ББК Ч 216(2) 24

**Пиявский С.А.**

# ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ МОЛОДЕЖНЫХ НАУЧНЫХ СООБЩЕСТВ

Научное сообщество никогда не являлось сообществом одиночек. С момента возникновения научного знания его адепты объединялись (не обязательно территориально) во всевозможные кластеры (научные школы, направления и т.п.), внутри которых, прежде всего, происходило ускоренное и наиболее эффективное воспроизводство основного – кадрового – ресурса науки. С течением времени этот процесс породил современную систему образования, достаточно масштабную и дифференцированную. Воспроизводство научных кадров стало одной из функций этой системы, однако и сегодня оно строится во многом по древней и, может быть, единственно возможной схеме живого взаимодействия «мастера» и «подмастерья» - научного руководителя и его ученика - в рамках некоторого кластера (научной школы). Жизнь одного из таких кластеров – научного семинара «Динамика полета» Куйбышевского авиационного института, впоследствии развившегося в Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, проходит на глазах и при участии автора уже в течение сорока лет.

Стремление осмыслить процесс формирования начинающего исследователя в системе «ученик-учитель» привело нас к моделированию развития научных способностей с использования теории оптимального управления [1], [2]. Используя численные методы для решения весьма сложных нелинейных систем дифференциальных уравнений (73-го порядка!), удалось разработать эффективные стратегии развития и реализовать их практически. При этом определенные затруднения вызывал слишком сложный характер моделей, который затруднял использование их результатов на практике. Возникла потребность (на которую неоднократно нам указывали в процессе обсуждения, например, профессор В.А. Комаров) разработать пусть упрощенный, но зато более доступный для осмысления подход.

1. Рассмотрим класс динамических, т.е. развивающихся по времени, систем, состояние которых описывается конечномерным вектором параметров $x = \{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$, изменяющимся за счет использования скалярного ресурса $M$. Скорость изменения каждого параметра зависит

от его текущего значения и возрастает пропорционально направленному на это ресурсу. В процессе функционирования системы ресурс также изменяется. Требуется так распорядиться ресурсом системы, чтобы, затратив его наименьшее количество, перевести систему из одного состояния в другое за заданное время

В достаточно общем виде подобные системы описываются моделью

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i)m_i, \qquad i = 1,\dots,n.$$

$$\frac{dM}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i)m_i, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M,$$

$$m_i \ge 0, \qquad i = 1,\dots,n$$

Критерий оптимальности таких систем отражает требование экономии ресурса и представим в виде

$$I = \int_0^T M dt + c_M M(T), \qquad c_M \ge 0. \tag{2}$$

Предполагая $M > 0$, введем новые переменные

$$\theta_i = \frac{m_i}{M} \tag{3}$$

Тогда (1) примет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i)\theta_i M, \qquad i = 1,\dots,n,$$

$$\frac{dM}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i)\theta_i M, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,$$

$$\theta_i \ge 0, \qquad i = 1,\dots,n$$

Если принять из [3] функцию Кротова $\varphi$ в виде $\varphi = \varphi(x, M)$, то функция $R$ имеет вид

$$R = -M + \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} f_i(x_i) M\theta_i + \varphi_M M \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i)\theta_i = M(-1 + \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\varphi_{x_i} f(x_i) + \varphi_M a_i(x_i)))$$

Выберем функцию $\varphi$ из условия

$$\varphi_{x_i} f(x_i)+\varphi_M a_i(x_i)=1, \qquad i=1,\dots,\ n.$$

Например, пусть $\varphi_M = 0$, то есть

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)+\varphi_M M .$$

Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\frac{1-\varphi_M a_i(x_i)}{f_i(x_i)},$$

откуда с точностью до $n$ постоянных можно интегрированием определить вид функции $\varphi$. При этой функции, очевидно, $R=0$, т.е. не зависит ни от управлений, ни от фазовых координат.

Из условий трансверсальности, т е. минимума по $M(T)$ выражения $\varphi_M M(T)+c_M M(T)$ получаем $\varphi_M=-c_M$. Таким образом, любые управления оказываются абсолютно оптимальными, если они переводят систему за заданное время из заданного начального состояния в заданное конечное. Это дает возможность выбирать наиболее удобные и простые в реализации законы управления подобными системами.

2. Примем, что в задаче (1), (2) выполняются ограничения, естественные для многих практических задач:

$$f_i(x_i)>0, \quad M>0, \quad c_M=0 .$$

Введем переменную $\tau$, равную текущему значению функционала (2), изменяющуюся в пределах от 0 до $\tau_k$, и новые переменные $y_i, \quad i=1,\dots,n$ с помощью уравнений

$$\tau = \int_0^t M dt ,$$

$$y_i = \int_{x_i(0)}^{x_i} \frac{dx_i}{f_i(x_i)} \equiv G_i(x_i), \qquad y_{i0}=0 \tag{5}$$

Тогда, с учетом (3), (2) перейдут в

$$\frac{dy_i}{d\tau}=\theta_i, \qquad i=1,\dots,n,$$

$$\frac{dM}{d\tau}=\sum_{i=1}^{n}a_i(G_i^{-1}(y_i))\theta_i .$$

Здесь $G_i^{-1}(y_i)$ обратная функция $G_i(y_i)$. Она существует, т.к., ввиду $f_i(x_i)>0$, $G_i(y_i)$ строго монотонна. Будем называть $\tau$ и $y_i$ квазивременем и квазикоординатами и обозначим для краткости

$$b_i(y_i)=a_i(G_i^{-1}(y_i))$$

Тогда

$$\frac{dy_i}{d\tau}=\theta_i,\qquad i=1,\dots,n.$$

$$\frac{dM}{d\tau}=\sum_{i=1}^{n}b_i(y_i)\theta_i \tag{6}$$

и

$$T=\int_0^{\tau_k}\frac{1}{M}d\tau \tag{7}$$

Суммируя первые уравнения (6), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{dy_i}{d\tau}=\sum_{i=1}^{n}\theta_i=1, \tag{8}$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n}y_i=\tau$$

Подставляя $\theta_i$ из первых уравнений (6) во второе и интегрируя, получим

$$M=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{y_i}b_i(y_i)dy_i+M_0$$

Обозначим

$$g_i(y_i)=\int_0^{y_i}b_i(y_i)dy_i \tag{10}$$

Тогда задача перевода исходной системы в из начального в конечное состояние за минимальное время с минимальным расходом ресурсов запишется в виде

$$T=\int_0^{\tau_k}\frac{1}{M}d\tau\ \rightarrow\ \min.$$

$$M=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{y_i}g_i(y_i)dy_i+M_0, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \tau, \ 0 \le y_i \le y_{ik}$$

при дополнительном условии

$$\frac{dy_i}{d\tau} \ge 0, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{12}$$

В этой систем управлениями на отрезке $[0, \tau_k]$ являются квазикоординаты $y_i, \ i = 1, \ldots, n$.

Поскольку (11) без учета (12) есть задача оптимизации вырожденного функционала, ее оптимальное решение получается решением при каждом $t \in [0, \tau_k]$ обычной задачи нелинейного программирования

$$M = \sum_{i=1}^{n} g_i(y_i) dy_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \tau, \qquad 0 \le y_i \le y_{ik}. \tag{13}$$

Если на этом решении выполняются условия (12), то по основной лемме [3] оно и задает искомое оптимальное решение. Поэтому решение практических задач целесообразно начинать с решения задачи (13). Если же при этом решении условия (12) не выполняются, следует переходить к приближенному методу, описанному в п.4. Однако и при этом, решив (12), мы получаем для функционала оценку снизу, что может быть полезно для оценки эффективности решений, предложенных эвристическим путем.

3. Заменим условие минимизации функционала (7) близким по смыслу условием максимизации

$$I = \int_0^{\tau_k} Md\tau \to \max. \tag{14}$$

Рассмотрим задачу максимизации (14) при связях

$$\frac{dy_i}{d\tau} \quad \theta_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} g_i(y_i) dy_i + M_0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,$$

$$\theta_i \ge 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Она может быть записана как

$$I^* = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\tau_k} g_i(y_i)d\tau \to \max,$$

$$\frac{dy_i}{d\tau} = \theta_i, \qquad i = 1,\dots, n, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,$$

$$\theta_i \geq 0, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Пусть $[l_0, l_1]$ - некоторый бесконечно малый участок оптимальной траектории длины $\Delta$, на котором с точностью до бесконечно малых высшего порядка можно считать, что оптимальные управления постоянны: $\theta_i = \bar{\theta}_i = const$, $i = 1,\dots,n$.

Разобьем $[l_0, l_1]$ точками $\xi_0,\dots,\xi_n$, $\xi_0 = l_0$, $\xi_n = l_1$ на $n$ подучастков $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ длины $\Delta_j$ и рассмотрим на $[l_0, l_1]$ следующее управление: на каждом из подучастков некоторое из управлений $\theta_i = 1$, причем ни одно управление не используется дважды. Если $i(j)$ - функция, сопоставляющая участку номер ненулевого на нем управления, то

$$\tilde{\theta}_{i(j)} = 1, \qquad j = 1,\dots, n. \tag{16}$$

Выберем длины подучастков из условия $\Delta_i = \bar{\theta}_i \Delta$. Тогда, с точностью до бесконечно малых, траектория $y_i(\tau)$ останется допустимой на $[l_0, l_1]$ при любой функции $i(j)$. Значение же функционала $I^*$ на участке $[l_0, l_1]$ будет зависеть от функции $i(j)$, как это показано на рис 1: оно будет возрастать, если управления, которым отвечают большие значения $g_i(y_i)$, будут реализовываться раньше по квазивремени

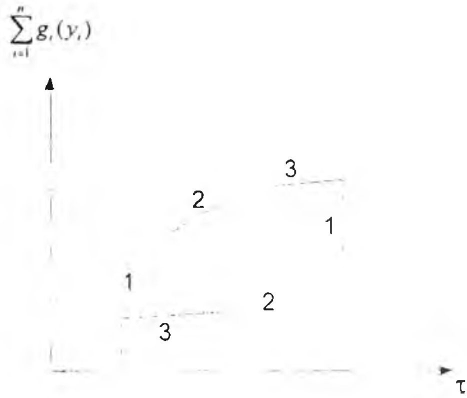


Рис.1

Построенное в соответствии с этим управление $\tilde{\theta}$ будет не хуже $\bar{\theta}$. Таким образом, оптимальное управление в задаче можно считать состоящим из отрезков моноуправления по различным квазикоординатам. На каждом таком отрезке изменяется с максимальной скоростью лишь одна координата, остальные неизменны.

4. Предложим следующую булеву линейную модель решения нелинейной задачи на наиболее экономное по ресурсу и времени преобразование состояния ресурсных систем. Разобьем область требуемого изменения каждой квазикоординаты $y_i$, $i = 1, \ldots, n$ на необходимое (достаточно большое) число частей (блоков) одинаковой длины $l$ по квазивремени или квазикоординатам (поскольку их масштаб измерения одинаков), на которых действует моноуправление $\theta_i = 1$, $\theta_j = 0$ $\forall j \neq i$. Заметим, что любое подобное разбиение порождает допустимую траекторию системы при различном времени перехода. Для каждого блока «вклад», вносимый в функционал (14), состоит из двух частей: приращение функционала непосредственно на отрезке данного блока

$$\Delta I^{*} = \int g(y)\,d\tau$$

и приращение функционала на последующем за отрезком интервале квазивремени вплоть до $\tau_k$ за счет того, что величина $M$ увеличилась на отрезке на приращение ресурса

$$\Delta M = g(y_{+}) - g(y_{-}). \qquad (17)$$

Эта вторая часть приращения функционала равна $\Delta M(\tau_k - \tau_+)$, где $\tau_+$ квазивремя окончания блока, размещенного на оси квазивремени

Построить оптимальное решение - означает разместить на оси квазивремени все блоки вплотную друг к другу, не нарушая их последовательности внутри каждой квазикоординаты, что не мешает перемешивать между собой блоки разных квазикоординат так, чтобы функционал (14) был максимален. Общее число $m$ введенных таким образом блоков равно $m = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n} y_{ik}$.

Перенумеруем все $m$ блоков в произвольном порядке, так что каждый из них получит уникальный номер $s$. Любая допустимая траектория описывается тогда последовательностью $m$ таких номеров, в которой:

1) каждый номер используется ровно один раз,

2) номера, отвечающие блокам одной квазикоординаты, идут в порядке их естественного следования.

Пусть $u_s$ - номер $s$-го блока в такой последовательности. Тогда переменная часть функционала (14), вносимая этим блоком, будет равна $\Delta M_s(m - u_s)l$, а вся максимизируемая часть функционала

$$\bar{I} = l\sum_{s=1}^{m} \Delta M_s(m - u_s) \to \max \qquad (18)$$

Введем булевы переменные

$\xi_{rs} = 1$, если r-й блок стоит на месте s,

$\xi_{rs} = 0$ в противном случае (19)

Наложим на значения переменных очевидные требования, отражающие тот факт, что каждый участок должен быть поставлен на какое-то место в последовательности

$$\sum_{r=1}^{m} \xi_{rs} = 1, \qquad s = 1,\dots,m \qquad (20)$$

и каждое место в последовательности должно быть занято ровно одним участком.

$$\sum_{s=1}^{m} \xi_{rs} = 1, \qquad r = 1,\dots,m. \qquad (21)$$

Тогда номер места, на котором находится $s$-й участок, определится как

$$u_s = \sum_{r=1}^{m} r\xi_{rs}. \qquad (22)$$

Пусть $V(r)$ - номер первого из блоков, которому должен предшествовать блок с номером $r$, а $N$ - множество номеров $r$ блоков, которые в пределах соответствующих квазикоординат должны предшествовать другим блокам. Тогда

$$u_r \le u_{V(r)}, \qquad r \in N \tag{23}$$

Соотношения (18)-(23) задают модель целочисленного линейного программирования, для оптимизации которой имеются стандартные вычислительные программы. Если, используя (22). исключить из нее переменные $u_s$, она превращается в модель булева линейного программирования, что несколько упрощает ее решение.

5 В поставленной выше задаче булева линейного программирования имеются $m^2$ булевых переменных $\xi_{rs}$ и не более $3m$ ограничений типа равенств и неравенств (20)-(23). Наиболее простая программа оптимизации, включенная в состав Microsoft Office, позволяет решать задачи, содержащие до 200 переменных, что соответствует 13-15 участкам. Мощные профессиональные оптимизаторы допускают десятки тысяч переменных, что обеспечивает оптимизацию системы (18), (20)-(23), содержащей порядка сотни участков. Для достаточно сложных реальных задач этого мало. Так, оптимизация образовательного процесса, описанного в [1,2], требует рассмотрения около 400 участков. Для решения таких масштабных задач предлагается использовать следующий эвристический алгоритм, который мы назвали «скользящей полосой» Он состоит из ряда последовательных шагов, на каждом из которых задача булева программирования решается не для всех мест искомой последовательности, а лишь для мест с $p_i$ до $p_i + q - 1$, где $q$ «ширина полосы», $i$ - номер шага. Сама полоса перемещается по искомой последовательности с перекрытием на $d$ мест (рис.2), так что

$$p_i = (q-d)(i-1)+1, \qquad i = 1, \ldots, \qquad d < q \tag{24}$$

Рис 2

На каждом шаге решается задача (18), (20)-(23), модифицированная следующим образом

1) переменные $\xi_{rs}$ с индексами $r < p_i$, $r > p_{i+1}$ переводятся в разряд констант, причем за переменными с индексом $r < p_i$ сохраняются значения, полученные на предыдущих шагах, а переменным с индексом $r > p_{i+1}$ присваиваются нулевые значения и, таким образом, число переменных на каждом шаге равно $m(q+1)$,

2) соотношения (21) заменяются на

$$\sum_{s=1}^{m} \xi_{rs} = 1, \qquad r = p_i, \ldots, p_i - d - 1,$$

поскольку каждый участок в оптимизируемой полосе может быть поставлен лишь на одно место в последовательности. Зато все участки, не находящиеся в оптимизируемой полосе, могут быть поставлены на следующее за ней место. Они и будут поставлены туда оптимизатором, исходя из требования максимизации критерия, и тем самым окажут на критерий одинаковое, т.е. безразличное для полосы, влияние.

Таким образом, решается около $\dfrac{m}{q-d}$ задач булева линейного целочисленного программирования размерности $m(q+1)$ каждая, т.е. процесс решения несколько растягивается во времени, но становится возможным, несмотря на ограниченность используемых программных средств целочисленной оптимизации.

6. Рассмотрим теперь задачу об оптимальной стратегии развития творческих способностей личности в процессе ее исследовательской деятельности. Как показано в [1], [2], творческие способности можно характеризовать степенью владения 9-ю основными функциями исследовательской деятельности:

1) поиск тематики,

2) постановка (осознание) темы исследования,

3) формирование ключевой идеи (плана) решения,

4) выбор, освоение и реализация необходимого обеспечения,

5) реализация отдельных элементов исследования (элементов плана решения),

6) синтез решения (собственно исследование),

7) оформление решения,

8) ввод в научный обиход, защита и сопровождение решения,

9) внутренний критический анализ решения.

Примем их за соответствующие фазовые координаты ресурсной системы. В качестве ресурса выступает время, уделяемое исследовательской деятельности, и в зависимости от ее напряженности оно может также изменяться, что описывается уравнением для ресурса. Как показано в [1], [2], соответствующие уравнения, с некоторыми упрощениями, на начальной стадии развития исследователя, отвечающей первым курсам вуза, имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i (1 - x_i) m_i, \qquad i = 1, \ldots, 9,$$

$$\frac{dM}{dt} = k \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

Значения коэффициентов этой системы и типовые начальные значения элементов квалификации приведены в табл. 1.

Таблица 1

| Элементы квалификации $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_i$ | 0,122 | 0,033 | 0,033 | 0.010 | 0,010 | 0,122 | 0.031 | 0.108 | 0.360 |
| $x_i$ (%) | 0.1 | 0,8 | 0,3 | 2,7 | 10.8 | 0.3 | 2.7 | 0.8 | 0.1 |

Поставим задачу определения оптимальной структуры исследовательской деятельности, при которой за наименьшее время достигается квалификация, равная 80% от максимально возможной по всем компонентам квалификации. Используем для решения алгоритм «скользящей полосы», т.е. задача имеет достаточно большую размерность, при разбиении отрезка изменения каждой квазикоординаты на 4 участка, что примерно отвечает семестрам, в рассмотрении находятся 36 участков.

В табл. 2 представлены рассчитанные для этого граничные значения квазикоординат.

Таблица 2

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_{i0}$ | -57 | -146 | -176 | -358 | -211 | -48 | -109 | -438 | -19 |
| $y_{ik}$ | 11 | 42 | 42 | 139 | 139 | 12 | 42 | 126 | 4 |

Результаты решения при $q = 3$, $d = 2$ показаны в табл. 3. В ней по строкам показано изменение квазивремени, и в каждый момент квазивремени отмечен тот элемент квалификации, на развитие которого направляются максимальные располагаемые усилия. В соответствующей клетке таблицы указывается, какой становится квалификация по этому элементу в результате деятельности на конец данного участка.

Таблица 3

| Элементы квалификации | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Начальная квалификация | 0.1 | 0.8 | 0.3 | 2.7 | 10.8 | 0.3 | 2.7 | 0.8 | 0.1 |
| 1 | | | | | | | | 1 | |
| 2 | | | | | | | | 4 | |
| 3 | | | | 9 | | | | | |
| 4 | | | | | | | | 15 | |
| 5 | | | | 25 | | | | | |
| 6 | | | | 32 | | | | | |
| 7 | | | | | 12 | | | | |
| 8 | | | | | 41 | | | | |
| 9 | | | 2 | | | | | | |
| 10 | | | 10 | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | 80 | |
| 12 | | 4 | | | | | | | |
| 13 | | 15 | | | | | | | |
| 14 | | | | | 2 | | | | |
| 15 | | | 40 | | | | | | |
| 16 | | | | 80 | | | | | |
| 17 | | | | | | | 9 | | |
| 18 | | 45 | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | 25 | | |
| 20 | | | | | 80 | | | | |
| 21 | | | | | | | 54 | | |
| 22 | | | 80 | | | | | | |
| 23 | 1 | | | | | | | | |
| 24 | 6 | | | | | | | | |
| 25 | | 80 | | | | | | | |
| 26 | | | | | | 2 | | | |
| 27 | | | | | | 10 | | | |
| 28 | 33 | | | | | | | | |
| 29 | | | | | | 40 | | | |
| 30 | | | | | | | 80 | | |
| 31 | 80 | | | | | | | | |
| 32 | | | | | | | | | [illegible] |
| 33 | | | | | | | | | [illegible] |
| 34 | | | | | | 80 | | | |
| 35 | | | | | | | | | [illegible] |
| 36 | | | | | | | | | [illegible] |
| Конечная квалификация | 80 | 80 | 80 | 80 | 30 | 80 | 80 | 80 | [illegible] |

Интерпретация этих результатов позволяет рекомендовать последовательное выполнение 4-х исследовательских работ различной методической структуры (отмечены различной штриховкой в правом крайнем столбце табл. 3. В работе №1 усилия концентрируются на изучении литературных источников, выполнении работ по составленному извне (скорее всего, научным руководителем) плану и защита работы. Работа №2 должна быть поставлена таким образом, чтобы побудит молодого исследователя освоить методы формализации и стремиться генерировать новые идеи. В работе №3 к этому добавлястся поиск проблем для решения, и, как ни неожиданно, лишь на этом этапе – оформление работы (впрочем, известно, что качественное оформление результатов, в частности, написание статей, представляет для начинающего исследователя значительные трудности) Наконец, в работе № 4 центр тяжести переносится на сугубо творческие моменты, связанные с постановкой проблем и внутреннее осмысление и самокритику выполненных исследований.

Литература

1 Пиявский С.А. Математическое моделирование управляемого развития научных способностей. Известия РАН Теория и системы управления. №3. 2000. с. 430-437.

2 Пиявский С.А Управляемое развитие научных способностей молодежи. - М. Академия наук о Земле, 2001 - 109 с

3 Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления - М.: Наука, 1973 - 356 с