

**Белоконов И.В., Боровков В.А.**

## АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Эффективность решения целевой задачи космическим аппаратом (КА) можно повысить за счет оптимизации использования навигационной информации. В практике космических полетов часто необходимо оценить параметры движения КА в прогнозе на удаленный момент времени, используя накопленную ранее информацию.

Пусть для ряда последовательных моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$  имеются результаты определения параметров движения КА  $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(N)}$  (например, по сигналам спутниковой радионавигационной системы) с заданными ковариационными матрицами погрешностей  $K_q(t_1), \dots, K_q(t_N)$ . Требуется определить наилучшую оценку  $q^*(t^*)$  на время  $t^*$ , где  $t^* > t_N$  при условии использования модели движения заданного вида.

Традиционный подход к решению данной задачи состоит в поиске оценки  $q^*(t_N)$  на момент времени  $t_N$  в рамках метода наименьших квадратов (задача сглаживания) и последующего прогнозирования полученных результатов на момент времени  $t^*$ . В этом случае погрешность результата будет определяться спрогнозированной на момент времени  $t^*$  матрицей погрешностей  $K_q(t^*)$  и ошибками используемой модели движения.

На рис. 1 показаны типовые зависимости среднеквадратичных отклонений параметров движения в орбитальной системе координат (ОСК) в зависимости от  $t^*$  в радиальном  $\sigma_r$  и трансверсальном  $\sigma_t$  направлениях. На рис. 2 показаны типовые зависимости ошибок параметров движения от ошибок используемой модели движения в ОСК в зависимости от длительности прогноза для низкоорбитальных КА.

Результаты моделирования получены для орбиты КА с наклоном орбиты  $i=67^\circ$ , высотами апогея  $H=350$  км и перигея  $h=250$  км, с учетом атмосферы, баллистический коэффициент принимался равным  $S_{бал} = 0.03 \text{ м}^3/\text{кг}\cdot\text{с}^2$ .

При получении оценки  $q^*(t_N)$  использовались 10 векторов параметров движения центра масс (ПДЦМ), полученные от навигационного приемника с интервалом в 2 мин в предположении, что погрешности навигационных определений представляются в виде стационарного "белого шума" с заданной интенсивностью, соответствующей стандартной результативно-

сти работы спутниковой радионавигационной системы (СРНС). Ошибки модели движения представлялись как ошибки модели атмосферы посредством варьирования баллистического коэффициента (до 40 %). Навигационная оценка  $q^*(t_N)$  прогнозировалась на интервале до 5 витков от момента последнего навигационного измерения. Ошибки положения КА, приведенные на рис. 1, получены без учета ошибок модели движения и называются инструментальными. Ошибки, приведенные на рис. 2, не учитывают погрешности навигационных определений по СРНС и называются методическими.

Для снижения методических ошибок можно предложить искать оценку  $q^*(t^*)$  сразу непосредственно в момент времени  $t^*$ . В данной постановке решение для нахождения навигационной оценки представляет собой задачу поиска вектора  $q^*(t^*)$ , при котором функционал  $I$  достигает своего минимального значения,

$$I = \sum_{j=1}^N \left[ q(t_j, q^*) - q^{(j)} \right]^T D_{\sigma}^{-1}(t_j) \left[ q(t_j, q^*) - q^{(j)} \right] \quad (1)$$

где  $q^*$  - искомый шестимерный вектор навигационной оценки на момент времени  $t^*$ ;  $q^{(j)}$  - вектор ПДЦМ, поступивший с навигационного приемника на момент времени  $t_j$ ;  $q(t_j, q^*)$  - вектор навигационной оценки, пересчитанный с момента времени  $t^*$  на момент времени  $t_j$ ;  $D_{\sigma}(t_j)$  - диагональная матрица, элементами которой являются дисперсии погрешностей определения  $q^{(j)}$  с помощью СРНС:  $\sigma_{\Delta q_1}^2, \dots, \sigma_{\Delta q_6}^2$ .

Результаты моделирования показали, что при поиске минимума функционала (1) в прогнозе на большие интервалы  $[t_N, t^*]$  наблюдается неустойчивость получаемых решений, это связано с высокой чувствительностью решения задачи к величинам ошибок навигационных измерений  $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(N)}$  при значительном возрастании интервала  $[t_N, t^*]$  (свыше пяти витков). Мерой неустойчивости являются величины диагональных элементов матриц погрешностей  $K_q(t^*)$  вычисленных на момент времени  $t^*$  (рис. 3), которые приведены в относительных величинах:

$$\varepsilon = \frac{|\sigma_n^2[q^*(t_N)] - \sigma_n^2[q^*(t^*)]|}{\sigma_n^2[q^*(t_N)]}, \text{ где } \sigma_n^2[q^*(t_N)] - \text{сферическая ошибка по положению для оценки } q^*(t_N), \sigma_n^2[q^*(t^*)] - \text{это сферическая ошибка по положению для оценки } q^*(t^*).$$

Кроме свойства устойчивости к ошибкам измерений алгоритм вычисления навигационной оценки должен обладать свойством компенсации ошибок модели движения. Однако, в рамках сглаживающего алгоритма, записанного на базе критерия (1), эта проблема не реша-

ется. Для устранения возникающей неустойчивости вычисления оценки  $\dot{q}^*(t^*)$  предлагается воспользоваться регуляризующим методом решения, например, методом регуляризации А.Н. Тихонова [1]. Этот метод относится к вариационным методам, в котором параметр регуляризации выбирается как согласующая величина с уровнем влияния ошибок приближенных данных [2]. При помощи метода регуляризации предлагается не только повысить устойчивость алгоритма к ошибкам навигационных измерений (рис. 1), но и компенсировать влияние погрешностей параметров модели движения на точность навигации, которое особенно ощутимо для низкоорбитальных КА (рис. 2). Для этого необходимо дополнить функционал  $I$  «стабилизирующим» слагаемым. Предлагается для нахождения навигационной оценки  $\dot{q}^*(t^*)$  использовать функционал  $I(\alpha)$  следующего вида:

$$I(\alpha) = \sum_{j=1}^N \left\{ \left[ q(t_j, q^*) - q^{(j)} \right]^T D_{\sigma}^{-1}(t_j) \left[ q(t_j, q^*) - q^{(j)} \right] + \frac{\alpha}{\sigma_{\Delta q_1}^2(t_j)} \left[ \frac{q_1(q^{(j)}, t^*) - q_1^*}{\sqrt{\Phi_1^T D_{\sigma}(t_j) \Phi_1}} \right]^2 \right\} \quad (2)$$

где  $\alpha$  - весовой коэффициент при стабилизирующем слагаемом ( $\alpha > 0$ );  $q_1(q^{(j)}, t^*)$  - компонента вектора ПДЦМ  $q^{(j)}$ , по которой наблюдается наибольшая неустойчивость (например,  $q_1 = q_z$  - проекция на трансверсаль в ОСК), спрогнозированного на момент времени  $t^*$ ;  $q_1^*$  - первая компонента вектора оценки (проекции на трансверсаль)  $q^*$ ;  $\Phi_1^{(j)} = \Phi_1(t^*, t_j)$  - первая строка матрицы частных производных  $\Phi(t^*, t_j) = \frac{\partial q(q^{(j)}, t^*)}{\partial q^{(j)}}$ , определяющей взаимосвязь между вектором измерений  $q^{(j)}$  и его значениями, пересчитанными на момент времени  $t^*$ . Выражение

$\sqrt{\Phi_1^{(j)} D_{\sigma}(t_j) \Phi_1^{(j)T}}$  определяет дисперсию первой компоненты вектора ошибок измерений  $q^{(j)}$  на момент времени  $t_j$ , спрогнозированную на время  $t^*$ .

Из условия минимума критерия (2) может быть найден уточненный вектор состояния КА, соответствующий принятому компромиссу между двумя слагаемыми функционала (2), определяемому значениями весового коэффициента  $\alpha$ . Из получаемой стандартным образом системы нормальных уравнений находится оптимальная оценка  $q^*$ . Из решения системы нормальных уравнений следует выражение для оценки вектора ПДЦМ  $q^*$  в виде суммы некото-

рого опорного вектора  $q^{0n}$  (первого приближения) и оценки приращения к этому опорному вектору  $\Delta q^*$ :  $q^* = q^{0n} + \Delta q^*$ .

Компоненты  $\Delta q_2^*$ , ...,  $\Delta q_6^*$  вектора  $\Delta q^*$  выражаются через  $\Delta q_1^*$  следующим образом:

$$\|\Delta q_2^* \Delta q_3^* \Delta q_4^* \Delta q_5^* \Delta q_6^*\|^T = A^{-1} (C - D \Delta q_1^*), \quad (3)$$

где  $C, D$  – вектор-столбцы, элементы которых вычисляются по соотношениям

$$C_k = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^6 \Phi_{(k+1)m}(t_j, t^*) \cdot \sigma_{\Delta q_m}^2 \cdot q_m^{(j)*}; \quad D_k = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^6 \Phi_{(k+1)m}(t_j, t^*) \cdot \sigma_{\Delta q_m}^2 \cdot \Phi_{m1}(t_j, t^*);$$

$A$  – матрица размера  $5 \times 5$ , элементы которой определяются по формуле.

$$a_{kn} = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^6 \Phi_{(k+1)m}(t_j, t^*) \cdot \sigma_{\Delta q_m}^2 \cdot \Phi_{m(n+1)}(t_j, t^*).$$

Здесь  $k$  и  $n$  принимают значения от 1 до 5. Выражение для первой компоненты вектора оценки приращения  $\Delta q_1^*$  записывается следующим образом:

$$\Delta q_1^* = \frac{\sum_{j=1}^N (\Phi_{11}(t_j, t^*) D_{\sigma}^{-1}(t_j) \Delta q^{(j)}) + \frac{\alpha}{\sigma_{\Delta q_1}^2(t_j)} \frac{\Delta \tilde{q}_1^{(j)}}{\sqrt{\Phi_{11}^{(j)} D_{\sigma}(t_j) \Phi_{11}^{(j)T}}}}{(\sum_{j=1}^N F_{11}^{(j)}) - M A^{-1} D) + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha}{\sigma_{\Delta q_1}^2(t_j)}}, \quad (4)$$

где  $\Phi_1(t_j, t^*)$  – первая строка матрицы частных производных, определяющей взаимосвязь

между вектором искомой оценки  $q^*$  и его значениями, пересчитанными на момент времени  $t_j$ ;  $\Delta q^{(j)} = q^{(j)} - q(t_j, q^*)$  – шестимерный вектор разности между измеренным СРНС вектором  $q^{(j)}$  на момент времени  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) и спрогнозированным вектором искомой оценки  $q^*$  на момент времени  $t_j$ ;  $M$  – вектор-строка, элементы которой равны

$$m_k = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^5 \Phi_{(n+1)k}(t_j, t^*) \cdot \sigma_{\Delta q_{n+1}}^2 \cdot \Phi_{(n+1)(k+1)}(t_j, t^*), \quad k = \overline{1, 5};$$

$\Delta \tilde{q}_1^{(j)} = q_1(q^{(j)}, t^*) - q_1^*$  – разность между первой компонентой  $q_1(q^{(j)}, t^*)$  спрогнозированного измеренного вектора на момент времени  $t^*$  и первой компонентой вектора оценки  $q_1^*$ ;

$$F_{11}^{(j)} = \sum_{m=1}^6 \Phi_{1m}(t_j, t^*) \cdot \sigma_{\Delta q_m}^2 \cdot \Phi_{m1}(t_j, t^*).$$

На основании полученных выражений (3), (4) разработан алгоритм вычисления навигационной оценки.

Регуляризация А. Н. Тихонова, как отмечается в [2], приводит в данной задаче к получению смещенной навигационной оценки. Степень смещения, оценки будет зависеть от максимального уровня ошибок модели движения и регулируется значением параметра  $\alpha$ . «Направление» смещения определяется «стабилизирующим» слагаемым в функционале (2) в зависимости от изменения параметров модели движения на интервале навигационных измерений  $[t_1, t_N]$ .

Выбором параметра регуляризации  $\alpha$  могут быть достигнуты две цели:

- повышается устойчивость алгоритма вычисления навигационной оценки от влияния случайных ошибок навигационных измерений.
- уменьшается отклонение навигационной оценки относительно истинного вектора положения, которое обусловлено ошибками модели движения

В качестве правила выбора значения параметра регуляризации  $\alpha$  можно использовать принцип невязки, приведенный в [1]. Идея этого принципа в применении к рассматриваемому алгоритму заключается в выборе значения параметра  $\alpha$  из условия равенства двух невязок

- 1) невязки двух векторов навигационных оценок, вычисленных в момент  $t^*$  для выбранного  $\alpha$  и для  $\alpha = 0$  при ошибках исходных данных, равных нулю.
- 2) невязки двух векторов навигационных оценок, вычисленных в момент  $t^*$  для предположенных значений ошибок модели и для ошибок модели, равных нулю

Выполнено статистическое моделирование вычисления навигационной оценки по дифференциальному средневзвешенному МНК и подложному алгоритму с целью выявления эффективности последнего. Для стандартного МНК навигационная оценка  $\hat{q}^*$  вычислена в момент времени последнего навигационного измерения  $t_N$  и прогнозируется затем в момент времени  $t^*$  ее использования. Для регуляризованного алгоритма вычисления навигационной оценки проводилось непосредственно для момента времени  $t^*$  ее использования. Моделирование проводилось для типовых орбит низкоорбитальных КА, для которых характерно сильное влияние погрешности параметров атмосферы на точность определения ПДЦМ. В качестве ошибок модели движения учитывались ошибки атмосферы, и геопотенциала. Выигрыш по точности (сферическая ошибка) наблюдается уже при интервале прогнозирования в 1.5. Движки составляет 1.5°. На более длительных интервалах прогноза эффективность регуляризованного алгоритма повышается. Например, в конце суточного интервала прогноза навигационной оценки регуляризованный алгоритм компенсирует ошибку, вызванную не-

точностью знания параметров модели движения (исключая ошибку обусловленную ошибками навигационных измерений) почти в три раза. При моделировании предполагалось, что параметры модели движения после интервала навигационных измерений  $[t_1, t_N]$ , на интервале  $[t_N, t^*]$  не меняются.

В практике функционирования существующих систем навигационно-баллистического обеспечения полета (наземных и бортовых) используется следующая последовательность в определении параметров движения. С начала с использованием навигационных измерений на значительном интервале (от одних до двух суток) уточняется баллистический коэффициент как параметр, согласующий погрешности используемой модели движения КА. Затем с использованием уточненного баллистического коэффициента проводится статистическая обработка навигационных измерений на конечном интервале (посредством сглаживающего алгоритма МНК) с нахождением оценки на момент времени последнего навигационного измерения.

Для получения навигационной информации в прогнозе используется найденная ранее навигационная оценка и уточненный баллистический коэффициент.

В предлагаемом алгоритме совмещается решение одновременно двух задач: статистического оценивания и прогнозирования. За счет этого совмещения удастся учитывать при помощи регуляризирующих свойств алгоритма параметры модели движения на интервале навигационных измерений с использованием априорной информации об уровне ошибок модели движения на интервале прогнозирования.

Данный алгоритм целесообразно применять для навигационных систем, в которых возможны значительные (свыше 5 витков) перерывы в получении навигационной информации. При этом влияние ошибок модели существенно и превышает в прогнозе на несколько витков уровень ошибок, обусловленных ошибками навигационных измерений. Для эффективного функционирования данного алгоритма необходима навигационная информация высокой точности (которую можно получить от СРНС), т.к. только при этом условии он обладает чувствительностью к изменениям параметров модели движения на интервале навигационных измерений.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач, -М.: Наука, 1974.  
Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения, -М.: Наука, 1978.

