

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

В. Л. БАЛАКИН, Т.А. БАЯНДИНА

Возмущённое движение летательных аппаратов
Электронный курс лекций

САМАРА

2013

УДК 629.78 (075)

ББК 39.6я7

Б 20

Авторы: Балакин Виктор Леонидович, Баяндина Тамара Александровна

Компьютерная вёрстка Т.А. Баяндина

Балакин В.Л., Баяндина Т.А. Возмущённое движение летательных аппаратов [Электронный ресурс] : электрон. курс лекций / В.Л. Балакин, Т.А. Баяндина; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва (Нац. исслед. ун-т). - Электрон. текстовые и граф. дан. (1,0 Мбайт). - Самара, 2013. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM). - Систем. требования: ПК Pentium; Windows 98 или выше.

Излагается конспект лекций по дисциплине «Возмущённое движение летательных аппаратов» по дистанционной форме обучения, который выполнен на основе соответствующей рабочей программы.

Данный научно – образовательный контент разработан в обеспечение учебной подготовки магистров факультета летательных аппаратов по направлению 161100.68 – Системы управления движением и навигация по мероприятиям блока 1 «Совершенствование образовательной деятельности» Программы развития Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва».

Подготовлено на кафедре космического машиностроения.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

Предисловие

В предлагаемом курсе лекций рассматриваются некоторые вопросы, связанные с возмущённым движением летательных аппаратов.

Разнообразие существующих и разрабатываемых летательных аппаратов делает невозможным сколько-нибудь полное изложение данного вопроса в одном каком-либо учебнике, а тем более в курсе лекций.

Поэтому рассматривается только возмущённое движение ракет.

За основу излагаемого материала взято 4-е переработанное и дополненное издание учебника А.А. Дмитриевского, Л.Н. Лысенко «Внешняя баллистика» [1]. Такой выбор обусловлен тем, что курсы лекций по дисциплинам «Модели движения летательных аппаратов» основаны на данном учебнике.

Поэтому курс лекций определён материалом учебника с сохранением обозначений и математических соотношений последнего. Это облегчит студентам пользование учебником при необходимости пользования учебником.

Профессор, доктор технических наук Балакин В.Л.

Доцент, кандидат технических наук Баяндина Т.А.

1 Поправочные формулы внешней баллистики и расчёт возмущённых траекторий

Траекторию движения летательного аппарата (ЛА), рассчитанную при "нормальных" значениях, называют опорной или невозмущённой.

Для оценки влияния на траекторию какого-либо фактора, ранее не рассматриваемого, необходимо составить новую систему дифференциальных уравнений, включающую интересующую нас величину. Во многих случаях влияние возмущающих факторов можно учитывать, не составляя новые дифференциальные уравнения. Проще всего это можно сделать тогда, когда интересующий нас фактор уже учтен в основных дифференциальных уравнениях, и необходимо установить влияние его изменения на результаты движения. Если исследуемый параметр изменяется существенно, то влияние этого изменения следует находить, решая основную систему дифференциальных уравнений при новых, изменённых данных. Сравнение результатов решений, полученных при изменённых и "нормальных" данных, даёт значение искомого отклонения.

В некоторых случаях оказывается возможным внести в результаты решения поправки на влияние факторов, не содержащихся в основной системе дифференциальных уравнений, не составляя новую систему уравнений, включающую интересующую нас величину.

В практике, как правило, приходится встречаться с небольшими отклонениями определяющих параметров от их нормальных значений. В большинстве случаев малые отклонения параметров приводят к малым изменениям элементов траектории, что позволяет устанавливать влияние возмущающих факторов на характеристики невозмущённой траектории с помощью различных упрощённых методов и зависимостей.

1.1 Основные положения теории поправок. Понятие поправки

Поправками называют взятые с обратным знаком изменения параметров движения или элементов траектории, соответствующие отклонениям определяющих её факторов. Поправки, как правило, вводят в параметры движения центра масс ЛА для любой фиксированной точки траектории.

На рисунке 1.1 показаны активные участки невозмущённой 1 и возмущённой 2 траекторий неуправляемого ЛА. Изменения параметров, соответствующие моменту конца работы двигателя, обусловлены отклонением какого-либо определяющего фактора или группы факторов: δx_k - изменение координаты x_k , вызванное реальными условиями; δy_k - изменение

координаты y_k ; δV_k — изменение скорости движения центра масс ЛА; δt_k - изменение времени работы двигателя и т.д.

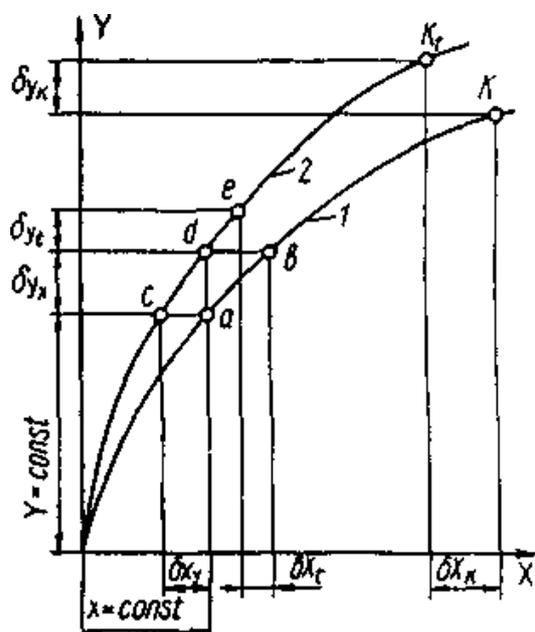


Рисунок 1.1 - Графики изменения параметров траектории движения центра масс ЛА в зависимости от изменения определяющего параметра:

1 — невозмущённая траектория; 2 — возмущённая траектория

Изменения параметров могут также определяться для точки, заданной какой-либо характеристикой движения (временем, скоростью, абсциссой, ординатой и пр.), одинаковой для основной и возмущённой траекторий. Например, точке b невозмущённой траектории будет соответствовать точка e траектории возмущённого движения, взятая для того же момента времени t , что и точка b . При этом возмущениями для траектории в точке b будут величины δx_t , δy_t , δV_t и т.д. При задании условия $y = const$ точке a соответствует точка c , и для траектории в точке a получим возмущения δx_y , δy_y , δV_y .

Если принять условие $x = const$, то точке a будет соответствовать точка d , и изменения элементов траектории в точке a равны δy_x , δV_x , δt_x и т.д. При расчёте движения ЛА поправки вносят в начальные значения, рассчитанные при нормальных условиях.

1.2 Основная формула теории поправок

В общем виде для элемента траектории или характеристики движения можно написать

$$A = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (1.1)$$

где A – элемент траектории или характеристика движения; ξ_i - определяющий параметр.

В соответствии с общей теорией разложения функции в ряд Тейлора, число членов зависит от требуемой точности расчёта. Чаще всего при решении практических задач теории поправок удерживают линейные члены разложения. Полученная при этом формула соответствует формуле полного дифференциала функциональной зависимости (1.1). Если предположить, что параметры, объединённые функциональной зависимостью (1.1), не зависят друг от друга, т.е. удовлетворяют принципу суперпозиции, и в формуле полного дифференциала бесконечно малые приращения заменить конечно малыми, то можно получить

$$\delta A = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \delta \xi_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi_n} \delta \xi_n. \quad (1.2)$$

В последней формуле, называемой **основной формулой теории поправок**, не учитываются члены разложения более высоких порядков, чем первый. Однако, приходится учитывать поправки не только линейного, но и нелинейного характера. Примером может служить учёт второй производной по температуре воздуха и смешанной - по температуре и давлению.

Поправочные формулы типа (1.2) называются **дифференциальными**, а определяемые по ним значения δA - изменениями элементов траектории, вычисленными по методу дифференциалов. **Баллистические производные** $\frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \frac{\partial A}{\partial \xi_i}$ в теории поправок называются поправочными коэффициентами для элемента A траектории на отклонение параметра ξ_i . **Поправочный коэффициент** (баллистическая производная) численно равен изменению рассматриваемого элемента траектории при увеличении соответствующего определяющего параметра на принятую единицу его измерения. Например, можно использовать поправочные коэффициенты, характеризующие изменения дальности при отклонениях баллистического коэффициента $\frac{\partial x_c}{\partial c}$, начальной скорости $\frac{\partial x_c}{\partial v_0}$, начального угла наклона траектории $\frac{\partial x_c}{\partial \theta_0}$ и т.п.

Рассмотрим пример получения поправочных формул для полной горизонтальной

дальности полёта ракеты в условиях безвоздушного пространства. Здесь полная дальность определяется зависимостью $x_c = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = f(V_0, \theta_0)$.

Получим поправочную формулу с учётом членов разложения первого и второго порядка. Поскольку в последней формуле только два аргумента V_0 и θ_0 , в общих обозначениях будем иметь

$$\begin{aligned} \delta x_c &= \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \delta \xi_2 \right) f(\xi_1, \xi_2) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} (\delta \xi_1)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \delta \xi_1 \delta \xi_2 + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} (\delta \xi_2)^2 \right) f(\xi_1, \xi_2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В обозначениях формулы, определяющей полную дальность полёта в параболической теории, получим

$$\delta x_c = \frac{\partial x_c}{\partial V_0} \delta V_0 + \frac{\partial x_c}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x_c}{\partial V_0^2} (\delta V_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 x_c}{\partial V_0 \partial \theta_0} \delta V_0 \delta \theta_0 + \frac{\partial^2 x_c}{\partial \theta_0^2} (\delta \theta_0)^2 \right).$$

Раскрывая значения частных производных, будем иметь

$$\begin{aligned} \delta x_c &= \frac{2V_0 \sin 2\theta_0}{g} \delta V_0 + \frac{2V_0^2 \cos 2\theta_0}{g} \delta \theta_0 + \frac{\sin 2\theta_0}{g} (\delta V_0)^2 + \\ &+ \frac{4V_0 \sin 2\theta_0}{g} \delta V_0 \delta \theta_0 - \frac{2V_0 \cos 2\theta_0}{g} (\delta \theta_0)^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Последние три слагаемых (квадратные члены разложения) являются величинами более высокого порядка малости, чем два первых, определяемые линейными членами разложения. В большинстве случаев используют только линейные члены, и изменение дальности определяется по формуле

$$\delta x_c = \frac{2V_0 \sin 2\theta_0}{g} \delta V_0 + \frac{2V_0^2 \cos 2\theta_0}{g} \delta \theta_0, \quad (1.5)$$

где баллистические производные (поправочные коэффициенты) равны

$$\frac{\partial x_c}{\partial V_0} = \frac{2V_0 \sin 2\theta_0}{g}; \quad \frac{\partial x_c}{\partial \theta_0} = \frac{2V_0^2 \cos 2\theta_0}{g}. \quad (1.6)$$

Имея величину поправочного коэффициента, легко найти изменение соответствующего элемента траектории

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial \xi_1} \delta \xi_1. \quad (1.7)$$

Если предположить, что изменяется только начальная скорость, то

$$\delta x_{cV} = \frac{\partial x_c}{\partial V_0} \delta V_0. \quad (1.8)$$

Используя формулу полной дальности и первую формулу (1.6), получим

$$\frac{\delta x_{cV}}{x_c} = \frac{2\delta V_0}{V_0},$$

т.е. при допущениях, соответствующих параболической теории, малое относительное отклонение начальной скорости вызывает удвоенное относительное изменение дальности. Поступая подобным образом, можно получить поправочные формулы и для других элементов траектории.

Вывод поправочных формул и формул баллистических производных для траекторий различных типов ЛА значительно сложнее, чем в показанном простом примере, и требует применения специальных методов.

1.3 Качественное влияние определяющих параметров и знаки баллистических производных

Рассмотрим для примера полёт ракеты. Знак баллистической производной (поправочного коэффициента) для полной полётной дальности устанавливается в зависимости от воздействия увеличения определяющего параметра на дальность. Если увеличение параметра приводит к увеличению дальности, то поправочный коэффициент положительный; если дальность уменьшается с ростом определяющего параметра, то - отрицательный. Во многих случаях знак поправочного коэффициента можно установить исходя из качественного влияния параметра на дальность до выполнения расчётов.

Проведём качественный анализ по определению знаков основных поправочных

коэффициентов. Начальная скорость неуправляемого ЛА постоянной массы V_0 и скорость в начале пассивного участка траектории являются одними из основных параметров, определяющих дальность полёта. С увеличением начальной скорости дальность растёт, поэтому поправочный коэффициент имеет положительное значение. Для ЛА при наклонном старте начальная скорость составляет, как правило, небольшую часть от скорости центра масс ЛА в конце активного участка траектории V_k . Увеличение начальной скорости приводит к увеличению ординат всей траектории и росту V_k . Таким образом, при прочих равных условиях увеличение начальной скорости приводит к увеличению дальности, следовательно, $\partial x_c / \partial V > 0$. Аналогично $\partial x_c / \partial V_k > 0$.

Аэродинамические свойства ЛА влияют на дальность полёта через характерную площадь S и коэффициент лобового сопротивления $C_{Xa}(M)$. Увеличение характерной площади и среднего значения коэффициента лобового сопротивления $C_{Xa_{\text{ср}}}(M)$ за время движения по траектории приведет к уменьшению дальности.

Угол наклона касательной к траектории в начале движения $\theta_n = \theta_0$ и в начале пассивного участка $\theta_n = \theta_k$ траектории неуправляемого полёта ракеты также существенно влияет на дальность. На рисунке 1.2 показана зависимость полной дальности полёта x_c и поправочного коэффициента $\partial x_c / \partial \theta_n$ от начального угла θ_n . Знак поправочного коэффициента изменяется в зависимости от соотношения θ_n и угла наибольшей дальности $\theta_{n \text{max}}$. Если θ_n меньше угла наибольшей дальности, то поправочный коэффициент $\partial x_c / \partial \theta_n > 0$, а если θ_n больше угла $\theta_{n \text{max}}$, то $\partial x_c / \partial \theta_n < 0$.

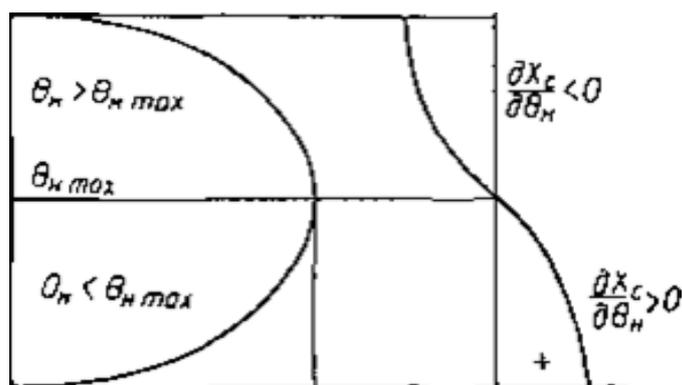


Рисунок 1.2 - Зависимость полной дальности полёта x_c и поправочного коэффициента $\partial x_c / \partial \theta_n$ от начального угла θ_n

При фиксированной начальной скорости V_n поправочный коэффициент $\partial x_c / \partial \theta_n = 0$ соответствует максимальной дальности и начальному углу θ_n , при котором эта дальность

получена. При $\theta_n \approx \theta_{nmax}$, малые изменения угла θ_n почти не влияют на дальность полёта.

За самостоятельные параметры, определяющие дальность полёта, могут быть приняты: элементы конца активного участка траектории x_k, y_k, V_k и θ_k (влияние V_k и θ_k на дальность рассмотрено выше); масса ЛА; плотность и температура воздуха; барометрическое давление и т.д.

2 Методы вычисления элементов траекторий и баллистических производных

2.1 Определение изменений элементов траекторий и поправочных коэффициентов интегрированием систем уравнений движения

Метод применяется при существенном изменении параметра, определяющего исследуемый элемент траектории, или при необходимости определить изменение элемента от отклонения параметра, не содержащегося в основной системе уравнений, составленной для невозмущённой траектории.

В первом случае основная система решается при n дискретных значениях определяющего параметра или при n функциональных зависимостях, влияние изменения которых предполагается определить. Пусть, например, в результате конструктивных изменений внешней формы ракеты или её управляющих органов изменится форма графиков коэффициента лобового сопротивления. Обозначим функциональную зависимость для невозмущённой траектории $C_{X_a}(M, Re)$ и для траектории ракеты изменённой формы $C_{X_{a_i}}(M, Re)$. Для определения влияния изменения формы ракеты на элементы конца активного участка траектории воспользуемся стандартной системой уравнений, приняв, что тяга направлена по оси ракеты, и опустив управляющие силы. Для невозмущённой траектории система может быть решена при значениях

$$X_a = qSC_{X_a}(M, Re); Y_a = qSC_{Y_a}^\alpha(M, Re)\alpha.$$

Для ракеты, форма которой изменилась

$$X_{a_i} = qSC_{X_{a_i}}(M, Re); Y_{a_i} = qSC_{Y_{a_i}}^\alpha(M, Re)\alpha.$$

И система уравнений будет иметь вид

$$\dot{V} = \frac{P - X_{ai}}{m} - g \sin \theta; \quad \dot{\theta} = \frac{P + Y_{ai}^\alpha}{mV} \alpha - \frac{g}{V} \cos \theta;$$

$$\dot{y} = V \sin \theta; \quad \dot{x} = V \cos \theta; \quad m = m(t); \quad \alpha = \vartheta_{np}(t) - \theta.$$

Если при изменении формы ракеты (или конструкции управляющих органов) кроме X_a и Y_a изменится ещё и осевая составляющая тяги двигателя, то при решении последней системы следует пользоваться изменённой зависимостью P_i . Сравнение результатов решений для невозмущённой и возмущённой траекторий даст величины изменений элементов траектории в зависимости от изменения формы ракеты (её аэродинамических характеристик).

Возможны случаи, когда параметр, определяющий характеристики движения ракеты, не вызывает изменения других начальных условий основной системы уравнений. Например, пусть при запуске неуправляемой ракеты изменяется начальный угол наклона траектории θ_0 . В этом случае соответствующая система уравнений решается необходимое число раз при изменённых значениях θ_{0i} . Количество решений определяется границами изменения и характером изменения исследуемой величины в зависимости от θ_0 . Если, например, $x_c = f(\theta_0)$ изменяется плавно и в пределах исследуемого участка от θ_{0i} до $\theta_{0(i+1)}$, эту зависимость можно принять за линейную, и достаточно двух решений при крайних значениях θ_0 . Если третье решение, соответствующее примерно середине интервала θ_0 , даст заметное отклонение от прямой, то число решений необходимо увеличить. Построенные по результатам решений график или сглаженная табличная зависимость $x_c = f(\theta_0)$ позволят определить изменение дальности δx_c , соответствующее отклонению угла бросания $\delta \theta_0$.

Достоинством описанного метода вычисления изменений элементов траектории является возможность учёта взаимного и косвенного влияния на них изменения величин, зависящих от отклонения основного параметра и представленных в основной системе дифференциальных уравнений. Кроме того, метод позволяет определять изменения каждой вычисляемой характеристики движения в любой заданной точке траектории.

Отыскание поправочных коэффициентов по результатам решения дифференциальных уравнений движения центра масс ЛА целесообразно тогда, когда зависимость исследуемой величины от определяющего параметра может быть принята за линейную в пределах ожидаемого изменения последнего. В этом случае вначале система уравнений интегрируется при нормальных условиях, а затем вторично при близком изменённом значении параметра, влияние которого исследуется. Затем подсчитывается искомый поправочный коэффициент.

Система уравнений, описывающая невозмущённое движение, и система уравнений, написанная с учётом возмущающих факторов, должны быть составлены в зависимости от конкретной задачи. Возмущающие факторы могут быть выражены в виде добавочных

ускорений по осям координат, в которых составлена основная система уравнений.

2.2 Определение поправочных коэффициентов интегрированием дифференциальных уравнений в отклонениях

В случае малых отклонений определяющих параметров поправочные коэффициенты могут быть найдены при решении дифференциальных уравнений движения в отклонениях. Для составления уравнений воспользуемся общим методом линеаризации дифференциальных уравнений, описывающих движение центра масс ЛА. Обычно учитывают только первые члены разложения в ряд Тейлора. Основная система дифференциальных уравнений выбирается в зависимости от конкретной задачи. В качестве примера получим дифференциальные уравнения в отклонениях для активного участка траектории неуправляемой ракеты, используя основную систему уравнений [1]:

$$\dot{V} = \frac{P - X_a}{m} - g \sin \theta; \quad \dot{\theta} = -\frac{g \cos \theta}{V}; \quad \dot{y} = V \sin \theta; \quad \dot{x} = V \cos \theta.$$

Обозначим правую часть первого уравнения через a_V и раскроем входящие в нее величины. Будем считать, что коэффициент лобового сопротивления зависит только от числа M и не изменяется с высотой. Будем также полагать, что для данной расчётной точки траектории изменение тяги P не зависит от изменения высоты y :

$$a_V = \frac{1}{m_0 - |\dot{m}|t} \left[|\dot{m}| I_1 g - \frac{S \rho V^2}{2} C_{X_a}(M) \right] - g \sin \theta. \quad (2.1)$$

Это равенство может быть переписано в виде функциональной зависимости $a_V = f_1(V, \theta, y, I_1, S, \rho, C_{X_a}(M), m_0, |\dot{m}|)$.

Обозначая правую часть второго уравнения системы через a_θ , запишем функциональную зависимость $a_\theta = f_2(V, \theta)$.

Поступая подобным образом, можем написать для третьего и четвёртого уравнений:

$$a_y = f_3(V, \theta) \text{ и } a_x = f_4(V, \theta).$$

Используя формулы линеаризации, получим систему дифференциальных уравнений в отклонениях

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\delta V) &= \frac{\partial a_V}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_V}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial a_V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial a_V}{\partial I_1} \delta I_1 + \\
&+ \frac{\partial a_V}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial a_V}{\partial C_{X_a}} \delta C_{X_a} + \frac{\partial a_V}{\partial m_0} \delta m_0 + \frac{\partial a_V}{\partial |\dot{m}|} \delta |\dot{m}|; \\
\frac{d}{dt}(\delta \theta) &= \frac{\partial a_\theta}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \delta \theta; \\
\frac{d}{dt}(\delta y) &= \frac{\partial a_y}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_y}{\partial \theta} \delta \theta; \\
\frac{d}{dt}(\delta x) &= \frac{\partial a_x}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_x}{\partial \theta} \delta \theta.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Нахождение баллистических производных $\partial a_i / \partial \tilde{c}_j$ во многих случаях представляет, хотя и не сложную, но трудоёмкую задачу. Для принятой нами системы получим:

$$\begin{aligned}
1) \ a_{VV} &= \frac{\partial a_V}{\partial V} = -\frac{S\rho V}{m} \left[C_{X_a}(M) + \frac{M}{2} \frac{C_{X_a}(M)}{\partial M} \right]. \\
2) \ a_{V\theta} &= \frac{\partial a_V}{\partial \theta} = -g \cos \theta. \\
3) \ a_{Vy} &= \frac{\partial a_y}{\partial y} = -\frac{1}{m} S \frac{V^2}{2} C_{X_a}(M) \frac{\partial \rho}{\partial y}. \\
4) \ a_{VI_1} &= \frac{\partial a_V}{\partial I_1} = \frac{P}{m} \frac{1}{I_1}. \\
5) \ a_{V\rho} &= \frac{\partial a_V}{\partial \rho} = -\frac{X_a}{m} \frac{1}{\rho}. \\
6) \ a_{VC_{X_a}} &= \frac{\partial a_V}{\partial C_{X_a}} = -\frac{X_a}{m} \frac{1}{C_{X_a}(M)}. \\
7) \ a_{Vm_0} &= \frac{\partial a_V}{\partial m_0} = -\frac{P - X_a}{m} \frac{1}{m}. \\
8) \ a_{V|\dot{m}|} &= \frac{\partial a_V}{\partial |\dot{m}|} = \left[\frac{P}{m} + \frac{|\dot{m}|t}{m} \left[\frac{P - X_a}{m} \right] \right] \frac{1}{|\dot{m}|}. \\
9) \ a_{\theta V} &= \frac{\partial a_\theta}{\partial V} = \frac{g \cos \theta}{V^2}. \\
10) \ a_{\theta \theta} &= \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} = \frac{g \sin \theta}{V}. \\
11) \ a_{yV} &= \frac{\partial a_y}{\partial V} = \sin \theta. \\
12) \ a_{y\theta} &= \frac{\partial a_y}{\partial \theta} = V \cos \theta. \\
13) \ a_{xV} &= \frac{\partial a_x}{\partial V} = \cos \theta.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$14) a_{x\theta} = \frac{\partial a_x}{\partial \theta} = -V \sin \theta .$$

Теперь систему дифференциальных уравнений в отклонениях запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta V) &= a_{VV}\delta V + a_{V\theta}\delta\theta + a_{Vy}\delta y + a_{VI_1}\delta I_1 + \\ &+ a_{V\rho}\delta\rho + a_{VC_{Xa}}\delta C_{Xa} + a_{Vm_0}\delta m_0 + a_{V|\dot{m}|}\delta|\dot{m}|; \\ \frac{d}{dt}(\delta\theta) &= a_{\theta V}\delta V + a_{\theta\theta}\delta\theta; \\ \frac{d}{dt}(\delta y) &= a_{yV}\delta V + a_{y\theta}\delta\theta; \\ \frac{d}{dt}(\delta x) &= a_{xV}\delta V + a_{x\theta}\delta\theta. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Систему уравнений в отклонениях при независимой переменной t , пригодную для расчёта изменения элементов движения и поправочных коэффициентов на пассивном участке траектории неуправляемой ракеты, получим из системы уравнений (2.4). В этом случае масса ракеты постоянна: $P, I_1, |\dot{m}|$ равны нулю и первое уравнение системы (2.2) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}(\delta V) = \frac{\partial a_V}{\partial V}\delta V + \frac{\partial a_V}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial a_V}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{\partial a_V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial a_V}{\partial C_{Xa}}\delta C_{Xa} + \frac{\partial a_V}{\partial m_0}\delta m_0 .$$

Соответственно в формулах коэффициентов (2.3) надо принять $a_{Vm_0} = \frac{X_a}{m_0^2}$, а в первой, третьей, пятой и шестой формулах положить $m = m_0$. Система дифференциальных уравнений (2.4) с учётом этого будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta V) &= a_{VV}\delta V + a_{V\theta}\delta\theta + a_{Vy}\delta y + a_{V\rho}\delta\rho + a_{VC_{Xa}}\delta C_{Xa} + a_{Vm_0}\delta m_0; \\ \frac{d}{dt}(\delta\theta) &= a_{\theta V}\delta V + a_{\theta\theta}\delta\theta; \\ \frac{d}{dt}(\delta y) &= a_{yV}\delta V + a_{y\theta}\delta\theta; \\ \frac{d}{dt}(\delta x) &= a_{xV}\delta V + a_{x\theta}\delta\theta. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Получим систему уравнений в отклонениях, пригодную для определения изменений элементов траекторий ЛА постоянной массы при независимой переменной x . За основную

систему возьмём систему, описывающую движение центра масс неуправляемой ракеты на пассивном участке траектории в плотных слоях атмосферы [1]:

$$u'_x = -E; p'_x = -\frac{g}{u^2}; y'_x = p; t'_x = u^{-1}.$$

Обозначим

$$a_u = f_1(u, p, y); a_p = f_2(u); a_y = f_3(p); a_t = f_4(u),$$

и тогда $u'_x = a_u; p'_x = a_p; y'_x = a_y; t'_x = a_t$.

Выполнив линеаризацию уравнений системы, принятой нами за основную, получим систему дифференциальных уравнений в отклонениях

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\delta u) &= a_{uu}\delta u + a_{up}\delta p + a_{uy}\delta y; \\ \frac{d}{dt}(\delta p) &= a_{pu}\delta u; \quad \frac{d}{dx}(\delta y) = a_{yp}\delta p; \\ \frac{d}{dx}(\delta t) &= a_{tu}\delta u. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Интегрирование уравнений в отклонениях позволяет получить поправочные коэффициенты и изменения характеристик движения, представленных в левых частях уравнений, для любой фиксированной точки траектории. Без дополнительных упрощений система уравнений в общем случае решается только численным интегрированием на ЭВМ. Коэффициенты a_{ij} вычисляются по данным невозмущённой траектории.

2.3 Сопряжённая система уравнений в отклонениях и её решение

Система неоднородных линейных дифференциальных уравнений, относящаяся к системам дифференциальных уравнений в отклонениях, может иметь сопряжённую систему линейных уравнений. Число переменных сопряжённой и основной систем одно и то же. По правилу составления сопряжённой системы линейных однородных уравнений коэффициенты первого уравнения берутся равными коэффициентам первых членов основной системы уравнений, коэффициенты второго уравнения - вторых членов основных уравнений и т.д. В новой системе все коэффициенты берутся с обратными знаками по отношению к основной.

Исходя из определения однородных дифференциальных уравнений, в сопряжённой системе опускаются свободные члены, имеющиеся в основной. Для пояснения рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.6) и перепишем три первых совокупных уравнения, введя члены ϵ_u и ϵ_p , учитывающие возмущения. Для общности запишем члены, имеющие нулевые коэффициенты; коэффициенты a_{ij} представим абсолютными значениями, указав в уравнениях знаки в явном виде:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\delta u) &= -a_{uu}\delta u - a_{up}\delta p + a_{uy}\delta y + \epsilon_u; \\ \frac{d}{dx}(\delta p) &= a_{pu}\delta u + 0\delta p + 0\delta y + \epsilon_p; \\ \frac{d}{dx}(\delta y) &= 0\delta u + a_{yp}\delta p + 0\delta y.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Примем систему (2.7), зависимыми переменными в которой являются $\delta u, \delta p$ и δy , за основную. Напишем сопряжённую с (2.7) систему уравнений, обозначив переменные через λ_1, λ_2 и λ_3 :

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dx} &= a_{uu}\lambda_1 - a_{pu}\lambda_2 - 0\lambda_3; \\ \frac{d\lambda_2}{dx} &= a_{up}\lambda_1 - 0\lambda_2 - a_{uy}\lambda_3; \\ \frac{d\lambda_3}{dx} &= -a_{uy}\lambda_1 - 0\lambda_2 - 0\lambda_3.\end{aligned}\tag{2.8}$$

В общем случае физический смысл переменных λ_1 зависит от физического смысла коэффициентов основного уравнения a_{ij} и слагаемых ϵ_u и ϵ_p . Установим связь между переменными основной и сопряжённой систем уравнений для нашего случая. Умножим уравнения основной системы соответственно на λ_1, λ_2 и λ_3 , а уравнения сопряжённой системы на $\delta u, \delta p$ и δy , и сложим их. После преобразований будем иметь

$$\begin{aligned}\lambda_1 \frac{d}{dx}(\delta u) + \lambda_2 \frac{d}{dx}(\delta p) + \lambda_3 \frac{d}{dx}(\delta y) + \\ + \delta u \frac{d\lambda_1}{dx} + \delta p \frac{d\lambda_2}{dx} + \delta y \frac{d\lambda_3}{dx} = \lambda_1 \epsilon_u + \lambda_2 \epsilon_p\end{aligned}$$

и далее

$$\frac{d}{dx}(\lambda_1 \delta u + \lambda_2 \delta p + \lambda_3 \delta y) = \lambda_1 \epsilon_u + \lambda_2 \epsilon_p. \quad (2.29)$$

Проинтегрировав правую и левую части последнего уравнения от x_1 до x_2 , получим

$$\begin{aligned} & \lambda_{12} \delta u_2 + \lambda_{22} \delta p_2 + \lambda_{32} \delta y_2 - \lambda_{11} \delta u_1 - \lambda_{21} \delta p_1 - \\ & - \lambda_{31} \delta y_1 = \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 \epsilon_u + \lambda_2 \epsilon_p) dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Полученное уравнение является общим и справедливо при любых начальных условиях. Для рассматриваемой основной траектории пределы интегрирования сопряжённой системы могут быть выбраны так, как это удобно для решения конкретной задачи теории поправок. Во многих случаях оказывается целесообразным интегрировать сопряжённую систему дифференциальных уравнений, начиная с конечной точки траектории.

2.4 Аналитические методы получения баллистических производных

Аналитические методы могут применяться в случае, когда основная исследуемая величина определяется функцией, допускающей получение производных в аналитическом виде. Метод используется при исследовании траекторий ЛА постоянной массы. Если предположить, что эллиптическая траектория симметрична и начинается у поверхности сферической модели Земли при начальных значениях скорости V_0 и угла бросания θ_0 , то изменение линейной круговой дальности с учётом только линейных членов разложения имеет вид

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial V_0} \delta V_0 + \frac{\partial L}{\partial \theta_0} \delta \theta_0. \quad (2.11)$$

Баллистические производные, полученные дифференцированием развёрнутого уравнения эллиптической траектории, запишутся в форме

$$\frac{\partial L}{\partial V_0} = 2 \frac{R_3}{V_0} [\sin 2\psi + \operatorname{ctg} \theta_0 (1 - \cos 2\psi)], \quad (2.12)$$

где 2ψ - угловая дальность;

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_0} = 2R_3 \left[\frac{\sin 2(\theta_0 + \psi)}{\sin 2\theta_0} - 1 \right]. \quad (2.13)$$

На рисунке 2.1 приведены графики $\frac{\partial L}{\partial V_0} = f_{V_0}(\theta_0)$ при различных значениях угловой дальности ψ .

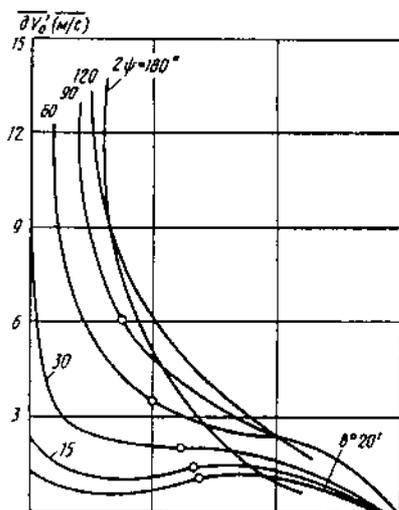


Рисунок 2.1

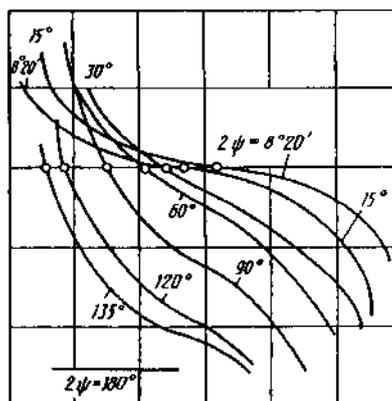


Рисунок 2.2

Из графиков видно, что во всех случаях баллистическая производная $\frac{\partial L}{\partial V_0}$ имеет положительное значение. При фиксированной угловой дальности она уменьшается с увеличением угла наклона траектории в начале пассивного эллиптического участка.

Зависимость $\frac{\partial L}{\partial \theta_0} = f_{\theta_0}(\theta_0)$ приведена на рисунке 2.2. С увеличением угла θ_0 баллистическая производная $\frac{\partial L}{\partial \theta_0}$ уменьшается, переходя от положительных значений к отрицательным. Нулевое значение производных соответствует оптимальным углам наклона траектории в начале пассивного участка. При заданной дальности полёта нулевое значение производной отвечает траектории, полученной при минимальной начальной скорости V_0 .

Аналитический метод определения поправочных коэффициентов может быть также использован при решении различных приближённых задач внешней баллистики ЛА постоянной массы, движущихся в плотных слоях атмосферы, например при решении задач методом псевдоскорости. Аналитический метод иногда применяют для определения баллистических производных и более высоких порядков, чем первый. В рамках параболической теории расчёта траекторий баллистические производные, характеризующие главную часть изменения дальности, вычисляются по формулам (1.6). Уточнение этого изменения определяют три последних слагаемых формулы (1.4), которые получены с учётом вторых производных:

$$\frac{\partial^2 x_c}{\partial V_0^2} = 2 \frac{\sin 2\theta_0}{g}; \quad \frac{\partial^2 x_c}{\partial \theta_0^2} = -4 \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g}; \quad \frac{\partial^2 x_c}{\partial V_0 \partial \theta_0} = 4 \frac{V_0 \sin 2\theta_0}{g}. \quad (2.14)$$

На основе эллиптической теории могут быть получены также производные

$$\frac{\partial^2 x_c}{\partial V_H^2}, \quad \frac{\partial^2 x_c}{\partial \theta_H^2}, \quad \frac{\partial^2 x_c}{\partial V_H \partial \theta_H} \text{ и др.}$$

Однако математические сложности получения вторых производных (при более сложных моделях движения), малость величин ∂V_H^2 , $\partial \theta_H^2$, $\partial V_H \partial \theta_H$ и, как следствие, незначительность уточнения, даваемого этими членами, приводят к тому, что при практических расчётах изменений элементов траекторий учитывают обычно только линейные члены разложения.

3 Учёт влияния параметров атмосферы на траекторию движения ЛА

3.1 Способы учёта влияния отклонений метафакторов на движение ЛА

Теоретические исследования подтверждают существенное влияние отклонений метеофакторов от их нормальных значений на траекторию движения ЛА. Изменение метеофакторов учитывают при определении характеристик движения, при расчёте рассеивания траекторий и определении точности запуска ЛА, в расчётах устойчивости движения ЛА, а также в прочностных расчётах.

В баллистике влияние отклонений параметров атмосферы на полёт ракет может быть учтено тремя способами.

Первый способ - расчёт изменений элементов траектории по неизменным отклонениям давления, влажности и температуры от нормальных в предположении справедливости гипотезы о вертикальном равновесии атмосферы и сохранения характера изменения температуры с высотой соответствующего вида функции $\tau(y)$, принятой в нормальной атмосфере. Пример получения поправочных коэффициентов для дальности на отклонение наземного барометрического давления и виртуальной температуры рассмотрен в /1/.

Второй способ заключается в определении и использовании баллистических средних отклонений метеофакторов - среднего, условно постоянного по всей траектории отклонения виртуальной температуры от нормального значения и условно постоянного среднего ветра. Первый и второй методы применяются чаще всего в практической баллистике.

Теоретически более строгим является *третий метод*, в соответствии с которым в системы дифференциальных уравнений движения вводят уравнения, непосредственно

определяющие изменение метеофакторов в функции какой-либо координаты (чаще всего высоты) или в функции времени. При строгом учёте влияния изменения параметров атмосферы на полёт ракет в расчётах должны использоваться конкретные (опытные) функции, полученные по результатам зондирования атмосферы.

При прогнозировании изменения метеофакторов используются статистические обработки результатов метеорологических исследований. Результаты статистической обработки могут представляться в виде случайного поля (случайных функций многих переменных, составленных по координатам и по времени). Статистическая обработка по координатам применяется обычно в баллистических расчётах, статистическая обработка по времени - преимущественно при установлении ветровой нагрузки на ЛА в расчётах на прочность, в расчётах устойчивости движения и динамики полёта в неспокойной атмосфере.

3.2 Учёт изменения барометрического давления и температуры

Изменение барометрического давления и температуры по высоте для нормальной атмосферы рассмотрено ранее. При желании учесть в баллистических расчётах конкретную реализацию, опытную или расчётную, необходимо иметь данные об изменении барометрического давления, влажности и температуры воздуха по высоте, представленные в виде формул, таблиц или графиков. Влажность воздуха легко учитывается через виртуальную температуру. Давление и температура вводятся в расчёт по формулам для плотности воздуха; температура учитывается также и в формуле для скорости звука. При использовании графика $C_{x_a}(M)$, составленного для наземных нормальных условий, влияние изменения скорости звука по высоте на лобовое сопротивление можно учитывать с помощью формулы. Изменение тяги по высоте должно быть вычислено для конкретной метеорологической реализации по общему уравнению.

Очевидно, каждая реализация изменённых метеорологических элементов по высоте требует самостоятельного решения выбранной системы уравнений.

3.3 Уравнения движения ЛА постоянной массы при учёте изменения барометрического давления и температуры

При определении лобового сопротивления воздуха с помощью коэффициента $C_{x_a}(M)$

учёт изменения давления и температуры проводится так же, как описано в предыдущем подразделе для ЛА переменной массы. Если для определения лобового сопротивления воспользоваться величиной $E = \frac{X_a}{mV}$, то система дифференциальных уравнений, описывающая движение ЛА постоянной массы с учётом изменения давления и температуры, может быть приведена к общему виду уравнений. Возьмём изменённую величину $(E + \delta E)$, тогда будем иметь

$$\dot{x} = -E\dot{x} - \frac{\delta E}{E}E\dot{x}; \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = -E\dot{y} - g - \frac{\delta E}{E}E\dot{y}. \quad (3.2)$$

Представив $E = f(c, h, \tau)$, получим

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\delta c}{c} + \frac{\delta h}{h} - \frac{f(V_\tau) + 1}{2} \frac{\delta \tau}{\tau}. \quad (3.3)$$

Величина $f(V_\tau)$ определяется по формуле, приведённой в /1/.

При изменении только баллистического коэффициента в соответствии с (3.1)...(3.3) получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x} = -E\ddot{x} - \frac{\delta c}{c}E\dot{x}; \quad (3.4)$$

$$\ddot{y} = -E\ddot{y} - g - \frac{\delta c}{c}E\dot{y}. \quad (3.5)$$

При постоянном баллистическом коэффициенте

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -E\dot{x} - \left[\frac{\delta h}{h} - \frac{f(V_\tau) + 1}{2} \frac{\delta \tau}{\tau} \right] E\dot{x}; \\ \dot{y} &= -E\dot{y} - \left[\frac{\delta h}{h} - \frac{f(V_\tau) + 1}{2} \frac{\delta \tau}{\tau} \right] E\dot{y}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

После интегрирования могут быть получены характеристики движения ЛА постоянной массы при отклонениях давления δh и виртуальной температуры $\delta \tau$ от величин, определяемых стандартной атмосферой. Если воспользоваться гипотезой о вертикальном равновесии атмосферы, то изменённые характеристики движения могут быть получены в зависимости от

наземного давления и функции изменения температуры с высотой.

Логарифмируя и дифференцируя уравнение для h (барометрическую функцию $\pi(y)$) и переходя от бесконечно малых к конечным приращениям, получим

$$\frac{\delta h}{h} = \frac{\partial h_0}{h_0} - \delta \left[\frac{1}{R} \int_0^y \frac{dy}{\tau} \right].$$

Дифференцируя второе слагаемое по τ , будем иметь

$$\frac{\delta h}{h} = \frac{\partial h_0}{h_0} + \frac{1}{R} \int_0^y \frac{d\tau}{\tau^2} dy. \quad (3.7)$$

Вводя замену в (3.6), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -E\dot{x} - \left[\frac{\partial h_0}{h_0} + \frac{1}{R} \int_0^y \frac{d\tau}{\tau^2} dy - \frac{f(V_\tau) + 1}{2} \frac{\delta\tau}{\tau} \right] E\dot{x} \\ \ddot{y} &= -E\dot{y} - g - \left[\frac{\partial h_0}{h_0} + \frac{1}{R} \int_0^y \frac{d\tau}{\tau^2} dy - \frac{f(V_\tau) + 1}{2} \frac{\delta\tau}{\tau} \right] E\dot{y}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Последняя система уравнений не требует для своего решения знания функции изменения барометрического давления с высотой и удобна для теоретических исследований.

3.4 Учёт влияния ветра на полёт неуправляемых ЛА

Основными задачами при изучении действия ветра на полёт ракет являются: установление механизма непосредственного действия ветра на движущийся ЛА; получение расчётных схем движения масс воздуха; доказательство правомерности принятой схемы при решении той или иной задачи.

Перемещения воздушных масс, происходящие в атмосфере, принято называть ветром.

Ветер является величиной векторной. Как векторная величина он характеризуется направлением и скоростью. Направление ветра - азимут точки горизонта A_w , откуда дует ветер, измеряется в градусах. Скорость ветра W измеряется в метрах в секунду. Вектор скорости ветра

обычно представляют через его составляющие W_x , W_y и W_z . Скорости восходящих и нисходящих потоков в большинстве случаев невелики. Они на порядок, а иногда и на два меньше горизонтальных потоков. Это даёт основание при подготовке данных для запуска ЛА принять оправданное допущение, что изменение скорости ветра по высоте остаётся постоянным в пределах всей рассматриваемой траектории.

Хаотическое (неупорядоченное, турбулентное) движение воздуха накладывается на относительно спокойное горизонтальное перемещение воздушных масс (рис. 3.1). Это приводит к неустойчивости (изменчивости) ветра, особенно резко проявляющейся вблизи поверхности земли. Принято различать динамическую и термическую турбулентности. Динамическая турбулентность в равнинных условиях распространяется обычно до высот 1000.. 15000 м, а над морем её границы ещё ниже. Интенсивность турбулентности зависит главным образом от скорости ветра, шероховатости поверхности и устойчивости перемещения воздушных масс. Она сильнее над пересечённой местностью и слабее над равниной и морем. Термическая турбулентность может распространяться до достаточно больших высот, особенно в условиях неустойчивости движения значительных по объёму масс воздуха и образования кучевых облаков. Её интенсивность зависит от высоты стояния Солнца, времени года, характера подстилающей поверхности, влажности среды и т.д.

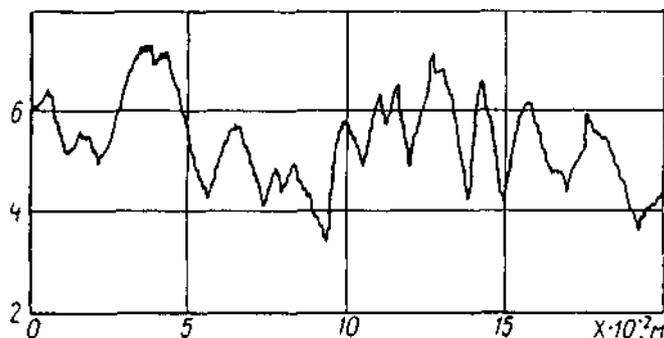


Рисунок 3.1 - Вариации скорости ветра в горизонтальном направлении

При необходимости учёта нескольких (не менее двух) составляющих вектора W его аргументы (координаты и время) дают основание рассматривать воздушную среду, в которой происходит полёт, как векторное (в общем случае пространственно-временное) поле. Временная составляющая должна учитываться главным образом применительно к возмущённому движению малоскоростных ЛА. Для большинства объектов допустимо полагать, что векторное пространственное поле турбулентности является изотропным в пределах той области пространства, в которой исследуется движение ЛА.

Ветер и турбулентность - случайные факторы, и при анализе движения ЛА они должны

учитываться статистически. Здесь же ограничимся детерминированной постановкой, принимая, что вектор скорости ветра

$$W(y) = W_0(y) + W_\tau(y), \quad (3.9)$$

отражающий суммарное перемещение воздушных масс, не является случайным. В выражении (3.9) $W_0(y)$ - постоянная составляющая ветра на высоте y , характеризует сплошное равномерное перемещение масс воздуха; $W_\tau(y)$ - турбулентная составляющая ветра на высоте y .

Особенность движения ЛА в перемещающейся атмосфере заключается в том, что его скорость относительно Земли и относительно движущихся масс воздуха различна. Скорость ЛА (самолёта, ракеты) относительно Земли принято называть земной скоростью, скорость относительно атмосферы - воздушной. Если земную скорость ЛА (абсолютную) обозначить вектором V_k , скорость движения атмосферы относительно Земли (скорость переносного движения - скорость ветра) - вектором W и воздушную скорость ЛА (относительную) - вектором V , то

$$V_k = V + W. \quad (3.10)$$

Тогда скорость ЛА в движении относительно атмосферы будет равна

$$V = V_k - W. \quad (3.11)$$

В проекциях на оси нормальной системы координат $Ox_g Y_g Z_g$ векторное равенство (3.11) будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} V_{x_g} \\ V_{y_g} \\ V_{z_g} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_{kx_g} & -W_{x_g} \\ V_{ky_g} & -W_{y_g} \\ V_{kz_g} & -W_{z_g} \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

При постоянном ветре из последнего равенства и рисунка 3.2 получим

$$V = \sqrt{(V_{kx_g} - W_{x_g})^2 + (V_{ky_g} - W_{y_g})^2 + (V_{kz_g} - W_{z_g})^2}. \quad (3.13)$$

При учёте только горизонтальных составляющих ветра

$$V = \sqrt{(V_{kx_g} - W_{x_g})^2 + (V_{ky_g})^2 + (V_{kz_g} - W_{z_g})^2}. \quad (3.14)$$

На рисунке 3.2 u и u_k обозначают проекции воздушной и земной скорости ЛА на горизонтальную плоскость OX_gZ_g . Пользуясь рисунком 3.2, раскроем значения слагаемых в равенстве (3.12):

$$\begin{aligned} V \cos \vartheta_a \cos \psi_a &= V_k \cos \theta \cos \psi - W_{x_g}; \\ V \sin \vartheta_a &= V_k \sin \theta - W_{y_g}; \\ -V \cos \vartheta_a \sin \psi_a &= -V_k \cos \theta \sin \psi - W_{z_g}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

и найдём модуль воздушной скорости

$$V = \left[(V_k \cos \theta \cos \psi - W_{x_g})^2 + (V_k \sin \theta - W_{y_g})^2 + (V_k \cos \theta \sin \psi + W_{z_g})^2 \right]^{1/2}. \quad (3.16)$$

Соответственно

$$\sin \vartheta_a = \frac{V_k \sin \theta - W_{y_g}}{V}; \quad \operatorname{tg} \psi_a = \frac{V_k \cos \theta \sin \psi + W_{z_g}}{V_k \cos \theta \cos \psi - W_{x_g}}. \quad (3.17)$$

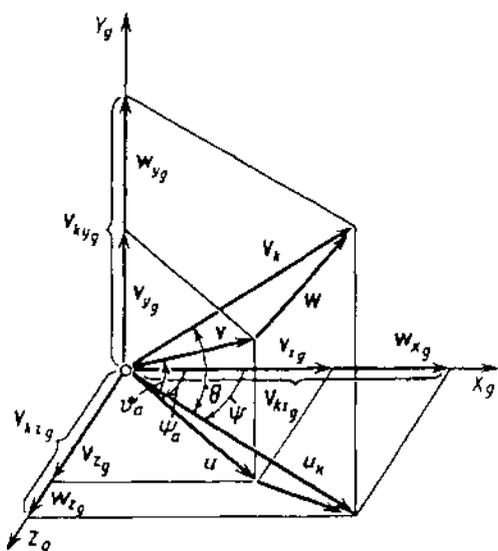


Рисунок 3.2 - Схема взаимного расположения векторов земной скорости V_k и скорости ветра W

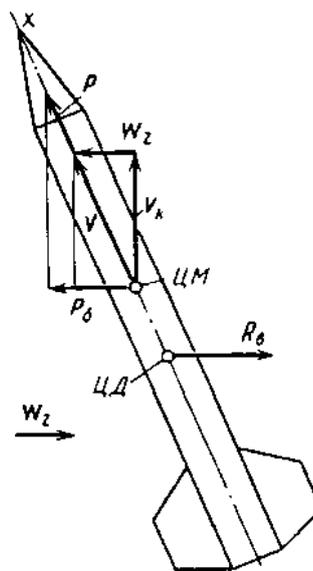


Рисунок 3.3 - Схема поворота неуправляемой ракеты против ветра ("эффект флюгера")

Механизм воздействия ветра на движение ЛА в общем случае решения пространственной задачи с учётом углов атаки и скольжения, определяемых по отношению к воздушной скорости, весьма сложен. Поэтому в практической работе часто рассматривают действие продольного и бокового ветра отдельно.

При определении направления бокового движения ракеты на активном участке траектории имеет значение взаимное расположение центра масс и центра давления ракеты. Воздействие бокового ветра W_z на ракету создаёт дополнительную аэродинамическую силу R_B , приложенную в центре давления (рис. 3.3). У статически устойчивой ракеты с оперением центр давления расположен за центром масс, ближе к оперению, поэтому под действием момента от силы R_B ракета повернётся головной частью навстречу ветру так, что её продольная ось совпадёт с вектором воздушной скорости. При этом появится боковая составляющая тяги P_6 , направленная против ветра, и при $P_6 > R_6$ ракета будет перемещаться также против ветра. ЛА в результате деривации, комплексного действия силы Магнуса¹ и бокового ветра могут перемещаться на активном участке траектории в направлении ветра. На пассивном участке траектории при $P = 0$ ракета будет перемещаться в направлении бокового ветра. На рисунке 3.4 представлена схема бокового движения против ветра статически устойчивой оперённой ракеты на активном участке траектории при допущении, что ракета безынерционна. Обозначим горизонтальную проекцию скорости центра масс в стартовой системе координат через $u_k = V_k \cos \theta$, горизонтальную проекцию скорости в относительном движении через u_r . Согласно рисунку 3.4

$$u_r = \sqrt{u_k^2 + W_z^2 + 2u_k W_z \sin \psi} ; \quad (3.18)$$

$$\cos \psi_r = \frac{V_k \cos \theta \cos \psi}{u_r} , \quad (3.19)$$

а дополнительные соотношения для определения угла скольжения в относительном боковом движении имеют вид:

$$\beta_{rr} = \psi - \psi_r; \quad \beta_r = \beta_{rr} \cos \theta. \quad (3.20)$$

На рисунке 3.5 представлена схема бокового движения стабилизируемой вращением ракеты на активном участке траектории в случае, когда боковая составляющая тяги действует в

¹ Эффект Магнуса — физическое явление, возникающее при обтекании вращающегося тела потоком жидкости или газа. Образуется сила, воздействующая на тело и направленная перпендикулярно направлению потока. Это является результатом совместного воздействия различных физических явлений, таких как эффект Бернулли и образование пограничного слоя в среде вокруг обтекаемого объекта.

направлении ветра. Согласно рисунку 3.5

$$u_r = \sqrt{u_k^2 + W_z^2 - 2u_k W_z \sin \psi} \quad (3.21)$$

Из (3.15), принимая $W_{y_g} = W_{x_g} = 0$, получим

$$\cos \psi_r = u_r^{-1} V_k \cos \theta \cos \psi \quad (3.22)$$

и дополнительное уравнение

$$\beta_r = (\psi - \psi_r) \cos \theta. \quad (3.23)$$

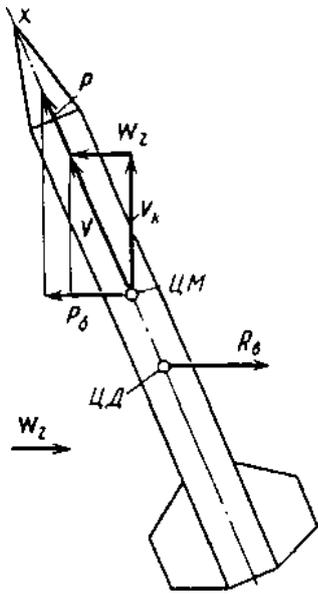


Рисунок 3.4 - Схема построения углов скольжения при боковом движении ракеты против ветра

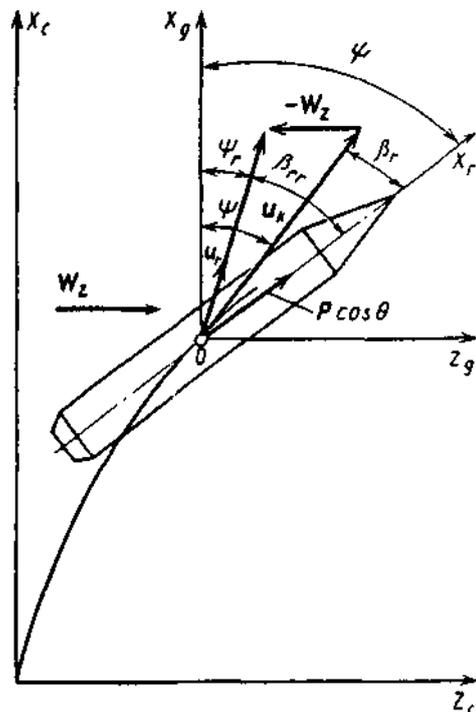


Рисунок 3.5 - Схема построения углов скольжения при боковом движении ракеты в направлении ветра

Рассматривая устойчивую ракету как материальную точку переменной массы и учитывая, что при ветре вектор тяги совпадает с вектором воздушной скорости центра масс, получим косинусы углов между направлением воздушной скорости и соответствующими осями стартовой системы координат

$$\frac{V_{rx_c}}{V_r} = \frac{V_{kx_c} - W_{x_c}}{V_r}; \quad \frac{V_{ry_c}}{V_r} = \frac{V_{ky_c} - W_{y_c}}{V_r}; \quad \frac{V_{rz_c}}{V_r} = \frac{V_{kz_c} - W_{z_c}}{V_r}. \quad (3.24)$$

Если определить лобовое сопротивление через баллистический коэффициент s и

функцию $G(V_r)$, то величина E может быть вычислена через скорость V_r :

$$E_r = cH_r(y)G(V_{r\tau}). \quad (3.25)$$

Для ЛА постоянной массы систему уравнений, учитывающую влияние ветра, можно написать в виде общей системы:

$$\ddot{x} = -E_r(\dot{x} - W_x); \quad \ddot{y} = -E_r\dot{y} - g; \quad \ddot{z} = -E_r(\dot{z} - W_z). \quad (3.26)$$

Пользуясь (3.14), можно получить

$$V_r = V_k \sqrt{1 + \frac{W^2}{V_k^2} - \frac{2\dot{x}W_x}{V_k^2} - \frac{2\dot{z}W_z}{V_k^2}}, \quad (3.27)$$

где $W = \sqrt{W_x^2 + W_z^2}$ и $V_k = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

Скорость полёта ЛА постоянной массы, как правило, значительно больше скорости ветра. Отбрасывая в (3.27) члены $\frac{W^2}{V_k^2}$ и $\frac{2\dot{z}W_z}{V_k^2}$, малые по сравнению с единицей, а также разлагая упрощённую функцию (3.27) в биномиальный ряд и пренебрегая в нём членами, содержащими отношение проекции скорости ветра W_x к скорости V_k в большей, чем первой, степени, можно получить

$$V_r = V_k - W_x \dot{x} V_k^{-1}; \quad (3.28)$$

$$G(V_{r\tau}) = G(V_{k\tau})[1 - W_x V_k^{-2} f(V_{k\tau}) \dot{x}]; \quad (3.29)$$

$$E_r = E[1 - W_x V_k^{-2} f(V_{k\tau}) \dot{x}], \quad (3.30)$$

где $f(V_{k\tau})$ определяется по формуле $G'(V_r)G^{-1}(V_r)V_r = f(V_r)$ (1/).

Подставляя E_r в (3.26) и пренебрегая величинами второго порядка малости, можно получить

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -E\dot{x} + E[1 + V_k^{-2} f(V_{k\tau}) \dot{x}^2] W_x; \\ \ddot{y} &= -E\dot{y} + EV_k^{-2} f(V_{k\tau}) \dot{x} \dot{y} W_x - g; \\ \ddot{z} &= -E(\dot{z} - W_z). \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.5 Баллистический средний ветер и баллистическое отклонение температуры

Введение в баллистический расчёт конкретных функций изменения температуры и ветра по высоте является трудоёмкой задачей. Значительно проще приближённый метод, заключающийся в определении изменений элементов траектории по дифференциальным поправочным формулам. Применение дифференциальных поправочных формул для определения влияния ветра и отклонения температуры воздуха от нормальной функции $\tau(y)$ оказывается возможным, если вводить в расчёт средний постоянный по всей траектории ветер и постоянное отклонение температуры. Эти постоянные получили название **баллистических средних**. **Баллистический ветер** W_6 и **баллистическое отклонение температуры** $\delta\tau_6$ определяются из условия, что вызванные их действием отклонения координат конечной точки траектории будут такими же, как и при конкретной реализации изменения ветра и температуры по высоте. Если известны баллистические средние, то отклонения координат конечной точки траектории от рассчитанных при нормальных метеорологических условиях определяются по простым формулам. Изменение дальности, вызванное баллистическим отклонением температуры:

$$\delta x_{c\tau} = \frac{\partial x_c}{\partial \tau} \delta\tau_6. \quad (3.32)$$

Изменение дальности, вызванное действием продольной составляющей баллистического ветра:

$$\delta x_{cW_x} = \frac{\partial x_c}{\partial W_x} W_{x6}. \quad (3.33)$$

Боковое отклонение точки падения от действия боковой составляющей ветра:

$$\delta z_{cW_z} = \frac{\partial z_c}{\partial W_z} W_{z6}. \quad (3.34)$$

Наиболее теоретически обоснованный метод вычисления баллистических средних, пригодный для научно-исследовательских работ и контроля приближённых методов, вытекает из указанного выше условия их определения. В качестве примера рассмотрим методику расчёта продольной составляющей баллистического ветра. По данным невозмущённой номинальной траектории определим дальность x_c и поправочный коэффициент на постоянный по всей

траектории ветер $\partial x_c / \partial W_x$. Поправочный коэффициент найдём одним из точных методов, например, решением системы уравнений, включающей постоянный ветер.

Расчёт траектории повторяется при практической реализации изменения составляющей ветра по высоте: определяется δx_{cW_x} и изменение дальности

$$\delta x_{cW_x} = x_{cW_x} - x_c. \quad (3.35)$$

Продольная составляющая баллистического ветра для конкретной траектории и конкретной ветровой функции такова:

$$W_{x\delta} = \frac{\delta x_{cW_x}}{\partial x_c / \partial W_x}. \quad (3.36)$$

Подобный метод может быть использован при определении боковой составляющей баллистического ветра $W_{z\delta}$ и баллистического отклонения температуры $\delta\tau_6$.

Для практической работы применяют более простой, но менее точный метод, связанный с определением "весов слоёв". Чтобы определить веса слоёв и баллистических средних, траекторию разделяют по высоте на ряд слоёв (обычно равной толщины). Толщина каждого слоя берётся в зависимости от высоты траектории от 200 до 800 м, кратной 100 м. Для каждого

из слоёв определяются поправочные коэффициенты $\left(\frac{\partial x_c}{\partial \tau}\right)_i$; $\left(\frac{\partial x_c}{\partial W_x}\right)_i$; $\left(\frac{\partial z_c}{\partial W_z}\right)_i$.

Первые два определяют изменение полной дальности при увеличении температуры на 1К и скорости ветра на 1 м/с только в i -м слое. Вычисление каждого поправочного коэффициента для i -го слоя ведётся самостоятельно; при изменении температуры или учёте ветра в i -м слое в остальных слоях предполагается нормальное изменение $\tau(y)$ и безветрие. Для каждой траектории требуется провести n расчётов (n – минимальное число целых слоёв, в сумму высот которых укладывается высота траектории). Баллистическое отклонение температуры определяется из равенства

$$\left[\frac{\partial x_c}{\partial \tau}\right]_1 \delta\tau_1 + \left[\frac{\partial x_c}{\partial \tau}\right]_2 \delta\tau_2 + \dots + \left[\frac{\partial x_c}{\partial \tau}\right]_n \delta\tau_n = \frac{\partial x_c}{\partial \tau} \delta\tau_6, \quad (3.37)$$

где $\delta\tau_i$ – отклонение конкретной средней температуры в i -м слое от средней температуры i -м слое, определяемой по нормальному изменению температуры по высоте. Баллистическое отклонение температуры

$$\delta\tau_6 = \frac{\sum_i^n \left[\frac{\partial x_c}{\partial \tau} \right]_i \delta\tau_i}{\partial x_c / \partial \tau}. \quad (3.38)$$

Отношение

$$q_{\tau i} = \frac{\left(\frac{\partial x_c}{\partial \tau} \right)_i}{\partial x_c / \partial \tau} \quad (3.39)$$

называется весом i -го слоя по температуре. Следовательно,

$$\delta\tau_6 = \sum_i^n q_{\tau i} \delta\tau_i. \quad (3.40)$$

Вычисление весов слоёв баллистического ветра затруднено тем, что ветер является векторной величиной и может изменить модуль и направление в зависимости от номера слоя. Кроме того, однотипные ракетные системы, имея одинаковые веса слоёв, будут иметь разный баллистический ветер в зависимости от начального угла наклона траектории.

4 Уравнения возмущённого пространственного движения неуправляемого ЛА

4.1 Учёт влияния эксцентриситета тяги

К числу основных возмущающих факторов помимо метеорологических (и прежде всего ветра) относят эксцентриситет тяги.

Эксцентриситет тяги определяется величиной линейного смещения точки пересечения вектора тяги с плоскостью выходного сечения сопла относительно продольной оси ракеты и углом отклонения вектора тяги от продольной оси.

Для учёта влияния возмущения траектории, вызванного эксцентриситетом тяги, в общие уравнения пространственного движения центра масс ракеты введём слагаемые тяги, обусловленные непараллельностью вектора тяги продольной оси ракеты.

Угол φ_1 определяет в связанной системе координат положение плоскости действия составляющей тяги, нормальной к оси ЛА P_n , угол φ_2 - положение плоскости действия момента тяги от линейного эксцентриситета; размер x_r вдоль продольной оси - расстояние от центра масс ракеты до плоскости, включающей точку приложения тяги. Составляющие тяги по осям связанной системы координат будут иметь вид

$$P_x = P \cos \epsilon; \quad P_y = P \sin \epsilon \cos \varphi_1; \quad P_z = P \sin \epsilon \sin \varphi_1. \quad (4.1)$$

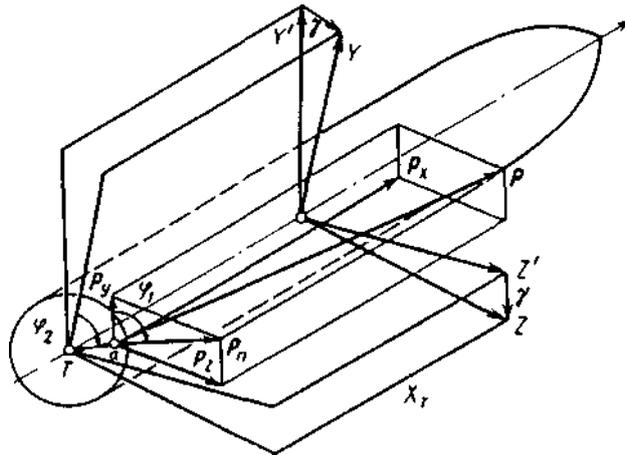


Рисунок 4.1 - Схема ориентации вектора тяги при линейном эксцентриситете d и угле поворота ξ .

Введя систему координат $OX'Y'Z'$, не участвующую в собственном вращении ЛА (на рисунке 4.1 γ - угол собственного вращения), найдём проекции тяги на оси этой системы:

$$\begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \\ P_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Записывая поэлементно, найдём

$$\begin{aligned} P_{x'} &= P \cos \epsilon; \\ P_{y'} &= P \sin \epsilon \cos \varphi_1 \cos \gamma - P \sin \epsilon \sin \varphi_1 \sin \gamma = P \sin \epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma); \\ P_{z'} &= P \sin \epsilon \cos \varphi_1 \sin \gamma + P \sin \epsilon \sin \varphi_1 \cos \gamma = P \sin \epsilon \sin(\varphi_1 + \gamma). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя матрицу перехода от $OX'Y'Z'$ к траекторной системе координат, найдём проекцию тяги на оси последней:

$$\begin{bmatrix} P_{x_k} \\ P_{y_k} \\ P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_k \cos\beta_k & -\sin\alpha_k \cos\beta_k & \sin\beta_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k & 0 \\ -\cos\alpha_k \sin\beta_k & \sin\alpha_k \sin\beta_k & \cos\beta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \\ P_{z'} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

где углы α_k и β_k определяют ориентацию земной скорости V_k относительно системы координат $OX'Y'Z'$. Записывая поэлементно, получим

$$\begin{aligned} P_{x_k} &= P \cos\epsilon \cos\alpha_k \cos\beta_k - P \sin\epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \sin\alpha_k \cos\beta_k + P \sin\epsilon \sin(\varphi_1 + \gamma) \sin\beta_k; \\ P_{y_k} &= P \cos\epsilon \sin\alpha_k + P \sin\epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \cos\alpha_k; \\ P_{z_k} &= -P \cos\epsilon \cos\alpha_k \sin\beta_k + P \sin\epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \sin\alpha_k \sin\beta_k + P \sin\epsilon \sin(\varphi_1 + \gamma) \cos\beta_k. \end{aligned}$$

4.2 Математическая модель пространственного возмущённого движения ЛА

С целью упрощения общей системы уравнений предположим, что вращение осесимметричного ЛА вокруг собственной продольной оси не изменяет ориентацию в пространстве аэродинамических сил и моментов; при этом, можно принять $\gamma = 0$. Кроме того, при записи уравнений вращательного движения осесимметричного ЛА целесообразно использовать систему координат $OX'Y'Z'$, ось OX' которой совпадает с продольной осью ЛА, и которая не участвует во вращении относительно продольной оси (полусвязанную систему). Введение подобной системы несколько упрощает кинематические и динамические уравнения вращательного движения.

Вектор угловой скорости ЛА ω раскладывается по осям этих систем координат следующим образом:

$$\omega = \omega_x + \omega_y + \omega_z = \omega_{x'} + \omega_{y'} + \omega_{z'}. \quad (4.5)$$

В проекциях на оси связанной системы координат динамические уравнения вращательного движения имеют вид

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= \sum_{i=1}^n M_{xi}; \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= \sum_{i=1}^n M_{yi}; \end{aligned}$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x = \sum_{i=1}^n M_{zi}.$$

В приведённых уравнениях сделаем подстановку

$$\begin{aligned} \omega_y &= \omega_{y'} \cos \gamma - \omega_{z'} \sin \gamma; & \sum_{i=1}^n M_{y'i} &= \sum_{i=1}^n M_{y'i} \cos \gamma + \sum_{i=1}^n M_{z'i} \sin \gamma; \\ \omega_z &= \omega_{z'} \cos \gamma - \omega_{y'} \sin \gamma; & \sum_{i=1}^n M_{z'i} &= \sum_{i=1}^n M_{z'i} \cos \gamma + \sum_{i=1}^n M_{y'i} \sin \gamma. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Учитывая, что для осесимметричных ЛА $I_y = I_z = A$; $I_x = C$, получим

$$\begin{aligned} C \dot{\omega}_x &= \sum_{i=1}^n M_{xi}; \\ A[\dot{\omega}_{y'} + (\dot{\gamma} - \omega_x) \dot{\omega}_{z'}] + C \omega_x \omega_{z'} &= \sum_{i=1}^n M_{y'i}; \\ A[\dot{\omega}_{z'} + (\omega_x - \dot{\gamma}) \dot{\omega}_{y'}] - C \omega_x \omega_{y'} &= \sum_{i=1}^n M_{z'i}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Кинематические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta, & (\omega_{x'} = \omega_x - \dot{\gamma} = \dot{\psi} \sin \vartheta); \\ \omega_{y'} &= \dot{\psi} \cos \vartheta; & \omega_{z'} = \dot{\vartheta}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подставляя кинематические соотношения в динамические уравнения, получим

$$\begin{aligned} C \dot{\omega}_x &= \sum_{i=1}^n M_{xi}; \\ A \ddot{\psi} \cos \vartheta - 2A \dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta + C \omega_x \dot{\vartheta} &= \sum_{i=1}^n M_{y'i}; \\ A \ddot{\vartheta} + A \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - C \omega_x \dot{\psi} \cos \vartheta &= \sum_{i=1}^n M_{z'i}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

При записи уравнений вращательного движения в правые части войдут проекции

момента тяги, вызванного линейным и угловым эксцентриситетом M_{ε} . Определим необходимые проекции этого момента $M_{\varepsilon x}$, $M_{\varepsilon y}$, $M_{\varepsilon z}$. Из рисунка 4.1 найдём составляющие моменты эксцентриситета по осям связанной системы координат $OXYZ$:

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon x} &= -P_y d \cos \varphi_2 + P_z d \sin \varphi_2; \\ M_{\varepsilon y} &= -P_x d \sin \varphi_2 + P_z x_A; \\ M_{\varepsilon z} &= -P_x d \cos \varphi_2 - P_y x_A. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Проекции моментов $M_{\varepsilon y'}$ и $M_{\varepsilon x'}$ на полусвязанные оси найдём, осуществив переход от связанной системы координат к полусвязанной:

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon y'} &= M_{\varepsilon y} \cos \gamma - M_{\varepsilon z} \sin \gamma; \\ M_{\varepsilon z'} &= M_{\varepsilon y} \sin \gamma + M_{\varepsilon z} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Подставляя сюда выражения для $M_{\varepsilon y'}$ и $M_{\varepsilon z'}$ получим

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon y'} &= P_x d \sin \varphi_2 \cos \gamma + P_z x_T \cos \gamma + P_x d \cos \varphi_2 \sin \gamma + P_y x_T \sin \gamma = \\ &= P_x d \sin(\varphi_2 + \gamma) + x_T (P_z \cos \gamma + P_y \sin \gamma); \\ M_{\varepsilon z'} &= P_x d \sin \varphi_2 \sin \gamma + P_z x_T \sin \gamma - P_x d \cos \varphi_2 \cos \gamma - P_y x_T \cos \gamma = \\ &= -P_x d \cos(\varphi_2 + \gamma) + x_T (P_z \sin \gamma - P_y \cos \gamma). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Подставляя в последние выражения соотношения (4.1), получим

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon x} &= -P d \sin \varepsilon \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + P d \sin \varepsilon \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = -P d \sin \varepsilon \cos(\varphi_1 + \varphi_2); \\ M_{\varepsilon y'} &= P d \cos \varepsilon \sin(\varphi_2 + \gamma) + P x_T \sin \varepsilon \sin(\varphi_1 + \gamma); \\ M_{\varepsilon z'} &= -P d \cos \varepsilon \cos(\varphi_2 + \gamma) - P x_T \sin \varepsilon \cos(\varphi_1 + \gamma). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Подставляя в уравнения поступательного и вращательного движений найденные проекции сил и моментов, получим следующую систему уравнений в виде, удобном для решения на ЭВМ:

$$\begin{aligned} \frac{dV_k}{dt} &= \frac{1}{m} [P \cos \varepsilon \cos \alpha_k \cos \beta_k - P \sin \varepsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \sin \alpha_k \cos \beta_k + \\ &+ P \sin \varepsilon \sin(\varphi_1 + \gamma) \sin \beta_k - c_{x_a} \frac{\rho V^2}{2} S \{ \cos \theta \cos \vartheta_a [\cos(\Psi - \psi_a) - 1] \} + \end{aligned}$$

$$+c_{y_a} \frac{\rho V^2}{2} S \{ \cos \theta \sin \vartheta_a [1 - \cos(\Psi - \psi_a)] + \sin(\vartheta - \vartheta_a) \} +$$

$$+c_{y_a} \frac{\rho V^2}{2} S \cos \theta \sin(\psi_a - \Psi) - g \sin \theta.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{mV_k} (P \cos \epsilon \sin \alpha_k + P \sin \epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \cos \alpha_k -$$

$$-c_{x_a} \frac{\rho V^2}{2} S \{ \sin \theta \cos \vartheta_a [1 - \cos(\Psi - \psi_a)] + \sin(\vartheta - \vartheta_a) \} +$$

$$+c_{y_a} \frac{\rho V^2}{2} S \{ \sin \theta \sin \vartheta_a [\cos(\Psi - \psi_a) - 1] + \cos(\vartheta - \vartheta_a) \} +$$

$$+c_{x_a} \frac{\rho V^2}{2} S \sin \theta \sin(\Psi - \psi_a) - \frac{g}{V_k} \cos \theta.$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{1}{mV_k \cos \theta} [-P \cos \epsilon \cos \alpha_k \sin \beta_k + P \sin \epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \sin \alpha_k \sin \beta_k +$$

$$+P \sin \epsilon \sin(\varphi_1 + \gamma) \cos \beta_k - c_{x_a} \frac{\rho V^2}{2} S \cos \vartheta_a \sin(\Psi - \psi_a) +$$

$$+c_{y_a} \frac{\rho V^2}{2} S \sin \vartheta_a \sin(\Psi - \psi_a) + c_{x_a} \frac{\rho V^2}{2} S \cos(\Psi - \psi_a)].$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_1.$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\omega_2^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{C}{A} \omega_x \omega_2 \cos \vartheta + m_z^a \frac{\rho V^2}{2A} S l a +$$

$$+m_z^{\omega_z} \frac{\rho V^2}{2} S l^2 \omega_1 - \frac{Pd}{A} \cos \epsilon \cos(\varphi_2 + \gamma) - \frac{Px_T}{A} \sin \epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma).$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_2.$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = 2\omega_1 \omega_2 \tan \vartheta - \frac{C}{A} \frac{\omega_x \omega_1}{\cos \vartheta} + m_y^\beta \frac{\rho V^2 S}{2A \cos \vartheta} l \beta +$$

$$+m_y^\beta \frac{\rho V S}{A} l \omega_2 + \frac{Pd}{A \cos \vartheta} \cos \epsilon \sin(\varphi_2 + \gamma) + \frac{Px_T}{A \cos \vartheta} \sin \epsilon \sin(\varphi_1 + \gamma).$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - \omega_2 \sin \vartheta.$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = m_x \frac{\rho V^2}{2C} S l + m_x^{\omega_x} \frac{\rho V}{C} S l^2 \omega_x - P d \sin \epsilon \cos(\varphi_1 + \varphi_2).$$

$$\frac{dx_c}{dt} = V_k \cos \theta \cos \Psi.$$

$$\frac{dy_c}{dt} = V_k \sin \theta.$$

$$\frac{dz_c}{dt} = -V_k \cos \theta \sin \Psi.$$

$$\cos \vartheta \cos \psi = \cos \theta \cos \Psi \cos \alpha_k \cos \beta_k - \sin \theta \cos \Psi \sin \alpha_k - \sin \Psi \cos \alpha_k \sin \beta_k.$$

$$\sin \vartheta = \sin \theta \cos \alpha_k \cos \beta_k + \cos \theta \sin \alpha_k.$$

$$\cos\vartheta\cos\Psi = \cos\vartheta_a\cos\psi_a\cos\alpha\cos\beta - \sin\vartheta_a\cos\psi_a\sin\alpha - \sin\psi_a\cos\alpha\sin\beta.$$

$$\sin\theta = \sin\vartheta_a\cos\alpha\cos\beta + \cos\vartheta_a\sin\alpha.$$

$$V = \sqrt{(V_k\cos\theta\cos\Psi - W_{x_g})^2 + (V_k\sin\theta - W_{y_g})^2 + (V_k\cos\theta\sin\Psi - W_{z_g})^2}.$$

$$\vartheta_a = \arcsin \left[V^{-1}(V_k\sin\theta - W_{y_g}) \right].$$

$$\psi_a = \arctg \left[\frac{V_k\sin\theta\sin\Psi + W_{z_g}}{V_k\cos\theta\cos\Psi - W_{x_g}} \right].$$

$$m = m_0 - \int_{t_n}^{t_k} |\dot{m}| dt.$$

$$A = A_0 - \int_{t_n}^{t_k} |\dot{A}| dt.$$

$$C = C_0 - \int_{t_n}^{t_k} |\dot{C}| dt.$$

где t_n, t_k - значения времени для моментов включения и выключения двигателя.

Приведённая система уравнений даёт возможность анализировать возмущённое движение осесимметричных ЛА при воздействии систематической составляющей ветра, задаваемой тремя компонентами по осям системы координат $O_0X_gY_gZ_g$. Моделирование движения ЛА на ЭВМ по приведённой системе позволяет приближённо оценивать такие особенности ветрового воздействия, как нелинейную зависимость ветровых отклонений возмущённых траекторий от номинальной, перекрёстное влияние составляющих ветра на движение ЛА в продольной и боковой плоскостях, формирование сложных траекторий.

Заключение

Учитывая значительные различия в подходах и методах возмущённого движения различных летательных аппаратов, авторы сочли целесообразным предложить студентам список дополнительной литературы, которой может быть полезен в практической деятельности, связанной с авиационной, ракетной и космической техникой.

Дополнительная литература

1. Аэромеханика самолета: учебник для вузов по специальности "Самолетостроение" / В. В. Андреевский, [и др.] ; Ред. А. Ф. Бочкарев . – М. : Машиностроение, 1977.
2. Брандин В.Н., Васильев А.А., Худяков С.Т. Основы экспериментальной космической баллистики / Под ред. Д.А. Погорелова. М.: Машиностроение, 1974.
3. Динамика полёта [Текст] : [учеб. для вузов по направлению подгот. 652500 "Гидроаэродинамика и динамика полёта"] / А. В. Ефремов [и др.] ; под ред. Г. С. Бюшгенса. - М. : Машиностроение, 2011.
4. Доброленский Ю.П. Динамика полёта в неспокойной атмосфере. М.: Машиностроение, 1969.
5. Костров А.В., Ситарский Ю.С. Рассеивание управляемых баллистических ракет. - М.: Машиностроение, 1977.
6. Летные испытания ракет и космических аппаратов: Учеб. пособие для зтузов / Е.И. Кринецкий, Л.Н. Александровская, А.В. Шаронов и др.; Под ед. Е.И. Кринецкого. М.: Машиностроение, 1979.
7. Наведение и навигация баллистических ракет: [учеб. пособие для вузов по направлению подгот. "Ракетостроение и космонавтика" и "Гидроаэродинамика и динамика полёта"] / Л. Н. Лысенко. - М. : Изд-во МГТУ, 2007.
8. Основы теории полёта космических аппаратов: [конспект лекций] / В. М. Белоконов ; Федер. агентство по образованию, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева. - Самара : Изд-во СГАУ, 2006.
9. Школьный Е.П., Майборода Л.А. Атмосфера и управление движением летательных аппаратов. – Л.: Гидрометеиздат, 1973.

Список использованных источников

- 1 Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Внешняя баллистика: Учебник для студентов вузов. 4-е изд., перераб. и доп. - М: Машиностроение, 2005. 608с.

Оглавление

Предисловие	3
1 Поправочные формулы внешней баллистики и расчёт возмущённых траекторий.....	4
1.1 Основные положения теории поправок. Понятие поправки.....	4
1.2 Основная формула теории поправок.....	6
1.3 Качественное влияние определяющих параметров и знаки баллистических производных	8
2 Методы вычисления элементов траекторий и баллистических производных	10
2.1 Определение изменений элементов траекторий и поправочных коэффициентов интегрированием систем уравнений движения.....	10
2.2 Определение поправочных коэффициентов интегрированием дифференциальных уравнений в отклонениях	12
2.3 Сопряжённая система уравнений в отклонениях и её решение	15
2.4 Аналитические методы получения баллистических производных	17
3 Учёт влияния параметров атмосферы на траекторию движения ЛА.....	19
3.1 Способы учёта влияния отклонений метафакторов на движение ЛА	19
3.2 Учёт изменения барометрического давления и температуры	20
3.3 Уравнения движения ЛА постоянной массы при учёте изменения барометрического давления и температуры	20
3.4 Учёт влияния ветра на полёт неуправляемых ЛА.....	22
3.5 Баллистический средний ветер и баллистическое отклонение температуры	29
4 Уравнения возмущённого пространственного движения неуправляемого ЛА	31
4.1 Учёт влияния эксцентриситета тяги.....	31
4.2 Математическая модель пространственного возмущённого движения ЛА	33
Заключение.....	38
Список использованных источников	39