

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Э. БАУМАНА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

А.М. ПОКРОВСКИЙ, А.М. НАУМОВ, В.К. ШАДРИН

ЗАДАЧИ ВСЕРОССИЙСКИХ ОЛИМПИАД ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

САМАРА 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Э. БАУМАНА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

А.М. ПОКРОВСКИЙ, А.М. НАУМОВ, В.К. ШАДРИН

ЗАДАЧИ ВСЕРОССИЙСКИХ ОЛИМПИАД ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 150300 Прикладная механика
специальности 150301 Динамика и прочность машин*

САМАРА
Издательство СГАУ
2012

УДК 639.3/6
ББК 30.121
П 487

Рецензенты:

Л. А. Бохоева, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Сопротивление материалов» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления,

А. И. Притыкин, кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительная механика корабля и сопротивление материалов» ФГБОУ «Калининградский государственный университет»

Покровский, А.М.

П 487 **Задачи Всероссийских олимпиад по сопротивлению материалов:** учеб. пособие / *А.М. Покровский, А.М. Наумов, В.К. Шадрин.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2012. – 112 с.

ISBN 978-5-7883-0888-3

В учебном пособии представлены задачи, предложенные студентам на Всероссийских олимпиадах по сопротивлению материалов 1994-2011 гг.

В первой части пособия приведены условия задач, во второй части – их решение. Рассматриваемые задачи охватывают все основные темы курса «Сопротивление материалов».

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 150300 – Прикладная механика специальности 150301 – Динамика и прочность машин.

УДК 639.3/6
ББК 30.121

ISBN 978-5-7883-0888-3

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
1. Условия задач	8
1.1. Олимпиада 1994 года	8
1.2. Олимпиада 1995 года	9
1.3. Олимпиада 1996 года	9
1.4. Олимпиада 1997 года	11
1.5. Олимпиада 1998 года	13
1.6. Олимпиада 1999 года	14
1.7. Олимпиада 2000 года	15
1.8. Олимпиада 2001 года	16
1.9. Олимпиада 2002 года	17
1.10. Олимпиада 2003 года	18
1.11. Олимпиада 2004 года	19
1.12. Олимпиада 2005 года	20
1.13. Олимпиада 2006 года	21
1.14. Олимпиада 2007 года	22
1.15. Олимпиада 2008 года	23
1.16. Олимпиада 2009 года	24
1.17. Олимпиада 2010 года	25
1.18. Олимпиада 2011 года	26
2. Решения задач	28
2.1. Олимпиада 1994 года	28
2.2. Олимпиада 1995 года	31
2.3. Олимпиада 1996 года	35
2.4. Олимпиада 1997 года	42
2.5. Олимпиада 1998 года	47
2.6. Олимпиада 1999 года	50
2.7. Олимпиада 2000 года	54

2.8. Олимпиада 2001 года	58
2.9. Олимпиада 2002 года	61
2.10. Олимпиада 2003 года	65
2.11. Олимпиада 2004 года	69
2.12. Олимпиада 2005 года	72
2.13. Олимпиада 2006 года	76
2.14. Олимпиада 2007 года	80
2.15. Олимпиада 2008 года	84
2.16. Олимпиада 2009 года	88
2.17. Олимпиада 2010 года	93
2.18. Олимпиада 2011 года	101
Список литературы	107
Итоги Всероссийских (международных) олимпиад по сопротивлению материалов.....	108

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сопротивление материалов – раздел механики, посвящённый расчётам на прочность и жёсткость. Курс сопротивления материалов изучается во всех технических вузах и относится к общетехническим дисциплинам. Для повышения уровня подготовки студентов по этой дисциплине Министерством образования СССР в 1981 году было принято решение о проведении Всесоюзной олимпиады по сопротивлению материалов. С 1981 по 1985 годы Всесоюзная олимпиада проходила в Бакинском политехническом институте (Азербайджан). После 1985 года Всесоюзные олимпиады проводились в Ростове-на-Дону (дважды), Туапсе (дважды), Алма-Ате (Казахстан). Первым председателем жюри Всесоюзной олимпиады по сопротивлению материалов был кандидат технических наук, профессор кафедры «Сопротивление материалов» Московского высшего технического училища имени Н.Э. Баумана (ныне Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана) Константин Константинович Лихарев. Начиная с 1984 года в течение двадцати пяти лет Всесоюзной олимпиадой руководил доктор технических наук, профессор той же кафедры Рашид Каримович Вафин. С 2009 года эстафету принял представитель той же кафедры (ныне кафедра «Прикладная механика») доктор технических наук, профессор Алексей Михайлович Покровский.

Заслуги профессора Р.К. Вафина в становлении олимпиадного движения по сопротивлению материалов неопределимы, особенно в самые тяжёлые времена, связанные с развалом Советского Союза. Были годы (1986, 1992, 1993), когда олимпиада в связи с экономическими трудностями не проводилась. С 1991 года олимпиада получила статус Всероссийской с международным участием. В разные годы в олимпиаде участвовали представители Белоруссии, Киргизии, Монголии, Украины. На олимпиаду приезжают команды из вузов, представляющих все регионы России, – от Калининграда (руководитель команды

кандидат технических наук, доцент А.И. Притыкин) до Владивостока (руководитель команды кандидат технических наук, доцент Н.П. Васильченко). Трижды Всероссийская олимпиада проводилась в Старом Осколе Белгородской области (руководитель команды кандидат технических наук, доцент В.Г. Солодковская). Дважды: в Дзержинске Нижегородской области (руководитель команды кандидат технических наук, доцент А.Д. Шурашов), Нижнем Новгороде (руководители команды ныне покойный кандидат технических наук, профессор Ю.В. Глявин и кандидат технических наук, доцент Н.И. Ильичев), Новочеркасске Ростовской области (руководители команды кандидат технических наук, профессор В.Б. Логвинов и кандидат технических наук, доцент С.А. Алексеев), Перми (руководитель команды кандидат физико-математических наук, доцент А.А. Балакирев), Санкт-Петербурге (руководитель команды кандидат технических наук, доцент Н.Ю. Пушева), Улан-Удэ (руководитель команды кандидат технических наук, профессор Г.С. Егодуров). В организации и проведении двух олимпиад на берегу озера Байкал (Улан-Удэ) активное участие принимала заведующая кафедрой «Сопротивление материалов» Восточно-Сибирского государственного технологического университета доктор технических наук, профессор Л.А. Бохоева. В этом году Всероссийская олимпиада второй раз будет проводиться в Самаре (руководитель команды кандидат технических наук, доцент В.К. Шадрин).

За время проведения Всесоюзной олимпиады по сопротивлению материалов сформировалась команда единомышленников, активистов олимпиадного движения. Это, в первую очередь, многолетний соратник Р.К. Вафина кандидат технических наук, доцент Игорь Дмитриевич Кисенко, отмечающий в этом году своё 90-летие. К сожалению, с 2009 года в связи с преклонным возрастом он перестал быть руководителем команды МГТУ им. Н.Э. Баумана. В настоящее время ею руководит кандидат технических наук, доцент А.М. Наумов. Около тридцати лет участвует в олимпиадном движении кандидат технических наук, доцент кафедры «Физика прочности» Научно-исследовательского ядерного университета (МИФИ) Валентин Владимирович Исаченко, который возглавляет Московскую региональную олимпиаду по сопротивлению материалов. Активное участие в проведении Московской олимпиады принимают кандидат технических наук, профессор Московского университета путей сообщения Ю.И. Романов и кандидат технических наук, профессор МГТУ МАДИ В.И. Щербakov.

Практически ежегодно побеждают на региональных олимпиадах и привозят свои команды на Всероссийскую олимпиаду кандидат технических наук, доцент И.А. Ивашков (Челябинск), кандидаты технических наук, доценты Г.Б. Лебедев и В.В. Шушунов (Новосибирск), кандидат технических наук, доцент Т.В. Шмелева (Иваново), доцент В.Н. Кассихин (Курск), кандидат технических наук, доцент Э.П. Трубина (Чита). Как правило, на Всероссийскую олимпиаду приезжают представители Украины: команда Киевского государственного архитектурно-строительного университета (руководитель – кандидат технических наук, доцент П.А. Иваненко) и команда Горловского автомобильно-дорожного института (руководитель – кандидат технических наук, доцент В.А. Космак).

География представителей вузов на Всероссийских олимпиадах по сопротивлению материалов год от года только расширяется, численность участников возрастает, что позволяет сделать вывод: интерес у студентов и преподавателей к этому мероприятию не ослабевает. Надеемся, что опубликование данного учебного пособия позволит студентам лучше подготовиться к олимпиадам по сопротивлению материалов и добиться на них лучших результатов.

Авторы выражают искреннюю благодарность всем, кто был каким-то образом причастен к составлению конкурсных задач для Всероссийских студенческих олимпиад по сопротивлению материалов.

ЧАСТЬ 1. УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1.1. Олимпиада 1994 г., г. Самара, СГАУ

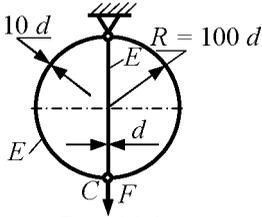


Рис. 94.1

94.1 Найти перемещение узла C (рис. 94.1). Дано: F, E, d .

94.2 Изменение температуры по высоте балки равно $\Delta t = t_2 - t_1$ (рис. 94.2). Найти наибольшее нормальное напряжение. Дано: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/град, $\Delta t = 50^\circ \text{C}$.

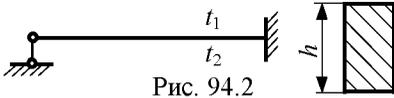


Рис. 94.2

94.3 Траверса CD (рис. 94.3) получила перемещение δ . Найти F . Дано: E, A, l, δ .

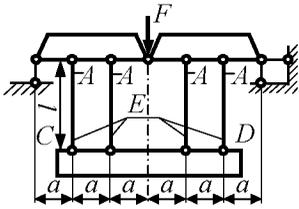


Рис. 94.3

94.4 Жёсткая опора B заменена на упругую (рис. 94.4). Какова должна быть жёсткость этой опоры, чтобы замена не повлияла на величину коэффициента запаса? Дано: E, J, l .

94.5 При каком эксцентриситете e (рис. 94.5) стержни 1 и 2 не подвергаются изгибу? Размер a задан.

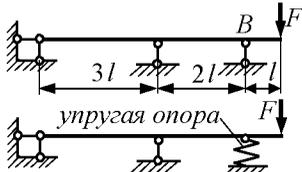


Рис. 94.4

94.6 Показания тензорезисторов 1 и 2 (рис. 94.6) отличаются в 5 раз. Найти коэффициент Пуассона μ .

94.7 Каков наибольший процент экономии материала при замене балки 1 на балку 2 (рис. 94.7) без снижения прочности?

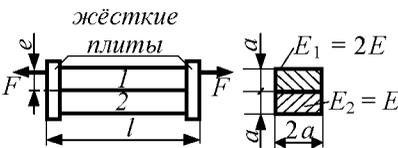


Рис. 94.5

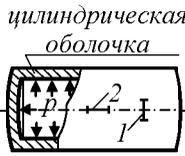


Рис. 94.6

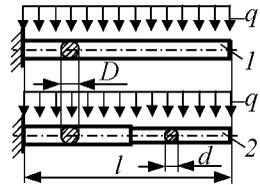


Рис. 94.7

1.2. Олимпиада 1995 г., Челябинск, ЧГТУ

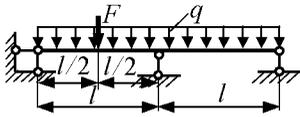


Рис. 95.1

95.1 При каком значении силы F отсутствует реакция правой опоры (рис. 95.1)?
Дано: q, l .

95.2 Найти размеры и направление полуосей эллипса, в который переходит окружность при деформации элемента (рис. 95.2). Дано: σ, E, μ .

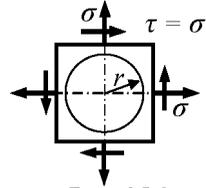


Рис. 95.2

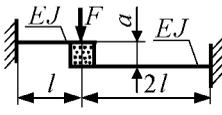


Рис. 95.3

95.3 При каком значении силы F будет разрушен бетонный кубик с ребром a (рис. 95.3)? Дано: a, l, EJ, σ_b – предел прочности бетона.

95.4 Стержень нагружен осевыми силами с линейным изменением их интенсивности (рис. 95.4). Найти перемещение сечения B . Дано: q, l, EA .

95.5 Концевое сечение B соединяется с неподвижным шарниром C (рис. 95.5). Найти изгибающий момент в сечении D . Дано: Δ, R, EJ .

95.6 При сборке стержневой системы сечения A стержня 1 и трубки 2 были взаимно повернуты на угол β , а затем соединены штифтом 3 (рис. 95.6). Определить потенциальную энергию деформации системы. Дано: β, l, G, J .

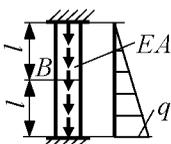


Рис. 95.4

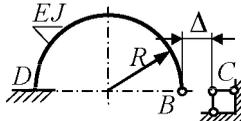


Рис. 95.5

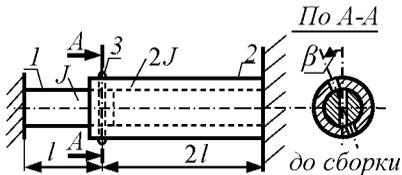


Рис. 95.6

1.3. Олимпиада 1996 г., г. Нижний Новгород, НГТУ

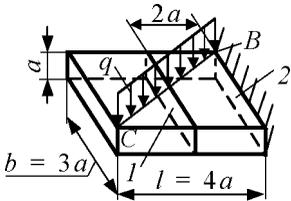


Рис. 96.1

96.1 На стальную пластинку действует нагрузка, распределённая по линии CB (рис. 96.1). Построив эпюры внутренних усилий, определить, во сколько раз прочность пластинки в сечении I больше

(меньше), чем в сечении 2. При расчёте считать справедливыми формулы для определения напряжений, полученные для брусьев постоянного сечения. При подсчёте W_k принять $\alpha = 0,267$.

96.2 Брус растянули силой F , перекрывающей зазор Δ (рис. 96.2). В момент касания нижнего торца бруса с опорой B его приварили к ней сваркой, после чего силу F сняли. Определить остаточные усилия в брусe и положение сечения C после разгрузки, полагая напряжения, возникающие в брусe, упругими. При расчёте считать $\Delta \ll a$. Жёсткость сечения бруса принять равной EA .

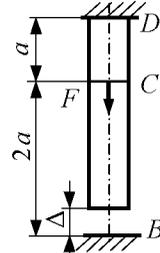


Рис. 96.2

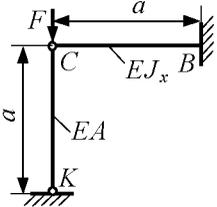


Рис. 96.3

96.3 Конструкция состоит из упругой балки CB и связанной с ней тонкой упругой струны CK (рис. 96.3). В процессе монтажа конструкции струну натянули так, что после окончания сборки она оказалась растянутой силой F_0 . На собранную конструкцию приложили силу F . Построить график, характеризующий зависимость перемещения точки C от силы F при $2F_0 > F > 0$, $Aa^2/J_x = 5$.

96.4 Диаметр бруса круглого сечения изменяется по закону $d_z = d_0 \left(1 + \frac{3z}{l}\right)$. Он закручен равномерно распределённым скручивающим моментом интенсивности m (рис. 96.4). Определить максимальные напряжения в брусe. Модуль сдвига материала бруса равен G . Гипотезу плоских сечений для бруса считать справедливой.

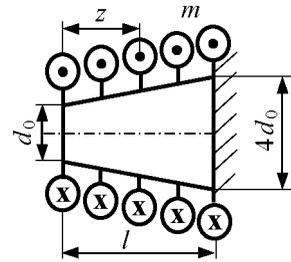


Рис. 96.4

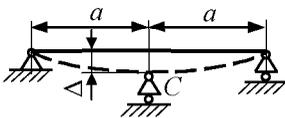


Рис. 96.5

96.5 Средняя опора C балки квадратного сечения получила осадку Δ (рис. 96.5). Как изменятся наибольшие нормальные напряжения в балке, если при тех же условиях балка будет заменена балкой круглого сечения той же высоты? Дайте обоснование Вашему заключению.

96.6 В абсолютно жёстком материале сделано гнездо квадратного сечения $a \times a$, высотой h (рис. 96.6). В нём силой F сжат материал M с упругими константами E , ν . Определить, пренебрегая трением со стенками, на сколько поднимется крышка K , если материал M нагреть на t . Коэффициент линейного расширения материала M равен α .

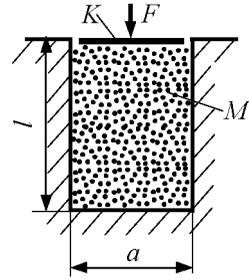


Рис. 96.6

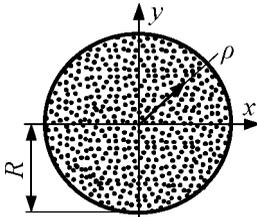


Рис. 96.7

96.7 Стержень круглого сечения сделан из пористого материала, причём плотность пор пропорциональна расстоянию от центра C (рис. 96.7). В целом поры ослабляют сечение на 25%. Определить осевой момент инерции сечения относительно горизонтальной оси x .

96.8 Балка постоянного сечения закреплена на двух опорах (рис. 96.8). Левая опора – шарнирно неподвижная, правая – в виде короткой трубки, которая под малым углом наклонена к оси z

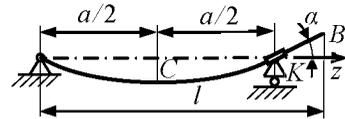


Рис. 96.8

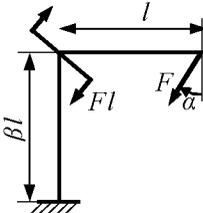


Рис. 96.9

и может свободно перемещаться вдоль этой оси, изгибая балку. При каком a прогибы в точках C и B будут равны по абсолютному значению? Трением между трубкой и балкой пренебречь.

96.9 Определить при каких величинах a и β максимальный изгибающий момент в раме (рис. 96.9) будет иметь наименьшее значение (по абсолютной величине).

1.4. Олимпиада 1997 г., г. Новочеркасск, НГТУ

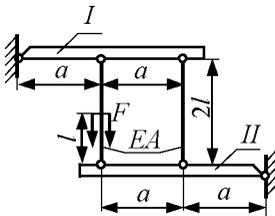


Рис. 97.1

97.1 Доказать, что работа силы F равна потенциальной энергии деформации стержневой системы (рис. 97.1). Дано: F , l , EA . Деформациями стержней I и II пренебречь.

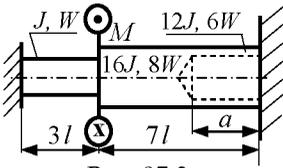


Рис. 97.2

97.2 При какой глубине сверления a (рис. 97.2) наибольшие касательные напряжения на левом и правом участках будут одинаковы? Геометрические характеристики сечений указаны на рисунке.

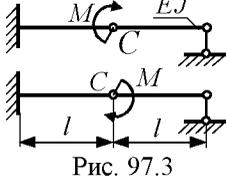


Рис. 97.3

97.3 Стержень нагружен парой сил M в двух вариантах: слева и справа от шарнира C (рис. 97.3). Найти линейное перемещение шарнира и работу пары сил M в обоих вариантах. Дано: M, l, EJ .

97.4 Два стержня рамы равномерно нагружены на t° (рис. 97.4). Найти наибольшие напряжения, полагая $l = 15a$. Дано: t°, E, a – коэффициент линейного расширения материала стержней.

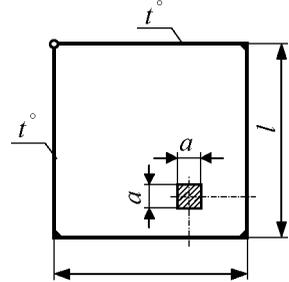


Рис. 97.4

97.5 Найти наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении стержня 1 (рис. 97.5) в момент закрытия зазора δ . Деформациями правого стержня 2 пренебречь. Дано: l, a, δ, E .

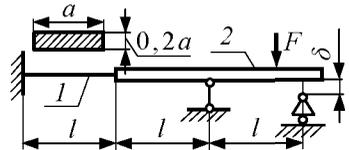


Рис. 97.5

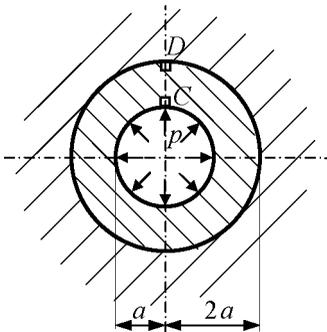


Рис. 97.6

97.6 Толстостенный цилиндр без днищ помещён без натяга в жёсткую обойму и нагружен внутренним давлением p (рис. 97.6). Найти и указать напряжения на гранях элементов C и D . Дано: p, a , коэффициент Пуассона $\mu = 1/3$.

1.5. Олимпиада 1998 г., г. Нижний Новгород, НГАСУ

98.1 Как изменить величину силы F , чтобы удаление одной связи в опоре B (рис. 98.1) не повлияло на величину вертикального перемещения узла C ? Длина стержней l .

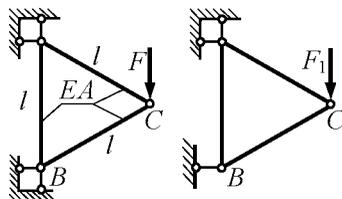


Рис. 98.1

98.2 При каком значении длины a (рис. 98.2) линейные перемещения сечений A и B будут одинаковы? Дано: $l = 120$ мм.

98.3 Определить напряжение σ , при котором элемент (рис. 98.3) испытывает чистый сдвиг. Найти наибольшее касательное напряжение.

98.4 Стержень прижат к круговому лекалу радиуса R (рис. 98.4). Считая деформации упругими и перемещения малыми, найти наибольшее нормальное напряжение и размер a зоны контакта. Принять

$$F = \frac{4EJ}{Rl}, \quad h = R/700, \quad E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

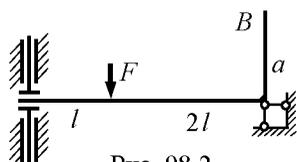


Рис. 98.2

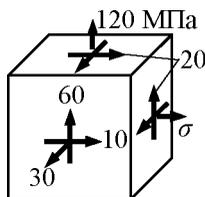


Рис. 98.3

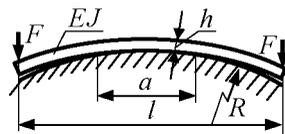


Рис. 98.4

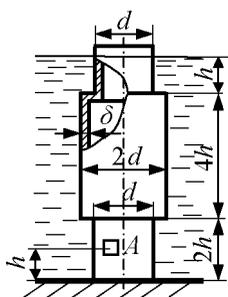


Рис. 98.5

98.5 Резервуар находится под наружным гидростатическим давлением (рис. 98.5). Объёмный вес жидкости равен γ Н/м³. Определить напряжения на гранях элемента A и найти эквивалентное напряжение. Дано: $\gamma, h, d, \delta, \nu = \sigma_{\text{тр}}/\sigma_{\text{тс}} = 0,8$.

98.6 Плоская рама выполнена из стержней квадратного поперечного сечения (рис. 98.6). Найти наибольшие нормальные напряжения при нагружении рамы силой F . Дано: $F = 450$ Н, $l = 0,8$ м, $a = 15$ мм.

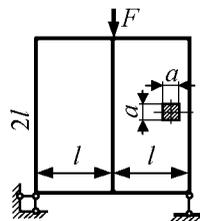


Рис. 98.6

1.6. Олимпиада 1999 г., г. Пермь, ПГТУ

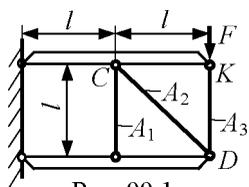


Рис. 99.1

99.1 Известно, что $A_1 = A_3 = A$, принять $A_2 = nA$. Найти зависимость перемещения w_K точки приложения силы F (рис. 99.1) от величины A .

99.2 При каком значении q (рис. 99.2) зазор δ закрывается? Найти наибольшее напряжение σ_{\max} при нагрузке $2q$. Дано: δ, a, l, E .

99.3 Определить размер b , при котором жёсткие плиты A и B (рис. 99.3) смещаются параллельно друг другу. Дано: $a = 30$ мм, $E_1 = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$ МПа.

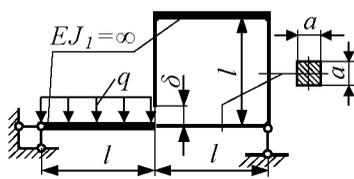


Рис. 99.2

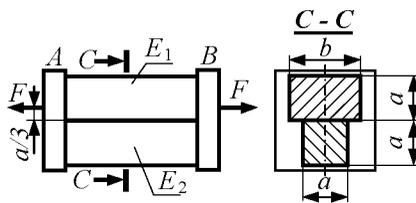


Рис. 99.3

99.4 Балки 1 и 2 установлены с просветом $c = \frac{Fl^3}{64EJ}$ (рис. 99.4) и имеют контакт в сечении K . Как изменится величина просвета при нагружении силой F и чему равна его максимальная величина? Дано: F, l, E, J .

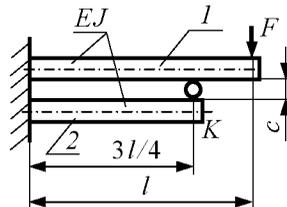


Рис. 99.4

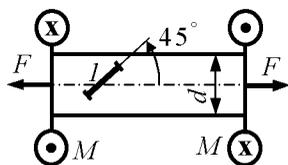


Рис. 99.5

99.5 Тензорезистор l указывает на отсутствие линейной деформации (рис. 99.5). Полагая $\mu = 1/3$, найти значение пары сил. Дано: $d = 32$ мм, $F = 1$ кН.

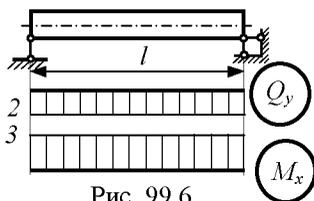


Рис. 99.6

99.6 Заданы эпюры (рис. 99.6) поперечных сил Q_y (кН) и изгибающих моментов M_x (кН·м). Эпюра изгибающих моментов построена на сжатой стороне стержня. Восстановить нагрузку, учитывая, что длина пролёта $l = 1$ м.

1.7. Олимпиада 2000 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС

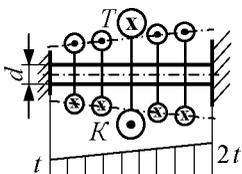


Рис. 00.1

00.1 Стержень нагружен распределенными парами сил (рис. 00.1). Какую работу должна совершить дополнительно приложенная пара сил T , чтобы сечение K не имело углового перемещения? Дано: t, l, G, d .

00.2 Две кольцевые пружины жёстко соединены с основанием и стержнем l , деформациями которого следует пренебречь (рис. 00.2). Найти δ – наибольший допускаемый ход стержня. Дано: $R, h, E, [\sigma]$.

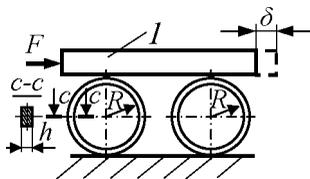


Рис. 00.2

00.3 Измеренная датчиком l продольная деформация составила $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$. Найти взаимный угол поворота сечений A и B при $l = 15h$ (рис. 00.3).

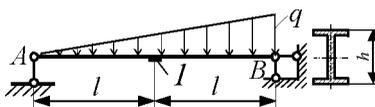


Рис. 00.3

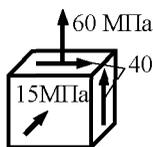


Рис. 00.4

00.4 Напряжённое состояние, указанное на рис. 00.4, дополняется всесторонним равномерным сжатием. В результате вся потенциальная энергия деформации оказывается связанной только с изменением формы. Найти коэффициент запаса по текучести, если предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа. Использовать теорию наибольших касательных напряжений.

00.5 На каком расстоянии a (рис. 00.5) следует установить правую опору, чтобы была обеспечена равнопрочность стержней? Каково значение F , при котором стержни будут работать с двукратным коэффициентом запаса? Пределы текучести материала при растяжении и при сжатии одинаковы $\sigma_{Tp} = \sigma_{Tc} = \sigma_T$. Дано: l, d, σ_T .

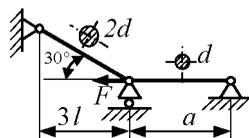


Рис. 00.5

00.6 Температура стержня после установки его на опорах (рис. 00.6) изменяется как по длине l , так и по высоте сечения h . Градиент температуры по высоте растёт от нуля в левом сечении до $t = t_1 - t_2 > 0$ в заделке. Полагая, что поперечные сечения остаются плоскими, найти наибольшие нормальные напряжения. Дано: $t = 60^\circ\text{C}, E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

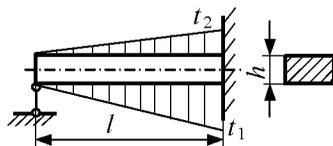


Рис. 00.6

1.8. Олимпиада 2001 г., г. Йошкар-Ола, Марийский ГТИ

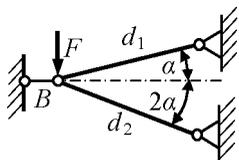


Рис. 01.1

01.1 При каком значении диаметра d_2 (рис. 01.1) перемещения в стержневой системе не изменятся после удаления опоры B ? Дано: $\alpha = 15^\circ$, диаметр $d_1 = 50$ мм, $l_1 = l_2 = l$, $E_1 = E_2 = E$.

01.2 Рама под действием распределённой нагрузки q (рис. 01.2) дополнительно нагружается парой сил M , при этом опора B полностью разгружается. Найти линейное ремещение сечения B . Заданы: размер l , модуль упругости E , момент инерции J .

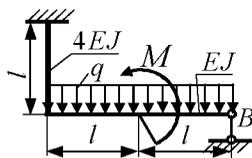


Рис. 01.2

01.3 Балка изогнута парой сил M (рис. 01.3). С помощью винта l сечение B получает дополнительное линейное перемещение. Каким должен быть ход h винта, чтобы осевая линия участка OB стала дугой окружности? Заданы: размер l , модуль упругости E , момент инерции поперечного сечения J .

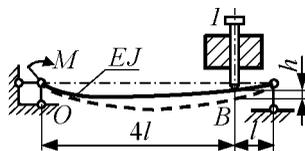


Рис. 01.3

01.4 Интенсивность распределённой нагрузки линейно изменяется от нуля до m (рис. 01.4). Определить, где находится опасное сечение и чему равны наибольшие касательные напряжения. Заданы размеры d и l .

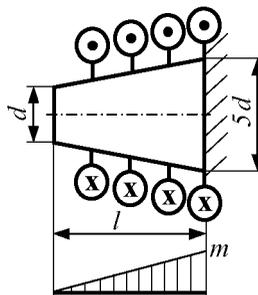


Рис. 01.4

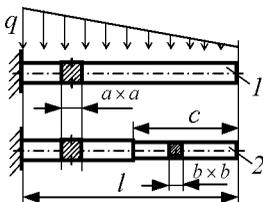


Рис. 01.5

01.5 В целях снижения массы стержень 1 (рис. 01.5) заменён ступенчатым стержнем 2 , оба участка которого равнопрочны. Какими должны быть размеры b и c ? Дано: $a = 26$ мм, $l = 330$ мм.

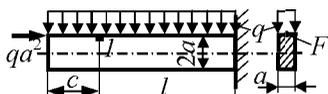


Рис. 01.6

01.6 На каком расстоянии c (рис. 01.6) расположен элемент l , испытывающий напряжённое состояние «чистый сдвиг»? Дано: $a = 40$ мм.

1.9. Олимпиада 2002 г., г. Санкт-Петербург, СПбГТУ

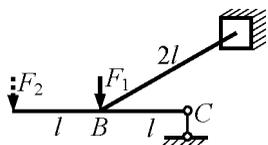


Рис. 02.1

02.1 После нагружения рамы силой $F_1=F$ добавляется сила F_2 (рис. 02.1), и участок BC становится прямым. Определить значение силы F_2 и угол наклона участка BC . Дано: $F, l, E, J_x, GJ_k = 2EJ_x/3$.

02.2 Стержневая система нагружена силой F (рис. 02.2). Определить изменение температуры Δt° первого стержня, при которой точка B перемещается точно по вертикали. Дано: F, l, E, α .

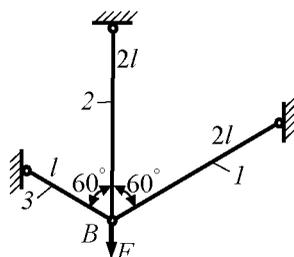


Рис. 02.2

02.3 При каком смещении δ правой опоры (рис. 02.3) коэффициент запаса прочности n балки будет наибольшим? Дано: F, l, E, a .

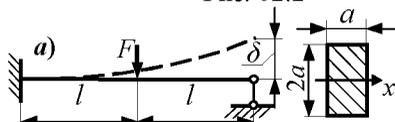


Рис. 02.3

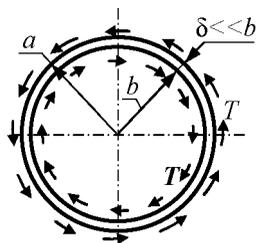


Рис. 02.4

02.4 Тонкостенный круглый стержень длиной l (рис. 02.4), зашпеленный с одной стороны, нагружен по обеим поверхностям касательными нагрузками интенсивностью T . При каком значении T возникнут первые пластические деформации? Дано: $l, a, b, \sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_{\text{т}}, l \gg a$.

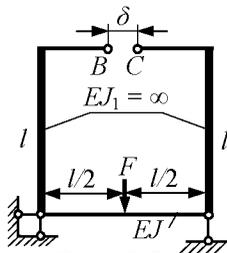


Рис. 02.5

02.5 Наибольшие нормальные напряжения, возникающие в момент закрытия зазора δ , соответствуют силе F (рис. 02.5). При дальнейшем увеличении этой силы указанные напряжения удваиваются. Во сколько раз при этом возрастает сама сила F ? Дано: EJ, l .

02.6 При каком значении силы F (рис. 02.6) объём материала трубки не изменяется? Чему при этом равен коэффициент запаса $n_{\text{т}}$, найденный по теории максимальных касательных напряжений? Дано: $p, d, \sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_{\text{т}}$.

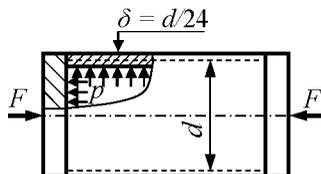


Рис. 02.6

1.10. Олимпиада 2003 г., г. Саранск, МГТУ им. Огарёва

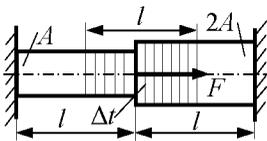


Рис. 03.1

03.1 В каком месте стержня (рис. 03.1) следует создать зону нагрева длиной l (заштрихована), чтобы сила F не производила работу? Дано: $l = 90$ мм, $F = \alpha \Delta t EA$.

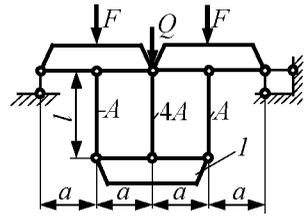


Рис. 03.2

03.2 При нагружении стержневой системы тремя силами (рис. 03.2), измеренное перемещение траверсы l составило $\delta = 10Fl/(EA)$. Каково отношение Q/F ?

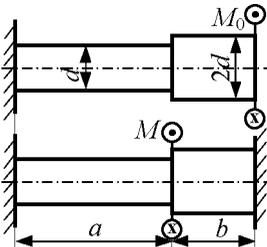


Рис. 03.3

03.3 Предварительное напряжённое состояние стержня создаётся закручиванием парой сил M_0 на угол φ и закреплением свободного торца (рис. 03.3). При последующем нагружении стержня парой сил M участки a и b должны быть равнопрочны. Найти зависимость φ от отношения $a:b$.

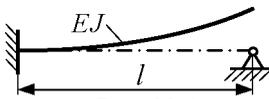


Рис. 03.4

03.4 Ось стержня имеет постоянную кривизну k . Найти положение сечения, не имеющего углового перемещения после соединения свободного конца стержня с неподвижной опорой (рис. 03.4), считая перемещения малыми и $l = 600$ мм.

03.5 По измеренному значению Δ_C линейного перемещения сечения C (рис. 03.5) найти наибольшее нормальное напряжение в этом сечении. Дано: $\Delta_C = 4$ мм, $d = 10$ мм, $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $l = 20d$.

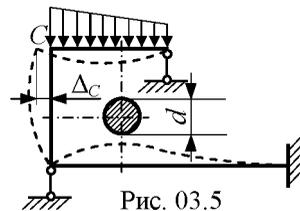


Рис. 03.5

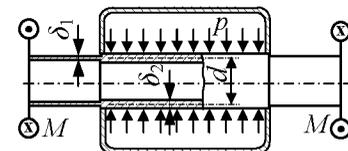


Рис. 03.6

03.6 При какой толщине δ_1 (рис. 03.6) будет обеспечена равнопрочность всех участков трубки? Использовать теорию максимальных касательных напряжений. Дано: $d, M = \pi d^3/6, \delta_2 = d/12$.

1.11. Олимпиада 2004 г., г. Дзержинск, ДФ НГТУ

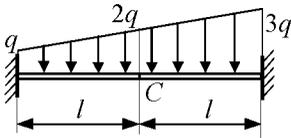


Рис. 04.1

04.1 Две одинаковых консольных балки (рис. 04.1) жёстко соединены торцевыми сечениями C . Найти значения силовых факторов в этих сечениях при нагружении балок распределёнными силами. Дано: q, J .

04.2 После сверления отверстия диаметром d (рис. 04.2) наибольшие углы сдвига на участках, ослабленных отверстием, оказались одинаковы. Найти глубину сверления a при длине $l = 50$ мм. При вычислениях принять $1,5^4 = 5$.

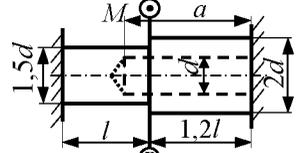


Рис. 04.2

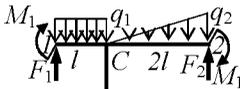


Рис. 04.3

04.3 В узле C поперечные силы и изгибающие моменты в стержнях отсутствуют. При каком отношении $q_1:q_2$ (рис. 04.3) значения угловых перемещений в торцевых сечениях одинаковы?

04.4 Распределённая нагрузка занимает половину площади торцевого сечения стержня (на рис. 04.4 заштрихована). По измеренной деформации ε ребра $b-b$ вычислить угол наклона торцевого сечения. Дано: $\varepsilon = 0,002$.

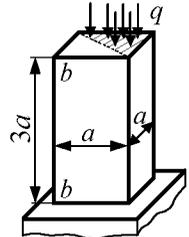


Рис. 04.4

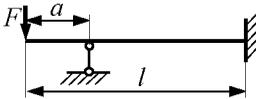


Рис. 04.5

04.5 На каком расстоянии a от конца балки (рис. 04.5) следует установить опору, чтобы значения наибольших линейных перемещений на консоли и в пролёте были одинаковы? Дано: $l = 1,2$ м.

04.6 Коэффициенты запаса на участках 1 и 2 (рис. 04.6), вычисленные по теории наибольших касательных напряжений, отличаются в три раза. При какой длине L стержня его объём не изменяется? Дано: $l = 80$ мм.

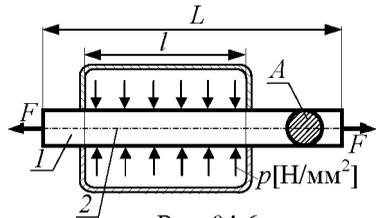


Рис. 04.6

1.12. Олимпиада 2005 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС

05.1 В правом пролёте, изогнутом по дуге окружности, наибольший прогиб равен v (рис. 05.1). Найти наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки. Дано: v, l, E, a .

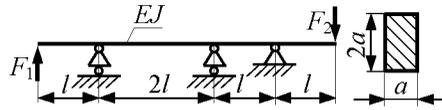


Рис. 05.1

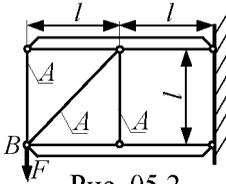


Рис. 05.2

05.2 Узел B получил перемещение δ (рис. 05.2). Найти значение силы F . Дано: δ, l, E, A .

05.3 Температура линейно изменяется по высоте сечения балки (рис. 05.3). При каком значении t° положение шарика становится неустойчивым? Весом шарика пренебречь. Дано: l, h, δ, α [1/град].

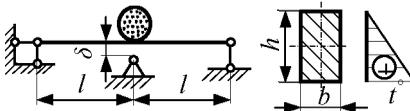


Рис. 05.3

05.4 Коэффициент запаса стержня (рис. 05.4), предварительно закрученного на угол φ , равен $n_t = 2$ (энергетическая теория). При каком повышении температуры стержня этот коэффициент будет исчерпан? Дано: $\varphi = 0,12$ рад, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/град, $G:E = 0,4$.



Рис. 05.4

05.5 Найти угол α (рис. 05.5), при котором запас потенциальной энергии деформации U максимален, и вычислить значение U_{max} . Дано: F, l, E, a .

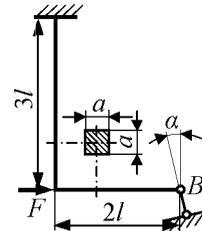


Рис. 05.5

05.6 Балка соединена с тросом (рис. 05.6), перекинутым через блок, и нагружена силой F . Блок подвешен к жёсткой опоре двойным тросом. Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки равно 360 МПа. Найти работу силы F при $a = 20$ мм, $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа (балка), $A = 20$ мм², $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$ МПа (трос).

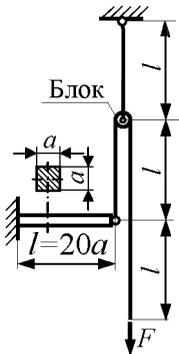


Рис. 05.6

1.13. Олимпиада 2006 г., г. Улан-Удэ, ВСГУТУ

06.1 Жёсткости рамы в направлении силы F и пружины одинаковы (рис. 06.1). Найти отношение наибольших линейных перемещений: вертикального и горизонтального. Дано: $F, l, EJ = \text{const}$.

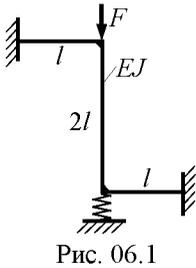


Рис. 06.1

06.2 Стержневая система нагружена силой F , а стержень 1 нагрет на Δt . Определить полное перемещение узла K (рис. 06.2). Дано: $F, l, A, \alpha,$

$$\Delta t^\circ = \frac{5F}{6\alpha EA}, \quad EA = \text{const}.$$

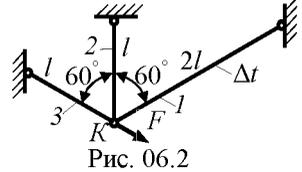


Рис. 06.2

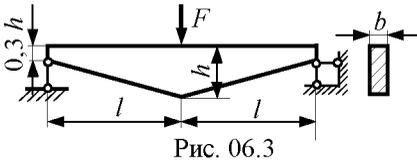


Рис. 06.3

06.3 Из условия прочности по нормальным напряжениям определить размер h поперечного сечения заданной балки (рис. 06.3). Дано: $F = 20$ кН, $[\sigma] = 150$ МПа, $l = 3$ м, $b = 0,4 \cdot h$.

06.4 Под действием силы F зазор δ закрывается (рис. 06.4). При каком положении подвижной опоры C обеспечивается прочность рамы? Дано: $l = 400$ мм, $a = 60$ мм, $\delta = 4$ мм, $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 120$ МПа.

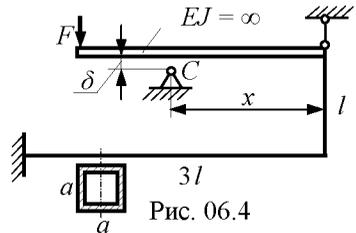


Рис. 06.4

06.5 Определить работу внешних сил (рис. 06.5). Деформациями траверсы пренебречь. Дано: F, l, E, A .

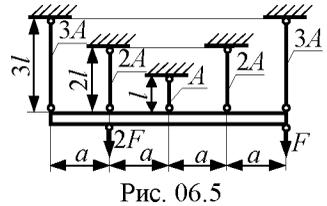


Рис. 06.5

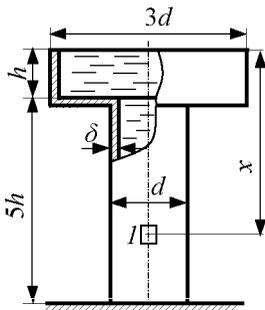


Рис. 06.6

06.6 Тонкостенная оболочка (рис. 06.6) находится под внутренним гидростатическим давлением. Найти положение элемента оболочки l , испытывающего чистый сдвиг. Дано: $h,$ γ [Н/м³] – объёмный вес жидкости.

1.14. Олимпиада 2007 г., г. Новочеркасск, ЮРГТУ

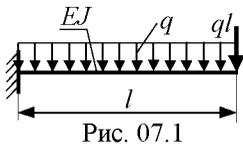


Рис. 07.1

07.1 Для заданной балки (рис. 07.1) вычислить: а) работу внешних сил, б) потенциальную энергию деформации.
Дано: q, l, EJ .

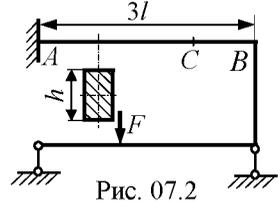


Рис. 07.2

07.2 На участке AB (рис. 07.2) наибольшее перемещение $v_C = 2$ мм. Найти σ_{max} в этом сечении при $l = 200$ мм, $h = 40$ мм, $E = 10^5$ МПа.

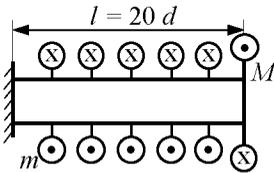


Рис. 07.3

07.3 Наибольшее угловое перемещение φ_{max} и угол поворота торцевого сечения стержня (рис. 07.3) равны по величине. Найти наибольшее касательное напряжение при $m = 100$ Нм/м, $d = 10$ мм.

07.4 На каком уровне a тонкостенная оболочка (рис. 07.4) равномерно растянута в окружном и меридиональном направлениях? Дано: $h, \delta, \gamma, \alpha = 30^\circ$.

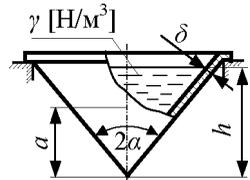


Рис. 07.4

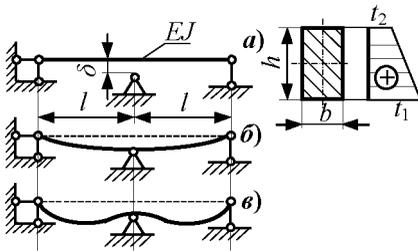


Рис. 07.5

07.5 Температура стержня изменяется по высоте сечения (рис. 07.5, а). При некотором значении $t = t_1 - t_2$ кривизна достигает значения k и зазор δ закрывается (рис. 07.5, б). Найти наибольшее нормальное напряжение в среднем сечении стержня при $t_1 - t_2$

$= nt$, полагая, что кривизна оси в этом сечении равна $-k$ (рис. 07.5, в). Дано: $h = 60$ мм, $l = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\delta = l/600$.

07.6 После введения шарнира C напряжённое состояние стержня (рис. 07.6, б) под действием собственного веса не изменилось. На каком расстоянии от шарнира находится сечение с наибольшим линейным перемещением, если $l = 1,4$ м?

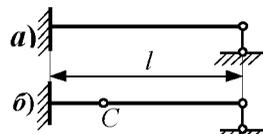


Рис. 07.6

1.15. Олимпиада 2008 г., г. Дзержинск, ДФ НГТУ

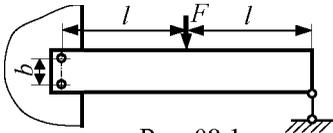


Рис. 08.1

08.1 Кронштейн закреплён слева двумя заклёпками, справа – шарнирной опорой (рис. 08.1). Определить силу F , разрушающую заклёпочное соединение, если усилие среза равно Q . Дано: Q , $l/b = 40$.

08.2 Продольная деформация ε , измеренная в середине пролёта, составляет $4 \cdot 10^{-4}$. При $l = 20h$ и $h = 20$ мм вычислить прогиб в середине пролёта, считая деформации упругими (рис. 08.2).

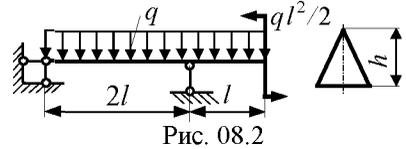


Рис. 08.2

08.3 Балка установлена на упругих опорах (рис. 08.3). Найти линейное перемещение сечения B , полагая $c = \frac{4FJ}{3l^3}$. Дано: q , l , E , J .

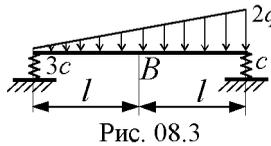


Рис. 08.3

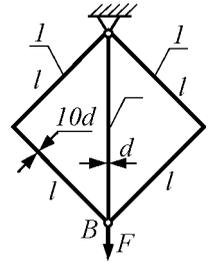


Рис. 08.4

08.4 Найти перемещение узла B (рис. 08.4). Дано: F , E , d , $l = 100d$.

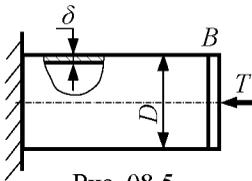


Рис. 08.5

08.5 Тонкостенная оболочка нагружена внутренним давлением p и силой T (рис. 08.5). При каком значении силы T осевое перемещение сечения B составит $W_B = \frac{5pl(1-2\mu)}{8E} \eta$ Краевой эффект не учитывать, $D/\delta = 10$.

08.6 Опора D может перемещаться по вертикали (рис. 08.6, а).

1) На сколько надо переместить опору D после приложения силы F , чтобы обеспечить равенство максимальных нормальных напряжений в сечениях B и C ?

2) Как правильно расположить заданное сечение (рис. 08.6, б), если $\sigma_{тс} = \sigma_{тр}$? $\sigma_{тр}$ и $\sigma_{тс}$ – пределы текучести при растяжении и сжатии соответственно.

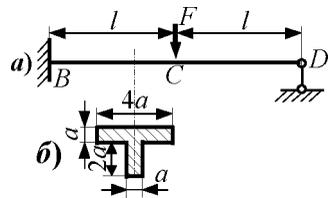


Рис. 08.6

1.16. Олимпиада 2009 г., г. Улан-Удэ, ВСГУТУ

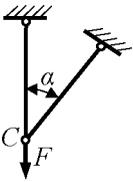


Рис. 09.1

09.1 Система из двух одинаковых стержней нагружена вертикальной силой F (рис. 09.1). Определить полное перемещение точки C . Дано: перемещения малы, площадь стержней A , длина l , модуль упругости E , $\alpha = 30^\circ$.

09.2 Стержень 2 с жёсткостью EJ опирается на стержень 1 с жёсткостью kEJ (рис. 09.2). При каком значении k прочность стержня 2 будет максимальна?

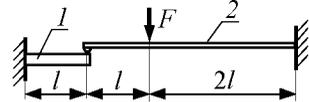


Рис. 09.2

09.3 В трубку с натягом вставлен стержень (рис. 09.3). Считая давление p между трубкой и стержнем постоянным по поверхности контакта, определить минимальное значение момента M , при котором начнётся проскальзывание стержня относительно трубки по всей поверхности контакта. Дано: p , l , d , коэффициент трения f , модули сдвига для трубки и стержня соотносятся как $G_{ст} = 5 \cdot G_{тр}$.

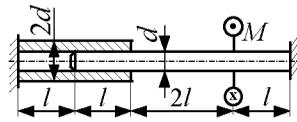


Рис. 09.3

09.4 Ступенчатый стержень закреплён между двумя жёсткими опорами (рис. 09.4). Определить напряжения, возникающие в центральном участке, при равномерном нагреве всего стержня на Δt . Дано: температурный коэффициент линейного расширения стержня α , модуль упругости E .

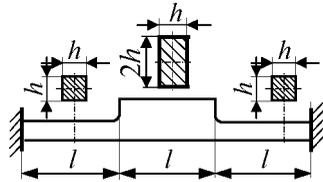


Рис. 09.4

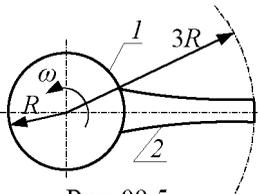


Рис. 09.5

09.5 Стержень 2 закреплён на вращающемся с угловой скоростью ω жёстком диске 1 (рис. 09.5). Найти максимальное напряжение в стержне и изменение его длины по сравнению с неподвижным состоянием. Дано: зависимость площади поперечного сечения от радиуса $A(r) = A_0 R/r$, плотность материала стержня ρ и модуль упругости E .

09.6 Сплошной резиновый цилиндр вставлен без зазора в тонкостенную алюминиевую трубку диаметром $D_{\text{ср}} = 100$ мм и толщиной $h = 1$ мм (рис. 09.6). Определить возникающие в трубке напряжения и изменение её диаметра при нагружении цилиндра по торцу давлением $p = 2$ МПа. Упругие постоянные резины: $E = 40$ МПа, $\mu = 0,45$; алюминия: $E = 7 \cdot 10^4$ МПа. Трением между трубкой, цилиндром и жёстким основанием пренебречь.

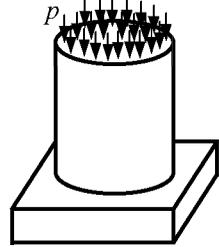


Рис. 09.6

1.17. Олимпиада 2010 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС

10.1 Определить величину изгибающего момента M , при котором торцевые сечения прямолинейного упругого стержня (рис. 10.1) сомкнутся, образуя брус малой кривизны с замкнутым гладким контуром. Дано: a, EJ .

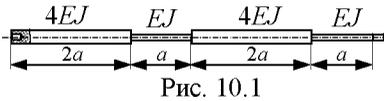


Рис. 10.1

10.2 Два кубика вставлены, как показано на рис. 10.2, в жёлоб и нагружены сверху пуансоном (давление приложено только над кубиками). Принимая жёлоб и пуансон абсолютно гладкими, жёсткими и бесконечными, определить минимальную величину прикладываемого к пуансону давления, при котором будут перекрыты зазоры. Дано: $a, \mu = 0,25, 3\Delta \ll a$.

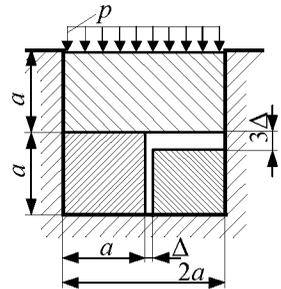


Рис. 10.2

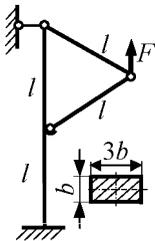


Рис. 10.3

10.3 Для приведённой балочно-стержневой конструкции (рис. 10.3) определить вертикальное перемещение точки приложения силы. Деформации считать малыми. Все стержни имеют одинаковое сечение. Дано: $b, l = 15b, E, F$.

10.4 Вал, состоящий из двух участков разной крутильной жёсткости (рис. 10.4), сочленён с двумя абсолютно жёсткими брусьями. На свободные концы брусьев оказывает давление абсолютно жёсткое коромысло,

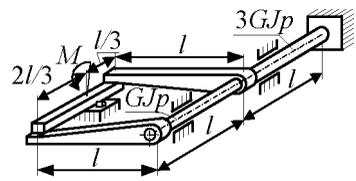


Рис. 10.4

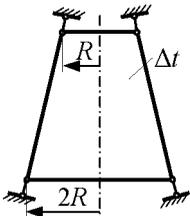


Рис. 10.5

к которому прикладывается момент (в вертикальной плоскости, параллельной оси вала). Определить угол поворота коромысла. Деформации и перемещения считать малыми. Дано: l, M, GJ_p .

10.5 Тонкостенная шарнирно-закрепленная оболочка в форме усеченного конуса (рис. 10.5) нагревается на

Δt . Определить допускаемую степень нагрева. Дано: $\alpha, E, R, \sigma_T, n_T$.

10.6 Определить горизонтальное перемещение торцевого сечения спиралевидного бруса (рис. 10.6), нагруженного изгибающим моментом. Дано: $b, E, M, l \gg b$.

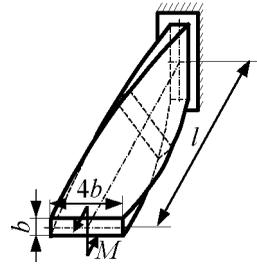


Рис. 10.6

1.18. Олимпиада 2011 г., г. Пермь, ПНИПУ

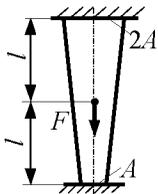


Рис. 11.1

11.1 Дан брус переменного сечения (рис. 11.1), нагруженный в центре силой F . В каком сечении стержня возникает максимальное по модулю нормальное напряжение?

11.2 Имеется стержень с начальным несовершенством, выгнутый по дуге окружности большого радиуса со стрелой прогиба в центре v_0 (рис. 11.2). Как необходимо нагреть стержень, чтобы он стал прямым, если коэффициент температурного расширения равен α ?

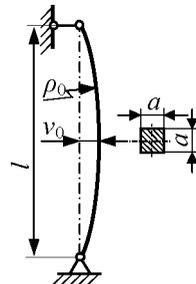


Рис. 11.2

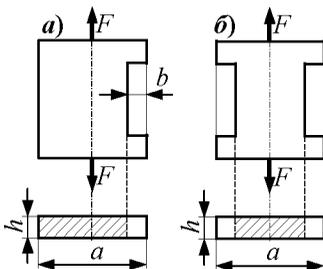


Рис. 11.3

11.3 При каких значениях $\frac{b}{a} = \lambda$

максимальное нормальное напряжение в первом бруске станет больше, чем во втором (рис. 11.3)?

11.4 Дан двухступенчатый брус, зашпёркнутый по концам в заделки (рис. 11.4). Левая часть бруса нагружена давлением p . Найти изменение объёма бруса.

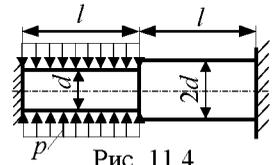


Рис. 11.4

11.5 Бесконечный стержень, имеющий плотность ρ , лежит на абсолютно жёстком столе таким образом, что его конец выдвинут за край стола на участок длиной l (рис. 11.5). Найти координату точки касания стержня со столом a .

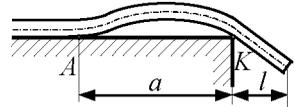


Рис. 11.5

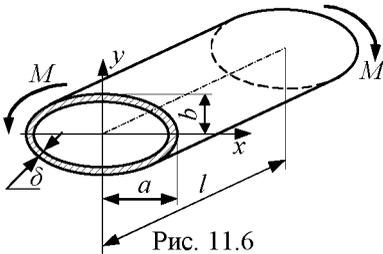
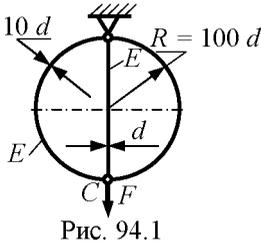


Рис. 11.6

11.6 Тонкостенная трубка эллиптического поперечного сечения ($\delta \ll b$) закручивается моментами M (рис. 11.6). Найти величину равнодействующей касательных напряжений в первой четверти сечения: $x \geq 0, y \geq 0$.

ЧАСТЬ 2. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.1. Олимпиада 1994 г., г. Самара, СГАУ



94.1 Найти перемещение узла C (рис. 94.1). Дано: F, E, d .

РЕШЕНИЕ

Перемещение узла C (рис. 94.1 Р)

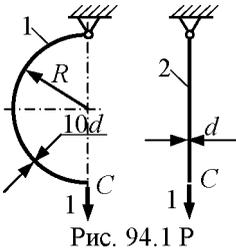
$$w_C = \frac{F}{K}, \text{ жёсткость системы } K = 2K_1 + K_2.$$

$$\text{Элемент 1: } \delta_{11} = \frac{\pi R^3}{2EJ},$$

$$K_1 = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{2E\pi(10d)^4}{\pi(100d)^3 64} = 3,125 \cdot 10^{-4} Ed.$$

$$\text{Элемент 2: } \delta_{22} = \frac{2R}{EA},$$

$$K_2 = \frac{1}{\delta_{22}} = \frac{E\pi d^2}{2 \cdot 100d \cdot 4} = 39,270 \cdot 10^{-4} Ed.$$

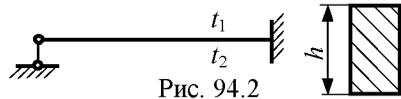


Следовательно,

$$K = 2K_1 + K_2 = 2 \cdot 3,125 \cdot 10^{-4} Ed + 39,270 \cdot 10^{-4} Ed = 45,52 \cdot 10^{-4} Ed \text{ и}$$

$$w_C = \frac{F}{K} = \frac{F}{45,52 \cdot 10^{-4} Ed} = 219,7 \frac{F}{Ed}.$$

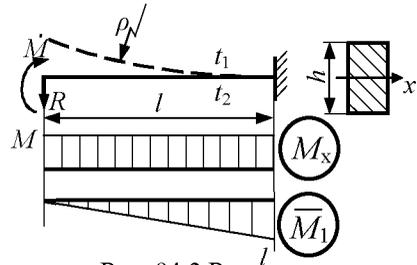
94.2 Изменение температуры по высоте балки равно $\Delta t = t_2 - t_1$ (рис. 94.2). Найти наибольшее нормальное напряжение. Дано: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/град, $\Delta t = 50^\circ \text{C}$.



РЕШЕНИЕ

Температурные перемещения в основной системе (рис. 94.2 Р) аналогичны перемещениям при нагружении парой сил

$$M = \frac{EJ}{\rho} = \frac{EJ \varepsilon}{y} = \frac{EJ \alpha \Delta t}{h}.$$



Раскрываем статическую неопределимость методом сил

$$R = \frac{\Delta_{1X}}{\delta_{11}} = \frac{M \cdot l \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3EJ\alpha \Delta t}{2lh}$$

Наибольшее напряжение

$$\sigma = \frac{R \cdot l}{W} = \frac{3E\alpha \Delta t}{2h} \cdot \frac{J}{W} = \frac{3}{4} E\alpha \Delta t = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 90,0 \text{ МПа.}$$

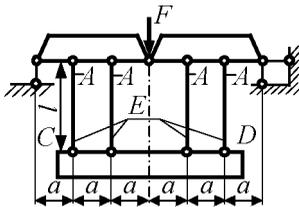


Рис. 94.3

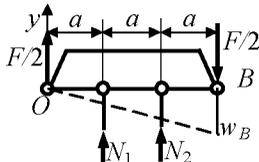


Рис. 94.3 P

94.3 Траверса CD (рис. 94.3) получила перемещение δ . Найти F . Дано: E, A, l, δ .

РЕШЕНИЕ

Из условия равновесия всей системы реакции опор равны $\frac{F}{2}$. Из условия равновесия отсечённой части (рис. 94.3 P) следует

$$N_1 = -\frac{3F}{2}, N_2 = \frac{3F}{2}$$

Приравнявая работу внешней силы к потенциальной энергии деформации стержней

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{F}{2} \cdot w_B = 2 \frac{\left(\frac{3F}{2}\right)^2 l}{2EA}, \text{ находим } w_B = \frac{9Fl}{EA}$$

Перемещение траверсы

$$\delta = \frac{1}{3} w_B + \Delta l_1 = \frac{9Fl}{3EA} + \frac{3Fl}{2EA} = \frac{9Fl}{2EA}, \text{ следовательно, } F = \frac{2EA\delta}{9l}$$

94.4 Жёсткая опора B заменена на упругую (рис. 94.4). Какова должна быть жёсткость этой опоры, чтобы замена не повлияла на величину коэффициента запаса? Дано: E, J, l .

РЕШЕНИЕ

Условие неизменности коэффициента запаса выполняется, если реакция R упругой опоры B не меньше F , т.е. $R \geq F$.

Эпюра изгибающих моментов при $F = R$ показана на рис. 94.4 P.

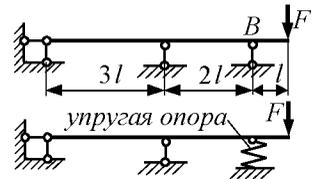


Рис. 94.4

Способом Верещагина определяем осадку пружины $\lambda = \frac{4Fl^3}{EJ}$.

Условие задачи выполнено, если $\frac{F}{K} \leq \lambda$. Тогда жёсткость упругой опоры $K \geq \frac{EJ}{4l^3}$.

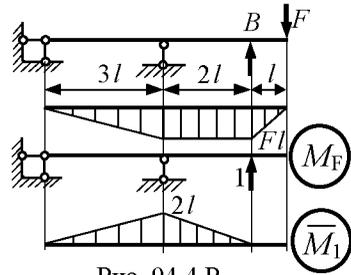


Рис. 94.4 Р

94.5 При каком эксцентриситете e (рис. 94.5) стержни 1 и 2 не подвергаются изгибу? Размер a задан.

РЕШЕНИЕ

Уравнение равновесия отсечённой части (рис. 94.5 Р)

$$\sum z = 0, \quad N_1 + N_2 = F,$$

$$\sum M_o = 0, \quad (N_1 - N_2) \frac{a}{2} = F e.$$

При отсутствии изгиба удлинения стержней одинаковы

$$\frac{N_1 \cdot l}{2E \cdot 2a^2} = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot 2a^2}, \text{ т.е. } N_1 = 2 \cdot N_2.$$

Следовательно, $3N_2 = F$, $N_2 = \frac{2Fe}{a}$, $N_1 = \frac{4Fe}{a}$, $e = \frac{a}{6}$.

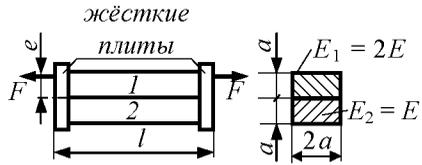


Рис. 94.5

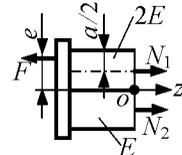


Рис. 94.5 Р

цилиндрическая оболочка

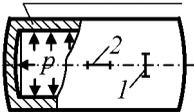


Рис. 94.6

94.6 Показания тензорезисторов 1 и 2 (рис. 94.6) отличаются в 5 раз. Найти коэффициент Пуассона μ .

РЕШЕНИЕ

Известно, что в тонкостенной цилиндрической оболочке, нагруженной внутренним давлением, $\sigma_t = 2 \cdot \sigma_m$ (рис. 94.6 Р). Тогда меридиональные и окружные деформации

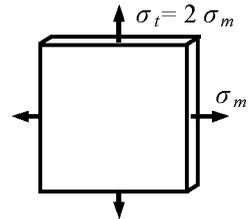


Рис. 94.6 Р

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_m - \mu \cdot 2\sigma_m) = \frac{\sigma_m}{E} (1 - 2\mu),$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (2\sigma_m - \mu \cdot \sigma_m) = \frac{\sigma_m}{E} (2 - \mu).$$

Так как $\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_m} = \frac{2 - \mu}{1 - 2\mu} = 5$, то $\mu = \frac{1}{3}$.

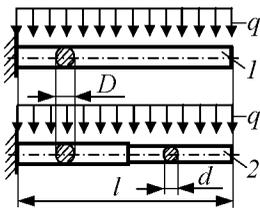


Рис. 94.7

94.7 Каков наибольший процент экономии материала при замене балки l на балку 2 (рис. 94.7) без снижения прочности?

РЕШЕНИЕ

Условие равнопрочности участков балки (рис. 94.7 Р)

$$\frac{ql^2}{2 \cdot 0,1D^3} = \frac{q(kl)^2}{2 \cdot 0,1d^3}, \text{ следовательно, } d = Dk^{\frac{2}{3}}.$$

Объёмы балок l и 2 соответственно равны

$$V_1 = \frac{\pi D^2}{4} l,$$

$$V_2 = \frac{\pi D^2}{4} l (1 - k) + \frac{\pi d^2}{4} kl = \frac{\pi D^2}{4} l (k^{\frac{7}{3}} + 1 - k).$$

Из условия $\frac{dV_2}{dk} = 0$ находим $k = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{4}}$,

при котором объём V_2 минимален.

Экономия материала

$$\Delta = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \cdot 100 = 100k(1 - k^{\frac{4}{3}}) = 100 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(1 - \frac{3}{7}\right) = 30,3\%.$$

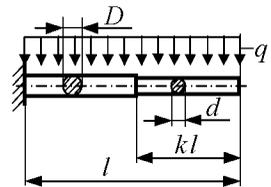


Рис. 94.7 Р

2.2. Олимпиада 1995 г., г. Челябинск, ЧГТУ

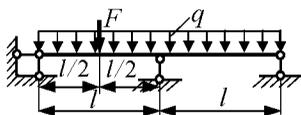


Рис. 95.1

95.1 При каком значении силы F отсутствует реакция правой опоры (рис. 95.1)?
Дано: q, l .

РЕШЕНИЕ

Силовая схема и эпюра изгибающих моментов (использован принцип суперпозиции) при отсутствии реакции опоры R показаны на рис. 95.1 Р. Находим перемещение v_K , используя эпюру \bar{M}_1 и учитывая, что $v_K = 0$, получаем

$$v_K = 2 \left(\frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} l \right) - \frac{1}{2} \frac{Fl}{4} \cdot l \cdot \frac{1}{2} l = 0,$$

следовательно, $F = 4ql$.

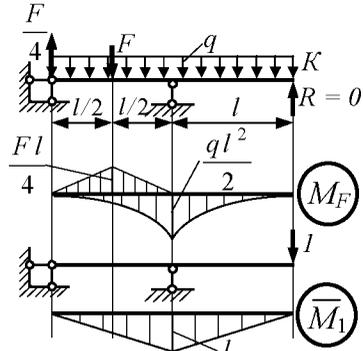


Рис. 95.1 Р

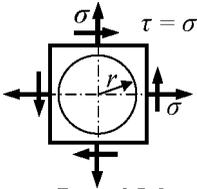


Рис. 95.2

95.2 Найти размеры и направление полуосей эллипса, в который переходит окружность при деформации элемента (рис. 95.2). Дано: σ , E , μ .

РЕШЕНИЕ

Определяем главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 , положение главных площадок I и II аналитически (рис. 95.2 Р, а, б)

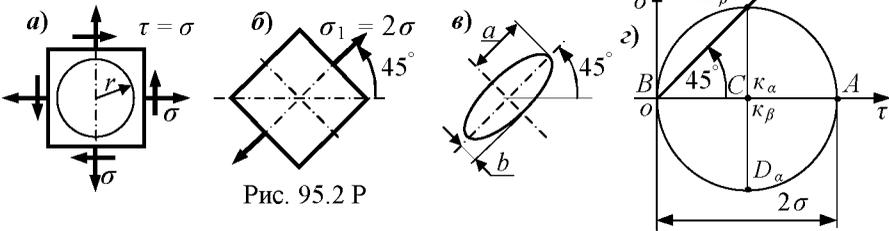


Рис. 95.2 Р

$$\sigma_{I,II} = \frac{1}{2} \left[\sigma + \sigma \pm \sqrt{(\sigma - \sigma)^2 + 4\sigma^2} \right] = \sigma \pm \sigma, \quad \sigma_1 = 2\sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$, $\alpha_0 = 45^\circ$ или графически (рис. 95.2 Р, з) $\sigma_1 = OA = 2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\alpha_0 = 45^\circ$.

Вычислив деформации $\varepsilon_1 = \frac{2\sigma}{E}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu \frac{2\sigma}{E}$, находим размеры полуосей эллипса

$$a = r(1 + \varepsilon_1) = r \left(1 + \frac{2\sigma}{E} \right), \quad b = r(1 + \varepsilon_2) = r \left(1 - \mu \frac{2\sigma}{E} \right).$$

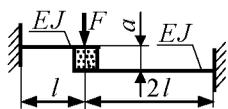


Рис. 95.3

95.3 При каком значении силы F будет разрушен бетонный кубик с ребром a (рис. 95.3)? Дано: a, l, EJ, σ_e – предел прочности бетона.

РЕШЕНИЕ

Бетонный кубик разрушается при $R = \sigma_e a^2$ (рис. 95.3 Р).

Так как $v_1 = v_2$, то

$$\frac{(F - R)l^3}{3EJ} = \frac{R(2l)^3}{3EJ} \text{ и } F = 9R = 9\sigma_e a^2.$$

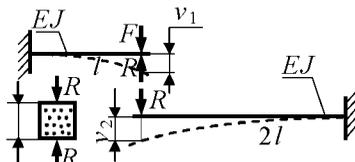


Рис. 95.3 Р

95.4 Стержень нагружен осевыми силами с линейным изменением их интенсивности (рис. 95.4). Найти перемещение сечения B . Дано: q, l, EA .

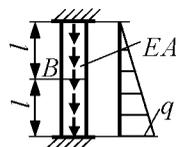


Рис. 95.4

РЕШЕНИЕ

Разложим заданную нагрузку на составляющие 1 и 2 (рис. 95.4 Р). Учитывая, что при нагрузке 2 перемещение среднего сечения равно нулю, находим перемещение от нагрузки 1

$$w_B = \int_0^l \frac{\left(\frac{ql}{2} - \frac{q}{2}z\right) dz}{EA} = \frac{ql^2}{4EA}.$$

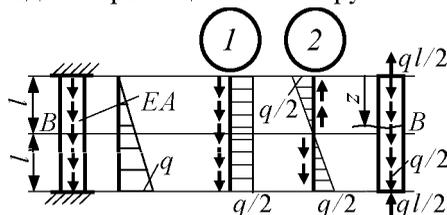


Рис. 95.4 Р

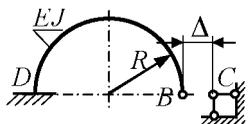


Рис. 95.5

95.5 Концевое сечение B соединяется с неподвижным шарниром C (рис. 95.5). Найти изгибающий момент в сечении D . Дано: Δ, R, EJ .

РЕШЕНИЕ

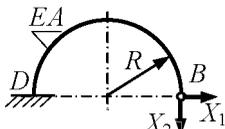


Рис. 95.5 Р

Задача статически неопределима. Для определения X_1 и X_2 (рис. 95.5 Р) составим уравнения перемещений

$$\Delta_{1F} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = \Delta,$$

$$\Delta_{2F} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0.$$

Учитывая, что $M_F = 0$, $\bar{M}_1 = R \sin \alpha$, $\bar{M}_2 = -R(1 - \cos \alpha)$, находим

$$\Delta_{1F} = \Delta_{2F} = 0, \quad EJ \delta_{11} = \int_0^\pi (R \sin \alpha)^2 R d\alpha = \frac{\pi R^3}{2},$$

$$EJ \delta_{22} = \int_0^\pi R^2 (1 - \cos \alpha)^2 R d\alpha = \frac{3\pi R^3}{2},$$

$$EJ \delta_{12} = EJ \delta_{21} = - \int_0^\pi R \sin \alpha R (1 - \cos \alpha)^2 R d\alpha = -2R^3$$

и решая систему уравнений, получаем

$$X_1 = \frac{6\pi EJ}{3\pi^2 - 16} \cdot \frac{\Delta}{R^3}, \quad X_2 = \frac{8EJ}{3\pi^2 - 16} \cdot \frac{\Delta}{R^3}.$$

Изгибающий момент в сечении D

$$M = X_2 \cdot 2R = \frac{16EJ}{3\pi^2 - 16} \cdot \frac{\Delta}{R^2}.$$

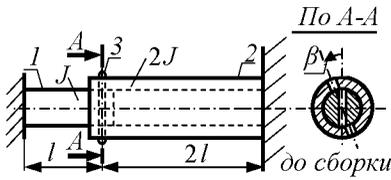


Рис. 95.6

95.6 При сборке стержневой системы сечения A стержня 1 и трубки 2 были взаимно повернуты на угол β , а затем соединены штифтом 3 (рис. 95.6). Определить потенциальную энергию деформации системы. Дано: β , l , G , J .

РЕШЕНИЕ

Потенциальная энергия системы (рис. 95.6 Р)

$$U = \frac{1}{2}(M\varphi_1 + M\varphi_2), \quad \text{где}$$

φ_1 и φ_2 – угловые деформации сечений A стержня 1 и трубки 2 . Учитывая, что $\varphi_1 + \varphi_2 = \beta$, получаем

$$U = \frac{1}{2} M \beta.$$

Так как $\frac{Ml}{GJ} = \frac{M \cdot 2l}{G \cdot 3J} = \beta$, то $M = \frac{3GJ}{5l} \cdot \beta$ и $U = 0,3 \frac{GJ \beta^2}{l}$.

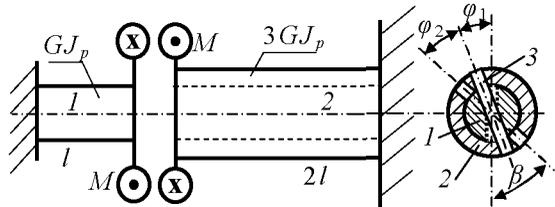


Рис. 95.6 Р

2.3. Олимпиада 1996 г., г. Нижний Новгород, НГТУ

96.1 На стальную пластинку действует нагрузка, распределённая во линии CB (рис. 96.1). Построив эпюры внутренних усилий, определить, во сколько раз прочность пластинки в сечении 1 больше (меньше), чем в сечении 2. При расчёте считать справедливыми формулы для определения напряжений, полученные для брусьев постоянного сечения.

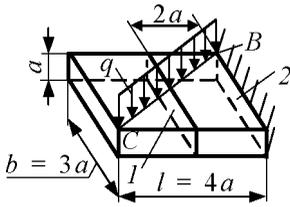


Рис. 96.1

РЕШЕНИЕ

Равнодействующая распределённой нагрузки q , расположенной левее произвольного сечения z (рис. 96.1 Р),

$$R_q = q \frac{z}{\cos \beta} = \frac{5}{4} q z, \text{ где } \cos \beta = \frac{4}{5}.$$

В сечении, отстоящем на расстоянии z ,

$$Q_q = -R_q = -\frac{5}{4} q z,$$

$$M_x = -R_q \cdot \frac{z}{2} = -\frac{5}{8} q z^2,$$

$$M_z = R_q \cdot \left(\frac{3a}{2} - \frac{z}{2} \operatorname{tg} \beta \right) = \frac{15}{8} q z \left(a - \frac{z}{4} \right).$$

В сечении 2 в опасной точке действуют только напряжения от изгиба

$$(\sigma_z)_2 = \frac{M_{x_2}}{W_x} = \frac{10 q a^2}{3 a \cdot a^2} = \frac{20 q}{3 a}.$$

В сечении 1 возникают напряжения от кручения и изгиба

$$(\sigma_z)_1 = \frac{M_{x_1}}{W_x} = \frac{2,5 q a^2}{3 a \cdot a^2} = \frac{5 q}{3 a},$$

$$(\tau_{zx})_1 = \frac{M_{z_1}}{W_\kappa} = \frac{\frac{15}{16} q a^2}{0,267 \cdot 3 a \cdot a^2} = 2,341 \frac{q}{a},$$

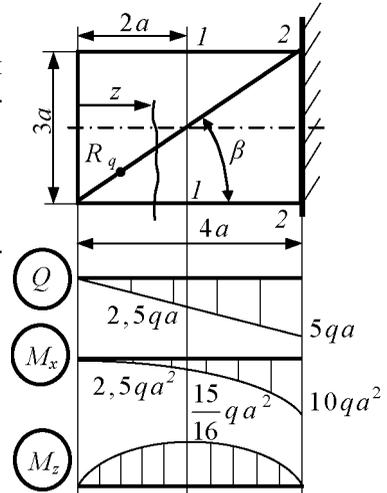


Рис. 96.1 Р

$$\left(\sigma_{\text{экв III}}\right)_1 = \sqrt{(\sigma_z)_1^2 + 4 \cdot (\tau_{zx})_1^2} = 6,850 \frac{q}{a}.$$

Сравнивая напряжения, видим, что

$$\frac{(\sigma_z)_2}{\left(\sigma_{\text{экв III}}\right)_1} = \frac{20}{6,85} = 2,92 \text{ раза.}$$

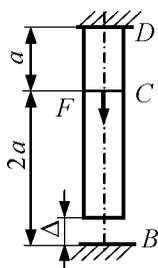


Рис. 96.2

96.2 Брус растянули силой F , перекрывающей зазор Δ (рис. 96.2). В момент касания нижнего торца бруса с опорой B его приварили к ней сваркой, после чего силу F сняли. Определить остаточные усилия в брусe и положение сечения C после разгрузки, полагая напряжения, возникающие в брусe, упругими. При расчёте считать $\Delta \ll a$. Жёсткость поперечного сечения бруса принять равной EA .

РЕШЕНИЕ

Определим силу, перекрывающую зазор Δ

$$\frac{F a}{EA} = \Delta, \text{ откуда } F = \frac{EA}{a} \Delta.$$

Разгрузка равносильна приложению силы в обратном направлении (рис. 96.2 Р).

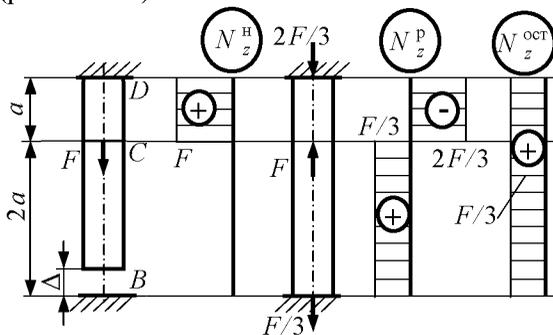


Рис. 96.2 Р

Рассчитав статически неопределимую систему, находим реакции в опорах и строим эпюру N_z^P при разгрузке. Складывая эпюры при нагружении и разгрузке, построим эпюру остаточных усилий.

Положение сечения C после разгрузки найдём по выражению:

$$\Delta_C = \frac{N_z^{\text{ост}} a}{EA} = \frac{F a}{3EA} = \frac{\Delta}{3}.$$

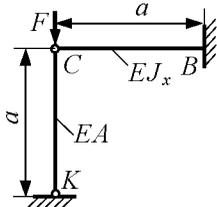


Рис. 96.3

96.3 Конструкция состоит из упругой балки CB и связанной с ней тонкой упругой струны CK (рис. 96.3). В процессе монтажа конструкции струну натянули так, что после окончания сборки она оказалась растянутой силой F_0 . На собранную конструкцию приложили силу F . Построить график, характеризующий зависимость перемещения точки C от силы F при $2F_0 > F > 0$, $Aa^2/J_x = 5$.

РЕШЕНИЕ

Пока сила F мала, система работает как статически неопределимая.

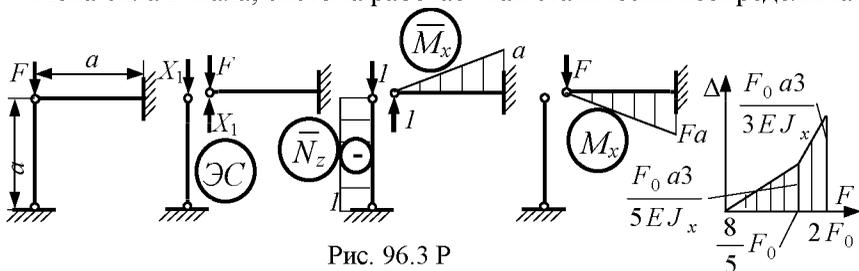


Рис. 96.3 Р

Раскроем статическую неопределимость рамы:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right) + \frac{1 \cdot a \cdot 1}{EA} = \frac{a^3}{3EJ_x} \left(1 + \frac{3J_x}{Aa^2} \right) = \frac{8}{15} \frac{a^3}{EJ_x};$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} \cdot F a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right) = -\frac{a^3}{3EJ_x}; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{5}{8} F.$$

При $\frac{5}{8} F = F_0$ или $F = \frac{8}{5} F_0$ струна выйдет из работы; в этот момент на балку действует сила $F_\sigma = \frac{3}{8} F = \frac{3}{8} \cdot \frac{8F_0}{5} = \frac{3}{5} F_0$. Прогиб в точке C балки будет равен $\Delta_C = \frac{F_\sigma a^3}{3EJ_x} = \frac{F_0 a^3}{5EJ_x}$.

При дальнейшем увеличении нагрузки, возрастающая сила будет деформировать только балку; полное перемещение точки C балки при этом будет равно

$$\Delta'_C = \frac{F_0 a^3}{5EJ_x} + \frac{2}{3} \frac{F_0 a^3}{EJ_x} = \frac{F_0 a^3}{3EJ_x}.$$

График, характеризующий зависимость перемещения точки C от нагрузки, показан на рис. 96.3 Р.

96.4 Диаметр бруса круглого сечения изменяется по закону $d_z = d_0 \left(1 + \frac{3z}{l}\right)$.

Он закручен равномерно распределённым скручивающим моментом интенсивности m (рис. 96.4). Определить максимальные напряжения в брус. Модуль сдвига материала бруса равен G . Гипотезу плоских сечений для бруса считать справедливой.

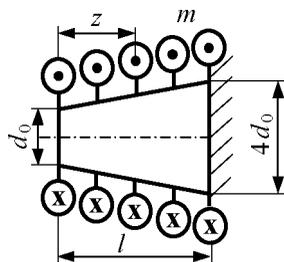


Рис. 96.4

РЕШЕНИЕ

Крутящий момент в произвольном сечении z : $M_z = mz$.

Максимальные напряжения в этом сечении

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{mz}{\pi d_0^3 \left(1 + \frac{3z}{l}\right)^3}.$$

Исследуем эти напряжения на экстремум

$$\frac{d\tau_{\max}}{dz} = \frac{16m}{\pi d_0^3} \left[\left(1 + \frac{3z}{l}\right)^3 - 3 \left(1 + \frac{3z}{l}\right)^2 \cdot \frac{3z}{l} \right] = 0.$$

Отсюда находим положение опасного сечения $z = z_0 = \frac{l}{6}$.

В этом сечении $\tau_{\max} = \frac{64ml}{81\pi d_0^3}$.

96.5 Средняя опора C балки квадратного сечения получила осадку Δ (рис. 96.5). Как изменятся наибольшие нормальные напряжения в балке, если при тех же условиях балка будет заменена балкой круглого сечения той же высоты? Дайте обоснование Вашему заключению.

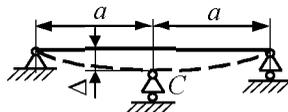


Рис. 96.5

РЕШЕНИЕ

Заданная система статически неопределимая. Реакция в средней опоре X_1 может быть найдена из канонического уравнения метода сил: $\delta_{11} X_1 + \Delta = 0$.

Так как величина δ_{11} обратно пропорциональна J_x , то X_1 и зависящий от него момент в опорном сечении C балки будут пропорциональны J_x : $M_C = \kappa J_x$.

Максимальные напряжения над опорой $\sigma_{\max} = \frac{M_C}{J_x} |y|_{\text{наиб}} = \kappa |y|_{\text{наиб}}$.

Поскольку в балках круглого и квадратного поперечных сечений $|y|_{\text{наиб}}$ одинакова, то напряжения в круглой балке будут такие же, как и в квадратной.

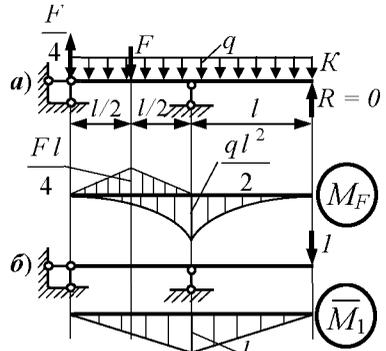


Рис. 96.5 Р

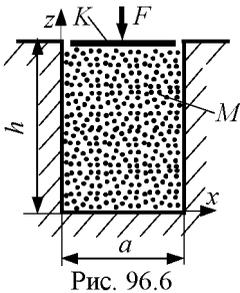


Рис. 96.6

96.6 В абсолютно жёстком материале сделано гнездо квадратного сечения $a \times a$, высотой h (рис. 96.6). В нём силой F сжат материал M с упругими константами E, ν . Определить, пренебрегая трением со стенками, на сколько поднимется крышка K , если материал M нагреть на t° . Коэффициент линейного расширения материала равен α .

РЕШЕНИЕ

При нагревании материала со стороны крышки и стенок гнезда на материал будут действовать распределённые напряжения:

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} = -\frac{F}{a^2}, \quad \sigma_x = \sigma_y = -p.$$

Величину давления p найдём из условия

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha t = 0, \text{ отсюда}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\nu F}{a^2(1-\nu)} - \frac{\alpha t E}{1-\nu}.$$

Перемещения материала вдоль оси z

$$\Delta l_z = \varepsilon_z \cdot h = \frac{h}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha t h = \frac{(1+\nu)h}{1-\nu} \left[-\frac{F(1-2\nu)}{Ea^2} + \alpha t \right].$$

Первый член этого уравнения показывает, на сколько переместится крышка K от силы F , а второй – от повышения температуры.

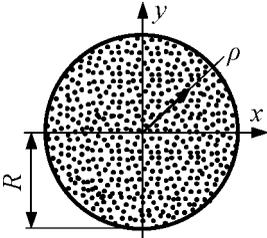


Рис. 96.7

96.7 Стержень круглого поперечного сечения сделан из пористого материала, причём плотность пор пропорциональна расстоянию от центра C (рис. 96.7). В целом поры ослабляют сечение на 25%. Определить осевой момент инерции сечения относительно горизонтальной оси x .

РЕШЕНИЕ

Элементарная кольцевая площадка dA_0 на расстоянии ρ от оси стержня z равна

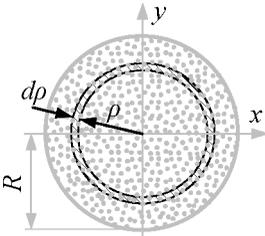


Рис. 96.7 Р

$$dA_0 = 2\pi\rho d\rho \cdot \left(1 - \frac{\kappa_0 \rho}{R}\right),$$

где κ_0 – коэффициент плотности пор на радиусе ρ .

Заполненная площадь сечения

$$A_0 = \int_0^R dA_0 = \int_0^R 2\pi\rho \left(1 - \frac{\kappa_0 \rho}{R}\right) d\rho = 0,75\pi R^2,$$

откуда $\kappa_0 = 3/8$.

Осевой момент инерции поперечного сечения стержня

$$J_x = \frac{J_p}{2} = \frac{1}{2} \int_0^R \rho^2 dA_0 = \frac{1}{2} \int_0^R 2\pi\rho^3 \left(1 - \frac{3\rho}{8R}\right) d\rho = \frac{7\pi R^4}{40}.$$

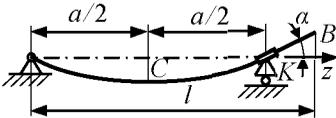


Рис. 96.8

96.8 Балка постоянного сечения закреплена на двух опорах (рис. 96.8). Левая опора – шарнирно неподвижная, правая – в виде короткой трубки, которая под малым углом наклонена к оси z и может свободно перемещаться вдоль

этой оси, изгибая балку. При каком α прогибы в точках C и B будут равны по абсолютному значению? Трением между трубкой и балкой пренебречь.

РЕШЕНИЕ

В правой опоре K возникают момент M и реактивная сила M/a .

Искомый размер a найдём из условия: $|y|_C = y_B = \theta_K \cdot (l - a)$ (1)

Для определения прогиба в точке C и угла поворота в правой опоре K , приложим в направлении искомых перемещений единичные силовые факторы, как показано на рис. 96.8 Р.

Перемножая эпюры способом Верещагина, найдём

$$\theta_K = \frac{\frac{1}{2} M \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}{EJ_x} = \frac{M a}{3EJ_x},$$

$$y_C = \frac{\frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{M}{2}}{EJ_x} = \frac{M a^2}{16EJ_x}.$$

Для заданной конструкции $\theta_K = \alpha$

и, следовательно, $M = \frac{3\alpha EJ_x}{a}$.

Из условия (1) найдём a : $\frac{3\alpha a}{16} = \alpha(l - a)$, откуда $a = \frac{16}{19}l$.

96.9 Определить при каких величинах a и β максимальный изгибающий момент в раме (рис. 96.9) будет иметь наименьшее значение (по абсолютной величине).

РЕШЕНИЕ

Чтобы максимальный изгибающий момент в раме был наименьшим по абсолютной величине, изгибающие моменты в опасных сечениях нужно уравнять, то есть должны выполняться следующие условия:

$$M_{x1} = -M_{x2} = -F \cdot \cos \alpha \cdot l = \frac{M}{2};$$

$$M_{x3} = -M - F \cdot \cos \alpha \cdot l + F \cdot \sin \alpha \cdot \beta l \leq \frac{M}{2}.$$

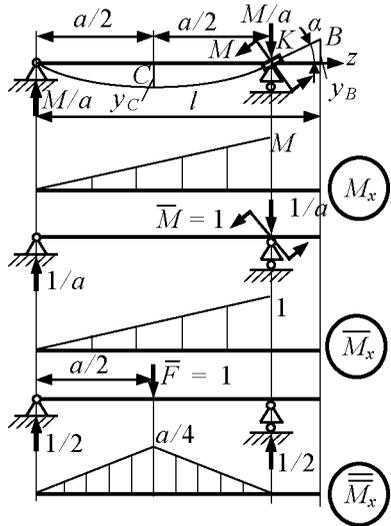


Рис. 96.8 Р

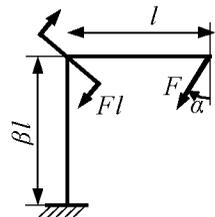


Рис. 96.9

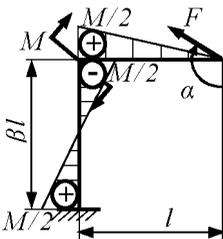


Рис. 96.9 Р

Подставляя в эти условия значение $M = F \cdot l$, получим

$$\cos \alpha = -\frac{M}{2 \cdot l} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 120^\circ; \quad \beta \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,155.$$

2.4. Олимпиада 1997 г., г. Новочеркасск, НГТУ

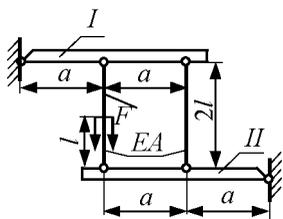


Рис. 97.1

97.1 Доказать, что работа силы F равна потенциальной энергии деформации стержневой системы (рис. 97.1). Дано: F, l, EA . Деформациями стержней I и II пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Левый стержень имеет два участка. Из уравнений равновесия обеих частей системы (рис. 97.1 Р, а)

$$\sum m_{o_2} = N_2 \cdot l - N_1 \cdot 2l = 0,$$

$$\sum m_{o_1} = N_2 \cdot 2l - (F + N_1) \cdot l = 0,$$

следует, что $N_1 = \frac{F}{3}$, $N_2 = \frac{2F}{3}$, $N_3 = N_1 + F = \frac{4F}{3}$.

Перемещения w связаны с изменениями длины стержней (рис. 97.1 Р, б):

$$w_B - w_M = \frac{N_3 l}{EA} = \frac{4Fl}{3EA}, \quad w_D - w_K = \frac{N_2 \cdot 2l}{EA} = \frac{4Fl}{3EA},$$

$$w_C - w_B = \frac{N_1 l}{EA} = \frac{Fl}{3EA}.$$

Учитывая, что

$$w_D = 2w_M, \quad w_C = 2w_K,$$

после преобразований

$$\text{получим: } w_B = \frac{25Fl}{9EA}.$$

Сила F производит ра-

$$\text{боту } A_F = \frac{F w_B}{2} = \frac{25F^2 l}{18EA}.$$

Потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{EA} (N_1^2 l + N_2^2 2l + N_3^2 l) = \frac{25F^2 l}{18EA}.$$

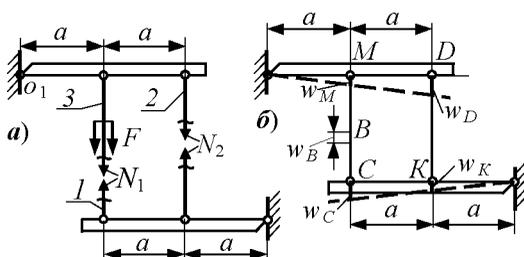


Рис. 97.1 Р

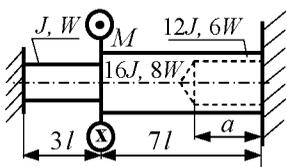


Рис. 97.2

97.2 При какой глубине сверления a (рис. 97.2) наибольшие касательные напряжения на левом и правом участках будут одинаковы? Геометрические характеристики сечений указаны на рисунке.

РЕШЕНИЕ

Напряжения τ_{\max} на левом и правом участках одинаковы (рис. 97.2 Р), если $M_B = 6M_A$. Так как угол закручивания $\varphi_{AB} = 0$, то

$$\frac{M_A \cdot 3l}{G \cdot J} - \frac{6M_A(7l - a)}{G \cdot 16J} - \frac{6M_A a}{G \cdot 12J} = 0,$$

отсюда $a = 3l$.

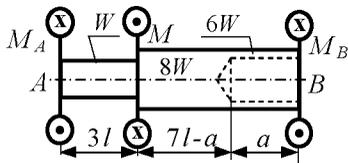


Рис. 97.2 Р

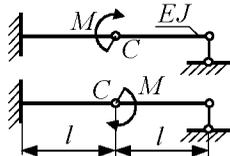


Рис. 97.3

97.3 Стержень нагружен парой сил M в двух вариантах: слева и справа от шарнира C (рис. 97.3). Найти линейное перемещение шарнира и работу пары сил M в обоих вариантах. Дано: M , l , E , J .

РЕШЕНИЕ

На рис. 97.3 Р показаны эпюры изгибающих моментов для двух вариантов нагружения стержня (a , b) и единичного нагружения для определения вертикального ($в$) перемещения шарнира. Изгибающие моменты единичных нагружений для определения угловых перемещений будут такими же, как и на рис. 97.3 Р, a , b при $M = 1$. Используя способ Верещагина, находим

$$v_1 = \frac{1}{EJ} \left(M \cdot l \cdot \frac{1}{2} l \right) = \frac{Ml^2}{2EJ} \quad (\text{вниз}),$$

$$v_2 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} M \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{Ml^2}{3EJ} \quad (\text{вверх}).$$

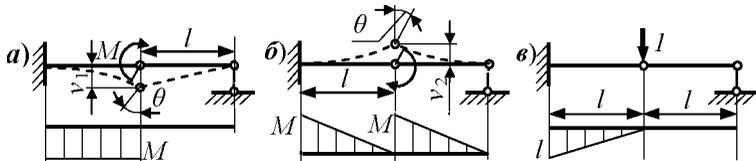


Рис. 97.3 Р

Угловые перемещения

$$\theta_1 = \frac{1}{EJ}(M \cdot l \cdot 1) = \frac{Ml}{EJ}, \quad \theta_2 = \frac{2}{EJ} \left(\frac{1}{2} M \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{2Ml}{3EJ}.$$

Работа пары сил

$$A_1 = \frac{M\theta_1}{2} = \frac{M^2 l}{2EJ}, \quad A_2 = \frac{M\theta_2}{2} = \frac{M^2 l}{3EJ}.$$

97.4 Два стержня рамы равномерно нагреты на t° (рис. 97.4). Найти наибольшие напряжения, полагая $l = 15a$. Дано: t° , E , α – коэффициент линейного расширения материала стержней.

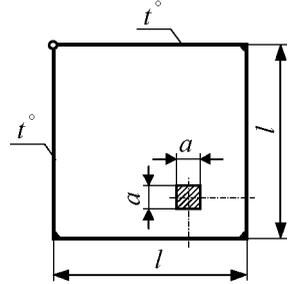


Рис. 97.4

РЕШЕНИЕ

Температурное нагружение эквивалентно силовому при $N = \alpha t^\circ EA$. На рис. 97.4 Р показаны эквивалентная система и соответствующие эпюры для вычисления коэффициентов канонического уравнения $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1N} = 0$. Здесь

$$\Delta_{1N} = -2 \cdot \left(\alpha t^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l \right) = -\sqrt{2} \alpha t^\circ l,$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EJ} \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} l + \frac{\sqrt{2}}{2} l \cdot l \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} l \right) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} l \cdot l \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l + \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} l \right) \right) =$$

$$= \frac{4}{EA} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{5l^3}{3EJ} + \frac{2l}{EA}.$$

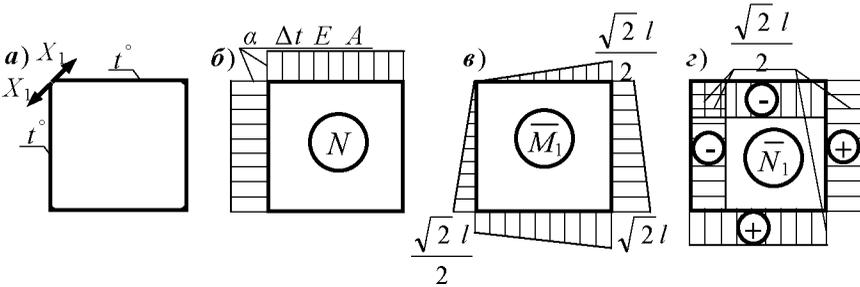


Рис. 97.4 Р

При $l = 15a$ слагаемое $\frac{2l}{EA}$ составляет доли процента от первого слагаемого $\frac{5l^3}{3EJ}$. Следовательно,

$$X_1 = \frac{\Delta_{1N}}{\delta_{11}} = \frac{3\sqrt{2}\alpha t^\circ EJ}{5l^2}, \quad M_{\max} = X_1 \cdot \sqrt{2}l,$$

наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{3\sqrt{2}\alpha t^\circ E \cdot \sqrt{2}l \cdot 2}{5a} = \frac{1}{25}\alpha t^\circ E.$$

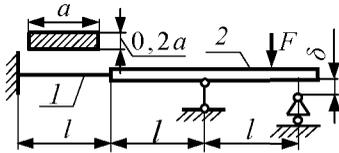


Рис. 97.5

97.5 Найти наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении стержня 1 (рис. 97.5) после закрытия зазора δ . Деформациями правого стержня 2 пренебречь. Дано: l, a, δ, E .

РЕШЕНИЕ

Угловое и линейное перемещения сечения A (рис. 97.5 P) выражаем через M и R методом начальных параметров:

$$\theta_A = -\frac{\delta}{l} = \frac{1}{EJ} \left(Ml - \frac{Rl^2}{2} \right),$$

$$v_A = \delta = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Ml^2}{2} - \frac{Rl^3}{6} \right).$$

Решая совместно, находим

$$M = \frac{8EJ\delta}{l^2}, \quad R = \frac{18EJ\delta}{l^3}.$$

Наибольший изгибающий момент (сечение A)

$$M_A = M - R \cdot l = -\frac{10EJ\delta}{l^2}.$$

Наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_A|}{W} = \frac{10EJ\delta}{Wl^2}.$$

Так как $J/W = h/2 = 0,1a$, то $\sigma_{\max} = \frac{Ea\delta}{l^2}$.

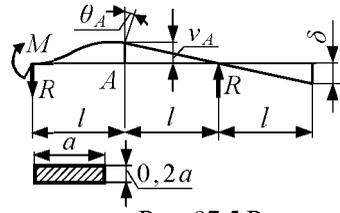


Рис. 97.5 P

97.6 Толстостенный цилиндр без дна помещён без натяга в жёсткую обойму и нагружен внутренним давлением p (рис. 97.6). Найти и указать напряжения на гранях элементов C и D . Дано: p , a , коэффициент Пуассона $\mu = 1/3$.

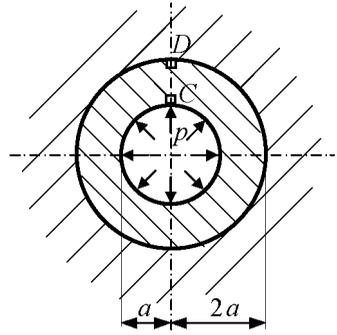


Рис. 97.6

РЕШЕНИЕ

Давление q (рис. 97.6 Р, a) находим из условия $u(2a) = 0$. Радиальное перемещение

$$u(2a) = u_p + u_q, \text{ здесь } u = \frac{2a}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r).$$

Радиальное σ_r и окружное σ_t напряжения при внутреннем давлении

$$\sigma_{r,t} = \frac{pa^2}{(2a)^2 - a^2} \left(1 \mp \frac{(2a)^2}{r^2} \right); \quad \sigma_r(a) = -p, \quad \sigma_t(a) = 5p/3;$$

$$\sigma_r(2a) = 0, \quad \sigma_t(2a) = 2p/3; \quad u_p = \frac{2a}{E} \left(\frac{2p}{3} - 0 \right) = \frac{4pa}{3E}.$$

При наружном давлении:

$$\sigma_{r,t} = \frac{qa^2}{(2a)^2 - a^2} \left(1 \mp \frac{a^2}{r^2} \right);$$

$$\sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_t(a) = -8q/3;$$

$$\sigma_r(2a) = -q, \quad \sigma_t(2a) = -5q/3;$$

$$u_q = \frac{2a}{E} \left(-\frac{5q}{3} + \frac{q}{3} \right) = -\frac{8qa}{3E};$$

$$u_p + u_q = \frac{4pa}{3E} - \frac{8qa}{3E} = 0,$$

откуда $q = p/2$.

Напряжённое состояние элемента D (рис. 97.6 Р, б):

$$\sigma_r = 0 - q = -p/2,$$

$$\sigma_t = 2p/3 - 5p/6 = -p/6.$$

Напряжённое состояние элемента C (рис. 97.6 Р, в):

$$\sigma_r = -p + 0 = -p,$$

$$\sigma_t = 5p/3 - 8p/6 = p/3.$$

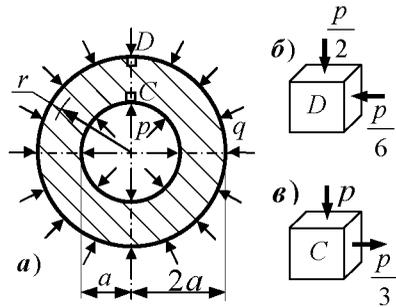


Рис. 97.6 Р

2.5. Олимпиада 1998 г., г. Нижний Новгород, НГАСУ

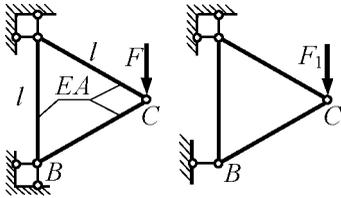


Рис. 98.1

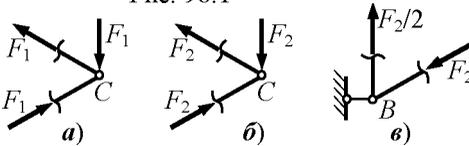


Рис. 98.1 P

98.1 Как изменить величину силы F , чтобы удаление одной связи в опоре B (рис. 98.1) не повлияло на величину вертикального перемещения узла C ? Длина стержней l .

РЕШЕНИЕ

Выражаем вертикальное перемещение узла C через потенциальную энергию деформации системы $\delta_c = 2U/F$.

В 1-м варианте (рис. 98.1 P, а) в вертикальном стержне усилий нет и $U_1 = 2 \frac{F_1^2 l}{2EA} = \frac{F_1^2 l}{EA} = \frac{1}{2} F_1 \delta_c$, откуда $F_1 = \frac{EA \delta_c}{2l}$.

Во 2-м варианте (рис. 98.1 P, б, в) $U_1 = 2 \frac{F_2^2 l}{2EA} + \frac{F_2^2 l}{4 \cdot 2EA} = \frac{9F_2^2 l}{8EA} = \frac{1}{2} F_2 \delta_c$, тогда $F_2 = \frac{8EA \delta_c}{9 \cdot 2l} = \frac{8}{9} F_1$.

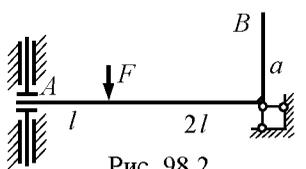


Рис. 98.2

Следовательно, F_1 следует уменьшить на $F/9$.

98.2 При каком значении длины a (рис. 98.2) линейные перемещения сечений A и B будут одинаковы? Дано: $l = 120$ мм.

РЕШЕНИЕ

Используя эпюры изгибающих моментов от силы F (рис. 98.2 P) и эпюры от единичных сил, приложенных в сечениях A и B , получаем

$$EJ \Delta_A = 2Fl \cdot l \cdot \left(2l + \frac{1}{2}l \right) + \frac{1}{2} 2Fl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l = \frac{23Fl^3}{3},$$

$$EJ \Delta_B = 2Fl \cdot l \cdot a + \frac{1}{2} 2Fl \cdot 2l \cdot a = 4Fl^2 a.$$

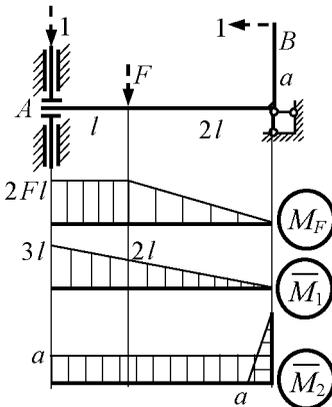


Рис. 98.2 P

Из условия $\Delta_A = \Delta_B$ следует, что $a = \frac{23}{12}l = \frac{23}{12} \cdot 120 = 230$ мм.

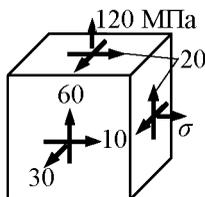


Рис. 98.3

98.3 Определить напряжение σ , при котором элемент (рис. 98.3) испытывает чистый сдвиг. Найти наибольшее касательное напряжение.

РЕШЕНИЕ

При чистом сдвиге изменение объёма

$$\Delta V = \frac{1-2 \cdot \mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0.$$

В данном случае (рис. 98.3 Р) это условие выполняется при

$$\sigma = -\sigma_y - \sigma_z = -30 - 120 = -150 \text{ МПа.}$$

При чистом сдвиге $\tau_{\max} = \sigma_1$.

Для определения σ_1 используем уравнение

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0.$$

Здесь $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$,

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ = -150 \cdot 30 + 30 \cdot 120 - 120 \cdot 150 - 10^2 - 60^2 - 20^2 = -23000,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -120 & 10 & 20 \\ 10 & 30 & 60 \\ 20 & 60 & 120 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда уравнение примет вид $\sigma^3 - 23000\sigma = 0$, а решение –

$$\sigma_1 = 151,7 \text{ МПа, } \tau_{\max} = 151,7 \text{ МПа.}$$

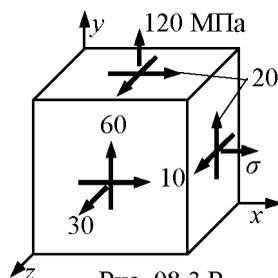


Рис. 98.3 Р

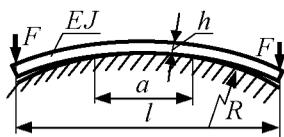


Рис. 98.4

98.4 Стержень прижат к круговому лекалу радиуса R (рис. 98.4). Считая деформации упругими и перемещения малыми, найти наибольшее нормальное напряжение и размер a зоны контакта. Принять $F = \frac{4EJ}{Rl}$, $h = R/700$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ

Изгибающий момент в зоне контакта (рис.

$$98.4 \text{ P}) M = \frac{EJ}{R} \text{ и}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{Eh}{2R} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{2 \cdot 700} = 150 \text{ МПа.}$$

Учитывая, что $M = \frac{F}{2}(l-a) = \frac{EJ}{R}$,

находим $a = l - \frac{2EJ}{RF} = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$.

98.5 Резервуар находится под наружным гидростатическим давлением (рис. 98.5). Объёмный вес жидкости равен $\gamma \text{ Н/м}^3$. Определить напряжения на гранях элемента A и найти эквивалентное напряжение. Дано: $\gamma, h, d, \delta, \nu = \sigma_{\text{тр}}/\sigma_{\text{тс}} = 0,8$.

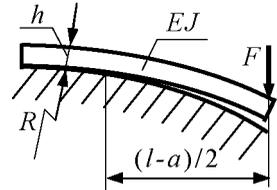


Рис. 98.4 P

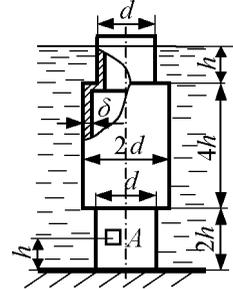


Рис. 98.5

РЕШЕНИЕ

Окружные напряжения на гранях элемента A (рис. 98.5 P, б)

$$\sigma_t = -\frac{6\gamma h d / 2}{\delta} = -\frac{3\gamma h d}{\delta}.$$

Из уравнения

$$\begin{aligned} \sum z = \gamma h \frac{\pi}{4} (4d^2 - d^2) - 5\gamma h \frac{\pi}{4} (4d^2 - d^2) + \\ + \sigma_m \pi d \delta = 0 \end{aligned}$$

следует, что $\sigma_m = \frac{3\gamma h d}{\delta}$.

Так как $\sigma_1 = \sigma_m$ и $\sigma_3 = \sigma_t$, то

$$\sigma_{\text{эке}} = \sigma_1 - \nu \sigma_3 = \frac{\gamma h d}{\delta} (3 + 0,8 \cdot 3) = 5,4 \frac{\gamma h d}{\delta}.$$

98.6 Плоская рама выполнена из стержней квадратного поперечного сечения (рис. 98.6). Найти наибольшие нормальные напряжения при нагружении рамы силой F . Дано: $F = 450 \text{ Н}$, $l = 0,8 \text{ м}$, $a = 15 \text{ мм}$.

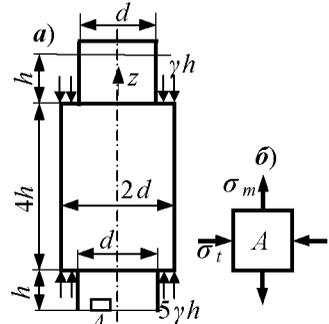


Рис. 98.5 P

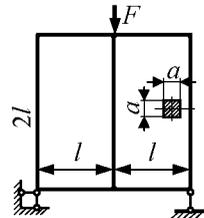


Рис. 98.6

РЕШЕНИЕ

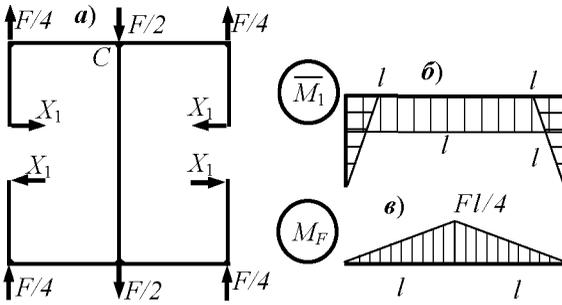


Рис. 98.6 Р

Учитывая, что нагрузка кососимметрична, выбираем рациональный вариант эквивалентной системы (рис. 98.6 Р, а). Каноническое уравнение $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$.

Используя эпюры изгибающих моментов от внешних и единичных сил (рис. 98.6 Р, б, в),

$$\text{находим } EJ \delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l + l \cdot 2l \cdot l = \frac{8}{3} l^3,$$

$$EJ \Delta_{1F} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot 2l \cdot l = -\frac{1}{4} Fl^3,$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{3}{32} F.$$

Наибольший изгибающий момент в сечении С

$$M = \frac{Fl}{4} - \frac{3}{32} Fl = \frac{5}{32} Fl.$$

Наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{5Fl \cdot 6}{32 \cdot a^3} = \frac{5 \cdot 450 \cdot 0,8 \cdot 6}{32 \cdot 0,015^3} = 100 \text{ МПа}.$$

2.6. Олимпиада 1999 г., г. Пермь, ПГТУ

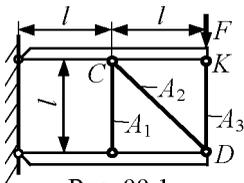


Рис. 99.1

99.1 Известно, что $A_1 = A_3 = A$, принять $A_2 = nA$. Найти зависимость перемещения w_K точки приложения силы F (рис. 99.1) от величины A .

РЕШЕНИЕ

Из уравнения равновесия (рис. 99.1 Р)

$$\sum m_o^{\text{нмжс}} = -N_1 \cdot l + N_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot 2l - N_3 \cdot 2l = 0, \Rightarrow N_1 + 2N_3 = \sqrt{2} N_2,$$

$$\sum m_o^{\text{верх}} = N_1 \cdot l - N_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot l + N_3 \cdot 2l - F \cdot 2l = 0, \Rightarrow N_2 = 2\sqrt{2} F.$$

Из уравнения перемещений $\Delta l_3 = 2\Delta l_1$ находим $N_1 = 4F/5$, $N_3 = 8F/5$.

Потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{N_1^2 l}{2EA} + \frac{N_2^2 \sqrt{2}l}{2EnA} + \frac{N_3^2 l}{2EA} = \frac{F w_K}{2},$$

следовательно, $w_K = \frac{Fl}{EA} \left(3,2 + \frac{8\sqrt{2}}{n} \right)$.

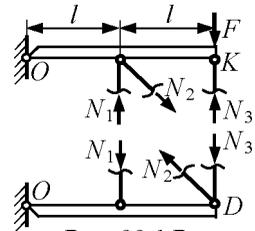


Рис. 99.1 Р

99.2 При каком значении q (рис. 99.2) зазор δ закрывается? Найти наибольшее напряжение σ_{\max} при нагрузке $2q$. Дано: δ , a , l , E .

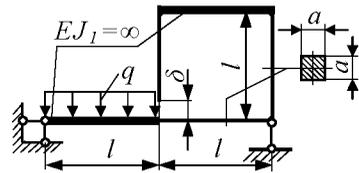


Рис. 99.2

РЕШЕНИЕ

Взаимное перемещение сечений K (рис. 99.2 Р) до касания

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{4} \cdot l \cdot \frac{1}{3} l \right) = \frac{ql^4}{24EJ} = \delta,$$

где $J = a^4/12$ и $|q| = \frac{24EJ\delta}{l^4} = \frac{2Ea^4\delta}{l^4}$.

При нагрузке $2q$:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + l \cdot l \cdot l \right) = \frac{4l^3}{3EJ},$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} l \right) = -\frac{ql^4}{12EJ},$$

$$X_1 = -\frac{\delta + \Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{-\frac{ql^4}{24} + \frac{ql^4}{12}}{\frac{4l^3}{3}} = \frac{ql}{32}.$$

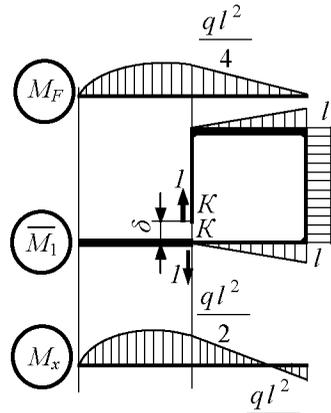


Рис. 99.2 Р 32

Строим эпюру изгибающих моментов на пролёте рамы и определяем наибольшее напряжение

$$\sigma_{z \max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} = \frac{ql^2 \cdot 6}{2 \cdot a^3} = \frac{3ql^2}{a^3}.$$

99.3 Определить размер b , при котором жёсткие плиты A и B (рис. 99.3) смещаются параллельно друг другу. Дано: $a = 30$ мм, $E_1 = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$ МПа.

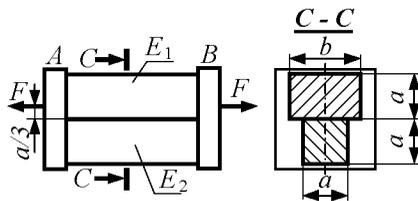


Рис. 99.3

РЕШЕНИЕ

Из уравнений равновесия (рис. 99.3 Р):

$$N_1 + N_2 = F, \quad N_1 - N_2 = \frac{2}{3} F.$$

Отсюда следует, что $N_1 = 5N_2$. Так как $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$,

то $\frac{5N_2}{E_1 A_1} = \frac{N_2}{E_2 A_2}$, где $A_1 = ab$, $A_2 = a^2$.

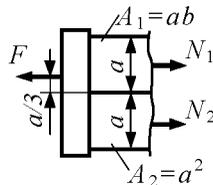


Рис. 99.3 Р

Учитывая, что $E_1 = 3E_2$, находим $b = \frac{5}{3} a = \frac{5}{3} \cdot 30 = 50$ мм.

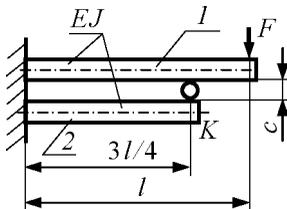


Рис. 99.4

99.4 Балки 1 и 2 установлены с просветом

то $c = \frac{Fl^3}{64 EJ}$ (рис. 99.4) и имеют контакт в сечении K . Как изменится величина просвета при нагружении силой F и чему равна его максимальная величина? Дано: F, l, E, J .

РЕШЕНИЕ

Из условия $v_1 = v_2$ при $z = 3l/4$ (рис. 99.4 Р) находим $X = 3F/4$.

Далее определяем реакции в заделках в эквивалентной системе

$$M_1 = X \cdot \frac{3}{4} l - F \cdot l = -\frac{7}{16} Fl,$$

$$R_1 = -X + F = \frac{1}{4} F,$$

$$M_2 = -X \cdot \frac{3}{4} l = -\frac{9}{16} Fl,$$

$$R_2 = X = \frac{3}{4} F,$$

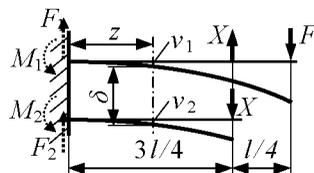


Рис. 99.4 Р

и составляем уравнения прогибов в произвольном сечении z методом начальных параметров

$$v_1 = \frac{F}{8EJ} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{7lz^2}{4} \right), \quad v_2 = \frac{F}{8EJ} \left(z^3 - \frac{9lz^2}{4} \right),$$

прогибы получаются отрицательными, поэтому величина просвета в произвольном сечении

$$\delta = c + |v_2| - |v_1| = c + \frac{F}{4EA} \left(-\frac{z^3}{3} + \frac{lz^2}{4} \right).$$

Функция δ имеет экстремум при $z = l/2$ и, следовательно,

$$\delta_{\max} = \frac{Fl^3}{64EJ} + \frac{Fl^3}{192EJ} = \frac{Fl^3}{48EJ}.$$

99.5 Тензорезистор l указывает на отсутствие линейной деформации (рис. 99.5). Полагая $\mu = 1/3$, найти значение пары сил. Дано: $d = 32$ мм, $F = 1$ кН.

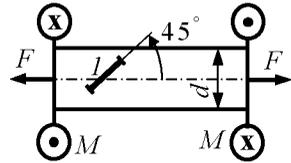


Рис. 99.5

РЕШЕНИЕ

Нормальные напряжения на гранях элемента (рис. 99.5 Р)

$$\sigma_u = \sigma \cos^2 45^\circ - \tau \sin 90^\circ = \frac{F}{2A} - \frac{M}{W_p},$$

$$\sigma_v = \frac{F}{2A} + \frac{M}{W_p}, \quad \text{где } A = \frac{\pi d^2}{4}, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Так как $\varepsilon_u = \frac{1}{E}(\sigma_u - \mu\sigma_v) = 0$, то

$$M = \frac{FW_p}{2A} \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{Fd}{8} \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{1000 \cdot 0,032}{8} \frac{1-1/3}{1+1/3} = 2 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

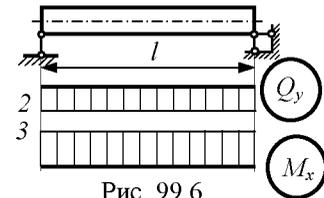


Рис. 99.6

99.6 Заданы эпюры (рис. 99.6) поперечных сил Q_y (кН) и изгибающих моментов M_x (кН·м). Эпюра изгибающих моментов построена на сжатой стороне стержня. Восстановить нагрузку, учитывая, что длина пролёта $l = 1$ м.

РЕШЕНИЕ

По эпюре поперечных сил Q_y (рис. 99.6 Р) определяются реакции опор: $R = 2$ кН.

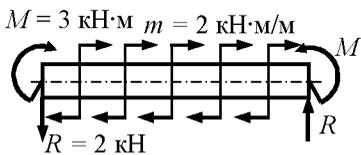


Рис. 99.6 Р

Торцевые сечения стержня, как показывает эпюра M_x должны быть нагружены парами сил $M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Изгибающий момент в произвольном сечении стержня

$$M_x = M - R \cdot z + m \cdot z = M = \text{const},$$

следовательно, $m = R = 2 \text{ кН}\cdot\text{м/м}$.

2.7. Олимпиада 2000 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС

00.1 Стержень нагружен распределёнными парами сил (рис. 00.1). Какую работу должна совершить дополнительно приложенная пара сил T , чтобы сечение K не имело углового перемещения? Дано: t, l, G, d .

РЕШЕНИЕ

Распределённую нагрузку представим суммой кососимметричной и симметричной нагрузок (рис. 00.1 Р). Первая не влияет на угловое перемещение сечения K и

$$\varphi_K(t) = \frac{1}{GJ_p} \int_0^{l/2} \left(\frac{3}{4}tl - \frac{3}{2}tz \right) dz = \frac{3tl^2}{16GJ_p}.$$

Находим значение T из условия $\varphi(t) = \varphi(T)$.

Так как $\varphi_K(T) = \frac{Tl}{4GJ_p}$, то $T = \frac{3}{4}tl$.

Работа пары сил

$$W = \frac{1}{2}T \cdot \varphi(T) = \frac{9t^2 l^3 \cdot 32}{128G\pi d^4} = 0,716 \frac{t^2 l^3}{Gd^4}.$$

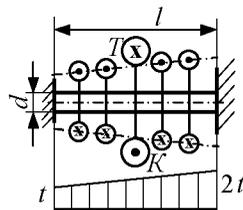


Рис. 00.1

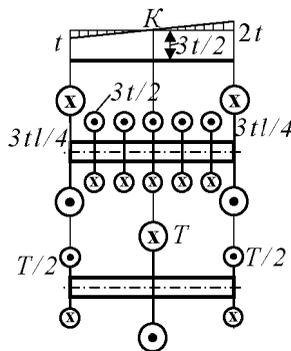


Рис. 00.1 Р

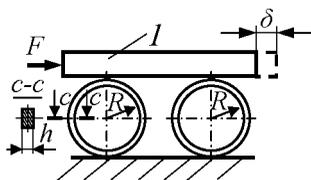


Рис. 00.2

00.2 Две кольцевые пружины жёстко соединены с основанием и стержнем l , деформациями которого следует пренебречь (рис. 00.2). Найти δ – наибольший допустимый ход стержня. Дано: $R, h, E, [\sigma]$.

РЕШЕНИЕ

Схема нагружения и эквивалентная система показаны на рис. 00.2 Р.

Изгибающие моменты

$$M_F = \frac{FR}{4} - \frac{FR}{4} \cdot (1 - \cos \varphi) = \frac{FR}{4} \cos \varphi,$$

$$\bar{M}_1 = -R \cdot \sin \varphi.$$

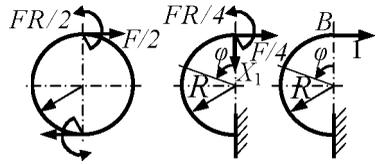


Рис. 00.2 Р

Так как $EJ \Delta_{1F} = \int_0^\pi M_F \cdot \bar{M}_1 R d\varphi = 0$, то $X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = 0$.

Горизонтальное перемещение сечения B :

$$EJ \Delta_B = \int_0^\pi M_F \cdot \bar{M}_2 R d\varphi = -\frac{FR^3}{4} \int_0^\pi \cos \varphi \cdot (1 - \cos \varphi) d\varphi = \frac{\pi FR^3}{8}.$$

Из условия прочности $\frac{FR}{4W} \leq [\sigma]$, следует, что $F \leq \frac{4[\sigma]W}{R}$ и

$$\Delta_B = \frac{\pi FR^3}{8EJ} = \frac{\pi R^2 W}{2EJ} [\sigma].$$

Учитывая, $\Delta_B = \delta$ и $W/J = 2/h$, получим значение наибольшего допускаемого хода $\delta = \frac{\pi R^2}{Eh} [\sigma]$.

00.3 Измеренная датчиком l продольная деформация составила $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$. Найти взаимный угол поворота сечений A и B при $l = 15h$ (рис. 00.3).

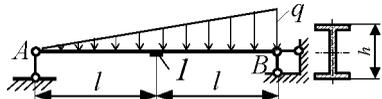


Рис. 00.3

РЕШЕНИЕ

Разбивая заданную нагрузку на две составляющие (рис. 00.3 Р) и замечая, что кососимметричные силы не вызывают в сечении C продольных деформаций, находим в этом сечении изгибающий момент от симметричной составляющей нагрузки $M = \frac{ql^2}{4}$.

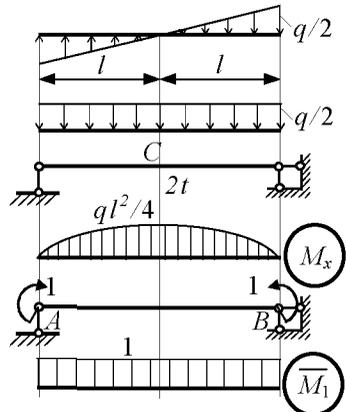


Рис. 00.3 Р

Наибольшее нормальное напряжение $\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{ql^2}{4W}$ и $q = \frac{4WE\varepsilon}{l^2}$.

Взаимный угол поворота сечений A и B зависит только от симметричной составляющей нагрузки. Используя эпюры M_x, \bar{M}_1 , получаем искомый угол

$$\theta_{AB} = \frac{ql^3}{3EJ} = \frac{8\varepsilon l}{3h} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 15h}{3h} = 0,0200 \text{ рад} = 1,146^\circ.$$

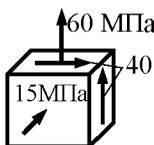


Рис. 00.4

00.4 Напряжённое состояние, указанное на рис. 00.4, дополняется всесторонним равномерным сжатием. В результате вся потенциальная энергия деформации оказывается связанной только с изменением формы. Найти коэффициент запаса по текучести, если предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа. Использовать теорию наибольших касательных напряжений.

РЕШЕНИЕ

Так как объём элемента (рис. 00.4 Р) не изменяется, то

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -\sigma + (60 - \sigma) - (15 + \sigma) = 0.$$

Следовательно, $\sigma = 15$ МПа, $\sigma_x = -15$ МПа, $\sigma_y = 45$ МПа, $\sigma_z = -30$ МПа.

Главные напряжения

$$\sigma_{I,II} = \frac{1}{2} \left[(-15 + 45) \pm \sqrt{(-15 - 45)^2 + 4 \cdot 40^2} \right] = 15 \pm 50,$$

$\sigma_1 = 65$ МПа, $\sigma_2 = -30$ МПа, $\sigma_3 = -35$ МПа.

Эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 65 - (-35) = 100$ МПа.

Коэффициент запаса $n_T = \sigma_T / \sigma_{\text{эКВ}} = 240 / 100 = 2,4$.

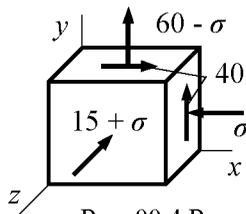


Рис. 00.4 Р

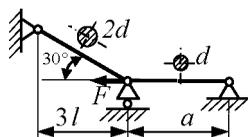


Рис. 00.5

00.5 На каком расстоянии a (рис. 00.5) следует установить правую опору, чтобы была обеспечена равнопрочность стержней? Каково значение F , при котором стержни будут работать с двукратным коэффициентом запаса? Пределы текучести материала при растяжении и при сжатии одинаковы $\sigma_{\text{Тр}} = \sigma_{\text{Тс}} = \sigma_T$. Дано: l, d, σ_T .

РЕШЕНИЕ

Из условия равнопрочности стержней следует, что $N_1 = 4 \cdot N_2$ (рис. 00.5 Р). Уравнение перемещений $\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \cos 30^\circ$, то есть

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_2 l_2}{EA_2} \cos 30^\circ, \text{ откуда } l_1 = a \cdot \cos 30^\circ.$$

Из геометрии $l_1 = 3l / \cos 30^\circ$, следовательно,
 $a = 3l / \cos^2 30^\circ = 4l$.

Уравнение равновесия узла C:

$$F = N_2 (1 + 2\sqrt{3}).$$

Так как по условию $N_2 = \frac{\sigma_T A_2}{2} = \frac{\sigma_T \pi d^2}{8}$,

то $F = \frac{\sigma_T \pi d^2}{8} (1 + 2\sqrt{3}) = 1,753 \sigma_T d^2$.

00.6 Температура стержня после установки его на опоры (рис. 00.6) изменяется как по длине l , так и по высоте сечения h . Градиент температуры по высоте растёт от нуля в левом сечении до $t = t_1 - t_2 > 0$ в заделке. Полагая, что поперечные сечения остаются плоскими, найти наибольшие нормальные напряжения. Дано: $t = 60^\circ\text{C}$, $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ 1/град}$.

РЕШЕНИЕ

Градиент температуры в произвольном сечении (рис. 00.6 Р) $\Delta t = \frac{t}{l} z$.

Взаимный угол поворота сечений элемента dz при изменении температуры и этот же угол при нагружении парами сил M_t будут одинаковы

$$M_t = \frac{E J \alpha t}{h}, \text{ что следует из равенства}$$

$$\frac{M_t dz}{E J} = \frac{\alpha t dz}{h}. \text{ Поэтому перемещения в основной системе (при от-}$$

сутствии левой опоры) аналогичны перемещениям при силовом нагружении с переменным изгибающим моментом M_t . Раскрывая статическую неопределенность, получаем

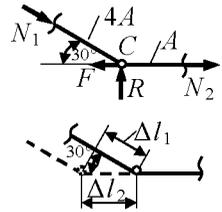


Рис. 00.5 Р

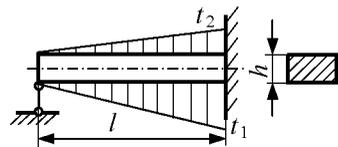


Рис. 00.6

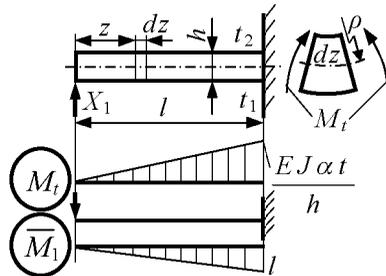


Рис. 00.6 Р

$$X_1 = \frac{\frac{1}{2} M_t \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l}{\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l} = \frac{M_t}{l} = \frac{EJ\alpha t}{hl}.$$

Учитывая, что $J/W = h/2$, наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{X_1 \cdot l}{W} = \frac{EJ\alpha t}{hW} = \frac{E\alpha t}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^5 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5} \cdot 60 = 54,0 \text{ МПа}.$$

2.8. Олимпиада 2001 г., г. Йошкар-Ола, МГТУ

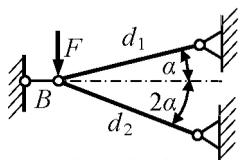


Рис. 01.1

01.1 При каком значении диаметра d_2 (рис. 01.1) перемещения в стержневой системе не изменятся после удаления опоры B? Дано: $\alpha = 15^\circ$, диаметр $d_1 = 50$ мм, $l_1 = l_2 = l$, $E_1 = E_2 = E$.

РЕШЕНИЕ

Условие задачи выполняется, если узел B не получает горизонтального перемещения. Составляя уравнения равновесия узла B для двух схем нагружения, получим:

- для грузового состояния

$$\sum x = N_1 \cos \alpha - N_2 \cos 2\alpha = 0,$$

$$\sum y = N_1 \sin \alpha + N_2 \sin 2\alpha - F = 0,$$

откуда находим $N_1 = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha} F$, $N_2 = \frac{\cos \alpha}{\sin 3\alpha} F$;

- для единичного состояния

$$\sum x = \bar{N}_1 \cos \alpha + \bar{N}_2 \cos 2\alpha - 1 = 0,$$

$$\sum y = \bar{N}_1 \sin \alpha + \bar{N}_2 \sin 2\alpha = 0,$$

$$\bar{N}_1 = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}, \quad \bar{N}_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha}.$$

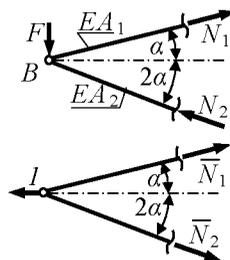


Рис. 01.1 P

Горизонтальное перемещение $\delta_B = \frac{N_1 \bar{N}_1}{EA_1} l + \frac{N_2 \bar{N}_2}{EA_2} l = 0$.

Подставляя значения сил, имеем $\frac{2 \cos 2\alpha}{A_1} = \frac{1}{A_2}$

$$\text{или } d_2 = d_1 \sqrt{\frac{1}{2 \cos 2\alpha}} = 50 \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \cos 30^\circ}} = 38 \text{ мм}.$$

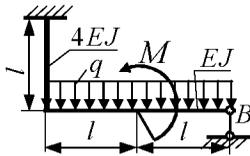


Рис. 01.2

01.2 Рама под действием распределённой нагрузки q (рис. 01.2) дополнительно нагружается парой сил M , при этом опора B полностью разгружается. Найти линейное перемещение сечения B . Заданы: размер l , модуль упругости E , момент инерции J .

РЕШЕНИЕ

Опора B разгружена, если вертикальное перемещение сечения B при отсутствии опоры равно нулю. Используя эпюры, изображённые на рис. 01.2 Р, имеем:

$$\Delta_B^{эпрм} = \frac{1}{4EJ} (2ql^2 \cdot l - M \cdot l) \cdot 2l + \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{3} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{3}{4} \cdot 2l - M \cdot l \cdot \left(l + \frac{1}{2} \cdot l \right) \right] = 0.$$

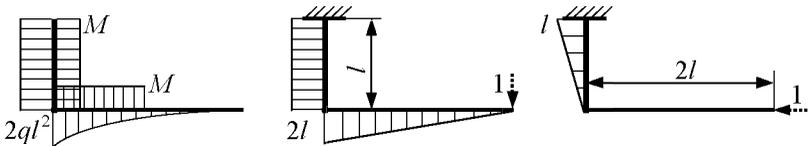


Рис. 01.2 Р

Следовательно, $M = 1,5ql^2$. Горизонтальное перемещение сечения B :

$$\Delta_B^{сop} = \frac{1}{4EJ} (2ql^2 \cdot l - 1,5ql^2 \cdot l) \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^4}{16EJ}.$$

01.3 Балка изогнута парой сил M (рис. 01.3). С помощью винта l сечение B получает дополнительное линейное перемещение. Каким должен быть ход h винта, чтобы осевая линия участка OB стала дугой окружности? Заданы: размер l , модуль упругости E , момент инерции поперечного сечения J .

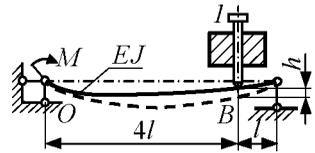


Рис. 01.3

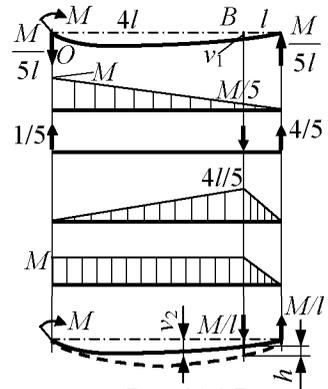


Рис. 01.3 Р

РЕШЕНИЕ

Ось участка OB будет дугой окружности, если на длине $4l$ этого участка изгибающий момент постоянен. Используя эпюры изгибающих моментов (рис. 01.3 Р), находим перемещение сечения B при начальном нагружении парой сил M

$$EJv_1 = \frac{1}{2} \frac{4l}{5} \cdot 4l \cdot \left(\frac{M}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4M}{5} \right) + \frac{1}{2} \frac{4l}{5} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{M}{5} = \frac{4Ml^2}{5}$$

и конечное перемещение после дополнительного воздействия винта

$$EJv_2 = \frac{1}{2} \frac{4l}{5} \cdot 4l \cdot M + \frac{1}{2} \frac{4l}{5} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot M = \frac{28Ml^2}{15}$$

$$\text{Ход винта } h = v_2 - v_1 = \frac{28Ml^2}{15EJ} - \frac{4Ml^2}{5EJ} = \frac{16Ml^2}{15EJ}$$

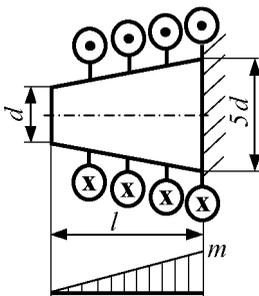


Рис. 01.4

01.4 Интенсивность распределённой нагрузки линейно изменяется от нуля до m (рис. 01.4). Определить, где находится опасное сечение и чему равны наибольшие касательные напряжения. Заданы размеры d и l .

РЕШЕНИЕ

В произвольном сечении z (рис. 01.4 Р)

$$M_z = \frac{mz^2}{2l}, \quad d_z = d \left(1 + \frac{4z}{l} \right),$$

следовательно,

$$\tau = \frac{M_z}{W_p} = \frac{16M_z}{\pi d_z^3} = \frac{8mz^2}{\pi l d^3 \left(1 + \frac{4z}{l} \right)^3}.$$

Исследуем функцию $\tau(z)$ на экстремум

$$\frac{d\tau}{dz} = 2z \left(1 + \frac{4z}{l} \right)^3 - z^2 \cdot 3 \left(1 + \frac{4z}{l} \right)^2 \cdot \frac{4}{l} = 0.$$

Откуда $z = l/2$ и

$$\tau_{\max} = \frac{2ml^2}{27\pi d^3} = 0,0236 \frac{ml^2}{d^3}.$$

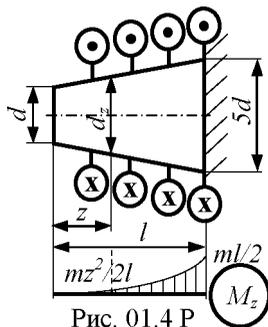


Рис. 01.4 Р

01.5 В целях снижения массы стержень 1 (рис. 01.5) заменён ступенчатым стержнем 2 , оба участка которого равнопрочны. Какими должны быть размеры b и c ? Дано: $a = 26$ мм, $l = 330$ мм.

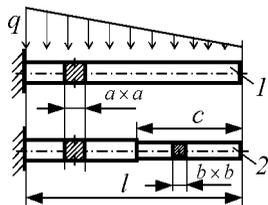


Рис. 01.5

РЕШЕНИЕ

Условие равнопрочности участков $\sigma_1 = \sigma_2$ (рис. 01.5 Р):

$$\frac{ql^2}{6} \cdot \frac{6}{a^3} = \frac{qc/l \cdot c^2}{6} \cdot \frac{6}{b^3} \quad \text{или} \quad \frac{l^3}{a^3} = \frac{c^3}{b^3}.$$

Обозначим $c = kl$, тогда $b = ka$.

Находим k из условия минимума объёма стержня. Объём стержня

$$V = b^2 \cdot kl + a^2 (1 - k) \cdot l = a^2 \cdot l (k^3 - k + 1).$$

Решая уравнение $dV/dz = 0$, находим

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 0,577. \quad \text{Следовательно,}$$

$$b = 0,577 \cdot a = 0,577 \cdot 26 = 15 \text{ мм,}$$

$$c = 0,577 \cdot l = 0,577 \cdot 330 = 190 \text{ мм.}$$

01.6 На каком расстоянии c (рис. 01.6) расположен элемент l , испытывающий напряжённое состояние «чистый сдвиг»? Дано: $a = 40$ мм.

РЕШЕНИЕ

Так как $\sigma_y = -q$, то условие задачи выполняется при $\sigma_{z \max} = q$. Здесь

$$\sigma_{z \max} = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{W_x},$$

где $M_x = -qac^2/2 + qa^2 \cdot a$, $N_z = qa^2$, $A = 2a^2$, $W_x = 2a^3/3$. Подставляя эти значения, находим $c = 2 \cdot a = 2 \cdot 40 = 80$ мм.

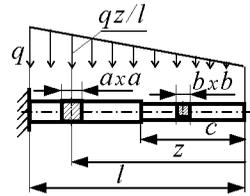


Рис. 01.5 Р

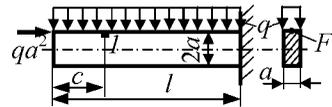


Рис. 01.6

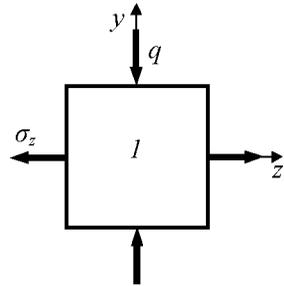


Рис. 01.6 Р

2.9. Олимпиада 2002 г., г. Санкт-Петербург, СПбГТУ

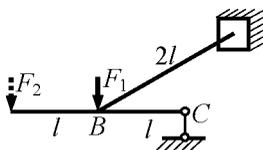


Рис. 02.1

02.1 После нагружения рамы силой $F_1 = F$ добавляется сила F_2 (рис. 02.1), и участок BC становится прямым. Определить значение силы F_2 и угол наклона участка BC . Дано: $F, l, E, J_x, GJ_k = 2EJ_x/3$.

РЕШЕНИЕ

Статическую неопределимость можно раскрыть методом сил $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$, но по условию задачи $X_1 = 0$, следовательно $\Delta_{1F} = 0$, тогда (рис. 02.1 Р, б, в)

$$EJ_x \Delta_{1F} = nFl \cdot 2l \cdot l \cdot 3/2 + \frac{1}{2} 2(n+1)Fl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l = 0. \text{ Отсюда } n = 8.$$

Угол поворота сечения В
(рис. 02.1 Р, б, з)

$$\varphi_B = \Delta_2 = \frac{8Fl \cdot 2l \cdot l}{\frac{2}{3} EJ_x} = \frac{24Fl^2}{EJ_x}.$$

Угол наклона участка ВС

$$\theta_{BC} = \frac{\varphi_B}{l} = \frac{24Fl}{EJ_x}.$$

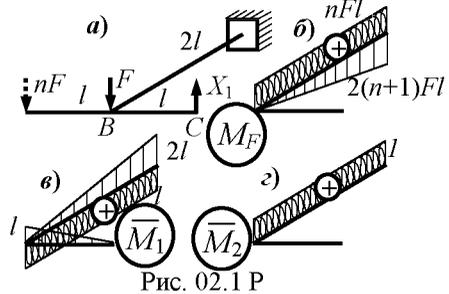


Рис. 02.1 Р

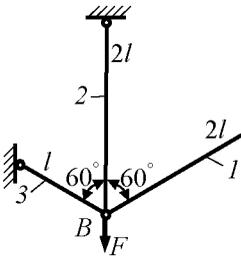


Рис. 02.2

02.2 Стержневая система нагружена силой F (рис. 02.2). Определить изменение температуры Δt первого стержня, при которой точка В перемещается точно по вертикали. Дано: F, l, E, α .

РЕШЕНИЕ

Из условия равновесия ($\sum x$) узла В (рис. 02.2 Р) усилия в стержнях 1 и 3 одинаковы, $N_1 = N_3$,

$$\sum y = -F + N_3 \cdot \cos 60^\circ + N_2 + N_1 \cdot \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = F.$$

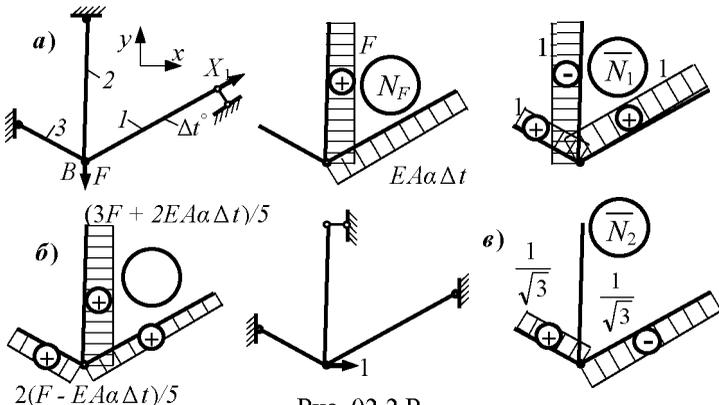


Рис. 02.2 Р

Используем метод сил. Эквивалентная система и эпюры внутренних сил показаны на рис. 02.2 Р, а. $X_1 = N_1$.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} (1 \cdot 2l \cdot 1 + 1 \cdot 2l \cdot 1 + 1 \cdot l \cdot 1) = \frac{5l}{EA},$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EA} (-F \cdot 2l \cdot 1 + EA \alpha \Delta t \cdot 2l \cdot 1) = \frac{2l}{EA} (EA \alpha \Delta t - F). \text{ Отсюда}$$

$$X_1 = 2(F - \alpha \Delta t EA)/5,$$

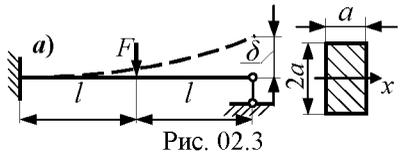
$$N_2 = F - X_1 = (3F + 2\alpha \Delta t EA)/5.$$

Общая эпюра показана на рис. 02.2 Р, б. Изменение температуры участка 1 определяется из условия $\Delta_B^{\text{роп}} = 0$ (перемножение эпюр на рис. 02.2 Р, б и в).

$$\Delta_2 = \Delta_B^{\text{роп}} = \frac{1}{EA} \left(\begin{aligned} &2(F - EA \alpha \Delta t) \cdot l \cdot \frac{1}{5 \cdot \sqrt{3}} - \\ &- 2(F - EA \alpha \Delta t) \cdot 2l \cdot \frac{1}{5 \cdot \sqrt{3}} \end{aligned} \right) - \alpha \Delta t \cdot 2l \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

$$\text{Отсюда } \Delta t = -F/(4\alpha EA).$$

02.3 При каком смещении δ правой опоры (рис. 02.3) коэффициент запаса прочности n балки будет наибольшим? Дано: F, l, E, a .



РЕШЕНИЕ

Эпюра изгибающих моментов после раскрытия статической неопределенности без учёта смещения правой опоры показана на рис. 02.3 Р, а. При смещении правой опоры возникают дополнительные моменты (рис. 02.3 Р, б), причём $R = 3EI_x \delta / (8l^3)$. Условие задачи выполняется при равенстве (по абсолютному значению) изгибающих моментов в сечениях 1 и 2

$$-\left(-\frac{6Fl}{16} + R \cdot 2l \right) = \frac{5Fl}{16} + R \cdot l \Rightarrow R = \frac{F}{48}.$$

$$\text{Тогда } \delta = Fl^3 / (18EJ_x), \text{ так как } J_x = 2a^4/3, \text{ то } \delta = Fl^3 / (12Ea^4).$$

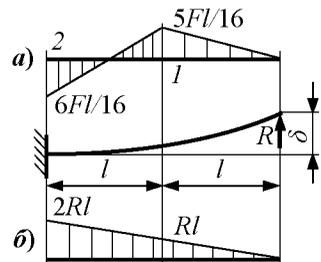


Рис.02.3 Р

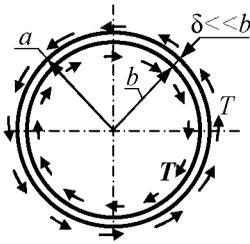


Рис. 02.4

02.4 Тонкостенный круглый стержень длиной l (рис. 02.4), зашпеленный с одной стороны, нагружен по обеим поверхностям касательными нагрузками интенсивностью T . При каком значении T возникнут первые пластические деформации? Дано: $l, a, b, \sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_{\text{т}}, l \gg a$.

РЕШЕНИЕ

Крутящий момент в заделке
 $M_{\text{кр}} = T \cdot 2\pi a \cdot l \cdot a - T \cdot 2\pi b \cdot l \cdot b = T \cdot 2\pi(a-b) \cdot l \cdot \delta$.
 $\tau = M_{\text{кр}} / 2A^* \delta = 4Tl / (a+b)$ или $T = (a+b)\tau / 4l$.

Так как $(a+b)/4l \ll 1$, то при вычислении главных напряжений величиной T можно пренебречь. Тогда $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$. $\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 8Tl / (a+b)$. Первые пластические деформации наступят при $\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_{\text{т}}$, откуда $T_{\text{пл}} = \sigma_{\text{т}}(a+b) / 8l$.

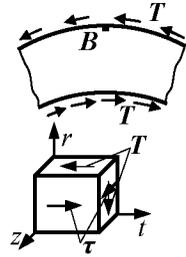


Рис. 02.4 Р

02.5 Наибольшие нормальные напряжения, возникающие в момент закрытия зазора δ , соответствуют силе F (рис. 02.5). При дальнейшем увеличении этой силы указанные напряжения удваиваются. Во сколько раз при этом возрастает сама сила F ? Дано: EJ, l .

РЕШЕНИЕ

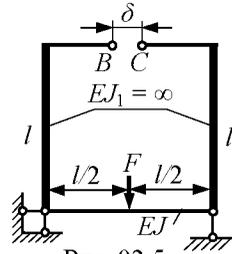


Рис. 02.5

Эпюра M_F (рис. 02.5, а) соответствует моменту закрытия зазора δ , напряжения $\sigma_{\text{max}}(F) = Fl / (4W_x)$. При возрастании нагрузки на F_1 из условия $\delta_{BC} = 0$ находим методом сил

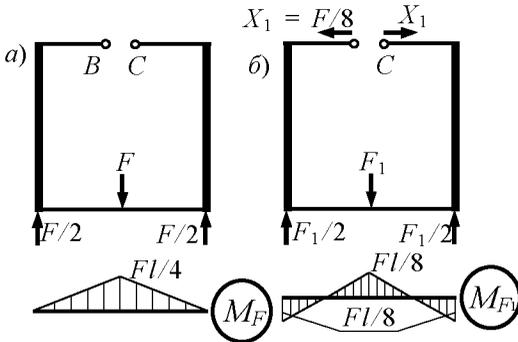


Рис. 02.5 Р

и строим эпюру M_{F_1} (рис. 02.5 Р, б) $\sigma_{\text{max}}(F_1) = F_1 l / (8W_x)$. По условию задачи $Fl / (4W_x) + F_1 l / (8W_x) = 2Fl / (4W_x)$ и тогда $F_1 = 2F$. Следовательно, сила F возрастает в три раза.

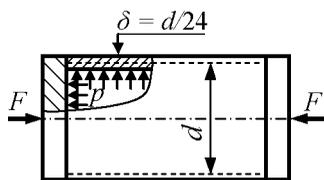


Рис. 02.6

02.6 При каком значении силы F (рис. 02.6) объём материала трубки не изменится? Чему при этом равен коэффициент запаса n_T , найденный по теории максимальных касательных напряжений? Дано: $p, d, \sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_T$.

РЕШЕНИЕ

Изменение объёма

$$\varepsilon_V = (1-2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/E.$$

Напряжённое состояние элементов в точках B и C показано на рис. 02.6 Р (в точке C пренебрегаем по малости величиной $\sigma_r = -p$). Если $\sigma_r = -\sigma_z$, то $\varepsilon_V = 0$. $\sigma_t = pd/(2\delta) = 12p$, $\sigma_z = pd/(4\delta) - F/(\pi d\delta) = 6p - 24F/(\pi d^2)$. Тогда $12p = -6p + 24F/(\pi d^2)$ и $F = 3\pi d^2/4$. Так как $\sigma_1 = 12p$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -12p$, то $\sigma_{\text{экв}} = 24p$. Коэффициент запаса $n_T = \sigma_T/24p$.

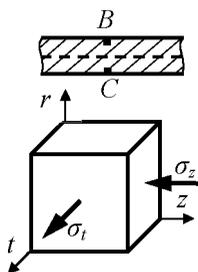


Рис. 02.6 Р

2.10. Олимпиада 2003 г., г. Саранск, МГТУ

03.1 В каком месте стержня (рис. 03.1) следует создать зону нагрева длиной l (заштрихована), чтобы сила F не производила работы? Дано: $l = 90$ мм, $F = \alpha \Delta t EA/3$.

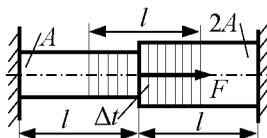


Рис. 03.1

РЕШЕНИЕ

Условие задачи выполняется при $\Delta_B = 0$ (рис. 03.1 Р). Из уравнения перемещений

$$-\frac{R_1 l}{EA} - \frac{R_1 l}{E2A} - \frac{Fl}{E2A} + \alpha \Delta t l = 0$$

следует, что $R_1 = \frac{5}{9} \alpha \Delta t EA$.

Перемещение сечения B составит

$$\Delta_B = -\frac{R_1 l}{EA} + \alpha \Delta t (l - c) = 0, \text{ откуда при найденном значении силы}$$

$$R_1 \text{ получим } c = \frac{4}{9} l = \frac{4 \cdot 90}{9} = 40 \text{ мм.}$$

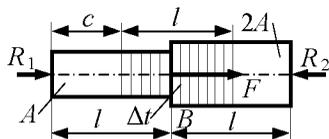


Рис. 03.1 Р

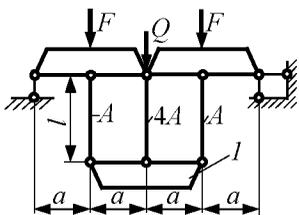


Рис. 03.2

03.2 При нагружении стержневой системы тремя силами (рис. 03.2), измеренное перемещение траверсы l составило $\delta = 10Fl/(EA)$. Каково отношение Q/F ?

РЕШЕНИЕ

Используя симметрию и рассматривая нагружение силами F (рис. 03.2 Р, а) и $Q/2$

(рис. 03.2 Р, б), получим нормальные силы в стержнях, соответственно, $N_1 = -F$, $N_2 = F$, $N_1' = -Q$, $N_2' = Q$. Из условия равенства работы сил и энергии деформации находим перемещения центрального узла K

$$\frac{1}{2} \frac{F w_K(F)}{2} = \frac{F^2 l}{2EA} + \frac{F^2 l}{4EA}, \quad w_K(F) = \frac{3Fl}{EA}.$$

$$\text{Аналогично } w_K(Q) = \frac{3Ql}{EA} \text{ и } w_K = \frac{3(F+Q)l}{EA}.$$

Перемещение δ траверсы l составит

$$\delta = \frac{10Fl}{EA} = w_K - \frac{(N_1 + N_2')l}{E2A} = \frac{3(F+Q)l}{EA} - \frac{(F+Q)l}{E2A}, \text{ откуда } Q = 3F.$$

Искомое соотношение $Q/F = 3$.

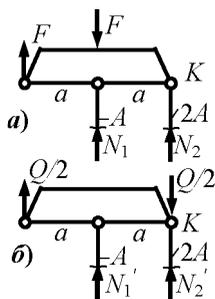


Рис. 03.2 Р

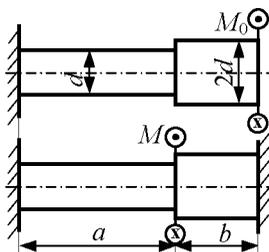


Рис. 03.3

03.3 Предварительное напряжённое состояние стержня создаётся закручиванием парой сил M_0 на угол φ и закреплением свободного торца (рис. 03.3). При последующем нагружении стержня парой сил M участки a и b должны быть равнопрочны. Найти зависимость φ от отношения $a:b$.

РЕШЕНИЕ

Обозначим $b:a = k$.

При нагружении стержня парой сил M (рис. 03.3 Р)

$$\frac{M_A a}{GJ} + \frac{(M_A - M)b}{G16J} = 0,$$

$$M_A = \frac{kM}{16+k}, \quad M_B = \frac{16M}{16+k}.$$

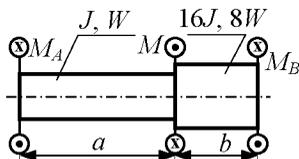


Рис. 03.3 Р

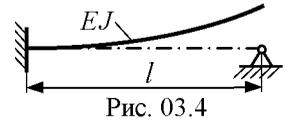
Начальные напряжения созданы парой сил

$$M_0 = \frac{16GJ}{(16+k)a} \varphi.$$

Условие равнопрочности участков $\frac{M_A + M_0}{W} = \frac{M_B - M_0}{8W}$.

Подставляя значения моментов, получим $\varphi = \frac{Ma(2-k)}{18GJ}$.

03.4 Ось стержня имеет постоянную кривизну k . Найти положение сечения, не имеющего углового перемещения после соединения свободного конца стержня с неподвижной опорой (рис. 03.4), считая перемещения малыми и $l = 600$ мм.



РЕШЕНИЕ

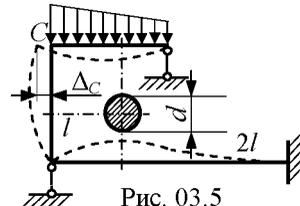
При малых перемещениях кривизна $k \approx v''$ и линейное перемещение $v = kz^2/2$ (рис. 03.4 Р, а).

Указав и обозначив реакции опор, возникающие после соединения стержня с правой опорой, через F и F_l (рис. 03.4 Р, б), методом начальных параметров получим уравнение полного перемещения произвольного сечения z

$$v_1 = \frac{kz^2}{2} + \frac{1}{EJ} \left(\frac{Fz^3}{6} - \frac{F_l z^2}{2} \right).$$

Из условия $v_1(l) = 0$ находим $F = 3kJ(2l)$. Следовательно, $v_1 = \frac{k}{4} \left(\frac{z^3}{l} - z^2 \right)$ и $v_1' = \frac{kz}{4} \left(\frac{3z}{l} - 2 \right)$, откуда находим абсциссы сечений, не имеющих угловых перемещений: $z = 0$ и $z = 2l/3 = 2 \cdot 600/3 = 400$ мм.

03.5 По измеренному значению Δ_C линейного перемещения сечения C (рис. 03.5) найти наибольшее нормальное напряжение в этом сечении. Дано: $\Delta_C = 4$ мм, $d = 10$ мм, $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $l = 20d$.



РЕШЕНИЕ

На участке CB (рис. 03.5 Р) изгибающий момент M постоянен. Так как прогиб $v_B = 0$, то против центра тяжести эюры \bar{M}_1 на эюре M_X должна быть нулевая ордината. Поэтому, если $M_B = M$, то $M_D = M/2$.

Перемножая эюры M_X и \bar{M}_2 , получим

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \left[M \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l + l \cdot 2l \cdot \left(M - \frac{1}{2} \cdot \frac{3M}{2} \right) \right] = \frac{Ml^2}{EJ}.$$

Следовательно, $M = \frac{EJ}{l^2} \Delta_C$.

Наибольшее нормальное напряжение в сечении C равно

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{EJ}{l^2 W} \Delta_C = \frac{Ed \Delta_C}{2(20d)^2} = \frac{10^5 \cdot 4}{800 \cdot 10} = 50,0 \text{ МПа}.$$

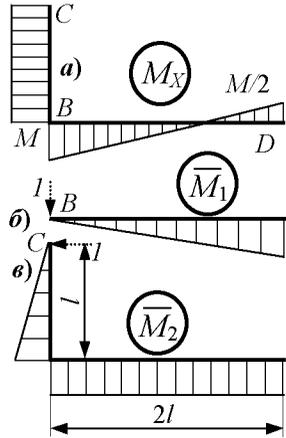


Рис. 03.5 Р

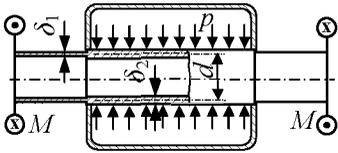


Рис. 03.6

03.6 При какой толщине δ_1 (рис. 03.6) будет обеспечена равнопрочность всех участков трубки? Использовать теорию максимальных касательных напряжений. Дано: $d, M = p\pi d^3/6, \delta_2 = d/12$.

РЕШЕНИЕ

Напряжённое состояние элементов 1 и 2 (рис. 03.6 Р)

$$\tau_1 = \frac{M}{2A^* \delta_1} = \frac{p\pi d^3 \cdot 4}{12\pi d^2 \delta_1} = \frac{pd}{3\delta_1},$$

$$\tau_2 = \frac{M}{2A^* \delta_2} = \frac{p\pi d^3 \cdot 4 \cdot 12}{12\pi d^2 d} = 4p,$$

$$\sigma_2 = 6p.$$

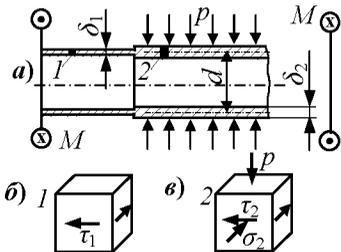


Рис. 03.6 Р

Условие равнопрочности участков

$$\sigma_{1 \text{ экв}} = \sigma_{2 \text{ экв}}, \quad 2\tau_1 = \sqrt{\sigma_2^2 + 4\tau_2^2} = 10p,$$

$$\frac{2pd}{3\delta_1} = 10p, \text{ следовательно, } \delta_1 = d/15.$$

2.11. Олимпиада 2004 г., г. Дзержинск, ДФ НГТУ

04.1 Две одинаковых консольных балки (рис. 04.1) жёстко соединены торцевыми сечениями C . Найти значения силовых факторов в этих сечениях при нагружении балок распределёнными силами. Дано: q, J .

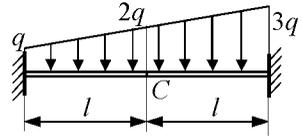


Рис. 04.1

РЕШЕНИЕ

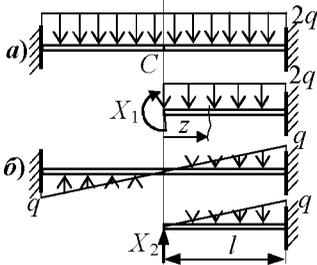


Рис. 04.1 Р

Рассмотрим два варианта нагружения: симметричный (а) и кососимметричный (б) (рис. 04.1 Р). В сечении C в первом варианте угол $\theta_C = 0$, во втором варианте прогиб $v_C = 0$. Так как перемещения в направлении

силового фактора $X_1 \delta = \frac{\partial U}{\partial X_1}$, где

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2}{2EJ} dz, \text{ то } \delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_x \frac{\partial M_x}{\partial x} dz.$$

В первом варианте

$$M_x = X_1 - qz^2, \quad \delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l (X_1 - qz^2) dz = 0 \text{ и } X_1 = M = ql^2/3.$$

Во втором варианте нагружения

$$M_x = X_2 z - qz^3/(6l), \quad v_C = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(X_2 z - \frac{qz^3}{6l} \right) z dz = 0 \text{ и } X_1 = Q = ql/10.$$

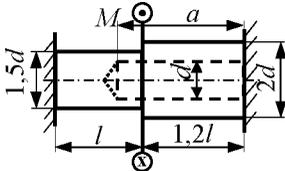


Рис. 04.2

04.2 После сверления отверстия диаметром d (рис. 04.2) наибольшие углы сдвига на участках, ослабленных отверстием, оказались одинаковы. Найти глубину сверления a при длине $l = 50$ мм. При вычислениях принять $1,5^4 = 5$.

РЕШЕНИЕ

По условию задачи $\gamma_2 = \gamma_3$, то есть $\frac{M_A}{W_2} = \frac{M_B}{W_3}$ (рис. 04.2 Р).

Обозначим $J = \pi d^4/32$, тогда $J_1 = 5J$, $J_2 = 4J$, $J_3 = 15J$, $W_2 = = 16J/(3d)$, $W_3 = 15J/d$. Следовательно, $M_B = 45M_A/16 = 2,812M_A$.

Уравнение перемещений

$$\frac{M_A(l-x)}{5GJ} + \frac{M_A x}{4GJ} + \frac{M_B 1,2l}{15GJ} = 0.$$

Подставляя значение M_B , находим $x = 0,5l$. Глубина сверления $a = l_3 + x = 1,7l = 1,7 \cdot 50 = 85$ мм.

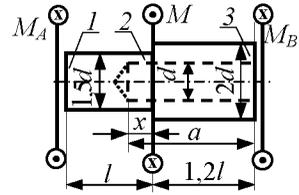


Рис. 04.2 Р

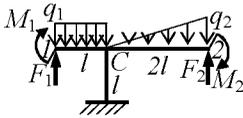


Рис. 04.3

04.3 В узле C поперечные силы и изгибающие моменты в стержнях отсутствуют. При каком отношении $q_1:q_2$ (рис. 04.3) значения угловых перемещений в торцевых сечениях одинаковы?

РЕШЕНИЕ

Выбрав начало координат в сечении C (рис. 04.3 Р), методом начальных параметров находим угловые перемещения в сечениях с

абсциссами z_1 и z_2 : $\theta_1 = \frac{q_1 \cdot z_1^3}{3!}$, $\theta_2 = \frac{q_2 \cdot z_2^4}{2l \cdot 4!}$.

В торцевых сечениях при $z_1 = l$ и $z_2 = 2l$,

$\theta_1 = \frac{q_1 \cdot l^3}{6}$, $\theta_2 = \frac{q_2 \cdot l^3}{3}$. Из условия $\theta_1 = \theta_2$

получаем $q_1:q_2 = 2$.

04.4 Распределённая нагрузка занимает половину площади торцевого сечения стержня (на рис. 04.4 заштрихована). По измеренной деформации ε ребра $b-b$ вычислить угол наклона торцевого сечения. Дано: $\varepsilon = 0,002$.

РЕШЕНИЕ

Напряжения в точке B поперечного сечения (рис. 04.4 Р)

$$\sigma = \frac{F y_C}{J_x} y_{\max} - \frac{F}{A}.$$

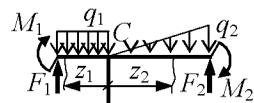


Рис. 04.3 Р

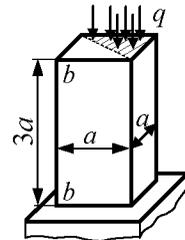


Рис. 04.4

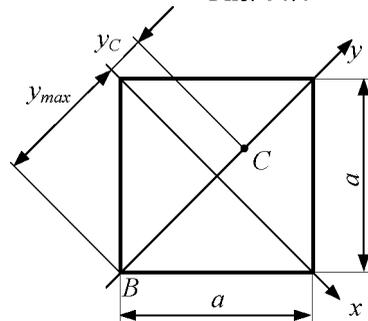


Рис. 04.4 Р

Учитывая, что $F = qa^2/2$, $y_{\max} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y_C = \frac{a\sqrt{2}}{6}$, $\sigma = E\varepsilon$, находим

$q = 2E\varepsilon$. Угловое перемещение торцевого сечения $\theta = \frac{3Ma}{EJ}$,

изгибающий момент $M = Fy_C = \frac{qa^3\sqrt{2}}{12} = \frac{E\varepsilon a^3\sqrt{2}}{6}$ и

$\theta = 6\sqrt{2}\varepsilon = 6\sqrt{2} \cdot 0,002 = 0,0170$ рад или $0,974^\circ$.

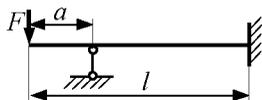


Рис. 04.5

04.5 На каком расстоянии a от конца балки (рис. 04.5) следует установить опору, чтобы значения наибольших линейных перемещений на консоли и в пролёте были одинаковы? Дано: $l = 1,2$ м.

РЕШЕНИЕ

Раскрывая неопределимость, получаем эпюру M_X (рис. 04.5 Р, а). Наибольший прогиб на консоли находим, используя эпюры M_X и \bar{M}_1 (рис. 04.5 Р, б):

$$EJv_A = \frac{1}{2} \cdot Fa \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a + Fa \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} Fa \cdot b \cdot \left(a + \frac{2}{3}b \right) = Fa^2 \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{4} \right).$$

Наибольший прогиб в пролёте соответствует сечению, в котором угловое перемещение равно нулю, то есть сечению В. Используя эпюры M_X и \bar{M}_2 (рис. 04.5 Р, в), получаем

$$EJv_B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Fa}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Fa}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \left(\frac{b}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{3} \right) = \frac{Fab^2}{27}.$$

Условие $v_A = v_B$ приводит к уравнению $a^2 + \frac{3}{4}ba - \frac{1}{9}b^2 = 0$, корень которого $a = 0,127b$.

Так как $a + b = l$, то $b = l/1,127 = 1200/1,127 = 1065$ мм. Искомое расстояние $a = l - b = 1200 - 1065 = 135$ мм.

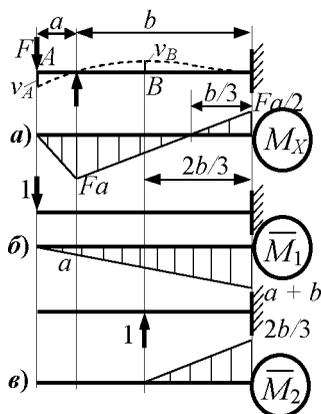


Рис. 04.5 Р

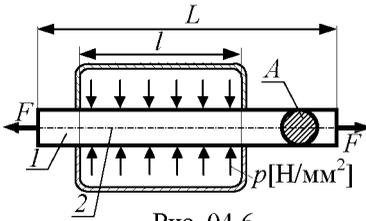


Рис. 04.6

04.6 Коэффициенты запаса на участках 1 и 2 (рис. 04.6), вычисленные по теории наибольших касательных напряжений, отличаются в три раза. При какой длине L стержня его объём не изменится? Дано: $l = 80$ мм.

РЕШЕНИЕ

Эквивалентные напряжения на участках 1 и 2 (рис. 04.6 Р, б-в) соответственно равны σ и $\sigma + p$, где $\sigma = F/A$.

По условию задачи эквивалентное напряжение на участке 1 в три раза меньше, чем на участке 2 , поэтому $3\sigma = \sigma + p$ и, следовательно, $p = 2\sigma$.

Изменение объёма

$$\Delta V = \frac{1-\mu}{E} A [\sigma(L-l) + (\sigma - 2p)l] = 0.$$

Откуда $L = 4l = 4 \cdot 80 = 320$ мм.

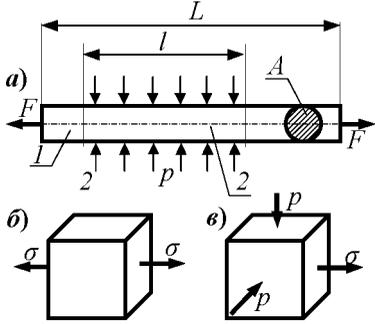


Рис. 04.6 Р

2.12. Олимпиада 2005 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС

05.1 В правом пролёте, изогнутом по дуге окружности, наибольший прогиб равен v (рис. 05.1). Найти наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки. Дано: v, l, E, a .

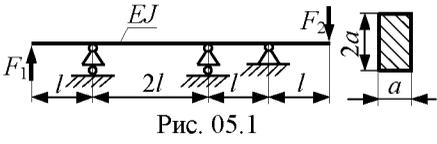


Рис. 05.1

РЕШЕНИЕ

На правом пролёте (рис. 05.1 Р) $M_x = F_2 l = const.$

Наибольший прогиб

$$v = \frac{F_2 l^3}{8EJ} \text{ и } F_2 = \frac{8EJv}{l^3}.$$

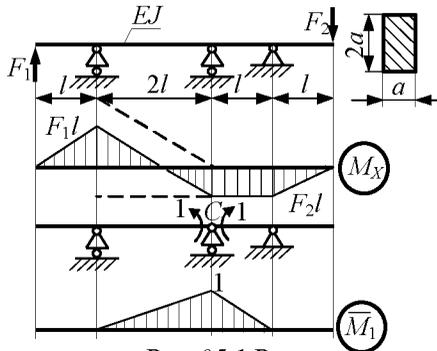


Рис. 05.1 Р

В сечениях C взаимные угловые перемещения отсутствуют, поэтому, используя эпюры M_X и \bar{M}_1 , находим

$$EJ\theta_C = -F_2 l \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - F_2 l \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (F_1 + F_2) l \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 0,$$

$$F_1 = 3,5 F_2 = \frac{28EJv}{l^3}.$$

Наибольшее напряжение $\sigma_{\max} = \frac{F_1 l}{W} = \frac{28Eav}{l^3}.$

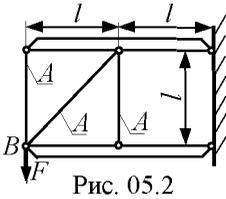


Рис. 05.2

05.2 Узел B получил перемещение δ (рис. 05.2). Найти значение силы F . Дано: δ, l, E, A .

РЕШЕНИЕ

Учитывая, что $N_1 = 2 \cdot N_3$ и используя уравнения равновесия (рис. 05.2 Р)

$$\sum M_O = N_1 \cdot 2l - N_2 \cdot l \cdot \cos 45^\circ + N_3 \cdot l = 0,$$

$$\sum M_C = -N_1 \cdot 2l + N_2 \cdot 2l \cdot \cos 45^\circ - N_3 \cdot l - F \cdot 2l = 0, \text{ получаем}$$

$$N_1 = 4F/5, N_2 = 2\sqrt{2}F, N_3 = 2F/5.$$

Из условия равенства работы силы F и потенциальной энергии деформации стержней

$$\frac{1}{2} F \delta = \frac{1}{2EA} (N_1^2 l + N_2^2 \sqrt{2} l + N_3^2 l) = \frac{12,11 F^2 l}{2EA},$$

находим $F = 0,0826 \frac{EA\delta}{l}.$

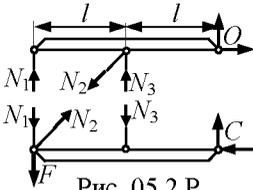


Рис. 05.2 Р

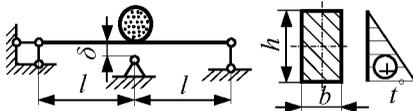


Рис. 05.3

05.3 Температура линейно изменяется по высоте сечения балки (рис. 05.3). При каком значении t положение шарика становится неустойчивым? Весом шарика пренебречь. Дано: l, h, δ, α [1/град].

РЕШЕНИЕ

Кривизна балки, вызванная температурным градиентом по высоте сечения, постоянна по длине.

При увеличении t балка коснётся опоры, и при некотором значении t кривизна балки в среднем сечении $k = k_t - k_R = \frac{\alpha t}{h} - \frac{Rl}{2EJ} = 0$

(начальный момент неустойчивости шарика). Откуда $R = \frac{2EJ\alpha t}{hl}$. С последующим ростом реакции R изменяется знак k (рис. 05.3 Р), и положение шарика становится неустойчивым. Учитывая, что $\bar{M}_1 = z/2$, находим

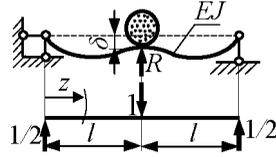


Рис. 05.3 Р

$$\delta = 2 \int_0^l \bar{M}_1 (k_t - k_R) dz = 2 \int_0^l \frac{z}{2} \left(\frac{\alpha t}{h} - \frac{Rz}{2EJ} \right) dz = \frac{\alpha t l^2}{2h} - \frac{Rl^3}{6EJ}.$$

Подставив значение R , получим $t = \frac{6\delta h}{\alpha l^2}$.



Рис. 05.4

05.4 Коэффициент запаса стержня (рис. 05.4), предварительно закрученного на угол φ , равен $n_T = 2$ (энергетическая теория). При каком повышении температуры стержня этот коэффициент будет исчерпан? Дано: $\varphi = 0,12$ рад, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/град, $G:E = 0,4$.

РЕШЕНИЕ

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau = \frac{M_k}{W_p} = \frac{\varphi G J_p}{l W_p} = \frac{\varphi G d}{2l} = \frac{\varphi G}{80} \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{3} \tau.$$

Так как $n_T = 2$, то $n_T \sigma_{\text{экв}} = 2\sqrt{3} \tau = \sigma_T$.

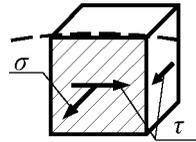


Рис. 05.4 Р

При повышении температуры на Δt нормальное напряжение (рис. 05.4 Р) $\sigma = \alpha \Delta t E$ и $\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_T \Rightarrow \sigma^2 + 3\tau^2 = (2\sqrt{3}\tau)^2$, $\Rightarrow \sigma = 3\tau \Rightarrow \alpha \Delta t E = 3\tau$.

Изменение температуры

$$\Delta t = \frac{3\tau}{\alpha E} = \frac{3\varphi G}{80\alpha E} = \frac{3 \cdot 0,12 \cdot 0,4}{80 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} = 150^\circ.$$

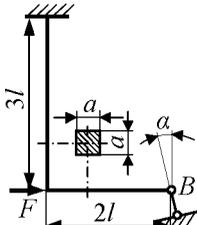


Рис. 05.5

05.5 Найти угол α (рис. 05.5), при котором запас потенциальной энергии деформации U максимален, и вычислить значение U_{max} . Дано: F, l, E, a .

РЕШЕНИЕ

Работа силы F и, следовательно, потенциальная энергия деформации будет наибольшей при отсутствии лишней связи в сечении B (рис. 05.5 Р), то есть при $X_1 = 0$. Так как $X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11} = 0$ при $\Delta_{1F} = 0$, то центр тяжести эпюры M_F и нулевая точка эпюры M_1 должны иметь одинаковые ординаты $z_0 = 2l$.

Следовательно, $\alpha = 45^\circ$ и

$$U_{max} = \int_0^{3l} \frac{(Fz)^2 dz}{2EJ} = \frac{54F^2 l^3}{Ea^4}.$$

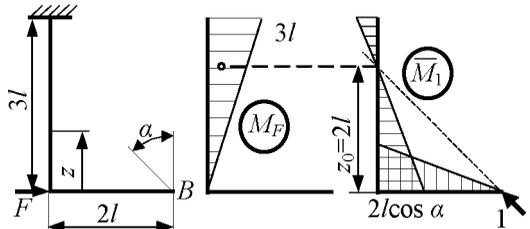


Рис. 05.5 Р

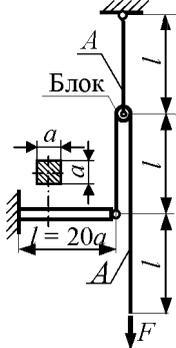


Рис. 05.6

05.6 Балка соединена с тросом, перекинутым через блок, и нагружена силой F (рис. 05.6). Блок подвешен к жёсткой опоре двойным тросом. Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки равно 360 МПа. Найти работу силы F при $a = 20$ мм, $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа (балка), $A = 20$ мм², $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$ МПа (трос).

РЕШЕНИЕ

Из условия $\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6Fl}{a^3}$

находим $F = \frac{\sigma a^3}{6l}$.

Прогиб балки, учитывая, что $l = 20a$ (рис. 05.6 Р)

$$v = \frac{Fl^3}{3E_1 J_1} = \frac{800\sigma a}{3E_1} = \frac{800 \cdot 360 \cdot 0,02}{3 \cdot 2 \cdot 10^5} = 9,60 \text{ мм}.$$

Перемещение силы F , связанное с удлинением тросов

$$\delta = \frac{F \cdot 3l}{E_2 A} + \frac{2F \cdot 2l}{E_2 A} = \frac{7Fl}{E_2 A} = \frac{7\sigma a^3}{6 \cdot 0,7 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 2,40 \text{ мм}.$$

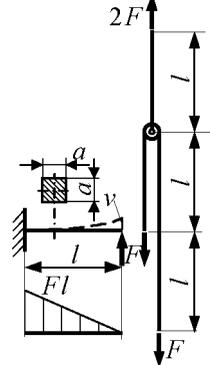


Рис. 05.6 Р

Суммарное перемещение $\Delta = v + \delta = 9,6 + 2,4 = 12,0$ мм.

Работа силы F

$$W = \frac{F \Delta}{2} = \frac{\sigma a^3 \Delta}{12l} = \frac{\sigma a^2 \Delta}{240} = \frac{360 \cdot 10^6 \cdot 0,02^2 \cdot 0,012}{240} = 7,20 \text{ Н} \cdot \text{м} = 7,2 \text{ Дж.}$$

2.13. Олимпиада 2006 г., г. Улан-Удэ, ВСГУТУ

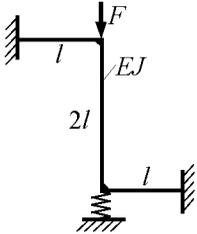


Рис. 06.1

06.1 Жёсткости рамы в направлении силы F и пружины одинаковы (рис. 06.1). Найти отношение наибольших линейных перемещений: вертикального и горизонтального. Дано: $F, l, EJ = \text{const}$.

РЕШЕНИЕ

Наибольшие перемещения возникают в среднем сечении вертикального стержня. На рис. 06.1 Р показаны эквивалентная система и эпюры изгибающих моментов для раскрытия статической неопределённости, эпюры изгибающих моментов в эквивалентной системе, а также эпюры изгибающих моментов для определения вертикального и горизонтального перемещений.

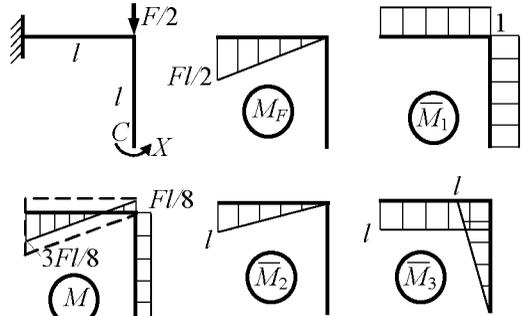


Рис. 06.1 Р

$$EJ \delta_{11} = 2 \cdot (1 \cdot l \cdot l) = 2l^2,$$

$$EJ \Delta_{1F} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{2} \cdot l \cdot l = -\frac{Fl^2}{4},$$

$$X = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{Fl}{8}.$$

Вертикальное перемещение сечения C

$$\Delta_e = \Delta_2 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4Fl}{8} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l - \frac{Fl}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right) = \frac{5 \cdot F \cdot l^3}{48 \cdot EJ},$$

горизонтальное перемещение

$$\Delta_e = \Delta_3 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4Fl}{8} \cdot l \cdot l - \frac{Fl}{8} \cdot l \cdot l - \frac{Fl}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right) = \frac{F \cdot l^3}{16 \cdot EJ},$$

их отношение $\Delta_e : \Delta_e = 5:3$.

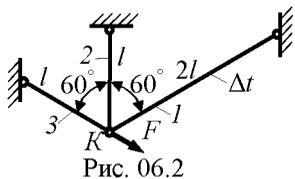


Рис. 06.2

06.2 Стержневая система нагружена силой F , а стержень l нагрет на Δt . Определить полное перемещение узла K (рис. 06.2). Дано: $F, l, A, \alpha, \Delta t^\circ = \frac{5F}{6\alpha EA}, EA = \text{const.}$

РЕШЕНИЕ

06.2 Система статически неопределима. На рис. 06.2 Р показаны эквивалентная система, эпюры заданных воздействий (*б*) и единичной силы (*в*).

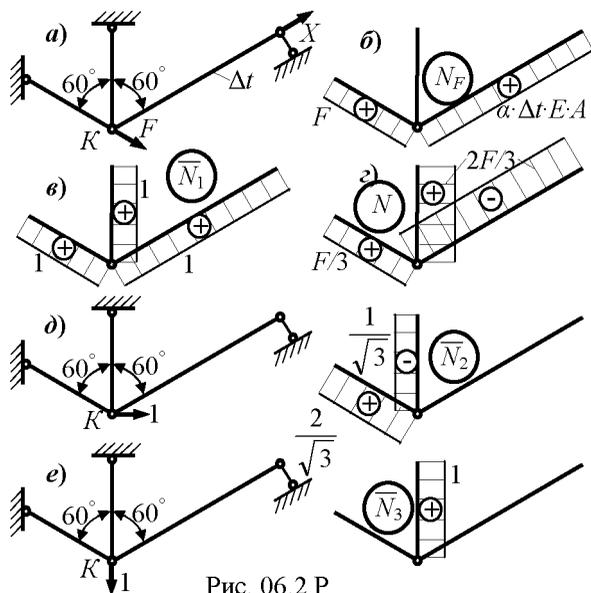


Рис. 06.2 Р

После раскрытия статической неопределимости методом сил строим эпюру нормальных сил N в эквивалентной системе (рис. 06.2 Р, *з*). Затем перемножением эпюр N и \bar{N}_2 определяем горизонтальное, а перемножением N и \bar{N}_3 — вертикальное перемещение сечения K .

$$EJ \delta_{11} = 1 \cdot l \cdot 1 + 1 \cdot l \cdot 1 + 1 \cdot 2l \cdot 1 = 4l;$$

$$EJ \Delta_{1F} = F \cdot l \cdot 1 + E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot 2l \cdot 1;$$

$$X = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{F}{4} - \frac{1}{2} \alpha \cdot \Delta t^\circ \cdot E \cdot A = -\frac{2F}{3}.$$

$$EJ \Delta^\epsilon = EJ \Delta_2 = \frac{F}{3} \cdot l \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2F}{3} \cdot l \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0;$$

$$EJ \Delta^\epsilon = EJ \Delta_3 = \frac{2F}{3} \cdot l \cdot 1; \quad \Delta = \Delta^\epsilon = \frac{2Fl}{3EA}.$$

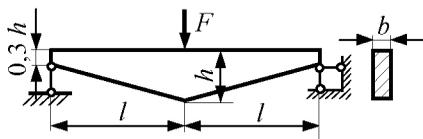


Рис. 06.3

06.3 Из условия прочности по нормальным напряжениям определить размер h поперечного сечения заданной балки (рис 06.3). Дано: $F = 20$ кН, $[\sigma] = 150$ МПа, $l = 3$ м, $b = 0,4 \cdot h$.

РЕШЕНИЕ

06.3 Составляем уравнение для нормальных напряжений в произвольном сечении балки и ищем экстремум этой функции

$$h(z) = 0,3h + 0,7h \frac{z}{l};$$

$$W_x(z) = \frac{bh^2(z)}{6} = \frac{0,4h^3}{6} \left(0,3 + 0,7 \frac{z}{l}\right)^2 = \frac{h^3}{15} \left(0,3 + 0,7 \frac{z}{l}\right)^2;$$

$$\sigma(z) = \frac{M_x(z)}{W_x(z)} = \frac{7,5Fz}{h^3 \left(0,3 + 0,7 \frac{z}{l}\right)^2};$$

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\frac{7,5Fz}{h^3 \left(0,3 + 0,7 \frac{z}{l}\right)^2} \right] = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{7}l;$$

$$\sigma_{\text{экст}} = \frac{7,5F \cdot \frac{3l}{7}}{h^3 \left(0,3 + 0,7 \cdot \frac{3l}{7l}\right)^2} = \frac{8,929Fl}{h^3} \leq [\sigma].$$

Тогда

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{8,929Fl}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{8,929 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 3}{150 \cdot 10^6}} = 153 \text{ мм.}$$

06.4 Под действием силы F зазор δ закрывается (рис. 06.4). При каком положении подвижной опоры C обеспечивается прочность рамы? Дано: $l = 400$ мм, $a = 60$ мм, $\delta = 4$ мм, $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 120$ МПа.

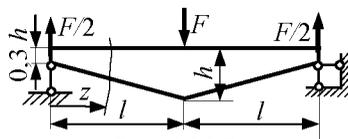


Рис. 06.3 Р

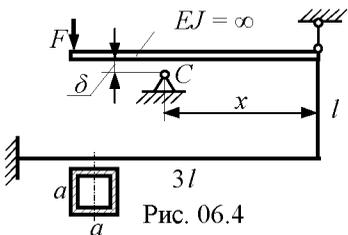


Рис. 06.4

РЕШЕНИЕ

Определим угол поворота сечения K способом Верещагина (рис. 06.5 Р), из условия касания подвижной опоры C

$$\theta_K = \frac{\delta}{x} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,5M \cdot 3l \cdot 1 - 0,5M \cdot 3l \cdot 1 + M \cdot l \cdot 1 \right) = \frac{7Ml}{4EJ},$$

откуда $x = \frac{4EJ\delta}{7Ml}$.

Из условия прочности $M = [\sigma] \cdot W$, учитывая, что $J/W = a/2$, получим

$$x = \frac{2Ea\delta}{7l[\sigma]} = \frac{2 \cdot 0,7 \cdot 10^{11} \cdot 0,06 \cdot 0,004}{7 \cdot 0,4 \cdot 120 \cdot 10^6} = 100 \text{ мм.}$$

06.5 Определить работу внешних сил. Деформациями траверсы пренебречь. Дано: F, l, E, A .

РЕШЕНИЕ

Жёсткость всех элементов стержневой системы $k = l/(EA) = \text{const}$, следовательно, $\Delta l = k \cdot N$.

Представляя заданную нагрузку как сочетание симметричного (рис. 06.5 Р, *а*) и кососимметричного (рис. 06.5 Р, *б*) нагружений, получим: в первом варианте $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_5 = 3F/5$, во втором — $N_i = 0$. Следовательно, $\Delta l_i = k \cdot N_i = \Delta l = \text{const}$.

Тогда работа внешних сил составит

$$W = \frac{(F + 2F)\Delta l}{2} = \frac{3FkN}{2} = \frac{0,9F^2 l}{EA}.$$

06.6 Тонкостенная оболочка (рис. 06.6) находится под внутренним гидростатическим давлением. Найти положение элемента оболочки l , испытывающего чистый сдвиг. Дано: h, γ [Н/м^3] — объёмный вес жидкости.

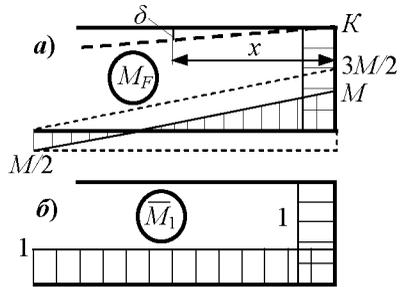


Рис. 06.4 Р

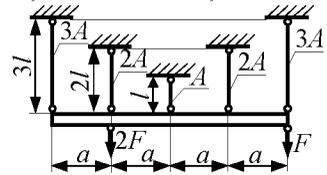


Рис. 06.5

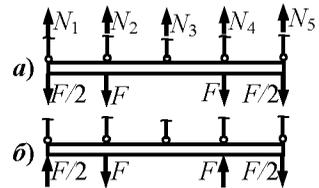


Рис. 06.5 Р

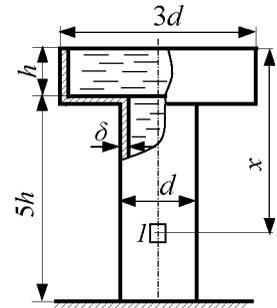


Рис. 06.6

РЕШЕНИЕ

Ординату элемента l обозначим через H (рис. 06.6 Р). При сдвиге $\sigma_1 = -\sigma_3$ (1).

Окружное напряжение в элементе равно

$$\sigma_t = \sigma_1 = \frac{\gamma H d}{2\delta}, \text{ а меридиональное -}$$

$$\sigma_m = \sigma_3 = \frac{-\pi \gamma h}{4\pi d \delta} (9d^2 - d^2) = \frac{-2\gamma h d}{\delta}.$$

Из условия (1) следует, что $H = 4 \cdot h$.

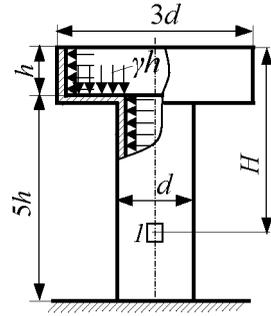


Рис. 06.6 Р

2.14. Олимпиада 2007 г., г. Новочеркасск, ЮРГТУ

07.1 Для заданной балки (рис. 07.1), вычислить: а) работу внешних сил, б) потенциальную энергию деформации. Дано: q, l, EJ .

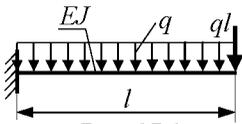


Рис. 07.1

РЕШЕНИЕ

Любым способом (или из справочников) определяем перемещения консоли от сосредоточенной $v_1 = \frac{ql^4}{3EJ}$ и распределённой

ной $v_2 = \frac{ql^4}{8EJ}$ сил. Затем определяем совместную работу этих сил. Вначале прикладывается сила $F = ql$, а затем $-q$ (рис. 07.1, а).

$$W_1 = \frac{Fv_1}{2} + Fv_2 = \frac{ql \cdot ql^4}{6EJ} + \frac{ql \cdot ql^4}{8EJ} = \frac{7q^2 l^4}{24EJ}.$$

Перемещения в произвольном сечении z от нагрузки q равны (метод начальных параметров) $v_2(z_2) = -\frac{ql^2 z_2^2}{4} + \frac{ql z_2^3}{6} - \frac{qz_2^4}{24}$, поэтому

$$W_2 = -\frac{1}{2EJ} \int_0^l qv_2(z_2) dz_2 = \frac{q^2 l^5}{24EJ} - \frac{q^2 l^5}{48EJ} + \frac{q^2 l^5}{240} = \frac{q^2 l^5}{40EJ}.$$

$$\text{Тогда } W = W_1 + W_2 = \frac{7q^2 l^4}{24EJ} + \frac{q^2 l^4}{40EJ} = \frac{19q^2 l^4}{60EJ}.$$

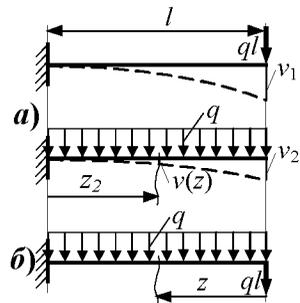


Рис. 07.1 Р

Изгибающий момент в произвольном сечении z

$$M_x = -\left(qlz + \frac{qz^2}{2}\right) = -\frac{q}{2}(2lz + z^2).$$

Потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2EJ} \int_0^l M_x^2 dz = \frac{q^2}{8EJ} \int_0^l (2lz + z^2)^2 dz = \frac{q^2}{8EJ} \left(\frac{4}{3}l^5 + l^5 + \frac{1}{5}l^5 \right) = \frac{19q^2 l^4}{60EJ}.$$

07.2 На участке AB (рис. 07.2) наибольшее перемещение $v_C = 2$ мм. Найти σ_{max} в этом сечении при $l = 200$ мм, $h = 40$ мм, $E = 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ

Так как $v_B = 0$ (опора), то $M_B = -2M_A$. Схема нагружения и эпюра изгибающих моментов при $M_B = M$ показана на рис. 07.2 Р.

Из условия $v'(z) = 0$ находим $z = 2l$ и $v_{max} = Ml^2/3EJ = v_C$, откуда $M = 3EJv_C/l^2$.

Так как $M_C(z=2l) = M/2$, то

$$\sigma = \frac{M}{2W} = \frac{3Ehv_C}{4l^2} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0,04 \cdot 0,002}{4 \cdot 0,2^2} = 150 \text{ МПа}.$$

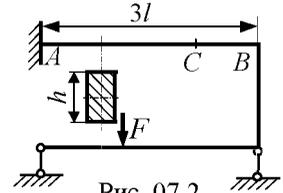


Рис. 07.2

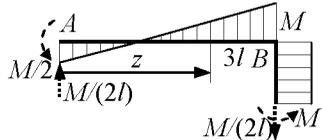


Рис. 07.2 Р

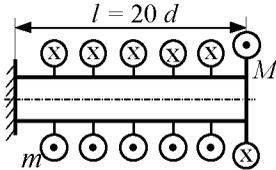


Рис. 07.3

07.3 Наибольшее угловое перемещение φ_{max} в стержне и угол поворота торцевого сечения (рис. 07.3) равны по величине. Найти наибольшее касательное напряжение при $m = 100$ Нм/м, $d = 10$ мм.

РЕШЕНИЕ

Поворот произвольного сечения $GJ_p \varphi_z = M_0 z - mz^2/2$. Координата сечения с наибольшим углом поворота $\varphi_z = \varphi_{max}$ равна $a = M_0/m$ (рис. 07.3 Р).

По условию задачи $\varphi_a = \varphi_l$,

$$M_0 a - \frac{ma^2}{2} = -\left(M_0 l - \frac{ml^2}{2}\right),$$

откуда находим $a = 0,414l = M_0/m$ и $M_0 = 0,414ml$.

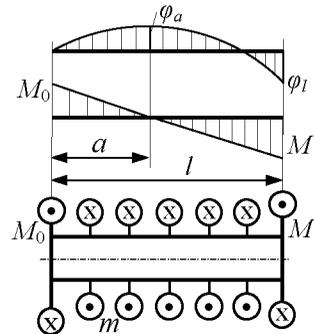


Рис. 07.3 Р

Следовательно, $M_{\max} = 0,586ml$ и

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_P} = \frac{0,586 \cdot m \cdot 20 \cdot d \cdot 16}{\pi \cdot d^3} = \frac{0,586 \cdot 100 \cdot 20 \cdot 16}{\pi \cdot 0,01^2} = 59,7 \text{ МПа.}$$

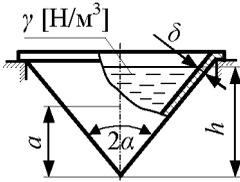


Рис. 07.4

07.4 На каком уровне a тонкостенная оболочка (рис. 07.4) равномерно растянута в окружном и меридиональном направлениях? Дано: $h, \delta, \gamma, \alpha = 30^\circ$.

РЕШЕНИЕ

Из уравнения Лапласа имеем (рис. 07.4 Р)

$$\sigma_t = \frac{\gamma(h-a)\rho_t}{\delta} = \frac{\gamma(h-a)atg30^\circ}{\delta \cos 30^\circ} = \frac{2\gamma a(h-a)}{3\delta}.$$

Из уравнения равновесия отсечённой части получаем выражение для меридионального напряжения $\sigma_m = \frac{\gamma a \left(h - \frac{2a}{3} \right)}{3\delta}$. По

условию задачи $\sigma_t = \sigma_m$, откуда $a = 3h/4$.

На этом уровне $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\gamma h^2}{8\delta}$, $\sigma_3 = 0$ (на внешней стороне оболочки).

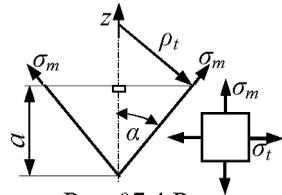


Рис. 07.4 Р

07.5 Температура стержня изменяется по высоте сечения (рис. 07.5, а). При некотором значении $t = t_1 - t_2$ кривизна достигает значения k и зазор δ закрывается (рис. 07.5, б).

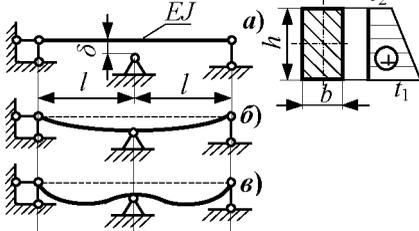


Рис. 07.5

Найти наибольшее нормальное напряжение в среднем сечении стержня при $t_1 - t_2 = nt$, полагая, что кривизна оси в этом сечении равна $-k$ (рис. 07.5, в). Дано: $h = 60$ мм, $l = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\delta = l/600$.

РЕШЕНИЕ

Кривизна оси стержня при закрытии зазора δ составляет $k = \frac{\alpha t}{h}$,

где α – коэффициент линейного расширения материала. При этом форма изогнутой оси соответствует нагружению стержня моментами

M (рис. 07.5 Р, а) и $\delta = \frac{Ml^2}{2EJ}$. Так как $k = \frac{M}{EJ} = \frac{\alpha t}{h}$, то $\delta = \frac{\alpha tl^2}{2h}$.

При $t_1 - t_2 = nt > t$ реакция средней опоры (рис. 07.5 Р, б) определяется уравнением $v = n\delta - \delta$. Учитывая, что $v = \frac{Fl^3}{6EJ}$, получим

$$F = \frac{6EJ\delta(n-1)}{l^3}. \quad \text{Кривизна оси}$$

стержня в среднем сечении равна

$$k^* = \frac{\alpha nt}{h} - \frac{Fl}{2EJ}.$$

По условию задачи $k^* = -k = -\alpha t/h$. В этом случае

$$F = \frac{2EJ\alpha t(n+1)}{hl} = \frac{4EJ\delta(n+1)}{l^3}.$$

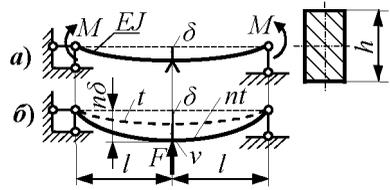


Рис. 07.5 Р

Приравнивая полученные для F выражения, находим, что $n = 5$, тогда $F = \frac{24EJ\delta}{l^3}$ и наибольшее нормальное напряжение в среднем сечении стержня составит $\sigma = \frac{Fl}{2W} = \frac{6Eh\delta}{l^3} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,06}{600 \cdot 1^2} = 120 \text{ МПа}$.

07.6 После введения шарнира C напряжённое состояние стержня (рис. 07.6, б) под действием собственного веса не изменилось. На каком расстоянии от шарнира находится сечение с наибольшим линейным перемещением, если $l = 1,4 \text{ м}$?

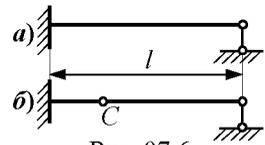


Рис. 07.6

РЕШЕНИЕ

Раскрывая статическую неопределённость, находим реакции опор (рис. 07.6 Р, б).

Из условия $M(z) = -\frac{ql^2}{8} + \frac{5ql}{8}z - \frac{q}{2}z^2 = 0$

определяем положение шарнира $z_1 = l/4$. Из

условия $v'(z) = -\frac{ql^2 z}{8} + \frac{5ql z^2}{16} - \frac{qz^3}{6} = 0$

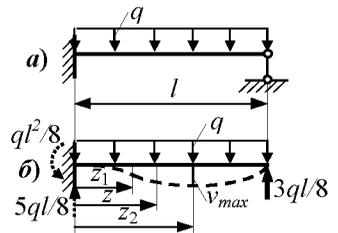


Рис. 07.6 Р

находим абсциссу сечения, для которого $v = v_{max} - z_2 = 0,578l$. Искомое расстояние составит $a = z_2 - z_1 = 0,328l = 0,328 \cdot 1,4 = 0,459 \text{ м}$.

2.15. Олимпиада 2008 г., г. Дзержинск, ДФ НГТУ

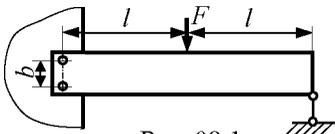


Рис. 08.1

08.1 Кронштейн закреплён слева двумя заклёпками, справа – шарнирной опорой (рис. 08.1). Определить силу F , разрушающую заклёпочное соединение, если усилие среза равно Q . Дано: Q , $l/b = 40$.

РЕШЕНИЕ

В заклёпанном сечении возникают и сила, и момент (рис. 08.1, в). Т.к. деформирование кронштейна не имеет значения, то не имеет значения и его форма в месте крепления слева. Эпюры M_x и Q_y после раскрытия статической неопределённости показаны на рис. 08.1, б. Из уравнений равновесия определяем силы, действующие на заклёпки $R = Q_B/2 = 11F/32$, $S = M_B/b = 6Fl/16b$.

Условие прочности заклёпок:

$$R^2 + S^2 \leq Q^2 \quad \left(\frac{11F}{32} \right)^2 + \left(\frac{6Fl}{16b} \right)^2 \leq Q^2,$$

отсюда $F = 0,0666 Q$.

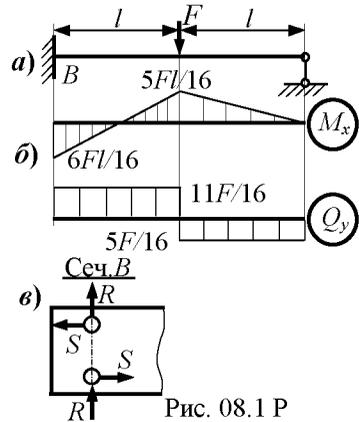


Рис. 08.1 Р

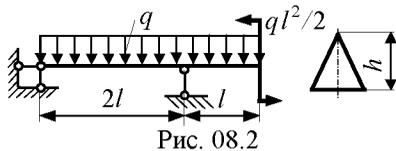


Рис. 08.2

08.2 Продольная деформация ε , измеренная в середине пролёта, составляет $4 \cdot 10^{-4}$. При $l = 20h$ и $h = 20$ мм вычислить прогиб в середине пролёта, считая деформации упругими (рис. 08.2).

РЕШЕНИЕ

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 08.2 Р, а. Прогиб в середине пролёта составляет (рис. 08.2 Р, б)

$$EJ v_K = \frac{1}{2} q l^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} q l^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} - 2 \left(\frac{1}{3} \frac{q l^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{5 q l^4}{24}.$$

Найдём продольную деформацию в середине пролёта

$$\varepsilon_K = \frac{\sigma}{E} = \frac{M_K y_{\text{наиб}}}{EJ} = \frac{ql^2 \frac{2}{3}h}{2EJ} = \frac{ql^2 h}{3EJ}.$$

Отсюда $\frac{ql^2}{EJ} = \frac{3\varepsilon_K}{h}$. Подставляя найденное значение в выражение для v_K и числовые данные, получим

$$\begin{aligned} EJv_K &= \frac{5ql^4}{24EJ} = \frac{5l^2 3\varepsilon_K}{24h} = \\ &= \frac{5 \cdot (20 \cdot 0,02)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{24 \cdot 0,02} = 2,00 \text{ мм}. \end{aligned}$$

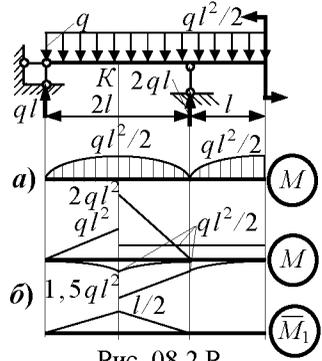


Рис. 08.2 Р

08.3 Балка установлена на упругих опорах (рис. 08.3). Найти линейное перемещение сечения B , полагая $c = \frac{4FJ}{3l^3}$.

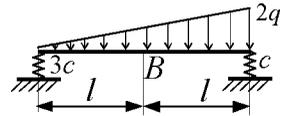


Рис. 08.3

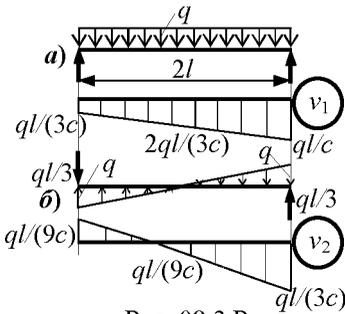


Рис. 08.3 Р

РЕШЕНИЕ

Внешняя нагрузка раскладывается на симметричную (рис. 08.3 Р, а) и косимметричную (рис. 08.3 Р, б) составляющие.

Суммарное перемещение середины жёсткой балки за счёт перемещений концевых сечений

$$v_o = v_1 + v_2 = \frac{2ql}{3c} + \frac{ql}{9c} = \frac{7ql}{9c}.$$

Упругое перемещение середины балки при косимметричном нагружении равно нулю, при симметричном — $f = 5ql^4/24EJ$. Тогда полное перемещение

$$v = v_o + f = \frac{7ql \cdot 3l^3}{9 \cdot 4EJ} + \frac{5ql^4}{24EJ} = \frac{19ql^4}{24EJ}.$$

08.4 Найти перемещение узла B (рис. 08.4). Дано: $F, E, d, l = 100 d$.

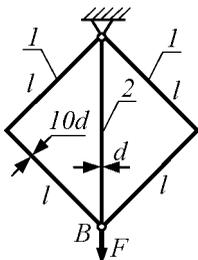


Рис. 08.4

РЕШЕНИЕ

Перемещение узла B равно $w_B = F/k$, $k = 2k_1 + k_2$, где k_1 и k_2 – жёсткости элементов 1 и 2 соответственно.

Определим податливости и жёсткости элементов.

Элемент 1 (рис. 08.4 Р, а):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_1} \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}l}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}l}{2} \right) \cdot 2 = \frac{l^3}{3EJ_1} =$$

$$= \frac{(100d)^3 \cdot 64}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot (10d)^4} = \frac{679}{Ed},$$

$$k_1 = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{Ed}{679} = 14,73 \cdot 10^{-4} Ed.$$

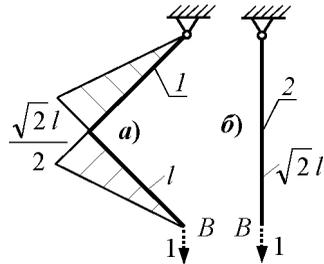


Рис. 08.4 Р

Элемент 2 (рис. 08.4 Р, б):

$$\delta_{22} = \frac{1 \cdot l \cdot \sqrt{2} \cdot 1}{EA_2} = \frac{100 \cdot d \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{E \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{180}{Ed}, \quad k_2 = \frac{1}{\delta_{22}} = \frac{Ed}{180} = 55,54 \cdot 10^{-4} Ed.$$

Теперь $k = 2k_1 + k_2 = (2 \cdot 14,73 + 55,54) \cdot 10^{-4} Ed = 85,0 \cdot 10^{-4} Ed$ и

$$\text{тогда } w_B = \frac{F}{k} = \frac{F}{85 \cdot 10^{-4} Ed} = 117,6 \frac{F}{Ed}.$$

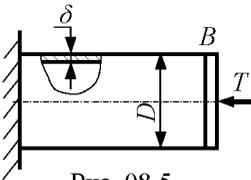


Рис. 08.5

08.5 Тонкостенная оболочка нагружена внутренним давлением p и силой T (рис. 08.5).

При каком значении силы T осевое перемещение сечения B составит $w_B = \frac{5pl(1-2\mu)}{8E}$?

Краевой эффект не учитывать, $D/\delta = 10$.

РЕШЕНИЕ

Из безмоментной теории оболочек $\sigma_m = \frac{pD}{4\delta}$, $\sigma_t = \frac{pD}{2\delta}$.

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m - \mu\sigma_t}{E} = \frac{pD(1-2\mu)}{4\delta E}, \quad \text{где } \sigma_m \text{ и } \sigma_t -$$

меридиональное и окружное напряжения.

Перемещения сечения B :

$$w_B = \varepsilon_m l - \frac{Tl}{EA} = \frac{pD(1-2\mu)l}{4\delta E} - \frac{Tl}{E\pi D\delta},$$

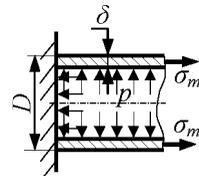


Рис. 08.5 Р

где A – площадь поперечного сечения оболочки.

По условию $w_B = \frac{5pl(1-2\mu)}{8E}$. Здесь возможны два варианта:

движение вправо и движение влево.

Движение вправо

$$\frac{10p(1-2\mu)l}{4E} - \frac{Tl}{0,1E\pi D^2} = \frac{5pl(1-2\mu)}{8E} \Rightarrow T = 0,1875 p\pi D^2 (1-2\mu).$$

Движение влево

$$\frac{10p(1-2\mu)l}{4E} - \frac{Tl}{0,1E\pi D^2} = -\frac{5pl(1-2\mu)}{8E} \Rightarrow T = 0,3125 p\pi D^2 (1-2\mu).$$

08.6 Опора D может перемещаться по вертикали (рис. 08.6, a).

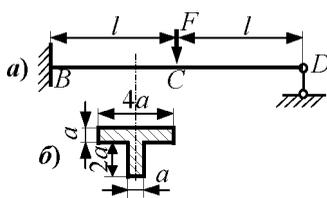


Рис. 08.6

1) На сколько надо переместить опору D после приложения силы F , чтобы обеспечить равенство максимальных нормальных напряжений в сечениях B и C ?

2) Как правильно расположить заданное сечение (рис. 08.6, b), если $\sigma_{тс} = 2\sigma_{тр}$? $\sigma_{тр}$ и $\sigma_{тс}$ – пределы текучести при растяжении и сжатии соответственно.

РЕШЕНИЕ

1) Равенство максимальных нормальных напряжений в сечениях B и C обеспечивается при $|M_B| = |M_C|$. Это возможно в двух вариантах перемещения опоры:

Вариант 1 (рис. 08.6 P, a):

$$Rl = 2Rl - Fl, \text{ откуда } R = F.$$

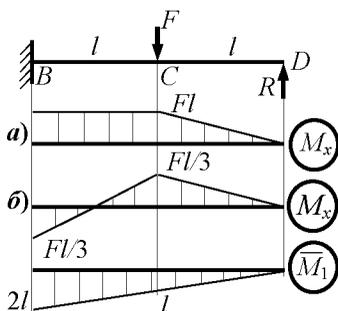


Рис. 08.6 P

Перемножение эюр M_x и \bar{M}_1 даёт,

$$v_D = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} Fl \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l + Fl \cdot l \cdot \frac{3}{2} \cdot l \right) = -\frac{11Fl^3}{6EJ} \text{ (вверх)}.$$

Вариант 2 (рис. 08.6 P, b): $-Rl = 2Rl - Fl$; $R = F/3$ даёт

$$v_D = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \frac{2Fl}{3} \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l + \frac{1}{2} Fl \cdot l \cdot \left(\frac{2}{3}l + l \right) \right) = -\frac{Fl^3}{18EJ} \text{ (вверх)}.$$

2) При $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}}/2$ полку таврового сечения следует располагать в зоне растяжения, поэтому в варианте 1 полка должна быть снизу, в варианте 2 – безразлично.

2.16. Олимпиада 2009 г., г. Улан-Удэ, ВСГУТУ

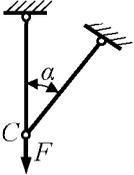


Рис. 09.1

09.1 Система из двух одинаковых стержней нагружена вертикальной силой F (рис. 09.1). Определить полное перемещение точки C . Дано: перемещения малы, площадь стержней A , длина l , модуль упругости E , $\alpha = 30^\circ$.

РЕШЕНИЕ

1-й способ

Нагружен только 1-й стержень (вертикальный): $N_1 = F$, $N_2 = 0$.

Таким образом вертикальное перемещение точки C равно

$$\Delta_C^e = \Delta l_1 = \frac{Fl}{EA}.$$

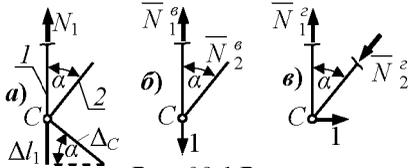


Рис. 09.1 Р

Второй стержень не деформируется и поворачивается относительно точки крепления.

$$\Delta_C^z = \Delta l_1 \cdot \text{ctg} \alpha \text{ и } \Delta_C = \frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ} = \frac{2Fl}{EA}.$$

2-й способ

Найдём горизонтальное и вертикальное перемещения точки C , приложив единичные силы в соответствующем направлении (рис. 09.1 Р, б-в) и вычислив интеграл Мора.

$$N_1^e = 1; \quad N_2^e = 0; \quad N_1^z = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}; \quad N_2^z = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2. \text{ Тогда}$$

$$\Delta_C^e = \frac{Fl}{EA}, \quad \Delta_C^z = \frac{1}{EA} \cdot F \cdot l \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}Fl}{EA}, \quad \Delta_C = \sqrt{(\Delta_C^e)^2 + (\Delta_C^z)^2} = \frac{2Fl}{EA}.$$

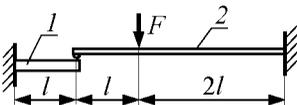


Рис. 09.2

09.2 Стержень 2 с жёсткостью EJ опирается на стержень 1 с жёсткостью kEJ (рис. 09.2). При каком значении k прочность стержня 2 будет максимальна?

РЕШЕНИЕ

Расчётная схема показана на рис. 09.2 Р. Взаимное перемещение точек C равно нулю, то есть

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{kEJ} \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 3l \cdot 3l \cdot \frac{2}{3} \cdot 3l \right) = \\ &= \frac{l^3}{3kEJ} + \frac{9l^3}{EJ} = \frac{l^3(1+27k)}{3kEJ}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 2Fl \cdot 2l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2l + l \right) \right] = -\frac{14Fl^3}{3EJ}.$$

$$\text{Таким образом } X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{14kF}{1+27k}.$$

Понятно, что прочность стержня 2 будет максимальной, если $M_A = M_B$. Поэтому $-(3X_1l - 2Fl) = X_1l$ или $X_1 = F/2$.

$$\text{Тогда } \frac{F}{2} = \frac{14kF}{1+27k}, \text{ откуда следует, что } k = 1.$$

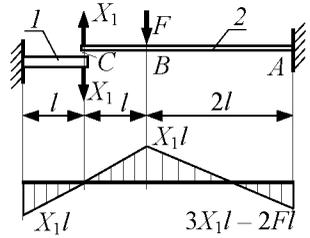


Рис. 09.2 Р

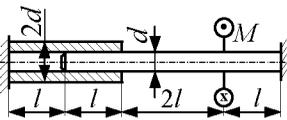


Рис. 09.3

09.3 В трубку с натягом вставлен стержень (рис. 09.3). Считая давление p между трубкой и стержнем постоянным по поверхности контакта, определить минимальное значение момента M , при котором начнётся проскальзывание стержня относительно трубки по всей поверхности контакта. Дано: p , l , d , коэффициент трения f , модули сдвига для трубки и стержня соотносятся как $G_{\text{ст}} = 5 \cdot G_{\text{тр}}$.

РЕШЕНИЕ

В предельном состоянии распределённый момент сил трения имеет интенсивность

$$m = 2\pi \frac{d}{2} f p \frac{d}{2} = \pi \frac{d^2}{2} f p.$$

Рассмотрим нагружение трубки и стержня отдельно (рис. 09.3 Р). В момент начала проскальзывания существует сечение C с координатой z_C , для которого углы поворота стержня и трубки равны. Причём нужно учесть, что углы поворота сечений стержня на остальных уча-

стках контакта должны быть больше соответствующих углов поворота сечений трубки. Если построить эпюры углов поворота для стержня и трубки на участке контакта, то единственно возможная ситуация соотношения углов будет такой, как показано на рис. 09.3 Р. В этом случае координату z_C можно найти из условия

$$\frac{d}{dz} \varphi_{\text{тр}} = \frac{d}{dz} \varphi_{\text{ст}} \quad \text{или} \quad \frac{M_{\text{к}}^{\text{тр}}}{G_{\text{тр}} J_p^{\text{тр}}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{ст}}}{G_{\text{ст}} J_p^{\text{ст}}}.$$

Учитывая, что полярный момент трубки равен $J_p^{\text{тр}} = 15 J_p^{\text{ст}}$, получим $M_{\text{к}}^{\text{тр}} = 3 M_{\text{к}}^{\text{ст}}$ или $ml - m z_C = 3 m z_C$, откуда получим $z_C = l/4$.

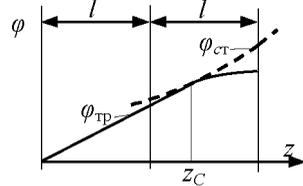


Рис. 09.3 Р

Тогда для углов поворота системы имеем: $\Delta \varphi_{\text{тр}} + \Delta \varphi_{\text{ст}} = 0$,

где $\Delta \varphi_{\text{тр}}$ – угол закручивания трубки на участке до координаты z_C ,

$$\Delta \varphi_{\text{тр}} = \frac{ml^2}{G_{\text{тр}} J_p^{\text{тр}}} + \frac{(ml + ml - m z_C) z_C}{2 G_{\text{тр}} J_p^{\text{тр}}},$$

$\Delta \varphi_{\text{ст}}$ – угол закручивания стержня, начиная с координаты z_C до правой заделки

$$\Delta \varphi_{\text{ст}} = \frac{(ml + m z_C)(l - z_C)}{2 G_{\text{ст}} J_p^{\text{ст}}} + \frac{2ml^2}{G_{\text{ст}} J_p^{\text{ст}}} + \frac{(ml - M)l}{G_{\text{ст}} J_p^{\text{ст}}}.$$

Суммируя углы поворота $-4 m z_C^2 + 2 ml z_C + 23 ml^2 - 6 M l = 0$

и подставляя $z_C = l/4$, получим $M = 31 ml/8$.

Окончательно запишем

$$M = \frac{31}{16} \pi d^2 f p l = 6,09 f p l d^2.$$

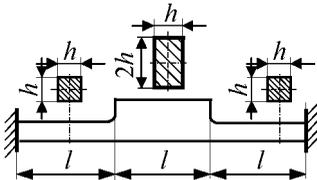


Рис. 09.4

09.4 Ступенчатый стержень закреплён между двумя жёсткими опорами (рис. 09.4). Определить напряжения, возникающие в центральном участке, при равномерном нагреве всего стержня на Δt . Дано: температурный коэффициент линейного расширения стержня α , модуль упругости E .

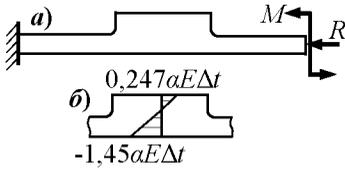


Рис. 09.4 Р

РЕШЕНИЕ

Эквивалентная система показана на рис. 09.4 Р, а.

Изгибающий момент M_x в поперечных сечениях крайних участков равен M , центрального участка – $M - Rh/2$.

Силу R определяем из условия равенства нулю изменения длины стержня $\alpha \cdot 3l \cdot \Delta t = \frac{R \cdot 2l}{E \cdot h^2} + \frac{R \cdot l}{E \cdot 2h^2} = \frac{5Rl}{2Eh^2}$.

В результате получим $R = \frac{6}{5} \alpha \Delta t E h^2$.

Условие равенства нулю угла поворота на правом краю стержня даёт возможность определить соотношение между моментом M и силой R

$$\int_0^{3l} \frac{M_x(z)}{E J_x(z)} dz = 0 \quad \text{или} \quad \frac{M \cdot 2l}{E \cdot J_x^{(1)}} + \frac{M \cdot l}{E \cdot J_x^{(2)}} = \frac{Rh \cdot l}{2 \cdot E \cdot J_x^{(2)}} = 0.$$

Из последнего выражения, учитывая $J_x^{(1)} = \frac{h^4}{12}$ и $J_x^{(2)} = \frac{2h^4}{3}$,

получаем $M = \frac{1}{34} Rh$.

Центральный (2-й) участок стержня находится в состоянии одновременного изгиба и сжатия – распределение напряжений по высоте поперечного сечения линейное. Напряжения в крайних волокнах сечений вычислим по формуле $\sigma = \frac{R}{2h^2} + \frac{M - Rh/2}{h(2h)^2/6}$.

Наибольшее растягивающее напряжение (верхние волокна) составляет $0,247 \alpha E \Delta t$, сжимающее (нижние волокна) – $1,45 \alpha E \Delta t$ (см. рис. 09.4 Р, б).

Следует отметить, что в крайних участках нет областей с растягивающими напряжениями.

09.5 Стержень 2 закреплён на вращающемся с угловой скоростью ω жёстком диске 1 (рис. 09.5). Найти максимальное напряжение в стержне и изменение его длины по сравнению с неподвижным состоянием.

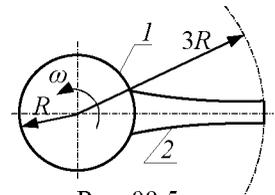


Рис. 09.5

Дано: зависимость площади поперечного сечения от радиуса $A(r) = A_0 R/r$, плотность ρ и модуль упругости E материала стержня.

РЕШЕНИЕ

Расчётная схема показана на рис. 09.5 Р.

Выражение для распределённой инерционной силы $q(r)$ запишем в виде

$$q(r) = \rho A r \omega^2 = \rho A_0 R \omega^2.$$

Нормальную силу в поперечном сечении стержня вычислим следующим образом (рис. 09.5 Р, а)

$$N(r) = \int_r^{3R} q(r) dr = \rho A_0 R \omega^2 (3R - r).$$

Тогда нормальное напряжение в поперечном сечении стержня зависит от радиуса как $\sigma(r) = \frac{N(r)}{A(r)} = \rho r \omega^2 (3R - r)$.

Максимального значения напряжения достигнет при $r = 1,5R$ и будет равно $\sigma_{\max} = 2,25 \rho \omega^2 R^2$.

Изменение длины стержня вычисляется как

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_R^{3R} \sigma(r) dr = \frac{10}{3E} \rho \omega^2 R^3.$$

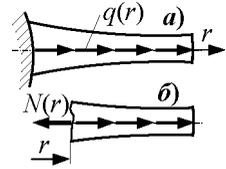


Рис. 09.5 Р

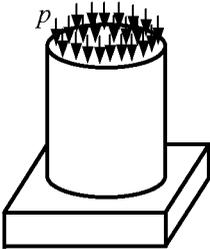


Рис. 09.6

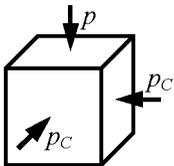


Рис. 09.6 Р

09.6 Сплошной резиновый цилиндр вставлен без зазора в тонкостенную алюминиевую трубку диаметром $D_{cp} = 100$ мм и толщиной $h = 1$ мм (рис. 09.6). Определить возникающие в трубке напряжения и изменение её диаметра при нагружении цилиндра по торцу давлением $p = 2$ МПа (рис. 09.6). Упругие постоянные резины: $E = 40$ МПа, $\mu = 0,45$; алюминия: $E = 7 \cdot 10^4$ МПа. Трением между трубкой, цилиндром и жёстким основанием пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Напряжённое состояние для резинового цилиндра показано на рис. 09.6 Р, где p_c – контактное давление между цилиндром и трубкой. В трубке

будут окружные напряжения $\sigma_t = \frac{p_c D_{cp}}{2h}$, по сравнению с которыми радиальными напряжениями (контактным давлением) можно пренебречь.

Контактное давление найдём из условия $\Delta D_{ц} = \Delta D_{тр}$ или

$$\frac{1}{E_{ц}}(-p_c + \mu p_c + \mu p) D_{ц} = \frac{\sigma_t}{E_{тр}} D_{тр}.$$

Если принять, что $D_{ц} = D_{тр} = D_{ср}$, то контактное давление будет равно

$$p_c = \frac{\mu p}{E_{ц}} \left(\frac{1-\mu}{E_{ц}} + \frac{D_{ср}}{2E_{тр}h} \right)^{-1} = \frac{0,45 \cdot 2}{40} \left(\frac{1-0,45}{40} + \frac{0,1}{2 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 0,001} \right)^{-1} = 1,556 \text{ МПа}.$$

Окружное напряжение в трубке равно $\sigma_t = \frac{1,556 \cdot 0,1}{2 \cdot 0,001} = 77,8 \text{ МПа}$,

изменение диаметра – $\Delta D_{ср} = \frac{\sigma_t}{E_{тр}} D_{ср} = \frac{77,8 \cdot 0,1}{7 \cdot 10^4} = 0,111 \text{ мм}$.

2.17. Олимпиада 2010 г., г. Старый Оскол, СТИ, филиал МИСиС

10.1 Определить величину изгибающего момента M , при котором торцевые сечения прямолинейного упругого стержня (рис. 10.1) сомкнутся, образуя брус малой кривизны с замкнутым гладким контуром. Дано: a, EJ .

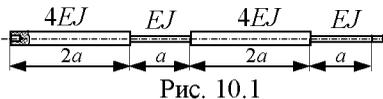


Рис. 10.1

РЕШЕНИЕ

Кольцо, получаемое после смыкания торцевых сечений стержня, показано на рис. 10.1 Р.

Ввиду симметрии рассмотрим четверть кольца. Изгибающий момент во всём стержне равен прикладываемому моменту, поэтому участки с разной жёсткостью будут изгибаться по окружностям с соответствующими радиусами:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{M}{4EJ}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{M}{EJ}.$$

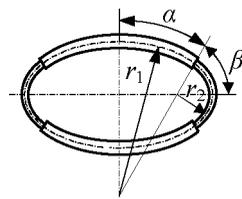


Рис. 10.1 Р

Если ввести углы α и β , то можно установить следующие геометрические соотношения:

$$r_1 \alpha = a, \quad r_2 \beta = a/2.$$

Тогда $\alpha = \frac{M a}{4 E J}, \quad \beta = \frac{M a}{2 E J}.$

Условие смыкания будет записываться как: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$

Расписывая его, получаем: $\frac{3 M a}{4 2 E J} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow M = \frac{2 \pi E J}{3 a}.$

Следует отметить, что $\alpha = \frac{\pi}{6}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}.$

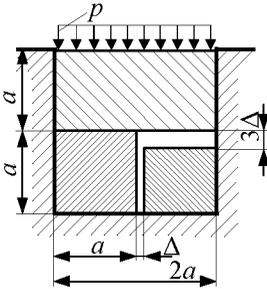


Рис. 10.2

10.2 Два кубика вставлены, как показано на рис. 10.2, в жёлоб и нагружены сверху пуансоном (давление приложено только над кубиками). Принимая жёлоб и пуансон абсолютно гладкими, жёсткими и бесконечными, определить минимальную величину прикладываемого к пуансону давления, при котором будут перекрыты зазоры. Дано: $a, \mu = 0,25, 3\Delta \ll a.$

РЕШЕНИЕ

Определим, какой из зазоров перекроется первым. Для этого найдём величину опускания пуансона v_1 в момент перекрытия зазора величиной Δ (рис. 10.2 P), считая, что второй зазор ещё не перекрылся. Из условия задачи следует, что в поперечном к рисунку направлении деформации упругих тел ничем не ограничены. Поэтому в левой заготовке под действием пуансона будет возникать однородное сжимающее напряжение σ_y^I , а деформации (в абсолютных величинах) в горизонтальном и вертикальном направлениях:

$$\varepsilon_x^I = \frac{\mu}{E} \sigma_y^I, \quad \varepsilon_y^I = \frac{1}{E} \sigma_y^I,$$

при этом $\varepsilon_x \cdot a = \Delta$, тогда

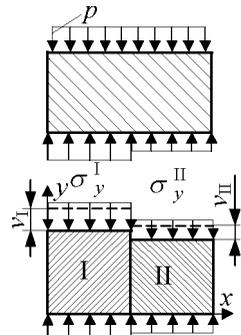


Рис. 10.2 P

$$\sigma_y^I = \frac{\Delta E}{a \mu} \Rightarrow \varepsilon_y^I = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta}{a} \Rightarrow v_I = \varepsilon_y^I \cdot a = \frac{\Delta}{\mu} = 4\Delta.$$

Таким образом, пуансон опустится ниже, чем зазор 3Δ , и правая заготовка тоже «включится в работу». Следовательно, первоначальное предположение неправильное и первым будет перекрыт зазор 3Δ . Причём, когда будет перекрыт этот зазор, другой ещё останется. Дальнейшее вдавливание пуансона приведёт к тому, что в правой заготовке возникнет также однородное сжимающее напряжение σ_y^II , а деформации (в абсолютных величинах) в горизонтальном и вертикальном направлениях:

$$\varepsilon_x^II = \frac{\mu}{E} \sigma_y^II, \quad \varepsilon_y^II = \frac{1}{E} \sigma_y^II.$$

Осадка тел в вертикальном направлении, когда будут перекрыты все зазоры (между заготовками ещё не будет возникать контактное давление) и пуансон опустится на величину v :

$$v_I = v, \quad v_{II} = v - 3\Delta \Rightarrow v_{II} = v_I - 3\Delta.$$

С другой стороны:

$$v_I = \varepsilon_y^I \cdot a = \frac{1}{E} \sigma_y^I \cdot a, \quad v_{II} = \varepsilon_y^II \cdot a = \frac{1}{E} \sigma_y^II \cdot a \Rightarrow$$

$$\frac{1}{E} \sigma_y^II \cdot a = \frac{1}{E} \sigma_y^I \cdot a - 3\Delta \Rightarrow \sigma_y^II = \sigma_y^I - \frac{3\Delta}{a} E.$$

Условие перекрытия зазора Δ :

$$\varepsilon_x^I \cdot a + \varepsilon_x^II \cdot a = \Delta \Rightarrow \frac{\mu}{E} \sigma_y^I \cdot a + \frac{\mu}{E} \sigma_y^II \cdot a = \Delta \Rightarrow \sigma_y^I + \sigma_y^II = \frac{\Delta E}{a \mu}.$$

Тогда

$$\sigma_y^I + \sigma_y^I - \frac{3\Delta}{a} E = \frac{\Delta E}{a \mu} \Rightarrow 2\sigma_y^I = \frac{4\Delta E}{a} + \frac{3\Delta E}{a} = \frac{7\Delta E}{a},$$

$$\sigma_y^I = \frac{7\Delta E}{2a}, \quad \sigma_y^II = \frac{7\Delta E}{2a} - \frac{3\Delta E}{a} = \frac{\Delta E}{a}.$$

Из условия равновесия пуансона: $p \cdot 2a \cdot b = \sigma_y^I \cdot a \cdot b + \sigma_y^II \cdot a \cdot b$, отсюда

$$p = \frac{1}{2} (\sigma_y^I + \sigma_y^II) = \frac{1}{2} \left(\frac{7\Delta E}{2a} + \frac{3\Delta E}{a} \right) = \frac{2\Delta E}{a},$$

при этом:

$$v = v_I = \frac{1}{E} \sigma_y^I \cdot a = \frac{7}{2} \Delta.$$

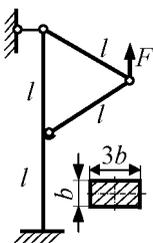


Рис. 10.3

10.3 Для приведённой балочно-стержневой конструкции (рис. 10.3) определить вертикальное перемещение точки приложения силы. Деформации считать малыми. Все стержни имеют одинаковое сечение. Дано: $b, l = 15b, E, F$.

РЕШЕНИЕ

Решим задачу методом Мора-Верещагина.

Рассмотрим систему под действием силы F . Из равновесия шарнира, в котором прикладывается сила, определяются усилия в наклонных стержнях (рис. 10.3 Р, а). Тогда становятся известны усилия, действующие на вертикальный стержень со стороны наклонных стержней.

Вертикальный стержень испытывает растяжение и изгиб, влияние которых ввиду малости деформации можно рассматривать отдельно, а наклонные стержни – только растяжение-сжатие.

Нормальные усилия в стержнях, определяемые из уравнений равновесия, показаны на эпюрах (рис. 10.3 Р, б).

С точки зрения изгиба вертикального стержня он один раз статически неопределим. Раскроем статическую неопределимость, рассмотрев стержень с действующей на него поперечной силой произвольной величины P (рис. 10.3 Р, в-г). Ниже приводится ход раскрытия статической неопределимости при $P = \sqrt{3} F / 2$.

$$EJ \delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l = \frac{8}{3} l^3, \quad EJ \Delta_{1P} = \frac{1}{2} P l \cdot l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot l + l \right) = \frac{5}{6} P l^3,$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{5}{16} P = \frac{5\sqrt{3}}{32} F.$$

Теперь построим эпюры изгибающего момента (рис. 10.3 Р, д).

Для определения перемещения точки приложения силы необходимо вместо силы F приложить единичную силу. Эпюры нормальных сил и изгибающих моментов при единичном нагружении получаются такими же как и на рис. 10.3 Р, б и д при $F = 1$.

Итак, искомое перемещение, обусловленное только:

- осевыми жёсткостями стержневой конструкции:

$$\delta_c^N = \frac{1}{EA} \left[3 \cdot l \cdot F \cdot 1 + l \cdot \frac{F}{2} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{13 Fl}{4 EJ} = 3,25 \frac{Fl}{EA},$$

- изгибной жёсткостью вертикального стержня:

$$\delta_C^M = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2}l \cdot \frac{5\sqrt{3}}{32} Fl \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{32} l + l \cdot \frac{5\sqrt{3}}{32} Fl \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{32} l - \frac{1}{2} \frac{11\sqrt{3}}{32} l \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}l \cdot \frac{11\sqrt{3}}{32} Fl \cdot \left(-\frac{5\sqrt{3}}{32} l + \frac{2}{3} \frac{11\sqrt{3}}{32} l \right) \right] = \\ = \frac{3}{32^2} \frac{Fl^3}{EJ} \left(\frac{25}{3} - \frac{5}{2} + \frac{77}{6} \right) = \frac{112}{32^2 \cdot 2} \frac{Fl^3}{EJ} = 0,0547 \frac{Fl^3}{EJ}.$$

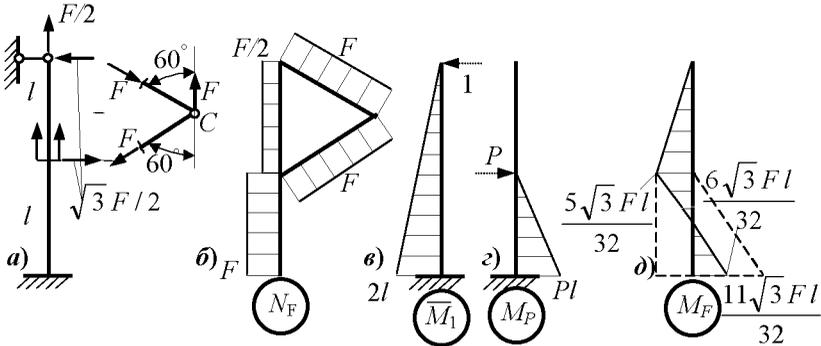


Рис. 10.3 P

Принимая во внимание геометрические характеристики сечений:

$$A = 3b^2, \quad J = \frac{b(3b)^3}{12} = \frac{9b^3}{4},$$

полное вертикальное перемещение:

$$\delta_C = \frac{Fl}{E} \left(3,25 \frac{1}{A} + 0,0547 \frac{l^2}{J} \right) = \frac{Fl}{Eb^2} \left(3,25 \cdot \frac{1}{3} + 0,0547 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{l}{b} \right)^2 \right) = \\ = \frac{Fl}{Eb^2} \left(1,083 + 0,0243 \left(\frac{l}{b} \right)^2 \right) = \frac{15F}{Eb} (1,083 + 5,47) = 98,3 \frac{F}{Eb}.$$

10.4 Вал, состоящий из двух участков разной крутильной жёсткости (рис. 10.4), сочленён с двумя абсолютно жёсткими брусьями. На свободные концы брусьев оказывает давление абсолютно жёсткое коромысло, к которому при-

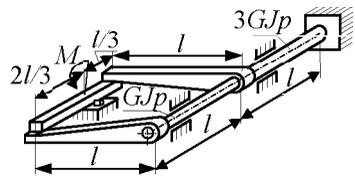


Рис. 10.4

кладывается момент (в вертикальной плоскости, параллельной оси вала). Определить угол поворота коромысла. Деформации и перемещения считать малыми. Дано: l, M, GJ_p .

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим коромысло отдельно от остальной конструкции, заменяя взаимное действие друг на друга реактивными силами R_1, R_2 (рис. 10.4 Р, а):

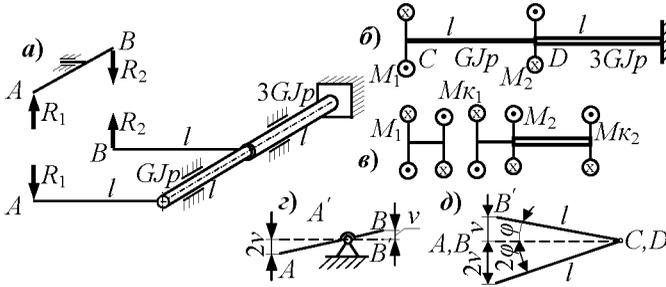


Рис. 10.4 Р

Сумма моментов для коромысла относительно его опоры позволяет связать неизвестные реактивные силы:

$$2R_1 + R_2 = \frac{3M}{l} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{3M}{l} - 2R_1$$

Реактивные силы оказывают на рассматриваемый вал воздействие в виде крутящих моментов:

$$M_1 = R_1 l, \quad M_2 = R_2 l \quad \Rightarrow \quad M_2 = 3M - 2R_1 l = 3M - 2M_1,$$

от которых на каждом участке возникают внутренние крутящие моменты:

$$M_{\kappa_1} = M_1 - M_2 = 3M_1 - 3M, \quad M_{\kappa_2} = M_1.$$

Система один раз статически неопределима. Рассмотрим систему в деформированном состоянии (рис. 10.4 Р, б-в). Запишем два кинематических соотношения:

$$\varphi_c = 2\varphi, \quad \varphi_D = -\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi_c = -2\varphi_D,$$

распишем:

$$\varphi_D = \frac{M_{\kappa_1} l}{3GJ_p}, \quad \varphi_c = \varphi_D + \frac{M_{\kappa_2} l}{GJ_p}, \quad \text{тогда}$$

$$\frac{M_{\kappa_1} l}{3GJ_p} + \frac{M_{\kappa_2} l}{GJ_p} = -2 \frac{M_{\kappa_1} l}{3GJ_p}, \quad \Rightarrow \quad M_{\kappa_1} + 3M_{\kappa_2} = -2M_{\kappa_1}, \quad \Rightarrow$$

$$3(3M_1 - 3M) + 3M_1 = 0, \quad \Rightarrow \quad M_1 = \frac{3}{4}M, \quad \Rightarrow \quad M_2 = 3M - \frac{3}{2}M = \frac{3}{2}M.$$

Следовательно:

$$M_{\kappa_1} = \frac{9}{4}M - 3M = -\frac{3}{4}M, \quad M_{\kappa_2} = \frac{3}{4}M,$$

$$\varphi = -\varphi_D = \frac{Ml}{4GJ_p}, \quad \Rightarrow \quad v = l \cdot \varphi, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{v}{l/3} = \frac{3Ml}{4GJ_p}.$$

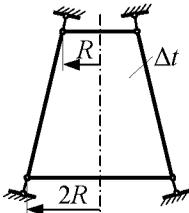


Рис. 10.5

10.5 Тонкостенная шарнирно-закрепленная оболочка в форме усеченного конуса (рис. 10.5) нагревается на Δt . Определить допускаемую степень нагрева. Дано: α , E , R , σ_T , n_T .

РЕШЕНИЕ

Применим метод сечений и рассмотрим равновесие конического элемента оболочки:

$$\sigma_0 \cdot 2\pi R \delta \cdot \cos \alpha = \sigma_m \cdot 2\pi r \delta \cdot \cos \alpha, \quad \sigma_0 = \sigma_m \Big|_{r=R},$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_m(r) = \frac{R}{r} \cdot \sigma_0.$$

Записывая соотношение Лапласа для безмоментной оболочки:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}, \quad \Rightarrow \quad \rho_m = \infty, \quad p = 0, \quad \Rightarrow \quad \sigma_t = 0.$$

Таким образом, напряженное состояние одноосное и согласно закону Гука с учетом температурного расширения:

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} + \alpha \cdot \Delta t = \frac{R\sigma_0}{Er} + \alpha \cdot \Delta t.$$

Из закрепления оболочки следует, что изменение длины образующей цилиндра $\Delta l = 0$, с другой стороны:

$$\Delta l = \int_L \varepsilon_m ds, \quad \text{где } ds = \frac{dr}{\sin \alpha} - \text{длина бесконечно малого элемента}$$

образующей цилиндра, поэтому

$$\Delta l = \frac{1}{\sin \alpha} \int_R^{2R} \left(\frac{R\sigma_0}{Er} + \alpha \cdot \Delta t \right) dr = \frac{R\sigma_0}{E \sin \alpha} (\ln(2R) - \ln R) + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{\sin \alpha} R =$$

$$= \frac{R\sigma_0}{E \sin \alpha} \ln 2 + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{\sin \alpha} R = 0, \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 = -\frac{E\alpha \Delta t}{\ln 2}.$$

Тогда $\sigma_m(r) = -\frac{E\alpha \Delta t}{\ln 2} \cdot \frac{R}{r}$.

Согласно условию прочности:

$$|\sigma_m^{\max}| = |\sigma_0| = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad \Rightarrow \quad [\Delta t] = \frac{\sigma_T \ln 2}{E\alpha \Delta t n_T}.$$

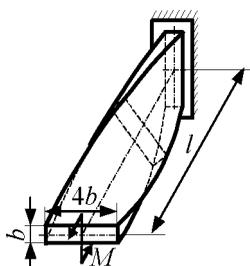


Рис. 10.6

10.6 Определить горизонтальное перемещение торцевого сечения спиралевидного бруса (рис. 10.6), нагруженного изгибающим моментом. Дано: $b, E, M, l \gg b$.

РЕШЕНИЕ

Для определения перемещений воспользуемся интегралом Мора. Вначале получим зависимости изгибающих моментов в произвольном сечении от действия приложенного момента M (рис. 10.6 Р) и единичной горизонтальной силы, приложенной также к торцевому сечению. В произвольном сечении во всех случаях нагружения имеет место кривой изгиб.

$$M_x = M \cos \varphi, \quad M_y = -M \sin \varphi,$$

$$\overline{M}_x^z = z \sin \varphi, \quad \overline{M}_y^z = z \cos \varphi.$$

Запишем интеграл Мора для определения горизонтального смещения торцевого сечения, учитывая что

$$z = \frac{2l}{\pi} \varphi \quad \text{и} \quad dz = \frac{2l}{\pi} d\varphi:$$

$$\Delta_z = \int_0^{\pi/2} \frac{M_x \overline{M}_x^z}{EJ_x} dz + \int_0^{\pi/2} \frac{M_y \overline{M}_y^z}{EJ_y} dz = \frac{4Ml^2}{\pi^2 E} \left(\frac{1}{J_x} - \frac{1}{J_y} \right) \int_0^{\pi/2} \varphi \cdot \sin \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

Отдельно вычислим интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \varphi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \varphi \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \varphi d(\cos 2\varphi) =$$

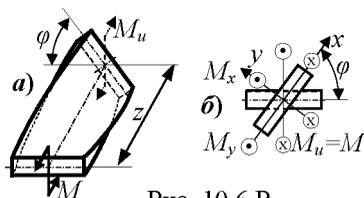


Рис. 10.6 Р

$$= -\frac{1}{4} \left[\varphi \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos 2\varphi d\varphi \right] = -\frac{1}{4} \left[-\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{8}.$$

Таким образом, $\Delta_z = \frac{Ml^2}{2\pi E} \left(\frac{1}{J_x} - \frac{1}{J_y} \right).$

Вычислим:

$$J_x = \frac{4b \cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{3}, \quad J_y = \frac{b \cdot (4b)^3}{12} = \frac{16b^4}{3}.$$

Итак, окончательная величина искомого перемещения:

$$\Delta_z = \frac{3Ml^2}{2\pi Eb^4} \left(1 - \frac{1}{16} \right) = 0,448 \frac{Ml^2}{Eb^4}.$$

2.18. Олимпиада 2011 г., г. Пермь, ПНИПУ

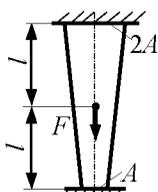


Рис. 11.1

11.1 Дан брус переменного сечения (рис. 11.1), нагруженный в центре силой F . В каком сечении стержня возникает максимальное по модулю нормальное напряжение?

РЕШЕНИЕ

Запишем уравнение равновесия (рис. 11.1 Р) $R_A + R_C = F$ и условие совместности перемещений:

$$\Delta l_{AC} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta l_{AC} = \int_0^l \frac{R_A dz}{EA(z)}, \quad \Delta l_{BC} = \int_l^{2l} \frac{(R_A - F) dz}{EA(z)},$$

$$A(z) = A \left(2 - \frac{z}{2l} \right), \quad \int \frac{dz}{2 - z/2l} = -2l \ln(2 - z/2l).$$

Поэтому из (1) имеем:

$$\frac{R_A}{EA} \left\{ -2l \ln(2 - z/2l) \right\} \Big|_0^l + \frac{R_A - F}{EA} \left\{ -2l \ln(2 - z/2l) \right\} \Big|_l^{2l} = 0,$$

$$R_A \left\{ -2(\ln 1,5 - \ln 2) \right\} + (R_A - F) \left\{ -2(\ln 1 - \ln 1,5) \right\} = 0,$$

$$R_A = \frac{\ln 2/3}{\ln 0,5} F = 0,585 F, \quad R_C = F - R_A = 0,415 F.$$

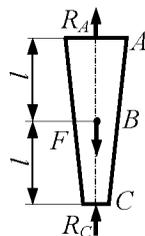


Рис. 11.1 Р

Таким образом, в сечении, принадлежащем участку AB , чуть выше точки приложения силы F : $\sigma^{(1)} = \frac{0,585F}{1,5A} = 0,390 \frac{F}{A}$ (растягивающее напряжение), а в точке C : $\sigma^{(2)} = \frac{0,415F}{A} = 0,415 \frac{F}{A}$ (сжимающее напряжение).

Следовательно, самое большое по модулю напряжение возникает у нижней заделки стержня: $|\sigma|_{\text{наиб}} = 0,415 \frac{F}{A}$.

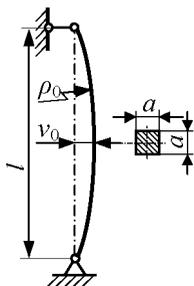


Рис. 11.2

11.2 Имеется стержень с начальным несовершенством, выгнутый по дуге окружности большого радиуса со стрелой прогиба в центре v_0 (рис. 11.2). Как необходимо нагреть стержень, чтобы он стал прямым, если коэффициент температурного расширения равен α ?

РЕШЕНИЕ

Очевидно, стержень необходимо нагревать неравномерно по ширине сечения. Поскольку равномерный нагрев не влияет на кривизну стержня, нужно нагревать стержень следующим образом (рис. 11.2 Р, а): выпуклую часть не нагревать, а вогнутую нагревать на Δt . Можно нагревать и обе поверхности с перепадом температур Δt .

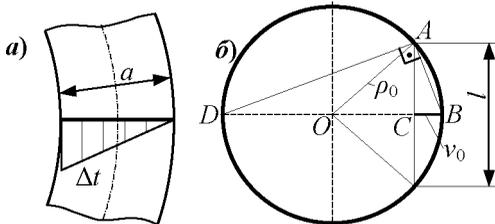


Рис. 11.2 Р

На основании гипотезы плоских сечений деформация выпуклого слоя равна $\varepsilon = a/\rho$, с другой стороны деформация этого слоя равна $\varepsilon = \alpha \Delta t$. Тогда $1/\rho = \alpha \Delta t/a$.

Исходную кривизну можно вычислить, зная длину стержня и стрелу прогиба (рис. 11.2 Р, б): $\triangle ABC$ подобен $\triangle ABD$, откуда получаем:

$$\text{ем: } \frac{v_0}{l/2} = \frac{l/2}{2\rho_0 - v_0}, \text{ где } \rho_0 - \text{исходный радиус кривизны. Так как } v_0$$

намного меньше чем ρ_0 , то $\frac{1}{\rho_0} \approx \frac{8v_0}{l^2}$.

Приравнивая начальную кривизну к температурной, получим $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}$, $\Rightarrow \frac{8\nu_0}{l^2} = \frac{\alpha \Delta t}{a}$, $\Rightarrow \Delta t = \frac{8a\nu_0}{\alpha l^2}$.

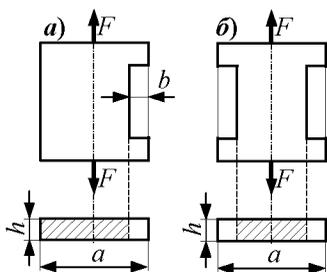


Рис. 11.3

11.3 При каких значениях $\frac{b}{a} = \lambda$ максимальное нормальное напряжение в первом бруске станет больше, чем во втором (рис. 11.3)?

РЕШЕНИЕ

Первый брус подвержен внецентренному растяжению, а второй – центральному растяжению. В ослабленном сечении первого бруса сила приложена не в центре сечения и создаёт изгибающий момент $M_u = Fb/2$.

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)}^{\max} &= \sigma_F + \sigma_u = \frac{F}{A_{(1)}} + \frac{M_u}{W_u} = \frac{F}{(a-b)h} + \frac{Fb/2}{h(a-b)^2/6} = \\ &= \frac{F}{(a-b)h} + \frac{3Fb}{h(a-b)^2} = \frac{F}{ah} \left(\frac{1}{1-\lambda} + \frac{3\lambda}{(1-\lambda)^2} \right). \\ \sigma_{(2)}^{\max} &= \frac{F}{A_{(2)}} = \frac{F}{ah} \left(\frac{1}{1-2\lambda} \right). \end{aligned}$$

Возьмём крайний случай $\sigma_{(1)}^{\max} = \sigma_{(2)}^{\max}$, тогда

$$\frac{1}{1-\lambda} + \frac{3\lambda}{(1-\lambda)^2} = \frac{1}{1-2\lambda}, \Rightarrow$$

$$(1-\lambda) \cdot (1-2\lambda) + 3\lambda \cdot (1-2\lambda) - (1-\lambda)^2 = 0, \Rightarrow$$

$$-5\lambda^2 + 2\lambda = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2/5.$$

Нулевой корень не подходит по физическим соображениям, следовательно, при соотношении

$$\lambda \geq \frac{2}{5} \quad \sigma_{(1)}^{\max} \geq \sigma_{(2)}^{\max}.$$

11.4 Дан двухступенчатый брус, зашцеplённый по концам в заделки (рис. 11.4). Левая часть бруса нагружена давлением p . Найти изменение объёма бруса.

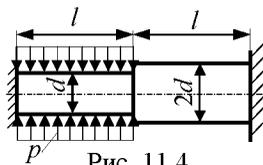


Рис. 11.4

РЕШЕНИЕ

Суммарная длина бруса не изменяется

$$\Delta l_{(1)} + \Delta l_{(2)} = 0, \quad (1)$$

но $\Delta l_{(1)} = \varepsilon_z^{(1)} l$, $\Delta l_{(2)} = \varepsilon_z^{(2)} l$. Так как длины обоих участков одинаковы, то $\varepsilon_z^{(1)} = \varepsilon_z^{(2)}$.

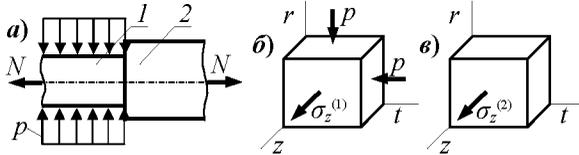


Рис. 11.4 Р

Напряжённое состояние в обеих частях стержня показано на рис.

11.4 Р, б-в. Из обобщённого закона Гука $\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_t + \sigma_r)]$ следует, что

$$\varepsilon_z^{(1)} = \frac{1}{E} [\sigma_z^{(1)} - \mu(-p - p)] = \frac{\sigma_z^{(1)} + 2\mu p}{E}, \quad \varepsilon_z^{(2)} = \frac{\sigma_z^{(2)}}{E}.$$

Учитываем, что напряжения от реакций в заделках равны

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{4N}{\pi d^2}, \quad \sigma_z^{(2)} = \frac{N}{\pi d^2}.$$

Подставляя деформации и напряжения в уравнение (1), получим: $\frac{1}{E} \left(\frac{4N}{\pi d^2} + 2\mu p + \frac{N}{\pi d^2} \right) = 0$. Тогда внутрен-

няя сжимающая сила равна $N = -\frac{2\mu p \pi d^2}{5}$, а напряжения

$$\sigma_z^{(1)} = -\frac{8\mu p}{5}, \quad \sigma_z^{(2)} = -\frac{2\mu p}{5}.$$

Изменение объёма стержня выразим через объёмную деформацию

$$\Delta V = \theta^{(1)} V^{(1)} + \theta^{(2)} V^{(2)} = 0, \quad \theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_z + \sigma_t + \sigma_r), \quad \text{тогда}$$

$$\Delta V = \frac{1-2\mu}{E} \left(-\frac{8\mu p}{5} - 2p \right) \frac{\pi d^2 l}{4} + \frac{1-2\mu}{E} \left(-\frac{2\mu p}{5} \right) \pi d^2 l.$$

$$\text{Окончательно имеем: } \Delta V = -\frac{\pi d^2 p l}{20E} (1-2\mu)(10+16\mu).$$

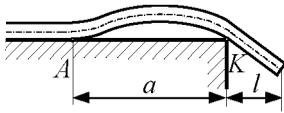


Рис. 11.5

11.5 Бесконечный стержень, имеющий плотность ρ , лежит на абсолютно жёстком столе таким образом, что его конец выдвинут за край стола на участок длиной l (рис. 11.5). Найти координату точки касания стержня со столом a .

РЕШЕНИЕ

Можно считать, что стержень нагружен распределённой нагрузкой q , равной произведению плотности на площадь поперечного сечения (рис. 11.5 Р, а). Очевидно, что в точке A , в которой стержень касается стола $M_x = 0$, так как кривизна стержня равна нулю, а в точке $K - M_x = \frac{ql^2}{2}$. Тогда эпюра моментов качественно выглядит так, как показана на рис. 11.5 Р, б.

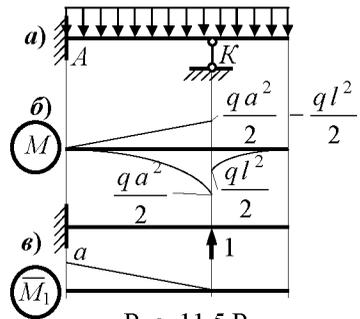


Рис. 11.5 Р

Найдём a из условия равенства нулю перемещения в точке K , при этом будем считать, что в точке A стержень закреплён в заделке (рис. 11.5 Р, в).

$$EJ_x \Delta_K = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{qa^2}{2} - \frac{ql^2}{2} \right) \cdot a \cdot \frac{1}{3} \cdot a - \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{4} \cdot a = 0.$$

Откуда $a = \sqrt{2l}$.

11.6 Тонкостенная трубка эллиптического поперечного сечения ($\delta \ll b$) закручивается моментами M (рис. 11.6). Найти величину равнодействующей касательных напряжений в первой четверти сечения: $x \geq 0, y \geq 0$.

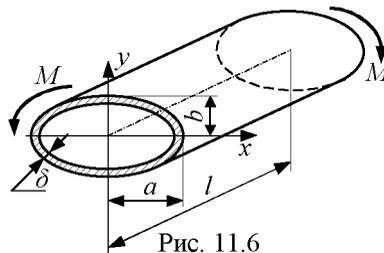


Рис. 11.6

РЕШЕНИЕ

Как известно, касательные напряжения в тонкостенном замкнутом контуре при кручении равны $\tau = \frac{M}{W_{\kappa}} = \frac{M}{2A^* \delta} = \frac{M}{2\pi ab \delta}$.

Равнодействующую силу P можно найти из уравнения равновесия моментов отсечённой части трубки (рис. 11.6 Р, б): $P \cdot l = F \cdot h$, где l – длина трубки, $h = \sqrt{a^2 + b^2}$ – плечо силы $F = \tau \delta l$ (рис. 11.6 Р, а), создаваемой касательными напряжениями τ , действующими в продольных сечениях трубки. Отсюда

$$P = \frac{F h}{l} = \frac{\tau \delta l h}{l} = \tau \delta h.$$

В итоге получаем значение силы P :

$$P = \frac{M \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi a b}.$$

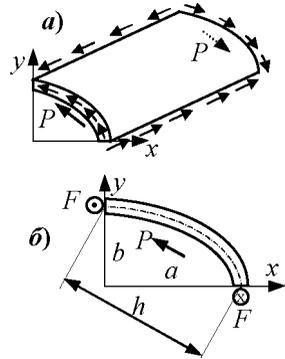


Рис. 11.6 Р

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов: учеб. пособие / В.И. Феодосьев. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во «Наука», 1978. – 400 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.С. Вольмир, Ю.П. Григорьев, А.И. Коданев [и др.]; под ред. А.С. Вольмира. – М.: Изд-во «Наука», 1984. – 408 с.
3. Нестандартные задачи сопротивления материалов. Методы решения / сост.: Ю.В. Глявин, Ю.П. Золотарев, Н.А. Ильичев; Нижегород. политехн. ун-т. – Нижний Новгород: ННПИ, 1991. – 56 с.
4. Сборник конкурсных задач Всероссийского тура студенческой олимпиады по сопротивлению материалов / сост.: Р.Р. Мавлютов, М.Х. Муллагулов; Уфим. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа: УГАТУ, 1993. – 64 с.
5. Несмеянов, А.С. Сопротивление материалов. Нестандартные задачи и подходы к их решению: учеб. пособие / А.С. Несмеянов, О.С. Саадаков; Челяб. гос. техн. ун-т. – Челябинск: ЧГТУ, 1994. – 92 с.
6. Нестандартные задачи по сопротивлению материалов: учеб. пособие: в 2 ч. / сост.: Ю.В. Глявин, Н.А. Ильичев, А.А. Прохоров. – Самара: НПЦ «Авиатор», 1995. – Ч. 1 – 170 с., Ч. 2 – 60 с.
7. Исаченко, В.В. Учебное пособие по решению конкурсных задач по сопротивлению материалов / В.В. Исаченко, М.И. Мартиросов, В.И. Щербаков; под ред. В.В. Исаченко; Моск. инж.-физ. ин-т (ТУ). – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МИФИ, 2006. – 248 с.
8. Логвинов, В.Б. Сборник олимпиадных задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие / В.Б. Логвинов, А.М. Покровский, С.А. Алексеев; Юж.-Рос. гос. техн. ун-т, Моск. гос. техн. ун-т им. Н.Э. Баумана. – Новочеркасск: Изд-во «Лик», 2010. – 148 с.

**ИТОГИ ВСЕРОССИЙСКИХ (МЕЖДУНАРОДНЫХ) ОЛИМПИАД
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ**

№ п/п	Год	Город, вуз	Кол-во участ.	Личный зачёт	Командный зачёт
XIV	1994	Самара, СГАУ	26	1. Терёшин Д., ЧГТУ – 62 2. Лебедев С., МГТУ – 61 3. Сувервергин Е., МГТУ – 56, Демидов С., Марийский ГТИ – 56	1. МГТУ – 117 2. Марийский ГТИ – 97 3. ЧГТУ – 95
XV	1995	Челябинск, ЧГТУ		1. Прасолов А.Н., МГТУ – 58 2. Угринович С.С., МГААТМ – 55 3. Забирохин П.Г, СПбГТУ – 52, Ревин А.В., МИФИ – 52	1. Москва – 165 2. Самара – 165 3. С.-Петербург – 165
XVI	1996	Н. Новгород, НГТУ	24	1. Ветюков Ю.М., СПбГТУ – 71 2. Ведерников П.А., МИФИ – 68 3. Сергиенко А.С., Нижегород. АСА – 64, Поляков Д.В., МГТУ – 64	
XVII	1997	Новочеркасск, НГТУ		1. Руссинковский В., МГТУ – 60 2. Антипов А., МИФИ – 44 3. Соколов В., ЧГТУ – 40	1. Москва – 127 2. Урал. рег. – 102 3. С.-Петербург – 67
XVIII	1998	Н. Новгород, НГАСУ		1. Хлыстин С., Марийский ГТУ – 47 2. Лапухин Ю., МГУПБ – 46 3. Смекалов В., НГАСУ – 45	
XIX	1999	Пермь, ПГТУ	42	1. Серегин С.А., СГУПС – 43 2. Крук С.С., МГТУ – 40 3. Чирак А.В., НГСУ – 38	

Продолжение табл.

№ п/п	Год	Город, вуз	Кол-во участ.	Личный зачёт	Командный зачёт
XX	2000	Ст. Оскол, СТИ МИСиС		1. Китаев В., МГТУ – 52 2. Маслаков В., МГТУ – 51 3. Ефимов А., Марийский ГТИ – 40, Савиных А., ЮУГТУ – 40, Пчелинцев Д., Новосиб. ГТУ – 39, Окунёв А., МИФИ – 38	
XXI	2001	Йошкар-Ола, Марийский ГТИ	45	1. Щербатюк О., Украина – 59 2. Форенталь М., ЮУГТУ – 54, Перевалов В., ЮУГТУ – 52 3. Соколов А., Марийский ГТИ – 50, Шекотуров А., МГТУ – 48	1. Урал – 142 2. Москва – 128
XXII	2002	С.-Петербург, СПбГТУ	64	1. Воронков О.В., НГТУ - 54 2. Иванов М.Ю., РГТУ – 50 3. Надеждин В.С., МГТУ МАМИ – 44	1. В.-Вятский рег. – 128 2. Москва – 116
XXIII	2003	Саранск, МГТУ им. Огарева	35	1. Сосновских В.М., ЮУрГУ – 52 2. Сипиков Е.А., НГТУ – 48 3. Матвеев И.О., СТИ МИСиС – 47	1. В.-Вятский рег. – 112 2. Москва – 111 3. Урал. рег. – 99
XXIV	2004	Дзержинск, фил. НГТУ		1. Лысенков Д., НГТУ – 52 2. Чудинов Д., ПГТУ – 50 3. Анненков Г., МГТУ – 47	1. Урал, В.-Вятский рег. – 131 2. Москва – 108 3. С.-Петербург – 95
XXV	2005	Ст. Оскол, СТИ МИСиС	35	1. Стриженов Е.М., МГТУ – 54 2. Ельцов А.Б., ПГТУ – 51 3. Козьмин Н.А., СГУПС – 42	1. Урал – 120 2. С.-Петербург – 89 3. В.-Вятский рег. – 86

Окончание табл.

№ п/п	Год	Город, вуз	Кол-во участ.	Личный зачёт	Командный зачёт
XXVI	2006	Улан-Удэ, ВСГУТУ	37	1. Киселев И.А., МГТУ – 49 2. Скориков Р.А., ЮУрГУ – 45 3. Алексеев В.А., МГТУ – 41	1. Урал – 104 2. Москва – 102 3. С.-Петербург – 74
XXVII	2007	Новочеркасск, ЮРГТУ (НПИ)	46	1. Вайшвилас М.А., КГТУ – 44 2. Подругин А.Ю., МГТУ – 42 3. Двас Н.Г., СПбГТУ – 40	1. Украина – 104 2. Москва – 102 3. С.-Петербург – 97
XXVIII	2008	Дзержинск, фил. НГТУ	64	1. Антонов А.В., МГТУ – 57 2. Позднышев Е.О., ЧВВАКИУ – 54 Зайцев С.С., СПбГТУ – 54	
XXIX	2009	Улан-Удэ, ВСГУТУ	47	1. Нгуен Чонг Там, МИИТ – 48 2. Кудрявцев О.А., ЮУрГУ – 40 3. Делков А.В., СибГАУ – 39	1. Москва – 116 2. Урал – 102 3. Сибирь – 88
XXX	2010	Ст. Оскол, СТИ МИСиС	46	1. Самойлов С.П., ЮУрГУ – 43, Шакиртов М.М., СГУПС – 43 2. Шириазданов К.В., МГТУ – 41 3. Ершов Д.И., НГАСУ – 39	1. Сибирь – 118 2. Урал – 95 3. Москва – 92
XXXI	2011	Пермь, ПНИПУ	62	1. Башкатов А.А., МГТУ – 52 2. Вербовский Р.И., КГТУ – 51 3. Рябев А.В., МАМИ – 50	1. МГТУ – 133 2. ПНИПУ – 98, КГТУ – 96 3. ЮУрГУ – 82

Учебное издание

*Покровский Алексей Михайлович,
Наумов Андрей Михайлович,
Шадрин Валентин Карпович*

**ЗАДАЧИ ВСЕРОССИЙСКИХ
ОЛИМПИАД ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ
МАТЕРИАЛОВ**

Учебное пособие

Редактор Т. С. Зинкина
Довёрстка Т. С. Зинкина

Подписано в печать 27.08.2012. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 7,25.
Тираж 300 экз. Заказ . Арт. С – 5/2012.

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

