_m = (\alpha_m z \lambda / \pi)^{1/2}, \quad (6.7)$$

где α_m – постоянные, зависящие от номера кольца m и от номеров моды (γ, n) . Поэтому радиусы колец увеличиваются с ростом z как \sqrt{z} . Из соотношения [4]:

$${}_1F_1\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -ix\right) = \exp(-ix) {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, ix\right) \quad (6.8)$$

следует, что фаза гипергеометрической функции равна $x/2$ (с точностью до π):

$$\arg\left\{{}_1F_1\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -ix\right)\right\} = -\frac{x}{2}. \quad (6.9)$$

Интересно, что эта фаза не зависит от номеров моды (γ, n) . Тогда можно записать выражение для фазы ГГ-моды:

$$\begin{aligned} \arg \{E_{\gamma, n}(r, \varphi, z)\} &= \frac{\gamma}{2} \ln \frac{z}{z_0} + \\ &+ n\varphi + \frac{kr^2}{4z} + \frac{\pi}{4}(3n-1) + \arg \Gamma\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}\right), \end{aligned} \quad (6.10)$$

где первое слагаемое имеет смысл фазы Гоу.

На рис. 6.1 показаны интенсивность (а), фаза (б) и радиальное сечение интенсивности (в) для ГГ-моды с номерами $(\gamma, n) = (2, 3)$, рассчитанные по формуле (6.2) на расстоянии $z = 1000$ мм. Длина волны $\lambda = 633$ нм, $w = 1$ мм.

Экспериментально ГГ-моды формировались с помощью жидкокристаллического микродисплея CRL OPTO с разрешением 1316×1024 элементов. На микродисплее формировался бинарный дифракционный оптический элемент (ДОЭ) диаметром 6.5 мм, который освещался линейно-поляризованным плоским пучком света от твердотельного лазера с длиной волны 532 нм и мощностью 500 мВт. На рис. 6.2, а показана бинарная фаза ДОЭ $S(\rho, \theta)$, удовлетворяющая уравнению:

$$S(\rho, \theta, z) = \operatorname{sgn} \left\{ \cos \left[\gamma \ln \frac{\rho}{w} + n\theta + \frac{k\rho^2}{2f} \right] \right\}, \quad (6.11)$$

где $\operatorname{sgn}(\xi)$ – знаковая функция, f – фокусное расстояние сферической линзы. Амплитуда ρ^{-1} функции (6.5) заменялась на постоянное значение. На рис. 6.2, б показано распределение интенсивности, сформированное с помощью жидкокристаллического микродисплея с фазой на рис. 6.2, а и зарегистрированное на расстоянии 700 мм от дисплея.

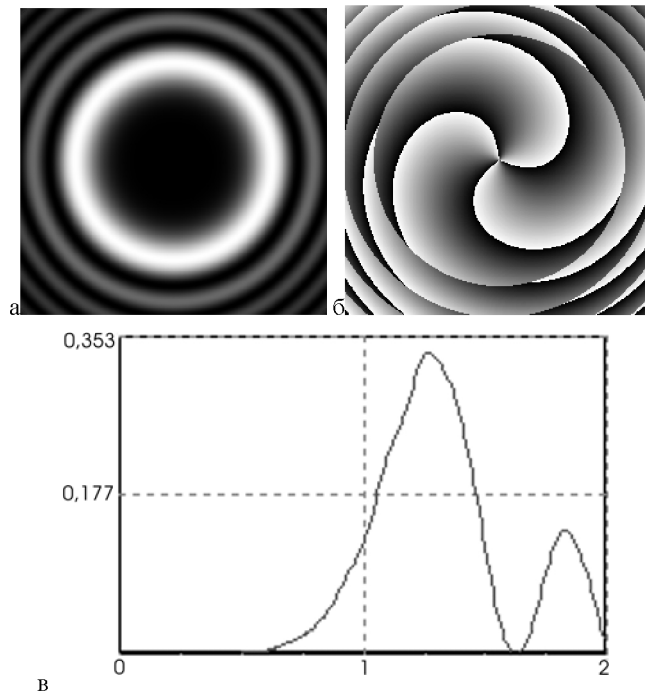


Рис. 6.1. Рассчитанное по уравнению (2) распределение интенсивности $|E_{\gamma,n}(r, \varphi, z)|^2$ (а), фазы $\arg\{E_{\gamma,n}(r, \varphi, z)\}$ (б) и радиального сечения интенсивности (в) ГГ-моды $(\gamma, n) = (2, 3)$ на расстоянии $z = 1000$ мм. Размер кадров (а) и (б) равен $4 \text{ мм} \times 4 \text{ мм}$.

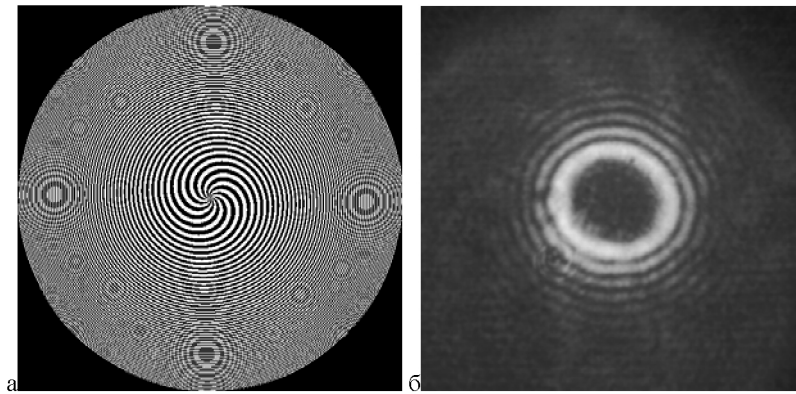


Рис. 6.2. Бинарная фаза, сформированная на жидкокристаллическом дисплее (а) и распределение интенсивности ГГ-моды $(\gamma, n) = (5, 10)$, зарегистрированное CCD-камерой на расстоянии $z = 700$ мм от дисплея (б)

В данном разделе теоретически и экспериментально рассмотрено новое семейство оптических вихрей, названных гипергеометрическими модами. ГГ-моды удовлетворяют параксиальному уравнению типа Шредингера, образуют ортогональный базис функций, при распространении сохраняют свою структуру с точностью до масштаба и близки к известным модам Бесселя. Заметим, что при $\gamma = -i$ ГГ-моды переходят в однопараметрическое семейство чистых оптических вихрей [5].

7. ПАРАКСИАЛЬНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ С ОСОБЕННОСТЬЮ В ЦЕНТРЕ ПЕРЕТЯЖКИ

Рассмотрим световое поле с начальной функцией комплексного пропускания вида:

$$E_{\gamma m}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r}{w}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\gamma \ln \frac{r}{w} + in\varphi\right), \quad (7.1)$$

где (r, φ) - полярные координаты в начальной плоскости ($z = 0$), w и γ - действительные параметры логарифмического аксикона, σ - радиус перетяжки гауссова пучка, n - целый порядок спиральной фазовой пластинки, m - параметр. Комплексная амплитуда (7.1) описывает световое поле с бесконечной энергией и с особенностью при $r = 0$ и $m < 0$. Несмотря на это, в любой другой поперечной плоскости на расстоянии z от начальной плоскости комплексная амплитуда светового поля, порожденная функцией (7.1), уже не будет иметь особенности и будет конечной.

При паракиальном распространении светового поля (7.1) его комплексная амплитуда на расстоянии z будет определяться преобразованием Френеля, которое в полярных координатах имеет вид:

$$E(\rho, \theta, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \iint_{R^2} E(r, \varphi, 0) \exp\left\{\frac{ik}{2z}[\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)]\right\} r dr d\varphi. \quad (7.2)$$

Известен справочный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-px^2) J_\nu(cx) dx = \\ = c^\nu p^{-\frac{\nu+\alpha}{2}} 2^{-\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu+\alpha}{2}\right) \Gamma^{-1}(\nu+1) {}_1F_1\left(\frac{\nu+\alpha}{2}, \nu+1, -\frac{c^2}{4p}\right), \end{aligned} \quad (7.3)$$

где ${}_1F_1(a, b, x)$ - вырожденная гипергеометрическая функция или функция Куммера, $\Gamma(x)$ - гамма-функция.

Тогда преобразование Френеля от (7.2) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 E_{\gamma nm}(\rho, \theta, z) &= \frac{1}{2\pi n! \rho w^{m+i\gamma}} \left(-\frac{ik\rho}{2z} \right)^{n+1} \times \\
 &\times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) \left(\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{ik}{2z} \right)^{-\frac{n+m+2+i\gamma}{2}} \times \\
 &\times \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2} \right) {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\frac{\left(\frac{k\rho}{2z} \right)^2}{\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{ik}{2z}} \right).
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Обозначим $z_0 = k\sigma^2$, $q = (1 - iz_0/z)^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
 E_{\gamma nm}(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{wq} \right)^{m+i\gamma} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) \times \\
 &\times \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2} \right) {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right).
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Модуль комплексной амплитуды (7.5) пропорционален функции Куммера:

$$\left| E_{\gamma nm}(\rho, \theta, z) \right| \propto x^{\frac{n}{2}} {}_1F_1(a, b, -x), \tag{7.6}$$

где x - комплексный аргумент:

$$x = \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2. \tag{7.7}$$

Так как функция Куммера представляется в виде ряда:

$${}_1F_1(a, b, -x) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l (-1)^l x^l, \quad (7.8)$$

где

$$C_l = \frac{\Gamma(a+l)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+l)l!}, \quad (7.9)$$

то

$$\begin{aligned} x^l &= \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2z}} \right)^l \frac{1}{q^{2l}} = \left\{ \frac{1}{q^{2l}} = \frac{1}{(1-iz_0/z)^l} = \left[\frac{\exp\left(i \arctg \frac{z_0}{z}\right)}{\sqrt{1+z_0^2/z^2}} \right]^l \right\} = \\ &= \left[\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2z}(1+z_0^2/z^2)^{1/4}} \right]^{2l} \exp\left(i \arctg \frac{z_0}{z}\right). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Тогда

$${}_1F_1(a, b, -x) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l C_l \left[\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2z}(1+z_0^2/z^2)^{1/4}} \right]^{2l} \exp\left(-i \arctg \frac{z_0}{z}\right), \quad (7.11)$$

Из (7.11) следует, что у функции $|{}_1F_1|$ и амплитуда и фаза каждого слагаемого ряда меняется в зависимости от изменения z . Это означает, что каждое “парциальное” световое поле при $l = \text{const}$ в (7.11) будет распространяться в пространстве со своей фазовой скоростью, определяемой множителем $\exp[-il \tan^{-1}(z/z_0)]$. В результате продольной интерференции всех слагаемых в (7.11) модуль функции (7.11), а значит и модуль комплексной амплитуды светового поля (7.5), будет изменять свой вид при распространении.

7.1. Гипергеометрические пучки в ближней зоне

При $z \ll z_0 = k\sigma^2$ пропадает зависимость от σ , так как

$$\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{ik}{2z} \approx -\frac{ik}{2z}. \quad (7.12)$$

Тогда $q \approx \sqrt{-iz_0/z}$, $q^2 \approx iz_0/z$ и

$$E_{\gamma nm}(\rho, \theta, z \ll z_0) = \frac{(-i)^{\frac{n-m-i\gamma}{2}}}{2\pi n!} \left(\frac{k\omega^2}{2z}\right)^{\frac{m+i\gamma}{2}} \left(\frac{k\rho^2}{2z}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times \quad (7.13)$$

$$\times \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\frac{ik\rho^2}{2z}\right).$$

Из (7.13) следует, что при $z \ll z_0$ модуль комплексной амплитуды $|E_{\gamma nm}(\rho, \theta, z \ll z_0)|$ будет сохранять свой вид и меняться только масштабно. Заметим, что при $\sigma \rightarrow \infty$ (гауссов пучок заменяется на плоский неограниченный пучок) также вместо (7.5) получим уравнение (7.13), описывающее параксиальные модовые пучки, обобщенные гипергеометрические моды [44].

7.2. Гипергеометрические пучки в дальней зоне

При $z \gg z_0 = k\sigma^2$ $q = (1 - iz_0/z)^{1/2} \approx 1$. Тогда

$$E_{\gamma nm}(\rho, \theta, z \gg z_0) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{z}\right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{w}\right)^{m+i\gamma} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}z}\right)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times \quad (7.14)$$

$$\times \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}z}\right)^2\right).$$

Характер зависимости картины дифракции от z меняется качественным образом. И в ближней, и в дальней зоне картина дифракции имеет набор концентрических световых колец с увеличивающейся пространственной частотой, так как распределение амплитуды

ды пропорционально ρ^2 . Но в ближней зоне картина дифракции не меняется (с точностью до множителя) при постоянном значении отношения ρ^2/z , в то время как в дальней зоне - при постоянном отношении ρ/z . То есть при распространении в ближней зоне радиусы световых колец увеличиваются медленнее, чем в дальней: в ближней зоне радиусы колец растут пропорционально \sqrt{z} , а в дальней - пропорционально z .

7.3. Частные случаи гипергеометрических пучков

При $m = -1$ получаются гипергеометрические лазерные пучки.

$$E_{\gamma, n, -1}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{w}{r} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\gamma \ln \frac{r}{w} + in\varphi \right). \quad (7.15)$$

При распространении вдоль оси z комплексная амплитуда будет иметь вид:

$$E_{\gamma, n, -1}(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{wq} \right)^{-1+i\gamma} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^n \exp \left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) \times \\ \times \Gamma \left(\frac{n+1+i\gamma}{2} \right) {}_1F_1 \left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right). \quad (7.16)$$

В ближней зоне $z \ll z_0 = k\sigma^2$, при любом z , но при $\sigma \rightarrow \infty$ (т.е. гауссов пучок переходит в плоскую волну)

$$E_{\gamma, n, -1}(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{\frac{n+1-i\gamma}{2}}}{2\pi n!} \left(\frac{kw^2}{2z} \right)^{\frac{1-i\gamma}{2}} \left(\frac{k\rho^2}{2z} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) \times \\ \times \Gamma \left(\frac{n+1+i\gamma}{2} \right) {}_1F_1 \left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -\frac{ik\rho^2}{2z} \right). \quad (7.17)$$

С учетом известного соотношения для функции Куммера

$${}_1F_1(a, b, z) = \exp(z) {}_1F_1(b - a, b, -z), \quad (7.18)$$

вместо (7.17) получим выражение для комплексной амплитуды гипергеометрических мод [38, 44]:

$$\begin{aligned} E_{\gamma, n, -1}(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{\frac{n+1-i\gamma}{2}}}{2\pi n!} \left(\frac{kw^2}{2z}\right)^{\frac{1-i\gamma}{2}} \left(\frac{k\rho^2}{2z}\right)^{\frac{n}{2}} \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}\right) \exp(in\theta) {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, \frac{ik\rho^2}{2z}\right) = \\ &= \frac{w^{-n}\rho^n}{2\pi n!} \Gamma\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}\right) \left(-\frac{ikw^2}{2z}\right)^{\frac{n+1-i\gamma}{2}} \exp(in\theta) {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, \frac{ik\rho^2}{2z}\right). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Полученное выражение описывает гипергеометрические моды.

Следует отметить, что справочный интеграл (7.3) определен для случаев, когда $\text{Re}(p) > 0$, что не соблюдается при $\sigma \rightarrow \infty$. Однако при подстановке (7.19) в параксиальное уравнение распространения света

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2}\right) U(\rho, \theta, z) = 0 \quad (7.20)$$

получается верное тождество, а именно, дифференциальное уравнение Куммера:

$$\left[\chi \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + (b - \chi) \frac{\partial}{\partial \chi} - a\right] F(a, b, \chi) = 0, \quad (7.21)$$

где

$$\begin{cases} a = \frac{n+1-i\gamma}{2}, \\ b = n+1, \\ \chi = \frac{ik\rho^2}{2z}. \end{cases} \quad (7.22)$$

Таким образом, мы показали, что гипергеометрические моды являются частным случаем гипергеометрических пучков (7.5) и (7.13).

7.4. Гипергеометрические моды при $\gamma = 0$

Рассмотрим однопараметрическое семейство гипергеометрических мод (7.19) при условии, что $\gamma = 0$. В этом случае исходная функция амплитуды (7.15) при $z = 0$ будет иметь только амплитудную особенность при $\rho = 0$, а логарифмической фазовой особенности при $\rho = 0$ из-за $\gamma = 0$ уже не будет. Воспользуемся известным соотношением для конфлюэнтной функции:

$${}_1F_1\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}, 2\frac{n}{2} + 1, \frac{ik\rho^2}{2z}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \exp\left(\frac{ik\rho^2}{4z}\right) \left(\frac{k\rho^2}{8z}\right)^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right). \quad (7.23)$$

После подстановки (7.23) в (7.19) получается

$$E_{0n}(\rho, \theta, z) = \frac{w}{2} \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-i\frac{\pi}{4}(n+1)\right] \exp\left(\frac{ik\rho^2}{4z} + in\theta\right) J_{\frac{n}{2}}\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right). \quad (7.24)$$

Из (7.24) видно, что комплексная амплитуда гипергеометрических мод при $\gamma = 0$ пропорциональна функции Бесселя первого рода целого и полуцелого порядков. Заметим, что рассмотренные выше поля (и гипергеометрические пучки (7.5) и моды (7.19)) зависят от квадрата радиальной переменной. Это означает, что с ростом переменной ρ будет уменьшаться расстояние между соседними локальными максимумами или минимумами. Неограниченное увеличение

пространственной частоты картины дифракции является следствием особенности (амплитудной и фазовой) комплексной амплитуды в центре начальной плоскости (в центре перетяжки). В реальности для формирования таких лазерных пучков следует использовать кольцевую диафрагму, «блокирующую» особенность в центре координат. При этом, правда, гипергеометрические пучки можно будет сформировать только приближенно, но зато пространственная частота картины дифракции будет конечной величиной.

Рассмотрим первую вихревую моду при $n=1$. Тогда вместо (7.24) получим комплексную амплитуду:

$$E_{01}(\rho, \theta, z) = \frac{2}{\pi\rho} \sqrt{\lambda z} \sin\left(\frac{\pi\rho^2}{2\lambda z}\right) \exp(i\theta). \quad (7.25)$$

Нули комплексной амплитуды (7.25) будут иметь координаты $\rho_m = \sqrt{2m\lambda z}$. Первый максимум амплитуды находится из уравнения $2x = \text{tg}(x)$ и имеет координату вблизи точки $\rho_{\text{max}} < \sqrt{\lambda z}$. Заметим, что расстояние между двумя соседними нулями интенсивности поля (7.25) с номерами m и $m+1$ при $m \gg 1$ равно выражению $\Delta\rho_m \approx \sqrt{\lambda z/(2m)}$. То есть пространственная частота картины дифракции стремится к бесконечности при $\rho \rightarrow \infty$. Устранить это можно, ограничив исходное поле (7.15) кольцевой диафрагмой, блокирующей особенность в центре.

7.5. Обобщенные гипергеометрические моды

Рассмотрим функцию следующего вида (более общего, чем (7.19)):

$$E(\rho, \theta, 0) = \rho^p z^q \exp(in\theta) F(s\rho^m z^l), \quad (7.26)$$

где F - некоторая функция.

После подстановки функции (7.26) в параксиальное уравнение распространения света (7.20) получается следующее соотношение:

$$s^2 m^2 \rho^{2m-2} z^{2l} F'' + [(2p+m) sm \rho^{m-2} z^l + 2iksl \rho^m z^{l-1}] F' + [p(p-1) \rho^{-2} + p \rho^{-2} - n^2 \rho^{-2} + 2ikqz^{-1}] F = 0. \quad (7.27)$$

При $p = \pm n$ уравнение упрощается. Для определенности рассмотрим случай, когда $p = +n$:

$$s^2 m^2 \rho^{2m-2} z^{2l} F'' + [sm(2n+m) \rho^{m-2} z^l + 2iksl \rho^m z^{l-1}] F' + 2ikqz^{-1} F = 0. \quad (7.28)$$

Чтобы получить из уравнения (7.28) уравнение Куммера, нужно, чтобы коэффициент при производной второго порядка равнялся аргументу функции F . Для этого разделим обе части уравнения на $sm^2 \rho^{m-2} z^l$:

$$s \rho^m z^l F'' + \left(\frac{2n+m}{m} + \frac{2ikl \rho^2 z^{-1}}{m^2} \right) F' + \frac{2ikq \rho^{2-m} z^{-l-1}}{sm^2} F = 0. \quad (7.29)$$

Далее нужно, чтобы коэффициент при производной первого порядка был равен разности константы и аргумента функции F , это возможно только в случае, когда

$$\begin{cases} m = 2, \\ l = -1, \\ s = -\frac{2ikl}{m^2} = \frac{ik}{2}. \end{cases} \quad (7.30)$$

Тогда вместо (7.29) получим уравнение вида:

$$\frac{ik}{2} \rho^2 z^{-1} F'' + \left(n+1 - \frac{ik}{2} \rho^2 z^{-1} \right) F' + qF = 0. \quad (7.31)$$

Получено уравнение Куммера, в котором

$$\begin{cases} a = -q, \\ b = n+1. \end{cases} \quad (7.32)$$

Решением такого уравнения является конfluэнтная функция:

$${}_1F_1\left(a, n+1, \frac{ik\rho^2}{2z}\right), \quad (7.33)$$

т.е. решением параксиального уравнения распространения (7.20) является следующая функция:

$$E_{a,+n}(\rho, \theta, z) = \rho^n z^{-a} \exp(in\theta) {}_1F_1\left(a, n+1, \frac{ik\rho^2}{2z}\right). \quad (7.34)$$

При $p = -n$ получается другое решение:

$$E_{a,-n}(\rho, \theta, z) = \rho^{-n} z^{-a} \exp(in\theta) {}_1F_1\left(a, 1-n, \frac{ik\rho^2}{2z}\right). \quad (7.35)$$

Объединяя (7.34) и (7.35) в одно выражение, получится семейство функций

$$E_{am}(\rho, \theta, z) = \rho^n z^{-a} \exp(\pm in\theta) {}_1F_1\left(a, n+1, \frac{ik\rho^2}{2z}\right). \quad (7.36)$$

Комплексную амплитуду (7.36) можно рассматривать как обобщенный параксиальный гипергеометрический пучок, который переходит в модовые пучки при условии $a = (n+1+i\gamma)/2$.

7.6. Дифракция Гауссова пучка на спиральном логарифмическом аксиконе

$$E_{\gamma n_0}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\gamma \ln \frac{r}{w} + in\varphi\right). \quad (7.37)$$

Комплексная амплитуда (7.37) описывает дифракцию гауссового пучка на вихревом логарифмическом аксиконе. Комплексная амплитуда в зоне дифракции Френеля следует из общего выражения (7.5) при $m = 0$:

$$E_{\gamma n 0}(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{z q^2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{w q} \right)^{i\gamma} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{n+2+i\gamma}{2} \right) {}_1F_1\left[\frac{n+2+i\gamma}{2}, n+1, -\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right]. \quad (7.38)$$

Из уравнения (7.38), аналогично (7.13), получим выражение для комплексной амплитуды в ближней зоне дифракции:

$$E_{\gamma n 0}(\rho, \theta, z \ll z_0) = \frac{(-i)^{\frac{n-i\gamma}{2}}}{2\pi n!} \left(\frac{k w^2}{2z} \right)^{-\frac{i\gamma}{2}} \left(\frac{k\rho^2}{2z} \right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{n+2+i\gamma}{2} \right) {}_1F_1\left(\frac{n+2+i\gamma}{2}, n+1, -\frac{ik\rho^2}{2z} \right). \quad (7.39)$$

Из уравнения (7.39) видно, что в ближней зоне интенсивность картины дифракции будет сохраняться в точках, для которых выполняется условие $k\rho^2/(2z) = \text{const}$. То есть при изменении z в ближней зоне картина дифракции сохраняет свою структуру, меняясь только масштабно.

В дальней зоне, аналогично (7.14), получим:

$$E_{\gamma n 0}(\rho, \theta, z \gg z_0) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{z} \right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{w} \right)^{i\gamma} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}z} \right)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{n+2+i\gamma}{2} \right) {}_1F_1\left(\frac{n+2+i\gamma}{2}, n+1, -\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}z} \right)^2 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{z}\right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{w}\right)^{iy} y^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times \\
&\times \Gamma\left(\frac{n+2+iy}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{n+2+iy}{2}, n+1, -y\right),
\end{aligned} \tag{7.40}$$

где

$$y = \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}z}\right)^2. \tag{7.41}$$

Тогда

$$\left|E_{\gamma n 0}\right| \propto \left|y^{\frac{n}{2}} {}_1F_1\left(\frac{n+2+iy}{2}, n+1, -y\right)\right|. \tag{7.42}$$

Покажем, что при $\gamma = 0$ (нет логарифмического аксикона) комплексная амплитуда (7.40) сводится к известному выражению, описывающему дифракцию Фраунгофера гауссового пучка на СФП. Действительно, положим $\gamma = 0$ в уравнении (7.40), получим:

$$\begin{aligned}
E_{0n0}(\rho, \theta, z \gg z_0) &= \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{z}\right) \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \times \\
&\times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) y^{\frac{n}{2}} {}_1F_1\left(\frac{n+2}{2}, n+1, -y\right).
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Из рекуррентных соотношений для функции Куммера следует:

$${}_1F_1\left(\frac{n+2}{2}, n+1, -y\right) = \exp(-y) {}_1F_1\left(\frac{n}{2}, n+1, y\right), \tag{7.44}$$

$${}_1F_1'\left(\frac{n}{2}, n+1, y\right) = \frac{n}{2(n+1)} {}_1F_1\left(\frac{n+2}{2}, n+2, y\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
{}_1F_1\left(\frac{n}{2}, n+1, y\right) &= 1 + \frac{n}{2(n+1)} \int_0^y {}_1F_1\left(\frac{n+2}{2}, n+2, y\right) dy = \\
&= 1 + \frac{n}{2(n+1)} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \int_0^y \exp\left(\frac{y}{2}\right) \left(\frac{y}{4}\right)^{-(n+1)/2} I_{(n+1)/2}\left(\frac{y}{2}\right) dy. \quad (7.45)
\end{aligned}$$

Известен справочный интеграл [1]:

$$\int_0^x x^{-\nu} \exp(x) I_{\nu}(x) dx = -\frac{x^{-\nu+1} \exp(x) [I_{\nu}(x) - I_{\nu-1}(x)]}{2\nu-1} - \frac{2^{1-\nu}}{(2\nu-1)\Gamma(\nu)}.$$

Тогда (7.45) может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned}
{}_1F_1\left(\frac{n}{2}, n+1, y\right) &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) 2^{(n-1)/2} \left(\frac{y}{2}\right)^{-(n-1)/2} \times \\
&\times \exp\left(\frac{y}{2}\right) \left[I_{(n-1)/2}\left(\frac{y}{2}\right) - I_{(n+1)/2}\left(\frac{y}{2}\right) \right]. \quad (7.46)
\end{aligned}$$

Далее, для комплексной амплитуды (при $\gamma = 0$, $m = 0$), подставив (7.46) в (7.44), а (7.44) в (7.43), окончательно получим:

$$\begin{aligned}
E_{0n0}(\rho, \theta, z \gg z_0) &= \frac{(-i)^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{k\sigma^2}{2z}\right) \sqrt{\xi} \times \\
&\times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \exp(-\xi) \left[I_{(n-1)/2}(\xi) - I_{(n+1)/2}(\xi) \right], \quad (7.47)
\end{aligned}$$

где

$$\xi = \left(\frac{k\sigma\rho}{2z}\right)^2.$$

При получении (7.47) было использовано свойство Гамма-функции [1]:

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} n!}{2^n}. \quad (7.48)$$

Выражение (7.47) совпадает с уравнением (2.2), полученным для дифракции Френеля Гауссова пучка на СФП, если учесть, что радиус перетяжки w связан с радиусом σ соотношением $w = \sqrt{2}\sigma$.

7.7. Мода Лагерра-Гаусса порядка $(0, n)$

Получим еще один частный случай гипергеометрических пучков (7.1) - моды Лагерра-Гаусса порядка $(0, n)$. Для этого положим в уравнении (7.5) $\gamma = 0$ и $m = n$, тогда получим:

$$\begin{aligned}
 E_{0n}(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left(\frac{k\sigma^2\rho}{wq^2z} \right)^n \times \\
 &\times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) {}_1F_1\left[n+1, n+1, -\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left(\frac{k\sigma^2\rho}{wq^2z} \right)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta \right) \exp\left[-\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left(\frac{k\sigma^2\rho}{wq^2z} \right)^n \exp(in\theta) \exp\left[-\left(\frac{k^2\sigma^2}{2q^2z^2} - \frac{ik}{2z} \right) \rho^2 \right] = \\
 &= \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left(\frac{k\sigma^2\rho}{wq^2z} \right)^n \exp(in\theta) \exp\left\{ -\left[\frac{k^2\sigma^2}{2(z^2 - ikz\sigma^2)} - \frac{ik}{2z} \right] \rho^2 \right\} = \\
 &= \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left(\frac{k\sigma^2\rho}{wq^2z} \right)^n \exp(in\theta) \exp\left[-\frac{\rho^2}{2(\sigma^2 + iz/k)} \right]. \tag{7.49}
 \end{aligned}$$

Обозначим $\sigma(z) = \sigma(1 + iz/z_0)^{1/2}$. Тогда вместо выражения (7.48) получим:

$$\begin{aligned} E_{0mn}(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left[\frac{i\rho}{w(iz/z_0 + 1)} \right]^n \exp(in\theta) \exp \left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2(z)} \right] = \\ &= -\frac{i}{2\pi} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left[\frac{\rho}{w(z)} \right]^n \exp(in\theta) \exp \left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2(z)} \right], \end{aligned} \quad (7.50)$$

где

$$w(z) = w(1 + iz/z_0).$$

В полученном выражении (7.50) выделим явно амплитудную и фазовую составляющие, тогда окончательно получим:

$$\begin{aligned} E_{0mn}(\rho, \theta, z) &= -\frac{i}{2\pi} \left[\frac{z_0}{z(1 - iz_0/z)} \right] \left[\frac{\rho}{w(1 + iz/z_0)} \right]^n \times \\ &\times \exp(in\theta) \exp \left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2(1 + iz/z_0)} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + iz/z_0} \left[\frac{\rho(1 - iz/z_0)}{w(1 + z^2/z_0^2)} \right]^n \exp(in\theta) \exp \left[-\frac{\rho^2(1 - iz/z_0)}{2\sigma^2(1 + z^2/z_0^2)} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho}{w} \right)^n \left[\frac{1 - iz/z_0}{1 + z^2/z_0^2} \right]^{n+1} \exp(in\theta) \times \\ &\times \exp \left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2(1 + z^2/z_0^2)} \right] \exp \left[\frac{ik\rho^2}{2z(1 + z_0^2/z^2)} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho}{w} \right)^n \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)^{-(n+1)/2} \exp \left[i(n+1) \operatorname{arctg} \left(-\frac{z}{z_0} \right) \right] \times \\
&\times \exp(in\theta) \exp \left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2 \left(1 + z^2/z_0^2 \right)} \right] \exp \left[\frac{ik\rho^2}{2z \left(1 + z_0^2/z^2 \right)} \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho}{w} \right)^n \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)^{-(n+1)/2} \times \\
&\times \exp \left[in\theta - i(n+1) \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{z_0} \right) - \frac{\rho^2}{2\sigma^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)} \right], \tag{7.51}
\end{aligned}$$

где

$$\sigma(z) = \sigma \left(1 + z^2/z_0^2 \right)^{1/2},$$

$$R(z) = z \left(1 + z_0^2/z^2 \right).$$

Комплексная амплитуда (7.51) при $w = \sigma$ описывает (с точностью до нормировочной константы) моду Лагерра-Гаусса с нулевым радиальным индексом.

7.8. Численное моделирование

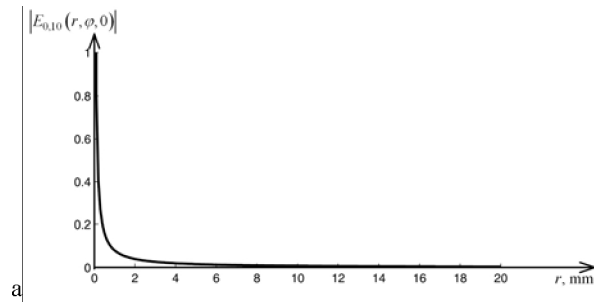
Формула (7.16) описывает комплексную амплитуду для идеальной гипергеометрической моды, сформированной с помощью начального поля вида (7.15). На практике это поле должно быть ограничено в размерах. Модуль функции комплексного пропускания также должен быть ограничен единицей. На рис. 7.1, а и 7.1, б показаны рассчитанные по формуле (7.15) радиальные распределения амплитуды в плоскости $z = 0$: неограниченное (а) и ограниченное кольцевой диафрагмой с радиусами $R_1 = 0,2$ мм и $R_2 = 10$ мм. На рис. 7.1, в и 7.1, г показаны рассчитанные соответствующие радиальные распре-

деления амплитуды в плоскости $z = 2000$ мм: по формуле (7.16) (в) и с помощью преобразования Френеля (г). Параметры расчета: порядок СФП $n = 10$, параметры логарифмического аксикона $w = 0,5$ мм и $\gamma = 0$, длина волны $\lambda = 514,5$ нм, дискретизация $\Delta\rho = 0,16$ мм.

На рис. 7.2 показано рассчитанное радиальное распределение амплитуды на расстоянии $z = 2000$ мм от исходного поля (7.15) для двух различных значений параметра логарифмического аксикона γ . Видно, что с ростом γ радиус первого (главного) кольца увеличивается.

На рис. 7.3 показано радиальное распределение амплитуды на расстоянии $z = 2000$ мм от исходного поля (7.1) для двух различных значений радиуса перетяжки гауссового пучка σ при $\gamma = 0$. Видно, что с ростом σ уменьшается контраст дифракционной картины.

На рис. 7.2 и 7.3 остальные параметры расчета такие же, что и на рис. 7.1.



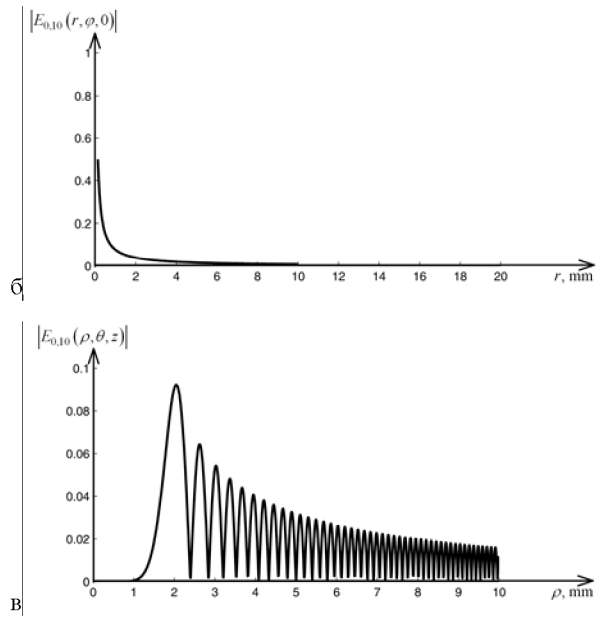


Рис. 7.1. Радиальные распределения модуля комплексной амплитуды в плоскостях $z = 0$ мм (а и б) и $z = 2000$ мм (в и г) для светового поля (7.15) с бесконечной апертурой (а и в) и ограниченного кольцевой диафрагмой с радиусами $R_1 = 0,2$ мм и $R_2 = 10$ мм (б и г) (см. также с. 76)

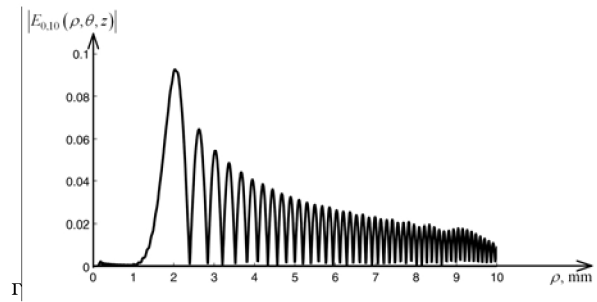


Рис. 7.1. Окончание

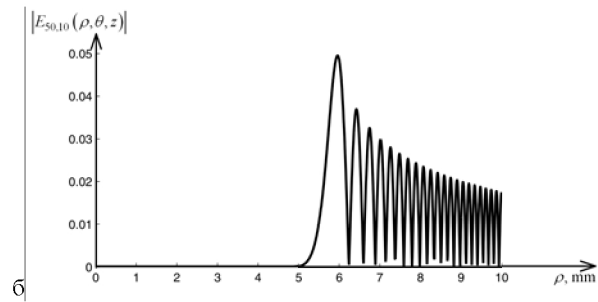
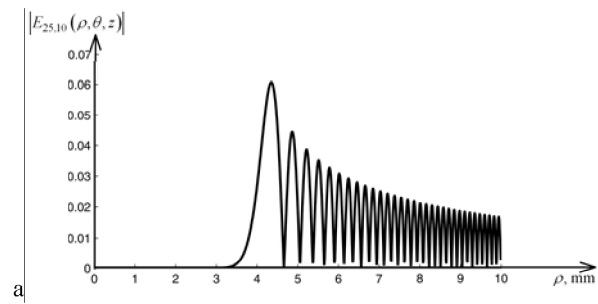
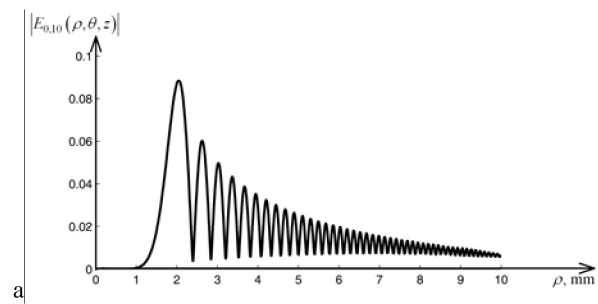


Рис. 7.2. Радиальные распределения модуля комплексной амплитуды для начального поля (7.15) ($n = 10$) в плоскости $z = 2000$ мм при $\gamma = 25$ (а) и $\gamma = 50$ (б)



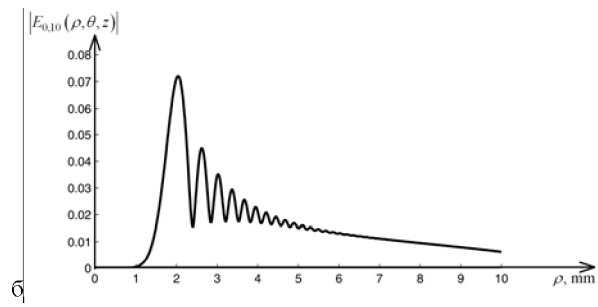


Рис. 7.3. Радиальные распределения модуля комплексной амплитуды от исходного поля (7.1) ($n = 10$) в плоскости $z = 2000$ мм при $\sigma = 5$ мм (а) и при $\sigma = 2$ мм (б)

8. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ ЛАГЕРРА-ГАУССА (ЛГ)

В последнее время вырос интерес к эллиптическим гауссовым лазерным пучкам. Так в [22] рассмотрен децентрированный эллиптический гауссовый пучок, распространяющийся в осесимметричной оптической системе. Для описания такого пучка используется тензорная техника. В [23] введены в рассмотрение децентрированные эллиптические пучки Эрмита-Гаусса. Эллиптический гауссовый пучок частично-когерентного света исследован в [24]. Дифракция Френеля эллиптического (астигматического) гауссового пучка на дифракционной решетке рассмотрена в [25]. В [26] исследуется распространение такого пучка в одноосном кристалле, а в [27] рассмотрена генерация второй гармоники в нелинейном кристалле с помощью эллиптического пучка.

Гауссовы пучки с различной степенью эллиптичности можно использовать для выравнивания формы пучка [28], то есть для получения лазерных эллиптических пучков с однородной интенсивностью по сечению пучка. С помощью линейной комбинации эллиптических пучков Эрмита-Гаусса можно сформировать «трубчатые» (полые) эллиптические лазерные пучки, на оси которых будет нулевая интенсивность [29].

В [17, 18, 20, 30, 31] введены в рассмотрение и исследованы теоретически [17, 18, 20, 30, 31] и экспериментально [20] пучки Айнса-Гаусса. Такие световые поля являются частными решениями параксиального волнового уравнения (типа уравнения Шредингера) в эллиптических координатах. В этих координатах уравнение решается методом разделения переменных, и решение получается в виде произведения гауссовой функции на многочлены Айнса. Многочлены Айнса являются решениями дифференциального уравнения Уиттекера-Хилла. Пучки Айнса-Гаусса являются ортогональным базисом, обобщающим известные модовые базисы Эрмита-Гаусса и ЛГ. Когда

эллипс переходит в окружность (эксцентриситет $\varepsilon = 1$), то моды Айнса-Гаусса переходят в моды ЛГ, а при стремлении ε к бесконечности (эллипс переходит в отрезок прямой) моды Айнса-Гаусса переходят в моды Эрмита-Гаусса.

Заметим, что в [19] рассмотрены похожие лазерные пучки, названные модами Эрмита-Лагерра-Гаусса, которые также при определенном значении параметра (угла поворота цилиндрической линзы вокруг оптической оси) переходят в обычные моды Эрмита-Гаусса и ЛГ.

Эллиптические пучки также могут быть сформированы с помощью наклонного падения осесимметричного пучка на оптический элемент.

В работах [32, 33] рассмотрено наклонное падение лазерного пучка с плоским волновым фронтом на конический аксикон и бинарный дифракционный аксикон. В [32] экспериментально и численно исследовалась картина дифракции, которая образуется при наклонном падении (угол наклона $8-16^\circ$) коллимированного пучка из гелий-неонового лазера на конический аксикон с углом при вершине 0.01 радиан и диаметром основания 40 мм. Было показано, что если при осевом освещении основания аксикона формируется световой бездифракционный пучок Бесселя нулевого порядка, то при наклонном падении картина дифракции теряет радиальную симметрию, пучок начинает расходиться и изменять структуру поперечного распределения интенсивности.

Аналогичные исследования были проведены в [33], но вместо обычного аксикона использовался бинарный дифракционный аксикон. Угол наклона падающего света с длиной волны $\lambda = 632.8$ нм был до 10° , диаметр дифракционного оптического элемента (ДОЭ) – $16,4$ мм, а параметр аксикона $\alpha = 0.036$. Функция пропускания аксикона имеет вид $\exp(-ik\alpha r)$, где k – волновое число, r – радиальная координата.

В [34] экспериментально и теоретически исследовалась дифракционная картина, которая получается при наклонном падении плоской волны на многоканальный бинарный ДОЭ, пропускание которого пропорционально функции, описывающей 5 бesselевых пучков, распространяющихся под разными углами к оптической оси с амплитудами $J_m(\alpha r)\exp(im\varphi)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Было показано, что при этом формируются расходящиеся астигматические бesselевые пучки, картины дифракции которых повернуты на 45° вправо при $m > 0$, и на 45° влево при $m < 0$ и не повернуты при $m = 0$. Причем, чем больше номер моды Бесселя $|m|$, тем больше локальных минимумов и максимумов наблюдается в картине дифракции на фиксированном расстоянии от ДОЭ.

В данном разделе рассматривается распространение эллиптического пучка ЛГ, который уже нельзя считать модой. Показано, что при наклонном падении плоской волны на ДОЭ, функция пропускания которого пропорциональна функции, описывающей моду ЛГ порядка (m, n) , возникает дифракционная картина, которая тождественна дифракционной картине, формируемой эллиптическим пучком ЛГ. При распространении в однородном пространстве эллиптический пучок ЛГ формирует дифракционную картину, которая повернута на $+45^\circ$ при $m > 0$, и на -45° при $m < 0$. Причем число локальных максимумов с ростом расстояния z сначала растет, а потом убывает, и при $z \rightarrow \infty$ (в дальней зоне) формируется картина дифракции, состоящая из набора концентрических эллипсов, повернутых на 90° по отношению к исходной картине дифракции при $z = 0$.

8.1. Преобразование Френеля от моды ЛГ

С помощью справочного интеграла [1]:

$$\int_0^{\infty} x^2 \exp(-px) J_m(b\sqrt{x}) L_n^m(cx) dx =$$

$$= \left(\frac{b}{2}\right)^m \frac{(p-c)^n}{p^{m+n+1}} \exp\left(-\frac{b^2}{4p}\right) L_n^m\left(\frac{b^2c}{4pc-p^2}\right), \quad (8.1)$$

где $J_m(x)$ – функция Бесселя m -го порядка первого рода, $L_n^m(x)$ – присоединенный многочлен Лагерра, (n, m) – целые числа, можно найти выражение для преобразования Френеля от моды ЛГ:

$$\Psi_{mn}(r, \varphi) = \left(\frac{r\sqrt{2}}{w_0}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) L_n^m\left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \exp(im\varphi), \quad (8.2)$$

где (r, φ) – полярные координаты, w_0 – радиус перетяжки гауссово-го пучка.

Используя (8.1) и (8.2), получим выражение для амплитуды моды ЛГ на расстоянии z от перетяжки:

$$\Psi_{mn}(\rho, \theta, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + im\theta\right) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{ikr^2}{2z}\right) L_n^m\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) r dr =$$

$$= \exp\left[\frac{-\rho^2}{w^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)} + im\theta - i(2n+m+1)\arctg\left(\frac{z}{z_0}\right)\right] \times$$

$$\times \frac{i^m}{2\pi} \frac{w_0}{w(z)} \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{w(z)}\right)^m L_n^m\left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right), \quad (8.3)$$

где $w(z) = w_0\sqrt{1+z^2/z_0^2}$, $R(z) = z(1+z_0^2/z^2)$, $z_0 = kw_0^2/2$, k – волновое число света.

Из (8.3) видно, что структура моды ЛГ сохраняется и интенсивность является радиально-симметричной функцией:

$$I_{mn}(\rho, z) = |\Psi_{mn}(\rho, \theta, z)|^2. \quad (8.4)$$

С помощью светового поля вида (при $z = 0$):

$$\Psi_{mn}^{(1)}(r, \varphi) = r^{2n+m} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2} + im\varphi\right) \quad (8.5)$$

можно сформировать обобщенные моды ЛГ, которые также будут радиально-симметричными и будут сохранять свою структуру при распространении с точностью до масштаба. Используем справочный интеграл [1]:

$$\int_0^\infty r^{2n+m} \exp(-pr^2) J_m(cr) r dr = \frac{n!c^m}{2^{m+1}p^{m+n+1}} \exp\left(-\frac{c^2}{4p}\right) I_n^m\left(\frac{c^2}{4p}\right). \quad (8.6)$$

Тогда преобразование Френеля от исходного светового поля (8.5) с учетом (8.6) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}^{(1)}(\rho, \theta, z) &= \frac{-ik}{2\pi z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + im\theta\right) \times \\ &\times \int_0^\infty r^{2n+m} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{ikr^2}{2z}\right) J_m\left(\frac{kr\rho}{z}\right) r dr = \\ &= \frac{kn!2^{m-1}}{2\pi z} \left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z}\right)^{-n-1} \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2z} + im\theta\right] x^m \exp(-x) L_n^m(x), \end{aligned} \quad (8.7)$$

где $x = \left[\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2\hat{R}(z)}\right] \rho^2$, $\hat{R}(z) = z\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)$, $w(z) = w_0\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$.

Эти пучки называются элегантными пучками ЛГ.

8.2. Наклонный параксиальный световой пучок ЛГ

Осветим наклонной плоской волной $\exp(ikr \cos \varphi \sin \gamma)$, γ – угол наклона к оси $x = r \cos \varphi$, плоский оптический элемент, пропускание которого пропорционально функции, описывающей моду ЛГ $\Psi_m(r, \varphi)$, радиальную часть которой обозначим:

$$\hat{\Psi}_m(r) = \left(\frac{r\sqrt{2}}{w_0} \right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2} \right) L_n^m\left(\frac{2r^2}{w_0^2} \right). \quad (8.8)$$

Тогда преобразование Френеля от моды ЛГ (8.2) при наклонном освещении будет иметь вид:

$$F_\gamma(\rho, \theta, z) = \frac{2\pi(-i)^m k}{z} \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2z} + im \arctg\left(\frac{\rho \sin \theta}{z \sin \gamma - \rho \cos \theta} \right) \right] \times \int_0^\infty \hat{\Psi}_m(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z} \right) J_m\left(\frac{kr}{z} \sqrt{z^2 \sin^2 \gamma + \rho^2 - 2\rho z \cos \theta \sin \gamma} \right) r dr. \quad (8.9)$$

В полярных координатах с наклоном:

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \theta - z \sin \gamma, \\ \eta = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad (8.10)$$

аргумент функции Бесселя в интеграле уравнения (8.9) будет зависеть только от радиальной составляющей:

$$\xi^2 + \eta^2 = z^2 \sin^2 \gamma + \rho^2 - 2\rho z \cos \theta \sin \gamma. \quad (8.11)$$

То есть из уравнения (8.9) с учетом (8.10) и (8.11) следует, что интенсивность наклонной параксиальной моды ЛГ будет радиально-симметричной:

$$I_\gamma(\xi^2 + \eta^2, z) = |F_\gamma(\rho, \theta, z)|^2. \quad (8.12)$$

Чтобы наклонное падение освещающего пучка привело к искажению моды ЛГ требуется рассмотреть непараксиальное распространение света, то есть от преобразования Френеля перейти к преобразованию Кирхгофа.

Преобразование Кирхгофа от наклонного пучка ЛГ имеет вид:

$$F(\xi, \eta, z) = \frac{-ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{mn}(x, y) \frac{\exp(ikR)}{R} dx dy, \quad (8.13)$$

где

$$R^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2.$$

В полярных координатах (8.13) примет вид:

$$F(\rho, \theta, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \Psi_{mn}(r, \varphi) \times \exp\left[ik\sqrt{r^2 + \rho^2 + z^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)} \right] r dr d\varphi, \quad (8.14)$$

где $R \approx z$ в знаменателе (8.13).

Тогда непараксиальное распространение наклонного пучка ЛГ будет описываться выражением:

$$F_\gamma(\rho, \theta, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \Psi_{mn}(r, \varphi) \exp \times \left[ikr \cos \varphi \sin \gamma + ik\sqrt{r^2 + \rho^2 + z^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)} \right] r dr d\varphi. \quad (8.15)$$

Предположим, что $z \gg r$ и $z \gg \rho$ и разложим квадратный корень в показателе экспоненты в (8.15) в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
& \left[z^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) \right]^{\frac{1}{2}} \approx \\
& \approx z + \frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)}{2z} - \\
& - \frac{1}{8z^3} \left[r^4 + \rho^4 + 2r^2\rho^2 - \right. \\
& \left. - (4r^3\rho + 4r\rho^3) \cos(\theta - \varphi) + 4r^2\rho^2 \cos^2(\theta - \varphi) \right] + \dots
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Пусть в формуле (8.16) $\frac{r^4}{8z^3} \ll z$, $\frac{4r^3\rho}{8z^3} \ll z$ и $\frac{4r\rho^3}{8z^3} \ll z$. Тогда вместо (8.16) получим:

$$\begin{aligned}
& \left[z^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) \right]^{\frac{1}{2}} \approx \left(z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3} \right) + \left(\frac{r^2}{2z} - \frac{r^2\rho^2}{8z^3} \right) - \\
& - \frac{r\rho}{z} \cos(\theta - \varphi) - \frac{r^2\rho^2}{4z^3} \cos 2(\theta - \varphi).
\end{aligned} \tag{8.17}$$

С учетом (8.17) вместо (8.15) получим:

$$\begin{aligned}
F_\gamma(\rho, \theta, z) &= \frac{-ik}{2\pi z} \exp \left[ik \left(z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3} \right) \right] \times \\
& \times \int_0^\infty \hat{\Psi}_{mn}(r) \exp \left[\frac{ikr^2}{2z} \left(1 - \frac{\rho^2}{z^2} \right) \right] \times \left\{ \int_0^{2\pi} \exp \left[im\varphi + ikr \cos \varphi \sin \gamma - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{ikr\rho}{z} \cos(\theta - \varphi) - \frac{ikr^2\rho^2}{4z^3} \cos 2(\theta - \varphi) \right] d\varphi \right\} r dr.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Перепишем интеграл по φ в фигурных скобках в формуле (8.18) отдельно в виде:

$$I_0 = \exp(im\theta) \int_0^{2\pi} \exp \left[im\psi - \frac{ikr\rho_0}{z} \cos(\psi - \nu) - \frac{ikr^2\rho^2}{4z^3} \cos 2\psi \right] d\psi, \tag{8.19}$$

где

$$\begin{cases} \psi = \theta - \varphi, \\ \rho_0^2 = (\rho - z \sin \gamma \cos \theta)^2 + (z \sin \gamma \sin \theta)^2, \\ \nu = \operatorname{arctg} \left(\frac{z \sin \gamma \sin \theta}{\rho - z \sin \gamma \cos \theta} \right). \end{cases} \quad (8.20)$$

Обозначим в (8.19):

$$P = \frac{kr\rho_0}{z}, \quad Q = \frac{kr^2\rho^2}{4z^3}. \quad (8.21)$$

Тогда интеграл (8.19) примет вид:

$$\begin{aligned} I_0 &= \exp(im\theta) \int_0^{2\pi} \exp[im\psi - iP \cos(\psi - \nu) - iQ \cos 2\psi] d\psi = \\ &= \exp(im\theta) \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^p J_p(Q) \int_0^{2\pi} \exp[i2p\psi + im\psi - iP \cos(\psi - \nu)] d\psi = \quad (8.22) \\ &= 2\pi(-i)^m \exp[im(\theta + \nu)] \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^p J_p(Q) J_{m+2p}(P) \exp(i2p\nu). \end{aligned}$$

Отметим, что такое же выражение, как (8.22), было получено в [24] для описания астигматического бesselового пучка.

С учетом (8.22) амплитуда светового поля (8.18), описывающего астигматический пучок ЛГ (по аналогии с астигматическим пучком Бесселя [24]) примет вид:

$$\begin{aligned}
F_{\gamma}(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{m+1} k}{z} \exp \left[im(\theta + \nu) + ik \left(z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3} \right) \right] \times \\
&\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^p \exp(i2p\nu) \int_0^{\infty} \hat{\Psi}_{mn}(r) \exp \left[\frac{ikr^2}{2z} \left(1 - \frac{\rho^2}{z^2} \right) \right] \times \\
&\times J_p \left(\frac{kr^2 \rho^2}{4z^3} \right) J_{m+2p} \left(\frac{kr \rho_0}{z} \right) r dr.
\end{aligned} \tag{8.23}$$

Из уравнения (8.23) видно, что астигматический пучок ЛГ не является радиально-симметричным и не сохраняет свою структуру при распространении, т.к. азимутальный угол θ входит в подынтегральное выражение в уравнении (8.23) в ρ_0 и ν (см. (8.20)).

8.3. Эллиптический параксиальный пучок ЛГ

Покажем, что если заменить наклонный пучок ЛГ на эллиптический, то выражение, аналогичное уравнению (8.23) можно получить с помощью преобразования Френеля, а не Кирхгофа. То есть параксиальный эллиптический пучок ЛГ также не будет сохранять свою структуру и потеряет эллиптичность в зоне дифракции Френеля.

Эллиптический пучок ЛГ при $z = 0$ описывается выражением:

$$\begin{aligned}
\Psi_{mn}(x, y; \alpha) &= \left(\frac{2x^2 + 2\alpha^2 y^2}{w_0^2} \right)^{\frac{m}{2}} \exp \left(-\frac{x^2 + \alpha^2 y^2}{w_0^2} \right) \times \\
&\times L_n^m \left(\frac{2x^2 + 2\alpha^2 y^2}{w_0^2} \right) \exp \left[im \arctg \left(\frac{\alpha y}{x} \right) \right].
\end{aligned} \tag{8.24}$$

В эллиптических координатах:

$$\begin{cases} x = \alpha r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \tag{8.25}$$

вместо (8.24) получим:

$$\Psi_{mn}(r, \varphi, \alpha) = \left(\frac{\alpha r \sqrt{2}}{w_0} \right)^m \exp\left(-\frac{\alpha^2 r^2}{w_0^2}\right) L_n^m\left(\frac{2\alpha^2 r^2}{w_0^2}\right) \exp(im\varphi). \quad (8.26)$$

При $\alpha = 1$ выражение (8.26) совпадает с выражением (8.2).

Преобразование Френеля в эллиптических координатах (8.25) для пучка (8.26) примет вид:

$$\begin{aligned} F_\alpha(\rho, \theta, z) = & \frac{-ik}{2\pi z} \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2z}(\cos^2\theta + \alpha^2 \sin^2\theta)\right] \times \\ & \times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \hat{\Psi}_{mn}(\alpha r) \exp\left[im\varphi + \frac{ikr^2}{2z}(\alpha^2 \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - \right. \\ & \left. - \frac{ik\alpha r \rho}{z} \cos(\theta - \varphi)\right] r dr d\varphi, \end{aligned} \quad (8.27)$$

где $\Psi_{mn}(r, \varphi, \alpha) = \hat{\Psi}_{mn}(\alpha r) \exp(im\varphi)$.

В уравнении (8.27) использованы эллиптические координаты в плоскости $z > 0$, повернутые на 90° по отношению к координатам в плоскости $z = 0$:

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos\theta, \\ \eta = \alpha\rho \sin\theta. \end{cases} \quad (8.28)$$

Выделим в уравнении (8.27) интеграл по углу φ :

$$\begin{aligned} F_\alpha(\rho, \theta, z) = & \frac{-ik}{2\pi z} \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2z}(\cos^2\theta + \alpha^2 \sin^2\theta)\right] \times \\ & \times \int_0^\infty \hat{\Psi}_{mn}(\alpha r) \exp\left[\frac{ikr^2}{4z}(1 + \alpha^2)\right] \times \\ & \times \left\{ \int_0^{2\pi} \exp\left[im\varphi - \frac{ikr^2}{4z}(1 - \alpha^2)\cos^2\varphi - \frac{ik\alpha r \rho}{z} \cos(\theta - \varphi)\right] d\varphi \right\} r dr. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Выпишем отдельно интеграл по φ в фигурных скобках в уравнении (8.29):

$$\hat{I}_0 = \int_0^{2\pi} \exp \left[im\varphi - \frac{ikr^2}{4z} (1 - \alpha^2) \cos^2 \varphi - \frac{k\alpha r \rho}{z} \cos(\theta - \varphi) \right] d\varphi. \quad (8.30)$$

Интеграл (8.30) с точностью до обозначений и сомножителя перед интегралом совпадает с выражением (8.19). Введем обозначения:

$$A = \frac{k\alpha r \rho}{z}, \quad B = \frac{kr^2(1 - \alpha^2)}{4z}. \quad (8.31)$$

Тогда вместо (8.30) получим:

$$\begin{aligned} \hat{I}_0 &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^p J_p(B) \int_0^{2\pi} \exp[i2p\varphi + im\varphi - A \cos(\varphi - \theta)] d\varphi = \\ &= 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^{p+m} J_p(B) J_{m+2p}(A) \exp[i(m+2p)\theta]. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Видно, что ряды в выражениях (8.22) и (8.32) совпадают с точностью до обозначений. Окончательно из (8.28) и (8.31) получим выражение для дифракции Френеля эллиптического пучка ЛГ:

$$\begin{aligned} F_\alpha(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{m+1} k}{z} \exp \left[\frac{ik\rho^2}{2z} (\cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^2 \theta) \right] \times \\ &\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^p \exp[i(2p+m)\theta] \times \\ &\times \int_0^\infty \hat{\Psi}_m(\alpha r) \exp \left[\frac{ikr^2}{4z} (1 + \alpha^2) \right] J_p \left[\frac{kr^2(1 - \alpha^2)}{4z} \right] J_{m+2p} \left(\frac{k\alpha r \rho}{z} \right) r dr. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Заметим, что при $\alpha = 1$ уравнение (8.33) совпадает с уравнением (8.3) для преобразования Френеля моды ЛГ. Действительно, при

$\alpha = 1$ все слагаемые ряда по p , кроме $p = 0$, будут равны нулю, т.к. $J_p(0) = 0$ при $p \neq 0$, а $J_0(0) = 1$.

Заметим также, что при $z \rightarrow \infty$ так, что $r^2/z \ll r\rho/z$, вместо уравнения (8.33) получим преобразование Фурье от эллиптического пучка ЛГ:

$$\begin{aligned} F_\alpha(\rho, \theta, z \rightarrow \infty) &\approx \frac{(-i)^{m+1} k}{z} \exp(im\theta) \int_0^\infty \hat{\Psi}_{mn}(\alpha r) J_m\left(\frac{kr\alpha\rho}{z}\right) r dr = \\ &= (-i)^m (-1)^n \left(\frac{w_0}{\alpha^2 \sigma}\right) \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{\sigma}\right)^m \exp\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right) I_n^m\left(\frac{2\rho^2}{\sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (8.34)$$

где $\sigma = \frac{2z}{kw_0}$, $\rho^2 = \xi^2 + \left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^2$.

Из уравнения (8.34) видно, что эллиптический пучок ЛГ при $z = 0$ в дальней зоне дифракции при $z \rightarrow \infty$ опять принимает эллиптическую симметрию, но оказывается повернутым на 90° по отношению к пучку при $z = 0$.

При конечном z эллиптическая симметрия пучка ЛГ пропадает. При конечном z в центре картины дифракции ($\rho = 0$) для эллиптического пучка ЛГ с четным $m = 2l \neq 0$ интенсивность будет отлична от нуля, хотя при $z = 0$ и $z \rightarrow \infty$ интенсивность в центре пучка при $\rho = 0$ равна нулю. Действительно, при $\rho = 0$ все слагаемые ряда в (8.33) равны нулю, кроме слагаемого с номером $p = -m/2$, т.к. $J_{m+2p}(0) = J_0(0) = 1$. Тогда из уравнения (8.33) для четных $m = 2l$ получим:

$$F_\alpha(\rho = 0, \theta, z) \sim \int_0^\infty \hat{\Psi}_{mn}(\alpha r) \exp\left[\frac{ikr^2}{4z}(1+\alpha^2)\right] J_{\frac{m}{2}}\left[\frac{kr^2}{4z}(1-\alpha^2)\right] r dr, \quad (8.35)$$

где символ \sim означает пропорциональность.

При малой эллиптичности пучка $\alpha \rightarrow 1$ функцию Бесселя в уравнении (8.35) можно заменить приближенным выражением:

$$J_p(x) \cong \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p+1)}, \quad x \rightarrow 0, \quad (8.36)$$

где $\Gamma(p+1)$ – гамма функция, $p > 0$. Если $p < 0$, то надо воспользоваться равенством $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$, если p – целое.

Тогда интеграл в выражении (8.35) можно представить в виде:

$$F_\alpha(\rho=0, z) \cong \Gamma^{-1}\left(\frac{m}{2}+1\right) \left[\frac{k(\alpha^2-1)}{8z}\right]^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{w_0}\right)^m \times \\ \times \int_0^\infty r^{2m} \exp\left[-\frac{\alpha^2 r^2}{w_0^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z}\right] L_n^m\left(\frac{2\alpha^2 r^2}{w_0^2}\right) r dr. \quad (8.37)$$

Используя справочный интеграл [1]:

$$\int_0^\infty x^m \exp(-px) L_n^m(cx) dx = \frac{\Gamma(m+n+1)(p-c)^n}{n! p^{m+n+1}} \quad (8.38)$$

для интеграла в выражении (8.37) получим:

$$\int_0^\infty r^{2m} \exp\left[-\frac{\alpha^2 r^2}{w_0^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z}\right] L_n^m\left(\frac{2\alpha^2 r^2}{w_0^2}\right) r dr = \\ = \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(m+n+1) \exp[i(2n+m+1)\eta] \left[\frac{\alpha^4}{w_0^4} + \frac{k^2(1+\alpha^2)^2}{8z^2}\right]^{\frac{m+1}{2}}, \quad (8.39)$$

где

$$\eta = \operatorname{arctg} \left[\frac{k(1+\alpha^2)w_0^2}{4z^2\alpha^2} \right]. \quad (8.40)$$

Из (8.39) видно, что модуль интеграла (8.39) всегда отличен от нуля. Только при $\alpha = 1$ из (8.37) следует, что поле $F_\alpha(\rho = 0, z) = 0$. Таким образом, мы показали, что даже малая эллиптичность моды ЛГ нарушает условия, при которых в центре пучка при $\rho = 0$ при любом z имеется ноль интенсивности. Но вихревой характер светового поля при наличии эллиптичности не изменяется, а фазовая сингулярность в центре порядка $m = 2l$ «распадается» на p сингулярностей с m/p номерами (порядками), и p точек нулевой интенсивности возникают вблизи центра пучка. Число p зависит от степени эллиптичности. Как будет показано ниже, при слабой эллиптичности $p = 2$ и под углом 45° появляются два нуля интенсивности $m/2$ -го порядка. Для нечетного $m = 2l + 1$ в центре картины дифракции ($\rho = 0$) всегда остается ноль интенсивности.

Рассмотрим особенности распространения эллиптического пучка ЛГ при слабой эллиптичности ($\alpha^2 \approx 1$). Под интегралом в уравнении (8.33) заменим функцию Бесселя порядка p на приближенное выражение (8.36). Это возможно, во-первых, потому что аргумент функции Бесселя стремится к нулю при малой эллиптичности, а во-вторых, потому что хотя и интеграл в (8.33) имеет бесконечный верхний предел интегрирования, но гауссова экспонента, входящая в моду ЛГ, ограничивает область интегрирования конечным эффективным радиусом моды. Тогда вместо (8.33) запишем:

$$\begin{aligned}
F_{\alpha \rightarrow 1}(\rho, \theta, z) &\approx S(\rho, \theta) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-i\varepsilon}{2} \right)^p \Gamma^{-1}(p+1) \exp(i2p\theta) \delta(p) \times \\
&\times \int_0^{\infty} \left(\frac{\alpha r \sqrt{2}}{w_0} \right)^m r^{2p} \exp \left[-\frac{\alpha^2 r^2}{w_0^2} - \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z} \right] \times \\
&\times L_n^m \left(\frac{2\alpha^2 r^2}{w_0^2} \right) J_{m+2p} \left(\frac{k\alpha r \rho}{z} \right) r dr,
\end{aligned} \tag{8.41}$$

где

$$\delta(p) = \begin{cases} 1, & p \geq 0, \\ (-1)^{|p|}, & p < 0, \end{cases} \tag{8.42}$$

$$S(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{m+1} k}{z} \exp \left[im\theta + \frac{ik\rho^2}{2z} (\cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^2 \theta) \right]. \tag{8.43}$$

Заметим, что в формуле (8.41) слагаемые с положительными и отрицательными номерами p дают различный вклад в общую сумму. Если $m > 0$, то в формуле (8.41) слагаемое с $p > 0$ будет иметь сомножитель $\exp[i\theta(m+2p)] r^{|m|+2|p|} J_{m+2p}(x)$, а слагаемое с $p < 0$ – другой сомножитель $\exp[i\theta(m-2|p|)] r^{|m|+2|p|} J_{m-2|p|}(x)$. Видно, что в первом случае ($p > 0$) в сомножителе показатель степени радиальной переменной совпадает с порядком функции Бесселя. И наоборот, при $m < 0$ вклад в сумму в (8.41) будут давать слагаемые с $p < 0$.

Справочный интеграл из [1]:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} x^{\frac{m+p}{2}} \exp(-cx) L_n^m(cx) J_{m+p}(b\sqrt{x}) dx = \\
&= \frac{(p-c)^n}{p^{m+n+1}} \left(\frac{b}{2} \right)^m \exp \left(-\frac{b^2}{4p} \right) L_n^m \left(\frac{b^2 c}{4pc - p^2} \right),
\end{aligned} \tag{8.44}$$

косвенным образом подтверждает эллиптичность: только при равенстве показателя радиальной переменной $x = r^2$ и порядка функции Бесселя происходит самовоспроизведение видоизмененного пучка ЛГ. Хотя в прямую применять интеграл (8.44) к расчёту (8.41) нельзя, так как показатель экспоненты в интеграле (8.41) отличается от аргумента присоединённого многочлена Лагерра. Таким образом, оставляя в выражении (8.41) только слагаемые с $p > 0$ (предполагаем, что $m > 0$) и, учтя слабую эллиптичность пучка ЛГ, сохраним только первые два слагаемых:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha \rightarrow 1}(\rho, \theta, z) \approx S(\rho, \theta) \int_0^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}\alpha r}{w} \right)^m L_n^m \left(\frac{2r^2\alpha^2}{w^2} \right) \times \\
 \exp \left[-\frac{r^2\alpha^2}{w^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z} \right] \times \\
 \times \left\{ J_m \left(\frac{k\alpha r \rho}{z} \right) - \frac{i\varepsilon r^2}{2} e^{i2\theta} J_{m+2} \left(\frac{k\alpha r \rho}{z} \right) + O(\varepsilon^2) \right\} r dr,
 \end{aligned} \tag{8.45}$$

где $\varepsilon = k(1-\alpha^2)/(4z) \ll 1$ - малый параметр.

Известен ряд [32]:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p} J_{m+2p}(x)}{(2p)!} = \frac{1}{2} x^{-\frac{m}{2}} J_m(\sqrt{x^2 - 2tx}) \times \left\{ (x-2t)^{-\frac{m}{2}} + (x+2t)^{-\frac{m}{2}} \right\}. \tag{8.46}$$

Предположим, что $t \ll 1$, тогда вместо (8.46) можно приближённо записать:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p} J_{m+2p}(x)}{(2p)!} \approx J_m(x) + \frac{t^2}{2} J_{m+2}(x) + O(t^4). \tag{8.47}$$

Сравнивая выражение в фигурных скобках в (8.45) с правой частью (8.47) и с учётом (8.46), получим вместо (8.45):

$$\begin{aligned}
F_{\alpha \rightarrow 1}(\rho, \theta, z) &\approx S'(\rho, \theta) \int_0^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}\alpha r}{w} \right)^m L_n^m \left(\frac{2r^2\alpha^2}{w^2} \right) \times \\
&\times \exp \left[-\frac{r^2\alpha^2}{w^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z} \right] J_m \left(r \sqrt{\left(\frac{k\alpha\rho}{z} \right)^2 - \sqrt{-i\varepsilon} e^{i\theta} \left(\frac{k\alpha\rho}{z} \right)} \right) r dr,
\end{aligned} \tag{8.48}$$

где

$$\begin{aligned}
S'(\rho, \theta) &= S(\rho, \theta) \frac{1}{2} \left(\frac{k\alpha\rho}{z} \right)^{\frac{m}{2}} \times \\
&\times \left\{ \left(\frac{k\alpha\rho}{z} - 2\sqrt{-i\varepsilon} e^{i\theta} \right)^{\frac{-m}{2}} + \left(\frac{k\alpha\rho}{z} + 2\sqrt{-i\varepsilon} e^{i\theta} \right)^{\frac{-m}{2}} \right\}.
\end{aligned} \tag{8.49}$$

Из уравнения (8.48) видно, что при $\rho \rightarrow \infty$ выражение (8.48) переходит в уравнение (8.3) для преобразования Френеля от моды ЛГ:

$$\begin{aligned}
F_{\alpha \rightarrow 1}(\rho \rightarrow \infty, \theta, z) &\approx S(\rho, \theta) \int_0^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}\alpha r}{w} \right)^m L_n^m \left(\frac{2r^2\alpha^2}{w^2} \right) \times \\
&\times \exp \left[-\frac{r^2\alpha^2}{w^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z} \right] J_m \left(\frac{k\alpha\rho r}{z} \right) r dr,
\end{aligned} \tag{8.50}$$

которое вычисляется с помощью справочного интеграла (8.1).

Уравнение (8.50) показывает, что для слабой эллиптичности пучок ЛГ на периферии ведёт себя как обычная мода ЛГ, но с эллиптической симметрией, то есть картина дифракции представляет собой набор не концентрических колец, а эллипсов. В центральной части картины дифракции эллиптического пучка ЛГ при малых ρ , как следует из уравнения (8.48), изолированные нули интенсивности будут располагаться в тех точках, в которых обращается в нуль аргумент функции Бесселя в уравнении (8.48):

$$\rho = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{z}{k}(1-\alpha^2)} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (8.51)$$

Из (8.51) следует, что два действительных нуля $m/2$ -го порядка интенсивности лежат на прямой $\theta = \pi/4$ на расстоянии от центра $\rho = 0$ равном:

$$\rho_0 = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{z(1-\alpha^2)}{k}}. \quad (8.52)$$

Из (8.52) видно, что чем больше эллиптичность пучка $(1-\alpha^2)$ и расстояние от перетяжки z , тем больше ρ_0 и тем дальше нули интенсивности располагаются от центра $\rho_0 = 0$.

Заметим, что из (8.48) следует, что при $\rho = 0$ также будет ноль интенсивности, но это не так. Дело в том, что уравнение (8.48) не учитывает слагаемые в уравнении (8.41) с отрицательными $\rho < 0$, которые при $\alpha \approx 1$ малы, но не равны нулю. Ранее было доказано, что главный вклад в значение интенсивности эллиптического пучка ЛГ определяется слагаемым вида (8.35), которое всегда отлично от нуля при конечных z .

Чтобы понять физический смысл того, почему исходный ноль интенсивности m -го порядка в центре картины дифракции при $z = 0$ «исчезает» при $z > 0$, представим интенсивность эллиптического пучка ЛГ в виде интерференции двух полей.

Из уравнения (8.45) следует:

$$\left| F_{\alpha \rightarrow 1}(\rho, \theta, z) \right|^2 \approx \left| F_0(\rho) - \frac{ik(1-\alpha^2)}{8z} e^{2i\theta} F_1(\rho) \right|^2, \quad (8.53)$$

где

$$F_0(\rho) = \frac{k}{z} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{2}\alpha r}{w} \right)^m L_n^m \left(\frac{2r^2\alpha^2}{w^2} \right) \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{r^2\alpha^2}{w^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z} \right] J_m \left(\frac{k\alpha\rho r}{z} \right) r dr, \quad (8.54)$$

$$F_1(\rho) = \frac{k}{z} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{2}\alpha r}{w} \right)^m L_n^m \left(\frac{2r^2\alpha^2}{w^2} \right) \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{r^2\alpha^2}{w^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z} \right] J_{m+2} \left(\frac{k\alpha\rho r}{z} \right) r dr \quad (8.55)$$

Из (8.53)-(8.55) видно, что структура картины дифракции пучка ЛГ со слабой степенью эллиптичности не обладает ни радиальной, ни эллиптической симметрией. Интеграл (8.54) может быть вычислен с помощью уравнения (8.1). Из (8.53) также видно, что с ростом z вклад второго слагаемого уменьшается и при $z \rightarrow \infty$ вместо (8.53) получается (8.34), то есть эллиптический пучок ЛГ, повернутый на 90° по отношению к входному пучку ЛГ при $z = 0$. Из (8.53) следует, что два световых поля $F_0(\rho)$ и $F_1(\rho)$ сложатся в «фазе» на линии $\theta = -\pi/4$. Если бы мы рассмотрели разложение (8.41) при $m < 0$, то получили бы уравнение, аналогичное (8.53), но два световых поля $F_0(\rho)$ и $F_1(\rho)$ складывались бы в «фазе» при $\theta = \pi/4$. То есть эллиптический пучок ЛГ при своём распространении имеет такую дифракционную картину в своём сечении, которая позволяет определить левую ($m < 0$) или правую ($m > 0$) «закрутку фазы», имеет исходный пучок ЛГ при $z = 0$. Причем поворот картины дифракции на угол $\pm\pi/4$ в зоне Френеля не зависит от величины номера $|m|$. В дальней зоне дифракции эллиптический пучок ЛГ поворачивается на

$\pm 90^\circ$ по отношению к исходному, и уже нельзя отличить направление вращения и знак номера $\pm|m|$.

Примеры изменения картины дифракции эллиптического пучка ЛГ показаны в последующих разделах.

8.4. Численное моделирование

По картинам интенсивности на рис. 8.1 можно проследить справедливость теоретических выкладок: по мере формирования светового пучка за ДОЭ он приобретает наклон в 45° , а в дальней зоне наблюдается поворот всей картины на 90° . По мере увеличения расстояния z количество локальных максимумов сначала растёт, а потом начинает убывать, как и было предсказано. Кроме того, видно, что при конечном z в центре картины дифракции нет нуля интенсивности, а два нуля интенсивности возникают вдоль линии под углом в 45° .

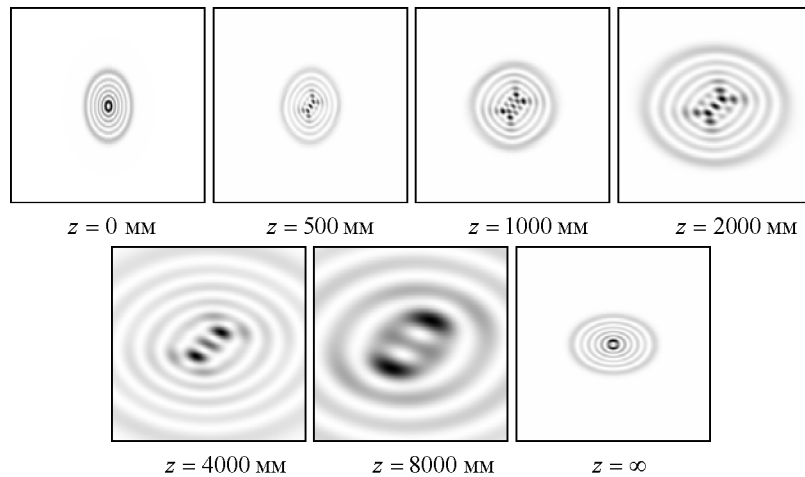


Рис. 8.1. Распространение моды ЛГ (5,2) с эллиптическим искажением в свободном пространстве (негатив). Размер изображения 5x5 мм, 256x256 отсчетов. Характерный гауссовский радиус пучка $\sigma = 0,391$ мм, длина волны $\lambda = 0,63$ мкм, коэффициент эллиптичности $\alpha = 0,66$

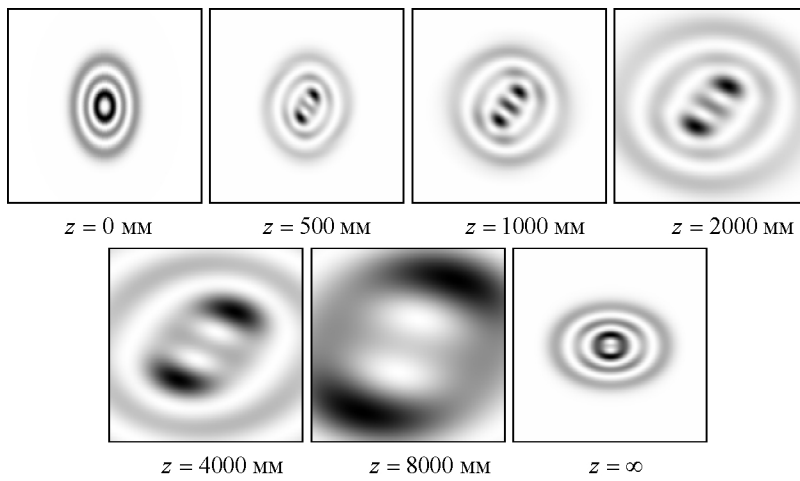


Рис. 8.2. Распространение моды ЛГ (2,2) с эллиптическим искажением в свободном пространстве. Коэффициент эллиптичности $\alpha = 0,66$

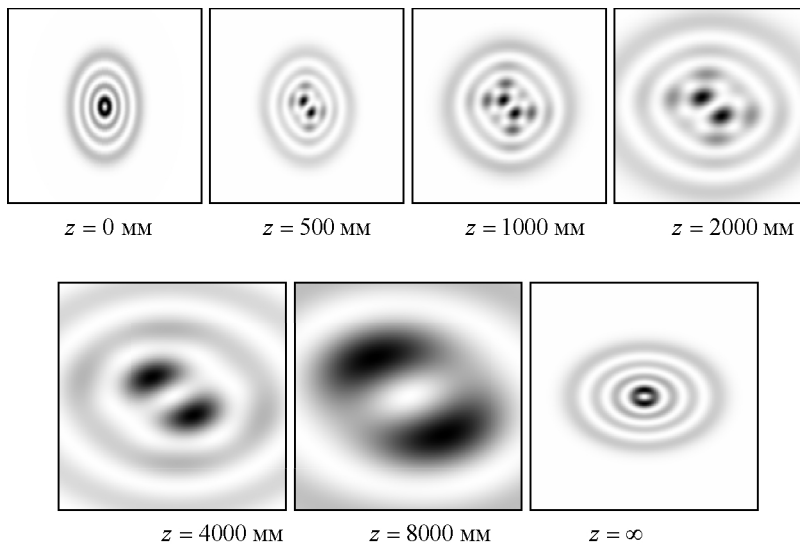


Рис. 8.3. Распространение моды ЛГ (3,-1) с эллиптическим искажением в свободном пространстве. Коэффициент эллиптичности $\alpha = 0,66$

Картина распространения моды ЛГ (2,2) также подтверждает теоретические выводы. Мы имеем два предсказанных локальных минимума вблизи центра изображения так же, как и в случае моды ЛГ (5,2) на рис. 8.1. И так же в центре картины при $z \neq 0$ нет нуля интенсивности.

Поведение светового пучка, изображенного на рис. 8.3 (моды ЛГ (3,-1)), в целом аналогично рисункам 8.1 и 8.2, с той лишь разницей, что мы имеем лишь один центральный локальный минимум, т.к. индекс моды $m = -1$. Кроме того, в данном случае наблюдается поворот на -45° в срединной области распространения.

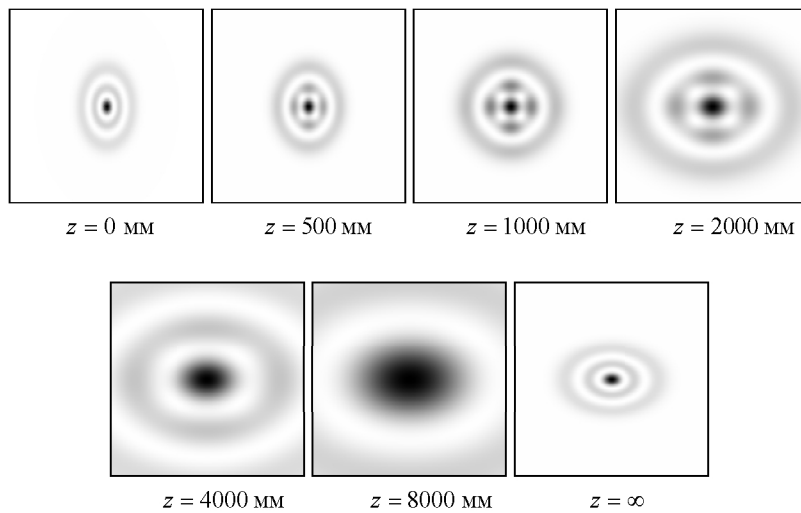


Рис. 8.4. Распространение моды ЛГ (2,0) с эллиптическим искажением в свободном пространстве. Коэффициент эллиптичности $\alpha = 0,66$

Интересным примером является распространение моды ЛГ (2,0). При этом не наблюдается появления локальных минимумов в центральной части, однако видны любопытные эффекты в первом коль-

це моды. При $m = 0$ центральная часть картины подвергается наибольшей трансформации (приобретает вид квадрата) на расстоянии близком к $z_0 \approx 1000$ мм. Внешние кольца при этом вместо эллипсов остаются окружностями. Похожий эффект наблюдается при уменьшении величины эллиптического искажения (см. рис. 8.5). Тем не менее, эффект поворота изображения на 90° в Фурье-плоскости по-прежнему проявляется в неизменном виде.

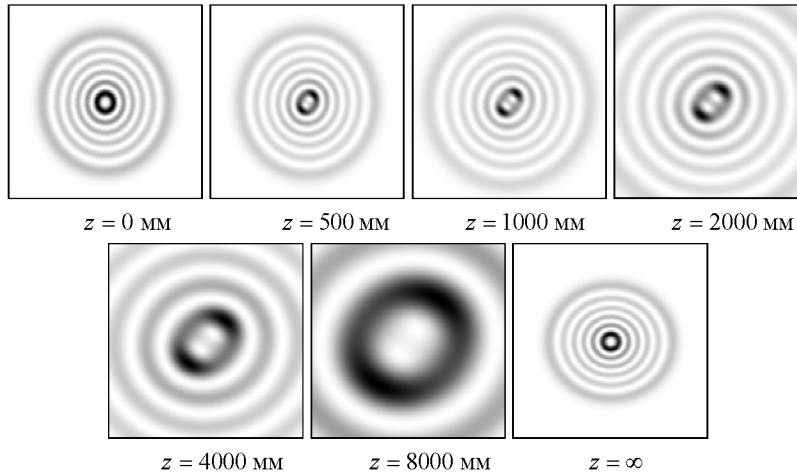


Рис. 8.5. Распространение моды ЛГ (5,2) с эллиптическим искажением в свободном пространстве. Коэффициент эллиптичности $\alpha = 0,91$

На рис. 8.5 показано распространение моды ЛГ (5,2) с малым коэффициентом эллиптичности $\alpha = 0,91$. При этом количество локальных минимумов-максимумов значительно уменьшается. Остаются лишь 2 центральных локальных минимума, которые позволяют определить индекс моды $m = 2$. Как видно из представленных картин моделирования распространения мод ЛГ, количество околоцентральных локальных максимумов-минимумов зависит от порядков (n, m) мод ЛГ и от величины коэффициента эллиптичности. Таким

образом, их число варьируется при изменении степени эллиптического искажения, т.е. угла наклона ДОЭ для одних и тех же мод ЛГ.

8.5. Эксперименты по формированию астигматических пучков ЛГ

Для проведения экспериментов с астигматическими пучками ЛГ использовался многопорядковый дифракционный оптический элемент (ДОЭ), согласованный с 42 модами ЛГ. ДОЭ был изготовлен по технологии электронной литографии на технологической базе Университета Йоенсуу (Финляндия). Вид фазы ДОЭ, схема соответствия номеров мод дифракционным порядкам и расчетное распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы приведены на рис. 8.6. Параметры ДОЭ: бинарный микрорельеф имеет высоту 692 нм, оптимальную для излучения с длиной волны 633 нм, диаметр – 10 мм, шаг дискретизации – 5 мкм.

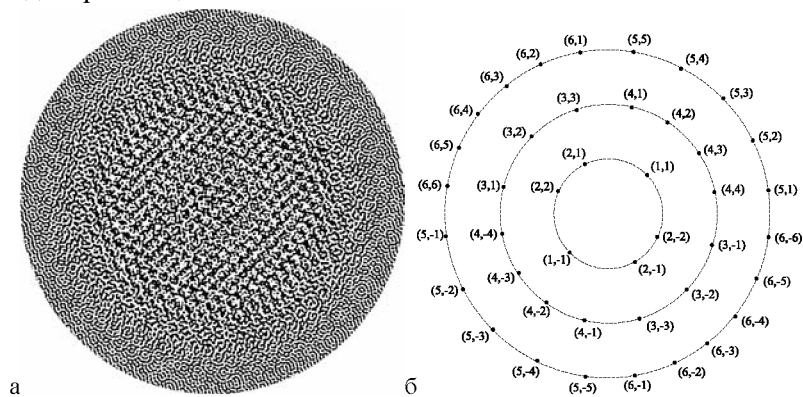


Рис. 8.6. 42-порядковый бинарный ДОЭ, формирующий моды ЛГ: фаза (а), схема соответствия номеров мод дифракционным порядкам (б), расчетное распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы (в) (см. также с. 103)

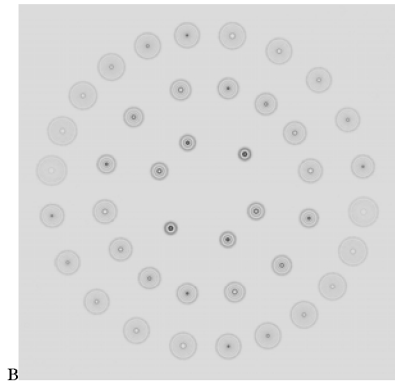


Рис. 8.6. Окончание

ДОЭ, представленный на рис. 8.6 формирует в симметричных дифракционных порядках моды ЛГ с одинаковыми индексами и противоположными знаками «сингулярности». Определить знак и порядок «сингулярности» моды можно, повернув ДОЭ на некоторый угол относительно оптической оси. Так, на рис. 8.7 можно видеть экспериментально зафиксированную картину распределения интенсивности на расстоянии около $z = 400$ мм от ДОЭ, повернутого относительно оптической оси, при освещении его коллимированным излучением гелий-неонового лазера (длина волны 633 нм), ограниченным круглой диафрагмой. На рис. 8.7 можно видеть, что моды, имеющие разные знаки сингулярности, «вытянулись» во взаимно-перпендикулярных направлениях. На рис. 8.8 показана аналогичная картина, только несколько подробнее (менее сходящийся освещающий пучок и меньший наклон ДОЭ). Видно, что при небольшой степени астигматизма «развал» на отдельные нули происходит для пучком с невысоким порядком сингулярности ($|m| = 1, 2$). Для $|m| > 3$ центральное кольцо хоть и деформируется, но еще не «дробится» на отдельные нули.

На рис. 8.9 можно было проследить, как при увеличении наклона ДОЭ мода ЛГ $(n, m) = (5, 4)$ постепенно трансформируется к виду очень близкому к модам Гаусса-Эрмита.

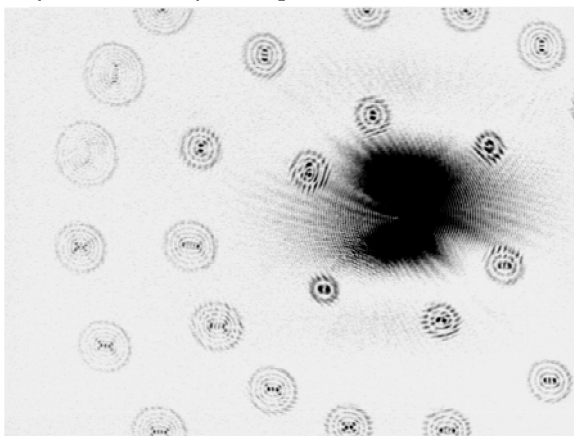


Рис. 8.7. Экспериментальное распределение интенсивности (получены в сходящемся освещающем пучке) при наклоне ДОЭ относительно оптической оси

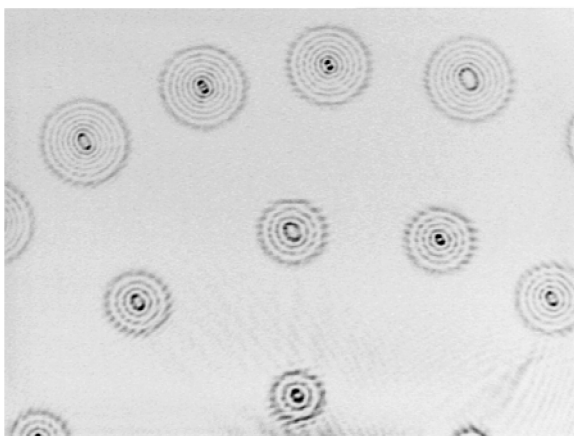


Рис. 8.8. Экспериментальное распределение интенсивности (получены в сходящемся освещающем пучке) при небольшом наклоне ДОЭ относительно оптической оси

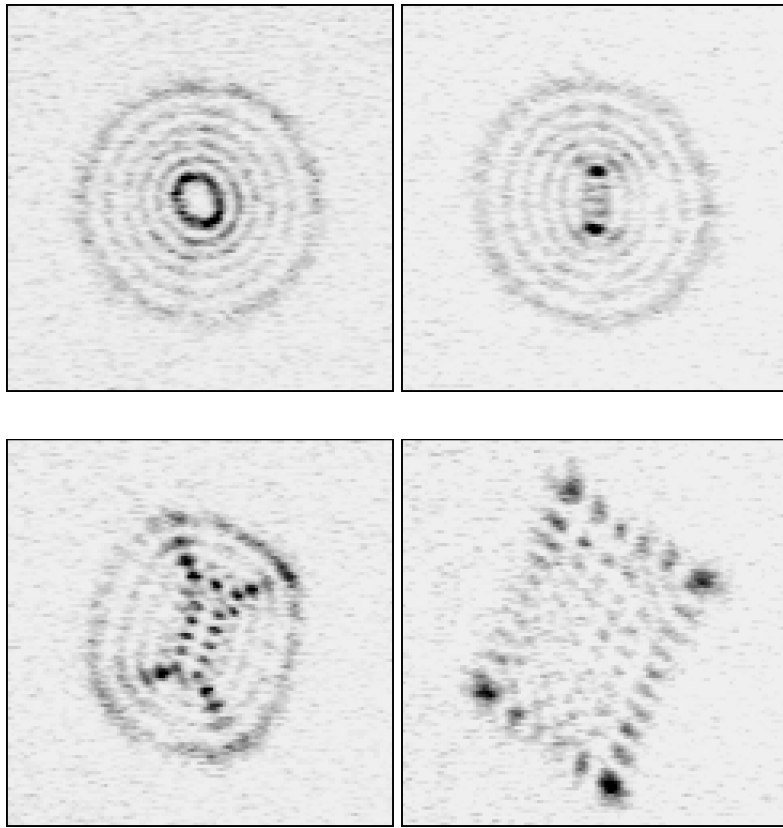


Рис. 8.9. Экспериментальное распределение интенсивности для моды ЛГ $(n, m) = (5, 4)$ при различных углах наклона ДОЭ относительно оптической оси

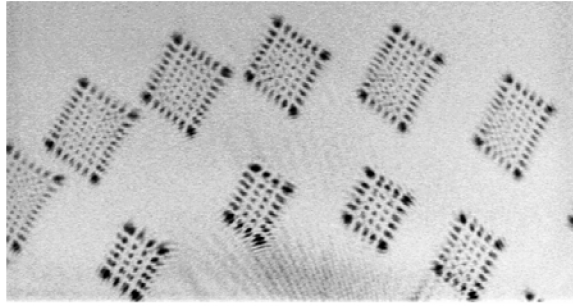


Рис 8.10. Экспериментальные распределения интенсивности при угле наклона ДОЭ относительно оптической оси, близком к 90°

Из рис. 8.10 можно видеть, что при сильном наклоне ДОЭ моды ЛГ принимают вид мод Гаусса-Эрмита. При этом соответствие номеров мод следующее:

$$\begin{aligned} n_{GH} &= n_{GL}, \\ m_{GH} &= n_{GL} + |m_{GL}|. \end{aligned} \quad (8.56)$$

В данном разделе аналитически и численно исследовано распространение параосевого эллиптического пучка Лагерра-Гаусса. Показано, что если в начальной плоскости сечения пучок имеет структуру в виде софокусных эллипсов с нулевой интенсивностью на оптической оси, если номер m спиральности (или сингулярности) фазы пучка отличен от нуля, то при распространении в зоне дифракции Френеля в центре пучка на оптической оси интенсивность будет отличаться от нуля.

При этом фазовая осевая сингулярность m -го порядка «распадается» на p сингулярностей m/p -го порядка, и вблизи осевой точки в сечении пучка возникают p нулей интенсивности. Число нулей p зависит от степени эллиптичности пучка α . Так, при малой степени эллиптичности ($1 - \alpha^2 \ll 0$) комплексную амплитуду пучка можно эффективно представить в виде суперпозиции двух слагаемых, кото-

рая приводит к появлению двух ($p = 2$) нулей интенсивности $m/2$ -го порядка сингулярности при четном числе m . Эти нули «лежат» в сечении пучка на прямой линии, составляющей с осью x угол в $+45^\circ$ при $m > 0$ и -45° при $m < 0$. С увеличением степени эллиптичности пучка растет число слагаемых в суперпозиции и число p изолированных нулей интенсивности. При дальнейшем распространении пучка вдоль оптической оси слагаемые в суперпозиции, зависящие от расстояния как $z - q$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, будут давать все меньший вклад в общую сумму, и при $z \rightarrow \infty$ (дальняя зона) сформируется пучок ЛГ с эллиптической симметрией m -го порядка сингулярности с нулевой интенсивностью на оптической оси, сечение которого тождественно сечению исходного пучка (при $z = 0$), но повернуто по отношению к нему на 90 градусов.

Численные и натурные эксперименты подтвердили теоретические выводы. На основе численного моделирования показано как видоизменяется картина дифракции эллиптического пучка ЛГ на различных расстояниях при одинаковой степени эллиптичности. При проведении экспериментов распределение интенсивности пучка ЛГ фиксировалось на одном и том же расстоянии, но при различном наклоне ДОЭ к оптической оси. При этом можно было проследить, как при увеличении наклона ДОЭ моды ЛГ постепенно трансформировались к виду, очень близкому к модам Гаусса-Эрмита.

9. ПРОСТЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ВИХРИ

9.1. Оптические вихри, сформированные СФП со степенной амплитудной составляющей

Дифракция Фраунгофера плоской волны, ограниченной круглой диафрагмой радиуса R на СФП с функцией пропускания

$$E_{nop}(r, \varphi) = \exp(in\varphi) \text{circl}\left(\frac{r}{R}\right), \quad (9.1)$$

где $\text{circl}(r/R) = \{1, r \leq R; 0, r > R\}$, описывается комплексной амплитудой вида [8]:

$$E_{nfp}(\rho, \theta) = \frac{\exp\left[-i\frac{\pi}{2}(n+1) + in\theta\right]}{n!(n+2)} \times \left(\frac{kR^2}{f}\right) x^n {}_1F_2\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1; -x^2\right), \quad (9.2)$$

где $x = kR\rho/(2f)$, (r, φ) и (ρ, θ) - полярные координаты в исходной плоскости и плоскости Фурье-спектра, $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число света, f - фокусное расстояние сферической линзы, n - целое число (порядок СПФ), ${}_1F_2$ - гипергеометрическая функция:

$${}_1F_2(a, b, c; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b+m)\Gamma(c+m)} x^m. \quad (9.3)$$

Выражение (9.2) трудно анализировать из-за наличия гипергеометрической функции, которая в данном случае не сводится к другим, более простым, специальным функциям.

Более простое выражение для оптического вихря в дальней зоне получается, если СФП расположить в перетяжке гауссового пуч-

ка. Тогда комплексная амплитуда исходного светового поля будет иметь вид:

$$E_{nog}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\varphi\right), \quad (9.4)$$

где w - радиус перетяжки гауссового пучка, а комплексная амплитуда в зоне дифракции Фраунгофера (в фокальной плоскости сферической линзы) будет иметь вид [9]:

$$E_{nfg}(\rho, \theta) = \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(n+1) + in\theta - y\right] \times \\ \times \left(\frac{kw^2}{4f}\right) \sqrt{2\pi y} \left[I_{\frac{n-1}{2}}(y) - I_{\frac{n+1}{2}}(y)\right], \quad (9.5)$$

где $y = (1/2) [kw\rho/(2f)]^2$, $I_{(n\pm 1)/2}(y)$ - модифицированная функция Бесселя.

В обоих случаях картины дифракции Фраунгофера (9.2) и (9.5) имеют вид концентрических колец. На оптической оси интенсивность равна нулю. Из (9.2) и (9.5) можно найти и сравнить радиусы колец:

$$\rho_{mp} = \frac{2\gamma_m f}{kR}, \\ \rho_{mg} = \frac{2\overline{\gamma}_m f}{kw}, \quad (9.6)$$

где γ_m и $\overline{\gamma}_m$ - числа, которые зависят только от порядка n СФП и от номера кольца m . Из (9.6) видно, что при $R = w$ радиусы колец оптических вихрей будут отличаться только постоянными γ_m и $\overline{\gamma}_m$. В [8] радиус первого кольца вихря приближенно найден в виде:

$$\rho_{1,p} \approx \frac{\gamma_{n-1,1} f}{kR}, \quad (9.7)$$

где $\gamma_{n-1,1}$ - первый корень функции Бесселя: $J_{n-1}(\gamma_{n-1,1}) = 0$.

Исходные световые поля (9.1) и (9.4) интересны с практической точки зрения, так как могут быть реализованы с помощью фазовых дифракционных оптических элементов [8, 9], а гауссовый пучок является основной модой лазерных источников.

В теоретическом плане интересно рассмотреть другие оптические вихри, картина дифракции которых также состоит из набора концентрических колец, но которые описываются более простыми функциями, например одной функцией Бесселя первого рода. Хотя сформировать такие «простые» оптические вихри можно только с помощью амплитудно-фазовых световых полей.

Рассмотрим исходное световое поле, комплексная амплитуда которого имеет возрастающую с радиусом функцию амплитуды:

$$E_{noi}(r, \varphi) = \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(in\varphi) \text{circ1}\left(\frac{r}{R}\right). \quad (9.8)$$

Комплексная амплитуда в плоскости Фурье-спектра, описывающая дифракцию Фраунгофера ограниченной плоской волны со степенной амплитудой на СФП, будет иметь вид:

$$E_{nfi}(\rho, \theta) = \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(n+1) + in\theta\right] \left(\frac{kR^2}{f}\right) \frac{J_{n+1}(x')}{x'}, \quad (9.9)$$

где $x' = kR\rho/f$. Первое нулевое кольцо интенсивности картины дифракции, описываемой уравнением (9.9), будет на расстоянии от центра, равном

$$\rho_{1,0} = \frac{\gamma_{n+1,1} f}{kR}, \quad J_{n+1}(\gamma_{n+1,1}) = 0, \quad (9.10)$$

где $\gamma_{n+1,1}$ - первый нуль функции Бесселя $J_{n+1}(x)$.

Радиус первого кольца вихря (первого максимума интенсивности картины дифракции) можно найти из уравнения

$$x'J'_{n+1}(x') = J_{n+1}(x'), \quad (9.11)$$

где $J'_{n+1}(x')$ - производная функции Бесселя.

Из (9.11) следует, что радиус ρ_{1m} первого светлого кольца вихря (9.9) будет находиться в интервале:

$$\rho_{1,d} < \rho_{1,m} < \rho_{1,0}, \quad (9.12)$$

где $\rho_{1,0}$ - радиус первого темного кольца вихря (кольца с нулевой интенсивностью) (9.10),

$$\rho_{1,d} = \frac{\gamma'_{n+1,1}f}{kR}, \quad J'_{n+1}(\gamma'_{n+1,1}) = 0, \quad (9.13)$$

$\gamma'_{n+1,1}$ - первый корень (нуль) производной функции Бесселя.

Так как для радиуса ρ_{1p} из (9.7) можно записать неравенство, аналогичное (9.12):

$$\frac{\gamma'_{n,1}f}{kR} < \rho_{1,p} < \frac{\gamma_{n,1}f}{kR}. \quad (9.14)$$

и так как при больших номерах ($n \gg 1$) имеют место следующие асимптотики нулей функций Бесселя и ее производной $\gamma_{n,1} \approx n + 1.85n^{1/3}$, $\gamma'_{n,1} \approx n + 0.81n^{1/3}$, то два неравенства (9.12) и (9.14) определяют два пересекающихся множества. Поэтому нельзя определенно сказать какой из двух радиусов ρ_{1m} или ρ_{1p} больше, а какой меньше. Однако с увеличением порядка СФП n эта разница в радиусах первых колец оптических вихрей (9.2) и (9.9) будет все менее заметной.

Другой пример простого оптического вихря можно получить с помощью исходного амплитудно-фазового светового поля, степенная амплитудная составляющая которого с ростом радиуса не возрастает как в уравнении (9.8), а убывает:

$$E_{nod}(r, \varphi) = \left(\frac{R_1}{r}\right)^n \exp(in\varphi) \left[1 - \text{circl}\left(\frac{r}{R_1}\right)\right], \quad (9.15)$$

R_1 - радиус диска, закрывающего центральную часть исходного поля. Световое поле с комплексной амплитудой (9.15) можно не ограничивать при $r \rightarrow \infty$, так как энергия W такого поля конечная при $n > 1$:

$$W = 2\pi \int_{R_1}^{\infty} |E_{nod}|^2 r dr = \frac{\pi R_1^2}{n-1}. \quad (9.16)$$

Исходя из уравнения (9.15), в плоскости пространственного спектра получим оптический вихрь, комплексная амплитуда которого имеет вид:

$$E_{nid}(\rho, \theta) = \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(n+1) + in\theta\right] \left(\frac{kR_1^2}{f}\right) \frac{J_{n-1}(x_1)}{x_1}, \quad (9.17)$$

где $x_1 = kR_1\rho/f$. Функция (9.17) отличается по форме от функции (9.9) только номером функции Бесселя. Это приводит к тому, что при том же порядке СФП n первое кольцо с нулевой интенсивностью оптического вихря (9.17) будет иметь меньший радиус при $R_1 = R$, чем радиус первого темного кольца вихря (9.9):

$$\overline{\rho}_{1,0} = \frac{\gamma_{n-1,1}f}{kR_1}, \quad J_{n-1}(\gamma_{n-1,1}) = 0. \quad (9.18)$$

Функция в правой части (9.17) равна нулю при $\rho = 0$ для любого $n > 2$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} [J_{n-1}(x)/x] = 0$ при $n > 2$. Специально надо рассмотреть случай, когда $n = 2$, так как в этом случае $\lim_{x \rightarrow 0} [J_1(x)/x] = 1/2$. Но так как фаза оптического вихря (9.17) при $\rho = 0$ неопределенна при любом n , в том числе и при $n = 2$, то амплитуда поля (9.17) должна быть равна нулю при $\rho = 0$ и при $n = 2$. Это следует из интеграла:

$$\int_{R_1}^{\infty} \frac{J_2(cx)}{x} dx = 0 \text{ при } c = 0. \quad (9.19)$$

Поэтому корректная запись комплексной амплитуды оптического вихря, сформированного исходным полем (9.15), вместо выражения (9.17) должна быть такой ($n \geq 2$):

$$E_{nfd}(\rho, \theta) = \exp \left[-i \frac{\pi}{2} (n+1) + in\theta \right] \left[\left(\frac{kR_1^2}{f} \right) \frac{J_{n-1}(x_1)}{x_1} \theta(x_1) \right], \quad (9.20)$$

где

$$\theta(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 > 0, \\ 0, & x_1 = 0. \end{cases} \quad (9.21)$$

Из (9.20) видно, что комплексная амплитуда при $n = 2$ не имеет физической интерпретации, так как картина дифракции такого оптического вихря представляет собой картину дифракции Эйри с “выколотой” точкой в центре. Такая нефизическая картина дифракции следует из того, что исходное поле (9.15) не было ограничено при $r \rightarrow \infty$. В практическом случае поле (9.15) следует ограничить кольцевой диафрагмой, тогда вместо (9.15) получим:

$$E_{nod}(r, \varphi) = \left(\frac{R_1}{r}\right)^n \exp(in\varphi) \left[\text{circl}\left(\frac{r}{R}\right) - \text{circl}\left(\frac{r}{R_1}\right) \right], \quad (9.22)$$

где $R_1 < R$, R - радиус внешнего кольца диафрагмы. Тогда в Фурье-плоскости сформируется простой оптический вихрь с комплексной амплитудой:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{nfd}(\rho, \theta) = & \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(n+1) + in\theta\right] \times \\ & \times \left(\frac{kR_1^2}{f}\right) \left[\frac{J_{n-1}(x_1)}{x_1} - \left(\frac{R_1}{R}\right)^{n-2} \frac{J_{n-1}(x')}{x'} \right], \end{aligned} \quad (9.23)$$

где $x' = kR\rho/f$, $x_1 = kR_1\rho/f$.

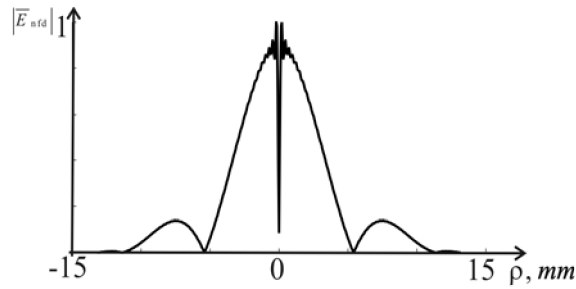


Рис. 9.1. Амплитуда (в относительных единицах) в радиальном сечении Фурье-плоскости оптического вихря (9.23) при $k = 10^4 \text{ мм}^{-1}$, $f = 100 \text{ мм}$, $R = 0,2 \text{ мм}$,
 $R_1 = 0,005 \text{ мм}$, $n = 2$

Вид модуля функции (9.23) от радиальной переменной ρ при $n = 2$ и $R \gg R_1$ показан на рис. 9.1. Из рис. 9.1 видно, что при $R \rightarrow \infty$ амплитуда \bar{E}_{nfd} будет стремиться к E_{nfd} , и при любом R в центре Фурье-плоскости ($\rho = 0$) будет нулевая амплитуда.

9.2. Простой оптический вихрь почти без боковых лепестков

В [35] предлагается для устранения (сжатия) боковых лепестков в картине дифракции оптического вихря использовать специальную СФП, параметры которой ищутся простым перебором. Ниже предлагается оптическая схема для формирования светового кольца заданного радиуса R с вихревой составляющей $n = 2$ с «крутыми внутренними стенками» и почти без боковых лепестков. На рис. 9.2 показана предлагаемая оптическая $4f$ -схема.

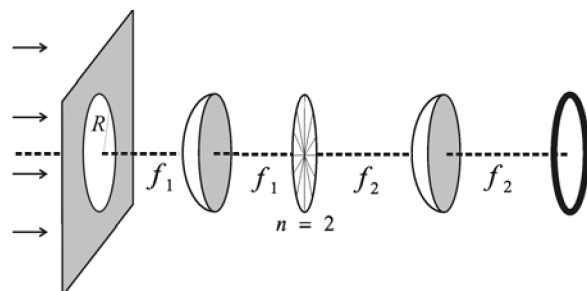


Рис. 9.2. Оптическая $4f$ -схема: на входе круглое отверстие в экране; в частотной плоскости первой сферической линзы расположена СФП ($n = 2$); в частотной плоскости второй сферической линзы формируется световое кольцо

Плоская волна радиуса R и с амплитудой $E_0(r) = \text{circ}l(r/R)$ формирует в частотной плоскости первой сферической линзы с фокальным расстоянием f известную картину Эйри:

$$E_{2f}(r) = -i \left(\frac{kR^2}{f} \right) \frac{J_1(x')}{x'}, \quad (9.24)$$

где $x' = kR\rho/f$. Если в частотной плоскости первой линзы на рис. 9.2 расположить СФП с $n = 2$, то на выходе оптической $4f$ -схемы образуется оптический вихрь типа «кратер вулкана» с амплитудой:

$$E_{2f_1}(r, \varphi) = \left(-\frac{f}{f_1}\right) \left(\frac{\bar{R}}{r}\right)^2 \exp(2i\varphi) \left[1 - \text{circl}\left(\frac{\rho}{\bar{R}}\right)\right], \quad (9.25)$$

где $\bar{R} = f_1 R / f$, f_1 - фокусное расстояние второй линзы. Это следует из интеграла [1]:

$$\int_0^\infty J_{v-1}(bx) J_v(cx) dx = \frac{b^{v-1}}{c^v} \begin{cases} 1, & 0 < b < c, \\ 0, & 0 < c < b. \end{cases} \quad (9.26)$$

Из (9.25) следует, что радиус оптического «кратера» второго порядка ($n = 2$) определяется радиусом R входного отверстия в диафрагме при $f_1 = f$.

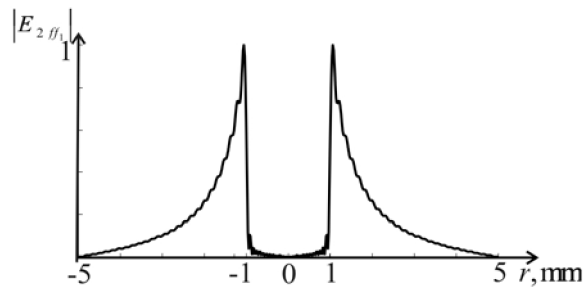


Рис. 9.3. Нормированный модуль амплитуды (9.25) в зависимости от радиальной переменной r при $R = 1$ мм, $f = f_1$

На рис. 9.3 показан нормированный модуль амплитуды (9.25) при $R = 1$ мм и $f = f_1$. Локальные максимумы и минимумы на рис. 9.3 являются проявлением эффекта Гиббса из-за ограничения апертуры СФП в частотной плоскости первой линзы на рис. 9.2. Эти боковые лепестки имеют слабый контраст. Заметим, что для известных оптических вихрей, которые получаются при дифракции плоской волны конечного радиуса на СФП, боковые лепестки (периферийные кольца) имеют значительный контраст по сравнению с рис. 9.3. Действительно, на рис. 9.4 показано радиальное распределение амплитуды

известного оптического вихря, который формируется при дифракции плоской волны с радиусом R на СФП и описывается комплексной амплитудой (9.2).

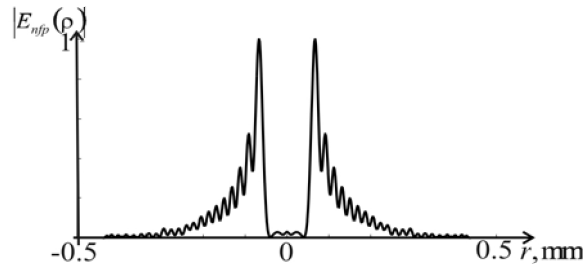


Рис. 9.4. Радиальное распределение модуля амплитуды (9.2), описывающее дифракцию плоской волны радиуса $R = 1$ мм на СФП $n = 20$, $k/f = 122$ мм⁻²

9.3. Дифракция Фраунгофера для чистых оптических вихрей

Если в уравнении (9.15) при $n = 2$ в амплитудной части устремить радиус ограничивающего диска R_1 к нулю, то исходное поле (9.15) примет вид:

$$E_{nod}(r, \varphi) = \frac{\exp(in\varphi)}{r^2}. \quad (9.27)$$

Световое поле с комплексной амплитудой (9.27) имеет бесконечную энергию. Фурье-преобразование от комплексной амплитуды (9.27) имеет вид:

$$E_{nfd}(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{n+1} k}{f} \exp(in\theta) \times \int_0^{\infty} \frac{J_n\left(\frac{k}{f} \rho r\right)}{r} dr = \frac{(-i)^{n+1} k}{f} \exp(in\theta) \begin{cases} n^{-1}, & \rho > 0, \\ 0, & \rho = 0. \end{cases} \quad (9.28)$$

Из (9.28) следует, что в Фурье-плоскости сформируется оптический вихрь n -го порядка с постоянной интенсивностью везде, кроме центральной точки $\rho = 0$, в которой будет нулевая амплитуда. И наоборот, из уравнения (9.28) следует, что амплитудно-фазовая функция вида:

$$E_{np}(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{n+1} f n \exp(in\theta)}{k \rho^2} = \frac{(-i)^{n+1} f n \exp(in\theta)}{k \rho^2} \quad (9.29)$$

является Фурье-образом “чистого оптического вихря” [5], который формируется при дифракции неограниченной плоской волны на СФП и описывается комплексной амплитудой:

$$E_{nop}(r, \varphi) = \exp(in\varphi). \quad (9.30)$$

Уравнение (9.29) следует из интеграла ($n > 0$):

$$\frac{(-i)^{n+1} k \exp(in\theta)}{f} \int_0^{\infty} J_n\left(\frac{k}{f} \rho r\right) r dr = \frac{(-i)^{n+1} f \exp(in\theta)}{k \rho^2} \begin{cases} n, \rho > 0, \\ 0, \rho = 0. \end{cases} \quad (9.31)$$

10. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА НА МНОГОУРОВНЕВОЙ (КВАНТОВАННОЙ) СПИРАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛАСТИНКЕ

Существует множество способов изготовления СФП, например путем многоступенчатого травления кремния [36] или с помощью абляции эксимерным лазером полиамидной подложки [37]. Микро-рельеф формируемой СФП получается ступенчатым или квантованным.

Многоуровневые СФП исследовались в [38, 39]. В [38] теоретически посчитано, с какой эффективностью преобразует ступенчатая СФП гауссов пучок в моду Лагерра-Гаусса (0, 1), а также проведен эксперимент с 16-уровневой СФП, изготовленной по технологии фотолитографии.

В [39] теоретически найдены минимальные числа уровней фазы СФП (для номеров $n < 8$), при которых конечно-уровневые СФП слабо отличаются от непрерывной СФП. С помощью конечно-уровневой СФП, реализованной на основе жидкокристаллической ячейки, в [39] сформированы вихревые лазерные пучки с номерами сингулярности до 6.

В [40, 41] рассматривается ахроматическая СФП, которая формирует почти одинаковые вихревые поля, если длина волны освещающего излучения меняется в достаточно широком диапазоне (140 нм). В этих работах [38-41] СФП анализируется с помощью разложения в ряд по угловым гармоникам:

$$\exp\left[i \operatorname{mod}\left(\frac{P\varphi}{2\pi}\right) \frac{2\pi n}{P}\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp(im\varphi), \quad (10.1)$$

где $\operatorname{mod}(\dots)$ – целое число, P – общее число уровней фазы СФП, φ – азимутальный угол полярной системы координат, n – номер СФП, C_m – комплексные коэффициенты, $\exp(im\varphi)$ – угловые гармоники, описывающие пропускание непрерывной СФП с номером m .

В данном разделе рассматривается конечно-уровневая СФП, ограниченная полиномиальной апертурой. Причем число уровней квантования фазы СФП равно числу сторон правильного многоугольника, ограничивающего апертуру СФП. В этом случае удалось получить аналитические выражения в виде конечной суммы плоских волн для комплексной амплитуды, описывающей дифракцию Фраунгофера плоской волны на конечно-уровневой СФП, ограниченной правильным многоугольником.

Заметим, что ранее уже рассматривалась возможность формирования вихревых полей с помощью неспиральных фазовых пластинок [42]. В нашем случае, в отличие от [42], при увеличении числа уровней квантования фазы (или числа сторон многоугольника), картина дифракции в дальней зоне стремится к картине дифракции, сформированной непрерывной СФП с круглой апертурой.

10.1. Уравнение полиномиальной апертуры

Пусть Ω - многоугольник, заданный декартовыми координатами своих вершин $A_p(x_p, y_p)$, $p = \overline{0, P-1}$, где $P > 2$ - число вершин (рис. 10.1).

Пусть уравнение стороны многоугольника, соединяющей p -ю и $(p+1)$ -ю вершины, имеет вид:

$$y = a_p x + b_p. \quad (10.2)$$

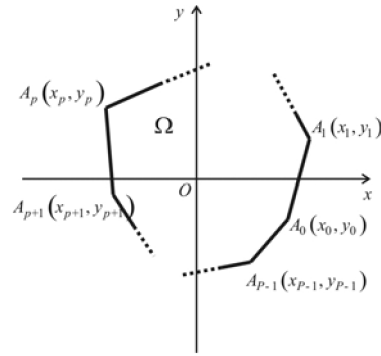


Рис. 10.1. ДОЭ с многоугольной апертурой

Пусть $f(x, y)$ - функция двух переменных, определенная в R^2 следующим образом:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (10.3)$$

Известно, что преобразование Фурье от такой функции $f(x, y)$ вычисляется с помощью уравнения полиномиальной апертуры [43]:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \exp[\pm i(x\xi + y\eta)] dx dy &= \sum_{p=1}^P \frac{a_p - a_{p-1}}{(\xi + \eta a_{p-1})(\xi + \eta a_p)} \exp[\pm i(\xi x_p + \eta y_p)] = \\ &= \sum_{p=1}^P \frac{(y_{p+1} - y_p)(x_p - x_{p-1}) - (y_p - y_{p-1})(x_{p+1} - x_p)}{[\xi(x_{p+1} - x_p) + \eta(y_{p+1} - y_p)][\xi(x_p - x_{p-1}) + \eta(y_p - y_{p-1})]} \times \\ &\times \exp[\pm i(\xi x_p + \eta y_p)], \end{aligned} \quad (10.4)$$

где под индексами p подразумеваются значения $\text{mod}(p, P)$, т.е. $(x_p, y_p) = (x_0, y_0)$, $(x_{-1}, y_{-1}) = (x_{P-1}, y_{P-1})$ и т.д.

Тогда комплексная амплитуда, описывающая дифракцию Фраунгофера на полиномиальной апертуре (рис. 10.1) плоской волны длиной λ при фокусном расстоянии сферической линзы, равном f , имеет вид:

$$E(\xi, \eta) = -\frac{if}{2\pi k} \sum_{p=1}^P \frac{(y_{p+1} - y_p)(x_p - x_{p-1}) - (y_p - y_{p-1})(x_{p+1} - x_p)}{[\xi(x_{p+1} - x_p) + \eta(y_{p+1} - y_p)][\xi(x_p - x_{p-1}) + \eta(y_p - y_{p-1})]} \times \exp\left[\pm i \frac{k}{f} (\xi x_p + \eta y_p)\right], \quad (10.5)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число.

Вывод уравнения полиномиальной апертуры приведен в приложении Б.

10.2. Дифракция Фраунгофера плоской волны на ДОЭ с формой правильного многоугольника и кусочно-постоянным микрорельефом

Рассмотрим дифракционный оптический элемент, имеющий форму правильного многоугольника $\Omega = A_0 A_1 \dots A_{P-1}$, вписанного в окружность радиуса R и содержащего начало координат O . Тогда $\Omega = \bigcup_{p=0}^{P-1} \Omega_p$, где Ω_p - треугольники $OA_p A_{p+1}$, а каждая вершина A_p

имеет координаты (рис. 10.2)

$$\begin{cases} x_p = R \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P}\right), \\ y_p = R \sin\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P}\right), \\ \varphi_p = \frac{2\pi}{P} p. \end{cases} \quad (10.6)$$

Пусть внутри каждого треугольника Ω_p глубина микрорельефа имеет постоянное значение, тогда внутри Ω_p и функция комплексного пропускания ДОЭ будет постоянна:

$$\tau(x, y) = \exp(i\Psi_p). \quad (10.7)$$

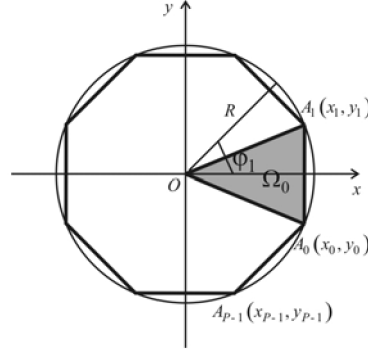


Рис. 10.2. ДОЭ с апертурой в виде правильного многоугольника

Тогда, пользуясь уравнением для полиномиальной апертуры, можно получить выражение для комплексной амплитуды, описывающей дифракцию Фраунгофера плоской волны длиной λ на таком ДОЭ (рис. 10.2):

$$\begin{aligned} E(\xi, \eta) = & \frac{if}{2\pi k} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{(\xi x_{p+1} + \eta y_{p+1})(\xi x_p + \eta y_p)} - \\ & - \frac{if}{2\pi k} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p) \exp\left[-i\frac{k}{f}(\xi x_p + \eta y_p)\right]}{\left[\xi(x_{p+1} - x_p) + \eta(y_{p+1} - y_p)\right](\xi x_p + \eta y_p)} + \\ & + \frac{if}{2\pi k} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p) \exp\left[-i\frac{k}{f}(\xi x_{p+1} + \eta y_{p+1})\right]}{(\xi x_{p+1} + \eta y_{p+1})\left[\xi(x_{p+1} - x_p) + \eta(y_{p+1} - y_p)\right]} \end{aligned} \quad (10.8)$$

При переходе к полярным координатам вместо (10.8) получается следующее выражение:

$$E(\rho, \theta) = \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{\cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} +$$

$$+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos \frac{\pi}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \left[\frac{\exp(i\Psi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i \frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)}. \quad (10.9)$$

При $\theta \rightarrow \varphi_q$ или $\theta \rightarrow \varphi_q - \frac{\pi}{P} \pm \frac{\pi}{2}$, где $q = \overline{0, P-1}$ знаменатели некоторых слагаемых в сумме (10.9) стремятся к нулю. Тем не менее можно показать, что эти слагаемые встречаются парами или по четыре, причем они компенсируют друг друга. Поэтому в выражении (10.9) неопределенностей не возникает. Доказательство этого можно найти в приложении А.

В случае СФП, т.е. $\Psi_p = n\varphi_p$, из (10.9) получим:

$$E_n^P(\rho, \theta) = \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(in\varphi_p)}{\cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} +$$

$$+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos \frac{\pi}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \left[\frac{\exp(in\varphi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(in\varphi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \times$$

$$\times \frac{\exp\left[-i \frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)}. \quad (10.10)$$

10.3. Численное моделирование

На рис. 10.3 показана картина дифракции Фраунгофера плоской волны на непрерывной СФП, ограниченной круглой диафрагмой, полученная по формуле конечных сумм функций Бесселя [44]:

$$E_n(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{n+1} k \exp(in\theta)}{f \bar{\rho}^2} \times \begin{cases} n \left[1 - J_0(y) - 2 \sum_{m=1}^{(n-2)/2} J_{2m}(y) \right] - y J_{n-1}(y), n = 2m, \\ n \left[\int_0^y J_0(t) dt - 2 \sum_{m=1}^{(n-1)/2} J_{2m-1}(y) \right] - y J_{n-1}(y), n = 2m+1, \end{cases} \quad (10.11)$$

где $y = R\bar{\rho} = kR\rho/f$, $J_n(x)$ - функция Бесселя n -го порядка,

$$\int_0^y J_0(t) dt = \frac{y}{2} \{ \pi J_1(y) H_0(y) + J_0(y) [2 - \pi H_1(y)] \}, \quad (10.12)$$

$H_{0,1}(y)$ - функции Струве нулевого и первого порядков.

При расчете использовались следующие значения параметров: длина волны 633 нм, фокусное расстояние сферической линзы 150 мм, радиус апертуры 2 мм, порядок СФП 6.

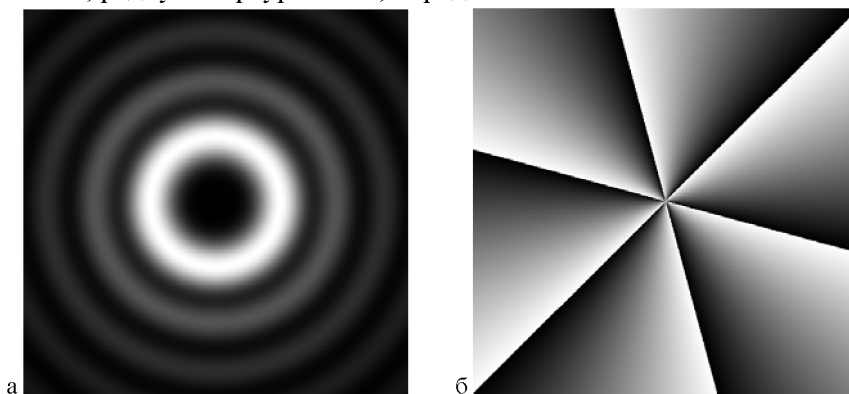


Рис. 10.3. Картина дифракции Фраунгофера плоской волны на непрерывной ограниченной СФП: амплитуда (а) и фаза (б)

На рис. 10.4 показаны картины дифракции Фраунгофера плоской волны на квантованной ограниченной СФП, полученные по формуле (10.10).

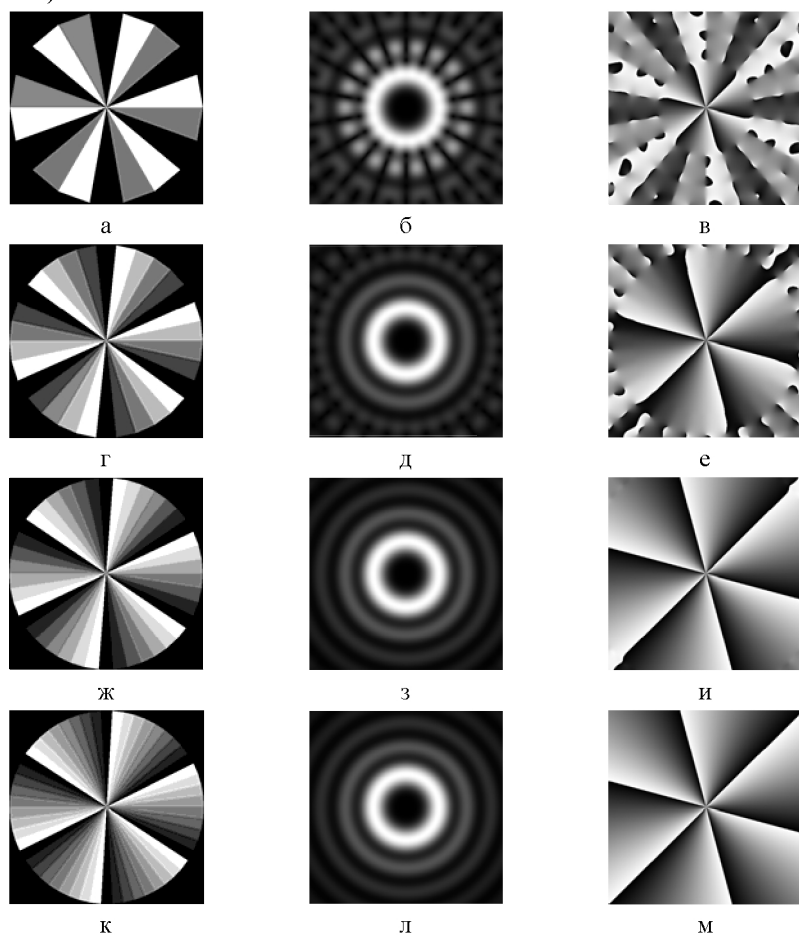


Рис. 10.4. Картины дифракции Фраунгофера плоской волны на квантованной ограниченной СФП: фаза ДОЭ (а, г, ж, к), амплитуда (б, д, з, л) и фаза (в, е, и, м) в зоне дифракции Фраунгофера. Число секторов: 18 (а, б, в), 30 (г, д, е), 42 (ж, з, и), 54 (к, л, м)

В таблице 10.1 показана зависимость среднеквадратичного отклонения картины дифракции Фраунгофера плоской волны на огра-

126

ниченной квантованной спиральной фазовой пластинке от картины дифракции на ограниченной непрерывной СФП при меняющемся количестве секторов.

Таблица 10.1

Число секторов	СКО
18	19.1411
30	1.9003
42	0.1320
54	0.0479

В таблице 10.2 для нескольких номеров СФП показано минимальное количество секторов многоуровневой СФП, при котором среднеквадратичное отклонение картины дифракции Фраунгофера от картины дифракции для непрерывной СФП не превышает 2%.

Таблица 10.2

Номер СФП	Минимальное число секторов
2	19
4	25
6	29
8	35
10	39

В данном разделе были получены аналитические выражения, описывающие параксиальную скалярную дифракцию Фраунгофера плоской волны на многоуровневой (квантованной) СФП, ограниченной апертурой в виде правильного многоугольника. Для нескольких номеров СФП численно получено минимальное количество секторов многоуровневой СФП, при котором среднеквадратичное отклонение картины дифракции Фраунгофера от картины дифракции для непрерывной СФП не превышает 2%.

11. ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ОГРАНИЧЕННОЙ СПИРАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛАСТИНКЕ: ПАРАКСИАЛЬНАЯ ВЕКТОРНАЯ ТЕОРИЯ

Предыдущие разделы были посвящены анализу дифракции света на спиральных оптических элементах в рамках скалярной теории дифракции. В данном разделе проводится анализ дифракции на СФП в рамках параксиальной векторной теории. В [45] численно показано, что в ряде случаев заметный вклад дает продольная составляющая электрического вектора, не учитываемая в скалярной теории. В данной работе получены аналитические выражения для продольной составляющей поля.

Для анализа распространения векторного электромагнитного поля вдоль оптической оси в большинстве случаев используются два подхода. Один заключается в вычислении дифракционного интеграла Рэля [46, 47]. Другой заключается в разложении исходного поля по плоским волнам [48]. К числу менее распространенных подходов относится, например, использование функции Вигнера [49]. Из-за трудоемкости или даже невозможности аналитического вычисления интеграла Рэля часто используют приближения. Например широко употребляется параксиальное приближение, использованное и в данной работе.

Рассмотрим дифракционный интеграл Рэля в цилиндрических координатах [46]:

$$E_x(\rho, \theta, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} E_x(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] r dr d\varphi, \quad (11.1)$$

$$E_y(\rho, \theta, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} E_y(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] r dr d\varphi, \quad (11.2)$$

$$E_z(\rho, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{k^2} \left\{ E_x(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] + \right. \\ \left. + E_y(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \right\} r dr d\varphi, \quad (11.3)$$

где

$$L^2 = z^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta), \quad (11.4)$$

E_x , E_y и E_z - декартовы проекции вектора напряженности электрического поля электромагнитной волны, (r, φ) и (ρ, θ) - полярные координаты в исходной ($z = 0$) и текущей поперечных плоскостях, z - оптическая ось, $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, λ - длина волны.

Пусть в плоскости $z = 0$ сформировано электромагнитное поле с гармонической зависимостью от угловой полярной координаты, т.е.

$$E_x(r, \varphi, 0) = A_x(r) \exp(in\varphi), \quad (11.5)$$

$$E_y(r, \varphi, 0) = A_y(r) \exp(in\varphi), \quad (11.6)$$

где n - целое число (порядок СФП).

Тогда в параксиальном приближении выражения (11.1) и (11.2) принимают вид:

$$E_x(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \frac{k}{z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \int_0^\infty A_x(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr, \quad (11.7)$$

$$E_y(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \frac{k}{z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \int_0^\infty A_y(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr, \quad (11.8)$$

$$\begin{aligned}
E_z(\rho, \theta, z) = & \frac{(-i)^n k}{2z^2} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \times \\
& \times \left\{ \exp(i\theta) \int_0^\infty [A_x(r) - iA_y(r)] \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_{n+1}\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r^2 dr - \right. \\
& - \exp(-i\theta) \int_0^\infty [A_x(r) + iA_y(r)] \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_{n-1}\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r^2 dr - \\
& \left. - 2i\rho \int_0^\infty [A_x(r) \cos\theta + A_y(r) \sin\theta] \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr \right\},
\end{aligned} \tag{11.9}$$

где $J_n(x)$ - функция Бесселя первого рода n -го порядка.

В случае, когда в плоскости $z = 0$ расположена спиральная фазовая пластинка (СФП) радиуса R n -го порядка и линза с фокусным расстоянием f , получим выражения:

$$A_x(r) \equiv A_x \operatorname{circ}\left(\frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{ikr^2}{2f}\right), \tag{11.10}$$

$$A_y(r) \equiv A_y \operatorname{circ}\left(\frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{ikr^2}{2f}\right), \tag{11.11}$$

где A_x и A_y - комплексные амплитуды плоской волны, падающей на СФП с линзой. Тогда на расстоянии z сформируется электромагнитное поле со следующими составляющими ($E_{x,y}$ - это либо E_x , либо E_y):

$$\begin{aligned}
E_{x,y}(\rho, \theta, z) = & (-i)^{n+1} \frac{kA_{x,y}}{z} \times \\
& \times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \int_0^R \exp\left[\frac{ikr^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right] J_n\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr,
\end{aligned} \tag{11.12}$$

$$\begin{aligned}
E_z(\rho, \theta, z) &= (-i)^n \frac{k}{2z^2} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \times \\
&\times \left\{ (A_x - iA_y) \exp(i\theta) \int_0^R \exp\left[\frac{ikr^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right] J_{n+1}\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r^2 dr - \right. \\
&- (A_x + iA_y) \exp(-i\theta) \int_0^R \exp\left[\frac{ikr^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right] J_{n-1}\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r^2 dr - \\
&\left. - 2i\rho(A_x \cos\theta + A_y \sin\theta) \int_0^R \exp\left[\frac{ikr^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right] J_n\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr \right\}.
\end{aligned} \tag{11.13}$$

В геометрическом фокусе линзы, т.е. при $z = f$, полученные выражения упрощаются [10]:

$$\begin{aligned}
E_{x,y}(\rho, \theta, z = f) &= (-i)^{n+1} \frac{kA_{x,y}}{f} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + in\theta + ikf\right) \int_0^R J_n\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r dr = \\
&= (-i)^{n+1} \frac{kA_{x,y}}{f} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + in\theta + ikf\right) \times \\
&\times \begin{cases} n \left[1 - J_0(y) - 2 \sum_{m=1}^{n/2-1} J_{2m}(y) \right] - y J_{n-1}(y), n = 2p, \\ n \left[\int_0^y J_0(t) dt - 2 \sum_{m=1}^{(n-1)/2} J_{2m-1}(y) \right] - y J_{n-1}(y), n = 2p+1, \end{cases}
\end{aligned} \tag{11.14}$$

где $y = kR\rho/f$.

$$\begin{aligned}
E_z(\rho, \theta, z = f) &= \frac{(-i)^n k}{2f^2} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + in\theta + ikf\right) \times \\
&\left\{ (A_x - iA_y) \exp(i\theta) \int_0^R J_{n+1}\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r^2 dr - \right. \\
&- (A_x + iA_y) \exp(-i\theta) \int_0^R J_{n-1}\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r^2 dr - \\
&\left. - 2i\rho (A_x \cos\theta + A_y \sin\theta) \int_0^R J_n\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r dr \right\}.
\end{aligned} \tag{11.15}$$

Последний интеграл в (11.15) вычисляется так же, как в (11.14). Для первых двух интегралов также можно получить аналитические выражения для четных значений порядка СФП n , так как для $p = n \pm 1$

$$\begin{aligned}
\int x^2 J_p(cx) dx &= c^{-3} (1 - p^2) \left[J_0(cx) + 2 \sum_{q=1}^{(p-3)/2} J_{2q}(cx) \right] - \\
&- c^{-1} x^2 J_{p-1}(x) - (p+1) c^{-2} x J_{p-2}(x).
\end{aligned} \tag{11.16}$$

При небольших порядках СФП получаются простые формулы. В частности, при $n = 2$:

$$\begin{aligned}
E_{x,y}(\rho, \theta, z = f) &= -\frac{2ifA_{x,y}}{k\rho^2} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + i2\theta + ikf\right) \times \\
&\times \left[J_0\left(\frac{kR\rho}{f}\right) + \frac{kR\rho}{2f} J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\right) - 1 \right],
\end{aligned} \tag{11.17}$$

$$\begin{aligned}
E_z(\rho, \theta, z=f) &= -\frac{1}{2k\rho} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + i2\theta + ikf\right) \times \\
&\times \left(-\frac{2kR^2}{f} (A_x \cos\theta + A_y \sin\theta) J_2\left(\frac{kR\rho}{f}\right) + \right. \\
&+ \left. \left[\frac{4}{\rho} (A_x - iA_y) \exp(i\theta) - \frac{2ik\rho}{f} (A_x \cos\theta + A_y \sin\theta) \right] \times \right. \\
&\times \left. \left\{ \frac{f}{k\rho} \left[2 - 2J_0\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right] - R J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right\} \right). \tag{11.18}
\end{aligned}$$

Рассмотрим два частных случая, соответствующих круговой поляризации поля в начальной плоскости.

При $A_y = -iA_x$:

$$\begin{aligned}
E_z(\rho, \theta, z) &= \frac{iA_x R}{f\rho} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + i\theta + ikf\right) \times \\
&\times \left\{ \frac{f}{kR} \left[2 - 2J_0\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right] - \rho J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\right) - iR J_2\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right\}. \tag{11.19}
\end{aligned}$$

При $A_y = iA_x$:

$$\begin{aligned}
E_z(\rho, \theta, z) &= \frac{iA_x R}{f\rho} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + i3\theta + ikf\right) \times \\
&\times \left(-iR J_2\left(\frac{kR\rho}{f}\right) + \left(1 - \frac{4f}{ik\rho^2}\right) \left\{ \frac{f}{kR} \left[2 - 2J_0\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right] - \rho J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right\} \right). \tag{11.20}
\end{aligned}$$

Вычисление амплитуды на оптической оси проводилось без использования паракиального приближения.

На оптической оси поперечные составляющие (11.14) при $n > 0$ равны нулю. Рассмотрим интеграл Рэлея для z -составляющей на оптической оси:

$$E_z(0,0,z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \left\{ E_x(r,\varphi,0) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] + \right. \\ \left. + E_y(r,\varphi,0) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \right\} dx dy, \quad (11.21)$$

где $L = (r^2 + z^2)^{1/2}$.

В случае поля в плоскости $z=0$, имеющего вид (11.5)-(11.6) и ограниченной апертуры радиуса R :

$$E_z(0,0,z) = \frac{1}{2} \int_0^R A_x(r) (\delta_{n+1} + \delta_{n-1}) \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r^2}{L} dr - \\ - \frac{i}{2} \int_0^R A_y(r) (\delta_{n+1} - \delta_{n-1}) \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r^2}{L} dr, \quad (11.22)$$

где δ_n - символ Кронекера:

$$\delta_n = \begin{cases} 0, n \neq 0, \\ 1, n = 0. \end{cases} \quad (11.23)$$

Тогда при $n \neq \pm 1$ амплитуда z -составляющей равна нулю. При $n = \pm 1$ получается, что продольная составляющая электрического поля на оптической оси отлична от нуля:

$$E_z(0,0,z) = \frac{1}{2} \int_0^R r [A_x(r) + inA_y(r)] \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r}{L} dr. \quad (11.24)$$

Если использовать вычисление дифракционного интеграла Рэлея методом прямоугольников или трапеций, то на малых расстояниях z значение продольной компоненты устремляется в бесконечность (рис. 11.1), что не имеет физического объяснения и является следствием неточных вычислений. Поэтому в данной работе использовался другой метод расчета интеграла (11.24), численно-аналитический метод.

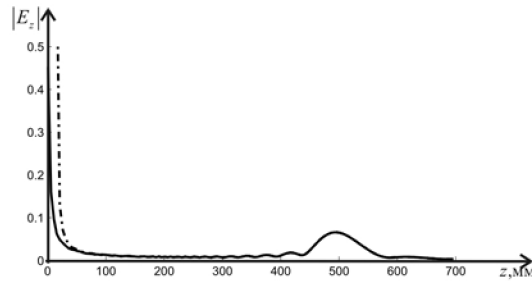


Рис. 11.1. Зависимость продольной составляющей E_z от расстояния z , рассчитанная с помощью метода прямоугольников (прерывистая линия) и численно-аналитическим методом (сплошная линия)

Разобьем интервал интегрирования $(0, R)$ на $(M-1)$ частей точками $r_m = mR/(M-1)$, $m = \overline{0, M-1}$.

Пусть функция

$$g(r) = r[A_x(r) + inA_y(r)] \quad (11.25)$$

на интервале (r_m, r_{m+1}) аппроксимируется следующим выражением:

$$g(r) \approx a_m + b_m r^2 \quad (11.26)$$

Тогда

$$E_z(0, 0, z) \approx \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-2} \int_{r_m}^{r_{m+1}} (a_m + b_m r^2) \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r}{L} dr. \quad (11.27)$$

Рассмотрим два неопределенных интеграла:

$$I_1(r) = \int \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r}{L} dr = \frac{\exp(ikL)}{L}, \quad (11.28)$$

$$I_2(r) = \int r^2 \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r}{L} dr = [L - z^2/L + 2i/k] \exp(ikL). \quad (11.29)$$

Тогда

$$E_z(0,0,z) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-2} \left[a_m I_1(r) \Big|_{r=r_m}^{r_{m+1}} + b_m I_2(r) \Big|_{r=r_m}^{r_{m+1}} \right]. \quad (11.30)$$

Коэффициенты a_m и b_m выбираются по критерию наименьшего среднеквадратичного отклонения от кусочно-линейной функции:

$$\varepsilon = \int_{r_m}^{r_{m+1}} \left\{ (a_m + b_m r^2) - \left[g_m + \frac{g_{m+1} - g_m}{r_{m+1} - r_m} (r - r_m) \right] \right\}^2 dr \rightarrow \min, \quad (11.31)$$

где $g_m = g(r_m)$.

Приравнивая нулю производные по a_m и b_m , получим:

$$\int_{r_m}^{r_{m+1}} \left\{ (a_m + b_m r^2) - [g_m + \Delta g_m (r - r_m)] \right\} dr = 0, \quad (11.32)$$

$$\int_{r_m}^{r_{m+1}} \left\{ (a_m + b_m r^2) - [g_m + \Delta g_m (r - r_m)] \right\} r^2 dr = 0, \quad (11.33)$$

где $\Delta g_m = (g_{m+1} - g_m) / (r_{m+1} - r_m)$.

Тогда

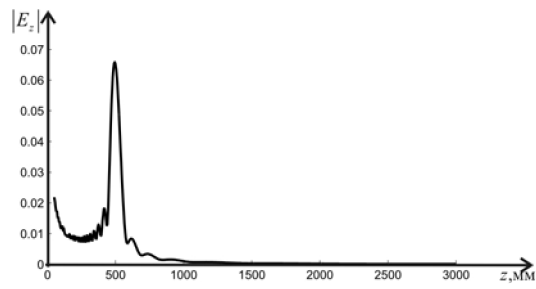
$$a_m \Delta_m^1 r + b_m \Delta_m^3 r = (g_m - \Delta g_m r_m) \Delta_m^1 r + \Delta g_m \Delta_m^2 r, \quad (11.34)$$

$$a_m \Delta_m^3 r + b_m \Delta_m^5 r = (g_m - \Delta g_m r_m) \Delta_m^3 r + \Delta g_m \Delta_m^4 r, \quad (11.35)$$

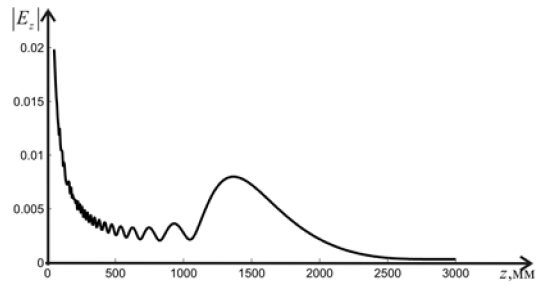
где $\Delta_m^k r = (r_{m+1}^k - r_m^k) / k$.

Далее коэффициенты могут быть легко определены, например, с помощью правила Крамера.

На рис. 11.2 показано распределение амплитуды z -составляющей электромагнитного поля вдоль оптической оси. Параметры расчета: длина волны: $\lambda = 514.5$ нм, радиус апертуры: $R = 2$ мм, порядок СФП: $n = 1$.



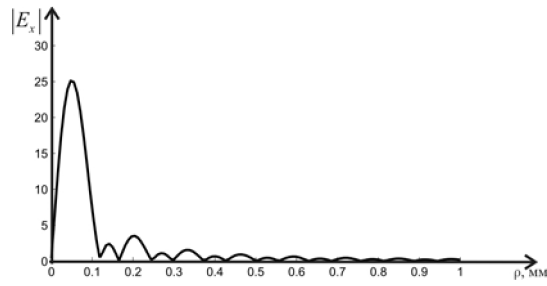
а



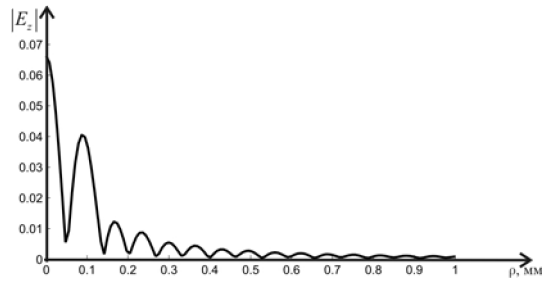
б

Рис. 11.2. Значение модуля z -компоненты на оптической оси, рассчитанное для $f = 500$ мм (а) и $f = 1500$ мм (б)

На рис. 11.3 и 11.4 показаны распределение амплитуды x - и z -составляющих электромагнитного поля вдоль радиальной координаты. Параметры расчета: длина волны: $\lambda = 514.5$ нм, фокусное расстояние линзы: $f = 500$ мм, порядок СФП: $n = 1$.

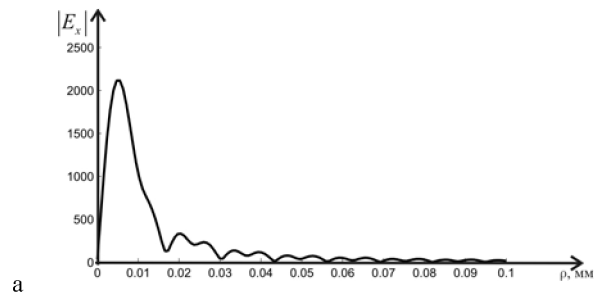


а



б

Рис. 11.3. Значение модуля амплитуды в плоскости $z = 500$ мм при радиусе апертуры 2 мм. x -составляющая (а) и z - составляющая (б)



а

Рис. 11.4. Значение модуля амплитуды в плоскости $z = 500$ мм при радиусе апертуры 20 мм. x -составляющая (а) и z - составляющая (б) (см. также с. 139)

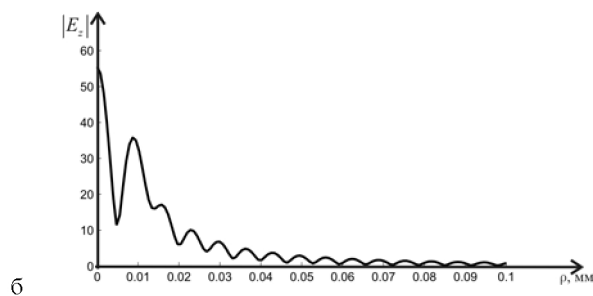


Рис. 11.4. Окончание

Из рис. 11.4 видно, что z -составляющая амплитуды может составлять несколько процентов, поэтому в ряде случаев имеет смысл учитывать ее наличие даже в параксиальном случае.

В этом разделе были получены аналитические выражения, описывающие параксиальную векторную дифракцию ограниченной плоской волны на СФП. Все три компоненты электрического поля E_x , E_y и E_z представлены в виде конечных сумм функций Бесселя. Показано, что при $n = \pm 1$ продольная компонента электрического поля E_z не равна нулю на оптической оси. Численно также показано, что в случае параксиальной дифракции продольная составляющая электрического вектора электромагнитной волны может давать вклад величиной в несколько процентов от поперечной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном пособии в рамках скалярной теории дифракции рассмотрены основные типы оптических вихрей и их формирование с помощью дифракционных оптических элементов:

- Рассмотрена дифракция неограниченной плоской волны на спиральной фазовой пластинке. Комплексная амплитуда такого «чистого» оптического вихря пропорциональна разности двух функций Бесселя первого рода $[(n+1)/2]$ - и $[(n-1)/2]$ -го порядков.
- Рассмотрена дифракция Фраунгофера гауссового пучка на спиральной фазовой пластинке. Комплексная амплитуда такого гауссового вихря пропорциональна разности двух функций Бесселя второго рода (модифицированных) также $[(n+1)/2]$ - и $[(n-1)/2]$ -го порядков.
- Рассмотрена дифракция ограниченной плоской волны на спиральной фазовой пластинке. Комплексная амплитуда ограниченного плоского вихря пропорциональна гипергеометрической функции.
- Рассмотрена дифракция ограниченной плоской волны на спиральном аксиконе. Комплексная амплитуда ограниченного конического вихря пропорциональна ряду из функций Бесселя.
- Рассмотрена дифракция гауссового пучка на спиральном аксиконе. Комплексная амплитуда гауссова конического вихря пропорциональна ряду из функций Куммера.
- Описано распространение гипергеометрических мод в свободном пространстве. Комплексная амплитуда гипергеометрических мод пропорциональна функции Куммера.

- Исследованы эллиптические пучки ЛГ. Комплексная амплитуда эллиптических вихрей ЛГ пропорциональна ряду из произведений двух функций Бесселя целого порядка.
- Описано распространение простых оптических вихрей. Комплексная амплитуда таких простых вихрей пропорциональна функции Бесселя первого рода целого порядка.
- Получены аналитические выражения, описывающие параксиальную скалярную дифракцию Фраунгофера плоской волны на многоуровневой (квантованной) СФП, ограниченной апертурой в виде правильного многоугольника.
- Для нескольких номеров СФП численно получено минимальное количество секторов многоуровневой СФП, при котором среднеквадратичное отклонение картины дифракции Фраунгофера от картины дифракции для непрерывной СФП не превышает 2%.
- Получены аналитические выражения, описывающие параксиальную векторную дифракцию ограниченной плоской волны на СФП. Все три компоненты электрического поля представлены в виде конечных сумм функций Бесселя.
- Показано, что при $n = \pm 1$ продольная компонента электрического поля не равна нулю на оптической оси. Численно также показано, что в случае параксиальной дифракции продольная составляющая электрического вектора электромагнитной волны может давать вклад величиной в несколько процентов от поперечной.

СПИСОК СПЕЦИАЛЬНЫХ ТЕРМИНОВ

- Дифракционный оптический элемент (ДОЭ)
- Скалярная теория дифракции
- Спиральная фазовая пластинка
- Конический аксикон
- Гауссовый пучок
- Комплексная амплитуда светового поля
- Дифракция Френеля
- Дальняя зона дифракции
- Плоская волна
- Гауссов пучок
- Гипергеометрическая функция
- Конфлуентная функция
- Функция Куммера
- Гипергеометрическая мода
- Эллиптический лазерный пучок Лагерра-Гаусса

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое скалярная теория дифракции?
2. Какая дифракция описывается с помощью преобразования Френеля?
3. Какая дифракция описывается с помощью преобразования Фурье?
4. С помощью каких оптических элементов формируются вихревые лазерные пучки?
5. Какие известны примеры применения вихревых лазерных пучков?
6. Какие известны основные виды вихревых лазерных пучков?
7. Какова функция комплексного пропускания спиральной фазовой пластинки?
8. Какова функция комплексного пропускания спирального аксикона?
9. Какая интенсивность света формируется на оптической оси после прохождении через спиральный оптический элемент?
10. Что такое гипергеометрическая функция?
11. Что такое конфлюэнтная функция?
12. Что такое гипергеометрическая мода?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев - М.:Наука, 1983.
2. **Bazhenov, V.Yu.** Screw dislocations in light wavefronts / V.Yu. Bazhenov, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // J. Mod. Opt., 1992.- vol.39, Issue 5.- p.985-990.
3. Optics of light beams with screw dislocations / [I.V. Basistiy et al] // Opt. Comm., 1993.- vol.103.- p.422-428.
4. Handbook of mathematical function / ed by M. Abramovitz, I.A. Stegun - NBS, Appl. Math. Ser. 55, 1964.
5. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / [V.V. Kotlyar et al] // J. Opt. Soc. Am. A., 2005.- vol.22, Issue 5.- p.849-861.
6. **Saks, Z.S.** Holographic formation of optical-vortex filaments / Z.S. Saks, D. Rozes, G.A. Swatzlander // J. Opt. Soc. Am. B., 1998.- vol.15.- p.2226-2234.
7. **Teng, S.** Analytical expression of the diffraction of a circular aperture / S. Teng, L. Liu, D. Liu // Optik, 2005.- vol.116.- p.568-572.
8. Diffraction of a plane, finite-radius wave by a spiral phase plate / [V.V. Kotlyar et al] // Opt. Lett., 2006.- vol.31, Issue 11.- p.1597-1599.
9. Diffraction of conic and Gaussian beams by a spiral phase plate / [V.V. Kotlyar et al] // Appl. Opt., 2006.- vol.45, Issue 12.- p.2656-2665.
10. Дифракция плоской волны конечного радиуса на спиральном акси-коне и спиральной фазовой пластинке: сравнение / [В.В. Котляр и др.] // Компьютерная оптика.- 2006.- Вып.30.- С.36-43.
11. **Miller, W.** Symmetry and Separation of Variables / W. Miller, Jr. - Addison-Wesley Pub. Com., MA, 1977.
12. **Durnin, J.** Diffraction-free beams, / J. Durnin, J.J. Jr Miceli, J.H. Eberly / Phys. Rev. Lett., 1987.- vol.58.- p.1499-1501.
13. **Sigman, A.E.**, Lasers / A.E. Sigman - University Science, Mill Valley, Calif, 1986.
14. **Bandres, M.A.** Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cedra // Opt. Lett., 2004.- vol.29, Issue 1.- p.44-46.

15. **Gutierrez-Vega, J.C.** Helmholtz-Gauss waves / J.C. Gutierrez-Vega, M.A. Bandres // J. Opt. Soc. Am A., 2005.- vol.22, Issue 2.- p.289-298.
16. **Bandres, M.A.** Vector Helmholtz-Gauss and vector Laplace-Gauss beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cedra // Opt. Lett., 2005.- vol.30, Issue 16.- p.2155-2157.
17. **Bandres, M.A.** Ince-Gaussian beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Opt. Lett., 2004.- vol.29, Issue 2.- p.144-146.
18. **Bandres, M.A.** Elegant Ince-Gaussian beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Opt. Lett., 2004.- vol.29, Issue 15.- p.1724-1726.
19. **Abramochkin, E.G.** Generalized Gaussian beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // J. Opt. A: Pure Appl. Opt., 2004.- vol.6.- p.5157-5161.
20. **Schwarz, U.T.** Observation of Ince-Gaussian modes in stable resonators / U.T. Schwarz, M.A. Bandres, J. Gutierrez-Vega // Opt. Lett., 2004.- vol.29, Issue 16.- p.1870-1872.
21. Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquid-crystal display / [J.B. Bentley et al] // Opt. Lett., 2006.- vol.31, Issue 5.- p.649-651.
22. **Cai, Y.** Decentered elliptical Gaussian beam / Y. Cai, Q. Lin // Appl. Opt., 2002.- vol.41, Issue 21.- p.4336-4340.
23. **Cai, Y.** Decentered elliptical Hermite-Gaussian beam / Y. Cai, Q. Lin // J. Opt. Soc. Am A., 2003.- vol.20, Issue 6.- p.1111-1119.
24. **Cai, Y.** A partially coherent elliptical flattened Gaussian beam and its propagation / Y. Cai, Q. Lin // J. Opt. A: Pure and Appl. Opt., 2004.- vol.6.- p.1061-1066.
25. **Mitreska, Z.** Diffraction of elliptical Gaussian light beams on rectangular profile grating of transmittance / Z. Mitreska // Pure Appl. Opt., 1994.- vol.3.- p.995-1004.
26. **Seshadri, S.** Basic elliptical Gaussian wave and beam in a uniaxial crystal / S. Seshadri // J. Opt. Soc. Am A., 2003.- vol.20, Issue 9.- p.1818-1826.
27. CW second harmonic generation with elliptical Gaussian beam / [A. Steinbach et al] // Opt. Commun., 1996.- vol.123.- p.207-214.
28. **Cai, Y.** Light beams with elliptical flat-topped profiles / Y. Cai, Q. Lin // J. Opt. A: Pure and Appl. Opt., 2004.- vol.6.- p.390-395.

29. **Cai, Y.** Hollow elliptical Gaussian beam and its propagation through aligned and misaligned paraxial optical systems / Y. Cai, Q. Lin // *J. Opt. Soc. Am A.*, 2004.- vol.21, Issue 6.- p.1058-1065.
30. **Bandres, M.A.** Ince-Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators / M.A. Bandres, J. Gutierrez-Vega // *J. Opt. Soc. Am A.*, 2004.- vol.21, Issue 5.- p.873-880.
31. **Bandres, M.A.** Higher-order complex source for elegant Laguerre-Gaussian waves / M.A. Bandres, J. Gutierrez-Vega // *Opt. Lett.*, 2004.- vol.29, Issue 19.- p.2213-2215.
32. **Bin, Z.** Diffraction property of an axicon in oblique illumination / Z. Bin, L. Zhu // *Appl. Opt.*, 1998.- vol.37, Issue 13.- p.2563-2568.
33. **Thaning, A.** Diffractive axicons in oblique illumination: analysis and experiments and comparison with elliptical axicons / A. Thaning, Z. Jaroszewicz, A.T. Friberg // *Appl. Opt.*, 2003.- vol.42, Issue 1.- p.9.
34. Astigmatic Bessel laser beams / [S.N. Khonina et al] // *Journal of Modern optics*, 2004.- vol.51, Issue 5, 677–686.
35. Variable-radius focused optical vortex with suppressed sidelobes / [J. Lin et al] // *Opt. Lett.*, 2006.- vol.31, Issue 11.- p.1600-1602.
36. Efficient formation of pure helical laser beams / [R. Oron et al] // *Opt. Commun.*, 2000.- vol.182.- p.205-208.
37. Observation of an x-ray vortex / [A.G Peele et al] // *Opt. Lett.*, 2002.- vol.27.- p.1752-1754.
38. Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses / [K. Sueda et al] // *Opt. Express*, 2004.- vol. 12, Issue 15.- p.3548-3553.
39. Dynamic switching of optical vortices with dynamic gamma-correction liquid crystal spiral phase plate / [Q. Wang et al] // *Opt. Express*, 2005.- vol. 13, Issue 25.- p.10285-10291.
40. **Swartzlander, G.A.** Broadband nulling of a vortex phase mask / G.A. Swartzlander, Jr. // *Opt. Lett.*, 2005.- vol.30, Issue 21.- p.2876-2878.
41. **Swartzlander, G.A.** Achromatic optical vortex lens / G.A. Swartzlander, Jr. // *Opt. Lett.*, 2006.- vol.31, Issue 13.- p.2042-2044.
42. Optical vortices produced with a nonspiral phase plate / [G.-H. Kim et al] // *Appl. Opt.*, 1997.- vol.36, Issue 33.- p.8614-8621.

43. **Saga, N.** New line integral expressions for Fraunhofer diffraction / N. Saga // Optics Communications, 1987.- vol.64, Issue 1.- p.4-8.
44. Diffraction of a finite-radius plane wave and a Gaussian beam by a helical axicon and a spiral phase plate / [V.V. Kotlyar et al] // J. Opt. Soc. Am. A., 2007.- vol.24.- p.1955-1964.
45. **Ganic, D.** Focusing of doughnut laser beams by a high numerical-aperture objective in free space / D. Ganic, X. Gan, M. Gu // Opt. Express, 2003.- vol.11.- p.2747-2752.
46. **Zhang, Y.** Vector propagation of radially polarized Gaussian beams diffracted by an axicon / Y. Zhang, L. Wang, C. Zheng // J. Opt. Soc. Am. A, 2005.- vol.22. p.2542-2546.
47. **Deng, D.** Nonparaxial propagation of radially polarized light beams / D. Deng // J. Opt. Soc. Am. B, 2006.- vol.23.- p.1228-1234.
48. **Agrawal, G.P.** Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation / G.P. Agrawal, D.N. Pattanayak // J. Opt. Soc. Am, 1979.- vol.69.- p.575-578.
49. **Duan, K.** Application of the Winer distribution function to complex-argument Hermite-and Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation / K. Duan, B. Lu // Opt. Las. Tech, 2007.- vol.39.- p.110-115.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ВЫВОД МАТЕМАТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

1. Для получения условия максимума интенсивности светового поля в разделе 1 получим производную от следующей функции:

$$I_n(x) = x \left[J_{\frac{n-1}{2}}^2(x) + J_{\frac{n+1}{2}}^2(x) \right]. \quad (\text{A.1})$$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} I_n(x) &= \left\{ \frac{d}{dx} J_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \right\} = J_{\frac{n-1}{2}}^2(x) + J_{\frac{n+1}{2}}^2(x) + \\ & x \left\{ 2J_{\frac{n-1}{2}}(x) \frac{1}{2} \left[J_{\frac{n-3}{2}}(x) - J_{\frac{n+1}{2}}(x) \right] + \right. \\ & \left. + 2J_{\frac{n+1}{2}}(x) \frac{1}{2} \left[J_{\frac{n-1}{2}}(x) - J_{\frac{n+3}{2}}(x) \right] \right\} = \\ & = J_{\frac{n-1}{2}}^2(x) + J_{\frac{n+1}{2}}^2(x) + x \left[J_{\frac{n-1}{2}}(x) J_{\frac{n-3}{2}}(x) - J_{\frac{n+1}{2}}(x) J_{\frac{n+3}{2}}(x) \right] = \\ & = J_{\frac{n-1}{2}}(x) \left[J_{\frac{n-1}{2}}(x) + x J_{\frac{n-3}{2}}(x) \right] + J_{\frac{n+1}{2}}(x) \left[J_{\frac{n+1}{2}}(x) - x J_{\frac{n+3}{2}}(x) \right] = \\ & = \left\{ 2n J_n(x) = x [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \right\} = \\ & = J_{\frac{n-1}{2}}(x) \left[J_{\frac{n-1}{2}}(x) + 2 \frac{n-1}{2} J_{\frac{n-1}{2}}(x) - x J_{\frac{n+1}{2}}(x) \right] + \\ & + J_{\frac{n+1}{2}}(x) \left[J_{\frac{n+1}{2}}(x) - 2 \frac{n+1}{2} J_{\frac{n+1}{2}}(x) + x J_{\frac{n-1}{2}}(x) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= J_{\frac{n-1}{2}}(x) \left[nJ_{\frac{n-1}{2}}(x) - xJ_{\frac{n+1}{2}}(x) \right] + J_{\frac{n+1}{2}}(x) \left[-nJ_{\frac{n+1}{2}}(x) + xJ_{\frac{n-1}{2}}(x) \right] = \\
&= n \left[J_{\frac{n-1}{2}}^2(x) - J_{\frac{n+1}{2}}^2(x) \right]. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

2. Условия экстремума функции

$$f(x) = x \exp(-2x) \left[I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x) \right]^2 \tag{A.3}$$

для получения условия максимума интенсивности светового поля в разделе 2.

Решение:

Получим условия экстремумов функции $f(x) = x \exp(ax) g(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x) &= \exp(ax) g(x) + ax \exp(ax) g(x) + x \exp(ax) g'(x) = 0 \sim \\
&\sim (1 + ax) g(x) + x g'(x) = 0.
\end{aligned}$$

Вспомогательные соотношения:

$$\frac{d}{dz} I_\nu(z) = \frac{1}{2} \left[I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) \right];$$

$$\frac{2\nu}{z} I_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&(1 - 2x) \left[I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x) \right]^2 + \\
&+ 2x \left[I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x) \right] \left[I'_{(n-1)/2}(x) - I'_{(n+1)/2}(x) \right] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1-2x)\left[I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x)\right] + \\
& + x\left[I_{(n-3)/2}(x) + I_{(n+1)/2}(x) - I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+3)/2}(x)\right] = 0; \\
& I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x) + \\
& + x\left[I_{(n-3)/2}(x) + 3I_{(n+1)/2}(x) - 3I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+3)/2}(x)\right] = 0; \\
& I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x) + \\
& + x\left[I_{(n-3)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x) + 4I_{(n+1)/2}(x) + \right. \\
& \left. + I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+3)/2}(x) - 4I_{(n-1)/2}(x)\right] = 0; \\
& I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x) + \\
& + x\left[\frac{n-1}{x}I_{(n-1)/2}(x) + 4I_{(n+1)/2}(x) + \frac{n+1}{x}I_{(n+1)/2}(x) - 4I_{(n-1)/2}(x)\right] = 0; \\
& (n-4x)I_{(n-1)/2}(x) + (n+4x)I_{(n+1)/2}(x) = 0. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

3. Докажем следующее свойство функций Бесселя:

$$\exp(ix \cos \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \exp(-im\varphi) J_m(x), \tag{A.5}$$

Доказательство:

Получим выражение для суммы комплексных экспонент:

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux) du = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_m^{m+1} \exp(iux) du = \\
&= \frac{1}{2\pi ix} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(imx) [\exp(ix) - 1].
\end{aligned}$$

Тогда

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(imx) = \frac{2\pi i x \delta(x)}{\exp(ix) - 1} = 2\pi \delta(x),$$

так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ix}{\exp(ix) - 1} = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \exp(-im\varphi) J_m(x) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \exp(-im\varphi) \frac{(-i)^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(imt) \exp(ix \cos t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp[im(t - \varphi)] \exp(ix \cos t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi \delta(t - \varphi) \exp(ix \cos t) dt = \\ &= \exp(ix \cos \varphi). \end{aligned}$$

4. Покажем, что в выражении для дифракции Фраунгофера плоской волны на многоуровневой СФП:

$$E(\rho, \theta) = \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{\cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} +$$

$$+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\frac{\pi}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \left[\frac{\exp(i\Psi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)}$$

не возникает неопределенностей.

Доказательство:

При $\theta \rightarrow \varphi_q$ и при нечетных P вынесем из суммы слагаемые, в которых знаменатель обращается в нуль:

$$E(\rho, \theta) = \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{\cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} +$$

$$+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\frac{\pi}{P} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q \\ p \neq q+1}}^{P-1} \left[\frac{\exp(i\Psi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} +$$

$$+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\frac{\pi}{P} \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q} \left[\frac{\exp(i\Psi_q)}{\sin(\varphi_q - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{q-1})}{\sin(\varphi_{q-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} +$$

$$+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\frac{\pi}{P} \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q} \left[\frac{\exp(i\Psi_{q+1})}{\sin(\varphi_{q+1} - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_q)}{\sin(\varphi_q - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_{q+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_{q+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} =$$

$$= \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{\cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} +$$

$$+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\left(\frac{\pi}{P}\right) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q \\ p \neq q+1}}^{P-1} \left[\frac{\exp(i\Psi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\left(\frac{\pi}{P}\right) \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q} \left\{ \frac{\exp(i\Psi_q) \exp\left[-i \frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\sin(\varphi_q - \theta) \cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} \right\} - \\
& - \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\left(\frac{\pi}{P}\right) \frac{\exp(i\Psi_{q-1}) \exp\left[-i \frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\sin(\varphi_{q-1} - \theta) \cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
& + \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\left(\frac{\pi}{P}\right) \frac{\exp(i\Psi_{q+1}) \exp\left[-i \frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_{q+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\sin(\varphi_{q+1} - \theta) \cos\left(\varphi_{q+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} - \\
& - \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\left(\frac{\pi}{P}\right) \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q} \left\{ \frac{\exp(i\Psi_q) \exp\left[-i \frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_{q+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\sin(\varphi_q - \theta) \cos\left(\varphi_{q+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} \right\} = \\
& = \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{p-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{\cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
& + \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\left(\frac{\pi}{P}\right) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q \\ p \neq q+1}}^{p-1} \left[\frac{\exp(i\Psi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i \frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
& + \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\left(\frac{\pi}{P}\right) \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q} \frac{\exp(i\Psi_q)}{\sin(\varphi_q - \theta)} \left\{ \frac{\exp\left[-i \frac{kR\rho}{f} \cos\left(-\frac{\pi}{P}\right)\right]}{\cos\left(-\frac{\pi}{P}\right)} - \frac{\exp\left[-i \frac{kR\rho}{f} \cos\left(+\frac{\pi}{P}\right)\right]}{\cos\left(+\frac{\pi}{P}\right)} \right\} - \\
& - \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\left(\frac{\pi}{P}\right) \frac{\exp(i\Psi_{q-1}) \exp\left[-i \frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\sin(\varphi_{q-1} - \theta) \cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
& + \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\left(\frac{\pi}{P}\right) \frac{\exp(i\Psi_{q+1}) \exp\left[-i \frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_{q+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\sin(\varphi_{q+1} - \theta) \cos\left(\varphi_{q+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right)}.
\end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках точно равно нулю, в то время как множитель перед скобками только стремится к бесконечности,

поэтому весь предел равен нулю и остаются слагаемые, знаменатели в которых не стремятся к нулю.

Если P четно, то в сумме к нулю также стремятся знаменатели слагаемых с номерами $p = q + P/2$ и $p = q + 1 + P/2$. Для этих слагаемых аналогично можно показать, что они конечны по величине.

При $\theta \rightarrow \varphi_{q-1}$ рассуждения аналогичны.

При $\theta \rightarrow \varphi_q - \frac{\pi}{P} \pm \frac{\pi}{2}$ и нечетных P :

$$\begin{aligned}
E(\rho, \theta) &= \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q \\ p \neq q-1}}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{\cos\left(\varphi_{p+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
&+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q - \frac{\pi}{P} \pm \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(i\Psi_q)}{\cos\left(\varphi_q + \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
&+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q - \frac{\pi}{P} \pm \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(i\Psi_{q-1})}{\cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_{q-1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
&+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\frac{\pi}{P} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^{P-1} \left[\frac{\exp(i\Psi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
&+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\frac{\pi}{P} \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q - \frac{\pi}{P} \pm \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\exp(i\Psi_q)}{\sin(\varphi_q - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{q-1})}{\sin(\varphi_{q-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q \\ p \neq q-1}}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{\cos\left(\varphi_{p+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
&+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\frac{\pi}{P} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^{P-1} \left[\frac{\exp(i\Psi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} \pm \\
&\pm \frac{if}{2\pi k \rho^2} \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q} \frac{\exp(i\Psi_q)}{\cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} \mp \frac{if}{2\pi k \rho^2} \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q} \frac{\exp(i\Psi_{q-1})}{\cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} \mp \\
&\mp \frac{if}{2\pi k \rho^2} \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q} \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\mp\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} \left[\exp(i\Psi_q) - \exp(i\Psi_{q-1}) \right] = \\
&= \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q \\ p \neq q-1}}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{\cos\left(\varphi_{p+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
&+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\frac{\pi}{P} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^{P-1} \left[\frac{\exp(i\Psi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} \pm \\
&\pm \frac{if}{2\pi k \rho^2} \lim_{\theta \rightarrow \varphi_q} \frac{\exp(i\Psi_q)}{\cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} - \frac{\exp(i\Psi_{q-1})}{\cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} - \frac{\exp(i\Psi_q) - \exp(i\Psi_{q-1})}{\cos\left(\varphi_q - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} \Big] = \\
&= \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q \\ p \neq q-1}}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{\cos\left(\varphi_{p+1} - \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
&+ \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\frac{\pi}{P} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^{P-1} \left[\frac{\exp(i\Psi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)}.
\end{aligned}$$

Если P чётно, то в сумме к нулю также стремятся знаменатели слагаемых с номерами $p = q + P/2$ и $p = q - 1 + P/2$. Для этих слагаемых аналогично можно показать, что они конечны по величине.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АПЕРТУРЫ

Из математического анализа известна формула Грина, позволяющая связывать интеграл по площади с интегралом по контуру вокруг этой площади:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy .$$

При $Q(x, y) \equiv 0$ получим:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_L P dx .$$

Если определить функцию $P(x, y)$ как

$$P(x, y) = \frac{\exp \left[-i \frac{k}{f} (ux + vy) \right]}{-i \frac{k}{f} v} ,$$

то

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \exp \left[-i \frac{k}{f} (ux + vy) \right] .$$

Следовательно

$$\iint_{\Omega} \exp \left[-i \frac{k}{f} (ux + vy) \right] dx dy = \frac{-if}{kv} \oint_L \exp \left[-i \frac{k}{f} (ux + vy) \right] dx .$$

Если Ω - многоугольник, заданный координатами своих вершин $A_p(x_p, y_p)$, $p = \overline{0, P-1}$, где P - число вершин, а стороны, соединяющие p -ю и $(p+1)$ -ю вершины, заданы уравнениями:

$$y = a_p x + b_p ,$$

то

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \exp \left[-i \frac{k}{f} (ux + vy) \right] dx dy &= \frac{-if}{kv} \sum_{p=0}^{P-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \exp \left\{ -i \frac{k}{f} [ux + v(a_p x + b_p)] \right\} dx = \\
&= \frac{-if}{kv} \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp \left\{ -i \frac{k}{f} [(u + va_p)x + vb_p] \right\}}{-i \frac{k}{f} (u + va_p)} \Bigg|_{x=x_p}^{x_{p+1}} = \\
&= \frac{f^2}{k^2 v} \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp \left\{ -i \frac{k}{f} [(u + va_p)x_{p+1} + vb_p] \right\} - \exp \left\{ -i \frac{k}{f} [(u + va_p)x_p + vb_p] \right\}}{u + va_p} = \\
&= \frac{f^2}{k^2 v} \left\{ \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp \left[-i \frac{k}{f} (ux_{p+1} + vy_{p+1}) \right]}{u + va_p} - \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp \left[-i \frac{k}{f} (ux_p + vy_p) \right]}{u + va_p} \right\}.
\end{aligned}$$

Так как суммирование проводится по всем индексам p , в первой сумме можно сделать замену $p \rightarrow p-1$:

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \exp \left[-i \frac{k}{f} (ux + vy) \right] dx dy &= \\
&= \frac{f^2}{k^2 v} \left\{ \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp \left[-i \frac{k}{f} (ux_p + vy_p) \right]}{u + va_{p-1}} - \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp \left[-i \frac{k}{f} (ux_p + vy_p) \right]}{u + va_p} \right\} = \\
&= \frac{f^2}{k^2 v} \sum_{p=0}^{P-1} \left(\frac{1}{u + va_{p-1}} - \frac{1}{u + va_p} \right) \exp \left[-i \frac{k}{f} (ux_p + vy_p) \right] = \\
&= \frac{f^2}{k^2} \sum_{p=0}^{P-1} \frac{a_n - a_{n-1}}{(u + va_{p-1})(u + va_p)} \exp \left[-i \frac{k}{f} (ux_p + vy_p) \right].
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$a_p = \frac{y_{p+1} - y_p}{x_{p+1} - x_p},$$

получим выражение для дифракции Фраунгофера на полиномиальной апертуре:

$$\begin{aligned} & -\frac{ik}{2\pi f} \iint_{\Omega} \exp\left[-i\frac{k}{f}(ux + vy)\right] dx dy = \\ & = -\frac{if}{2\pi k} \sum_{p=0}^{P-1} \frac{(y_{p+1} - y_p)(x_p - x_{p-1}) - (y_p - y_{p-1})(x_{p+1} - x_p)}{\left[u(x_p - x_{p-1}) + v(y_p - y_{p-1})\right] \left[u(x_{p+1} - x_p) + v(y_{p+1} - y_p)\right]} \times \\ & \times \exp\left[-i\frac{k}{f}(ux_p + vy_p)\right]. \end{aligned}$$

Учебное издание

Котляр Виктор Викторович
Хонина Светлана Николаевна,
Ковалев Алексей Андреевич

ВИХРЕВЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ

Учебное пособие

Редакторская обработка
Компьютерная верстка

Подписано в печать _____ г. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ.л. 10,0

Тираж 120 экз. Заказ _____. ИП-84/2007

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.