УДК 629.78: 681.51

Сомов Е.И., Бутырин С.А.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ПОВОРОТНОМ МАНЕВРЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Задача аналитического синтеза программы пространственного поворотного маневра (ПМ) космического аппарата (КА) на заданном интервале времени $t \in \mathrm{T_p} \equiv [t_0, t_f]$, $t_f \equiv t_0 + T_p$, состоит в определении явных функций времени: кватерниона ориентации $\Lambda(t)$, связанного с корпусом КА базиса $\mathbf{B}$ относительно известного инерциального базиса $\mathbf{I}$, векторов угловой скорости $\omega(t)$, ускорения $\varepsilon(t)$ и его *полной* производной $\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon^*(t) + \omega(t) \times \varepsilon(t)$. Кватернион $\Lambda = (\lambda_0, \lambda), \lambda = \{\lambda_i\}$, векторы $\omega = \{\omega_i\}$, $\varepsilon = \{\varepsilon_i\} = \dot{\omega}$ и вектор производной ускорения $\dot{\varepsilon} = \{\dot{\varepsilon}_i\} = \varepsilon^* + \omega \times \varepsilon$ должны удовлетворять краевым условиям на левом ($t = t_0$) и правом ($t = t_f$) концах траектории ПМ:

$$\Lambda(t_0) = \Lambda_0; \quad \omega(t_0) = \omega_0 \equiv \mathbf{e}_0^{\omega}\, \omega_0; \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0 \equiv \mathbf{e}_0^{\varepsilon}\, \varepsilon_0, \tag{1}$$

$$\Lambda(t_f) = \Lambda_f; \quad \omega(t_f) = \omega_f \equiv \mathbf{e}_f^{\omega}\, \omega_f; \quad \varepsilon(t_f) = \varepsilon_f \equiv \mathbf{e}_f^{\varepsilon}\, \varepsilon_f; \quad \dot{\varepsilon}(t_f) = \dot{\varepsilon}_f \equiv \mathbf{e}_f^{\varepsilon^*}\, \varepsilon_f^* + \omega_f \times \varepsilon_f. \tag{2}$$

Последнее условие в (2) представляет требования к *гладкости сопряжения* ПМ с последующим участком маршрутного движения (МД) КА.

Подход к решению задачи основывается на *необходимом* и *достаточном* условии разрешимости классической задачи *Дарбу* – *аналитического* определения $\Lambda(t)$ из уравнения $\dot{\Lambda}(t) = \frac{1}{2}\Lambda(t) \circ \omega(t)$ при известных Λ_0 и $\omega(t)$. Введем базис $\mathbf{E}_0$, фиксированный в инерциальном базисе $\mathbf{I}$ кватернионом Λ_0 (1), и подвижные базисы $\mathbf{E}_k$ ($k = 1,\ldots n$), где базис $\mathbf{E}_n$ совпадает со связанным базисом $\mathbf{B}$. *Необходимое* и *достаточное* условия разрешимости задачи *Дарбу* состоят в возможности представления вектора угловой скорости $\omega(t)$ в виде $\omega(t) = \omega_n(t) + \omega_{n-1}(t) + \cdots + \omega_1(t)$, где вектор $\omega_k(t)$ имеет *неизменное* направление в базисе $\mathbf{E}_{k-1}$ и является вектором угловой скорости базиса $\mathbf{E}_k$ относительно базиса $\mathbf{E}_{k-1}$, т.е. в виде

$$\omega(t) = \omega_n^{n-1}(t) + \widetilde{\Lambda}_n(t) \odot (\omega_{n-1}^{n-2}(t) + \widetilde{\Lambda}_{n-1}(t) \odot (\omega_{n-2}^{n-3}(t) + \widetilde{\Lambda}_{n-2}(t) \odot (\cdots + \omega_1^0(t)) \cdots \odot \Lambda_{n-2}(t)) \odot \Lambda_{n-1}(t)) \odot \Lambda_n(t),$$

где *вектор-столбец* $\omega_k^{k-1}(t)$, $k = 1,\ldots,n$ составлен из проекций вектора $\omega_k(t)$ фиксированного направления в базисе $\mathbf{E}_{k-1}$, а $\Lambda_k(t)$ является кватернионом ориентации базиса $\mathbf{E}_k$ относительно базиса $\mathbf{E}_{k-1}$.

Решение поставленной задачи представляется как результат сложения в общем случае шести *одновременно* происходящих элементарных поворотов «вложенных» базисов $\mathbf{E}_k$ вокруг ортов $\mathbf{e}_k$ осей Эйлера, положение которых определяется из краевых условий (1), (2) исходной пространственной задачи. Краевые условия всех 6 элементарных поворотов приведены в таблице 1, где для первых *пяти* элементарных движений требуется обеспечить равенство нулю локальной (собственной) производной ускорения на правом конце траектории

Таблица 1

k	Тип элементарного движения	Краевые условия на левом конце траектории				Краевые условия на правом конце траектории			
		φ	ω	ε	$\dot{\varepsilon}$	φ	ω	ε	$\dot{\varepsilon}$
1	Гашение ускорения ε_0	0	0	ε_0	$\dot{\varepsilon}_1^o$	φ_1^f	0	0	0
2	Гашение скорости ω_0	0	ω_0	0	$\dot{\varepsilon}_2^o$	φ_2^f	0	0	0
3	Позиционный переход	0	0	0	$\dot{\varepsilon}_3^o$	φ_3^f	0	0	0
4	Разгон до скорости ω_f	0	0	0	$\dot{\varepsilon}_4^o$	φ_4^f	ω_f	0	0
5	Разгон до ускорения ε_f	0	0	0	$\dot{\varepsilon}_5^o$	φ_5^f	0	ε_f	0
6	Разгон до конечной производной ускорения $\dot{\varepsilon}_f$	0	0	0	$\dot{\varepsilon}_6^o$	φ_6^f	0	0	$\dot{\varepsilon}_f$

Кватернион $\Lambda(t)$ ориентации КА в базисе $\mathbf{I}$ определяется произведением

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \odot \Lambda_1(t) \odot \Lambda_2(t) \odot \Lambda_3(t) \odot \Lambda_4(t) \odot \Lambda_5(t) \odot \Lambda_6(t). \tag{3}$$

Здесь индексы 1–6 кватернионов $\Lambda_k(t)$ соответствуют их номерам в табл. 1, причем $\Lambda_k(t) = (\cos(\varphi_k(t)/2), \mathbf{e}_k \cdot \sin(\varphi_k(t)/2))$, где $\varphi_k(t)$ и $\mathbf{e}_k$ – текущий угол и орт оси Эйлера k-ого поворота. В силу *неподвижности* орта $\mathbf{e}_k$ в базисе $\mathbf{E}_{k-1}$ имеем $\omega_k(t) = \dot{\varphi}_k(t) \cdot \mathbf{e}_k$; $\varepsilon_k(t) = \ddot{\varphi}_k(t) \cdot \mathbf{e}_k$ и $\dot{\varepsilon}_k(t) = \dddot{\varphi}_k(t) \cdot \mathbf{e}_k$. Вектор угловой скорости $\omega(t)$, векторы углового ускорения $\varepsilon(t)$ и его производной $\dot{\varepsilon}(t)$ при начальных обозначениях векторов $\omega^{(1)}(t) = \omega_1(t)$, $\varepsilon^{(1)}(t) = \varepsilon_1(t)$, $\dot{\varepsilon}^{(1)}(t) = \dot{\varepsilon}_1(t)$ определяются *аналитически* по рекуррентному алгоритму.

для *верхних* индексов $k = 2:6$ последовательно вычисляются

$$\omega_q^k(t) =: \widetilde{\Lambda}_k(t)\circ\omega^{(k-1)}(t)\circ\Lambda_k(t); \quad \omega^{(k)}(t) = \omega_k(t) + \omega_q^k(t);$$
$$\varepsilon_q^k(t) =: \widetilde{\Lambda}_k(t)\circ\varepsilon^{(k-1)}(t)\circ\Lambda_k(t); \quad \varepsilon^{(k)}(t) = \varepsilon_k(t) + \varepsilon_q^k(t) + \omega_q^k(t)\times\omega_k(t);$$
$$\dot{\varepsilon}_q^k(t) =: \widetilde{\Lambda}_k(t)\circ\dot{\varepsilon}^{(k-1)}(t)\circ\Lambda_k(t); \tag{4}$$
$$\dot{\varepsilon}^{(k)}(t) = \dot{\varepsilon}_k(t) + \dot{\varepsilon}_q^k(t) + (2\varepsilon_q^k(t) + \omega_q^k(t)\times\omega_k(t))\times\omega_k(t) + \omega_q^k(t)\times\varepsilon_k(t);$$

в результате искомые векторы получаются как $\omega(t) = \omega^{(6)}(t)$, $\varepsilon(t) = \varepsilon^{(6)}(t)$, $\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}^{(6)}(t)$.

Функции $\varphi_k(t)$, представляющие в аналитическом виде углы элементарных поворотов, выбираются в классе полиномов (сплайнов) соответствующей степени.

Гашение начальных значений угловой скорости и углового ускорения. Для *первых* двух движений выберем функции $\varphi_k(t)$, k=1,2 с краевыми условиями

$$\varphi_k(t_0) = 0;\ \dot{\varphi}_k(t_0) = \omega_0 \equiv |\omega_0|; \quad \ddot{\varphi}_k(t_0) = \varepsilon_0 \equiv |\varepsilon_0|;$$
$$\dot{\varphi}_k(t_f) = 0; \quad \ddot{\varphi}_k(t_f) = 0; \quad \dddot{\varphi}_k(t_f) = 0 \tag{5}$$

в виде сплайнов $\varphi_k(\tau)$ 5-ой степени нормированного времени $\tau = (t - t_0)/T_p \subset [0,1]$:

$$\dddot{\varphi}_k(t) = \dot{\varepsilon}_k(t) = -6(a_0 - a_1\tau + 2a_2\tau^2)/T_p; \quad \ddot{\varphi}_k(t) = \varepsilon_k(t) = \varepsilon_0 - \tau(6a_0 - 3a_1\tau + 4a_2\tau^2);$$
$$\dot{\varphi}_k(t) = \omega_k(t) = \omega_0 + T_p\tau[\varepsilon_0 - \tau(3a_0 - a_1\tau + a_2\tau^2)]; \tag{6}$$
$$\varphi_k(t) = T_p\tau\{\omega_0 + T_p\tau[\varepsilon_0 - \tau(20a_0 - 5a_1\tau + 4a_2\tau^2)/10]/2\},$$

где коэффициенты a_i определяются соотношениями $a_0 = 2\omega_0/T_p + \varepsilon_0$; $a_1 = 8\omega_0/T_p + 3\varepsilon_0$ и $a_2 = 3\omega_0/T_p + \varepsilon_0$. Здесь формально гашение начального углового ускорения получается по соотношениям (6) при $\omega_0 = 0$, а гашение начальной угловой скорости – при $\varepsilon_0 = 0$. На левом конце траектории собственные производные ускорений $\dot{\varepsilon}_k(t_0) \equiv \dot{\varepsilon}_k^o = \dddot{\varphi}_k(t_0) = -6a_0/T_p$, а углы φ_k на правом конце траектории принимают значения $\varphi_k(t_f) \equiv \varphi_k^o = T_p^2[8(\omega_f/T_p) + \varepsilon_f]/20$.

Разгон до заданных значений угловой скорости и ускорения. Для *четвертого* и *пятого* движений функции $\varphi_k(t)$, k = 4,5 должны удовлетворять краевым условиям

$$\varphi_k(t_0) = 0;\ \dot{\varphi}_k(t_0) = 0; \quad \ddot{\varphi}_k(t_0) = 0;$$
$$\dot{\varphi}_k(t_f) = \omega_f \equiv |\omega_f|; \ddot{\varphi}_k(t_f) = \varepsilon_f \equiv |\varepsilon_f|; \quad \dddot{\varphi}_k(t_f) = 0, \tag{7}$$

поэтому $\varphi_k(t)$ также выбираются в виде сплайнов 5-ой степени

$$\dddot{\varphi}_k(t) = \dot{\varepsilon}_k(t) = 6(a_0 + a_1\tau + 2a_2\tau^2)/T_p; \ddot{\varphi}_k(t) = \varepsilon_k(t) = \tau(6a_0 + 3a_1\tau + 4a_2\tau^2);$$
$$\dot{\varphi}_k(t) = \omega_k(t) = T_p\tau^2(3a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2); \varphi_k(t) = T_p^2\tau^3(20a_0 + 5a_1\tau + 4a_2\tau^2)/20, \tag{8}$$

где нормированное время $\tau = (t - t_0)/T_p \subset [0,1]$ и коэффициенты a_i вычисляются по соотношениям $a_0 = 2\omega_f/T_p - \varepsilon_f$; $a_1 = -8\omega_f/T_p + 5\varepsilon_f$; $a_2 = 3\omega_f/T_p - 2\varepsilon_f$. На левом конце траектории собственные производные ускорений $\dot{\varepsilon}_k(t_0) \equiv \dot{\varepsilon}_k^o = \dddot{\varphi}_k(t_0) = 6a_0/T_p$, а углы φ_k принимают конечные значения $\varphi_k(t_f) \equiv \varphi_k^f = T_p^2[12(\omega_f/T_p) - 3\varepsilon_f]/20$, $k = 4,5$.

Разгон до заданного значения локальной производной углового ускорения Для *шестого* элементарного движения функция $\varphi_6(t)$ должна удовлетворять краевым условиям

$$
\begin{aligned}
&\varphi_6(t_0) = 0;\ \dot{\varphi}_6(t_0) = 0; \qquad \ddot{\varphi}_6(t_0) = 0; \\
&\dot{\varphi}_6(t_f) = 0; \qquad \ddot{\varphi}_6(t_f) = 0; \qquad \dddot{\varphi}_6(t_f) = \varepsilon_f^*.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Поэтому она представляется сплайном 5-ой степени нормированного времени $\tau \subset [0,1]$ в виде

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_6^*(t) = b_6[1 - 6\tau + 6\tau^2]/T_p; \qquad \varepsilon_6(t) = b_6\tau[1 - 3\tau + 2\tau^2]; \\
&\omega_6(t) = b_6 T_p \tau^2[1 - 2\tau + \tau^2]/2; \quad \varphi_6(t) = b_6 T_p^2 \tau^3[10 - 15\tau + 6\tau^2]/60\ ,
\end{aligned} \tag{10}
$$

где $b_6 = \varepsilon_f^* T_p$. На левом конце траектории собственная производная ускорения $\varepsilon_6^*(t_0) \equiv \dot{\varepsilon}_6^o = \dddot{\varphi}_6(t_0) = \varepsilon_f^*$, а угол φ_6 поворота относительно орта $\mathbf{e}_6$ принимает конечное значение $\varphi_6(t_f) \equiv \varphi_6^f = T_p^2 b_6/60 = T_p^3 \varepsilon_f^*/60$.

Позиционный переход Функция позиционного перехода $\varphi_3(t)$ по углу поворота в третьем *замыкающем* элементарном движении должна удовлетворять краевым условиям

$$
\varphi_3(t_0) = 0; \quad \dot{\varphi}_3(t_0) = 0; \quad \ddot{\varphi}_3(t_0) = 0; \tag{11}
$$

$$
\varphi_3(t_f) = \varphi_3^f; \quad \dot{\varphi}_3(t_f) = 0; \quad \ddot{\varphi}_3(t_f) = 0; \quad \dddot{\varphi}_3(t_f) = 0. \tag{12}
$$

Здесь угол $\varphi_3^f = \varphi^* = 2\arccos(\lambda_0^*)$ определяется краевыми условиями (1) и (2); λ_0^* – скалярная часть кватерниона $\Lambda^* \equiv (\lambda_0^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \tilde{\Lambda}_2(T_p)\circ\tilde{\Lambda}_1(T_p)\circ\tilde{\Lambda}_0\circ\Lambda_f\circ\tilde{\Lambda}_6(T_p)\circ\tilde{\Lambda}_5(T_p)\circ\tilde{\Lambda}_4(T_p)$ с ортом оси Эйлера $\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\lambda}^*/\sin(\varphi^*/2)$; кватернионы $\Lambda_k(t_f)$, k=1,2,4,5,6 однозначно определяются углами φ_k^f, представленными выше в явном виде, (табл. 1), и ортами

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0^\varepsilon; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_0^\omega; \quad \mathbf{e}_4 = \Lambda_6(T_p)\circ\Lambda_5(T_p)\circ\mathbf{e}_f^\omega\circ\tilde{\Lambda}_5(T_p)\circ\tilde{\Lambda}_6(T_p); \\
&\mathbf{e}_5 = \Lambda_6(T_p)\circ\mathbf{e}_f^\varepsilon\circ\tilde{\Lambda}_6(T_p); \qquad \mathbf{e}_6 = \mathbf{e}_f^{\varepsilon^*} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_f^*/|\boldsymbol{\varepsilon}_f^*|,
\end{aligned} \tag{13}
$$

где в соответствии с последним условием в (2) вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_f^* \equiv \mathbf{e}_f^{\varepsilon^*}\varepsilon_f^* = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_f - \boldsymbol{\omega}_f \times \boldsymbol{\varepsilon}_f$.

На модуль скорости движения *в позиционном переходе* может накладываться ограничение с заданной константой ω^* вида

$$\max_{\tau\in[0,1]} |\dot{\varphi}_3(\tau)| \le \omega^* \tag{14}$$

Рассмотрим сначала случай позиционного перехода *без ограничений* (14). Весь интервал такого перехода в нормированном времени $\tau \in [0,1]$ разделим на 2 участка: первый участок длительностью $\mu < 1$ и второй участок длительностью $1-\mu$. На каждом участке введем свое нормированное время $\tau_1 = (t-t_0)/T_1, T_1 \equiv \mu T_p$ и $\tau_2 = (t-t_0-T_1)/T_2, T_2 \equiv (1-\mu)\cdot T_p$. Угловое движение на первом участке представим полиномом *4-ой степени* $\varphi_3^{(1)}(\tau_1)$ с краевыми условиями (11) на левом конце, а на втором участке – полиномом *5-ой степени* $\varphi_3^{(2)}(\tau_2)$ с краевыми условиями (12) на правом конце. В момент абсолютного времени $t = t_0 + \mu T_p$ для гладкого сопряжения участков с достижением максимальной скорости $\omega_m = 10\varphi^*/[T_p(4+\mu)]$ элементарного движения такого позиционного перехода потребуем выполнение равенств

$$\varphi_3^{(1)}(1) = \varphi_3^{(2)}(0), \quad \dot{\varphi}_3^{(1)}(1) = \dot{\varphi}_3^{(2)}(0) = \omega_m, \quad \ddot{\varphi}_3^{(1)}(1) = \ddot{\varphi}_3^{(2)}(0). \tag{15}$$

Параметр $\mu \in (0,1)$ является свободным, и его можно использовать для перераспределения *интенсивности* ПМ на участках: уменьшение μ увеличивает интенсивность ПМ на первом участке и уменьшает ее на втором. При определении параметра μ из условия равенства *производной ускорения* $\dot{\varepsilon}_3(\tau) = \dddot{\varphi}_3(\tau)$ при сопряжении участков (из условия $\dddot{\varphi}_3^{(1)}(1) = \dddot{\varphi}_3^{(2)}(0)$) получается $\mu = \sqrt{2}-1$ и функции позиционного перехода $\varphi_3^{(1)}(t), \varphi_3^{(2)}(t)$ принимают вид:

участок 1:

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_3^{(1)}(t) = \dddot{\varphi}_3^{(1)}(t) = \dot{\varepsilon}_m(1-2\tau_1); \quad \varepsilon_3^{(1)}(t) = \ddot{\varphi}_3^{(1)}(t) = \varepsilon_m\tau_1(1-\tau_1); \\ &\omega_3^{(1)}(t) = \dot{\varphi}_3^{(1)}(t) = \omega_m\tau_1^2(3-2\tau_1); \quad \varphi_3^{(1)}(t) = \omega_m T_1\tau_1^3(2-\tau_1)/2; \end{aligned} \tag{16}$$

участок 2:

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_3^{(2)}(t) = \dddot{\varphi}_3^{(2)}(t) = 6(-a_0 + a_1\tau_2 - 2a_2\tau_2^2)/T_2; \\ &\varepsilon_3^{(2)}(t) = \ddot{\varphi}_3^{(2)}(t) = -\tau_2(6a_0 - 3a_1\tau_2 + 4a_2\tau_2^2); \\ &\omega_3^{(2)}(t) = \dot{\varphi}_3^{(2)}(t) = \omega_m - T_2\tau_2^2(3a_0 - a_1\tau_2 + a_2\tau_2^2); \\ &\varphi_3^{(2)}(t) = \varphi_{31} - T_2\tau_2(\omega_m - T_2\tau_2^2(20a_0 - 5a_1\tau_2 + 4a_2\tau_2^2)/20). \end{aligned} \tag{17}$$

где $\tau_1 = (t-t_0)/T_1, \tau_2 = (t-t_0-T_1)/T_2$, $\dot{\varepsilon}_m = 6\omega_m/T_1^2$; $\varepsilon_m = 6\omega_m/T_1$; $\varphi_{31} = \omega_m T_1/2$ и коэффициенты $a_0 = 2\omega_m/T_2$; $a_1 = 8\omega_m/T_2$; $a_2 = 3\omega_m/T_2$. На левом конце траектории собственная производная ускорения $\dot{\varepsilon}_3(t_0) \equiv \dot{\varepsilon}_3^0 = \dddot{\varphi}_3(t_0) = 6a_0/T_p$, на правом конце $\dot{\varepsilon}_3(t_f) \equiv \dot{\varepsilon}_3^f = \dddot{\varphi}_3(t_f) = 0$ в соответствии с (12), а угол φ_3 в позиционном переходе принимает в соответствии с (12), а угол φ_3 в позиционном переходе принимает конечное значение $\varphi_3(t_f) = \varphi_3^f = \varphi^* = \omega_m/[(T_1/2) + (2T_2/5)] = 10\,\omega_m/[T_p(4+\mu)]$.

Рассмотрим теперь случай *наличия* условия (14). В этом варианте простейшее решение заключается в том, что между первым и вторым участком «вставляется» участок движения длительностью T_c с постоянной скоростью $\dot\varphi_3(t) = \omega^*$=const («полка»). При этом

$$T_1 = \mu T_p/(1+q\mu);\ T_c = q[1-\mu(1-\mu)(2-q)]T_p/[1+q(1+q\mu(1-\mu))];\ T_2 = (1-\mu)T_p/[1+q(1-\mu)],$$

а параметр $q = q^*$, определяющий длительность T_c «полки», находится из квадратного уравнения $q^2 + bq + c = 0$, где при обозначениях $z = \mu(1-\mu)(10a-1)$ и $a = 10\omega^* T_p \varphi^*$ коэффициенты $b = [(10a-1) - 11a\mu(1-\mu)]/z$ и $c = [(4+\mu)a - 1]/z$. Если значение $q^* \le 0$, то при $\omega_m < \omega^*$ позиционный переход будет без «полки», а при $\omega_m > \omega^*$ требуемое движение неосуществимо. Если же $q^* > 0$, то позиционный переход обязательно имеет «полку» длительностью T_c. Явное описание позиционного перехода на участке 1 (от начала движения до времени проявления «полки») и участке 2 (с момента времени схода с «полки» до завершения движения) по-прежнему дается (14) и (15), но с подстановкой в них ω^* вместо ω_m, нормированного времени на втором участке $\tau_2 = (t-(t_0+T_1+T_c))/T_2 \subset [0,1]$ и значения $\varphi_{3\,1} = \omega^*(T_c + T_1/2)$. На участке «полки» параметры движения определяются формулами

$$\dot\varepsilon_3^{(c)}(t) = \dddot\varphi_3^{(c)}(t) = 0;\quad \varepsilon_3^{(c)}(t) = \ddot\varphi_3^{(c)}(t) = 0;\quad \omega_3^{(c)}(t) = \dot\varphi_3^{(c)}(t) = \omega^*;\quad \varphi_3^{(c)}(t) = T_c\omega^*(1/2+\tau_c),$$

где нормированное время $\tau_c = (t-t_0-T_1)/T_c \subset [0,1]$. При этом угол φ_3 принимает конечное значение

$$\varphi_3(t_f) = \varphi_3^f = \varphi^* = \frac{\omega^*}{(T_1/2) + T_c + (2T_2/5)} = \frac{10\omega^*[1+q(1+q\mu(1-\mu))]}{T_p[4+\mu+q(10-\mu(1-\mu)(11-10q))]}$$